Recursión

Taller de Álgebra I

Verano 2020

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número $n \in \mathbb{N}_0$?

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número $n \in \mathbb{N}_0$?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número $n \in \mathbb{N}_0$?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número $n \in \mathbb{N}_0$?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

¡La segunda definición de `factorial` involucra a esta misma función del lado derecho!

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número $n \in \mathbb{N}_0$?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

¡La segunda definición de `factorial` involucra a esta misma función del lado derecho!

```
factorial :: Integer -> Integer
```

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número $n \in \mathbb{N}_0$?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

¡La segunda definición de `factorial` involucra a esta misma función del lado derecho!

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial n
     | n == 0 = 1
```

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número $n \in \mathbb{N}_0$?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

¡La segunda definición de `factorial` involucra a esta misma función del lado derecho!

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial n
      | n == 0 = 1
      | n > 0 = n * factorial (n-1)
```

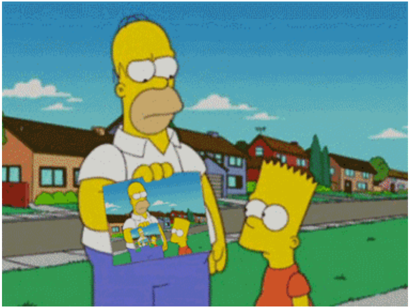
Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en “expresiones sencillas”.
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número $n \in \mathbb{N}_0$?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

¡La segunda definición de `factorial` involucra a esta misma función del lado derecho!

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial n
      | n == 0 = 1
      | n > 0 = n * factorial (n-1)
```



Recursión y reducción

Ejercicios

1. Dada la función:

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial n
  | n == 0 = 1
  | n > 0 = n * factorial (n-1)
```

Reducir las expresiones:

- `factorial 0`
- `factorial 3`
- `factorial (-1)`

¿y si estaba definida así?:

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial n
  | n == 0 = 1
  | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Cómo pensar recursivamente?

- Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo `factorial`,

¿Cómo pensar recursivamente?

- Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo `factorial`,
  - en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero?
    En este caso, suponemos ya calculado `factorial (n-1)` y lo combinamos multiplicándolo por `n` para lograr obtener `factorial n`.

¿Cómo pensar recursivamente?

- Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo `factorial`,
  - en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero?
    En este caso, suponemos ya calculado `factorial (n-1)` y lo combinamos multiplicándolo por `n` para lograr obtener `factorial n`.
  - además, identificamos el o los casos base. En el ejemplo de `factorial`, definimos como casos base la función sobre 0: `factorial n | n == 0 = 1`

Definiciones recursivas

¿Cómo pensar recursivamente?

- Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo `factorial`,
  - en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero?
    En este caso, suponemos ya calculado `factorial (n-1)` y lo combinamos multiplicándolo por `n` para lograr obtener `factorial n`.
  - además, identificamos el o los casos base. En el ejemplo de `factorial`, definimos como casos base la función sobre 0: `factorial n | n == 0 = 1`
- Propiedades de una definición recursiva:
  - las llamadas recursivas tienen que *"acercarse"* a un caso base.
  - tiene que tener uno o más casos base que dependerán del tipo de llamado recursivo.
    Un caso base, es aquella expresión que no tiene paso recursivo.

Definiciones recursivas

¿Cómo pensar recursivamente?

- Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo `factorial`,
  - en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero?
    En este caso, suponemos ya calculado `factorial (n-1)` y lo combinamos multiplicándolo por `n` para lograr obtener `factorial n`.
  - además, identificamos el o los casos base. En el ejemplo de `factorial`, definimos como casos base la función sobre 0: `factorial n | n == 0 = 1`
- Propiedades de una definición recursiva:
  - las llamadas recursivas tienen que *"acercarse"* a un caso base.
  - tiene que tener uno o más casos base que dependerán del tipo de llamado recursivo. Un caso base, es aquella expresión que no tiene paso recursivo.
- En cierto sentido, la recursión es el equivalente computacional de la inducción para las demostraciones.

Asegurarse de llegar a un caso base

- Consideremos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:
- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | otherwise = esPar (n-2)
  ```
  ```

Asegurarse de llegar a un caso base

- Consideremos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:

- ```haskell
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | otherwise = esPar (n-2)
  ```

  ¿Qué problema tiene esta función?
  ```

Asegurarse de llegar a un caso base

- Consideremos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:

- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | otherwise = esPar (n-2)
  ```

  ¿Qué problema tiene esta función?

  ¿Cómo se arregla?
  ```

Asegurarse de llegar a un caso base

- Consideremos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:

- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | otherwise = esPar (n-2)
  ```

  ¿Qué problema tiene esta función?

  ¿Cómo se arregla?

- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | n==1 = False
          | otherwise = esPar (n-2)
  ```

- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | otherwise = not (esPar (n-1))
  ```
  ```

Ejercicios

2. Implementar la función $fib : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ que devuelve el i-ésimo número de Fibonacci. Recordar que la secuencia de Fibonacci se define como:

$$fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. Implementar funciones recursivas para calcular el n-ésimo término de las siguientes sucesiones del Ejercicio 16 y 20 de la Práctica 2.

   a. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2\ n\ a_n + 2^{n+1} n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Pueden verificar con el término general $a_n = 2^n n!$

   b. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_{n+2} = n a_{n+1} + 2(n+1) a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   c. $a_1 = -3$, $a_2 = 6$ y $a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

Implementación de sumatorias

¿Cómo podemos implementar la función $\mathit{sumatoria} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, donde $\mathit{sumatoria}(n) = \sum_{i=1}^{n} i$

Implementación de sumatorias

¿Cómo podemos implementar la función *sumatoria* : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, donde $sumatoria(n) = \sum_{i=1}^{n} i$
Para resolver este tipo de ejercicios, se puede pensar a las sumatorias como

$$sumatoria(n) = \sum_{i=1}^{n} i = n + \sum_{i=1}^{n-1} i \qquad \text{para n} > 1$$

Sumatorias

Implementación de sumatorias

¿Cómo podemos implementar la función $\mathit{sumatoria} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, donde $\mathit{sumatoria}(n) = \sum_{i=1}^{n} i$

Para resolver este tipo de ejercicios, se puede pensar a las sumatorias como

$$\mathit{sumatoria}(n) = \sum_{i=1}^{n} i = n + \sum_{i=1}^{n-1} i \qquad \text{para n} > 1$$

Es decir:

$$\mathit{sumatoria}(n) = n + \mathit{sumatoria}(n-1) \qquad \text{para n} > 1$$

Sumatorias

Implementación de sumatorias

¿Cómo podemos implementar la función *sumatoria* : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, donde $sumatoria(n) = \sum_{i=1}^{n} i$

Para resolver este tipo de ejercicios, se puede pensar a las sumatorias como

$$sumatoria(n) = \sum_{i=1}^{n} i = n + \sum_{i=1}^{n-1} i \qquad \text{para n} > 1$$

Es decir:

$$sumatoria(n) = n + sumatoria(n-1) \qquad \text{para n} > 1$$

Ejercicios: otras sumatorias

Implementar y dar el tipo de las siguientes funciones simil Ejercicio 5 Práctica 2.

16 $f1(n) = \sum_{i=0}^{n} 2^i$, $n \in \mathbb{N}_0$.

17 $f2(n,q) = \sum_{i=1}^{n} q^i$, $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$

18 $f3(n,q) = \sum_{i=1}^{2n} q^i$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $q \in \mathbb{R}$

19 $f4(n,q) = \sum_{i=n}^{2n} q^i$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $q \in \mathbb{R}$

A veces el paso recursivo no es obvio o no está dado explícitamente. Hay que pensar...

Ejercicios

20 Escribir una función para determinar si un número natural es múltiplo de 3. No está permitido utilizar `mod` ni `div`.

21 Implementar la función `sumaImpares :: Integer -> Integer` que dado $n \in \mathbb{N}$ sume los primeros n números impares. Ej: `sumaImpares 3` $\rightsquigarrow$ 1+3+5 $\rightsquigarrow$ 9.

22 Escribir una función `medioFact` que dado $n \in \mathbb{N}$ calcula $n!! = n\,(n-2)(n-4)\cdots$. Por ejemplo:

`medioFact` $10 \rightsquigarrow 10 * 8 * 6 * 4 * 2 \rightsquigarrow 3840$.
`medioFact` $9 \rightsquigarrow 9 * 7 * 5 * 3 * 1 \rightsquigarrow 945$.

23 Escribir una función recursiva que no termine si se la ejecuta con enteros negativos (y en cambio sí termine para el resto de los enteros).