EPITA
2016/2017

Série n°1

Outils mathématiques

Exercice 1 *Vecteurs*

Représenter et calculer la résultante des forces dans les cas suivants :

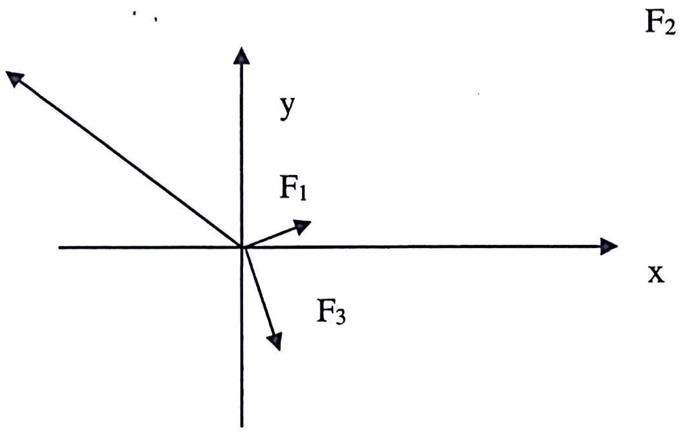
k Newtons

1) F_1 = 3N, F_2 = 2N et $\alpha = (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 90^\circ$

2) F_1 = 3N, F_2 = 2N et $\alpha = (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 30^\circ$

3) Trois forces concourantes tel que: $\alpha = (\vec{F}_1, O\vec{x}) = 30^\circ, \beta = (\vec{F}_2, O\vec{y}) = 45^0, \gamma = (\vec{F}_3, O\vec{x}) = 60^0$
   F_1 = 1 N, F_2 = 5 N, F_3 = 2 N. (Penser à projeter les vecteurs dans un repère (Ox,Oy).

$F_4 = 2N$ $F_5 = 3N$



Exercice 2 *Produits scalaire et vectoriel*

I- Rappels des 2 opérations : produit scalaire et produit vectoriel (en précisant les 2 définitions pour chacune des opérations)

II- On considère, dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y \vec{e}_z)$ direct, les trois vecteurs : $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$.

de composantes respectives: $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$; $\vec{V}\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}$; $\vec{W}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. a- Calculer le produit scalaire $\vec{U}.\vec{V}$

   b- En déduire le cosinus de l´angle entre les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

2. Montrer que les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont orthogonaux

3. a) Calculer les composantes de : $\vec{Z} = \vec{V} \wedge \vec{W}$.

$b)$ En déduire la norme du vecteur $\vec{Z}$. (Utiliser les deux méthodes).

Exercice 3 ***Dérivées***

Calculer les dérivés des fonctions suivantes :

1- $f(t) = A\sin(\omega.t)$; A et ω sont des constantes

2- $f(t) = A\cos(\omega.t)$; A et ω sont des constantes

3- $f(t) = A\cos(\theta(t))$; θ est une fonction de la variable temps t, on pose $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ = dérivée de θ par rapport à t.

4- $f(t) = A\cos^2(\theta(t))$, θ est une fonction de la variable temps t, on pose $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ = dérivée de θ par rapport à t.

5- $f(t) = A(\dot{\theta}(t))^2$. On pose ; $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt}$

SERIE N°1 : OUTILS MATHEMATIQUES

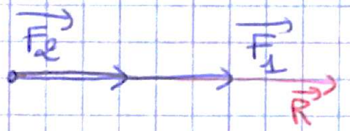
$\vec{R}$: vecteur résultant

= sommation de 2 ou de plusieurs vecteurs (forces, vitesse, champ électrique...)

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_N}$

Cas de 2 vecteurs colinéaires (même direction)...

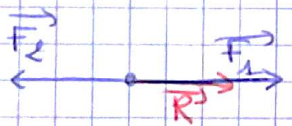
a) ... de même sens



$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

en norme : $R = F_1 + F_2$

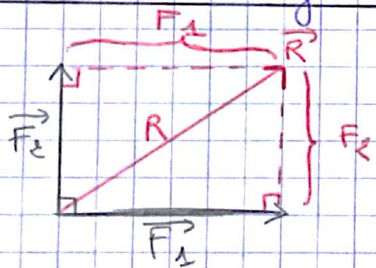
b) ... de sens opposé



$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

en norme : $R = |F_1 - F_2| = |F_2 - F_1|$

Ex 1 : 1) 2 vecteurs orthogonaux



$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

AN : $R = \sqrt{9 + 4}$

$R = \sqrt{13}$ N

2)

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

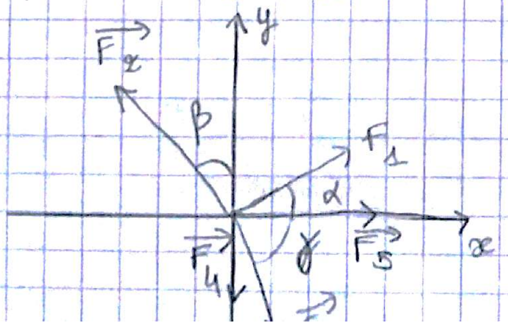
en norme : $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos(\alpha)}$

AN : $R = \sqrt{9 + 4 + 2 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}$

$= \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$ N

3) $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} + \vec{F_5}$

(méthode de projection)



$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y} \end{pmatrix}$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

$$\vec{F_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{F_5} = \begin{pmatrix} F_5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F_1} = \begin{pmatrix} F_{1x} = F_1 \cos(\alpha) \\ F_{1y} = F_1 \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F_2} = \begin{pmatrix} -F_2 \sin(\beta) \\ F_2 \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_{1x}}{F_1} \Rightarrow F_{1x} = F_1 \cos \alpha$$

$$\vec{F_3} = \begin{pmatrix} F_3 \cos(\gamma) \\ -F_3 \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$\sin \alpha = \frac{F_{1y}}{F_1} \Rightarrow F_{1y} = F_1 \sin \alpha$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x = F_1 \cos(\alpha) - F_2 \sin(\beta) + F_3 \cos(\gamma) + F_5 \\ R_y = -F_4 + F_1 \sin(\alpha) + F_2 \cos(\beta) - F_3 \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Ex2 :

I. 1) produit scalaire

$F_1 \cdot F_2 = \text{scalaire}$

* 1ère déf° : (en f° de $\alpha = (\vec{F_1}, \vec{F_2})$)

$$\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = F_1 \times F_2 \times \cos(\alpha)$$

$\Rightarrow$ si $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$; $\vec{F_1} \perp \vec{F_2}$ comme $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, alors $\boxed{\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = 0}$

$\Rightarrow$ si $\boxed{0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}}$ $\cos(\alpha) > 0$ alors $\boxed{\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} > 0}$

$\Rightarrow$ si $\boxed{\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi}$ $\cos(\alpha) < 0$ alors $\boxed{\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} < 0}$

* 2nde déf° : (en f° des composantes de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$)

$$\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix} = \underbrace{F_{1x}F_{2x} + F_{1y}F_{2y} + F_{1z} + F_{2z}}_{\text{somme des produits des composantes}}$$

2) produit vectoriel

$$\vec{F_1} \wedge \vec{F_2} = \vec{F_3} \quad , \quad (\vec{F_1}, \vec{F_2}) = \alpha$$

* 1ère déf° : $F_3 = F_1 \times F_2 \times |\sin(\alpha)|$

norme de F_3, connaissant l'angle entre $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$

* 2ème déf° : composantes de $\vec{F_3}$ — on supprime la ligne

$$\vec{F_3} = \vec{F_1} \wedge \vec{F_2} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix} \\ F_{1x} \\ F_{1y} \end{array} \wedge \begin{array}{c} \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{array} = \begin{pmatrix} F_{1y}F_{2z} - F_{1z}F_{2y} \\ F_{1z}F_{2x} - F_{1x}F_{2z} \\ F_{1x}F_{2y} - F_{1y}F_{2x} \end{pmatrix} \begin{array}{l} = F_{3x} \\ = F_{3y} \\ = F_{3z} \end{array}$$

$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2 + F_{3z}^2}$$

II. 1a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2(-2) + 0\times 4 + 2\times 4 = 4$

b) $\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{4} = u \times v \times \cos(\alpha)$

$4 = \sqrt{2^2+2^2} \times \sqrt{(-2)^2+16+16} \times \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha) = \dfrac{4}{2\sqrt{2}\times 6} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

2) $\vec{v}\cdot\vec{w} = (-2)2 + 4(-1) + 4\times 2$

$= -4 - 4 + 8 = 0$

$\vec{v}$ est bien perpendiculaire à $\vec{w}$

3a) $\vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{w}$

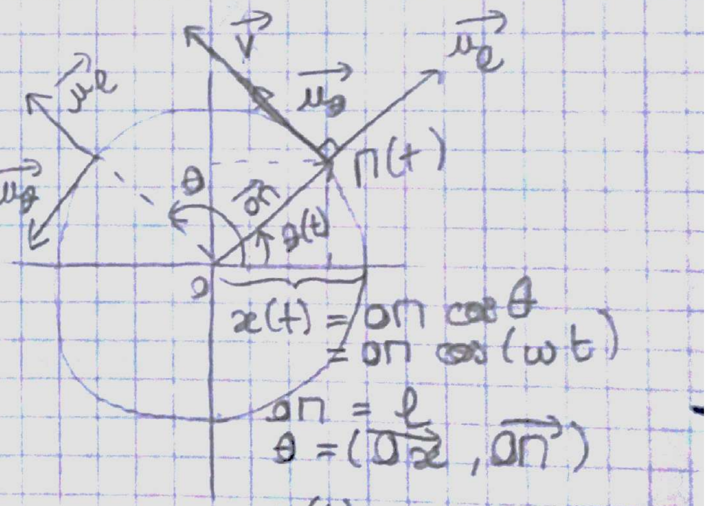
$= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(2) - 4(-1) \\ 4(2) - 2(-2) \\ -2(-1) - 2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{matrix}$

méthode 1 : $z = \sqrt{12^2 + 12^2 + (-6)^2} = \sqrt{324} = 18$ (Pythagore)

méthode 2 : $z = v \times w \times |\sin(\vec{v}, \vec{w})| = 18$ (Déf° produit vectoriel)

$6 \times 3 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $(= 1)$



$x(t) = OM \cos\theta$
$= OM \cos(\omega t)$

$OM = \ell$

$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

$y(t) = OM \sin\theta$
$= OM \sin(\omega . t)$

Ex3 : 1) $f(t) = A \sin(\omega t)$

$\sin(u)' = u' \cos(u)$

$\Rightarrow f'(t) = A\omega \cos(\omega t)$

$\cos(u)' = -u' \sin(u)$

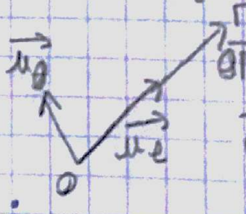
$= \dfrac{df}{dt}$

2) $f(t) = A \cos(\omega . t) = -A\omega \sin(\omega t)$

3) $f(t) = A \cos(\theta(t))$

$\dfrac{df}{dt} = \underbrace{\dfrac{df}{d\theta}}_{f'(x)} \times \underbrace{\dfrac{d\theta}{dt}}_{g'(x)}$

$f'(t) = -A \sin(\theta(t)) . \dot{\theta}(t)$



$\overrightarrow{OM} = OM \, \vec{u_e}$

$\overrightarrow{OM} = \vec{u_{ex}} \, \vec{u_\theta}$

4) $f(t) = A \cos^2(\theta(t))$

$\Rightarrow \dfrac{df}{dt} = \dfrac{df}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt} = -2A \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) \dot{\theta}$

5) $f(t) = A (\overbrace{\dot{\theta}(t)}^{g(x)})^2$

$\dfrac{df}{dt} = \dfrac{df}{d\dot{\theta}} \times \dfrac{d(\dot{\theta})}{dt} = 2A\dot{\theta}(t) . \ddot{\theta}$

Scanned by CamScanner

EPITA S1
2016/2017

Série n°2

Cinématique du point matériel
(Systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques)

Exercice 1

On donne le vecteur position : $\vec{OM} = 10t.\vec{u}_x + (-5t^2 + 10t)\vec{u}_y$

1- Donner l'équation de la trajectoire du point M. Tracer cette trajectoire.
2- Donner les composantes des vecteurs vitesse et accélération. Préciser la valeur de la vitesse à t = 2s.
3- Donner les composantes de la vitesse instantanée à t = 0. Préciser l'angle que fait le vecteur vitesse $\vec{V}_0$ avec l'axe Ox.

Exercice 2

Les coordonnées cartésiennes d'un point sont données, en fonction du temps, par :

$$\begin{cases} x(t) = v_0.\cos(\alpha).t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.\sin(\alpha).t \end{cases}$$

1- Donner l'équation de la trajectoire y = f(x). En déduire les coordonnées x_S et y_S du sommet de la trajectoire.
2- Donner l'expression du vecteur vitesse dans le repère cartésien.
3- Même question avec le vecteur accélération.

Exercice 3

Une particule M se déplace dans le plan (Oxy). Sa position en fonction du temps est :

$$\vec{OM} = R\cos(\omega t)\vec{u}_x + R\sin(\omega t)\vec{u}_y$$

Où ω et R sont deux constantes positives.

1- Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération en fonction du temps.
2- Donner les modules des vecteurs vitesse et accélération.
3- Pour quelle(s) valeur(s) de t la vitesse est-elle perpendiculaire à l'accélération ?
4- Quelle est la trajectoire de la particule dans le plan (Oxy) ?
5- Refaire la question (1) en coordonnées polaires de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

Exercice 4

Partie A

Un point matériel M de masse m est repéré dans un référentiel fixe (Ox,Oy, Oz) par ses coordonnées cartésiennes tel que x(t) = A cos (ωt) ; y(t) = B sin (ωt) ; z(t) = Hωt. Où A, B, ω et H sont des constantes positives.

1- Exprimer le vecteur vitesse du point M dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

2- Exprimer le vecteur accélération du point M dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

3- Déterminer le module des vecteurs vitesse et accélération

4-a) Quel est le mouvement du point M dans le plan (xoy) ?

b) Quel est le mouvement du point M suivant la direction de l'axe (oz)?

c) Quel est le mouvement résultant du point **M** ?

Partie B (On prend A = B = R dans les équations de la partie A)

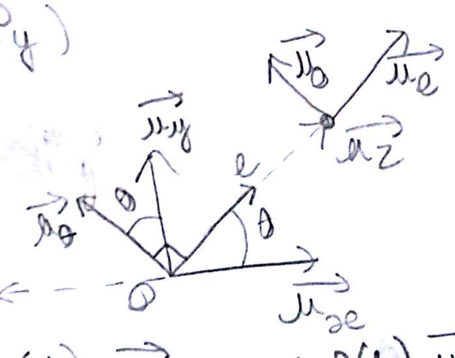
1- Exprimer le vecteur position dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

2- Exprimer le vecteur vitesse du point M dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

3- Exprimer le vecteur accélération du point M dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Dem° B (→ dérivées en cylindriques)

écrire les vecteurs $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$



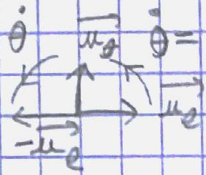
$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos(\theta(t))\,\vec{u}_x + \sin\theta(t)\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin(\theta(t))\,\vec{u}_x + \cos(\theta(t))\,\vec{u}_y \end{cases}$$

SÉRIE N°2 : CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

DÉRIVÉES DES VECTEURS UNITAIRES :

- EN CARTÉSIEN : $\dfrac{d\vec{u}_x}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_y}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$

- EN CYLINDRIQUE : $\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_\rho \\ \dfrac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0} \end{cases}$



$\dot{\theta}$ = vitesse angulaire (Rad.s^{-1})

VECTEUR POSITION, VECTEUR VITESSE, VECTEUR ACCÉLÉRATION

- EN CAR :

- $\vec{OM} = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$
- vitesse :

$\vec{V} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$

$\vec{V} = \underbrace{\dot{x}(t)}_{v(x)}\vec{u}_x + \underbrace{\dot{y}(t)}_{v(y)}\vec{u}_y + \underbrace{\dot{z}(t)}_{v(z)}\vec{u}_z$

- accélération :

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$

$\vec{a} = \underbrace{\ddot{x}(t)}_{\dot{v}(x) = a_x}\vec{u}_x + \underbrace{\ddot{y}(t)}_{a_y}\vec{u}_y + \underbrace{\ddot{z}(t)}_{a_z}\vec{u}_z$

- EN CYL :

- $\vec{OM} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z$
- $\vec{V} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dfrac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\underbrace{\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt}}_{\dot{\theta}\,\cdot\,\vec{u}_\theta} + \underbrace{\dfrac{dz}{dt}}_{\dot{z}}\vec{u}_z + z\underbrace{\dfrac{d\vec{u}_z}{dt}}_{\vec{0}}$

$\vec{V} = \underbrace{(\dot{\rho})}_{V_\rho}\vec{u}_\rho + \underbrace{(\rho\dot{\theta})}_{V_\theta}\vec{u}_\theta + \underbrace{(\dot{z})}_{V_z}\vec{u}_z$

V_ρ : vitesse radiale ; V_θ : vitesse tangentielle

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

$\vec{a} = \ddot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\underbrace{\dot{\vec{u}}_\rho}_{=\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\underbrace{\dot{\vec{u}}_\theta}_{=-\dot{\theta}\,\vec{u}_\rho} + \ddot{z}\,\vec{u}_z + \cancel{\dot{z}\,\dot{\vec{u}}_z}^{=0}$

$= \underbrace{\left(\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2\right)}_{\text{accélération radiale}}\vec{u}_\rho + \underbrace{\left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)}_{a_\theta}\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z$

a_θ = accél° tan$^{\text{tle}}$ (orthoradiale) $\perp$ à la dir° radiale

norme de $\vec{a}$: $a = |a_\rho| = R(\dot{\theta})^2$ car a_θ

EX1

1) $\vec{OM} = 10t\,\vec{u_x} + (-5t^2 + 10t)\,\vec{u_y}$

$= x(t)\,\vec{u_x} + y(t)\,\vec{u_y}$

$\vec{OM} \begin{cases} x(t) = 10t \Leftrightarrow t = \frac{x}{10} \quad ① \text{ dans} \\ y(t) = -5t^2 + 10t \quad ② \end{cases}$

$\Rightarrow y(x) = -\frac{5x^2}{100} + \cancel{10} \times \frac{x}{\cancel{10}}$

$= -\frac{1}{20}x^2 + x$

y de la forme $ax^2 + bx \rightarrow$ mvmt parabolique

$y'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{x}{10} + 1 = 0$

(au pt S = sommet) $\boxed{x_S = 10\,m}$

$\underline{y_S} = -\frac{1}{20}(x_S)^2 + x_S = -\frac{1}{2\cancel{0}} \times 10\cancel{0} + 10 = \underline{5\,m}$

2) $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} v_x = \dot{x} = 10 \\ v_y = \dot{y} = -10t + 10 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = -10 \end{pmatrix} = \vec{g}$

3) $\frac{\pi}{4}$

EX2

1. $\vec{OM} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t \end{cases}$

$t = \frac{x}{v_0\cos(\alpha)} \rightarrow y(x) = \frac{1}{2}g \times \left(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}\right)^2 + v_0\sin(\alpha) \times \left(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}\right)$

$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x$

de la forme $y(x) = ax^2 + bx$

de trajectoire parabolique $y'(x) = 2ax + b = 0$ (max)

$x = \frac{-b}{2a}$

$x_S = \frac{+\tan(\alpha)}{\frac{+g}{v_0^2\cos^2(\alpha)}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)g} \times v_0^2\cos^2(\alpha)$

$= \frac{v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g}$

dans l'équation de la trajectoire :

$$y_S(x_S) = \frac{-g}{2V_0^2 \cancel{\cos^2(\alpha)}} \times \frac{V_0^4 \sin^2(\alpha) \cancel{\cos^2(\alpha)}}{g^2} \ (= x_S^2)$$

$$+ \underbrace{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}_{= \tan\alpha} \left(\underbrace{\frac{V_0^2 \sin(\alpha) \cancel{\cos(\alpha)}}{g}}_{= x_S} \right)$$

$$y_S(x_S) = -\frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} + \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{g}$$

$$= \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

$$S = \left(x_S = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \ ; \ y_S = \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \right)$$

2. $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} = V_0 \cos(\alpha) = cste \\ \dot{y} = -gt + V_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix} \begin{matrix} = V_x \\ = V_y \end{matrix}$

n'est possible qu'en repère cartésien

3. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{pmatrix} = \vec{g}$

<u>EX3 :</u>

1. $\vec{OM} = \begin{cases} x(t) = R\cos(\omega . t) \\ y(t) = R\sin(\omega . t) \end{cases}$

$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} = -R\omega \sin(\omega t) \\ \dot{y} = R\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

$\vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} = -R\omega^2 \cos(\omega t) \\ a_y = \ddot{y} = -R\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases}$

2. $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

$= \sqrt{R^2\omega^2 (\underbrace{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}_{=1})}$

$v = \underset{m}{R}\underset{rad.s^{-1}}{\omega} \quad (m.s^{-1})$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{R^2\omega^4 (\underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_{=1})}$

$m.s^{-2} \rightarrow a = \underset{m}{R}\underset{rad^2.s^{-2}}{\omega^2}$ → vérifier l'homogénéité.

3. 1ère méthode :

$\vec{a} = -\omega^2 \vec{OM} \Rightarrow \vec{a}$ est centrale et comme $\vec{v}$ est tangent alors $\vec{a} \perp \vec{v}$.

2nde méthode : on calcule $\vec{a} \cdot \vec{v}$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a_x v_x + a_y v_y$$

$$= +R\omega^2 \cos(\omega t) \times (+R\omega \sin(\omega t)) + (-R\omega^2 \sin(\omega t)) \times (R\omega \cos(\omega t))$$

$$= R^2\omega^3 \sin(\omega t)\cos(\omega t) - R^2\omega^3 \cos(\omega t)\sin(\omega t)$$

$$= 0 \quad \rightarrow \forall t, \vec{a} \perp \vec{v}$$

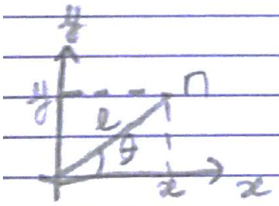
4. Equation de la trajectoire :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \Rightarrow x^2 = R^2\cos^2(\omega t) & ① \\ y(t) = R\sin(\omega t) \Rightarrow y^2 = R^2\sin^2(\omega t) & ② \end{cases}$$

$$① + ② \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2\big(\underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_{=1}\big)$$

$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow$ cercle de centre O et de rayon R

5. en coord polaires :



$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

* vecteur position : $\vec{OM} = \rho\,\vec{u_\rho}$, $\rho = R$

$$\rho = \sqrt{\underbrace{R^2\cos^2(\omega t)}_{x^2} + \underbrace{R^2\sin^2(\omega t)}_{y^2}} = R$$

$$\vec{OM} = R\vec{u_\rho} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\vec{u_\rho})$$

$$= R\frac{d\vec{u_\rho}}{dt} \qquad \frac{d\vec{u_\rho}}{dt} = \dot\theta\vec{u_\theta}$$

$$= R\dot\theta\,\vec{u_\theta}$$

$R\dot\theta = V_\theta \Rightarrow V = V_\theta$

($\vec{v}$ n'a qu'une composante en coord polaires)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(R\underbrace{\dot\theta}_{\omega = cste}\vec{u_\theta}\big) = R\dot\theta\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} \qquad \frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\dot\theta\vec{u_\rho}$$

$$= -R(\dot\theta)^2\vec{u_\rho} = a_\rho\vec{u_\rho}$$

$\vec{a}$ est radiale vers O.

EX 4:

PARTIE A :

$\vec{OM}\begin{cases} y(t) = B\sin(\omega t) \\ x(t) = A\cos(\omega t) \\ z(t) = (H\omega)t \end{cases}$

1) $\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t) \\ \dot{y} = \omega B.\cos(\omega t) \\ \dot{z} = H\omega \end{pmatrix}$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t) \\ \ddot{y} = -A\omega^2 \sin(\omega t) \\ \ddot{z} = 0 \end{pmatrix}$

3) modules (ou normes) :

$\vec{V} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

$= \sqrt{\omega^2(A^2\sin^2(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t) + H^2)}$

$\vec{V} = \omega\sqrt{A^2\sin^2(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t) + H^2}$

$a = \sqrt{\omega^4(A^2\cos^2(\omega t) + B^2\sin^2(\omega t))}$

$= \omega^2\sqrt{A^2\cos^2(\omega t) + B^2\sin^2(\omega t)}$

4) a) dans le plan (xoy)

$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t) & \Rightarrow \frac{x}{A} = \cos(\omega t) \\ y(t) = B\sin(\omega t) & \Rightarrow \frac{y}{B} = \sin(\omega t) \end{cases}$

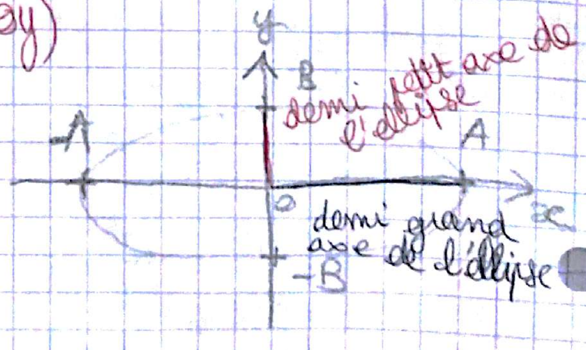
$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{A^2} = \cos^2(\omega.t) & ① \\ \frac{y^2}{B^2} = \sin^2(\omega t) & ② \end{cases}$

$① + ② \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$

trajectoire elliptique dans le plan (xoy)

on suppose :

$A > B$ Pour $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \pm B \\ y = 0 \Rightarrow x = \pm A \end{cases}$



b) sur $\vec{OZ}$: V_z = cste ⇒ mvmt rectiligne uniforme

c) mouvement résultant = hélicoïdal (elliptique)

et si A = B = R : hélicoïdal circulaire (rotation + translation)

PARTIE B.

1 • $\vec{OM} \begin{cases} \rho \vec{u_\rho} \\ z \vec{u_z} \end{cases}$ $\quad \vec{OM}_{cyl} = \rho \vec{u_\rho} + z \vec{u_z}$

$$\underset{(x,y,z)}{\text{cartes}} \longrightarrow \underset{(\rho,\theta,z)}{\text{cyl}} \qquad \vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM}$$

$$z \longrightarrow z$$

$$z = (H\omega)t \longrightarrow z(t) = (H\omega)t$$

Eq^{os} de passage : $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ \rho = \sqrt{x^2_{(t)} + y^2_{(t)}} \end{cases}$ (Pythagore)

$$\rho = \sqrt{\underbrace{R^2\cos^2(\omega t)}_{x^2} + \underbrace{R^2\sin^2(\omega t)}_{y^2}}$$

$$= R\underbrace{\sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}}_{=1} = R$$

$\vec{OM} = R\vec{u_\rho} + H\omega \cdot t\vec{u_z}$ (car $\rho = R$ et $z = (H\omega)t$)

$\vec{V} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta} + H\omega(1\vec{u_z} + t \times \vec{0}) = R\dot{\theta}\vec{u_\theta} + H\omega\vec{u_z}$

$= R\dot{\theta}\vec{u_\theta} + H\omega\vec{u_z}$

$\vec{a} = R(\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{\theta} \times -\dot{\theta}\vec{u_\rho}) + H\omega \times \vec{0}$

$$= \underbrace{R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}}_{=0} - \underbrace{\dot{\theta}^2\vec{u_\rho}}_{\text{Radiale}}$$

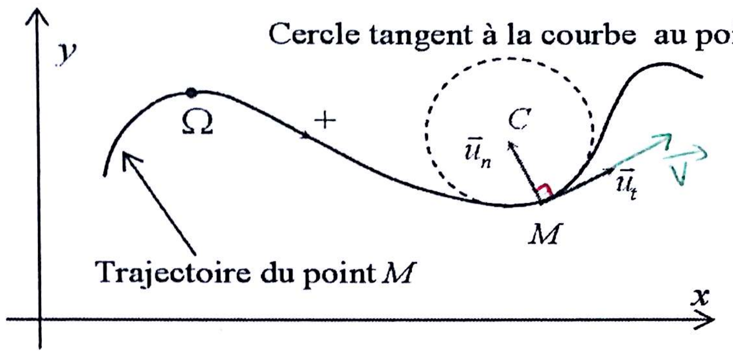
centrale

EPITA
2016/2017

Série n°3
Cinématique du point matériel
Base de Frenet

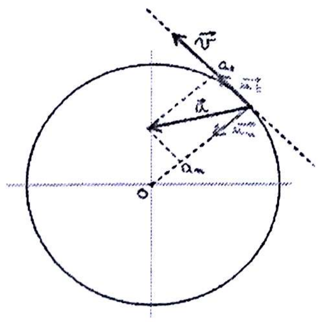
Exercice 1

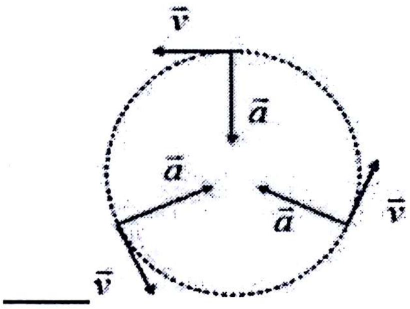
On montre que le vecteur vitesse en base de Frenet est d'expression : $\vec{V} = R\dot{\theta}(t).\vec{u}_T$, où R est le rayon de courbure de la trajectoire curviligne.



1- Retrouver les composantes a_T et a_N du vecteur accélération $\vec{a}$ dans la base de Frenet.

2- Utiliser ce dernier résultat pour en déduire les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ et accélération $\vec{a}$ pour un mouvement circulaire uniforme dans la même base de Frenet.





Exercice 2

Un tracteur tirant une charrue à disque a un mouvement d'équations horaires (en coordonnées polaires) :

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 \exp(\theta(t)) \\ \theta(t) = \omega.t \end{cases}$$

Où ρ_0 et ω sont des constantes positives ($\omega = \dot{\theta}$)

1- Déterminer les composantes radiale V_ρ et tangentielle V_θ du vecteur vitesse en coordonnées polaires, en fonction de ρ_0, ω et t. En déduire la norme V du vecteur vitesse.

2- Déterminer les composantes radiale a_ρ et tangentielle a_θ du vecteur accélération $\vec{a}$ en coordonnées polaires. En déduire la norme a du vecteur accélération.

3- a) Rappeler les expressions de a_t et a_n dans la base de Frenet.
b) En déduire le rayon de courbure Rc de cette trajectoire.

Rappel :

$$\overrightarrow{a}_{Frenet} = \begin{pmatrix} a_T = \frac{dv}{dt} \\ a_N = \frac{v^2}{R} \end{pmatrix}$$

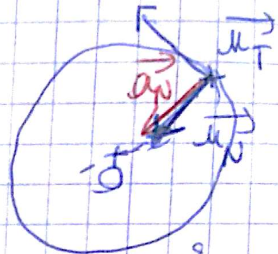
$\overrightarrow{a}_{Frenet} // \frac{d\vec{v}}{dt}$

$a_T \rightarrow$ dérivée de la norme de $\vec{v}$ par rapport à t

$a_N \rightarrow \frac{(\text{la norme de } \vec{v})^2}{R}$

$$\vec{v} = R(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_T$$

circulaire uniforme



$\frac{dv}{dt} = 0$

$a_T = 0$

$a_N = \frac{v^2}{R} = cste > 0$

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

$a = \sqrt{0 + a_N^2} = a_N$

TD3

Ex 1

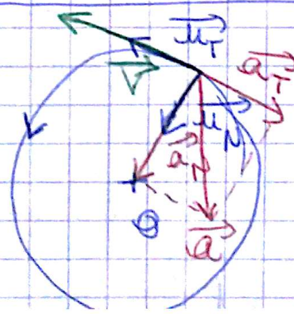
2) mvmt circulaire accéléré

$a_T = \frac{dv}{dt} > 0$ (dc $v \nearrow$)

$a_N = \frac{v^2}{R}$

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$; $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

mvmt circulaire décéléré



$v \searrow$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} < 0 \rightarrow a_T < 0$

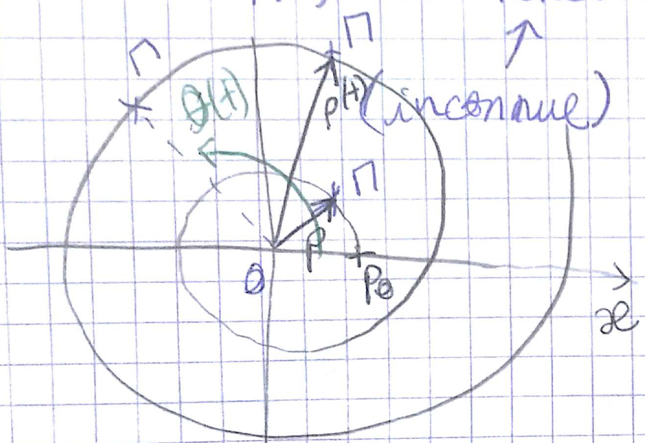
mais $a_N > 0$

Ex 2

But : calculer le rayon de courbure $R_c(t)$ de la spirale en passant par l'accélération exprimée en base de Frenet (car $a_N = \frac{V^2}{R}$)

$a_{Frenet} = a_{polaire}$

(inconnue) $\Rightarrow R_c = ?$



$$\rho(t) = \rho_0 \cdot e^{\theta(t)} = \rho_0 \, e^{\omega t}$$

$$\theta(t) = \omega \cdot t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$$

1) v_ρ et v_θ ?

en polaires $\vec{OM} = \rho \vec{u_\rho}$ et $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u_\rho} + \rho \overset{\omega}{\dot{\theta}} \vec{u_\theta}$

$$\vec{v} \begin{cases} v_\rho = \rho_0 \omega e^{\omega t} \\ v_\theta = \rho_0 \omega e^{\omega t} \end{cases} \qquad \vec{v} = \underbrace{\rho_0 \omega e^{\omega t}}_{v_\rho} \vec{u_\rho} + \underbrace{\rho_0 \omega e^{\omega t}}_{v_\theta} \vec{u_\theta}$$

norme $v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2}$ comme $v_\rho = v_\theta$

$= \sqrt{2}\ v_\rho$

$v = \sqrt{2}\ \rho_0 \omega e^{\omega t}$

2) Calcul de a_ρ et de a_θ (en polaires)

$$\vec{v} = \underbrace{\rho_0 \omega e^{\omega t}}_{u} \underbrace{(\vec{u_\rho} + \vec{u_\theta})}_{v}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_0 \omega^2 e^{\omega t} (\vec{u_\rho} + \vec{u_\theta}) + \rho_0 \omega e^{\omega t} (\dot{\vec{u_\rho}} + \dot{\vec{u_\theta}})$$

$$= \cancel{\rho_0 \omega^2 e^{\omega t} \vec{u_\rho}} + \underbrace{\rho_0 \omega^2 e^{\omega t} \vec{u_\theta} + \rho_0 \omega^2 e^{\omega t} \vec{u_\theta}} - \cancel{\rho_0 \omega^2 e^{\omega t} \vec{u_\rho}}$$

$$\vec{a} = \underbrace{2\rho_0 \omega^2 e^{\omega t}}_{a_\theta} \vec{u_\theta} \qquad \vec{a} \begin{pmatrix} a_\rho = 0 \\ a_\theta = 2\rho_0 \omega^2 e^{\omega t} \end{pmatrix}$$

3) a) $$\vec{a}_{Frenet} = \begin{pmatrix} a_T = \frac{dv}{dt} \\ a_N = \frac{v^2}{R_c} \end{pmatrix} \vec{u_T}, \vec{u_N}$$

b) Calcul de R_c

on calcule a_T et a_N

$a_T = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\rho_0 \omega e^{\omega t}\right)$

$a_T = \sqrt{2}\ \rho_0 \omega^2 e^{\omega t}$

$a_N = \frac{v^2}{R_c} = \frac{2\rho_0^2 \omega^2 e^{2\omega t}}{R_c} \rightarrow ?$

$a_{Frenet} = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = a$ polaire (car la norme est la m̂ ∀ la base)

$\Rightarrow a_T^2 + a_N^2 = a^2_{pol}$

$$2\rho_0^2 \omega^4 e^{2\omega t} + \frac{4\rho_0^4 \omega^4 e^{4\omega t}}{R_c} = 4\rho_0^2 \omega^4 e^{2\omega t}$$

$$\frac{4\rho_0^4 e^{4\omega t}}{R_c^2} = 2\rho_0^2 e^{2\omega t} \Rightarrow R_c^2 = \frac{4\rho_0^4 e^{4\omega t}}{2\rho_0^2 e^{2\omega t}} \Rightarrow R_c^2 = 2\rho_0^2 e^{2\omega t}$$

$\nearrow R_c(t) = \sqrt{2}\rho_0 e^{\omega t}$

Info-Sup
2016/2017

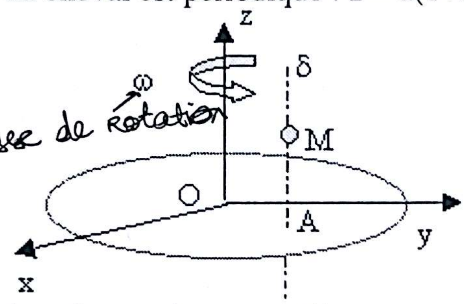
Série n°4
Loi de composition des vitesses-Moment des forces

Exercice 1

Le manège est constitué d'un disque de centre O tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω constante. Le cheval de bois M effectue un mouvement vertical suivant l'axe δ d'amplitude a; le mouvement du cheval est périodique : z = a(1+sin(Ωt)). On prend OA = R.

pulsation sinusoïdale

$\boxed{\omega = \dot{\theta} \quad \vec{\omega} = \omega \vec{u_z}}$ vitesse de rotation

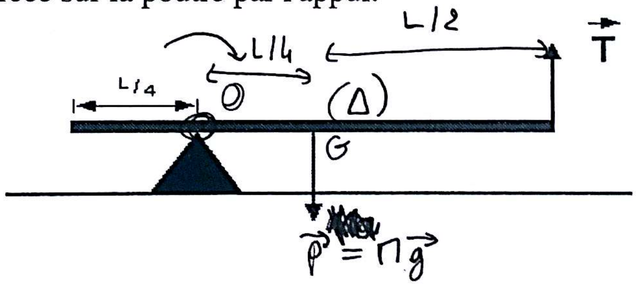


1- Donner les composantes du vecteur position en coordonnées cylindriques.
2- En déduire le vecteur vitesse dans les mêmes coordonnées.
3- Retrouver le vecteur vitesse en utilisant la loi de composition des vitesses, sachant que le repère mobile (disque) est en mouvement de rotation.

Exercice 2

Une poutre de 100 N et de longueur *L* est maintenue en équilibre à l'aide d'un appui situé à *L*/4 de son extrémité gauche et d'une corde verticale à l'autre extrémité.
1-Calculer la tension dans la corde.
2- Calculer la force exercée sur la poutre par l'appui.

O = pt d'appui = centre rotat°
(Δ) = axe de rotation = axe ⊥ plan du tableau = (Oz)



Exercice 3

Une tige homogène de longueur L et de poids $\vec{P}$ est mobile autour d'un axe (Δ) perpendiculaire à cette tige passant par le milieu O.s On applique à l'extrémité A une force $\vec{F_1}$ perpendiculaire à la tige et à l'extrémité B une force verticale $\vec{F_2}$ (figure 1). On donne : α = 30°, F_1 = 1 N.

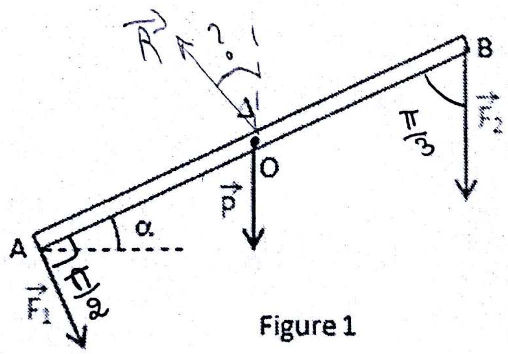


Figure 1

Utiliser la condition d'équilibre de rotation pour calculer la force F_2 qui permet l'équilibre de la tige.

Exercice 4

Un câble passant par B enroulé sur le tambour d'un treuil permet le relevage du pont OA. Le pont de poids **$P = 5.10^3$ N** est en équilibre avec une inclinaison $\alpha = 60°$. **(Figure ci-dessous)**

On précise que **OA = OB = 4m**

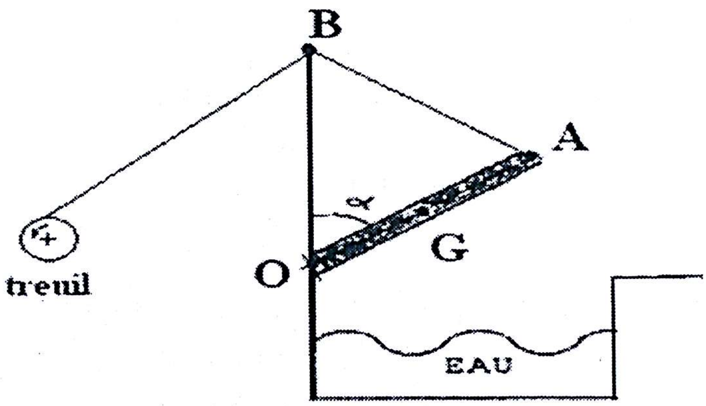
1- Représenter les forces extérieures exercées sur le pont OA.

2- Enoncer les deux conditions d'équilibre de translation et de rotation.

3- Calculer la tension T du câble en utilisant la condition d'équilibre de rotation.

4- a) Utiliser la condition d'équilibre de translation pour calculer les composantes R_x et R_y de la réaction $\vec{R}$ du sol sur le pont.

b) En déduire la norme de $\vec{R}$.



Scanned by CamScanner

Ex

NOTION DE MOMENT D'UNE FORCE

I Définition du vecteur moment de force

Soit une force $\overrightarrow{F_A}$ appliquée en A et qui fait tourner un système quelconque autour d'un axe de rotation (Δ).

$\overrightarrow{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{F_A}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A}$ (pt O = centre de rotation = pt d'intersection entre (Δ) et le plan de rotation)

$\overrightarrow{M}_{/\Delta} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A}$ (vecteur $\perp \overrightarrow{OA}$ et $\perp \overrightarrow{F_A}$)

c-à-d $\overrightarrow{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{F_A}) \perp$ plan $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{FA})$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{M})$ forment un trièdre direct

norme de $\overrightarrow{M}_{/\Delta}$

$M_{/\Delta}(\overrightarrow{F_A}) = OA \times F_A \times |\sin(\alpha)|$ (par définition de la norme du produit vectoriel)

où $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{FA})$

II Valeur algébrique de $\overrightarrow{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{F_A})$

. Si $\overrightarrow{F}$ fait tourner le système dans le sens trigonométrique

alors $\overline{M}(\overrightarrow{F_A}) > 0 \Rightarrow \overline{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{F_A})$

" " $= + OA \times F_A \, \text{signe}(\underbrace{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{F_A}}_{\geq 0})$

" horaire " " $< 0 \Rightarrow$

↳ $\overline{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{F_A}) = -OA\,F_A \sin(\alpha)$

Le moment d'une force est nul si celle-ci passe par l'axe de rotation (Δ) (exemple $\overrightarrow{R}$ ds l'Ex2)

(cette force n'a aucun effet sur la rotation du système)

III Conditions d'équilibre

1) Condition d'équilibre de translation

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \quad (1) \\ \sum F_y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(pour ce cas on n'utilise que l'équation de translation)

2) Condition d'équilibre de rotation

$$\sum \overrightarrow{M}_{/\Delta} (\overrightarrow{F_{ext}}) = \vec{0} \text{ (projetée sur } \overrightarrow{Oz})$$

$$\sum \overline{M}_{/\Delta} (\overrightarrow{F_{ext}}) = 0 \quad (3)$$

Scanned by CamScanner

EX1 :

LOI DE COMPOSITION DES VITESSES

a)

• identifier dans un énoncé quelconque
- le point matériel M
- le repère mobile R'
- " " fixe R

(exemple pour l'exo 1 :
M : cheval
R' : disque tournant
R : repère terrestre)

$$\underbrace{\vec{v}(M)/R}_{\vec{v_a}} = \underbrace{\vec{v}(M)/R'}_{\vec{v_R}} + \underbrace{\vec{v}(R')/R}_{\vec{v_e}}$$

vitesse du point M par rapport au repère fixe R (Terre)

vitesse du pt M par rapport au repère mobile R'

vitesse du repère mobile R' par rapport au repère fixe R

1)

$$\vec{v_a} = \vec{v_R} + \vec{v_e}$$

vitesse absolue — vitesse relative — vitesse d'entraînement

$\vec{v_e}$ ($\in$ de R')

$$\vec{v_a} = \vec{v_R} + \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt}}_{\vec{v_e}} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}}_{\vec{v_e}}$$

(translation)

$\vec{v_e}$ (liée à la rotation du repère mobile)

où $\vec{\Omega}$ = vecteur vitesse angulaire (en rad s^{-1}) qui exprime la rotation de la base mobile du repère R'

3)

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{O'M}}{dt}$$

~~MOMENT DES 2F~~

1) $\vec{OM} = \underset{=\rho\, cst}{R}\, \vec{u_\rho} + z\vec{u_z} = R\,\vec{u_\rho} + a(1 + \sin(\Omega t))$

2) $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\,\dot{\vec{u_\rho}} + (a\Omega\cos(\Omega t))\vec{u_z}$

$= R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + a\Omega\cos(\Omega t)\,\vec{u_z}$

$$\boxed{\vec{v} = R\omega\vec{u_\theta} + a\Omega\cos(\Omega t)\vec{u_z}}$$

↳ vitesse de M / R = repère fixe

3) $\vec{v_a} = \vec{v_R} + \vec{v_e}$

$= \vec{V}_{\substack{\text{oscillation}\\ \text{de } M}} + \vec{V}_{\substack{\text{rotation}\\ \text{de } R' = \text{disque}}}$

$= \dot{z}\,\vec{u_z} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{OM}}_{(\vec{v_e})_{\text{rotation}}}$

$(\vec{V})_{\text{translation } R'} \doteq \frac{d\vec{OO'}}{dt} = \vec{0}$

centres des repères = confondus $\rightarrow O = O'$

$\overbrace{\vec{V}(M)_{/R}}$

$\vec{V_a} = a\,\Omega \cos(\Omega t)\,\vec{u_z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}} \wedge \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}}$

$= a\,\Omega \cos(\Omega t)\,\vec{u_z} + \begin{pmatrix} 0 \times z - \omega \times 0 \\ \omega \times R - 0 \times z \\ 0 \times 0 - 0 \times R \end{pmatrix}$

$= a\,\Omega \cos(\Omega t)\,\vec{u_z} + (R\omega)\,\vec{u_\theta}$

$\boxed{\vec{V_a} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + a\,\Omega \cos(\Omega t)\,\vec{u_z}}$

$= \vec{V}$

Scanned by CamScanner

Ex 2 :

1) $\overline{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{P}) = -P \times OG \cdot \sin(\underbrace{\overrightarrow{OG}, \vec{P}}_{\pi/2})$

$= -P \times \frac{L}{4}$

$\overline{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{T}) = +T \times OB \times \sin(\overbrace{\overrightarrow{OB}, \vec{T}}^{\pi/2})$

$= T \times \frac{3L}{4}$

$\overline{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{R}) = 0$ car $\vec{R}$ passe par l'axe de rotation (distance nulle entre (Δ) et le pt d'application de $\vec{R}$)

$\Sigma \overline{\mathcal{M}}_{/O}(\overrightarrow{F_{ext}}) = 0$ car équil de rotation

$-P \times \frac{L}{4} + T \times \frac{3L}{4} = 0$

$T \frac{3}{\cancel{4}} \cancel{L} = P \times \frac{\cancel{L}}{\cancel{4}}$

$\boxed{T = \frac{P}{3}}$ AN : $T = \frac{100}{3} \approx 33{,}3\,N$

2) $\Sigma(\overrightarrow{F_{ext}}) = \vec{0}$

Projection sur $(\overrightarrow{Oy})$ car forces verticales

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$

$-P + R + T = 0$

$\Leftrightarrow R = P - T$

$\Leftrightarrow R = P - \frac{P}{3}$

$\Leftrightarrow R = \frac{2P}{3}$

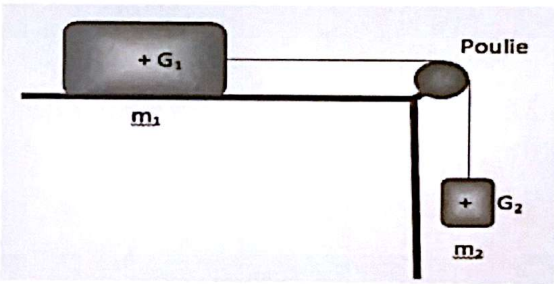
$\Leftrightarrow R = 66{,}6\,N$

Série 5
Dynamique

Exercice 1 (QCM s'évaluer MiMo 8)

On considère deux masses m_1 et m_2 de centres de centres respectifs G_1 et G_2 reliées entre elles par un fil "inextensible" et de masse négligeable. La masse m_1 glisse sur un plan horizontal sans frottement, la masse m_2 se déplace verticalement, comme le montre le schéma ci-dessous. On fait l'hypothèse que le contact entre le fil et la poulie est sans glissement, ce qui revient à dire que la tension est la même en norme en chaque point du fil.

1) Représenter les forces appliquées sur les masses m_1 et m_2.
2) Exprimer l'accélération de l'ensemble en fonction de m_1, m_2 et g.

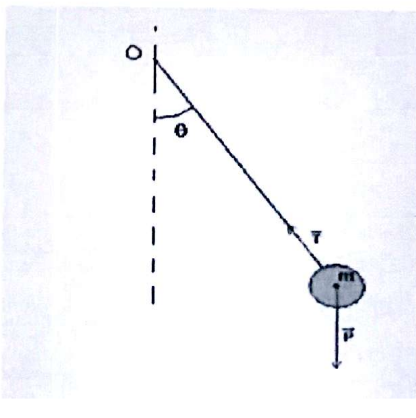


Exercice 2 (QCM s'évaluer MiMo 8)

On considère un pendule simple de longueur L et de masse m. La position de la masse m est repérée par un angle θ.

1) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la masse m, dans la base de Frenet, montrer que l'équation différentielle du mouvement est donnée par : $\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\theta=0$. On est dans le cas des petites oscillations : $\sin(\theta)\approx\theta$.

2) La solution de l'équation établie dans la question (1) est de la forme $\theta(t)=\theta_0\cos(\omega t)$, en déduire les expressions de la pulsation ω et de la période d'oscillation T.
Faire l'application numérique pour $g = 10 m.s^{-2}$, L = 80 cm



PHY

TD5

EX 1 :

2) Calcul de l'accélération de (m_1, m_2) :

on utilise $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

$a = a_x = a_y$

$\underline{m_1}$ $\quad \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{R_N} = m_1\vec{a}$

projection $\begin{cases} \text{sur } \overrightarrow{Ox} : 0 + T_1 + 0 = m_1 a_x \Leftrightarrow \boxed{T_1 = m_1 a} \ (1) \\ \text{sur } \overrightarrow{Oy} : -P_1 + 0 + R_N = 0 \Leftrightarrow R_N = P_1 \end{cases}$

$\underline{m_2}$ $\quad \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_2} = m_2\vec{a}$ projection sur $\overrightarrow{G_1 y}$

$\boxed{P_2 - \underbrace{T_2}_{?} = m_2 a}$ (2)

(1) dans (2) : $m_2 g - m_1 a = m_2 a$

$m_2 g = (m_1 + m_2) a$

$a = \left(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\right) g$

EX2 :

1) RAPPELS : base de Frénet $(\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$

* $\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_T}$
$\quad = R(t)\,\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_T}$

application au pendule simple :

$\vec{v} = L\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_T}$

(L = Rayon de courbure d'oscillation
= longueur du fil)

* $\vec{a}$ Frenet

$\vec{a} = \begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R(t)} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{\text{pendule simple}} = \begin{cases} a_T = L\ddot{\theta} \\ a_N = \dfrac{L^2\dot{\theta}^2}{L} = L\dot{\theta}^2 \end{cases}$

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Rightarrow$ projection $\begin{cases} \text{sur } \overrightarrow{\Pi T} : -P\sin(\theta) + 0 = m a_T = mL\ddot{\theta} \\ \quad -mg\sin(\theta) = mL\ddot{\theta} \ (1) \\ \text{sur } \overrightarrow{\Pi N} : T - P\cos(\theta) = m a_N \\ \quad T - mg\cos(\theta) = m L(\dot{\theta})^2 \ (2) \end{cases}$

$\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N}}$ $\qquad \vec{P} = \begin{pmatrix} -P\sin(\theta) \\ -P\cos(\theta) \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N}}$

1) $\Rightarrow L\ddot{\theta} + g\sin(\theta) = 0$

petites oscillations ($\theta \leq 10°$)
on a $\sin(\theta) \approx \theta$ (en rad)

$$L\ddot{\theta} + g\theta(t) = 0$$

$$\underbrace{\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0}}_{\text{équation diff.}}$$ (en divisant par L)

2) pulsation $= \frac{2\pi}{T}$ ou $= 2\pi F$

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$ est solution de $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

$$\overbrace{\theta_0 \cos(\omega t)}^{\cdot\cdot} + \frac{g}{L} \times V_0 \cos(\omega t) = 0$$

$$-\theta_0 \omega^2 \cos(\omega t) + \frac{g}{L} \times \theta_0 \cos(\omega t) = 0$$

$$\underbrace{\theta_0 \cos(\omega t)}_{\neq 0} \left(-\omega^2 + \frac{g}{L}\right) = 0 \quad , (\forall t)$$

donc $-\omega^2 + \frac{g}{L} = 0$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

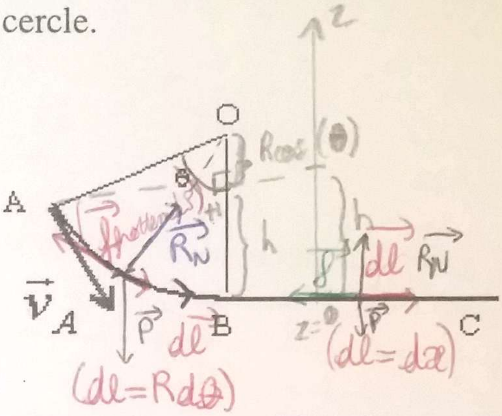
AN: $\omega = \sqrt{\frac{10}{0,8}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,5 \text{ rad.s}^{-1}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \approx 1,7 \text{ s}$$

Série 6
Dynamique du point matériel

Exercice 1

Un solide ponctuel de masse m se déplace sur la piste schématisée ci-dessous. La portion AB est un arc de cercle de rayon R, d'angle θ, de centre O ; la portion BC est un segment horizontal. Les frottements sont négligeables sur la partie circulaire. Sur la partie BC les frottements sont assimilables à une force constante f, colinéaire au vecteur vitesse. On lance le solide du point A avec une vitesse V_A tangente au cercle.



1- a) Comment évoluent l'énergie cinétique et l'énergie potentielle au cours du mouvement.
   b) Que peut-on dire de l'énergie mécanique.

2- Exprimer la vitesse en B en fonction de R, g, V_A et θ. Calculer V_B, on donne m = 0,1kg ; g = 10ms^{-2} ; R = 1,5m ; $V_C = V_A = 2ms^{-1}$; θ =60° ; BC=2 m

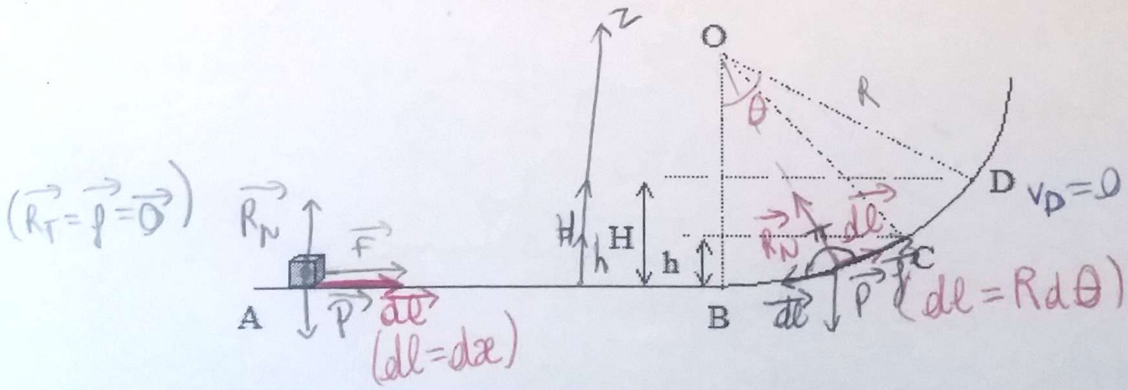
3- Exprimer la force de frottement f en fonction de V_B, V_C et BC, en utilisant le théorème d'énergie mécanique entre B et C. Faire l'application numérique.

Exercice 2

par de force de frottements

Le solide (S) est initialement immobile en A. **On lui exerce entre A et B** une force $\vec{F}$ parallèle à AB et de module constant. Le solide monte jusqu'en D puis revient en arrière ($V_D = 0$).

Les frottements sont négligeables. AB = 4m ; g = 10m/s^2 ; m = 5 kg ; R = 10m ; H = 3m.



1- Représenter les forces agissant sur le solide entre les points A et B.
2- Calculer la vitesse V_B, en utilisant le théorème d'énergie cinétique entre B et D.
3- Calculer la force F appliquée sur le trajet AB, en utilisant le théorème d'énergie cinétique
4- Calculer la vitesse au point C, sachant que h = 1.5m.
5- On suppose maintenant les frottements non négligeables. La valeur f des frottements est constante. Au retour le solide s'arrête en B. Calculer f.

FORMULES

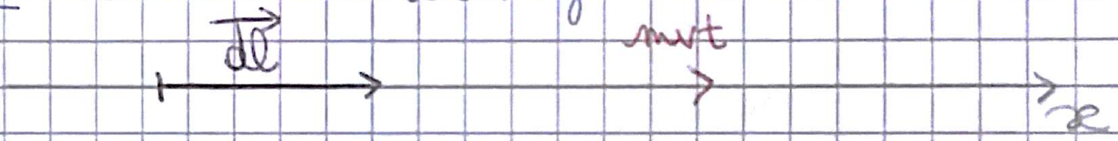
I Travail d'une force quelconque $\vec{F}$

Par déf° : $\underset{A\to B}{W(\vec{F})} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl}$ → somme de travaux élémentaires

$\vec{F}\cdot\vec{dl} = F\,dl\cos\underbrace{(\vec{F},\vec{dl})}_{\alpha}$ $\quad \delta W$ = travail élémentaire

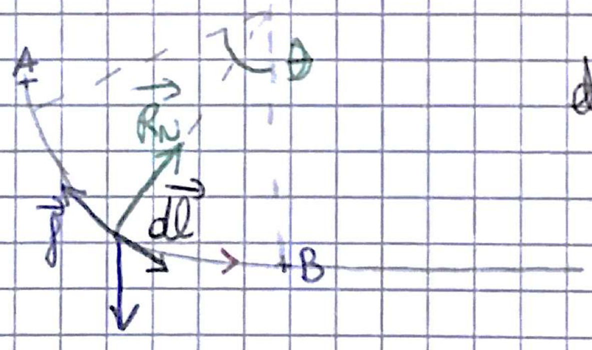
$\vec{dl}$ ⇒ vecteur déplacement élémentaire (longueur très petite)
tangent à la trajectoire
orienté dans le sens du mouvement

exples : • mouvement rectiligne sur un axe $\vec{Ox}$



$dl = dx$

• mouvement circulaire



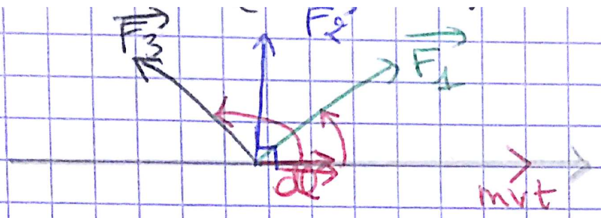
$dl = Rd\theta$

dl = mesure de l'arc élémentaire $= R \times d\theta$
↑ angle élémentaire

* $W(\vec{F_1}) > 0$ $\quad (0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$ → travail moteur

* $W(\vec{F_2}) = 0$ car $\vec{F} \perp \vec{dl}$ → car $\vec{F} \perp \vec{dl}$

* $W(\vec{F_3}) < 0$ $\quad (\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi)$ → travail résistant



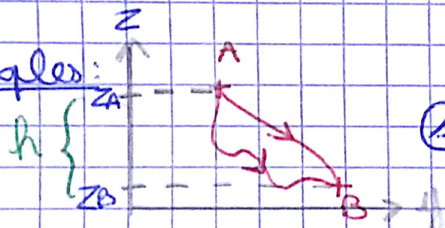
REMARQUE : pour le poids $\vec{P}$ = force conservative

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \pm\, mg\underbrace{h}_{>0}$$

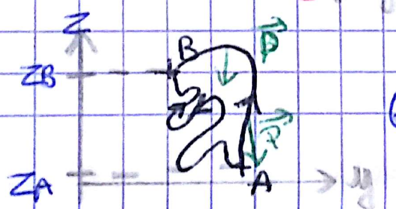
→ ⊕ si $W(\vec{P})$ est moteur ("$\vec{P}$ descend")

⊖ si $W(\vec{P})$ est résistant ("$\vec{P}$ monte")

exples :



①



②

$\vec{P}\begin{pmatrix}0\\-P\end{pmatrix}$

$\vec{dl}\begin{pmatrix}dy\\dz\end{pmatrix}$

① $W_{AB}(\vec{P}) = mgh > 0$

$h = |z_B - z_A| = z_A - z_B$

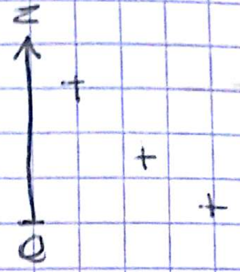
② $W(\vec{P}) = -mgh$

$h = z_B - z_A$

* Energie potentielle de pesanteur

$$E_{pp}(M) = mgz \quad (z = z_M)$$

$$\left(\underset{A \to B}{W}(\vec{P}) = -\underset{A \to B}{\Delta E_{pp}} \right)$$



* Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 \qquad \underset{A \to B}{\Delta E_c} = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2$$

* Energie mécanique

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{p\acute{e}lastique}$$

$$\underset{A \to B}{\Delta E_m} = \underset{A \to B}{\Delta E_c} + \underset{A \to B}{\Delta E_p}$$

* Les 2 théorèmes de la mécanique :

① thm de l'énergie cinétique

$$\underset{A \to B}{\Delta E_c} = \sum \underset{A \to B}{W}(\vec{F}_{ext})$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{T}) + \ldots$$

② thm de l'énergie mécanique

$$\underset{A \to B}{\Delta E_m} = \sum W(\vec{F}_{non\ conservatives})$$

$$\underset{A \to B}{\Delta E_m} = W(\vec{f}_{frottements})$$

<u>REMARQUES :</u> • si frottements négligeables :

$$\vec{f} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \underset{A \to B}{\Delta E_m} = 0 \ (E_m \text{ conservée})$$

$$E_{mA} = E_{mB}$$

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

• si frottements non négligeables :

$$E_{mB} - E_{mA} = \int_A^B \vec{f}_{frott} \cdot \vec{dl}$$

Scanned by CamScanner

TD6 : EXOS

Ex 1 :

1. a) entre A - B : $E_c \nearrow$ $E_p \searrow$

entre B-C : $E_c \searrow$ E_p = constante

b) entre A-B : $E_m = cste$

entre B-C : $E_m \searrow$

2. calcul de v_B : (app° du thm de l'énergie cinétique)

$$\Delta E_{c\,A\to B} = \sum_{A\to B} W(\vec{F_{ext}})$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \underbrace{W(\vec{P})}_{= mgh} + \underbrace{W(\vec{R_N})}_{= 0 \text{ car } \vec{R_N} \perp \vec{dl}}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mg\left(\underbrace{R - R\cos(\theta)}_{OB - OH}\right)$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gR(1-\cos(\theta))$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gR(1-\cos(\theta))}$$

⚠ ne pas oublier de convertir la masse en kg

AN : $v_B = \sqrt{4 + 2\times 10(1{,}5 \times \underbrace{(1 - \frac{1}{2})}_{\frac{1}{2}})}$

$= \sqrt{4 + 15}$

$= \sqrt{19}$ m.s^{-1}

3. $\Delta E_{m\,B\to C} = W(\vec{f})$

$$E_{mC} - E_{mB} = \int_B^C \vec{f}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_B^C f\,dl \underbrace{\cos(\vec{f}, \vec{dl})}_{\cos(\pi)} = f\underbrace{\int_B^C dl}_{BC}$$

$$E_{pC} + E_{cC} - E_{pB} - E_{cB} = -f \times BC$$

$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -f \times BC$$

$$f = -\frac{\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2}{BC} = \frac{-m}{2BC}(V_C^2 - V_B^2)$$

AN : $f = -\frac{0{,}1}{2\times 2}(2^2 - 19) = \frac{1{,}5}{4}$ 0,375

Scanned by CamScanner

EX 2 :

2) $\Delta E_c{}_{B \to D} = \sum W_{B \to D} (\vec{F_{ext}})$

$\frac{1}{2} m v_D^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{T})$

1) Forces : (AB)

$\vec{P}$, $\vec{F}$, $\vec{R_N}$

($\vec{R_N}$ $\perp$ au sol car pas de frottements)

2) 1ère méthode : thm d'E_c entre B et D

$\Delta E_c = \sum W(\vec{F_{ext}}) = W(\vec{P}) + \underbrace{W(\vec{R_N})}_{=0}$ ($\vec{R_N} \perp \vec{dl}$)

$\vec{R_N} \cdot \vec{dl} = 0$

$\rightarrow \cancel{\frac{1}{2} m \underbrace{v_D^2}_{=0}} - \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 = - \cancel{m} g H$

$- \frac{1}{2} v_B^2 = - g H$

$v_B^2 = 2 \times 10 \times 3$

$v_B = \sqrt{60}$
$= 2\sqrt{15}\ ms^{-1}$

2ème méthode : thm d'E_m

$\Delta E_m{}_{B \to D} = W_{B \to D}(\vec{f}) = 0$ (car pas de frottements)

$\Leftrightarrow E_{m_B} = E_{m_D}$

$\Leftrightarrow E_{cB} + E_{ppB} = E_{cD} + E_{ppD}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 + 0 = 0 + \cancel{m} g H$

$\Leftrightarrow v_B^2 = 2 g H$

$\Leftrightarrow v_B^2 = 2\sqrt{15}\ ms^{-1}$

$\approx 8\ ms^{-1}$

3) $\Delta E_{c\,A\to B} = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$

$\frac{1}{2}mv_B^2 - \underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{=0 \text{ car } v_A=0} = W(\vec{F}) + \underbrace{W(\vec{P})}_{=0} + \underbrace{W(\vec{R}_N)}_{=0}$

$(\vec{R}_N \perp \vec{dl})$

tjs même altitude $(\vec{P} \perp \vec{dl})$

$\frac{1}{2}mv_B^2 = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl}$

$= \int_A^B F\,dl\cos(0°)$

ou $= F\int_A^B dl = F.AB \Rightarrow F = \frac{mv_B^2}{2AB}$

(ou bien $F\int_{x_A}^{x_B} dx = F[x]_{x_A}^{x_B} = F(x_B - x_A)$)

$F = \frac{mv_B^2}{2AB} = 37{,}5\,N$

4) <u>Calcul de v_C</u>

* thm d'Em

(entre C et D) ; $v_D = 0$

pas de frottements $\Rightarrow \Delta Em_{C\to D} = 0 \Rightarrow Em_C = Em_D$

$\underbrace{Ec_C} + Epp_C = \underbrace{Ec_D} + Epp_D$

$\frac{1}{2}\cancel{m}v_C^2 + \cancel{m}g\underbrace{z_C}_{=h} = \cancel{m}g\underbrace{z_D}_{=H}$

$\Rightarrow v_C^2 = 2g(H-h)$

$v_C = \sqrt{2g(H-h)} = \sqrt{30}\,ms^{-1}$

$\simeq 5{,}5\,ms^{-1}$

Scanned by CamScanner

5) Calcul de f force de frottements

* thm d'Em

$$\Delta \underset{D\to B}{E_m} = \underset{D\to B}{W}(\vec{f})$$

$$\underbrace{\Delta \underset{D\to B}{E_c}}_{0} + \Delta \underset{D\to B}{E_{pp}} = \int_D^B \vec{f} \cdot \vec{dl}$$

$$\begin{cases} V_D = 0 \\ V_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{Epp_B}_{=0} - Epp_D = \int_D^B f\, dl \, \overbrace{\cos(\pi)}^{=-1}$$

car $z_B = 0$ $\quad \Leftrightarrow -mg\overbrace{z_D}^{H} = -f \overbrace{\int_D^B dl}^{\overset{\frown}{DB}}$

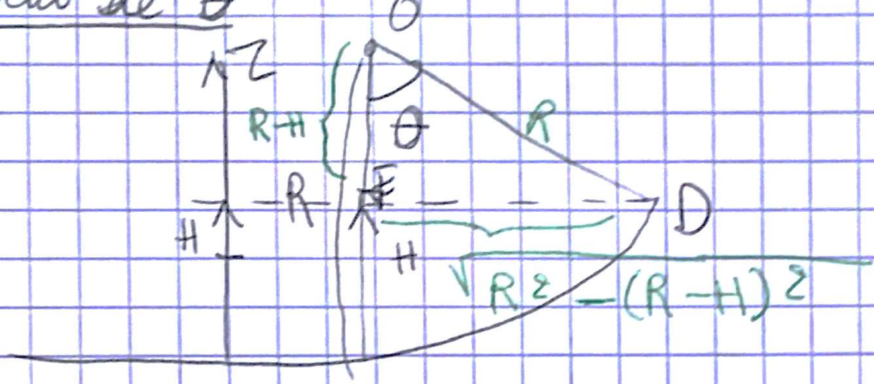
Scanned by CamScanner

$-mgH = -f \times \overset{\frown}{BD}$

la mesure de l'arc $\overset{\frown}{BD}$ par déf° est $R \times \theta$

$$f = \frac{mgH}{R\theta} \quad \text{où } \theta \text{ en rad}$$

<u>Calcul de θ</u>



On utilise $\cos(\theta) = \frac{OE}{OD}$ (triangle rectangle OED)

$$= \frac{R-H}{R} = 1 - \frac{H}{R} \Rightarrow \theta = \text{Arcos}\left(1-\frac{H}{R}\right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{mgH}{R \cdot \text{Arcos}\left(1-\frac{H}{R}\right)}$$

AN : $f \simeq 19N$