ÉLECTROMAGNÉTISME
LA CHARGE ÉLECTRIQUE

La charge électrique modélise la « quantité d'électricité » portée par un corps capable de produire et de subir des **forces électriques**.

Les phénomènes électriques se manifestant entre les corps chargés peuvent être de nature **attractive** ou **répulsive**. Il existe donc plusieurs types de charges électriques : les charges positives et les charges négatives.

Les **lois d'interaction de Dufay** précisent le comportement de deux charges électriques lorsque celles-ci sont mises en présence l'une de l'autre :

- Deux charges positives se repoussent mutuellement.
- Deux charges négatives se repoussent mutuellement.
- Une charge positive et une charge négative s'attirent mutuellement.

D'un point de vue microscopique, ce sont les particules élémentaires de la matière qui sont responsables des propriétés électriques observables. Les **électrons** et les **protons** confèrent respectivement la charge électrique négative et positive à la matière.

Toute charge électrique portée par un corps, particulaire ou non, est obligatoirement un multiple d'une valeur caractéristique appelée la **charge élémentaire**, notée e. Cette valeur permet la **quantification de la charge électrique**. L'unité SI de la charge électrique est le Coulomb [C].

$$e = 1{,}602.10^{-19}\ \mathrm{C}$$

La charge électrique ne peut être détruite, ni créée. En revanche, elle peut se transmettre entre les différents corps mis en jeu. Elle obéit à un **principe de conservation** :

La charge électrique de tout système isolé demeure constante.

La force électrique produite ou subit par un corps chargé s'appelle la **force de Coulomb**. Un objet chargé, ou une charge ponctuelle, produisant une force de Coulomb est appelée une **charge source**. Lorsque la force est subie, on parle de **charge cible**.

La force de Coulomb est proportionnelle au produit des charges mises en jeu, et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Le **vecteur unitaire** selon lequel la force est orientée pointe toujours de la source (en O) vers la cible (en M).

$$\vec{F}_{O/M} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

ε_0 : permittivité du vide

Si les charges ne sont ni dans le vide, ni dans l'air, il faut remplacer la permittivité du vide ε_0 par celle du milieu dans lequel elles se trouvent.

$$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{A^2\,s^4\,kg^{-1}\,m^{-3}}$$

La définition mathématique du vecteur unitaire permet d'écrire la force de Coulomb en fonction du vecteur position propre aux charges électriques :

$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} \qquad\qquad \vec{F}_{O/M} = k\,\frac{q_1 q_2}{r^3}\,\overrightarrow{OM}$$

S'il existe plus de deux charges ponctuelles en présence dans un même environnement, la force de Coulomb subit par une charge cible sera la somme vectorielle des forces de Coulomb produites par chacune des charges sources. Il s'agit du **théorème de superposition**.

$$\vec{F}_{totale} = \sum_{i=2}^{N} \vec{F}_{1i}$$

Le **champ électrique** est une traduction de l'influence électrostatique des charges électriques dans l'espace. La force de Coulomb est une conséquence de l'existence du champ électrique.

Mathématiquement, on définit le champ électrique en un point M de l'espace émis par une charge ponctuelle située en O comme le rapport de la force de Coulomb exercée sur une charge cible divisé par la valeur de cette charge :

$$\vec{E}_O(M) = \frac{\vec{F}_{O/M}}{q} = k\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

Le champ électrique est donc une **grandeur vectorielle** qui ne dépend que de la (des) charge(s) source(s). L'unité SI du champ électrique est le Newton par Coulomb [$N.C^{-1}$].

Dès lors que la (les) charge(s) source(s) est (sont) immobile(s) dans l'espace, on parle de **champ électrostatique**. S'il existe plusieurs charges sources, on utilise le théorème de superposition pour déterminer le champ électrique résultant en un point M de l'espace :

$$\vec{E}(M) = k\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_{ri}$$

Par convention de représentation, le champ électrique de toute charge source positive sera représenté comme sortant, il semble émis par la charge source. Le champ électrique de toute charge source négative sera représenté comme entrant, il semble absorbé par la charge source.

Pour visualiser le champ électrique dans l'ensemble de l'espace, on représente les **lignes de champ**. Les propriétés des lignes de champ sont les suivantes :

- Le champ électrique est tangent en tout point d'une ligne de champ.
- Les lignes de champ sont des lignes ouvertes qui ne se croisent jamais.
- Les lignes de champ obéissent à des conditions limites, elles sont toujours radiales à proximité des sources, ainsi qu'à l'infini où il n'existe en théorie aucune autre charge.
- Le module du champ électrique est proportionnel à la densité de lignes de champ.

Dans le cas d'un objet chargé (non ponctuel), le caractère continu de l'objet impose un calcul d'intégrale pour la détermination du champ électrique en un point de l'espace :

$$\overrightarrow{E}(M) = \int \overrightarrow{dE} = \int k\frac{dq}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Le champ électrique $\overrightarrow{dE}$ est appelé le **champ élémentaire**, c'est une portion infinitésimale du champ électrique total émis par l'objet source.

Afin de faciliter les calculs, on introduit régulièrement dans les problèmes la notion de **densité de charge**, en supposant que la charge est uniformément répartie sur l'objet.

L'utilisation de la densité de charge permet d'effectuer l'intégration sur un **paramètre géométrique**, tel qu'un angle ou une longueur, pour lequel il plus aisé de définir des bornes.

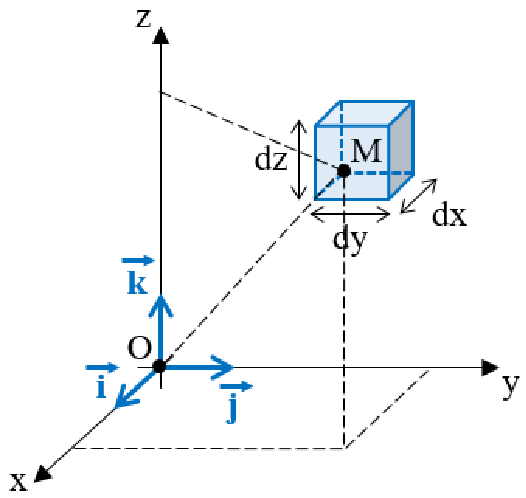
(1D) $\lambda = \frac{Q_{totale}}{L} = \frac{dq}{dl}$ est la densité linéique de charge [$C.m^{-1}$]

(2D) $\sigma = \frac{Q_{totale}}{A} = \frac{dq}{dA}$ est la densité surfacique de charge [$C.m^{-2}$]

(3D) $\rho = \frac{Q_{totale}}{\tau} = \frac{dq}{d\tau}$ est la densité volumique de charge [$C.m^{-3}$]

L : longueur de l'objet unidimensionnel
A : surface de l'objet bidimensionnel
τ : volume de l'objet tridimensionnel

Système de coordonnées cartésiennes



Base orthonormée : $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ou $\left(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z\right)$

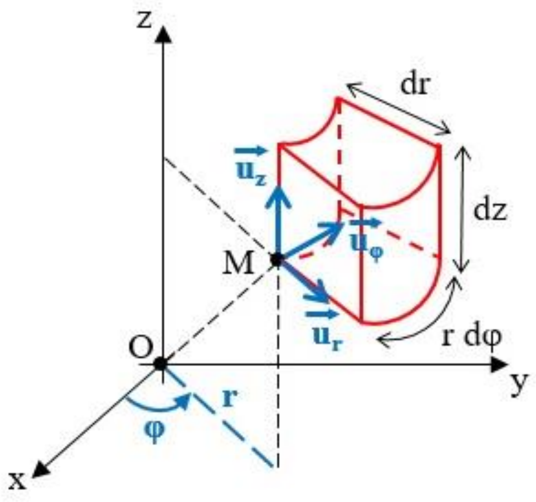
Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

Déplacement élémentaire : $\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

Surfaces élémentaires : $dA = dx\,dy$ ou $dA = dy\,dz$ ou $dA = dx\,dz$

Volume élémentaire : $d\tau = dx\,dy\,dz$

Système de coordonnées cylindriques



Base orthonormée : $\left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$

Déplacement élémentaire : $\vec{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi + dz\,\vec{u}_z$

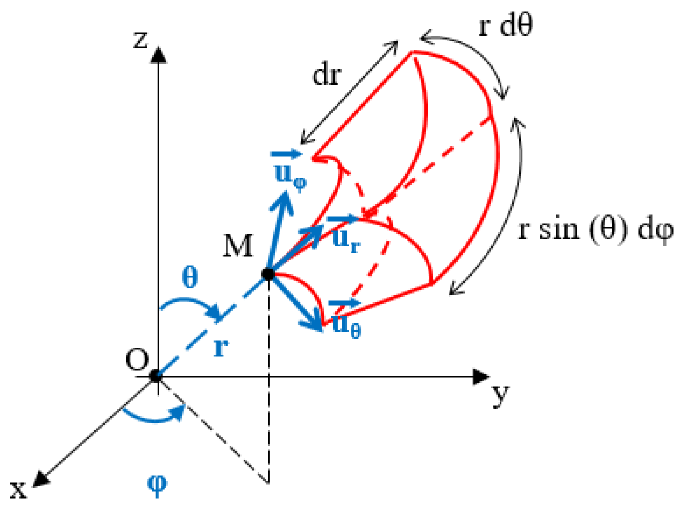
Surfaces élémentaires : $dA = r\,d\varphi\,dz$

ou $dA = r\,dr\,d\varphi$

ou $dA = dr\,dz$

Volume élémentaire : $d\tau = r\,dr\,d\varphi\,dz$

Système de coordonnées sphériques



Base orthonormée : $\left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$

Déplacement élémentaire : $\vec{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$

Surfaces élémentaires : $dA = r^2\sin(\theta)\,d\theta\,d\varphi$

ou $dA = \sin(\theta)\,r\,dr\,d\varphi$

ou $dA = r\,dr\,d\theta$

Volume élémentaire : $d\tau = r^2\,dr\,\sin(\theta)\,d\theta\,d\varphi$

ÉLECTROMAGNÉTISME
LE THÉORÈME DE GAUSS

Le **flux électrique** est une grandeur quantitative qui traduit le nombre de lignes de champ interceptées par une surface donnée. Son unité SI est le Newton mètre carré par Coulomb [$N.m^2.C^{-1}$].

Champ électrique non uniforme : $\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$

Champ électrique uniforme : $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$

Par convention, il est d'usage d'orienter la surface servant à mesurer le flux. On définit alors un vecteur unitaire appelé la **normale à la surface**, noté $\vec{n}$, perpendiculaire à cette dernière et dirigé vers l'extérieur.

$$\vec{A} = A\,\vec{n}$$

Le flux sortant de la surface est compté comme positif, le flux entrant comme négatif.

Enoncé du théorème de Gauss :

Le flux électrique qui traverse toute surface imaginaire fermée ne dépend que de la charge électrique totale comprise à l'intérieur de cette surface.

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Le cercle sur le symbole d'intégration traduit l'utilisation d'une **surface fermée**, c'est-à-dire une enveloppe imaginaire qui vient cerner tout ou partie de l'objet source étudié. Cette surface est appelée **surface de Gauss**.

Q_{int} représente la charge électrique totale présente à l'intérieur de cette surface. S'il existe plusieurs sources indépendantes, Q_{int} devient la somme algébrique de l'ensemble des charges mises en jeu.

Pour une même charge électrique interne, le flux électrique à travers une surface de Gauss ne dépend pas de la forme de cette dernière.

La contribution d'une charge source située à l'extérieur au flux total à travers la surface de Gauss est toujours nulle. En revanche, sa contribution au champ électrique évalué est prise en compte.

Le théorème de Gauss permet de déterminer rapidement le module du champ électrique s'il existe des **propriétés de symétrie** (centre, axe, plan) sur la distribution de charges, donc propres à l'objet étudié.

Les **invariances** (translation, rotation, inversion) sont des propriétés géométriques qui sont liées aux propriétés de symétrie. Elles facilitent le calcul du champ électrique en éliminant la (les) coordonnées dont ne dépend pas celui-ci.

Le **modèle des objets infinis** peut s'appliquer lorsque les dimensions de l'objet considéré sont très grandes devant celles mises en jeu sur le lieu où l'on cherche à déterminer le champ électrique.

<u>Méthode de résolution générale</u> :

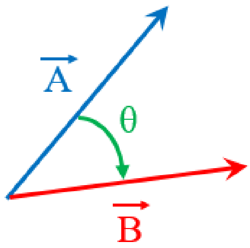
1. Faire un schéma détaillé de la situation étudiée et poser un système de coordonnées adapté.
2. Etudier les symétries mises en jeu, par construction graphique par exemple, et en déduire les invariances du champ électrique.
3. Délimiter les différentes zones d'étude pour le champ électrique, et choisir une surface de Gauss adaptée à chacune de ces zones.
4. Calculer le champ électrique via l'énoncé du théorème de Gauss. Pour évaluer la charge électrique Q_{int}, introduire la notion de densité de charge quand cela est nécessaire.

Pour deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, possédant trois coordonnées dans l'espace d'étude, on peut calculer mathématiquement le **produit scalaire** des deux façons suivantes :

$$\vec{A}\left(x_A, y_A, z_A\right) \qquad \vec{B}\left(x_B, y_B, z_B\right)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\cos(\theta)$$



ÉLECTROMAGNÉTISME
LE POTENTIEL ÉLECTRIQUE

Le **potentiel électrique** est une grandeur scalaire, attribuée à chaque point de l'espace d'étude, selon sa position par rapport aux charges sources. Il s'agit de l'énergie potentielle électrique U_E par quantité de charge q :

$$U_E = q\,V \qquad\qquad [J] = [C] \times [V]$$

Le potentiel, de symbole V, s'exprime en **volt** [V] (unité SI). Il est toujours défini par rapport à un potentiel de référence. La différence de potentiel électrique est appelée la **tension** en électronique.

L'ensemble des points de l'espace ayant le même potentiel électrique forment des **surfaces équipotentielles**. Représentées en deux dimensions, elles constituent des lignes de niveau électrique qui sont perpendiculaires en tout point au champ électrique, donc aux lignes de champ.

La **relation potentiel / champ électrique** est établie par l'intégrale de ligne suivante :

$$\Delta V = V_B - V_A = \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Cette intégrale ne dépend ni de la valeur de la charge cible, ni du trajet emprunté pour aller de A vers B. En conséquence de cette dernière remarque, le champ électrique est dit **conservatif**.

Le long d'une ligne de champ, la variation du potentiel électrique est toujours **linéaire**. Pour une charge positive le potentiel diminuera lorsque l'on longe une ligne champ, pour une charge négative il augmentera.

La **relation champ / potentiel électrique** est établie par la relation suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V) = -\vec{\nabla}\,V$$

Le gradient, noté $\overrightarrow{\text{grad}}$ ou $\vec{\nabla}$, correspond à un **taux de variation du potentiel dans l'espace**. Il est mathématiquement défini, composante par composante, par le calcul d'une dérivée partielle.

Cette relation permet de définir une seconde unité SI pour le champ électrique :

$$[V.m^{-1}] = [N.C^{-1}]$$

Le potentiel électrique à une distance r d'une charge source ponctuelle q s'écrit de façon générale :

$$V = k\frac{q}{r}$$

Lorsqu'il existe plusieurs charges ponctuelles, on applique le théorème de superposition pour déterminer le potentiel résultant en un point M donné : c'est la règle d'**additivité du potentiel électrique**.

$$V(M) = k\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Lorsqu'il s'agit d'une distribution continue de charge (objet chargé), la somme discrète est remplacée par une intégrale :

$$V(M) = k\int \frac{dq}{r}$$

Si l'objet est considéré comme infini, la détermination du potentiel électrique ne peut se faire que par déduction via le calcul du champ électrique. Si l'objet est considéré comme fini, il est nécessaire de poser une condition limite : $V(\infty) = 0$.

Système de coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

Systèmes de coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

Définition cartésienne des coordonnées :
$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$
$$z = z$$

Système de coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

Définition cartésienne des coordonnées :
$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$

ÉLECTROMAGNÉTISME
LES DIPÔLES ÉLECTROSTATIQUES

Un **dipôle électrostatique** est un objet physique constitué de deux charges électriques de même grandeur, mais de signes opposés. On peut distinguer deux types de dipôles :

- Les **dipôles permanents**, qui se comportent à tout instant comme des sources de champ électrique.
- Les **dipôles temporaires**, qui se comportent comme des sources électriques uniquement sous l'influence d'un champ électrique extérieur.

Pour étudier la façon dont un dipôle interagit avec son environnement, on s'intéresse à son **moment dipolaire**. Si on appelle d la distance séparant ces deux charges, on peut définir le moment dipolaire comme suit :

$$\vec{p} = |Q|\vec{d}$$

Le vecteur distance $\vec{d}$ est par convention orienté de la charge négative vers la charge positive. L'unité SI du moment dipolaire est le Coulomb mètre [C.m], mais on utilise souvent une unité CGS plus adapté aux ordres de grandeur mis en jeu, le **Debye** [D] :

$$1\ \mathrm{D} = 3{,}34.10^{-30}\ \mathrm{C.m}$$

A l'échelle microscopique, toute molécule se conformant comme un dipôle électrostatique est appelée une **molécule polaire**. C'est la différence d'**électronégativité** qui leur confère cette propriété.

Une macromolécule présentant à la fois une partie polaire et une partie non polaire est appelée une **molécule amphiphile**.

En un point de son axe ou de sa médiatrice, le module du champ électrique émis par un dipôle électrostatique est proportionnel à son moment dipolaire, et inversement proportionnel au cube de la distance h lorsque celle-ci est suffisamment grande par rapport à la distance d :

Médiatrice du dipôle : $E = k\dfrac{p}{h^3}$ avec h >> d

Axe du dipôle : $E = 2k\dfrac{p}{h^3}$ avec h >> d

Lorsqu'un dipôle électrostatique est soumis à l'influence d'un champ électrique extérieur, celui-ci subit une **force électrique**, dont l'expression de la composante selon l'axe du dipôle est :

$$F_x = p\frac{dE}{dx}$$

Lorsque le champ électrique extérieur est uniforme, cette composante axiale de la force devient nulle.

Si le dipôle électrostatique n'est pas aligné sur les lignes de champ dans lesquelles il est plongé, alors celui-ci subit également un **moment de force** $\vec{\tau}$ qui traduit la tendance du dipôle à s'aligner sur ces dernières.

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

En termes de module, en appelant θ l'angle formé par les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{E}$, le produit vectoriel s'exprime en Newton mètre [N.m], et est formulé comme suit :

$$\tau = p\,E\sin(\theta)$$

Lorsqu'il est soumis à l'action d'un champ électrique extérieur, un dipôle électrostatique possède une **énergie potentielle** U_E telle que :

$$U_E = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p\,E\cos(\theta)$$

ÉLECTROMAGNÉTISME
LES CONDUCTEURS

Un **matériau conducteur** est un milieu permettant une bonne circulation des charges électriques. Son antonyme est un **matériau isolant**.

Les **métaux** sont d'excellents matériaux conducteurs, car ils possèdent une grande concentration d'**électrons libres**, des particules motrices pour la transmission de l'électricité.

Un conducteur est capable d'atteindre l'**équilibre électrostatique** en quelques picosecondes. En présence d'un champ électrique extérieur, cet équilibre statique est atteint grâce à une migration des charges en fonction de leur nature.

<u>Les principales propriétés d'un conducteur, chargé ou non, à l'équilibre électrostatique sont énumérées ci-dessous</u> :

- Le champ électrique résultant à l'intérieur d'un conducteur est nul.
- La charge électrique portée par un conducteur se répartit sur l'ensemble de sa surface.
- Le champ électrique de la surface d'un conducteur est normal à celle-ci en tout point.
- La surface d'un conducteur constitue une surface équipotentielle.

Le **théorème de Coulomb** permet de déterminer simplement la norme du champ électrique résultant à proximité de la surface d'un conducteur à partir du moment où celle-ci est considérée comme plane :

$$E_{\text{local}} = \frac{|\sigma_{\text{locale}}|}{\varepsilon_0}$$

Le **pouvoir des pointes**, ou effet de pointe, est un phénomène physique issu des propriétés géométriques des conducteurs chargés. Cet effet traduit l'intensité grandissante du champ électrique dès lors que le rayon de courbure diminue.

Au sein d'une cavité de tout matériau conducteur, le champ électrique résultant est nul. Cette propriété spécifique est le principe fondateur de la **cage de Faraday**.

ÉLECTROMAGNÉTISME
CHARGE PAR INFLUENCE ET CONDENSATEUR

Tout matériau conducteur peut spontanément, sous l'influence d'un champ électrique extérieur, se chargé électriquement sans contact via une séparation ordonnée des charges libres dans le matériau : c'est le **phénomène d'induction électrique**.

La charge électrique induite sur la surface d'un conducteur est totale. La transmission de la charge avec ou sans contact délivre les mêmes grandeurs.

Un matériau isolant peut également subir le phénomène d'induction électrique. Ce phénomène se manifeste par la création de dipôles électrostatiques induits à l'échelle atomique : il s'agit de la **polarisation**. Tout matériau isolant pouvant subir une polarisation est appelé un **diélectrique**.

En vertu du principe de neutralité, seules les charges électriques apparentes en surface du conducteur participent à l'établissement d'un champ électrique interne. Ces charges sont appelées **charges liées**, et le champ électrique interne est couramment appelé le **champ électrique de polarisation**.

Contrairement au cas des conducteurs, le champ électrique de polarisation ne contrebalance jamais totalement le champ électrique extérieur. Le champ électrique résultant au sein d'un matériau diélectrique n'est pas nul à l'équilibre électrostatique.

Un **condensateur** est un composant permettant le stockage des charges électriques pendant une longue durée. Il est constitué d'un matériau diélectrique, pris en sandwich entre deux armatures métalliques.

Par le phénomène d'induction, chacune des armatures peut porter une charge électrique de même grandeur et de signe opposé. Le matériau diélectrique, dans cette configuration, sera alors polarisé.

La relation entre la charge électrique Q portée par une armature et la différence de potentiel ΔV aux bornes du condensateur met en jeu un facteur de proportionnalité noté C, appelé la **capacité**, dont l'unité SI est le farad [F].

$$Q = C\,\Delta V$$

La capacité d'un condensateur dépend de la nature du matériau diélectrique employé, mais aussi de la géométrie (formes, dimensions, positions) des armatures. C'est une grandeur qui modélise l'énergie électrique emmagasinée au sein du dispositif.

Pour un **condensateur plan**, la capacité s'exprime de la façon suivante :

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \qquad \varepsilon = \kappa\,\varepsilon_0 \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \text{F.m}^{-1}$$

A : aire de l'armature métallique [m²]
d : écartement des armatures [m]
ε : permittivité relative du matériau diélectrique [F.m^{-1}]
ε_0 : permittivité du vide [F.m^{-1}]
κ : constante diélectrique du matériau

L'**énergie potentielle électrique** stockée (en Joule [J]) par un condensateur peut s'exprimer des trois façons suivantes :

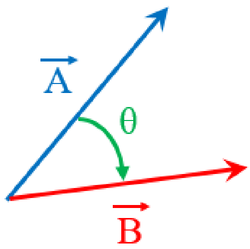
$$U_E = \frac{1}{2} Q\,\Delta V = \frac{1}{2} C\,\Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Pour deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, possédant trois coordonnées dans l'espace d'étude, on peut calculer mathématiquement le **produit vectoriel** des deux façons suivantes :

$$\vec{A}\,(x_A\,, y_A\,, z_A) \qquad \vec{B}\,(x_B\,, y_B\,, z_B)$$

$$\vec{A} \times \vec{B}\,(y_A z_B - y_B z_A\,, z_A x_B - z_B x_A\,, x_A y_B - x_B y_A)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin(\theta)$$



Le **courant électrique** est un flux de charges électriques, c'est-à-dire un écoulement de charges électriques à travers une section donnée, pendant une durée fixée. Son unité SI est l'**Ampère** [A].

Le sens conventionnel du courant est celui de l'écoulement des charges positives. Le courant électrique est donc dans le même sens que le champ électrique qui en est la cause. Cependant, le courant électrique est une grandeur algébrique, alors que le champ électrique est une grandeur vectorielle.

Le courant électrique s'écoule toujours du potentiel le plus élevé vers le potentiel le moins élevé.

L'**intensité moyenne** d'un courant électrique correspond au rapport de la quantité de charges ΔQ sur la durée fixée Δt :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Si le courant est variable dans le temps (non-constant), alors il faut employer la notation différentielle :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Au sein d'un milieu conducteur, l'établissement du courant électrique sous l'action d'une différence de potentiel est un phénomène instantané. Néanmoins, pour un matériau métallique, la **vitesse de dérive** des électrons libres est toujours très faible. C'est l'ensemble du flux de charges électriques qui est responsable de l'instantanéité du phénomène de conduction.

La **densité de courant** est une grandeur vectorielle permettant d'évaluer la notion de courant électrique tout en s'affranchissant des paramètres géométriques :

$$\vec{J} = n\,q\,\vec{v}_d \qquad\qquad J = \frac{I}{A}$$

J : densité de courant [$A.m^{-2}$]
I : courant électrique [A]
A : section traversée [m^2]
n : nombre de particules mobiles de charge q par unité de volume [m^{-3}]
q : charge électrique [C]
v_d : vitesse de dérive [$m.s^{-1}$]

Si la densité de courant $\vec{j}$ n'est pas uniforme à travers la section orientée $\vec{A}$, alors la relation entre le courant électrique et la densité de courant devient :

$$i = \int_A \vec{j} \cdot \overrightarrow{dA}$$

La **loi d'Ohm locale** permet d'établir une relation directe de proportionnalité entre la densité de courant et le champ électrique :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Le coefficient de proportionnalité σ est une grandeur appelée la **conductivité électrique**. Son unité SI est le Siemens par mètre [$S.m^{-1}$].

La **loi d'Ohm électronique** permet d'établir une relation directe de proportionnalité entre la différence de potentiel et le courant électrique :

$$\Delta V = R\,I$$

Le coefficient de proportionnalité R est une grandeur appelée la **résistance électrique**. Son unité SI est l'Ohm [Ω]. Le Siemens n'est autre que l'inverse de l'Ohm [S] = [Ω^{-1}].

La **résistance électrique d'un composant** conducteur peut être exprimée en fonction de la **résistivité du matériau** qui la constitue. Elle peut être perçue comme une aptitude du composant à s'opposer au passage du courant électrique.

$$R = \frac{\rho\,\ell}{A} \qquad\qquad \rho = \frac{1}{\sigma}$$

ρ : résistivité électrique [Ω.m]
ℓ : longueur caractéristique du composant [m]
σ : conductivité électrique [$S.m^{-1}$]

ÉLECTROMAGNÉTISME
CHARGES EN MOUVEMENT

Tout mouvement de charge(s) électrique(s) dans l'espace est responsable d'une **interaction à distance** se traduisant par l'exercice d'une force magnétique.

Les mouvements de charge(s) électrique(s) pouvant être à l'origine de cette interaction sont les objets chargés en déplacement, les courants électriques, ou encore certains matériaux constituant les aimants.

La perturbation magnétique dans l'espace se modélise par le **champ magnétique** $\vec{B}$. C'est une cause de la force magnétique, et non une conséquence. L'unité SI du champ magnétique est le **Tesla** [T]. Une autre unité usuelle est le Gauss [G] :

$$1\,G = 10^{-4}\,T$$

Toute source de champ magnétique est caractérisée par l'existence de **deux pôles indissociables**, le **nord N** et le **sud S**. Les pôles permettent de caractériser la nature de l'interaction magnétique :

- Deux pôles nord ou deux pôles sud se repoussent.
- Un pôle nord et un pôle sud s'attirent mutuellement.

Le champ magnétique peut être représenté dans l'espace via l'utilisation de **lignes de champ magnétique** dont les propriétés sont les suivantes :

- Le champ magnétique est tangent en tout point d'une ligne de champ.
- Les lignes de champ sont des **boucles refermées sur elles-mêmes**.
- Les lignes de champ extérieures à la source sont orientées du pôle nord N vers le pôle sud S.

La **force magnétique** a pour expression générale :

$$\vec{F}_B = q\,\vec{v} \times \vec{B} \qquad\qquad F = |q|\,v\,B\sin(\theta)$$

L'orientation schématique de cette force peut être réalisée simplement en 3D via l'utilisation de la **règle de la main droite** :

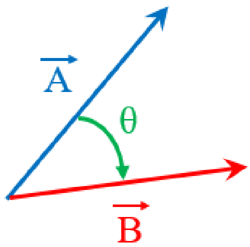
- Plat de la main dans la direction du vecteur vitesse.
- Repli des doigts vers le vecteur champ magnétique.
- Pouce dans la direction de la force, si la charge électrique est positive ; la direction opposée si la charge électrique est négative.

Pour deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, possédant trois coordonnées dans l'espace d'étude, on peut calculer mathématiquement le **produit vectoriel** des deux façons suivantes :

$$\vec{A}\,(x_A\,,y_A\,,z_A) \qquad \vec{B}\,(x_B\,,y_B\,,z_B)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\,(y_A z_B - y_B z_A\,,z_A x_B - z_B x_A\,,x_A y_B - x_B y_A)$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin(\theta)$$



Tout **dipôle magnétique** peut être modélisé par une **boucle de courant**, et ce quelle que soit le forme des spires envisagées.

Le **moment de force** exercée sur une boucle de courant I, constituée de N spires d'aire A, et soumise à un champ magnétique externe $\vec{B}$ vaut :

$$\vec{\tau} = N\,I\,\vec{A} \times \vec{B} \qquad\qquad \tau = N\,I\,A\,B\sin(\theta)$$

Pour diriger la surface, on utilise un vecteur normal $\vec{n}$ qui s'oriente par l'intermédiaire de la règle de la main droite :

- Enrouler le plat de la main droite dans le sens du courant électrique.
- Le pouce redresser indique le sens du vecteur normal.

Par définition, le **moment dipolaire magnétique** est une grandeur vectorielle servant à mesurer l'intensité magnétique d'un dipôle. On peut s'en servir pour jauger aussi bien l'effet qu'il apporte ou qu'il reçoit dans un environnement magnétique donné. Son unité dans le système SI est [A.m²].

$$\vec{\mu} = N\,I\,\vec{A}$$

L'**aimantation** caractérise l'état et le comportement magnétique d'un volume matériel dans l'espace. Son unité dans le système SI est [$A.m^{-1}$].

$$\overrightarrow{M} = \frac{d\vec{\mu}}{d\tau}$$

Un dipôle magnétique cherche à minimiser son **énergie potentielle** magnétique U_B pour obtenir une situation d'équilibre.

$$U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Les **matériaux diamagnétiques** sont sensiblement repoussés vers les zones où le champ magnétique externe est le plus faible. Les atomes ne possèdent pas de moments dipolaires permanents, ce qui implique que le champ magnétique résultant est plus faible que le champ externe.

Les **matériaux paramagnétiques** sont sensiblement attirés vers les zones où le champ magnétique externe est le plus fort. Les atomes possèdent des moments dipolaires permanents, qui ont tendance à s'aligner et renforcer l'effet du champ externe. L'agitation thermique ambiante s'oppose naturellement à ce phénomène, d'où la faible intensité du phénomène.

Les **matériaux ferromagnétiques** sont fortement attirés vers les zones où le champ magnétique externe est le plus fort. Les atomes possèdent des moments dipolaires permanents, même en l'absence de champ externe. Ils ont tendance à s'aligner entre proches voisins pour former au sein de ces matériaux des petits îlots magnétiques appelés les **domaines de Weiss**.

Quelle que soit le type de matériau, la relation entre le champ magnétique externe $\vec{B}_0$ et le champ magnétique interne $\vec{B}_M$ met en jeu une règle de proportionnalité dont le coefficient adimensionnel est appelé la **susceptibilité magnétique** χ_M.

$$\vec{B}_M = \chi_M \vec{B}_0$$

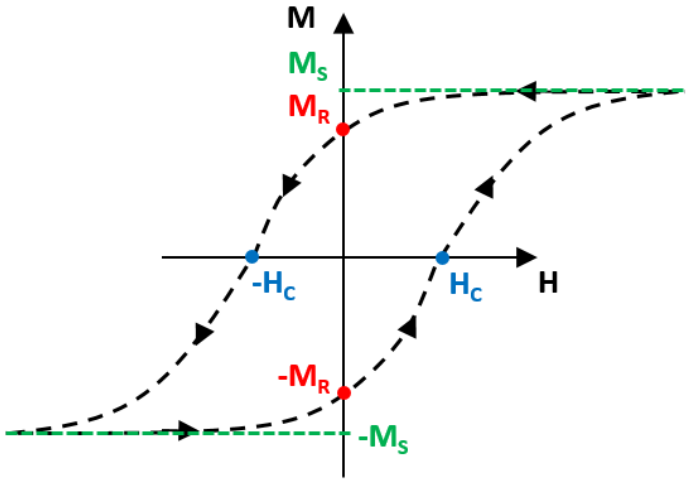
La relation entre le champ magnétique résultant et le champ magnétique externe met également en jeu une règle de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité μ_M est appelé la **perméabilité magnétique** du milieu ou du matériau.

$$\vec{B} = \mu_M \left(\vec{H} + \vec{M}\right) \qquad \mu_M = \mu_r \mu_0 \qquad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ T.m.A}^{-1}$$

B : champ magnétique d'induction [T]
H : champ magnétique auxiliaire [A.m^{-2}]

Le coefficient μ_0 est une constante universelle, appelée la **perméabilité magnétique du vide**. μ_r est la perméabilité relative propre au matériau ou au milieu considéré.

L'aimantation acquise par un matériau ferromagnétique dépend du champ externe auquel il est exposé, mais aussi de l'historique des évènements magnétiques qu'il a déjà subi. Lorsqu'on fait croître ou décroître le champ externe, l'aimantation de ce type de matériau suit une **courbe d'hystérésis**.



H_C : champ coercitif [A.m^{-2}]
M_R : aimantation rémanente [A.m^{-1}]
M_S : aimantation de saturation [A.m^{-1}]

L'**aimantation rémanente** correspond à un retard de réponse des moments dipolaires à l'inversion du champ magnétique externe. C'est un alignement persistant des moments dipolaires.

L'**aimantation de saturation** correspond à un alignement parfait de tous les moments dipolaires du matériau.

Le **champ coercitif** est la valeur du champ externe pour laquelle l'aimantation d'un ferromagnétique s'annule. Si cette valeur est faible, on parle de matériaux « **doux** ». Si cette valeur est élevée, on parle de matériaux « **durs** ».

Dans le cas d'un objet filiforme rectiligne, i.e. un fil, parcouru par un courant électrique d'intensité moyenne I, la force magnétique exercée sur le fil du fait de la présence d'un champ magnétique externe vaut :

$$\overrightarrow{F_B} = I\,\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Cette force est appelée la **force de Laplace**. Le vecteur longueur a pour norme la longueur ℓ de l'élément de fil considéré, et pour orientation celle du courant électrique.

Dans le cas d'un élément de force, la formulation de la force de Laplace devient :

$$\overrightarrow{dF_B} = I\,\overrightarrow{d\ell} \times \vec{B} \qquad \overrightarrow{F_B} = \int \overrightarrow{dF_B}$$

Lorsque le fil est non-rectiligne, la force de Laplace exercée est équivalente à celle d'un fil rectiligne reliant les mêmes extrémités.

Lorsque le fil constitue une **boucle fermée** (**spire**), la force de Laplace totale exercée est toujours nulle.

La **loi de Biot-Savart** permet d'établir une relation mathématique permettant le calcul d'un champ magnétique élémentaire émis par un élément de courant électrique :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_M}{4\pi}\frac{I\,\overrightarrow{d\ell} \times \overrightarrow{u_r}}{r^2} \qquad \left\|\overrightarrow{dB}\right\| = \frac{\mu_M}{4\pi}\frac{I\,d\ell \sin(\theta)}{r^2} \qquad \mu_M = \mu_r\,\mu_0$$

Le **vecteur unitaire** $\vec{u}_r$ est porté par la droite reliant l'élément de courant au point de l'espace pour lequel on souhaite connaître le champ magnétique. Il est orienté de la source (élément de courant), vers la cible (point de l'espace). L'angle θ correspond à l'angle entre cette droite et l'axe du fil considéré.

Le coefficient μ_M correspond à la **perméabilité magnétique** du milieu dans lequel on se trouve. Il s'agit d'un coefficient constant qui modélise la faculté d'un milieu à impacter la propagation du champ magnétique.

Ce coefficient est défini à partir de la valeur propre au vide μ_0, à laquelle on multiplie une valeur relative μ_r.

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ \text{T.m.A}^{-1}$$

La norme du champ magnétique émis par un fil rectiligne infini parcouru par un courant I vaut à une distance R de ce fil :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Deux fils rectilignes parallèles et parcourus par des courants circulant dans le même sens s'attirent mutuellement. A contrario, si les courants circulent dans des sens opposés, les fils se repoussent mutuellement. La norme de la force magnétique exercée par unité de longueur dans les deux cas vaut :

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}$$

La norme du champ magnétique émis en son centre par une boucle de courant circulaire (spire) de rayon a vaut :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

Etant donné la configuration du champ magnétique émis par une boucle de courant, il est possible de modéliser tout **dipôle magnétostatique**, y compris les aimants permanents, par une spire parcourue par un courant électrique.

<u>Enoncé du théorème d'Ampère</u> :

Pour tout parcours unidimensionnel fermé, l'intégrale de ligne du champ magnétique est proportionnelle à la somme algébrique des courants cernés par ce parcours.

$$\oint_l \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum \bar{I}$$

Le **parcours d'intégration** doit remplir certaines conditions pour offrir des calculs avantageux avec ce théorème :

- Le parcours doit être refermé sur lui-même, il doit constituer une **boucle imaginaire**.
- Le parcours doit être, si possible, dans le même sens que les lignes de champ et en épouser les formes.

La contribution de tout courant électrique situé à l'extérieur du parcours d'intégration est nulle. Ceci-dit, ce courant demeure une source de champ magnétique quoi qu'il en soit.

L'énoncé du théorème d'Ampère tel qu'il est présenté ci-dessus ne s'applique pas en **régime variable**. Les courants électriques doivent être nécessairement constants.

De même, si l'étude ne s'effectue pas dans le vide, l'énoncé de ce théorème ne demeure valable que pour les **milieux non-magnétiques**.

Pour un **solénoïde** infini, constitué de n spires par unité de longueur, le champ magnétique extérieur à proximité de celui-ci est nul. Le champ magnétique à l'intérieur de celui-ci est uniforme et a pour module :

$$B = \mu_0 \, n \, I$$

ÉLECTROMAGNÉTISME
INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Il existe une relation de réciprocité entre le courant électrique et le champ magnétique. Le courant électrique est une source de champ magnétique. Dans certaines conditions, le champ magnétique peut à son tour produire un courant électrique. C'est le phénomène d'**induction électromagnétique**.

Le sens du courant électrique obtenu dans un conducteur, appelé le **courant induit**, dépend de l'apparition d'une **force électromotrice induite** (f.é.m.), elle-même générée par la variation du flux magnétique.

Le **flux magnétique** Φ_B est une grandeur permettant la quantification de la densité de lignes de champ magnétique traversant une surface donnée. Son unité SI est le **Weber** [W].

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot A\,\vec{n} = B\,A\cos(\theta)$$ *pour un champ uniforme*

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA}$$ *pour un champ non-uniforme*

La **f.é.m.** ξ correspond à un travail non-électrostatique fourni par unité de charge. Elle est produite par une source de f.é.m. dont le rôle consiste à entretenir le courant électrique au sein d'un circuit fermé. Il s'agit d'un réapprovisionnement du potentiel électrique des porteurs de charges, elle s'exprime donc comme le potentiel en **volt** [V].

$$\xi = \frac{W}{q}$$

La loi mathématique permettant de décrire la relation de cause à effet entre la variation de flux et la f.é.m. induite s'appelle la **loi de Lenz-Faraday** :

L'effet de la f.é.m. induite est tel qu'il s'oppose à la variation du champ magnétique qui produit cette f.é.m..

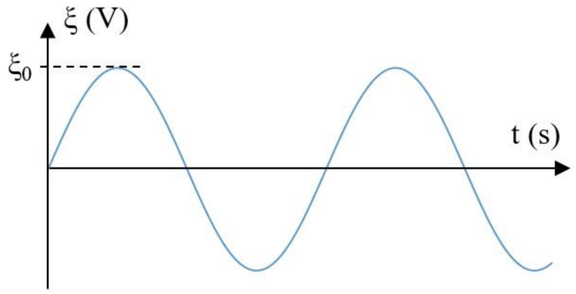
$$\xi = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$ pour une seule boucle de courant

$$\xi = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$ pour N boucles de courant

On utilise la **règle de la main droite** pour déterminer le sens positif de la f.é.m. induite, et donc celui du courant induit. Cette règle est combinée à l'orientation du **vecteur normal** à la surface de sorte à obtenir un flux magnétique positif.

L'application la plus importante du phénomène d'induction électromagnétique est la conception des **générateurs**.

Un générateur muni d'une **bobine** d'une ou plusieurs boucle(s) en rotation au sein d'un champ magnétique extérieur permanent permet d'obtenir une f.é.m. induite **sinusoïdale**.



$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t)$$

$$\xi_0 = N B A \omega$$

ω : vitesse de rotation de la (des) boucle(s) [rad.s^{-1}]

A l'aide d'un circuit redresseur et d'un commutateur, il est possible d'obtenir un **générateur à courant continu** par le même dispositif.

Tout générateur peut opérer dans le mode de fonctionnement inverse, et devenir un **moteur**. La f.é.m. induite devient alors une **contre-f.é.m**. puisqu'elle s'oppose à celle utilisée pour mettre le dispositif en rotation.

Les rails de Laplace constituent un premier modèle de **générateur linéaire**. Il est constitué d'une tige conductrice de longueur ℓ se translatant sur des rails métalliques. L'ensemble du dispositif étant soumis à un champ magnétique extérieur.

La f.é.m. induite dans ce type de dispositif est directement proportionnelle à la vitesse v de déplacement de la tige.

$$|\xi| = B \ell v$$

ÉLECTROMAGNÉTISME
ACTION DES CHAMPS ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE SUR LES PARTICULES CHARGÉES

Au sein d'un **champ électrique uniforme**, le mouvement d'une particule chargée correspond à un **mouvement uniformément accéléré**. Les équations de la cinématique du point pour ce type de mouvement selon un axe (Ox) sont applicables.

$$v_x = v_{x0} + a\,t \qquad x = x_0 + v_{x0}\,t + \frac{a\,t^2}{2}$$

$$x = x_0 + \frac{t}{2}\left(v_{x0} + v_x\right) \qquad v_x^2 = v_{x0}^2 + 2\,a\left(x - x_0\right)$$

Au sein d'un **champ magnétique uniforme**, le mouvement d'une particule chargée, dont la vitesse est perpendiculaire au champ, correspond à un **mouvement circulaire uniforme**. Le rayon R du cercle ainsi décrit, et la période de révolution T de la particule, ont pour expressions :

$$R = \frac{m\,v}{|q|\,B} \qquad T = \frac{2\pi\,R}{v}$$

La fréquence f_C propre à ce mouvement circulaire est appelée la **fréquence cyclotron**.

$$f_C = \frac{1}{T} = \frac{|q|\,B}{2\pi\,m}$$

Au sein d'un champ magnétique uniforme, dans le cas où la vitesse n'est pas perpendiculaire au champ, on obtient un **mouvement hélicoïdal**.

Dès lors qu'une particule chargée se retrouve soumise simultanément à un champ électrique et à un champ magnétique, elle subit une force électromagnétique résultante appelée la **force de Lorentz**.

$$\vec{F_L} = \vec{F_E} + \vec{F_B} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Un **sélecteur de vitesse** (Figure A) est un dispositif permettant de choisir une vitesse de déplacement des particules au sein d'une distribution donnée, ou encore de trier les particules chargées selon leur nature.

Un **spectromètre de masse** (Figure B) est un dispositif permettant de mesurer la masse des ions, de détecter et séparer des isotopes, de repérer la présence d'impuretés ou de polluants chimiques …

Un **cyclotron** (Figure C) est un dispositif permettant d'accélérer des particules chargées à des vitesses importantes. Il est possible de fournir à ces particules une énergie de quelques dizaines à quelques centaines de MeV.

$$1\ \text{eV} = 1{,}6.10^{-19}\ \text{J} \qquad\qquad 1\ \text{MeV} = 10^{+6}\ \text{eV}$$

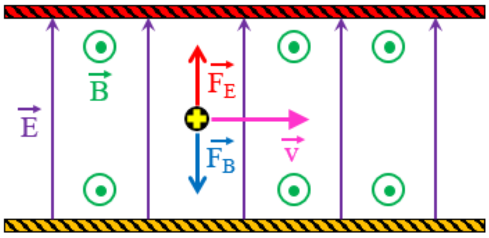


Figure A : sélecteur de vitesse

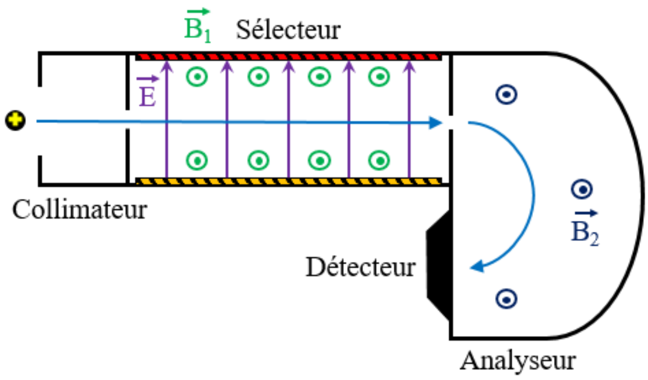


Figure B : spectromètre de masse

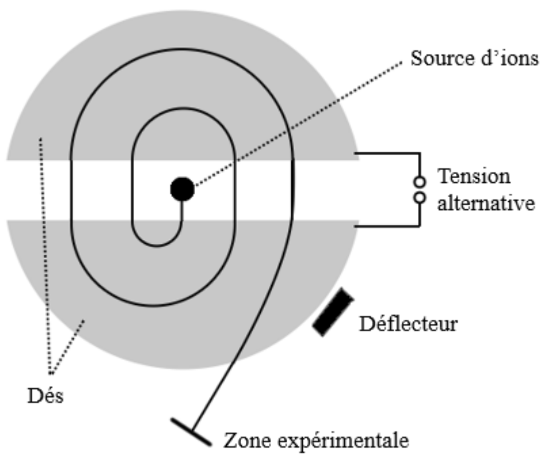


Figure C : cyclotron

Lorsqu'un **conducteur** parcouru par un courant électrique est plongé dans un champ magnétique uniforme, on peut constater l'apparition d'une **différence de potentiel latérale** entre les côtés du conducteur. Ce phénomène est appelé l'**effet Hall**.

A l'équilibre, la mesure de cette différence de potentiel ΔV_H, dénommée **tension de Hall**, permet la détermination de la nature des particules chargées, mais aussi l'évaluation du nombre de particules par unité de volume pour un échantillon de matériau conducteur donné.

$$\Delta V_H = \frac{I B}{n|q|\ell}$$

n : nombre de particules chargées par unité de volume
ℓ : dimension du matériau de section $A = \ell \times L$
L : largeur du matériau sur laquelle est mesurée ΔV_H

La mesure de la tension de Hall permet aussi de déterminer la **vitesse de dérive** de ces particules.

$$\Delta V_H = v_d B L$$

v_d : vitesse de dérive des particules