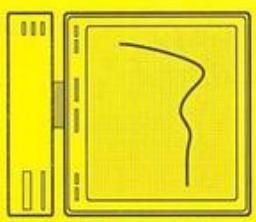


IDENTIFICAÇÃO DE

# SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES



modelo  
(parâmetros)

ANTONIO AUGUSTO RODRIGUES COELHO  
LEANDRO DOS SANTOS COELHO



# SUMÁRIO

Editora da UFSC  
 Campus Universitário – Trindade  
 Caixa Postal 476  
 88010-970 – Florianópolis – SC  
 ☎ (48) 331-9408, 331-9605 e 331-9686  
 ☐ edufsc@editora.ufsc.br  
 ☒ http://www.editora.ufsc.br

## Prefácio.....

Direção editorial e capa:  
*Paulo Roberto da Silva*  
 Editoração:  
*Daniella Zatarian*  
 Supervisão técnico-editorial:  
*Ady Verger Maingué*  
 Revisão:  
*Letícia Tambosi*

## Capítulo 1 – Introdução.....

1.1 Sistema.....	9
1.2 Modelagem e Identificação .....	10
1.3 Descrição de Sistemas: Modelos Contínuos .....	12
1.3.1 Exemplos de Modelagem por Leis da Física .....	13
1.4 Descrição de Sistemas: Modelos Discretos .....	19
1.4.1 Exemplo de Modelagem Discreta .....	21
1.4.2 Exemplo de Modelagem por Análise Experimental.....	22
1.5 Problemas .....	24

## Capítulo 2 – Noções Básicas sobre Identificação.....

2.1 Concepções para Identificação.....	27
2.2 Qualidade do Modelo Matemático Estimado .....	32
2.3 Identificação Experimental por Computador .....	34
2.4 Background e Literatura .....	35
2.5 Aplicação em Controle Adaptativo .....	38
2.6 Problemas .....	39

## Capítulo 3 – Modelos de Processos de Ordem Reduzida e Complexos.....

3.1 Introdução.....	43
3.2 Modelos Contínuos de Ordem Reduzida.....	43
3.3 Modelos Discretos de Ordem Reduzida.....	48
3.4 Modelos de Sistemas Discretos Complexos.....	51
3.5 Perturbações nos Modelos Discretos .....	53
3.6 Problemas .....	58

## Capítulo 4 – Métodos Clássicos para Modelagem de Processos.....

4.1 Introdução.....	63
4.2 Modelagem de Processos de Primeira Ordem .....	65
4.3 Modelagem de Processos de Segunda Ordem .....	75

Reservados todos os direitos de publicação total ou parcial pela Editora da UFSC

Impresso no Brasil

## PREFÁCIO

4.4 Modelagem de Processos via Resposta em Freqüência.....	83
4.5 Modelagem de Processos via Resposta Impulsiva .....	90
4.6 Problemas.....	94
<b>Capítulo 5 – Identificação de Sistemas Representados por Equações a Diferenças.....</b>	<b>99</b>
5.1 Introdução .....	99
5.2 Formalismo Histórico dos Mínimos Quadrados.....	100
5.3 Estimador dos Mínimos Quadrados Não-Recursivo .....	101
5.3.1 Propriedades do Estimador dos Mínimos Quadrados .....	111
5.4 Estimador dos Mínimos Quadrados Recursivo .....	112
5.4.1 Derivação do Estimador $MQR$ .....	114
5.5 Estimação de Processos Variantes no Tempo .....	127
5.5.1 Problema do Rastreamento de Parâmetros Variantes .....	127
5.5.2 Atualização de $P(t)$ .....	127
5.5.2.1 Busca Aleatória ( <i>Random Walk</i> ).....	128
5.5.2.2 Reinicialização de $P(t)$ ( <i>Covariance Resetting</i> ) .....	131
5.5.2.3 Fator de Esquecimento .....	131
5.6 Algoritmo de Estimação da Aproximação Estocástica.....	142
5.7 Algoritmo de Estimação da Variável Instrumental .....	145
5.7.1 Algoritmo Não-Recursivo da Variável Instrumental .....	146
5.7.2 Algoritmo Recursivo da Variável Instrumental .....	147
5.7.3 Seleção da Variável Instrumental .....	147
5.7.4 Algoritmo da Variável Instrumental Simétrica .....	150
5.8 Algoritmo de Estimação da Matriz Estendida.....	151
5.9 Problemas .....	153
<b>Capítulo 6 – Considerações Finais sobre Identificação .....</b>	<b>159</b>
6.1 Fundamentos para Identificação via Relé.....	159
6.2 Estimação de Modelos Ponto a Ponto .....	162
6.2.1 Estimação Não-Recursiva pela Resposta em Freqüência.....	165
6.3 Estimação de Modelos de Primeira e de Segunda Ordem .....	167
6.4 Aplicações via Experimentação e Simulação.....	172
6.5 Problemas .....	175
Bibliografia .....	177

Com a tendência de processos cada vez mais complexos, é de importância o conhecimento dos modelos matemáticos para auxiliarem na análise, no projeto e no entendimento do funcionamento dos sistemas de controle sob investigação. Como abordado neste livro, *identificação de sistemas dinâmicos lineares* é o procedimento de derivação do modelo matemático do sistema a partir de suas observações. Um grande interesse do uso de *identificação* decorre dos significativos avanços tecnológicos nas áreas de engenharia elétrica, ciência da computação, medicina, entre outras.

Este livro está organizado conforme apresentado a seguir. O Capítulo 1 procura caracterizar, configurar e dar exemplos da área de identificação, e diferenciá-la da tarefa de modelagem com base nas leis da física. No Capítulo 2 apresentam-se os fundamentos básicos sobre identificação. Aspectos da qualidade do modelo estimado e as características da identificação *off-line* e *on-line* são também discutidos. O Capítulo 3 enfoca a representação de sistemas dinâmicos contínuos e discretos para modelos de ordem reduzida. A presença de perturbações de natureza estocástica e de carga é discutida na representação discreta de modelos complexos. No Capítulo 4 são apresentados e revistos métodos de estimação com base nas respostas ao degrau, em freqüência e impulsiva. O Capítulo 5 aborda o estimador dos mínimos quadrados não-recursivo e recursivo. Diversas técnicas para melhorar a capacidade de adaptação do estimador dos mínimos quadrados recursivo, para tratar processos variantes no tempo, são também apresentadas. Adicionalmente, consideram-se os algoritmos da aproximação estocástica e variável instrumental. Finalmente, o Capítulo 6 trata da modelagem de sistemas com a aplicação do relé na malha de controle.

O material da versão preliminar deste livro tem sido utilizado em cursos de graduação (Engenharia de Controle e Automação Industrial) e de pós-graduação (Engenharia Elétrica) da Universidade Federal de Santa Catarina. Do leitor são exigidos conhecimentos básicos em Sistemas de

Controle Contínuos e Discretos. As simulações através de computador são indispensáveis para facilitar o entendimento dos diferentes algoritmos de *identificação de processos*. Muitas das simulações apresentadas foram realizadas com o auxílio do software científico denominado *Matlab*, mas outros softwares aplicativos em controle com características similares também podem ser utilizados.

O livro *Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares* pode ser utilizado no ensino, pesquisa e consulta em cursos de graduação, pós-graduação e especialização, em Engenharia Elétrica e em Engenharia de Controle e Automação, para auxiliar na análise e projeto nas áreas pertinentes. O livro contém figuras, programas de computador (*Matlab*), exemplos e lista de problemas.<sup>1</sup>

O principal enfoque do livro é o desenvolvimento de metodologias para estimativa de processos dinâmicos lineares. Casos mais gerais (sistemas não-lineares e multivariáveis) podem ser obtidos em Amaral (1980), Haber e Unbehauen (1990), Ljung (1999), Marchi *et al.*, (1999), Sakai, (1999), Aguirre (2000), entre outros.

O primeiro autor gostaria de agradecer o apoio institucional e financeiro proporcionado pelo DEE da Universidade Federal do Pará, INEEL/DAS da Universidade Federal de Santa Catarina e CNPq, para a realização de pesquisas, desde 1986, nas áreas de Identificação e Controle Adaptativo/Preditivo, apoio importantíssimo para a concretização deste livro. Ao Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral, da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP, o meu muito obrigado pelo incentivo e aprimoramento do conhecimento técnico do assunto.

Finalmente, gostaríamos de manifestar gratidão a inúmeras pessoas e entidades que colaboraram na implementação deste livro. É impossível mencionar de forma individual todas as pessoas que deram sugestões, incentivaram e colaboraram, mas agradecemos a todos pelos valiosos comentários.

## INTRODUÇÃO

*Sistema. Modelagem e identificação. Descrição de sistemas: modelos contínuos. Descrição de sistemas: modelos discretos. Problemas.*

### 1.1 SISTEMA

O conceito de sistema pode ser definido de diferentes formas. Em controle de processos, denota-se como um objeto ou uma coleção de objetos que realiza um certo objetivo e cujas propriedades pretende-se estudar. Alguns exemplos são: sistema de fabricação de papel ou cerâmica, sistema solar, circuito elétrico, servomecanismo de posição, sistema biológico ou econômico, manipulador robótico, reator, coluna de destilação, entre outros (Dorf e Bishop, 1995; Ogata, 2002).

A figura (1.1) ilustra os principais elementos de um sistema de controle.



Figura 1.1 – Componentes de um sistema de controle.

Os problemas de controle associados à estrutura da figura (1.1) são:

- *Análise:* é conhecida a entrada,  $u(\cdot)$ , o sistema,  $h(\cdot)$ , e deve-se obter a saída,  $y(\cdot)$ ;

<sup>1</sup> A solução de alguns dos problemas propostos encontra-se disponível no site <<http://www.das.ufsc.br/~aarc/>>.

- *Projeto:* é conhecido o sistema,  $h(\cdot)$ , a saída desejada,  $y(\cdot)$ , e deve-se obter a entrada,  $u(\cdot)$ , para proporcionar tal saída;
- *Identificação:* é conhecida a entrada,  $u(\cdot)$ , a saída,  $y(\cdot)$ , e deve-se obter o sistema,  $h(\cdot)$ , de modo que  $\hat{y}(\cdot) \rightarrow y(\cdot)$ , onde  $\hat{y}(\cdot)$  é a saída do sistema real (medida) e  $\hat{y}(\cdot)$  é a saída estimada.

## 1.2 MODELAGEM E IDENTIFICAÇÃO

Entende-se por modelagem e identificação a determinação do modelo matemático de um sistema representando os seus aspectos essenciais de forma adequada para uma utilização particular (diagnóstico, supervisão, otimização, controle). Os procedimentos envolvidos na elaboração de modelos matemáticos estão mostrados na figura (1.2) e são usualmente classificados em (Ljung e Glad, 1994):

- *Análise físico-matemática:* baseia-se nas leis da física que caracterizam um sistema particular, como as leis de conservação de massa, energia e momento;
- *Análise experimental:* baseia-se nas medidas ou observações do sistema.

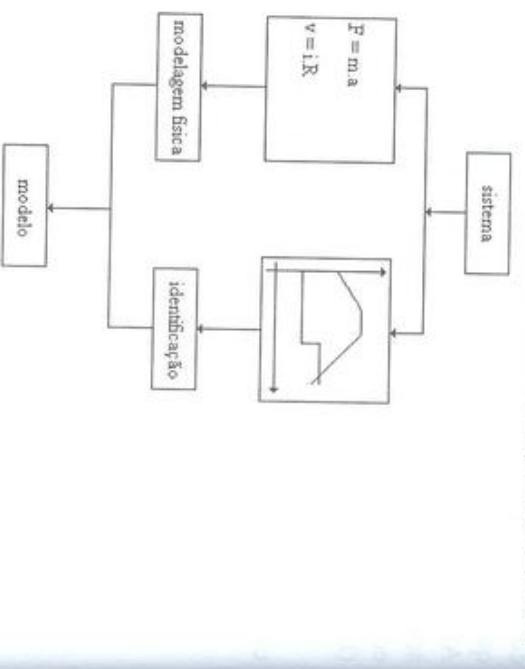


Figura 1.2 – Princípios para a construção de um modelo matemático.

Estes procedimentos propiciam a obtenção de modelos que representam a dinâmica do sistema (processo ou planta). Para fins de controle de processos, não se pretende encontrar um modelo matemático exato, mas um modelo adequado para uma determinada aplicação. Na prática, utiliza-se a hipótese básica, para a elaboração de modelos, de que processos reais, em geral, não necessitam obrigatoriamente de modelos complexos (Hang e Chin, 1991; Gessing, 1996; Ljung, 1999).

O modelo de um sistema é uma equação matemática utilizada para responder a questões sobre o sistema sem a realização de experimentações (através de um modelo pode-se calcular ou decidir como o sistema comporta-se sob determinadas condições operacionais). A utilização do modelo para simulação do sistema constitui-se um procedimento de baixo custo e seguro para experimentar o sistema. Entretanto, a validade (adequação) dos resultados de simulação depende completamente da qualidade do modelo matemático do sistema.

Alguns dos diferentes propósitos para a utilização de modelos matemáticos em automação industrial são:

- *Previsão:* é uma tentativa de prever os estados futuros do sistema (comportamento dinâmico) e está limitada à precisão do modelo e aos efeitos das perturbações atuantes (presentes) no sistema;
- *Análise e projeto de sistemas de controle:* proporciona um vasto campo para aplicação em modelagem e identificação na sintonia de controladores clássicos, síntese de algoritmos de controle adaptativos e preditivos, e na estimativa do estado de variáveis não-mensuráveis; por exemplo, a estimativa da velocidade a partir da posição é uma medida indireta;
- *Supervisão:* utiliza a simulação, com base no modelo matemático, para a avaliação das características operacionais do sistema, para o projeto de engenharia ou para o treinamento de operadores. Muitas vezes é também utilizado na detecção de erros e diagnóstico;
- *Otimização:* empregado na tomada de decisões nos mais variados campos: no escalonamento, na manutenção e na economia em sistemas industriais (maximizar produção, minimizar custos, etc.). A otimização de sistemas necessita de modelos matemáticos precisos.

### 1.3 DESCRIÇÃO DE SISTEMAS: MODELOS CONTÍNUOS

A representação de sistemas pode ser realizada pela função de transferência, resposta impulsiva ou através das equações de estados. A seguir, apresentam-se de forma resumida as três abordagens utilizadas para descrever sistemas dinâmicos contínuos (Seborg *et al.*, 1989; Dorf e Bishop, 1995; Jacquot, 1995; Ogata, 2002).

#### i) Função de transferência contínua

A função de transferência de um sistema é a relação entre a transformada de *Laplace* da saída,  $Y(s)$ , pela transformada de *Laplace* da entrada,  $U(s)$ , ou seja,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.1)$$

é uma razão de dois polinômios em  $s$  e está representada por

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1.2)$$

onde

$$B(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j \quad ; \quad A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad (1.3)$$

sendo  $n$  a ordem do sistema,  $a_n = I$  e  $n \geq m$  (sistema causal). Os elementos  $\{b_j, a_i, n\}$  com  $j \in [0, m]$  e  $i \in [0, n]$  são desconhecidos e devem ser determinados analiticamente ou estimados. Algumas vezes assume-se que o valor de  $n$  é conhecido *a priori*.

#### ii) Resposta impulsiva contínua

Em um sistema linear invariante no tempo, os sinais de entrada,  $u(t)$ , e saída,  $y(t)$ , estão relacionados pela integral de convolução dada por

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

onde  $h(t)$  é a resposta impulsiva do sistema.

A resposta impulsiva está relacionada com a função de transferência por

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] \quad (1.4)$$

onde  $L^{-1}$  é a transformada inversa de *Laplace* e  $t$  é o tempo contínuo.

#### iii) Equações de estados contínuas

A função de transferência está relacionada com a representação de estados, no caso monovariável, de acordo com a seguinte relação:

$$H(s) = c(sI - A)^{-1}b \quad (1.5)$$

onde  $A$  é a matriz do sistema ( $nxn$ ),  $b$  é o vetor de entrada ( $nx1$ ) e  $c$  é o vetor de saída ( $1xn$ ). As equações de estados são

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t)$$

sendo  $x(t)$  o vetor de estados ( $mx1$ ),  $u(t)$  o sinal de entrada e  $y(t)$  a saída do sistema.

#### 1.3.1 EXEMPLOS DE MODELAGEM POR LEIS DA FÍSICA

##### i) Representação matemática dos sistemas elétrico e mecânico

Considere a figura (1.3) que ilustra modelos físicos simples de um circuito elétrico  $RLC$  e um sistema mecânico massa-mola-amortecedor.

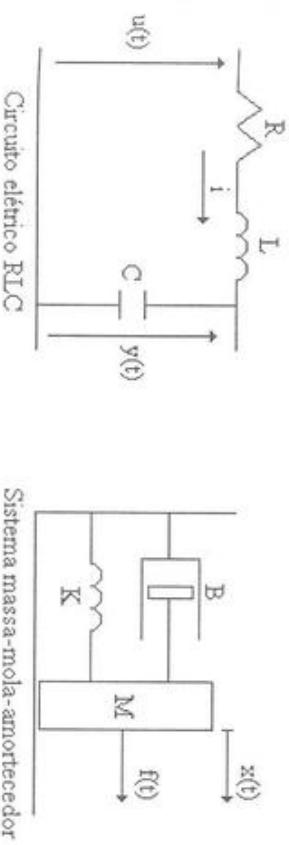


Figura 1.3 – Sistemas elétrico e mecânico.

Com base na lei das tensões de Kirchhoff, tem-se a equação que descreve a dinâmica do sistema elétrico, ou seja,

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt ; \quad i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \quad (1.7)$$

onde  $R$  é a resistência,  $L$  é a indutância,  $C$  é a capacidade,  $u(t)$  é a tensão de entrada e  $y(t)$  é a tensão de saída.

Por outro lado, aplicando a segunda lei de Newton no sistema massa-mola-amortecedor, obtém-se

$$f(t) = Kx(t) + B \frac{dx(t)}{dt} + M \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (1.8)$$

onde  $K$  é a constante da mola,  $B$  é o coeficiente de atrito,  $M$  é a massa,  $f(t)$  é a força (entrada) e  $x(t)$  é o deslocamento (saída).

As representações matemáticas dos sistemas em termos das respectivas transformadas de Laplace são dadas por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} ; \quad \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (1.9)$$

As funções de transferência obtidas com as parametrizações físicas em termos das constantes  $R$ ,  $L$ ,  $C$  ou  $M$ ,  $K$ ,  $B$  são casos especiais dos modelos entrada-saída. Em geral, os modelos avaliados, nestes casos, são denominados *modelos paramétricos* e representam uma dada estrutura onde os parâmetros são algumas vezes desconhecidos e devem ser estimados. Por outro lado, para avaliar os parâmetros (valores numéricos) através da modelagem por leis da física, necessita-se conhecer as condições internas e externas bem como a estrutura física do sistema.

*Exemplo 1.1* – Seja o sistema massa-mola-amortecedor da figura (1.3). Admitir que os parâmetros físicos do sistema são:  $M = 2 \text{ kg}$ ,  $B = 4 \text{ Nseg/m}$ ,  $K = 12 \text{ N/m}$ . A resposta temporal da saída (deslocamento), para uma entrada  $F(s) = 1 \text{ N}$ , está ilustrada na figura (1.4) e a programação em Matlab na tabela (1.1).

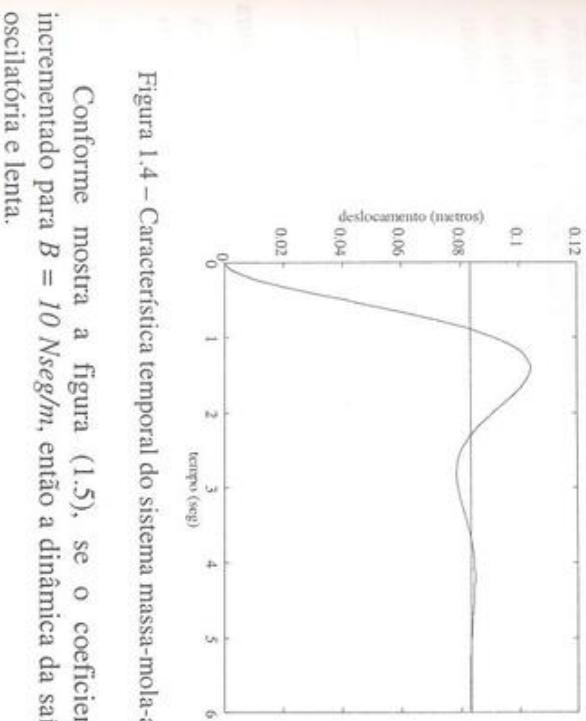


Figura 1.4 – Característica temporal do sistema massa-mola-amortecedor.

Conforme mostra a figura (1.5), se o coeficiente de atrito é incrementado para  $B = 10 \text{ Nseg/m}$ , então a dinâmica da saída torna-se não-oscilatória e lenta.

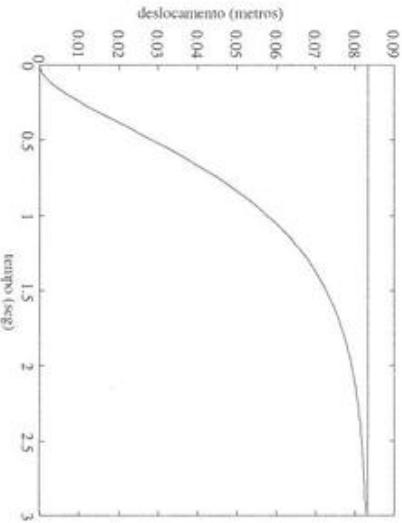


Figura 1.5 – Saída do sistema massa-mola-amortecedor para  $B = 10 \text{ Nseg/m}$ .

Tabela 1.1 – Código em Matlab do sistema mecânico da equação (1.9).

```
% Dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor
M=2;
B=4;
R=12;
K=12;
num=[1];
den=[M B K];
printsys(num,den,'s');
step(num,den);
roots(den); % Definir polinômios
% Avaliar resposta
```

ii) Representação matemática do sistema motor DC

Seja o motor DC controlado por armadura conforme ilustra a figura (1.6).

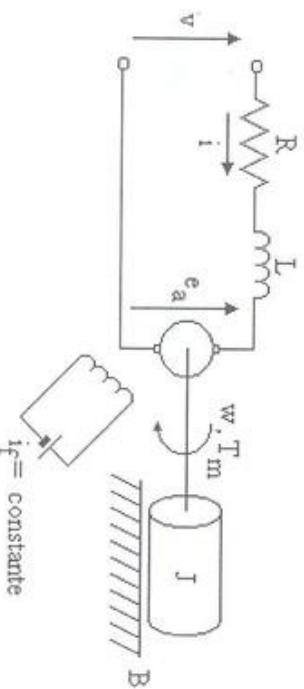


Figura 1.6 – Diagrama simplificado de um motor DC controlado por armadura.

As equações diferenciais que determinam o comportamento dinâmico do motor DC são

$$J \frac{dw(t)}{dt} + Bw(t) = T_m(t) \quad ; \quad T_m(t) = K_a i(t)$$

(1.10)

$$e_a(t) = K_b w(t) \quad ; \quad L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + e_a(t) = v(t)$$

Os parâmetros e as variáveis de interesse são:  $R$  (resistência de armadura),  $L$  (indutância de armadura),  $i(t)$  (corrente de armadura),  $v(t)$  (corrente de campo),  $w(t)$  (velocidade angular - saída),  $T_m(t)$  (torque fornecido pelo motor),  $K_a$  (constante de torque),  $K_b$  (constante de velocidade),  $J$  (momento de inércia equivalente ao motor e à carga referida ao eixo do motor) e  $B$  (coeficiente de fricção equivalente ao motor e à carga referida ao eixo do motor).

A relação  $\frac{W(s)}{V(s)}$  é dada por

$$\frac{W(s)}{V(s)} = \frac{K_a}{(Is + B)(Ls + R) + K_a K_b} \quad (1.11)$$

A representação matemática e o comportamento dinâmico do motor DC são conhecidos se os parâmetros são fornecidos pelo fabricante (especificações de catálogo).

iii) Representação matemática do sistema monotanque

Considere o sistema monotanque conforme a figura (1.7), onde  $A$  é a área do tanque ( $m^2$ ),  $a$  é a área do tubo de saída ( $m^2$ ),  $h(t)$  é o nível do líquido no tanque ( $m$ ),  $u(t)$  é a vazão de entrada ( $m^3/seg$ ) e  $q(t)$  é a vazão de saída ( $m^3/seg$ ).

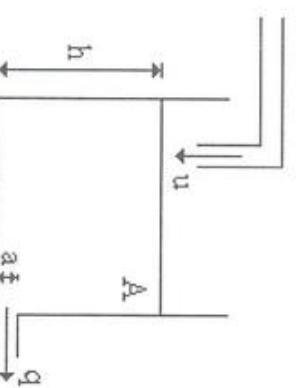


Figura 1.7 – Processo de nível.

Para avaliar suas características operacionais, deve-se obter uma equação diferencial não-linear para o sistema (calcular um modelo matemático relacionando as variáveis de entrada -  $u(t)$  e saída -  $h(t)$ ).

(corrente de campo),  $v(t)$  (tensão de armadura - entrada),  $e_a(t)$  (força contra-

Assim, utiliza-se a lei de *Bernoulli* que descreve a relação entre a velocidade de vazão da saída (*m/s*) e o nível do líquido no tanque, isto é,

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)} \quad (1.12)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade.

A equação relacionando o vazão da saída,  $q(t)$ , e a velocidade de vazão da saída,  $v(t)$ , é dada por

$$q(t) = av(t) \quad (1.13)$$

O volume de líquido no tanque, em um instante  $t$ , é calculado por

$$Ah(t) \quad (\text{m}^3) \quad (1.14)$$

e modifica-se de acordo com a diferença entre o fluxo de entrada e saída (denominado *balanço de massa*), isto é,

$$\frac{dAh(t)}{dt} = -q(t) + u(t) \quad (1.15)$$

Substituindo-se as equações (1.12) e (1.13) na equação (1.15), obtém-se uma equação diferencial não-linear para avaliar o comportamento do nível do líquido, ou seja,

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{a\sqrt{2g}}{A} \sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t) \quad (1.16)$$

Pelo conhecimento da dimensão dos diferentes elementos que compõem o sistema monotanque, pode-se avaliar sua dinâmica pela equação (1.16); por exemplo, é possível determinar o nível  $h(t)$  quando o fluxo de entrada  $u(t)$  é conhecido.

O fluxo de saída é calculado por

$$q(t) = a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \quad (1.17)$$

#### 1.4 DESCRIÇÃO DE SISTEMAS: MODELOS DISCRETOS

A seguir, apresentam-se de forma resumida as três abordagens utilizadas para descrever sistemas discretos. Com o auxílio do software científico *Matlab*, pode-se elaborar e converter os modelos contínuos em discretos. Também é possível, através das equações que descrevem as transformações retangular ou trapezoidal, determinar os correspondentes modelos contínuos e discretos.

##### i) Função de transferência discreta

A função de transferência discreta é a relação entre a transformada-z da saída,  $Y(z)$ , pela transformada-z da entrada,  $U(z)$ , isto é,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (1.18)$$

A relação  $H(z)$  é uma razão de dois polinômios em  $z$  e está representada por

$$H(z) = \frac{B^d(z)}{A^d(z)} \quad (1.19)$$

onde

$$B^d(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j \quad ; \quad A^d(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \quad (1.20)$$

sendo  $n \geq m$ ,  $a_n^d = 1$  e  $n$  é a ordem do sistema. Os elementos  $\{b_j^d, a_i^d, n\}$  com  $j \in [0, m]$  e  $i \in [0, n]$  são desconhecidos e devem ser determinados através de uma modelagem matemática do sistema ou através da identificação. Algumas vezes assume-se que o valor de  $n$  é conhecido *a priori*.

##### ii) Resposta impulsiva discreta

A resposta impulsiva está relacionada com a função de transferência por

$$h(t) = Z^{-1}[H(z)] \quad (1.21)$$

onde  $Z^{-1}$  é a transformada-z inversa e  $t$  é o tempo discreto.

As amostras da resposta impulsiva,  $h(t)$ , estão relacionadas com as amostras da resposta ao degrau,  $s(t)$ , pelas seguintes equações:

$$h(t) = \frac{1}{T_s} [s(t) - s(t-1)] ; \quad s(t) = \sum_{i=0}^{t-1} h(i)$$

### iii) Equações de estados discretas

A função de transferência está relacionada com a representação de estados discrete, no caso monovariável, por

$$H(z) = c(zI - A^d)^{-1} b^d \quad (1.22)$$

onde  $A^d$  é a matriz do sistema ( $n \times n$ ),  $b^d$  é o vetor de entrada ( $n \times 1$ ) e  $c$  é o vetor de saída ( $1 \times n$ ). As equações de estados na forma discreta são

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A^d x(t) + b^d u(t) \\ y(t) &= c x(t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

sendo  $x(t)$  o vetor de estados ( $n \times 1$ ),  $u(t)$  a seqüência de entrada e  $y(t)$  a saída (medidas especificadas a cada período de amostragem).

Na avaliação de modelos matemáticos discretos, deve-se selecionar um período de amostragem,  $T_s$ , para cada aplicação particular, de acordo com uma das seguintes relações (Seborg *et al.*, 1989; Åström e Wittenmark, 1990; Jacquot, 1995):

$$\frac{T_{95}}{T_s} = 5 \dots 15 ; \quad T_s = \tau / 10 \quad (1.24)$$

onde  $T_{95}$  é o tempo que a resposta do sistema leva para alcançar 95% do valor final e  $\tau$  é a constante de tempo dominante do sistema.

**1.4.1 EXEMPLO DE MODELAGEM DISCRETA**  
 Seja o circuito  $RC$  da figura (1.8) onde  $y(t)$  é a tensão de saída e  $u(t)$  é a tensão de entrada.

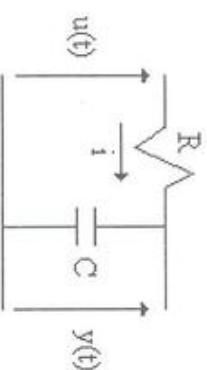


Figura 1.8 – Circuito elétrico  $RC$ .

A equação diferencial linear de primeira ordem que representa a dinâmica do sistema é dada por

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (1.25)$$

A partir da aproximação numérica da derivada dada pela equação

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t-1)}{T_s} \quad (1.26)$$

obtém-se a função de transferência discreta para o circuito  $RC$  de acordo com

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T_s z}{(RC + T_s)z - RC} \quad (1.27)$$

Selecionando uma entrada para o circuito  $RC$  e conhecendo-se os valores de  $R$ ,  $C$  e  $T_s$ , as operações de carregamento e descarregamento no capacitor podem ser avaliadas.

## 1.4.2 EXEMPLO DE MODELAGEM POR ANÁLISE EXPERIMENTAL

i) Processo discreto de primeira ordem

Considere o processo caracterizado pela seguinte equação a diferenças:

$$y(t+1) = \theta^* y(t) + u(t) \quad (1.28)$$

onde  $\theta^*$  é o parâmetro desconhecido e  $y(t) = \theta$  ( $\forall t < 0$ ). Admita o seguinte modelo para estimação:

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}y(t) + u(t) \quad (1.29)$$

sendo  $\hat{\theta}$  a estimativa de  $\theta^*$  e  $\hat{y}(t+1)$  a previsão da saída ou o valor da saída no instante  $(t+1)$  baseado no parâmetro estimado  $\hat{\theta}$ .

Seja a função custo dos mínimos quadrados dada por

$$J(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{t-1} e^2(k) \quad (1.30)$$

onde

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (1.31)$$

Substituindo-se as equações (1.28) e (1.29) na equação (1.31), obtém-se o erro de estimação em função das medidas de entrada e saída (atual e anteriores) do processo de acordo com

$$e(t) = \theta^* y(t-1) - \hat{\theta}y(t-1) = y(t) - u(t-1) - \hat{\theta}y(t-1) \quad (1.32)$$

Supor para um certo sistema que não é conhecido o parâmetro  $\theta^*$ , mas as medidas de entrada e saída no intervalo de tempo da experimentação,  $0 \leq t \leq N$ . Assim, obtém-se o estimador dos mínimos quadrados pela diferenciação de  $J(t)$  em relação a  $\hat{\theta}$ , resultando

$$\hat{\theta}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{t-1} y(k)[y(k+1) - u(k)]}{\sum_{k=0}^{t-1} y^2(k)} \quad (1.33)$$

Tabela 1.2 – Programação em Matlab do estimador da equação (1.33).

```
% Estimador do parâmetro da planta da equação (1.28)
y(1)=0;u(1)=0;soma1=0;soma2=0;
for i=2:30
    u(i)=1;y(i)=0.9*y(i-1)+u(i-1); % Obter medidas
end
for k=1:30
    soma1=soma1+y(k)*(y(k+1)-u(k)); % Estimar parâmetro
    soma2=soma2+y(k)^2;
    teta(k)=soma1/soma2;
end
t=1:30
plot(t,teta(t));
```

## 1.5 PROBLEMAS

- 1) Considerando a constante de tempo mecânica ( $\tau_m = J/B$ ) maior que a constante de tempo elétrica ( $\tau_e = L/R$ ) do motor DC controlado por armadura, obter a equação diferencial de primeira ordem em termos da velocidade e tensão de armadura.

2) De acordo com as especificações de um fabricante que comercializa um motor DC, tem-se os seguintes parâmetros:  $R = 20 \Omega$ ,  $J = 2 \text{ Nm} \cdot \text{seg}^2/\text{rad}$ ,  $B = 0.1 \text{ Nmseg/rad}$ ,  $K_t = 1 \text{ Nm/A}$ ,  $K_b = 3 \text{ Vseg/rad}$ . Avaliar o comportamento do processo por simulação para as seguintes condições:

- Admitir condições iniciais nulas,  $\tau_m >> \tau_e$  e aplicar um degrau unitário na tensão de armadura para observar o comportamento dinâmico da velocidade;
- Observe as dinâmicas temporais analógica e digital (período de amostragem de 0.1 seg) sob as mesmas condições de operação do item (i).

3) Avaliar por simulação o comportamento do sistema de nível, equação (1.16), quando  $u(t) = 1$ ,  $t \geq 0$  (degrau unitário) e  $h(0) = 0$ . Observar também a característica temporal para  $u(t) = 0$  e  $h(0) = 0.25 \text{ m}$ . Admitir  $A = 1$  e  $a\sqrt{2g} = 1$ . Adicionalmente, considerar o ponto de operação  $(u_0, h_0)$  e mostrar que o modelo linearizado é de primeira ordem, relacionando  $H(s)/U(s)$ .

- 4) Simular os comportamentos de carregamento e descarregamento da tensão no capacitor do circuito  $RC$  a partir dos modelos contínuo e discreto. Admitir  $R = 1 M\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$  e  $T_s = 0.1$  e 1 seg. Seja a tensão de entrada do circuito de acordo com

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 10 \\ 0, & \text{fóra} \end{cases}$$

- 5) Implementar o programa em *Matlab* da tabela (1.2) para estimativa do parâmetro  $\theta$  relativo ao processo discreto de primeira ordem representado por

$$y(t) = \theta y(t-1) + u(t-1)$$

onde  $\theta = 0.75$ ,  $u(t)$  é uma seqüência degrau unitário discreto e sendo 20 amostras o tempo total da experimentação.

- 6) A tabela mostra os valores medidos da resposta impulsiva de um sistema. Calcular e representar graficamente a resposta ao degrau unitário.

$t$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$h(t)$	0	9.5	5.9	0.14	2.7	-2.7	-1.4	-0.3	0.12	0.12	-0.01

Para fins de aplicação de controle digital direto, qual deve ser o período de amostragem?

## NOÇÕES BÁSICAS SOBRE IDENTIFICAÇÃO

### 2.1 CONCEPÇÕES PARA IDENTIFICAÇÃO

*Concepções para identificação. Qualidade do modelo matemático estimado. Identificação experimental por computador. Background e literatura. Aplicação em controle adaptativo. Problemas.*

A identificação de sistemas é tratada, muitas vezes, como um problema de otimização que envolve algumas medidas para adequação de modelos candidatos a representar um processo real. A seleção de modelos matemáticos e o ajuste dos parâmetros são influenciados por diversos fatores, entre os quais: (i) conhecimento *a priori* do sistema (linearidade, grau de não-linearidade, atraso de transporte); (ii) propriedades do modelo do sistema identificado (complexidade); (iii) seleção da medida do erro a ser minimizado; (iv) presença de ruídos (Johansson, 1993). A identificação de sistemas é um claro exercício que envolve múltiplos e conflitantes objetivos, tipicamente complexidade do modelo, critérios de desempenho e validação, que influenciam a seleção das estruturas do modelo matemático. A noção de um “bom modelo” é subjetiva, fazendo com que a tentativa e erro seja uma regra relevante de engenharia em identificação de processos (Isermann, 1980; Ljung, 1996).

Várias razões existem para manter a ordem do modelo tão baixa quanto possível. Critérios de informação podem ser introduzidos para combinar a necessidade de adequação com o princípio da parcimônia. Estes critérios, tais

como critérios de informação *Bayesiana*, de *Akaike* ou *minimum description length*, combinam a variância residual e a ordem do modelo (Haber e Unbehauen, 1990). A meta do algoritmo de otimização é a minimização de um critério de desempenho. Se todas as restrições e condições forem atendidas, o modelo encontrado pode ser aceito. Caso contrário, se uma das condições impostas é violada, todos os procedimentos de identificação, estimação de parâmetros e diagnóstico do modelo devem ser reavaliados até que um modelo apropriado seja encontrado (Ljung, 1999).

Muitos dos métodos de identificação, tais como os baseados nos estimadores dos mínimos quadrados ou máxima verossimilhança, são, em essência, técnicas de busca local guiada por gradiente e necessitam de um espaço de busca regular ou um índice de desempenho diferenciável. Estes métodos podem facilmente falhar na obtenção de um ótimo global se o espaço de busca do modelo é não-diferenciável ou o índice de desempenho não é “bem comportado”. Adicionalmente, estes métodos de identificação sofrem de algumas desvantagens, tais como: (i) alguma informação inicial dos parâmetros do sistema é necessária *a priori* para a convergência do método; (ii) os parâmetros estimados podem ser tendenciosos se o ruído é correlacionado; (iii) há dificuldade na identificação do atraso de transporte; (iv) não podem ser facilmente aplicados em sistemas não-lineares (Wellstead e Zarrop, 1991; Ljung, 1996).

Fundamentalmente, *identificação de sistemas* consiste na determinação de um modelo matemático que represente os aspectos essenciais do sistema, caracterizado pela manipulação dos sinais de entrada e saída e que estão relacionados através de uma função de transferência contínua ou discreta (Isermann e Lachmann, 1985; Ljung, 1999).

Para os processos industriais, o modelo pode ser obtido a partir do tratamento das medidas (procedimento estatístico, filtragem de dados) coletadas a partir de uma realização experimental. O modelo matemático final é uma forma do conhecimento da relação existente entre os sinais de entrada e saída, caracterizada no processo físico pela função de transferência. A figura (2.1) ilustra a composição básica em blocos de uma tarefa de identificação.

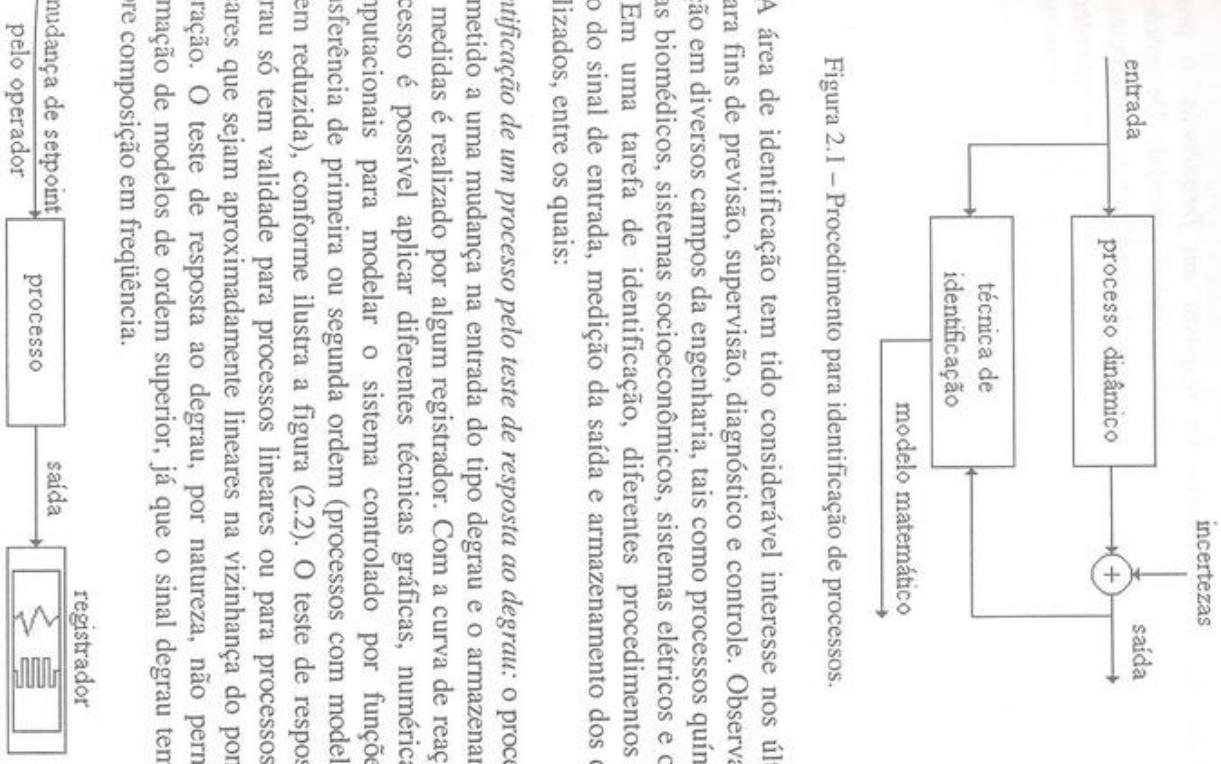


Figura 2.1 – Procedimento para identificação de processos.

A área de identificação tem tido considerável interesse nos últimos anos para fins de previsão, supervisão, diagnóstico e controle. Observa-se a aplicação em diversos campos da engenharia, tais como processos químicos, sistemas biomédicos, sistemas socioeconômicos, sistemas elétricos e outros mais. Em uma tarefa de identificação, diferentes procedimentos para geração do sinal de entrada, medição da saída e armazenamento dos dados são utilizados, entre os quais:

- *Identificação de um processo pelo teste de resposta ao degrau:* o processo é submetido a uma mudança na entrada do tipo degrau e o armazenamento das medidas é realizado por algum registrador. Com a curva de reação do processo é possível aplicar diferentes técnicas gráficas, numéricas ou computacionais para modelar o sistema controlado por funções de transferência de primeira ou segunda ordem (processos com modelos de ordem reduzida), conforme ilustra a figura (2.2). O teste de resposta ao degrau só tem validade para processos lineares ou para processos não-lineares que sejam aproximadamente lineares na vizinhança do ponto de operação. O teste de resposta ao degrau, por natureza, não permite a estimativa de modelos de ordem superior, já que o sinal degrau tem uma pobre composição em frequência.

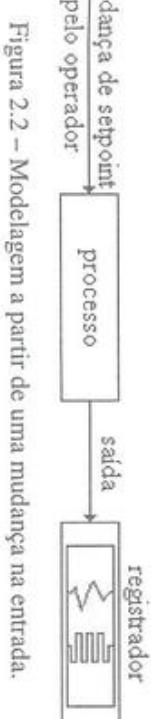


Figura 2.2 – Modelagem a partir de uma mudança na entrada.

- Identificação pelo teste da resposta em frequência:* o processo é submetido a uma entrada harmônica (sinal senoidal). De acordo com as curvas de magnitude e fase, é possível identificar as frequências de corte (avaliando-se a influência dos zeros e polos) e, consequentemente, a função de transferência estimada correspondente, conforme mostra a figura (2.3).

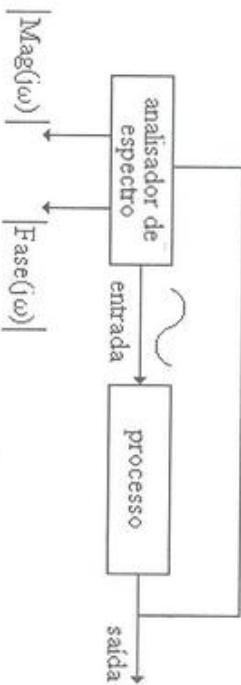


Figura 2.3 – Modelagem por resposta em frequência.

- Identificação off-line:* com o auxílio de sinais de teste apropriados de entrada (ruído branco, seqüência binária pseudo-aleatória), excita-se o processo e armazena-se as medidas de entrada e saída para aplicação e avaliação *a posteriori* dos algoritmos de estimativa não-recursivos, conforme ilustra a figura (2.4). Para isso, é necessário que a estrutura do modelo seja disponível, ou seja, é preciso selecionar a ordem do modelo, o número de pólos e zeros e, eventualmente, o valor do atraso de transporte ou tempo morto. Todo o cálculo dos parâmetros é feito em um momento e o tempo de avaliação é diferente daquele em que se realiza o ensaio. Por isso se diz que a estimativa é feita *off-line*. Para este tipo de abordagem, utilizam-se na prática modelos discretos para os processos. Isso se justifica pelo fato de que os algoritmos de identificação trabalham com os valores de amostras dos sinais de entrada e saída.

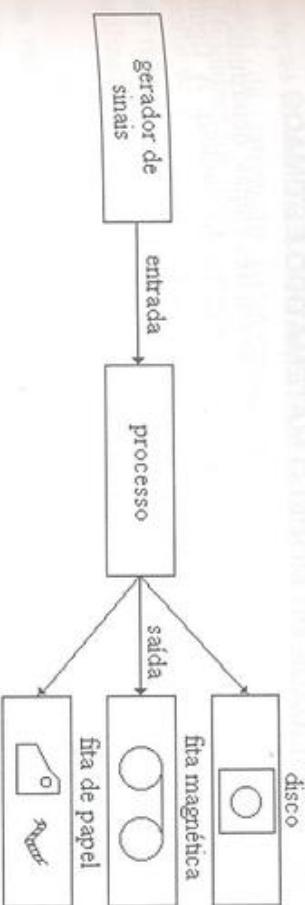


Figura 2.4 – Modelagem *off-line*.

- Identificação on-line:* é um procedimento iterativo via computador. A identificação *on-line* tem uma desvantagem de implementação. Muita quantidade de memória pode ser necessária para armazenar os valores digitalizados de todas as amostras de entrada e saída do sistema obtidas no ensaio. Neste sentido, muitas vezes precisa-se de métodos recursivos que utilizem pouca memória e que sejam capazes de atualizar a estimativa dos parâmetros do modelo a cada período de amostragem. Conforme representado na figura (2.5), diversos algoritmos estão disponíveis na literatura para realizar a estimativa *on-line*. O mais popular é o algoritmo dos *Mínimos Quadrados Recursivo* – *MQR*. Em muitas aplicações, as medidas do processo são obtidas sequencialmente (capturadas a cada período de amostragem) e processadas *on-line* em algoritmos de estimativa recursivos. A aplicação em tempo real dos algoritmos de identificação é interessante para vários propósitos, entre os quais rastreamento de parâmetros variantes no tempo, detecção, diagnóstico, filtragem, controle adaptativo/preditivo e redes neurais.



Figura 2.5 – Modelagem *on-line*.

## 2.2 QUALIDADE DO MODELO MATEMÁTICO ESTIMADO

A identificação, de modo geral, consiste em três etapas: determinação da estrutura, estimativa dos parâmetros e validação do modelo. A figura (2.6) ilustra as diferentes etapas da identificação de processos.

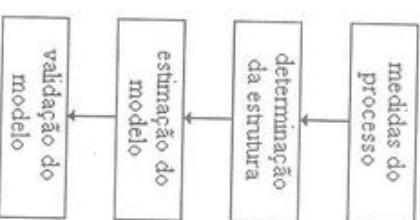


Figura 2.6 – Etapas do procedimento de identificação.

A realização do experimento proporciona a aquisição das *medidas do processo* (dados experimentais). Assim, após selecionado o período de amostragem para cada processo em particular, coleta-se um conjunto de medidas (visando-se à obtenção de um modelo discreto), sendo

$$Z^N = \{Y, U\}$$

$$Y = \{y(t) / t = 1, \dots, N\} ; \quad U = \{u(t) / t = 1, \dots, N\}$$

onde  $Y$  é o conjunto dos sinais de saída medidos,  $y(t)$ ,  $U$  é o conjunto das entradas do sistema,  $u(t)$ ,  $N$  é o universo da experimentação e  $t$  especifica os instantes de amostragem múltiplos de  $T_s$  ( $T_s, 2T_s, 3T_s, \dots$ ). Na fase seguinte, a *determinação da estrutura* do modelo, adequada ao sistema observado, é realizada a partir de um conjunto de modelos candidatos, baseado em algum conhecimento *a priori* sobre o sistema a ser identificado e nas informações necessárias para a seleção do conjunto de regressores para a aplicação da técnica de identificação adotada, seja do tipo paramétrica ou não-paramétrica, linear ou não-linear. A *estimação do modelo* consiste na

seleção de técnicas de estimativa para a classe da estrutura especificada. No caso da estimativa paramétrica, objetiva-se aproximar os parâmetros desconhecidos dos polinômios do modelo (representação entrada/saída). A partir de  $Z^N$ , a *validação do modelo* matemático é efetuada pela comparação do modelo obtido com as medidas em um conjunto de dados que não foi utilizado na estimativa do modelo (generalização do modelo).

A estimativa de parâmetros é um procedimento numérico que determina os valores dos parâmetros do modelo (desconhecidos) e pode ser formulado como um problema de otimização onde o melhor modelo é aquele que se ajusta às medidas para um dado critério. Uma vez obtida a magnitude dos parâmetros, objetivando qualificar o desempenho do modelo estimado, técnicas de validação de modelos são aplicadas. Entre as diversas técnicas de validação, pode-se utilizar a comparação das respostas do sistema real com a resposta obtida pelo modelo estimado (pode-se, também, aplicar técnicas no domínio da frequência ou métodos estocásticos). O modelo é adequado se o erro cometido no ajuste está em valores preestabelecidos, ou ainda, para uma determinada aplicação, se a resposta do modelo estimado reflete corretamente a resposta do sistema, não apresentando discrepância entre o real e o estimado (não existe um método de identificação que é universalmente aceito como mais apropriado).

O procedimento de ajustar os parâmetros do modelo estimado de modo que o erro entre a saída do sistema e a do modelo seja mínimo, de acordo com um dado critério, está mostrado na figura (2.7).

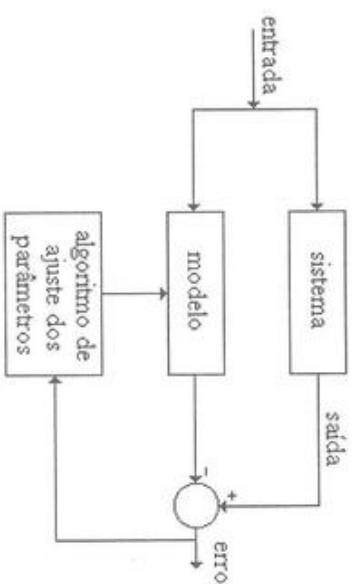


Figura 2.7 – Diagrama de identificação de ajuste do modelo.

O procedimento da figura (2.7) pode ser utilizado para identificação *off-line* ou *on-line* se os sinais de entrada e saída são amostrados e o cálculo para ajuste do modelo é realizado não recursivamente ou recursivamente, respectivamente.

### 2.3 IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL POR COMPUTADOR

O modo de identificação *off-line*, ilustrado na figura (2.8), apresenta as seguintes características:

- i) Coleta-se uma certa quantidade de dados de entrada e saída do sistema, que podem estar armazenados no computador ou em outra forma;
- ii) As medidas são processadas para estimar os parâmetros do modelo sem restrição de tempo computacional (utilizam-se algoritmos não-recursivos).

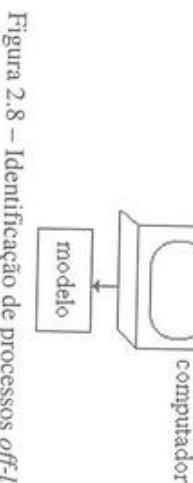
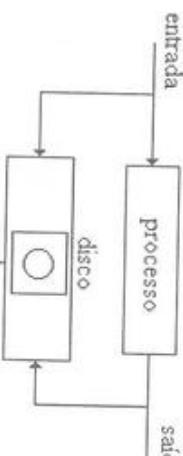


Figura 2.8 – Identificação de processos *off-line*.

Por outro lado, o modo de identificação *on-line*, representado na figura (2.9), apresenta as seguintes características:

- i) Nenhuma medida da experimentação precisa ser armazenada e processada;
- ii) Um algoritmo de estimação recursivo é utilizado para ajustar os parâmetros após cada período de amostragem;
- iii) A quantidade de cálculos (tempo de processamento do algoritmo) necessária para ajustar o modelo é função do período de amostragem.

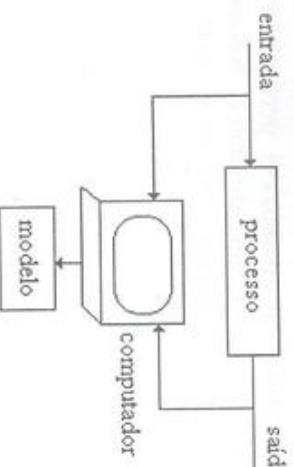


Figura 2.9 – Identificação de processos *on-line*.

Uma grande variedade de métodos está disponível na literatura para identificar processos, ambos *on-line* e *off-line*. As técnicas de estimação de parâmetros de processos podem estar apoiadas em sistemas de conhecimento (inteligência computacional), em tarefas de supervisão (auxiliar o usuário na utilização e regulação dos algoritmos) e em modelagem. Alguns softwares disponíveis comercialmente para modelagem de processos monovariáveis e multivariáveis são: *ADAPTx*, *AIDA*, *CONTROL STATION*, *CONSID*, *ICAI*, *MATLAB/SIMULINK*, *PITOPS*, *SIMNON*, *WINFACT*.

### 2.4 BACKGROUND E LITERATURA

A tomada de decisões e a resolução de problemas são dependentes do acesso à informação adequada sobre o problema a ser resolvido. Frequentemente, a informação avaliada está originalmente na forma de dados ou observações que requerem interpretação antes da análise e tomada de decisões. A derivacão de uma relevante descrição do sistema a partir de dados observados é denominada *identificação de sistemas (processos)* e a descrição do sistema resultante é denominada *modelo*. Todavia, existem diversas formulações para: *o que é identificação de processos?* A seguir, mencionam-se algumas definições estabelecidas na literatura:

- Identificação é a determinação, baseada nos sinais de entrada e saída, de um sistema em que, para uma classe especificada de sistemas, o sistema sob teste é equivalente (Zadeh, 1965);
- Identificação de sistemas representa a “interface” entre modelos do mundo matemático e o mundo real (Johansson, 1993);

- A idéia da identificação de sistemas é permitir a elaboração do modelo matemático de um sistema dinâmico, baseado em medidas coletadas pelo ajuste de parâmetros e/ou do modelo, até que a saída do sistema coincida, “tão bem” quanto possível, com as amostras das saídas medidas (Ljung, 1996).

A procura por modelos relevantes pode também iniciar sob outro aspecto. Considerando-se que a estrutura, ou projeto, de um sistema é amplamente conhecida, frequentemente é possível produzir um diagrama de blocos ou esboçar o rascunho do sistema e seus componentes funcionais (modelos mecânicos e elétricos). Tal prática é denominada *modelagem*. A complexidade da modelagem requerida depende do propósito de modelagem e da identificação do processo, ou seja, verificação de modelos teóricos, síntesis de parâmetros de um controlador, projeto assistido por computador de algoritmos de controle digitais, controle adaptativo do tipo *self-tuning control*, monitoração dos parâmetros de processos, detecção de falhas, otimização de sistemas, entre outros.

Outras importantes informações sobre identificação são: i) *o tipo de modelo do processo* (linear/não-linear, variante/invariante no tempo, paramétrico/não-paramétrico, contínuo/discreto, monovariável/multivariável, característica do ruído, atraso de transporte); ii) *a precisão requerida do modelo* (baixa, média, alta); iii) *o método de estimativa do processo (off-line/on-line)*, malha aberta/malha fechada, resposta ao degrau, resposta em frequência, análise espectral e de Fourier, técnicas de correlação, métodos de estimação de parâmetros, etc.).

A identificação e a modelagem de sistemas têm diversas raízes, nas mais diversas áreas do conhecimento, seja em matemática, estatística, ciência da computação, teoria de controle, análise de sistemas, processamento de sinais, econometria, processamento de voz, geofísica ou mecânica estrutural. Contudo, o enfoque deste livro é a *identificação de sistemas* voltada ao campo de pesquisas na área de *controle de processos*.

Atualmente, o advento de metodologias e de produtos manufaturados de controle baseados em modelos matemáticos tem ocasionado um aumento significativo no interesse em identificação de sistemas dinâmicos. Assim, é necessária a apresentação de uma simplificada noção da evolução em identificação de sistemas distinguindo os diferentes períodos do desenvolvimento nesta área:

- i) ... - 1960 (desenvolvimento das raízes estatísticas): esse período essencialmente começa com K. F. Gauss em 1809 e termina por volta de 1960, quando modelos paramétricos explícitos começam aoccasionar interesse na comunidade de controle. Durante esse período, todos os conceitos estatísticos essenciais usados em sistemas de identificação são desenvolvidos. Entre os desenvolvimentos desse período, pode-se citar: regressão linear, mínimos quadrados, método da máxima verossimilhança, aproximação estocástica, análise por série temporal e método da variável instrumental;
- ii) 1960-1970 (proliferação dos métodos de identificação): aparecimento acentuado de diversos métodos, devido principalmente aos seguintes fatores:
  - A equação a diferenças linear básica para as relações entrada/saída pode ser escrita como regressão linear e, assim, o método dos mínimos quadrados pode ser aplicado;
  - Desenvolvimento de técnicas espectrais e de correlação aplicadas a séries temporais;
  - Desenvolvimento de diversos paradigmas de convolução e expansão de funções de resposta ao impulso;
  - 1970-1985 (consolidação da teoria e prática em sistemas de identificação): as linhas mestras podem ser distinguidas em: conexões entre diferentes metodologias e intenso desenvolvimento de software para o tratamento de problemas em identificação;
  - iv) 1985-... (surgeimento de novas idéias em raízes estatísticas): em meados dos anos 80, a visão estatística de sistemas de identificação já está madura e sedimentada. As estruturas clássicas de estimação de parâmetros alcançam relativo sucesso e podem ser coerentemente transferidas para o mundo dos sistemas dinâmicos. O desenvolvimento de ferramentas computacionais poderosas e o aparecimento maciço de pacotes de softwares comerciais também contribuíram para o aprimoramento da área de identificação. Entre os tópicos com desenvolvimentos significativos, hoje em dia, que na maioria das vezes possuem pequena interação com métodos estatísticos, cita-se: métodos de subespaço para modelos espaço-estados, identificação para controle, propriedades de rejeição e tratamento de ruído, modelos *black-box* não-lineares (área de redes neurais artificiais, modelos *fuzzy*, transformada *wavelet*, etc.) e aplicações e análise de dados no domínio da freqüência (Ljung, 1999; Marchi *et al.*, 1999).

## 2.5 APLICAÇÃO EM CONTROLE ADAPTATIVO

Um exemplo de utilização da identificação de sistemas em engenharia de controle de processos que tem sido enfatizado nos últimos anos é na implementação de controladores adaptativos/preditivos. Justifica-se a utilização destes algoritmos de controle pela adequação para tratar processos variantes no tempo com parâmetros desconhecidos e, adicionalmente, em aplicações práticas devido à ineficiência do desempenho dinâmico de algoritmos de controle com ganhos fixos na presença de complexidades (dinâmica assimétrica, parâmetros variantes, não-linearidades) no processo controlado (Roffel *et al.*, 1989; Malik *et al.*, 1991; Gessing, 1996).

Os controladores adaptativos do tipo auto-ajustável (*self-tuning*) apresentam uma malha adicional que automaticamente modifica os parâmetros para compensar as variações ocorridas no processo ou no meio ambiente, trazendo benefícios significativos em relação a outros tipos de controladores, pois as variações da dinâmica são acompanhadas pelo identificador e, consequentemente, pelo controlador a cada período de amostragem. Entre os controladores adaptativos, o regulador auto-ajustável de variância mínima proposto por K. J. Åström e B. Wittenmark em 1973 tem tido crescente utilização, implementação e variação de projeto no contexto de controle de processos (Coelho *et al.*, 1988; Åström e Wittenmark, 1995). A partir desta estrutura de controle, foi possível a elaboração de controladores adaptativos robustos, isto é, o controlador auto-ajustável de variância mínima generalizada (Clarke e Gawthrop, 1975) e, posteriormente, o controlador preditivo generalizado (Clarke *et al.*, 1987). Esta estratégia de controle está dividida em duas etapas: identificação e controle, conforme ilustra a figura (2.10).

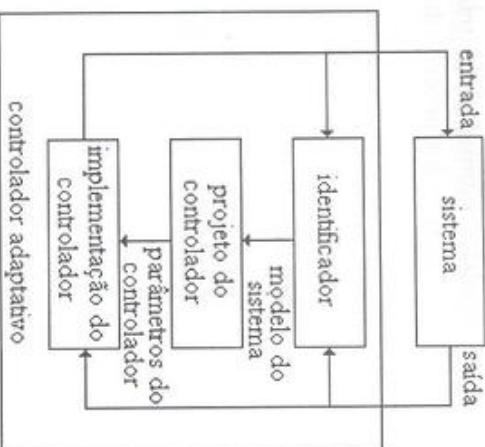


Figura 2.10 – Controlador adaptativo do tipo auto-ajustável.

A etapa de identificação consiste na obtenção dos parâmetros do modelo do sistema controlado, através de um estimador de parâmetros recursivo. A segunda etapa, de controle, consiste no cálculo dos parâmetros do controlador pela minimização de um critério de desempenho especificado (procedimento ótimo) ou pela técnica de alocação de pólos (procedimento clássico) (Seborg *et al.*, 1986).

## 2.6 PROBLEMAS

- 1) Ilustrar uma experimentação e descrever a aplicação das técnicas de modelagem baseadas nas respostas ao degrau e freqüência, identificação *off-line* e *on-line*.

- 2) Avaliar a qualidade do modelo estimado em relação ao teste de resposta ao degrau em malha aberta e ao teste freqüencial pelo diagrama de Nyquist, considerando

processo real:  $G_p(s) = \frac{1020s + 4080}{s^5 + 24s^4 + 218s^3 + 956s^2 + 2456s + 4080}$

modelo estimado:  $\hat{G}_p(s) = \frac{7.34}{s^2 + 1.68s + 7.34}$

3) Avaliar a qualidade dos modelos estimados em relação aos testes das respostas ao degrau em malha aberta e freqüencial (diagrama de Nyquist) para os seguintes processos real e estimados:

$$\text{processo real: } G_p(s) = \frac{1}{(0.62s+1)^7(17.2s+1)}$$

$$\text{modelos estimados: } \hat{G}_{p1}(s) = \frac{e^{-2.43s}}{(1.98s+1)(17.1s+1)}$$

$$\hat{G}_{p2}(s) = \frac{1}{(4.8s+1)(16.7s+1)}$$

Adicionalmente, validar os modelos estimados com base no comportamento temporal em malha fechada para uma entrada degrau unitário, utilizando um controlador *PI* com duas sintomas, isto é,

Parâmetros/Caso	(a)	(b)	(c)
$K_c$	2.8	5.6	6.63
$T_i$	17	17	10

4) Uma malha de controle com controlador *PI*, uma válvula não-linear e um processo de terceira ordem estão ilustrados na figura 2.11.

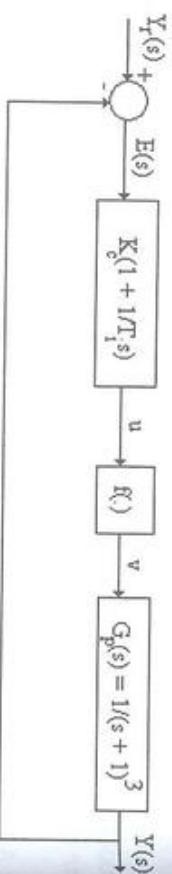


Figura 2.11 – Malha de controle analógica com controlador, planta e válvula.

A característica da válvula está representada por

$$v = f(u) = u^4 \quad ; \quad u \geq 0$$

Verificar por simulação (*Simulink*) a necessidade de resintonização do controlador *PI* ajustado com  $K_c = 0.15$  e  $T_i = 1$ , assumindo os seguintes níveis de operação:

- i) Mudança de referência de 0.2 para 0.3;
  - ii) Mudança de referência de 1 para 1.1;
  - iii) Mudança de referência de 5 para 5.2.
- A síntoma *PI* deve garantir uma dinâmica adequada em malha fechada sem sobre-sinal e com tempo de estabilização de aproximadamente 10 seg. Idealizando-se uma concepção de controle do tipo *PI* ganho escalonado (*gain scheduling*), quais os ganhos nas três faixas de operação?

## Capítulo 3

# MODELOS DE PROCESSOS DE ORDEM REDUZIDA E COMPLEXOS

---

*Introdução. Modelos contínuos de ordem reduzida. Modelos discretos de ordem reduzida. Modelos de sistemas discretos complexos. Perturbações nos modelos discretos. Problemas.*

---

## 3.1 INTRODUÇÃO

Vários processos industriais são bem representados por funções de transferência (modelos matemáticos) de primeira ou segunda ordem. Os sinais podem ser representados utilizando-se variáveis contínuas ou discretas e as funções de transferência, através das transformadas de *Laplace* e *z*, respectivamente (Seborg *et al.*, 1989; Ogata, 2002).

## 3.2 MODELOS CONTÍNUOS DE ORDEM REDUZIDA

A representação usual de um modelo matemático para uma planta industrial é a função de transferência de primeira ordem com atraso de transporte, isto é,

$$G_{p1}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1} \quad (3.1)$$

onde  $s$  é o operador Laplace ( $s = d/dt$ ),  $K$  é o ganho,  $\theta$  é o atraso de transporte contínuo,  $\tau$  é a constante de tempo, e  $Y(s)$  e  $U(s)$  são as transformadas de Laplace da saída e da entrada, respectivamente.

A seguir, discute-se como os parâmetros ( $K, \theta, \tau$ ), que caracterizam o comportamento dinâmico de um sistema de primeira ordem, podem ser identificados com base na curva (resposta) de reação do processo.

- Ganho de regime

O ganho de um sistema é definido por

$$K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} \quad (3.2)$$

onde  $\Delta y(t)$  é a variação da saída e  $\Delta u(t)$  é a variação da entrada. O exemplo (3.1) mostra o procedimento de determinação do parâmetro  $K$  para um processo de nível.

*Exemplo 3.1* – Considere o processo de nível de líquido em regime estável, conforme a figura (3.1), onde nas condições operacionais tem-se as vazões de entrada e saída constantes e iguais.

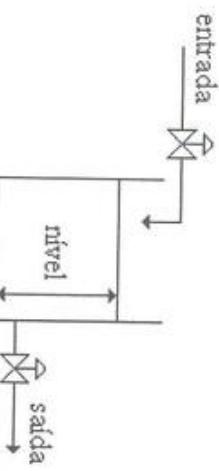


Figura 3.1 – Sistema de nível de líquido.

As figuras (3.2) e (3.3) ilustram os comportamentos do nível e o cálculo do ganho considerando um aumento súbito (na forma de degrau) na vazão de entrada e um aumento em degrau na vazão de saída (através da abertura da válvula de saída), respectivamente.

As figuras (3.2) e (3.3) ilustram os comportamentos do nível e o cálculo do ganho considerando um aumento súbito (na forma de degrau) na vazão de entrada e um aumento em degrau na vazão de saída (através da abertura da válvula de saída), respectivamente.

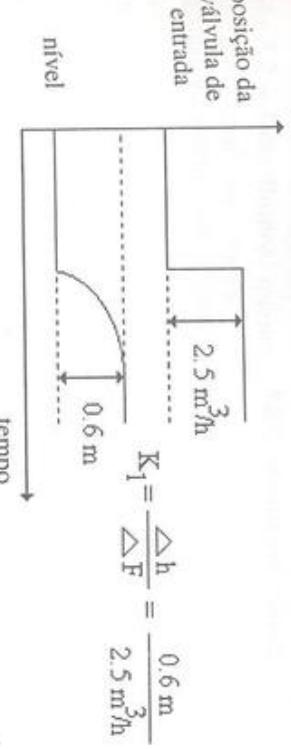


Figura 3.2 – Dinâmica para um aumento na vazão de entrada.

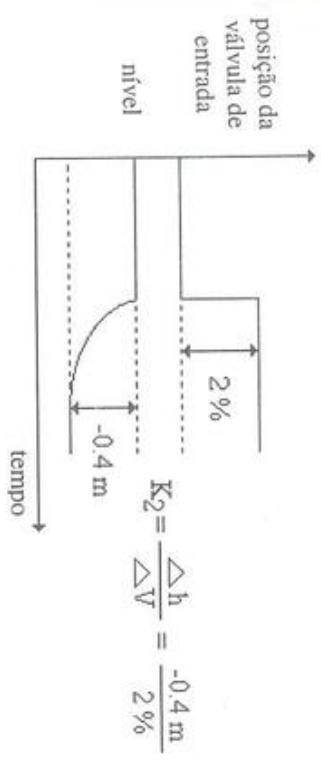


Figura 3.3 – Dinâmica para um aumento na vazão de saída.

#### Observações:

- De acordo com os resultados das figuras (3.2) e (3.3), observa-se que o nível muda quando se realiza uma mudança no processo;
- O ganho de um processo tem unidades específicas que devem ser avaliadas cuidadosamente para cada aplicação particular.

#### ii) Constante de tempo

A constante de tempo para processos industriais (caracterizada em uma função matemática de primeira ordem) é definida pelo “tempo requerido, medido a partir do ponto onde o sinal de saída começa a mudar, para que a saída do processo de primeira ordem atinja 63.2% do valor da variação total, depois que ocorreu uma mudança na entrada” (Mollenkamp, 1988).

➢ **Pergunta:** Por que 63.2%?

Para um processo de primeira ordem e sem atraso de transporte, a equação diferencial é

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (3.3)$$

onde  $y(t)$  é a saída,  $u(t)$  é a entrada,  $K$  é o ganho e  $\tau$  é a constante de tempo. A resposta a uma mudança em degrau de amplitude  $M$  é dada por

$$y(t) = KM(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) ; \quad t \geq 0 \quad (3.4)$$

Portanto, observando-se a equação (3.4), a saída pode ser avaliada para valores múltiplos da constante de tempo, isto é,

$$y(\tau) = 0.632KM \text{ (corresponde à constante de tempo)}$$

$$y(2\tau) = 0.865KM$$

$$y(3\tau) = 0.950KM$$

$$y(4\tau) = 0.982KM \text{ (corresponde ao tempo de estabilização)}$$

$$y(5\tau) = 0.993KM$$

iii) Atraso de transporte (tempo morto)

O tempo morto na dinâmica do processo normalmente é o tempo que leva para o material se mover ou ser transportado de um ponto a outro. Esta é a razão pela qual o termo equivalente “atraso de transporte” sempre é utilizado para descrever tempo morto.

O atraso de transporte pode ser definido como

“o tempo decorrido após a ocorrência de uma perturbação no processo até que seja notada uma mudança na saída do mesmo” (Mollenkamp, 1988).

O exemplo (3.2) descreve a presença do atraso de transporte num processo de mistura de fluidos.

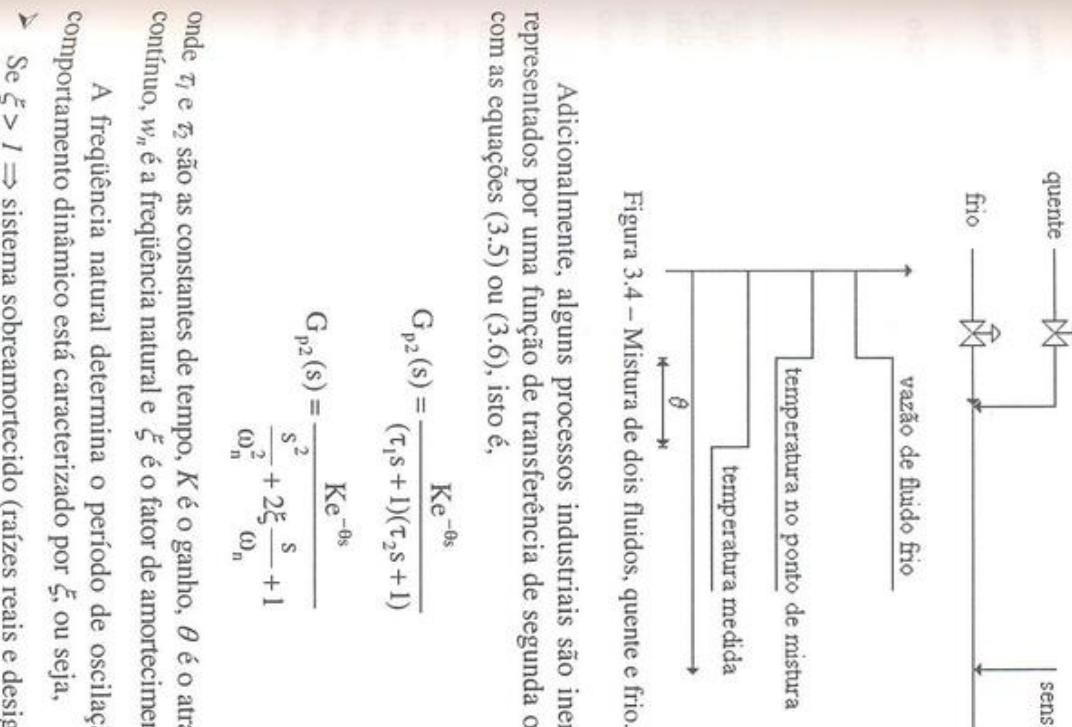


Figura 3.4 – Mistura de dois fluidos, quente e frio.

Adicionalmente, alguns processos industriais são inherentemente bem representados por uma função de transferência de segunda ordem de acordo com as equações (3.5) ou (3.6), isto é,

$$G_{p2}(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (3.5)$$

$$G_{p2}(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\omega_n^2 + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1} \quad (3.6)$$

onde  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são as constantes de tempo,  $K$  é o ganho,  $\theta$  é o atraso de transporte contínuo,  $w_n$  é a frequência natural e  $\xi$  é o fator de amortecimento.

A freqüência natural determina o período de oscilação da saída e o comportamento dinâmico está caracterizado por  $\xi$ , ou seja,  
➢ Se  $\xi > 1 \Rightarrow$  sistema sobreamortecido (raízes reais e desiguais,  $\tau_1 \neq \tau_2$ );

*Exemplo 3.2* – Dois fluidos, quente e frio, são misturados num sistema de bombeamento conforme ilustra a figura (3.4). A temperatura das vazões combinadas é medida em um ponto à jusante do ponto de mistura. Qual é a resposta da temperatura medida após um aumento em degrau na vazão do fluido frio?

- Se  $\xi = I \Rightarrow$  sistema criticamente amortecido (raízes reais e iguais,  $\tau_1 = \tau_2$ );  
 ► Se  $\xi < I \Rightarrow$  sistema subamortecido (raízes complexas conjugadas).

Observações:

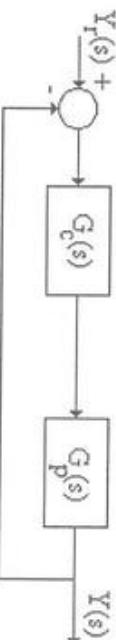
- Seja a função de transferência  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$ . As raízes do polinômio do denominador,  $D(s)$ , são denominadas *pólos do sistema*, enquanto que as raízes do polinômio do numerador,  $N(s)$ , são denominadas *zeros do sistema*;
- Considere o sistema de terceira ordem caracterizado pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)(s+1)}$$

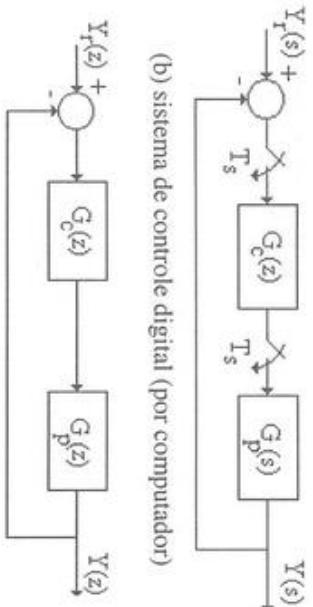
Se a condição  $|1/\gamma| \geq 10 | \xi w_n |$  é assegurada, então a resposta do sistema de terceira ordem pode ser aproximada pelas raízes dominantes do sistema de segunda ordem (Dorf e Bishop, 1995).

### 3.3 MODELOS DISCRETOS DE ORDEM REDUZIDA

Embora muitos processos sejam contínuos por natureza, os modernos sistemas de controle utilizados para controlar processos baseiam-se em computadores digitais e aplicam algoritmos de controle digital (Jacquot, 1995). O sinal de controle é implementado em intervalos de tempo com o intervalo denominado *período de amostragem*, ( $T_s$ ). Se a técnica de projeto de controle por computador baseia-se no modelo matemático do processo controlado, então um modelo discreto da planta é necessário para projetar e calcular a saída do sinal de controle. As diferentes formas de representar uma malha de controle são ilustradas na figura (3.5).



(a) sistema de controle contínuo (analógico)



(b) sistema de controle digital (por computador)

(c) sistema de controle discreto (amostrado)

Figura 3.5 – Concepções de malhas de controle analógico e digital.

A representação função de transferência discreta equivalente de modelos com funções contínuas de primeira e de segunda ordem pode ser calculada com as técnicas de sistemas amostrados. O procedimento de cálculo utiliza o segurador de ordem zero em cascata com a função de transferência contínua do processo, e um conjunto de amostras da saída do processo em períodos de amostragem está disponível para identificação e controle, conforme ilustra a figura (3.6).

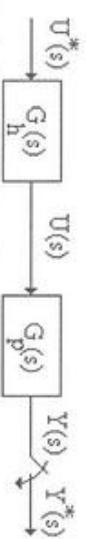


Figura 3.6 – Segurador de ordem zero em série com o processo.

onde  $G_p(s)$  é a função de transferência do processo,  $G_h(s)$  é a função de transferência do segurador de ordem zero,  $Y(s)$  e  $Y^*(s)$  são os sinais de saída contínuo e pulsado (discreto) e  $U(s)$  e  $U^*(s)$  são os sinais de entrada contínuo e pulsado (discreto).

A função de transferência amostrada do sistema é calculada por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = Z[G_h(s)G_p(s)] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] \quad (3.7)$$

e sendo  $G_h(s)$  da forma

$$G_h(s) = \frac{(1 - e^{-sT_s})}{s} \quad (3.8)$$

A função de transferência discreta correspondente à equação  $G_{p1}(s)$ , equação (3.1), é

$$G_{p1}(z) = \frac{z^{-d} b_0}{z + a_1} = \frac{z^{-(d+1)} b_0}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (3.9)$$

onde  $a_1$  e  $b_0$  são os coeficientes do modelo discreto,  $z$  é o operador deslocamento,  $y(t) = zy(t-T_s)$ ,  $d$  é o atraso de transporte discreto e satisfaz a seguinte relação:

$$dT_s \leq \theta < (d+1)T_s \quad (3.10)$$

O parâmetro  $a_1$  é função de  $\tau$  e  $T_s$ , enquanto que o parâmetro  $b_0$  é função de  $K$ ,  $\tau$  e  $T_s$ .

Por outro lado, a função de transferência discreta correspondente à equação  $G_{p2}(s)$ , equação (3.5), é

$$G_{p2}(z) = \frac{z^{-d} (b_0 z + b_1)}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{z^{-(d+1)} (b_0 + b_1 z^{-1})}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (3.11)$$

Com o auxílio da tabela de transformada  $z$  ou com um software aplicativo em controle (Matlab), é possível obter, a partir da função de transferência de processos contínuos de ordem superior, a equivalente função de transferência discreta.

*Exemplo 3.3* – Considere o processo de primeira ordem representado por

$$G_p(s) = \frac{K_1}{Ts + 1}$$

onde  $K_1 = 1$ ,  $\tau = 7.5$  seg,  $T_s = 4$  seg. Obter a função de transferência discreta sem o segurador de ordem zero.

$$G_p(s) = \frac{K_2}{s+a} ; \quad a = \frac{1}{\tau} ; \quad K_2 = \frac{K_1}{\tau}$$

- i) Caso sem o segurador de ordem zero

$$G_r^-(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} ; \quad b_0 = K_2 = \frac{K_1}{\tau} = 0.133 ; \quad a_1 = -e^{-aT_s} = -0.5866$$

- ii) Caso com o segurador de ordem zero

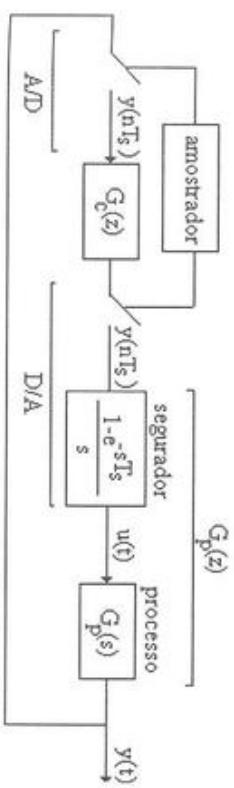
$$G_r^+(z) = \frac{b_0 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$b_0 = (1 - e^{-aT_s}) K_2 = 0.4134 ; \quad a_1 = -e^{-aT_s} = -0.5866$$

Pode-se observar que  $G_r^-(z) \neq G_r^+(z)$  e, assim, os casos (i) e (ii) conduzem a resultados onde se tem modelos matemáticos diferentes (na estrutura e nos parâmetros).

### 3.4 MODELOS DE SISTEMAS DISCRETOS COMPLEXOS

Se um computador é utilizado para controlar um processo, o sistema de controle pode ser representado pela configuração apresentada na figura (3.7).



A/D – conversor analógico/digital, D/A – conversor digital/analógico

Figura 3.7 – Sistema de controle por computador.

O modelo entrada/saída para o processo, utilizando a transformada  $z$ , pode ser obtido como

$$Y(z) = G_p(z)U(z) \quad (3.12)$$

onde  $G_p(z)$  é a função de transferência do processo, incluindo o segurador de ordem zero, e pode ser representada por uma razão de dois polinômios em  $z^{-1}$ , isto é,

$$G_p(z) = z^{-d} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (3.13)$$

ou

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t) \quad (3.14)$$

A equação (3.14) é uma representação usual na literatura de identificação e controle digital. Os polinômios  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$ , relacionados aos pólos e zeros de malha aberta do processo, respectivamente, são da forma

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{na}z^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_{nb}z^{-nb}$$

A correspondente equação a diferenças da planta é

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{na}y(t-na) = b_0u(t-d) + b_1u(t-d-1) + \dots + b_{nb}u(t-d-nb)$$

onde  $y(t)$  e  $u(t)$  são os sinais de saída e controle, respectivamente, disponíveis nos instantes de amostragem  $t = nT_s$ , onde  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

*Exemplo 3.4* – Obter a equação a diferenças equivalente e avaliar as características de malha aberta do modelo discreto relativo ao processo de segunda ordem representado por

$$G_p(s) = \frac{1}{(3s+1)(5s+1)}$$

Considerando o segurador de ordem zero e  $T_s = 1$  seg, então com o auxílio do Matlab tem-se

$$y(t) = 1.5353y(t-1) - 0.5866y(t-2) + 0.0279u(t-1) + 0.0234u(t-2)$$

De acordo com a equação (3.14), observa-se que

$$A(z^{-1}) = 1 - 1.5353z^{-1} + 0.5866z^{-2}; \quad B(z^{-1}) = 0.0279 + 0.0234z^{-1}; \quad d = 1$$

Assim, como as raízes relativas aos pólos e zeros posicionam-se no interior do círculo unitário, no plano complexo  $z$ , o sistema é estável e de fase mínima. Os resultados do exemplo (3.4) podem ser obtidos executando-se o programa em Matlab da tabela (3.1).

Tabela 3.1 – Programa em Matlab da conversão contínua para discreta.

```
% Converte uma função de transferência
% contínua para discreta
% Gp(s)=num(s)/den(s) --> Gp(z)=numz(z)/denz(z)
num=[1]; den=[15 8 1]; Ts=1;
[numz, denz]=c2dm(num, den, Ts, 'zoh') % Modelo discreto
disp('zeros do sistema discreto') % zeros
zeros=roots(numz)
polos=roots(denz) % zeros e pólos
dstep(numz, denz) % Resposta
title('resposta a seqüência unitária')
ylabel('saída'), xlabel('amostras')
```

### 3.5 PERTURBAÇÕES NOS MODELOS DISCRETOS

A perturbação pode ser definida como

"um sinal que tende a afetar adversamente a magnitude da entrada e/ou saída de um sistema" (Wellstead e Zarrop, 1991)

A estrutura de um sistema composto do processo e de uma perturbação constante na saída, denominada *offset*, está representada na seguinte figura (3.8), isto é,

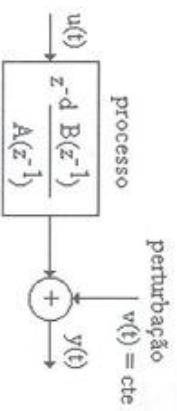


Figura 3.8 – Representação do processo com perturbação de carga.

cuja representação matemática da planta é

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t-d) + v(t) ; \quad v(t) = \text{constante} \quad (3.15)$$

Neste tipo de representação da figura (3.8), é habitual distinguir, além da perturbação de carga, diferentes tipos de perturbações ou imprecisões que afetam a estabilidade do processo controlado, tais como: perturbação estocástica, erro de medição, variação paramétrica ou imprecisão na estrutura do modelo da planta. Quando presente em um sistema de controle, o *offset* é eliminado pela ação integral do controle, mas alguns esquemas de controle adaptativo estimam o valor de  $v(t)$  (amplitude da perturbação) para compensar seu efeito e melhorar a dinâmica de malha fechada da planta. Entretanto, as diferentes formas que o sinal  $v(t)$  pode assumir são: pulso, degrau, rampa, senoidal ou ruido aleatório. O projeto dos algoritmos de controle ótimo depende da natureza da perturbação. Na teoria de controle estocástico, os controladores são desenvolvidos sob a suposição de que as perturbações são estocásticas por natureza. A forma importante de perturbação aleatória é aquela associada com mudanças não-previsíveis no sistema. Estas perturbações são agregadas ao processo e modeladas a partir de uma seqüência ruído branco (ruído *Gaussiano*),  $e(t)$ , com média nula e variância  $\sigma^2$ , conforme ilustra a figura (3.9).

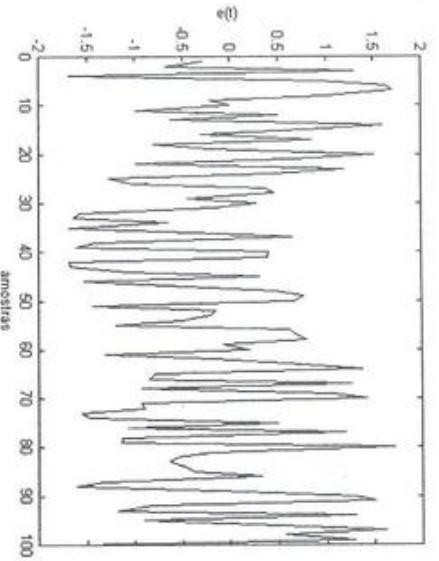


Figura 3.9 – Ruido branco com média nula e variância unitária.

O resultado da figura (3.9) pode ser obtido executando-se o programa em *Matlab* da tabela (3.2).

Tabela 3.2 – Programa em *Matlab* para geração de ruído branco.

```
% Gera um ruído branco com
% média nula e variância unitária
N=100;
x=rand(N,1)           % Média 0.5 e variância 0.083
y=2*x-1;              % Média nula e variância 0.33
z=sqrt(3)*y;           % Média nula e variância um
mean(z);var(z);
plot(z)
ylabel('e(t)'), xlabel('amostras')
```

Agora, admitindo-se que  $v(t)$  é da forma

$$v(t) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} e(t)$$

a equação (3.15) pode ser reescrita como

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t-d) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} e(t) \quad (3.16)$$

ou

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})e(t)$$

O diagrama de blocos representando o sistema de controle em malha aberta completo (processo e perturbação) está ilustrado na figura (3.10).

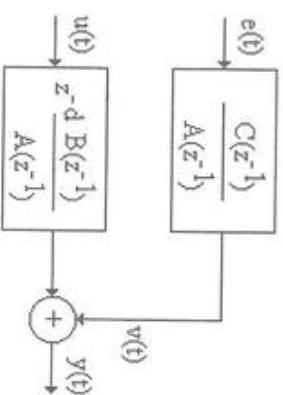


Figura 3.10 – Representação do processo com perturbação estocástica.

Observações:

- A equação (3.16) é uma forma canônica (modelo paramétrico) para um sistema dinâmico discreto com uma entrada, uma saída e um atraso de transporte que é um múltiplo inteiro do período de amostragem, quando sujeito a perturbações estocásticas;
- Um processo estocástico  $\nu(t)$  é denominado ruído branco se suas realizações no tempo estão descorrelacionadas, isto é, a função de autocorrelação,  $E[\nu(t)\nu(t+\delta)]$ , tem valor não-nulo somente para  $\delta = 0$ . Observe que isto implica  $E[\nu(t)] = 0$ ,  $\forall t$ . O processo é denominado ruído branco *Gaussiano* se, adicionalmente, em cada instante de tempo a função densidade de probabilidade é *Gaussian*. Caso contrário, o ruído é denominado colorido (Åström, 1970; Sinha e Kuszta, 1983; Wellstead e Zarrop, 1991).

O sinal  $e(t)$  é um seqüência aleatória não-correlata de média nula utilizada para representar uma perturbação. O polinômio  $C(z')$  tem a forma

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{nc} z^{-nc}$$

- Considerando as seguintes notações:
- Modelo *FIR* (*Finite Impulse Response*);
  - Modelo *MA* (*Moving Average*);
  - Modelo *AR* (*Auto-Regressive*);
  - Modelo *ARMA* (*Auto-Regressive Moving Average*);
  - Modelo *CARIMA* (*Controlled Auto-Regressive*);

A concepção da representação do processo pela equação (3.17) é importante para assegurar uma parte integral na lei de controle digital e proporcionar erro nulo em regime entre a saída e a referência para qualquer *setpoint* e perturbação de carga com comportamento em degrau.

De acordo com a equação (3.17), diversos tipos de modelos matemáticos lineares discretos, mostrados na tabela (3.3), podem ser utilizados em identificação e controle digital.

Tabela 3.3 – Família de modelos para representar processos dinâmicos.

Modelo	$A(z')$	$B(z')$	$C(z')$	$\Delta$
<i>FIR</i>	1	sim	1	1
<i>MA</i>	1	não	sim	1
<i>AR</i>	sim	não	1	1
<i>ARMA</i>	sim	não	sim	1
<i>CAR</i>	sim	sim	1	1
<i>CARMA</i>	sim	sim	sim	1
<i>ARIMA</i>	sim	não	sim	$(I - z')$
<i>CARIMA</i>	sim	sim	sim	$(I - z')$

- Modelo CARMA (*Controlled Auto-Regressive Moving Average*);
- Modelo ARIMA (*Auto-Regressive Integrated Moving Average*);
- Modelo CARIMA (*Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average*).

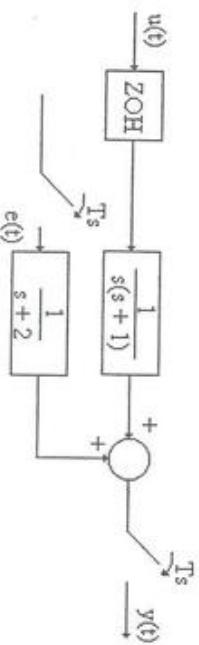
Observações:

- Nas áreas de *Identificação* e *Controle Adaptativo* os coeficientes dos polinômios  $A(z^{-l})$ ,  $B(z^{-l})$  e  $C(z^{-l})$  são desconhecidos, podem ser constantes ou variantes no tempo e devem ser estimados por técnicas de identificação em uma particular aplicação experimental (Malik *et al.*, 1991; Shah *et al.*, 1991; Levine, 1996; Coelho *et al.*, 1999);
- A literatura de *Identificação de Sistemas* também emprega no lugar dos modelos CAR, CARMA, CARIMA as notações ARX, ARMAX, ARIMAX, respectivamente, onde X denota *exogenous* ou *external input* (Ljung, 1999).

### 3.6 PROBLEMAS

- 1) O sistema de controle da figura está sujeito a uma perturbação a partir de uma fonte  $e(t)$ . Determinar a função de transferência discreta do sistema de acordo com a estrutura CARMA. Admitir um período de amostragem de  $T_s$  seg e segurador de ordem zero – ZOH (*Zero-Order Hold*).

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t)$$

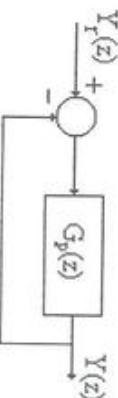


- 4) Seja o processo representado pela seguinte função de transferência:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(1+T_3s)}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

onde  $K = 1$ ,  $T_1 = 10$  seg,  $T_2 = 7$  seg e  $T_3 = 2$  seg. Considerando que o processo deve ser controlado por computador, obter:

- i) A representação do processo através da função de transferência discreta, supondo o período de amostragem de  $T_s = 1$  seg e assumindo o segurador de ordem zero;



- 2) Considere o sistema de controle digital ilustrado na figura.

A função de transferência em malha fechada é dada por

$$\frac{Y(z)}{Y_r(z)} = \frac{z^{-1}(1.125 + 0.455z^{-1})}{(1 + 0.757z^{-1} + 0.455z^{-2})}$$

- i) Plotar os pólos e zeros no plano complexo  $z$  e avaliar a estabilidade em malha fechada;

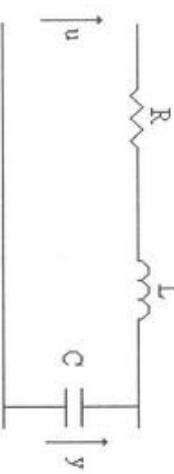
- ii) Qual é a função de transferência em malha aberta  $\{G_p(z)\}$ ? É o processo estável e de fase não-mínima? Por quê?

- iii) Qual a equação a diferenças do processo (polinômios  $A(z^{-l})$ ,  $B(z^{-l})$  e atraso discreto)?

- 3) A partir da aproximação numérica da derivada

$$\frac{dy(nT_s)}{dt} \approx \frac{y(nT_s) - y(nT_s - T_s)}{T_s}$$

obter a correspondente equação a diferenças de segunda ordem para o circuito RLC (polinômios  $A(z^{-l})$ ,  $B(z^{-l})$  e atraso de transporte discreto).



- ii) As alterações na função de transferência  $z$  do item anterior se o processo apresentar um atraso de transporte de 4 seg;
- iii) A representação do processo CAR em termos da equação a diferenças (os polinômios  $A(z')$  e  $B(z')$  e atraso discreto).

- 5) Para o sistema de controle da figura, obter a função de transferência relacionando as transformadas  $z$  entre as sequências  $\{y(t)\}$  e  $\{u(t)\}$ . Derivar a equação a diferenças do modelo para  $T_s = 1$  seg.

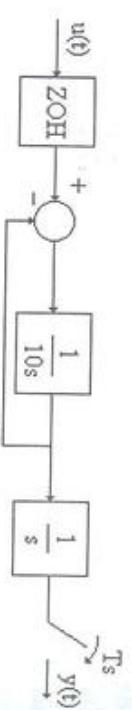


Figura 3.12 – Diagrama PID paralelo para o sistema de nível.

O modelo matemático que representa a dinâmica do processo linear e invariante no tempo de segunda ordem em malha aberta é

$$G_p(s) = \frac{5}{s^2 + 6s + 5}$$

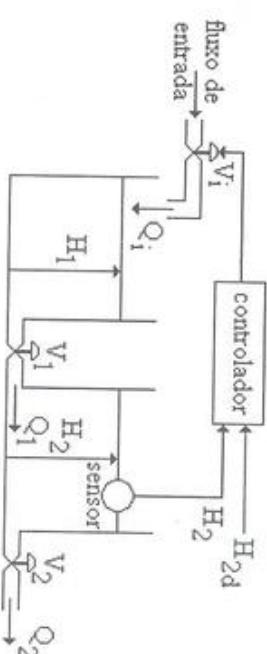


Figura 3.11 – Sistema de controle de nível com dois tanques acoplados.

O controlador deve comparar o nível atual (saída medida)  $H_2(t) = y(t)$  com o nível desejado  $H_{2d}(t) = y_d(t)$ , e utilizar a diferença, ou erro,  $e(t) = H_{2d}(t) - H_2(t)$  para automaticamente alterar a taxa de fluxo de entrada  $Q_i(t) = u(t)$  para o sistema por meio do controle da válvula  $V_i$ . O correspondente diagrama do sistema está ilustrado na figura (3.12).

- Selecionar um adequado período de amostragem e obter a representação matemática discreta CAR do processo;
- Calcular a correspondente representação em malha fechada discreta (diagrama amostrado: controlador PID e processo) a partir da configuração contínua da figura (3.12);
- Para o sistema de controle discreto do item (ii), admitir uma sequência unitária (referência) com as diferentes sintonias PID da tabela (3.4) e avaliar o comportamento dinâmico do processo em malha fechada (simular com o Simulink) em função das especificações de desempenho da tabela (3.5). Comentar os resultados da simulação digital.

Tabela 3.4 – Sintonia dos controladores P, PI e PID.

Controlador	$K_c$	$K_i$	$K_d$
P	10	–	–
PI	1	1	–
PID	2.4	2	0.4

– não implementado

Capítulo 4

Tabela 3.5 – Dinâmica do processo sob diferentes condições de operação

Controlador	$e_{ss}$	PO	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$MA$					
$MF - P$					
$MF - PI$					
$MF - PID$					

$t_s$  – tempo de estabilização

# MÉTODOS CLÁSSICOS PARA MODELAGEM DE PROCESSOS

4.1 INTRODUÇÃO

*Introdução. Modelagem de processos de primeira ordem. Modelagem de processos de segunda ordem. Modelagem de processos via resposta em frequência. Modelagem de processos via resposta impulsiva. Problemas.*

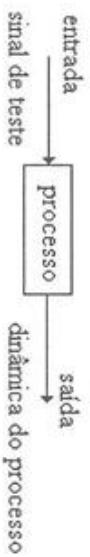


Figura 4.1 – Avaliação de processos perante sinais de teste.

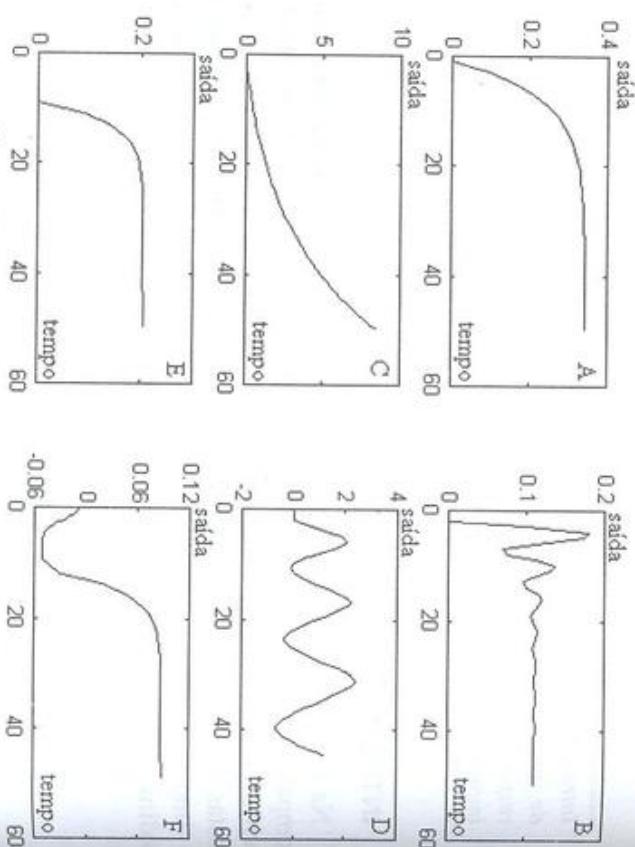
Na análise e projeto de sistemas de controlo, deve-se adoptar uma base de comparação entre os vários sistemas avaliados. Esta base pode ser obtida especificando-se os sinais particulares de entrada e comparando-se as respostas dos sistemas. Os sinais de teste de entrada comumente utilizados são: impulso, degrau, rampa e senoidal. A figura (4.1) ilustra o procedimento de avaliação da dinâmica de um processo perante sinais de teste.

Para a identificação das características essenciais de um processo sob avaliação, é possível utilizar uma entrada degrau. Assim, o chaveamento abrupto através de um acréscimo ou decréscimo na magnitude do degrau

pode ser estabelecido pela variação da tensão (ou corrente) ou pela abertura ou fechamento de uma válvula de entrada. Admitindo uma malha de controle, a resposta ao degrau pode ser obtida de acordo com os seguintes passos (Mollenkamp, 1988; Ogata, 2002):

- Ajustar o regulador para o modo manual;
- Modificar a magnitude da variável de controle (acréscimo ou decréscimo);
- Registrar (plotar) a variável de saída do processo.

Alguns exemplos de resposta ao degrau em malha aberta (curva de reação da planta) são mostrados na figura (4.2).



Assim, a resposta ao degrau é um procedimento adequado para caracterizar, de forma preliminar, a dinâmica de um processo por meio da simples interpretação gráfica (Brosilow e Joseph, 2002).

#### Observação:

- Um sistema é conhecido por linear pela determinação da sua resposta ao degrau para diferentes amplitudes no sinal de entrada (teorema da superposição): “um sistema é linear se a forma (curva) da resposta ao degrau não depende da amplitude de entrada”.

A seguir, avaliam-se alguns procedimentos para a determinação dos parâmetros dos modelos matemáticos de um processo a partir dos comportamentos transitório e de regime. Diferentes métodos baseados no teste ao degrau para a modelagem de processos de primeira e segunda ordem são apresentados e utilizam alguns pontos da resposta ou curva de reação do processo.

## 4.2 MODELAGEM DE PROCESSOS DE PRIMEIRA ORDEM

Um modelo paramétrico da dinâmica de um processo comumente encontrado na indústria está caracterizado pela seguinte função de transferência:

As características de um sistema (estabilidade, dinâmica assimétrica, fase mínima) podem ser obtidas a partir do conhecimento da resposta ao degrau e são apresentadas na tabela (4.1).

$$G_p(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (4.1)$$

e está configurado por três parâmetros: ganho estático  $K$ , constante de tempo  $\tau$  e atraso de transporte  $\theta$ .

Observações:

- A saída de diversos processos químicos exibe respostas ao degrau que podem ser aproximadas pela equação (4.1), também denominada *FOPDT* – *First-Order Plus Dead-Time*;

- O modelo matemático da equação (4.1) pode ser utilizado na sintonia de diversos controladores: *PID*, *IMC*, alocação de pólos, *Dahlin*, tempo mínimo, entre outros.

A resposta ao degrau unitário do modelo matemático representado pela equação (4.1) é

$$y(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}} \right) \quad (4.2)$$

e, com base na resposta temporal, é possível mensurar pontos para a aplicação de diferentes métodos de estimativa. Na literatura, existe uma variedade de métodos baseados na resposta do processo ao degrau para identificação de  $K$ ,  $\tau$  e  $\theta$ . Entre os disponíveis na literatura, avaliam-se os seguintes métodos, apresentados por Ziegler/Nichols (1942), Sundaresan/Krishnaswamy (1977), Nishikawa (1984), Smith (1985) e Hägglund (1991) (Mollenkamp, 1988; Seborg *et al.*, 1989; Dorf e Bishop, 1995).

Nos métodos de Ziegler/Nichols (*ZN*) e Hägglund (*HAG*), os parâmetros  $K$ ,  $\tau$  e  $\theta$  são calculados conforme é ilustrado na figura (4.3). A reta traçada corresponde à tangente no ponto de máxima inclinação da curva de reação. O atraso  $\theta$ , nos dois métodos, é calculado pelo intervalo de tempo entre a aplicação do degrau na entrada do processo e o instante  $t_1$ , em que a reta tangente toca a reta  $y(t) = y(0)$ . No método de *ZN*, a constante de tempo  $\tau$  é determinada pelo intervalo de tempo entre  $t_1$  e o instante  $t_3$ , em que a reta tangente toca a reta  $y(t) = y(0) + 0.63y_f$ . Y, enquanto que, no método de *Hägglund*,  $\tau$  é calculado pelo intervalo entre  $t_1$  e o instante  $t_2$  em que a curva de resposta alcança o valor  $y(t) = y(0) + 0.283y_f$ . O parâmetro  $K$  é calculado pela equação (4.3), isto é,

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad (4.3)$$

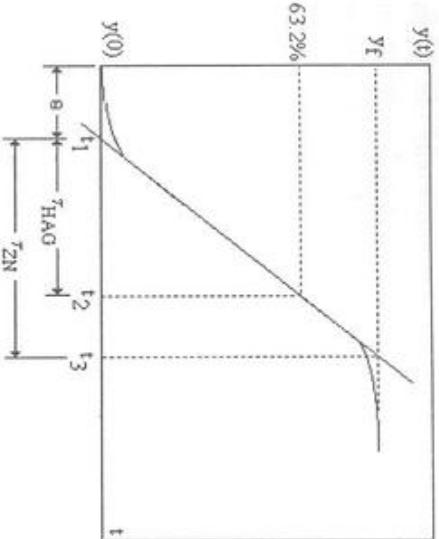


Figura 4.3 – Métodos de *ZN* e *HAG* para a modelagem de processos de primeira ordem.

No método de *Smith*, sobre a curva de reação são marcados os instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$  correspondentes às passagens da resposta pelos pontos  $y(0) + 0.283y^{(\infty)}$  e  $y(0) + 0.632y^{(\infty)}$ , respectivamente, conforme apresentado na figura (4.4). Os parâmetros são obtidos pelas seguintes relações:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \tau &= 1.5(t_2 - t_1) \\ \theta &= t_2 - \tau \end{aligned} \quad (4.5)$$

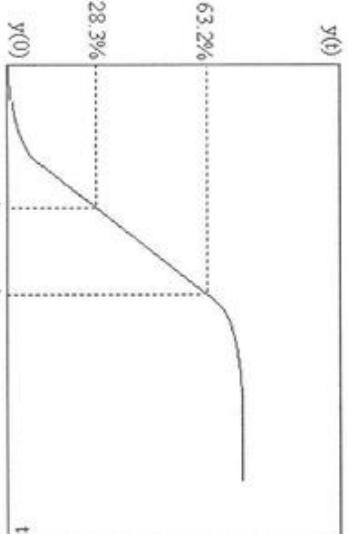


Figura 4.4 – Método de *Smith* para a modelagem de processos de primeira ordem.

O método de *Sundaresan e Krishnasamy* (de forma semelhante ao método de *Smith*) evita a utilização do ponto de máxima inclinação para a estimativa dos parâmetros do modelo paramétrico. Dois instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$  devem ser estimados a partir da curva de resposta ao degrau, correspondentes aos tempos de resposta 35.3% e 85.3%, respectivamente, como ilustrado na figura (4.5). Os parâmetros são calculados por

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad (4.7)$$

$$\tau = 0.67(t_2 - t_1) \quad (4.8)$$

$$\theta = 1.3t_1 - 0.29t_2 \quad (4.9)$$



Figura 4.6 – Método de *Nishikawa* para a modelagem de processos de primeira ordem.

Observações:

- Por dependerem do traçado da tangente, os métodos de *ZN* e *HAG* apresentam sensibilidade na presença de ruído (imprecisão na sintonia dos parâmetros);
- Os parâmetros estimados são selecionados de tal forma que a soma dos quadrados da diferença entre os valores medidos e os calculados é mínima. A função custo (no sentido dos mínimos quadrados) é dada por

$$A_0 = \int_0^{\infty} (\Delta y(\infty) - \Delta y(t)) dt \quad (4.10)$$

$$A_1 = \int_0^{t_0} \Delta y(t) dt ; \quad t_0 = \frac{A_0}{\Delta y(\infty)} \quad (4.11)$$

onde  $N$  é o número de amostras e  $e(i)$  representa o erro entre a saída real e a saída observada (Ljung e Söderström, 1983);

conforme ilustra a figura (4.6). Assim, os parâmetros do modelo são dados por

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad (4.12)$$

$$\tau = \frac{A_1}{0.368 \Delta y(\infty)} \quad (4.13)$$

$$\theta = t_0 - \tau. \quad (4.14)$$

- Com as medidas de resposta ao degrau reais, os parâmetros  $K$ ,  $\tau$  e  $\theta$  podem variar consideravelmente dependendo das condições de operação do processo, isto é, da magnitude da mudança do degrau de entrada e da direção da mudança. Estas variações podem ser atribuídas às não-linearidades do processo.

A seguir, o exemplo (4.1) ilustra a aplicação da técnica de *Hägglund* na modelagem de um processo de primeira ordem.

*Exemplo 4.1* – De acordo com a curva de reação do processo da figura (4.7), estimar um modelo paramétrico de primeira ordem pelo método de *Hägglund* (admitir uma entrada degrau unitário).

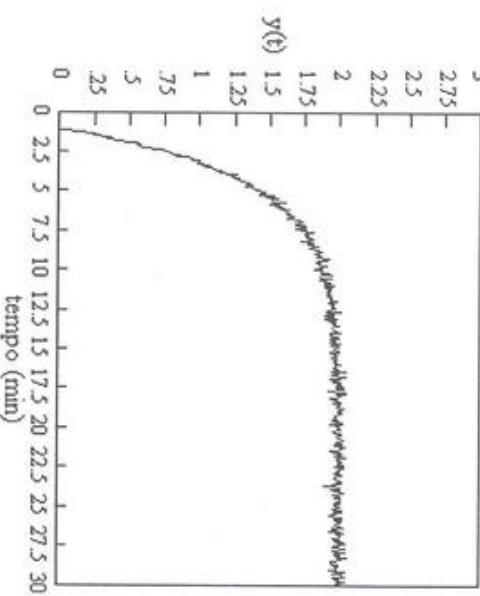


Figura 4.7 – Dinâmica do processo para a aplicação do método de *Hägglund*.

A partir da resposta ao degrau unitário, identificam-se os seguintes parâmetros:

- > Ganho valor final = 2  $\rightarrow K = 2$
- > Atraso de transporte  $\rightarrow \theta = 1.2$  min

- > Constante de tempo  $63.2\%$  do valor final é 1.26  
 $1.26$  ocorre em  $t = 4.35$  min  
 $\tau = 4.35 - 1.2 \Rightarrow \tau = 3.15$  min

Portanto, a função de transferência estimada de primeira ordem é

$$\hat{G}_p(s) = \frac{2e^{-1.2s}}{(3.15s + 1)}$$

*Exemplo 4.2* – Considere o seguinte processo de quinta ordem representado por:

$$G_p(s) = \frac{277.5}{s^5 + 19.5s^4 + 141s^3 + 453s^2 + 608s + 277.5}$$

O teste de resposta ao degrau unitário fornece uma curva de reação, conforme ilustra a figura (4.8).

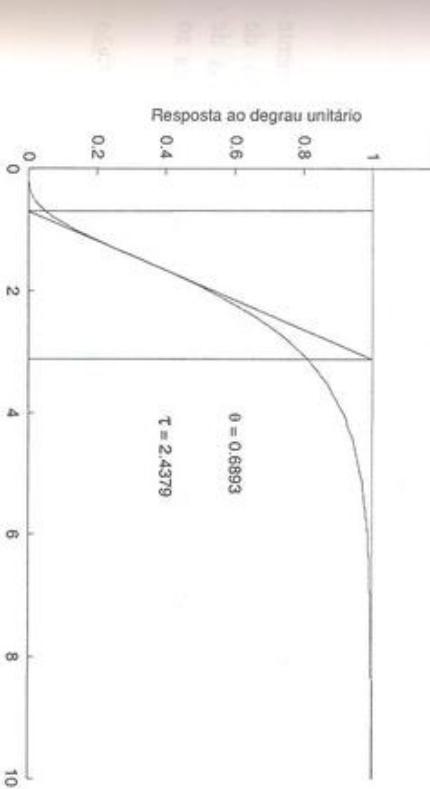


Figura 4.8 – Resposta ao degrau do sistema.

Utilizando-se o primeiro método, de Ziegler/Nichols, pode-se identificar um modelo matemático de primeira ordem:  $K = 1$ ,  $\theta = 0.6893$  e  $\tau = 2.4379$ . A figura (4.9) compara as respostas dos processos real (modelo de quinta ordem) e estimada (modelo de primeira ordem) para um sinal de entrada degrau unitário.

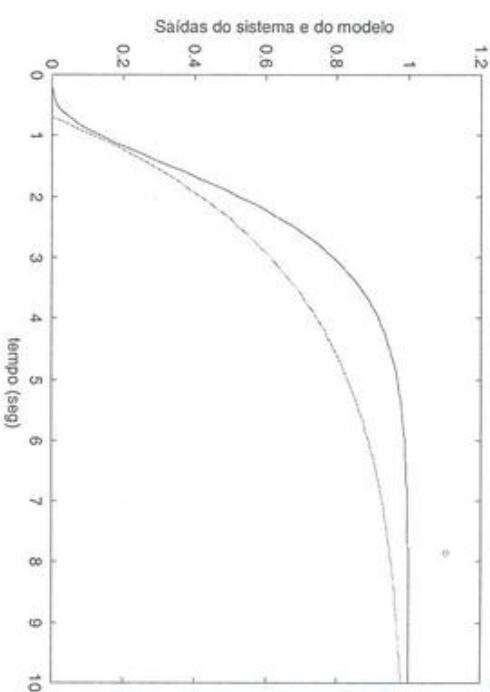


Figura 4.9 – Comparação das respostas real e aproximada.

Percebe-se que o modelo identificado não aproxima adequadamente o processo original. Ajustes posteriores à aplicação do método de Ziegler/Nichols são recomendados. Obviamente, há diferentes formas de extrair informação do processo a partir da curva de reação da resposta ao degrau.

Alguns exemplos práticos de sistemas de primeira ordem são apresentados na figura (4.10).

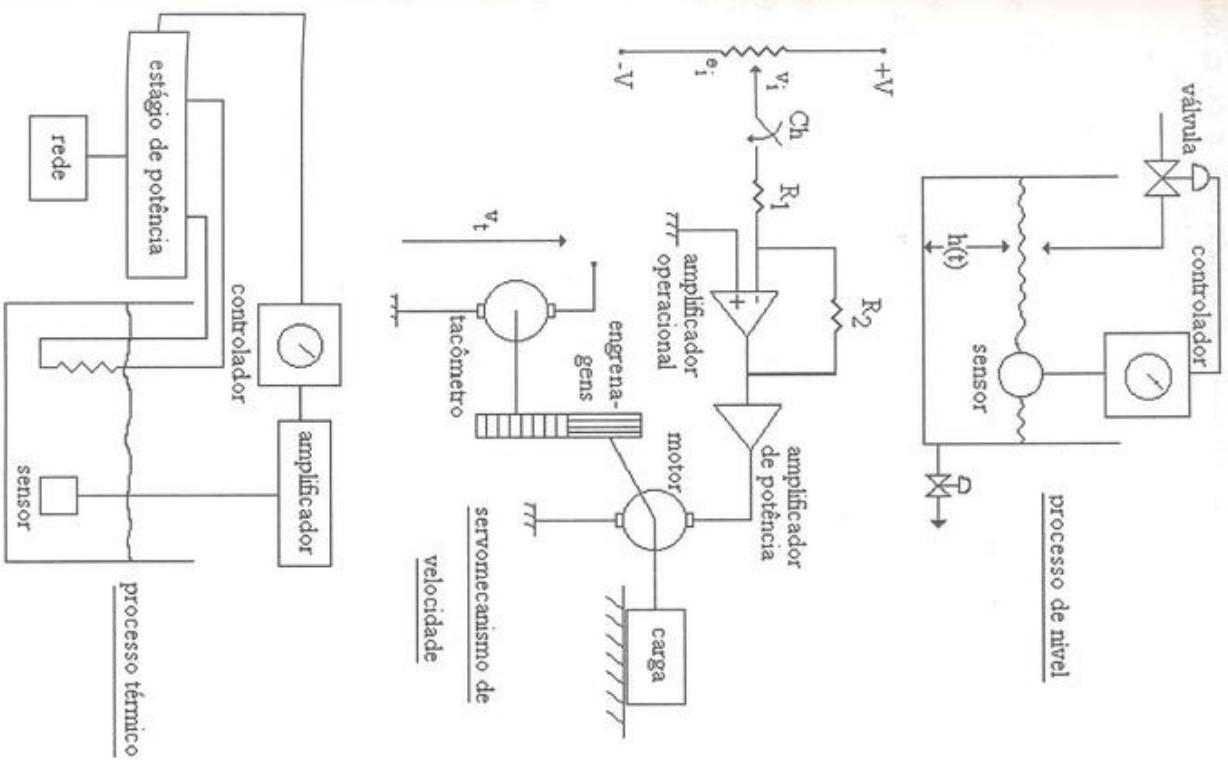


Figura 4.10 – Exemplos de processos de primeira ordem.

Considerando o servomecanismo de velocidade, onde  $\tau_c < \tau_m$ , obtém-se a representação em diagrama de blocos dada na figura (4.11), ou seja,

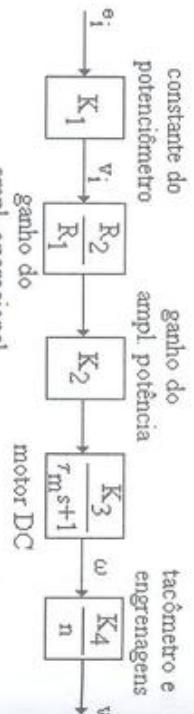


Figura 4.11 – Diagrama simplificado do servomecanismo de velocidade.

cuja representação matemática é dada por

$$\frac{V(s)}{\theta_i(s)} = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \quad (4.16)$$

onde

$$K_m = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 R_2}{R_1 n}$$

Observações:

- Ambos os sistemas apresentados na figura (4.10) são caracterizados por uma equação diferencial de primeira ordem;
- Um processo de primeira ordem pode ser implementado (simulação analógica) através de amplificadores operacionais, conforme ilustra a figura (4.12), isto é,

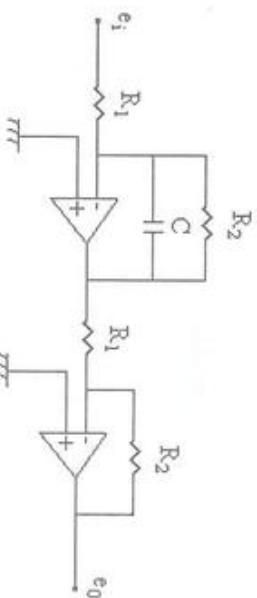


Figura 4.12 – Implementação analógica da equação (4.16).

e a função de transferência é calculada por

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{(R_2 / R_1)^2}{R_2 C s + 1} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{1}{(10s + 1)} \rightarrow R_1 = R_2 = 1 \text{ M}\Omega, C = 10 \mu\text{F}; \\ & \Rightarrow \text{Se } \frac{1}{(s+1)} \rightarrow R_1 = R_2 = 1 \text{ M}\Omega, C = 1 \mu\text{F}. \end{aligned}$$

Os métodos de estimativa apresentados conduzem a modelos de primeira ordem. Se o modelo de primeira ordem não é suficientemente preciso, um modelo de segunda ordem (duas constantes de tempo) pode ser estimado. A identificação de mais do que duas constantes de tempo utilizando técnicas gráficas é uma tarefa complexa.

### 4.3 MODELAGEM DE PROCESSOS DE SEGUNDA ORDEM

Considere a representação matemática clássica de um sistema de segunda ordem subamortecido descrito pela seguinte função de transferência (Ogata, 2002):

$$G_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \text{ para } \xi < 1 \quad (4.18)$$

A resposta do sistema à entrada degrau unitário é

$$y(t) = 1 - \frac{1}{B} e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n B t - \phi) \quad (4.19)$$

onde

$$B = \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\xi}{B} \right)$$

A resposta máxima (saída no instante do tempo de pico) é dada por

$$y(t_p) = 1 + e^{-\xi\pi/\omega_n} \quad (4.20)$$

e acontece no instante de tempo

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n B} \quad (4.21)$$

Assim, medindo  $y(t_p)$ , o fator de amortecimento,  $\xi$ , pode ser calculado pela equação (4.20) e a equação (4.21) pode ser utilizada para determinar a frequência natural,  $\omega_n$ .

As principais especificações de desempenho da resposta ao degrau para um sistema de segunda ordem são apresentadas na figura (4.13) e podem ser diretamente mensuradas por inspeção da resposta temporal e utilizadas na elaboração da correspondente função de transferência.

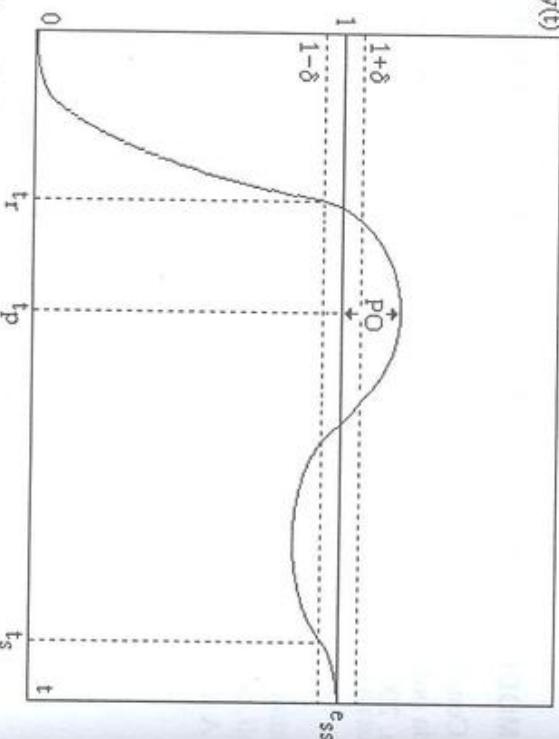


Figura 4.13 – Resposta ao degrau para um processo de segunda ordem.

- $t_r$ : tempo de subida – é o intervalo de tempo que o sistema leva para ir de zero a 100% do valor final para sistemas subamortecidos. Para sistemas sobreamortecidos, utiliza-se o intervalo de 10 a 90%;
- $t_p$ : tempo de pico – é o tempo gasto para a saída atingir o primeiro pico de overshoot

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (4.22)$$

- $t_s$ : tempo de estabilização – é o tempo que o sistema leva para entrar e permanecer na faixa ±2 do valor final (referência)

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (4.23)$$

- $PO$ : percentual de overshoot (sobre-sinal)

$$PO = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad (4.24)$$

- $e_{ss}$ : erro em regime

$$e_{ss} = y_r(\infty) - y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s[Y_r(s) - Y(s)] \quad (4.25)$$

Manipulando-se matematicamente algumas destas equações, é possível, então, estimar os parâmetros  $\xi$  e  $\omega_n$ , e, consequentemente, o modelo de segunda ordem da equação (4.18) (Dorf e Bishop, 1995).

Um segundo procedimento gráfico para a identificação de sistemas de segunda ordem baseia-se no método apresentado por Molленкамп (1988), onde sobre a curva de reação do processo são identificados três pontos intermediários, isto é,  $t_1$  – tempo para a saída alcançar 15% da mudança total final;  $t_2$  – tempo para a saída alcançar 45% da mudança total final;  $t_3$  – tempo para a saída alcançar 75% da mudança total final. Com base nestes instantes de tempo, os parâmetros do modelo paramétrico de segunda ordem são calculados pelo seguinte algoritmo:

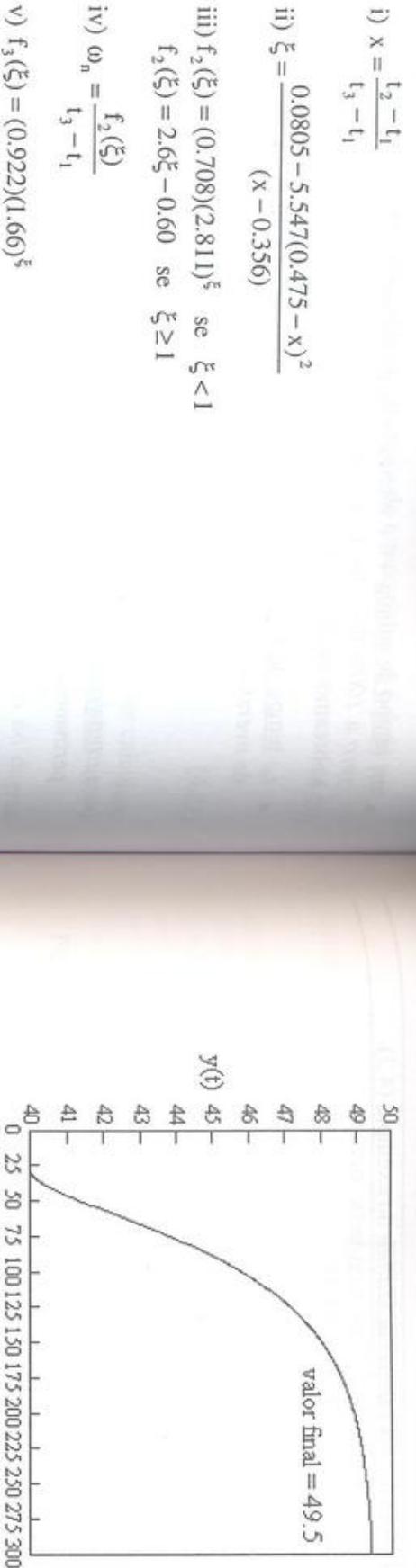


Figura 4.14 – Experimentação de um processo para estimação paramétrica.

$$\begin{array}{ll} 15\% \text{ de } 9.5 = 1.42 & \tau_{15\%} = 50 \text{ seg} \\ 45\% \text{ de } 9.5 = 4.28 & \tau_{45\%} = 80 \text{ seg} \\ 75\% \text{ de } 9.5 = 7.12 & \tau_{75\%} = 125 \text{ seg} \end{array}$$

Utilizando os instantes  $t_{15\%}$ ,  $t_{45\%}$  e  $t_{75\%}$ , no algoritmo de *Mollenkamp*, obtém-se

$$\begin{aligned} K &= 1.9 \\ \theta &= 27.2 \text{ seg} \\ \tau_1 &= 52.2 \text{ seg} \\ \tau_2 &= 19.9 \text{ seg} \end{aligned}$$

Portanto, a função de transferência de segunda ordem estimada é

$$\hat{G}_p(s) = \frac{1.9e^{-27.2s}}{(19.9s+1)(52.2s+1)}$$

*Exemplo 4.3* – De acordo com a resposta do processo apresentada na figura (4.14), estimar um modelo paramétrico de segunda ordem pelo método de *Mollenkamp* (variação da entrada degrau de 5).

A seguir, apresenta-se um exemplo de aplicação do método de *Mollenkamp* na modelagem de um processo de segunda ordem.

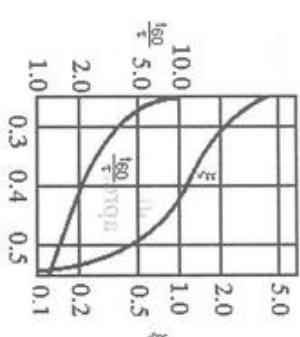
*Exemplo 4.3* – De acordo com a resposta do processo apresentada na figura (4.14), estimar um modelo paramétrico de segunda ordem pelo método de *Mollenkamp* (variação da entrada degrau de 5).

A tabela (4.2) ilustra a programação em *Matlab* do algoritmo de *Mollenkamp* para o exemplo (4.3).

Tabela 4.2 – Código em Matlab do exemplo (4.3).

```
% Estimação de um modelo de segunda ordem
% pelo método de Mollenkamp
t1=input(' valor de t1(15%): ');
t2=input(' valor de t2(45%): ');
t3=input(' valor de t3(75%): ');
x=(t2-t1)/(t3-t1);
zeta=(0.0805-(5.547*(0.475-x)^2))/(x-0.356);
if zeta < 1
f2=(0.708)*(2.811)^zeta;
else
f2=(2.6*zeta)-0.60;
end
wn=f2/(t3-t1);
f3=(0.922)*(1.66^zeta);
teta=t2-(f3/wn);
tal1=(zeta+sqrt(zeta^2-1))/wn;
tal2=(zeta-sqrt(zeta^2-1))/wn;
if zeta < 1
disp('fator de amortecimento')
zeta
else
disp('freqüência natural')
wn
end
disp('atraso de transporte')
teta
disp('constante de tempo 1')
tal1
disp('constante de tempo 2')
tal2
disp('atraso de transporte')
teta
end
```

Uma terceira técnica gráfica alternativa para estimar uma função de transferência de segunda ordem é o método de *Smith*, onde sobre a curva de reação do processo são identificados dois instantes de tempo,  $t_1$  e  $t_2$ , correspondentes a 20% e 60% do valor final (com o aparente atraso de transporte removido). Com o auxílio da figura (4.15), obtém-se  $\xi$  com o valor de  $\frac{t_{20}}{t_{60}}$  e a estimativa de  $\tau$  é calculada a partir de  $(\frac{t_{20}}{\tau}) \times (\frac{t_{20}}{t_{60}})$ .

Figura 4.15 – Identificação dos parâmetros  $t_{20\%}$ ,  $t_{60\%}$ ,  $\tau$ ,  $\xi$  pelo método de *Smith*.

Para sistemas sobreamortecidos, tem-se

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} ; \quad \tau_{1,2} = \tau \xi \pm \tau \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (4.26)$$

enquanto que, para sistemas subamortecidos, tem-se

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1} \quad (4.27)$$

Um exemplo de sistema de controle de segunda ordem de grande utilização prática em controle de processos está ilustrado na figura (4.16).

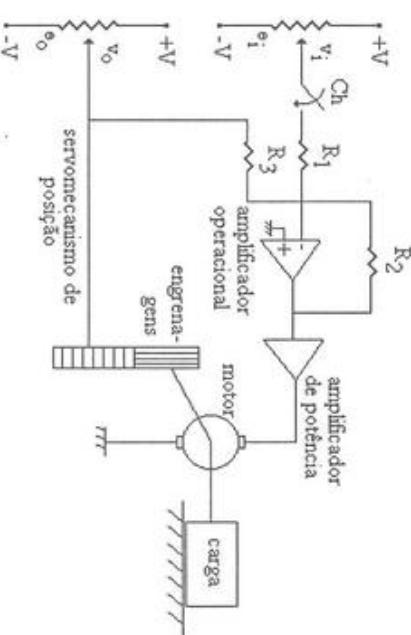


Figura 4.16 – Sistema de controle de posição analógico clássico.

### Observações:

- O sistema servomecanismo de posição está caracterizado em malha fechada por uma equação diferencial dominante de segunda ordem;
- A implementação analógica de um processo de segunda ordem através de amplificadores operacionais é apresentada na figura (4.17), isto é,

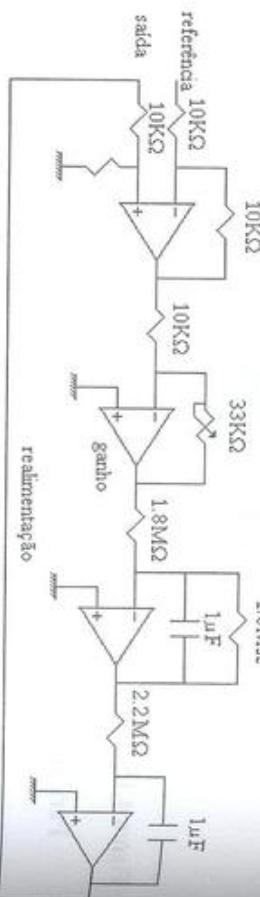


Figura 4.17 – Exemplo de um processo de segunda ordem.

Admitindo diferentes ganhos ( $0.2, 0.3, 1.2$ ) para a implementação do processo de segunda ordem da figura (4.17), é possível obter comportamentos do tipo sobreamortecido, criticamente amortecido e subamortecido. Estes resultados estão ilustrados na figura (4.18).

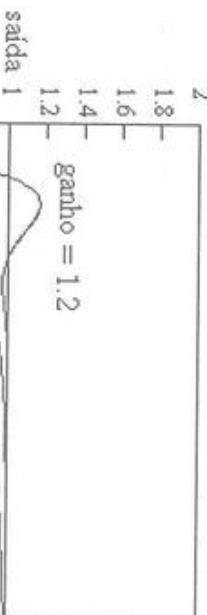


Figura 4.18 – Respostas típicas de segunda ordem.

## 4.4 MODELAGEM DE PROCESSOS VIA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

O método da resposta em freqüência na identificação de sistemas lineares está baseado nos diagramas de *Bode*. Neste método, entradas do tipo senoidal são aplicadas no sistema e a saída em regime é observada. Tanto a razão de magnitude quanto o deslocamento de fase entre a saída e a entrada são avaliados. Estas medidas são obtidas em um intervalo de freqüências de interesse para o processo particular. Se a função de transferência do sistema é  $G(s)$ , então a resposta em freqüência é obtida pela substituição de  $s$  por  $j\omega$ , isto é,

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (4.28)$$

$$G(j\omega) = |G(\omega)| \angle \phi(\omega) = |G(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (4.29)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\{R(\omega)\}^2 + \{X(\omega)\}^2} \quad (4.30)$$

$$\phi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right\} \quad (4.31)$$

Em aplicações práticas, deve-se garantir entradas senoidais em diferentes freqüências e medir precisamente nestas freqüências as razões de magnitude e o deslocamento de fase. O método é aplicável para processos lineares e o procedimento de identificação é *off-line*. Além disso, o método é aplicável somente para sistemas estáveis, desde que a resposta em freqüência de sistemas instáveis não pode ser medida na prática (Dorf e Bishop, 1995; Ogata, 2002).

### Observação:

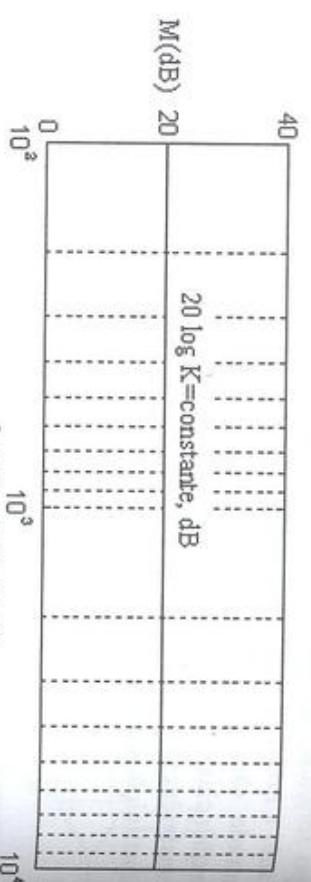
- Um sistema linear e invariante no tempo estável sujeito a uma entrada senoidal da forma  $u(t) = U \operatorname{sen}(\omega t)$  apresenta, em regime, uma saída senoidal, isto é,

$$y(t) = Y \operatorname{sen}(\omega t + \phi) ; \quad Y = U |G(j\omega)| \quad (4.32)$$

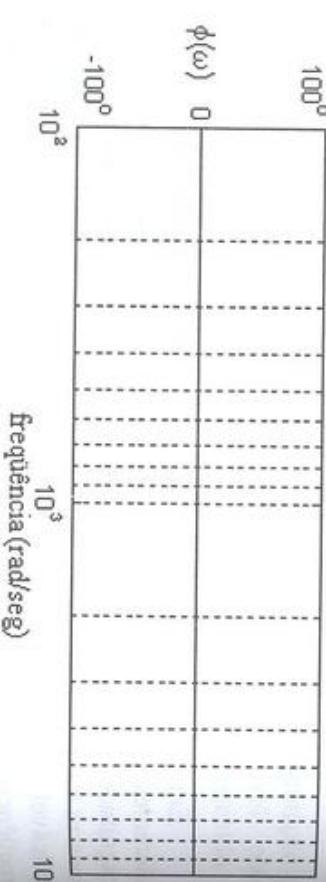
com a mesma freqüência do sinal de entrada, porém com a amplitude e o ângulo de fase da saída diferentes do sinal de entrada.

As diferentes contribuições em termos dos traçados de magnitude e fase dos fatores (pólos e zeros) comumente encontrados em uma função de transferência são:

➤ Ganho:  $K$



frequência (rad/sec)



frequência (rad/sec)

➤ Pólos (ou zeros) na origem:  $(j\omega)^N$

Admitindo o caso de um pólo na origem,  $N = I$ , as correspondentes equações de magnitude e fase são

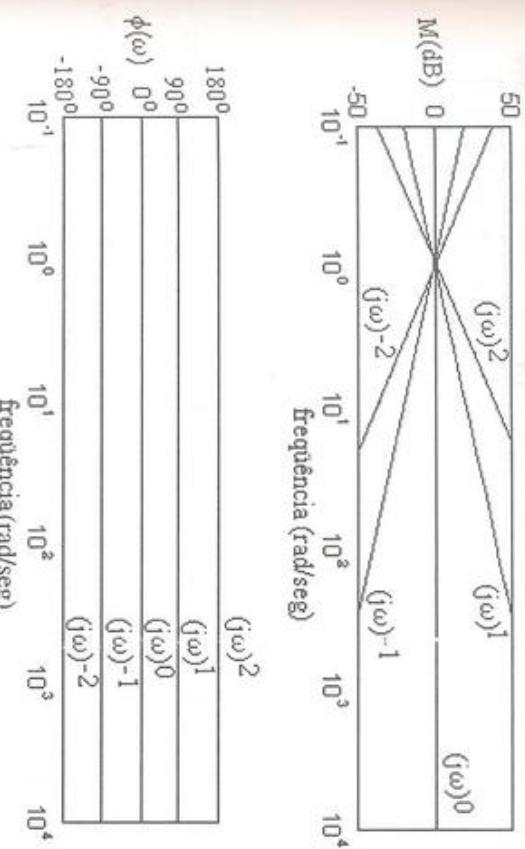
$$\begin{aligned} -20 \log \omega, \text{ dB} & ; \quad \phi(\omega) = -90^\circ (90^\circ N, N = 1) \\ \text{em } \omega = 10 & \rightarrow -20 \text{ dB} \\ \text{em } \omega = 1 & \rightarrow 0 \text{ dB} \end{aligned}$$

➤ Pólos (ou zeros) sobre o eixo real:  $(1 + j\omega\tau)^N$

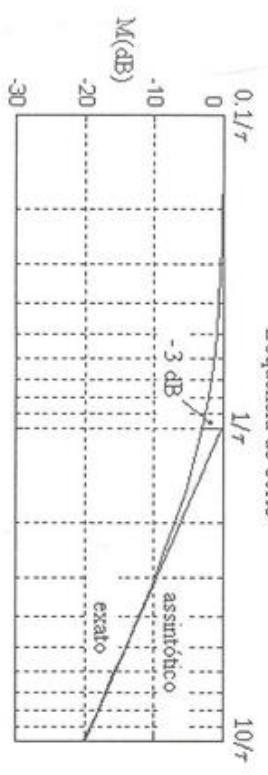
Considerando o caso de um pólo simples ( $N = -I$ ), então

$$\begin{aligned} -10 \log (1 + \omega^2\tau^2), \text{ dB} \\ \phi(\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 << 1/\tau & \rightarrow 0 \text{ dB} & \omega = 0 \rightarrow 0^\circ \\ 0 >> 1/\tau & \rightarrow -20 \log \omega\tau, \text{ dB} & \omega \rightarrow \infty \rightarrow -90^\circ \\ \omega = 1/\tau & \rightarrow -3 \text{ dB} & \omega \rightarrow 1/\tau \rightarrow -45^\circ \end{aligned}$$



frequência (rad/sec)



frequência (rad/sec)

➤ Pólos (ou zeros) na origem:  $(j\omega)^N$

Admitindo o caso de um zero na origem,  $N = I$ , as correspondentes equações de magnitude e fase são

$$\begin{aligned} -20 \log \omega, \text{ dB} & ; \quad \phi(\omega) = -90^\circ (90^\circ N, N = 1) \\ \text{em } \omega = 10 & \rightarrow -20 \text{ dB} \\ \text{em } \omega = 1 & \rightarrow 0 \text{ dB} \end{aligned}$$

➤ Pólos (ou zeros) na origem:  $(j\omega)^N$

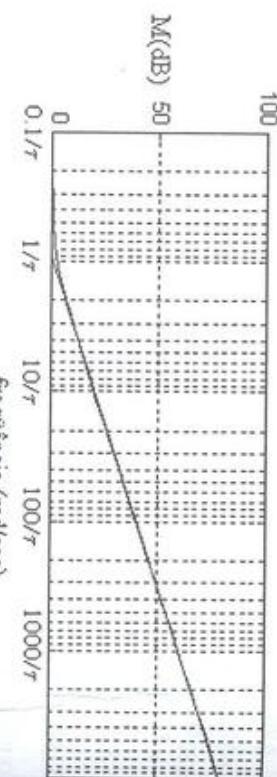
Admitindo um par de pólos complexos conjugados,  $N = -I$ , então

$$\{1 + j2\xi\mu - \mu^2\}^{-1} ; \quad \mu = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$20\log |G(\omega)| = -10\log \{(1 - \mu^2)^2 + 4\xi^2\mu^2\}$$

$$\phi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{2\xi\mu}{(1 - \mu^2)} \right\}$$

Para o caso de um zero simples,  $N = I$ , tem-se o seguinte traçado:



$\mu << 1 \rightarrow$  magnitude  $\approx 0$  dB,  $\phi(\omega) = 0^\circ$   
 $\mu \gg 1 \rightarrow$  magnitude  $\approx -40 \log \mu$ ,  $\phi(\omega) = -180^\circ$

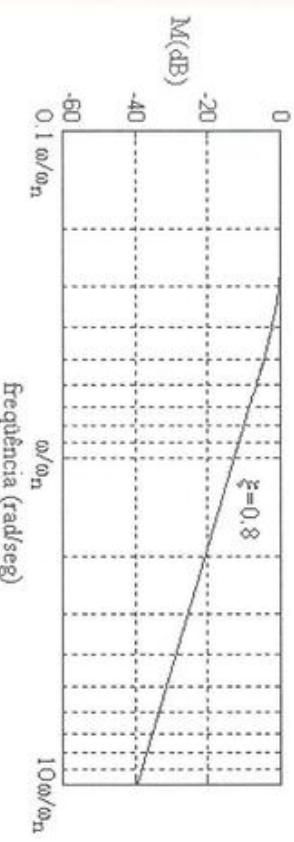
$$\mu = \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \rightarrow$$
 magnitude na vizinhança de 0 dB depende de  $\xi$ ,  $\phi(\omega) = -90^\circ$

Para  $\xi < 0.707$ , a freqüência de ressonância é calculada por

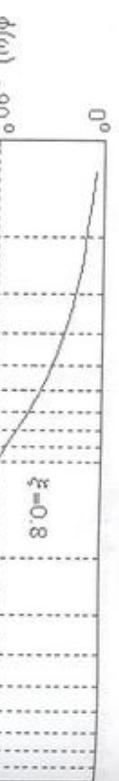
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

enquanto que a magnitude máxima de  $G(j\omega_r)$  é

$$M_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$



Pólos (ou zeros) complexos conjugados:  $\left\{ 1 + \left( \frac{2\xi}{\omega_n} \right) j\omega + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{\pm N}$



*Exemplo 4.4* – Considere a função de transferência do processo e o correspondente diagrama de *Bode* traçado na figura (4.19).

$$G_p(s) = \frac{1.89}{s^4 + 5.9s^3 + 12.03s^2 + 9.405s + 1.89}$$

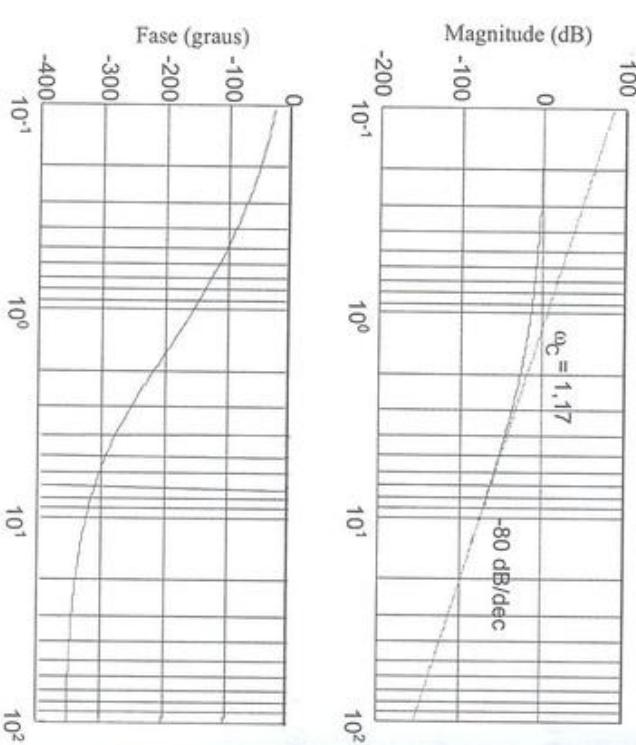


Figura 4.19 – Diagrama de *Bode* do sistema de quarta ordem.

Pelo diagrama de magnitude, identificam-se uma frequência de corte em  $1.17 \text{ rad/seg}$  e uma taxa de inclinação de  $-80 \text{ dB/dec}$ . Isso conduz ao seguinte modelo matemático aproximado:

$$\hat{G}_p(s) = \frac{1.17^4}{(s + 1.17)^4}$$

O ganho estático do sistema é unitário e a assintota de alta frequência corta a reta do ganho estático em  $\omega = 1.17 \text{ rad/seg}$ . A inclinação de  $-80 \text{ dB/dec}$  sugere ao sistema quatro pólos em relação ao número de zeros. Para comparar e ter uma ideia da aproximação do modelo estimado perante o sistema real, traçam-se os diagramas de magnitude e fase conjuntamente na figura (4.20).

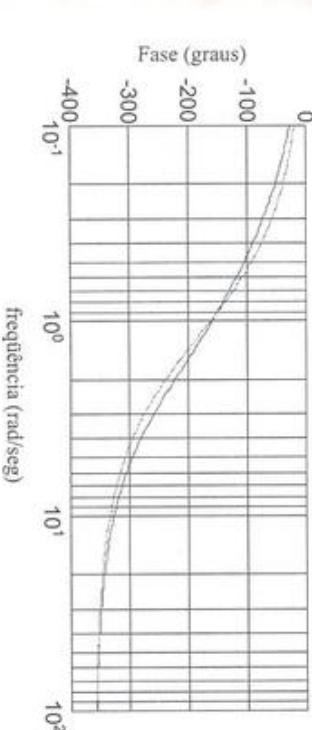
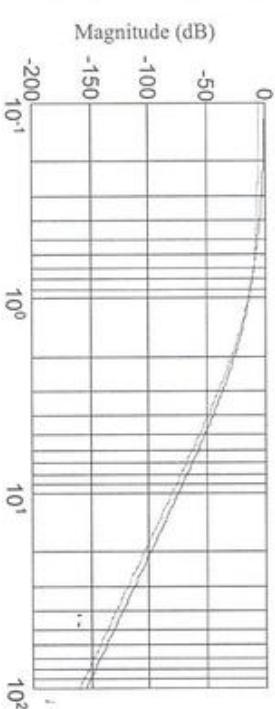


Figura 4.20 – Respostas em frequência do sistema e do modelo estimado.

Informações adicionais sobre a teoria da resposta em frequência podem ser obtidas nas referências Dorf e Bishop (1995) e Ogata (2002).

#### 4.5 MODELAGEM DE PROCESSOS VIA RESPOSTA IMPULSIVA

Esta seção apresenta um procedimento de estimação dos parâmetros através da resposta impulsiva do sistema (sequência de ponderação). As condições para a aplicação da técnica são as seguintes (Sinha e Kuszta, 1983):

- A seqüência de ponderação está mensurada no universo de interesse da experimentação;

iii) O nível de ruído nas informações do processo deve ser mínimo;

iii) A ordem do modelo do processo deve ser conhecida *a priori*.

Considere a função de transferência discreta de malha aberta (a ser estimada) da planta  $\hat{G}_p(z)$  de ordem  $n$  e descrita por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \hat{G}_p(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4.33)$$

Admitindo uma seqüência impulso unitário na entrada do processo –  $u(t)=I$  somente para  $t=0^-$ , então a saída é a resposta impulsiva e calculada por

$$\hat{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} = h(0) + h(1) z^{-1} + h(2) z^{-2} + \dots \quad (4.34)$$

Com as equações (4.33) e (4.34), é possível obter a seguinte relação:

$$b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n} = h(0) + [h(1) + a_1 h(0)] z^{-1} + \dots + \left[ h(n) + \sum_{i=1}^n a_i h(n-i) \right] z^{-n} + \left[ h(m) + \sum_{i=1}^m a_i h(m-i) \right] z^{-m} + \dots (m)n \quad (4.35)$$

Relacionando os coeficientes de mesma potência da equação (4.35), obtém-se as  $(n+1)$  equações com os coeficientes do numerador, que podem ser agrupados como

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(n) \end{bmatrix}$$

$$(4.36)$$

Da equação (4.36), observa-se que os coeficientes do polinômio  $B(z^{-l})$  são identificados se os coeficientes de  $A(z^{-l})$  são conhecidos. Para determinar os  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), considere os termos de  $z^{-(n+1)}$  até  $z^{-2n}$ . Desde que não existem outros termos  $b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) no lado esquerdo da equação (4.35), é possível escrever

$$\begin{bmatrix} h(1) & h(2) & \dots & h(n) & a_n \\ h(2) & h(3) & \dots & h(n+1) & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ h(n) & h(n+1) & \dots & h(2n-1) & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h(n+1) \\ -h(n+2) \\ \vdots \\ -h(2n) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

A solução da equação (4.37) existe se o rank da matriz contendo a sequência de ponderação é igual à ordem do sistema,  $n$ . Portanto, resolvendo-se primeiramente a equação (4.37), identificam-se os coeficientes do polinômio  $A(z^{-l})$  (pólos de malha aberta) para depois, com a equação (4.36), obter os coeficientes do polinômio  $B(z^{-l})$  (zeros de malha aberta).

*Exemplo 4.5* – Obter as equações (4.36) e (4.37) para um processo caracterizado pela seguinte função de transferência discreta e seqüência de ponderação:

$$\hat{H}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = h(0) + h(1) z^{-1} + h(2) z^{-2} + h(3) z^{-3} + h(4) z^{-4}$$

De acordo com a equação (4.35), é possível escrever (ignorando-se os termos acima de  $2^n$ )

$$b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = h(0) + [h(1) + a_1 h(0)] z^{-1} + [a_2 h(0) + a_1 h(1) + h(2)] z^{-2}$$

$$[a_2 h(1) + a_1 h(2) + h(3)]z^{-3} + [a_2 h(2) + a_1 h(3) + h(4)]z^{-4}$$

$$[a_2 h(3) + a_1 h(4)]z^{-5} + [a_2 h(4)]z^{-6}$$

Relacionando os coeficientes de ( $n+1=3$ ) até ( $2n=4$ ), então

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(1) & h(2) \\ h(2) & h(3) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -h(3) \\ -h(4) \end{bmatrix}$$

Os coeficientes do polinômio  $B(z')$  são obtidos por

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix}$$

*Exemplo 4.6* – Identificar uma função de transferência discreta para um processo causal de terceira ordem admitindo que as amostras da seqüência de ponderação são:  $h(0) = 0$ ,  $h(1) = 7.157039$ ,  $h(2) = 9.491077$ ,  $h(3) = 8.563889$ ,  $h(4) = 5.930506$ ,  $h(5) = 2.845972$ ,  $h(6) = 0.144611$ .

A função de transferência a ser estimada tem a forma

$$\hat{G}_p(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

Da equação (4.37), é possível avaliar os valores de  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ , isto é,

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.157039 & 9.491077 & 8.563889 \\ 9.491077 & 8.563889 & 5.930506 \\ 8.563889 & 5.930506 & 2.845972 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -5.930506 \\ -2.845972 \\ -0.144611 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -2.232575 ; a_2 = 1.764088 ; a_3 = -0.496585$$

Substituindo-se estes valores na equação (4.36), obtém-se o seguinte polinômio para  $B(z')$ :

$$B(z^{-1}) = 7.157031z^{-1} - 6.487547z^{-2}$$

Neste caso, a função de transferência discreta estimada é dada por

$$\hat{G}_p(z) = \frac{7.157031z^{-1} - 6.487547z^{-2}}{1 - 2.232575z^{-1} + 1.764088z^{-2} - 0.496585z^{-3}}$$

A tabela (4.3) ilustra a programação em Matlab do algoritmo de estimação da resposta impulsiva para o exemplo (4.6).

Tabela 4.3 – Código em Matlab do exemplo (4.6).

```
% Estimação pelo método da resposta impulsiva
% do exemplo (4.6)
na=3;nb=4;
na=3;nb=4;
h(1)=7.157039;h(2)=9.491077;h(3)=8.563889;
h(4)=5.930506;h(5)=2.845972;h(6)=0.144611;
for i=1:na
    for j=1:na
        ha(i,j)=h(i+j-1);
    end
    haux1(i)=-h(i+3);
end
ha=inv(ha);
a=[ah(3) ah(2) ah(1)]
for j=1:nb
    for i=1:nb
        if j>i
            hb(j,i)=a(j-i);
        elseif j==i
            hb(j,i)=1;
        else
            hb(j,i)=0;
        end
    end
end
a_1 = -2.232575 ; a_2 = 1.764088 ; a_3 = -0.496585
haux2=[0 h(1) h(2) h(3)];
b=(hb*haux2');
```

## 4.6 PROBLEMAS

- 1) Aplicar os diferentes métodos de estimação de modelos paramétricos de primeira ordem na identificação dos seguintes processos:

$$G_p(s) = \frac{e^{-4s}}{(s+1)^3} ; \quad G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^8}$$

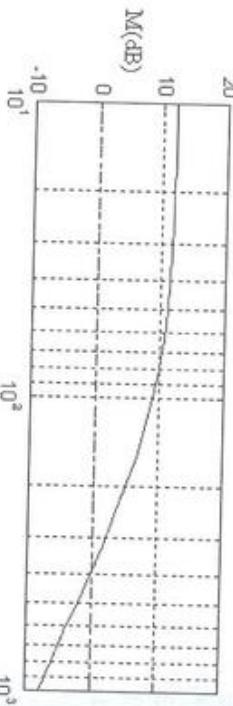
- 2) Considere o sistema de terceira ordem representado por

$$G_p(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

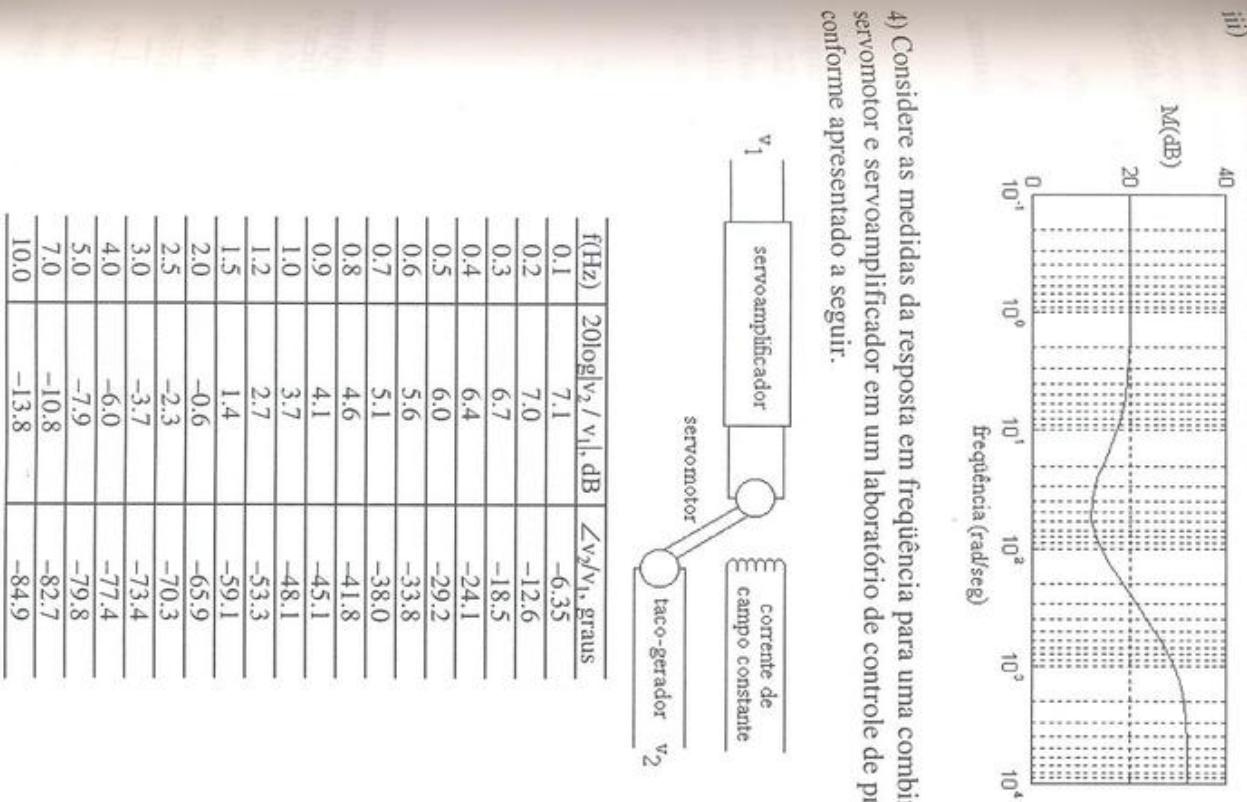
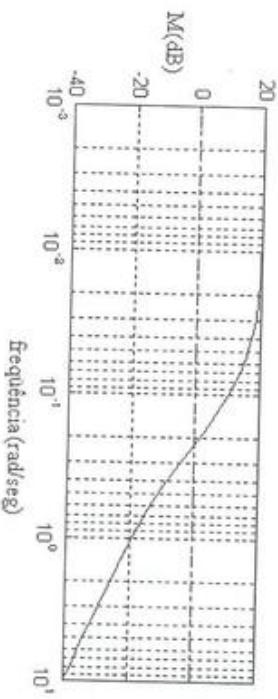
Equacionar em termos de módulo e fase e obter os valores exatos de amplitude e fase para a faixa de frequência de 0,5 a 50 rad/seg. Plotar as curvas de resposta em frequência e comparar os resultados exato e assintótico.

- 3) Obter a função de transferência estimada para as seguintes curvas de magnitude:

i)



ii)



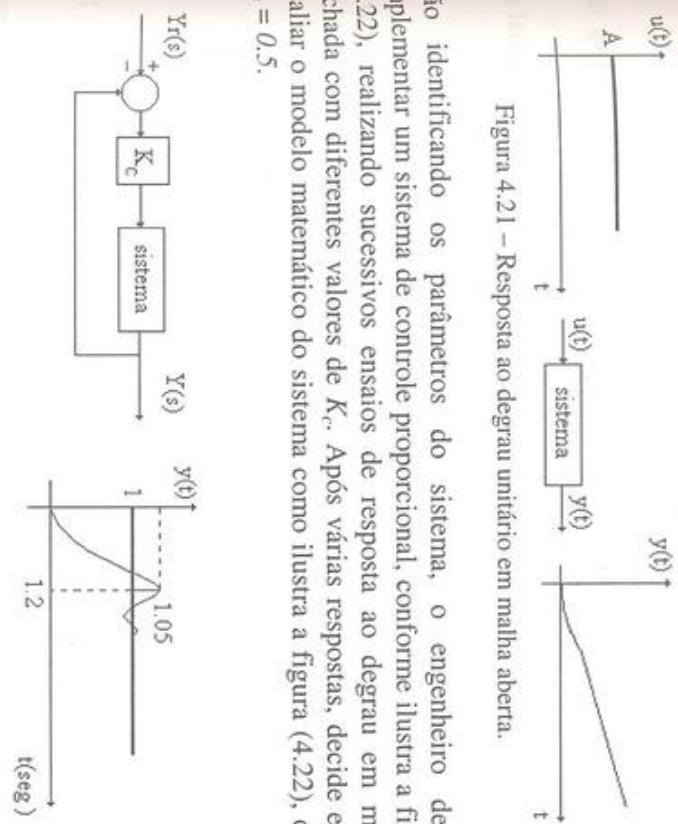
Plotar as curvas da resposta em freqüência a partir dos dados da tabela e estimar uma função de transferência para o processo.

- 5) As amostras da resposta em freqüência são apresentadas na tabela. Considerando a seguinte função de transferência da planta:

$$G_p(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

plotar as curvas de *Bode* e identificar os parâmetros  $K$ ,  $z$ ,  $p$ ,  $\xi$ ,  $\omega_n$  do sistema.

$\omega$ , rad/seg	$20\log G $ , dB	$\angle G$ , graus
0.1	0.32	4.90
0.2	1.10	7.43
0.3	2.04	7.01
0.4	2.93	4.33
0.5	3.72	0.16
0.7	4.96	-10.77
1.0	6.15	-31.25
10	-25.81	-168.51
15	-32.91	-172.66
20	-37.92	-174.51
30	-44.98	-176.35
40	-49.98	-177.26
50	-53.86	-177.81
100	-65.90	-178.90



Não identificando os parâmetros do sistema, o engenheiro decide implementar um sistema de controle proporcional, conforme ilustra a figura (4.22), realizando sucessivos ensaios de resposta ao degrau em malha fechada com diferentes valores de  $K_c$ . Após várias respostas, decide então avaliar o modelo matemático do sistema como ilustra a figura (4.22), onde  $K_c = 0.5$ .

Figura 4.22 – Resposta ao degrau unitário em malha fechada.

- 6) Quando uma entrada degrau foi aplicada em um sistema de segunda ordem, a resposta em regime foi medida em 2.85. A sobre-elevação máxima foi de 20% e ocorreu em 25 mseg após a aplicação do degrau. Identificar o modelo do sistema.

- 7) As amostras da resposta impulsiva de um processo de segunda ordem são

t	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
h(t)	0	0.68	1.07	1.27	1.34	1.33	1.28	1.21	1.11

Determinar as funções de transferências contínua e discreta da planta.

- 8) Um engenheiro de controle de processos de uma fábrica de motores realiza um ensaio de resposta ao degrau em malha aberta em um servomecanismo de posição. Aplicando um degrau na entrada do sistema (tensão de alimentação), observa a resposta conforme a figura (4.21). (tensão de alimentação), observa a resposta conforme a figura (4.21).

- 9) Um engenheiro de controle realiza diferentes ensaios sobre um sistema de controle. Na primeira experimentação, aplica um degrau unitário. Como a resposta é ruidosa, o engenheiro somente consegue determinar o valor final

## Capítulo 5

da resposta. Neste caso  $y(\infty) = 2$  e a derivada na origem de  $y(t)$  é nula. Na segunda e na terceira experimentação, obtém os seguintes valores em regime:

$$u_1(t) = \text{sen}t \rightarrow |y_1(t)| = \frac{2}{\sqrt{2.5}} ; \quad u_2(t) = \text{sen}2t \rightarrow |y_2(t)| = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

- i) Determinar a função de transferência contínua do sistema a partir das informações dos três ensaios;
- ii) Para controlar o sistema, implementa-se uma lei de controle PI digital do tipo

$$u(t) = u(t-1) + q_0[e(t) - 0.905e(t-1)] ; \quad e(t) = y_r(t) - y(t)$$

onde  $T_s = 0.1$  seg e  $y_r(t)$  é a seqüência de referência do sistema. Ajustar o valor de  $q_0$  para que o sistema em malha fechada apresente estabilidade.

*Introdução. Formalismo histórico dos mínimos quadrados. Estimador dos mínimos quadrados não-recursivo. Estimação de processos variantes no tempo. Algoritmo de estimativa da aproximação estocástica. Algoritmo de estimativa da variável instrumental. Algoritmo de estimação da matriz estendida. Problemas.*

## IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS REPRESENTADOS POR EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

### 5.1 INTRODUÇÃO

Diferentes métodos para a estimativa de parâmetros de modelos lineares discretos são apresentados. Ênfase maior é dada ao estimador dos mínimos quadrados, uma vez que é a base para o desenvolvimento de outros métodos de identificação (Ljung, 1999).

A qualidade da estimativa é dependente da natureza do ruído, da estrutura do modelo, do tipo de aplicação e da “riqueza” da informação contida nas medidas. Tanto a implementação *off-line* quanto a *on-line* do estimador são apresentadas e os aspectos computacionais são avaliados (Isermann, 1980; Haber e Unbehauen, 1990).

Algumas características que motivam a utilização do estimador dos mínimos quadrados são as seguintes: i) no teste da resposta ao degrau as medidas do processo são obtidas a partir da mudança de um ponto de operação para um

novo ponto de operação. Como em aplicações práticas tem-se processos não-lineares, o deslocamento do ponto de operação desejado é perigoso do ponto de vista da estabilidade, e também pode proporcionar produtos manufaturados fora das especificações de projeto; ii) o método do teste da resposta ao degrau é adequado se o processo sob avaliação contém um baixo nível de ruído (variância reduzida), o que muitas vezes não acontece em condições práticas industriais; iii) de forma diferente do teste de resposta ao degrau, cuja interpretação gráfica é aplicada no conjunto de amostras coletadas da experimentação (procedimento para inferir sobre os parâmetros do modelo, onde não necessariamente a magnitude da variável do processo medida "domina" o nível de ruído), o estimador dos mínimos quadrados manipula as medidas de entrada e saída nas formas não-iterativa e iterativa através de algoritmos não-recursivo e recursivo.

Considera-se *a priori* que a ordem do modelo é conhecida e que as amostras das medidas de entrada e saída estão disponíveis a cada período de amostragem no universo da experimentação (*equispaced*).

Os principais objetivos deste capítulo são: i) familiarizar o leitor com a derivação, propriedades e utilização do algoritmo dos mínimos quadrados recursivo (*MQR*) quando aplicado na estimativa de sistemas lineares discretos *SISO* (*Single-Input and Single-Output*) com parâmetros desconhecidos *e/ou* variantes no tempo; ii) na inviabilização de aplicação do estimador dos *MQR*, estudar algoritmos alternativos de estimativa paramétricos e iii) viabilizar a utilização do estimador dos *MQR* em aplicações de controle adaptativo, isto é, no contexto de algoritmos de controle auto-ajustável (*self-tuning control*) (Roffel *et al.*, 1989; Åström e Wittenmark, 1995; Coelho *et al.*, 1999).

## 5.2 FORMALISMO HISTÓRICO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Karl Friedrich Gauss formulou o *Princípio dos Mínimos Quadrados* ao final do século 18 para prever a trajetória de planetas e cometas a partir das observações realizadas. K. F. Gauss estabeleceu que os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático deveriam ser selecionados de modo que

"o valor mais provável das grandezas desconhecidas é a que minimiza a soma dos quadrados da diferença entre os valores atualmente observados e os valores calculados multiplicados por números que medem o grau de precisão, onde quanto mais precisa a medida, maior a sua ponderação" (Ljung e Söderström, 1983)

### 5.3 ESTIMADOR DOS MÍNIMOS QUADRADOS NÃO-RECURSIVO

Considere um processo físico caracterizado por uma entrada,  $u(t)$ , uma saída,  $y(t)$ , uma perturbação,  $e(t)$ , e com função de transferência discreta linear da forma

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t) + e(t) \quad (5.1)$$

onde

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{na}z^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{nb}z^{-nb}$$

e cuja representação por uma equação a diferenças é

$$\begin{aligned} y(t) = & -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - \dots - a_{ny}(t-na) + \\ & b_0u(t-d) + b_1u(t-d-1) + \dots + b_{nb}u(t-d-nb) + e(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Observações:

- Para o modelo da equação (5.2), tem-se  $(na + nb + 1)$  parâmetros a estimar;
- Para determinar os  $a_i$  ( $i = 1, \dots, na$ ) e  $b_j$  ( $j = 0, \dots, nb$ ), deve-se utilizar as medidas de entrada e saída do processo;
- O termo  $e(t)$  pode representar o erro de modelagem, o erro de medição ou o ruído na saída do tipo estocástico, determinístico ou *offset*.

Definindo-se o *vecto de medidas*,  $\varphi(t)$ , de dimensão  $(na + nb + 1)xI$

$$\varphi^T(t) = [-y(t-1) - y(t-2) \dots - y(t-na) \ u(t-d) \dots \ u(t-d-nb)] \quad (5.3)$$

e o *vecto de parâmetros*,  $\theta(t)$ , de dimensão  $(na + nb + 1)xI$

$$\theta^T(t) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{na} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{nb}] \quad (5.4)$$

pode-se reescrever a equação (5.2) como

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta(t) + e(t) \quad (5.5)$$

que é denominado *modelo de regressão linear* (Ljung e Söderström, 1983).

Admitindo que são realizadas  $N$  medidas, suficientes para determinar os parâmetros  $a_i$  e  $b_j$ , então tem-se que

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^T(0) \\ \phi^T(1) \\ \vdots \\ \phi^T(N-1) \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \vdots \\ e(N-1) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

A representação matricial da equação (5.6) é

$$Y = \phi\theta + E$$

onde a matriz de observação é

$$\phi = \begin{bmatrix} -y(-1) & -y(-2) & \dots & -y(-na) & u(-d) & u(-d-1) & \dots & u(-d-nb) \\ -y(0) & -y(-1) & \dots & -y(1-na) & u(1-d) & u(-d) & \dots & u(1-d-nb) \\ -y(1) & -y(0) & \dots & -y(2-na) & u(1-d) & u(1-d) & \dots & u(2-d-nb) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y(N-2) & -y(N-3) & \dots & -y(N-na-1) & u(N-d-2) & u(N-d-2) & \dots & u(N-nb-2) \end{bmatrix}$$

onde  $w(i)$  é a ponderação em cada componente do erro e função da precisão da medida (quanto mais precisa a medida, maior é a ponderação).

Derivando a equação (5.11) em relação a  $\hat{\theta}$  e igualando-a a zero, tem-se que

$$Y^T = [y(0) \ y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N-1)]$$

Observação:

- A matriz  $\phi$  não é quadrada, isto é, tem mais linhas do que colunas.

A estimativa do vetor de parâmetros,  $\hat{\theta}$ , pode ser obtida pelo procedimento dos mínimos quadrados (*least squares approach*). Utilizando a estimativa  $\hat{\theta}$ , a melhor previsão da saída do sistema,  $\hat{y}$ , é calculada por

$$\hat{Y} = \phi\hat{\theta} \quad (5.8)$$

e o erro de previsão,  $\varepsilon$ , é avaliado de acordo com

$$\varepsilon = Y - \hat{Y} = Y - \phi\hat{\theta} \quad (5.9)$$

O estimador dos mínimos quadrados ponderado, também denominado *estimador de Markov*, é obtido minimizando o seguinte critério:

$$J = \min_{\hat{\theta}} \left\| Y - \phi\hat{\theta} \right\|_w^2 \quad (5.10)$$

ou

$$J = [Y - \phi\hat{\theta}]^T W [Y - \phi\hat{\theta}] \quad (5.11)$$

sendo a matriz  $W$  simétrica e definida positiva, isto é,

$$W = \begin{bmatrix} w(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(N-1) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Assim, o estimador dos mínimos quadrados ponderado é calculado por

$$\hat{\theta} = [\phi^T W \phi]^{-1} \phi^T W Y \quad (5.12)$$

e isto conduz ao mínimo se

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}^2} = 2\phi^T W \phi > 0$$

e, portanto,  $(\phi^T W \phi)$  deve ser uma matriz não-singular (*full rank*).

Observações:

- $J = (Y - \hat{\phi}\hat{\theta})^T W(Y - \hat{\phi}\hat{\theta}) = Y^T W Y - Y^T W \hat{\phi} \hat{\theta} - \hat{\theta}^T \phi^T W Y + \hat{\theta}^T \phi^T W \hat{\theta}$ ;
- $W = W^T$ ;
- Considere os vetores  $m$  e  $b$  de dimensão  $n \times l$  e uma matriz  $A$  de dimensão  $n \times n$ . Assim, é possível mostrar que (Mendel, 1973)

$$\frac{d}{dm}(m^T A m) = 2 A m$$

$$\frac{d}{dm}(b^T m) = b;$$

```
% Tabela 5.1 – Programação em Matlab do estimador dos mínimos quadrados.
% Estimador dos mínimos quadrados não-recursivo
% Processo de segunda ordem e
% medidas contidas no arquivo medidas.dat
clear all
load medidas.dat
npts=30; u=medidas(1:npts,1); y=medidas(1:npts,2);
y=[ ]; fi=[];
for j=1:npts
    if j<=2
        y1=0; y2=0; u1=0; u2=0;
    else y1=y(j-1); y2=y(j-2); u1=u(j-1); u2=u(j-2);
    end;
    y=[y; y(j)]; fi=[fi; -y1 -y2 u1 u2];
end;
teta=inv(fi'*fi)*fi'*y
for t=1:2,
    yest(t)=0;
end;
a1=teta(1); a2=teta(2); b1=teta(3); b2=teta(4);
for t=3:npts,
    yest(t)=-a1*yest(t-1)-a2*yest(t-2)+b1*u(t-1)+b2*u(t-2);
    plot(y, 'g');
    hold on;
    plot(yest, 'r');
end;
```

Isto é, a mesma ponderação em todos os erros de medida. Logo, a equação (5.12) torna-se

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \left[ \frac{1}{\sigma^2} [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T [\sigma^2] Y \right. \\ \hat{\theta} &= [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T Y \end{aligned} \quad (5.13)$$

O estimador dos mínimos quadrados, equação (5.13), é uma transformação linear sobre  $Y$  (função linear das medidas) e, assim, é denominado *estimador linear* (Goodwin e Payne, 1977; Ljung, 1999). A tabela (5.1) ilustra um código, em *Matlab*, da implementação do estimador dos mínimos quadrados não-recursivo aplicado na modelagem de uma planta discreta de segunda ordem.

Observações:

- A condição de que a matriz  $(\phi^T \phi)$  é inversível é denominada *condição de excitação*;
- O critério dos mínimos quadrados pondera todos os erros,  $\epsilon(i)$ , igualmente, e isto corresponde à suposição de que todas as medidas têm a mesma precisão;
- A dimensão de  $(\phi^T \phi)$  é  $(na + nb + 1) \times (na + nb + 1)$ ;
- Uma vez calculada (estimada) a função de transferência discreta, a determinação da correspondente função de transferência contínua pode ser obtida por uma das seguintes relações:

- $z = 1 + T_s S \rightarrow$  aproximação *backward*
- $z = 1/(1 - T_s S) \rightarrow$  aproximação *forward*
- $z = (1 + T_s S/2)/(1 - T_s S/2) \rightarrow$  aproximação *trapezoidal*

- As principais etapas envolvidas na identificação de sistemas dinâmicos estão ilustradas na figura (5.1). Os passos relacionados no diagrama de identificação são abordados neste capítulo, juntamente com outras técnicas aplicadas na estimação de parâmetros (Ljung e Glad, 1994; Brodilow e Joseph, 2002; Moraes, 2004);

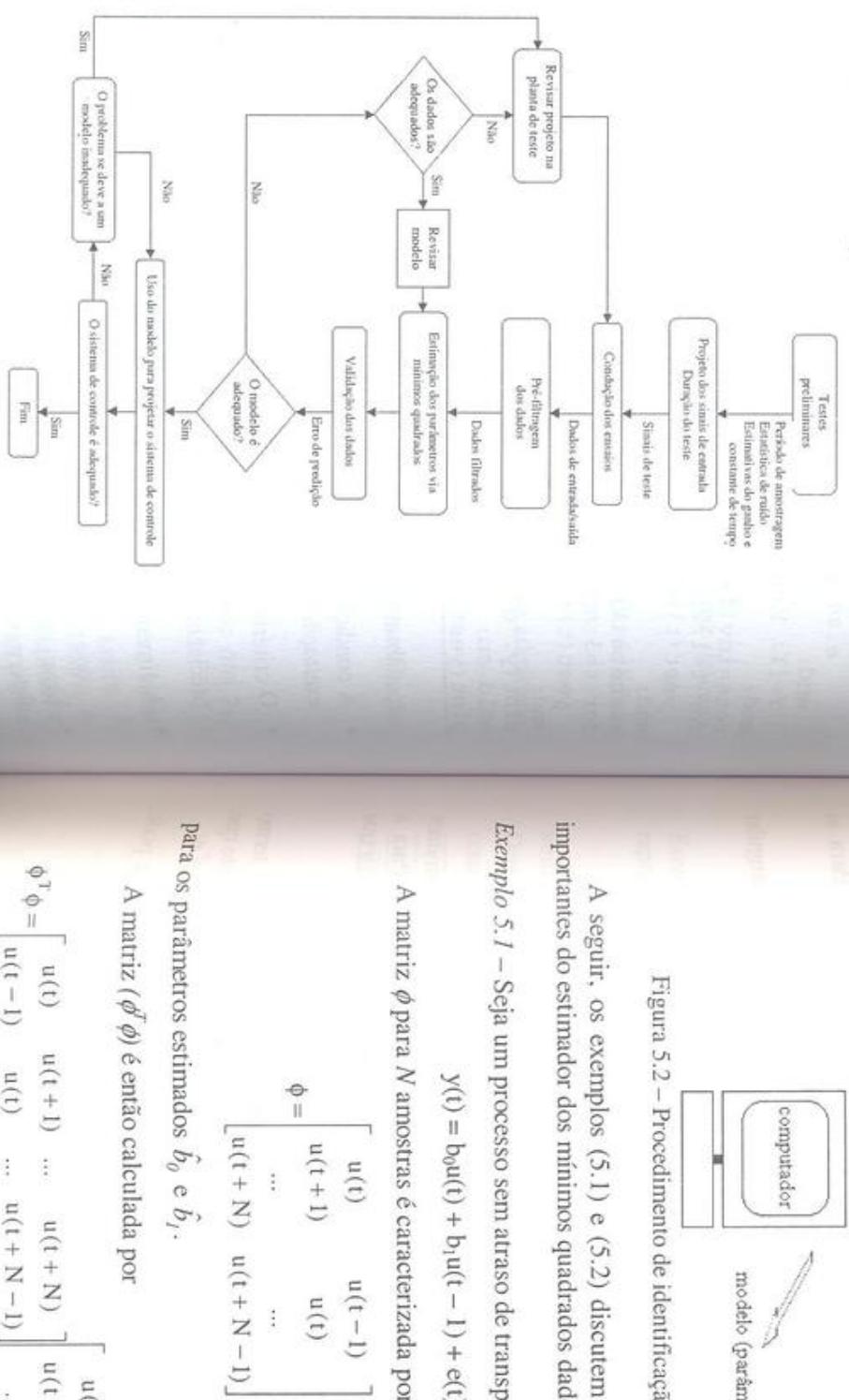


Figura 5.2 – Procedimento de identificação *off-line*.

A seguir, os exemplos (5.1) e (5.2) discutem algumas características importantes do estimador dos mínimos quadrados dado pela equação (5.13).

*Exemplo 5.1* – Seja um processo sem atraso de transporte representado por

$$y(t) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + e(t)$$

A matriz  $\phi$  para  $N$  amostras é caracterizada por

$$\phi = \begin{bmatrix} u(t) & u(t-1) \\ u(t+1) & u(t) \\ \vdots & \vdots \\ u(t+N) & u(t+N-1) \end{bmatrix}$$

Para os parâmetros estimados  $\hat{b}_0$  e  $\hat{b}_1$ ,

A matriz  $(\phi^T \phi)$  é então calculada por

$$\phi^T \phi = \begin{bmatrix} u(t) & u(t+1) & \dots & u(t+N) \\ u(t-1) & u(t) & \dots & u(t+N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(t+N) & u(t+N-1) & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) & u(t-1) \\ u(t+1) & u(t) \\ \vdots & \vdots \\ u(t+N) & u(t+N-1) \end{bmatrix}$$

Figura 5.1 – Procedimento geral para a identificação de processos.

$$\phi^T \phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=t}^{t+N} u^2(i) & \sum_{i=t}^{t+N} u(i)u(i-1) \\ \sum_{i=t}^{t+N} u(i-1)u(i) & \sum_{i=t}^{t+N} u^2(i-1) \end{bmatrix}$$

Considerações:

- A dimensão de  $(\phi^T \phi)$  depende do número de parâmetros desconhecidos (não do número de amostras). Neste caso, a matriz é  $(2 \times 2)$ . Para  $m$  parâmetros desconhecidos, a matriz tem dimensão  $(mxm)$ ;

- A matriz  $(\phi^T \phi)$  é simétrica, de modo que somente a parte triangular superior (ou inferior) precisa ser calculada;

- Se  $u(t)$  é uma constante,  $u(t) = u_0$ , então

$$y(t) = (b_0 + b_1)u_0 + e(t)$$

a matriz  $(\phi^T \phi)$  é dada por

$$\phi^T \phi = Nu_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, assim, a matriz  $(\phi^T \phi)$  é singular e uma solução única (mínimos quadrados) não pode ser obtida porque  $(\phi^T \phi)$  não é inversível. Para a solução ser obtida, então  $u(t)$  deve variar suficientemente para garantir que

$$\det \{\phi^T \phi\} \neq 0$$

- quando  $N$  cresce. Esta condição está usualmente associada com o termo suficientemente excitado. No contexto de controle adaptativo, é importante que  $u(t)$  mude suficientemente para evitar um *rank* deficiente para a matriz  $(\phi^T \phi)$ :
- A seleção de um sinal de entrada particular a ser aplicado na planta pode ser justificada com base na equação da variância assintótica, isto é,

$$VPM = \frac{n}{N} \frac{R}{S}$$

onde  $VPM$  significa a variância nos parâmetros do modelo estimado,  $n$  é o número de parâmetros do modelo matemático ( $na$ ,  $nb$ ,  $d$  relativo à equação (5.2)),  $N$  é o número de elementos do conjunto de dados da experimentação.  $R$  é a variância do ruído e  $S$  é a variância da entrada. A parcela  $S/R$  (razão sinal-ruído) influencia a variabilidade no modelo estimado. Condições operacionais altamente ruidosas requerem um grande conjunto de dados e/ou uma amplitude do sinal de entrada elevada (Rivera e Flores, 2000);

- A precisão das estimativas está associada com o tamanho dos elementos da matriz de covariância, que por definição é

$$P(t) = [\phi^T(t)\phi(t)]^{-1}$$

$\Rightarrow$  Variabilidade dos parâmetros estimados.

*Exemplo 5.2* – Obter a função de transferência estimada para um processo representado pelo seguinte modelo matemático:

$$y(t) = b_0u(t) + b_1u(t-1)$$

utilizando o estimador dos mínimos quadrados (procedimento *off-line*). Determinar as estimativas para  $\hat{\theta}$  dos parâmetros  $\hat{b}_0$  e  $\hat{b}_1$ , para  $N = 7, 8, \dots, 14$  considerando as medidas de entrada e saída de acordo com a tabela, ou seja,

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
u(t)	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2
y(t)	0.9	2.5	2.4	1.3	1.2	0.8	0	0.9	1.4	1.9	2.3	2.4	2.3	1.3	1.2

Para  $N = 7$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \\ y(6) \\ y(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(1) & u(0) \\ u(2) & u(1) \\ u(3) & u(2) \\ u(4) & u(3) \\ u(5) & u(4) \\ u(6) & u(5) \\ u(7) & u(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$$

Substituindo-se os valores numéricos da tabela, obtém-se

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0.322 \\ 2.446 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.4 \\ 1.3 \\ 1.2 \\ 0.8 \\ 0 \\ 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$$

A estimativa ótima para  $\hat{b}_0$  e  $\hat{b}_1$  é avaliada por

$$\hat{\theta} = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T Y$$

e calculada de acordo com

$$(\phi^T \phi) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\phi^T \phi)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

### 5.3.1 PROPRIEDADES DO ESTIMADOR DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O estimador dos mínimos quadrados  $\hat{\theta}$  é uma variável aleatória, onde as propriedades podem ser analisadas utilizando-se a equação a diferenças do processo, ou seja,

$$y(t) = \phi^T(t)\theta(t) + e(t)$$

a qual define a saída real e a perturbação (Åström, 1970; Ljung e Söderström, 1983). As propriedades mais importantes são polarização (*bias*) e covariância (*covariance*), isto é,

- O estimador é não-polarizado (os parâmetros estimados convergem para os parâmetros verdadeiros quando o número de iterações aumenta) se a

$$(\phi^T \phi) = \begin{bmatrix} 1.4 & 1.68 \\ 1.68 & 2.24 \end{bmatrix}, \quad (\phi^T \phi)^{-1} = \begin{bmatrix} 7.143 & -5.357 \\ -5.357 & 4.464 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 7.143 & -5.357 \\ -5.357 & 4.464 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$$

perturbação é um ruído branco (média nula e variância  $\sigma_e^2$ ) e  $y(t), u(t)$  são estatisticamente independentes de  $e(t)$ ;

$$\bullet \text{Cov}(\hat{\theta}) = \sigma_e^2 [\Phi^T \Phi]^{-1}$$

fornecendo a medida direta da variabilidade e covariabilidade dos parâmetros estimados (a precisão das estimativas é estabelecida pelo tamanho dos elementos da matriz de covariância);

- Se o estimador dos mínimos quadrados é não-polarizado e consistente (*BLUE – Best Linear Unbiased Estimate*), então

$$\begin{aligned} \Xi[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] &\leq \Xi[(\theta^* - \theta)(\theta^* - \theta)^T] \\ (\text{melhor estimativa}) &(\text{qualquer estimativa}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\hat{\theta}(t) - \theta\| \leq \|\hat{\theta}(t-1) - \theta\| \leq \dots \leq \|\hat{\theta}(1) - \theta\|, t \geq 1$$

onde  $\Xi(\cdot)$  denota o operador esperança matemática (Åström, 1970).

## 5.4 ESTIMADOR DOS MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO

A aplicação de algoritmos de identificação é interessante para vários propósitos, tais como supervisão, rastreamento de parâmetros variantes para controle adaptativo, filtragem, previsão, processamento de sinais, detecção e diagnóstico. Entretanto, diversos métodos de identificação baseados em um conjunto de medidas são inadequados para a aplicação em tempo real. Portanto, é desejável fazer uma formulação adequada dos algoritmos para proporcionar procedimentos eficientes (Wellstead e Zarrop, 1991).

Na implementação de um controle adaptativo em tempo real, o algoritmo do estimador de parâmetros deve ser iterativo, com o modelo do sistema sendo atualizado a cada período de amostragem, quando novas medidas estão disponíveis (adequar-se às características do processo controlado ou resintonizar-se caso existam variações na dinâmica do processo).

Em particular, é importante visualizar o procedimento de estimação em termos de um modelo paralelo conforme mostra a figura (5.3).

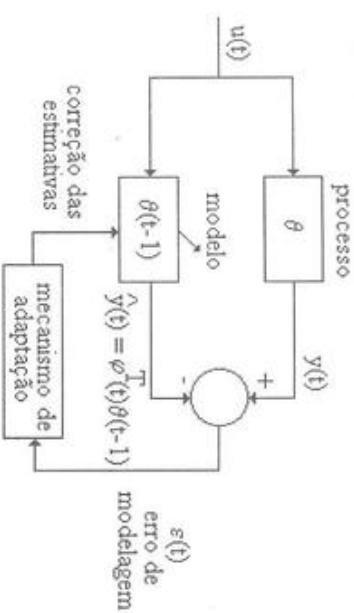


Figura 5.3 – Procedimento iterativo na estimação de parâmetros.

Em cada período de amostragem, novas medidas tornam-se disponíveis e são utilizadas com o modelo atual para gerar um novo erro de modelagem (*new fitting error*),  $e(t)$  (mede a qualidade do modelo estimado). Por exemplo, no instante de tempo  $(t+1)$ , novas medidas  $u(t+1), y(t+1)$  ocorrem. Em vez de recalcular o estimador dos mínimos quadrados, é interessante atualizar as estimativas anteriormente calculadas no instante  $t$ ,  $\hat{\theta}(t)$ , para obter as novas estimativas  $\hat{\theta}(t+1)$ .

Observações:

- A quantidade de dados armazenada no estimador recursivo é pequena se comparada com o estimador não-recursivo;
- Outros nomes atribuídos na literatura ao estimador recursivo são: estimação sequencial, identificação em tempo real, identificação *on-line*.

O exemplo (5.3) mostra a estimativa recursiva de uma constante. Exemplo 5.3 – Considere a seguinte observação ruidosa de um parâmetro constante:

$$y(t) = \theta + e(t)$$

onde  $e(t)$  é um ruído branco com média nula e variância  $\sigma_e^2$ . A equação de regressão linear é

$$y(t) = \varphi(t)\theta + e(t)$$

sendo  $\phi(t) = I$  ( $\forall t \geq 1$ ). A partir da equação (5.13) do estimador dos  $MQR$ , obtém-se  $\hat{\theta}(t)$  como a média das amostras

$$\hat{\theta}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y(i) \quad (5.14)$$

Para evitar o somatório da saída no cálculo de  $\hat{\theta}$  a cada instante de tempo, quando novos dados estão disponíveis, é possível reescrever a equação (5.14) como

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{1}{t} [y(t) - \hat{\theta}(t-1)]$$

onde agora  $\hat{\theta}(t)$  é atualizado em cada período de amostragem a partir das observações da saída,  $y(t)$  (estimação recursiva).

### 5.4.1 DERIVAÇÃO DO ESTIMADOR $MQR$

Para o desenvolvimento das equações do estimador dos  $MQR$ , deve-se comparar a estimativa baseada nas medidas em instantes que variam de  $I$  ( $um$ ) até  $t = N$  com a estimativa baseada nas medidas nos instantes de  $I$  ( $um$ ) até  $(t+I)$ .

Conforme mostrado na seção (5.3), o estimador dos mínimos quadrados para amostras variando de  $N = II \rightarrow II$  é calculado por

$$\hat{\theta}(t) = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T Y$$

onde

$$\phi^T(t+1)\phi(t+1) = \begin{bmatrix} \phi^T(t) & \phi(t+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \phi^T(t+1) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(t+1) = [\phi^T(t+1)\phi(t+1)]^{-1} \phi^T(t+1)Y(t+1) \quad (5.15)$$

onde

Uma vez conhecido  $\phi(t+I)$ , pode-se atualizar a matriz anterior das correlações  $\phi^T(t)\phi(t)$  para obter a matriz atual  $\phi^T(t+I)\phi(t+I)$ . Entretanto, é necessário encontrar uma maneira de atualizar a inversa de  $\phi^T(t)\phi(t)$  sem calcular a matriz inversa em cada instante de tempo.

Adicionalmente, necessita-se atualizar o termo  $\phi^T(t+I)Y(t+I)$ , isto é,

$$\phi^T(t+1)Y(t+1) = [\phi^T(t) \quad \phi(t+1)] \begin{bmatrix} Y(t) \\ y(t+1) \end{bmatrix}$$

Supor que no instante  $(t+I)$  obtém-se nova medida do sistema, então os vetores de medida e saída são reescritos como

$$\phi^T(t+1)Y(t+1) = \phi^T(t)Y(t) + \phi(t+1)y(t+1) \quad (5.17)$$

$$\phi(t+1) = \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \phi^T(2) \\ \dots \\ \phi^T(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \phi^T(t+1) \end{bmatrix}$$

Sejam as seguintes definições:

$$P(t) = [\phi^T(t)\phi(t)]^{-1} \quad (5.18)$$

$$R(t) = \phi^T(t)Y(t) \quad (5.19)$$

Substituindo as equações (5.18) e (5.19) na equação (5.15), obtém-se

$$\hat{\theta}(t+1) = P(t+1)R(t+1)$$

ou então

$$\hat{\theta}(t) = P(t)R(t) \quad (5.20)$$

enquanto que, das equações (5.16) e (5.17), encontram-se

$$P^T(t+1) = P^T(t) + \phi(t+1)\phi^T(t+1) \quad (5.21)$$

$$R(t+1) = R(t) + \phi(t+1)y(t+1) \quad (5.22)$$

A equação (5.22) fornece uma atualização direta de  $R(t)$  para  $R(t+1)$ . A atualização de  $P(t)$  para  $P(t+1)$  pode ser obtida pela equação (5.21) aplicando-se a seguinte identidade:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

Considerando o termo do lado direito da equação (5.21), isto é,

$$[P^T(t) + \phi(t+1)\phi^T(t+1)]^{-1}$$

onde  $A = P^T(t)$ ,  $C = I$ ,  $B = \phi(t+1)$  e  $D = \phi^T(t+1)$ , obtém-se

$$P(t+1) = P(t)[I - \phi(t+1)\{1 + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)\}^{-1}\phi^T(t+1)P(t)]$$

ou então

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t)\phi(t+1)\phi^T(t+1)P(t)}{1 + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)} \quad (5.23)$$

onde  $\{I + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)\}$  é um escalar.

De acordo com a equação do erro de previsão

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \phi^T(t+1)\hat{\theta}(t)$$

a equação (5.22) tornase

$$R(t+1) = R(t) + \phi(t+1)\{\varepsilon(t+1) + \phi^T(t+1)\hat{\theta}(t)\}$$

$$R(t+1) = R(t) + \phi(t+1)\varepsilon(t+1) + \phi(t+1)\phi^T(t+1)\hat{\theta}(t) \quad (5.24)$$

Substituindo as equações (5.16) e (5.20) na equação (5.24), resulta

$$P^T(t+1)\hat{\theta}(t+1) = P^T(t)\hat{\theta}(t) + \phi(t+1)\varepsilon(t+1) + \{P^T(t+1) - P^T(t)\}\hat{\theta}(t)$$

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + P(t+1)\phi(t+1)\varepsilon(t+1)$$

O termo  $P(t+1)\phi(t+1)$  é um vetor coluna e é denominado *ganho do estimador*, ou seja,

$$K(t+1) = P(t+1)\phi(t+1) = \frac{P(t)\phi(t+1)}{1 + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)}$$

O vetor de parâmetros estimados é calculado por

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1)\varepsilon(t+1)$$

A equação que calcula  $P(t+1)$  fornece a atualização de  $P(t)$  para  $P(t+1)$  sem inversão de matriz. A única inversão está associada ao escalar

$$\{1 + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)\}$$

A equação recursiva para  $P(t+1)$  pode ser combinada com a equação para  $R(t+1)$  de diferentes maneiras para estabelecer uma forma direta para  $\hat{\theta}(t)$ .

Conventionalmente, utiliza-se a definição da variável erro  $\delta(t+1)$  como

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \phi^T(t+1)\hat{\theta}(t)$$

Combinando as equações  $P(t+1)$ ,  $R(t+1)$  e  $\varepsilon(t+1)$ , obtém-se a forma recursiva de  $\hat{\theta}(t+1)$  dada por

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1) \left\{ y(t+1) - \phi^T(t+1)\hat{\theta}(t) \right\}$$

$$K(t+1) = \frac{P(t)\phi(t+1)}{1 + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)} \quad (5.25)$$

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t)\phi(t+1)\phi^T(t+1)P(t)}{1 + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)}$$

A seguir, descreve-se o algoritmo básico do estimador dos *MQR*:

- Medir a saída e entrada do sistema;
  - Atualizar o vetor de medidas
- $$\varphi^T(t+1) = [-y(t) - y(t-1) \dots u(t-d) u(t-d-1) \dots];$$
- Calcular o erro de previsão
- $$\epsilon(t+1) = y(t+1) - \varphi^T(t+1) \hat{\theta}(t);$$
- Calcular o ganho do estimador
- $$K(t+1) = \frac{P(t)\varphi(t+1)}{1 + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)};$$

- Calcular o vetor de parâmetros estimados

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1)\epsilon(t+1);$$

- Calcular a matriz de covariância

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t)\varphi(t+1)\varphi^T(t+1)P(t)}{1 + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)};$$

ou então utilizar a equação

$$P(t+1) = P(t) - K(t+1)[P(t)\varphi(t+1)]^T.$$

A tabela (5.3) ilustra a programação em *Matlab* do estimador dos mínimos quadrados recursivo.

Tabela 5.3 – Código em *Matlab* do estimador *MQR*.

```
% Estimador dos mínimos quadrados recursivo
% aplicado a uma planta de segunda ordem
clear all
nit=input(' Quantas iterações ? ');
for i=1:nit
    if rand>0.5
        u(i)=1;
    else
        u(i)=-1;
    end
    e=u*0.01;
    p=1000*eye(4,4); teta=[0,0,0,0];
    for t=1:4
        % Iteração da simulação
        y(t)=1.5144*y(t-1)-0.5506*u(t-2)+0.599*u(t-1)+...
        0.163*u(t-2)+e(t);
        fi=[-Y(t-1); -Y(t-2); u(t-1); u(t-2)];
        erro(t)=y(t)-teta'*fi;
        k=p*fi/(1+fi*p*fi);
        % Vetor de parâmetros
        teta=teta+k*erro(t);
        p=(P-k*fi.*p);
        a1(t)=teta(1); a2(t)=teta(2); b0(t)=teta(3); b1(t)=teta(4);
    end
    subplot(221),plot(t,a1(t)),title('a1'), xlabel('amostragem');
    subplot(222),plot(t,a2(t)),title('a2'), xlabel('amostragem');
    subplot(223),plot(t,b0(t)),title('b0'), xlabel('amostragem');
    subplot(224),plot(t,b1(t)),title('b1'), xlabel('amostragem');
```

#### Exemplo 5.4 – Demonstrar o MATRIX INVERSION LEMMA

Considere  $A, C, I$ ,  $C^T + DA^{-1}B$  matrizes quadradas não-singulares (de dimensões compatíveis), então a seguinte relação é válida:

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1}$$

*Prova:* Pela substituição direta, tem-se

$$\begin{aligned} & [A + BCD][A^{-1} - A^{-1}B\{C^{-1} + DA^{-1}B\}^{-1}DA^{-1}] = \\ & I + BCDA^{-1} - BCC^{-1}\{C^{-1} + DA^{-1}B\}^{-1}DA^{-1} - BCDA^{-1}B\{C^{-1} + DA^{-1}B\}^{-1}DA^{-1} = \\ & I + BCDA^{-1} - BC\{C^{-1} + DA^{-1}B\}\{C^{-1} + DA^{-1}B\}^{-1}DA^{-1} = \\ & I + BCDA^{-1} - BCDA^{-1} = I \end{aligned}$$

*Exemplo 5.5 – Demonstrar a correlação entre o ganho do estimador e a matriz de covariância.*

$$\begin{aligned} K(t+1) &= P(t+1)\varphi(t+1) \\ K(t+1) &= \left\{ P(t) - \frac{P(t)\varphi(t+1)\varphi^T(t+1)P(t)}{1 + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)} \right\} \varphi(t+1) \\ K(t+1) &= P(t)\varphi(t+1) - \frac{P(t)\varphi(t+1)\varphi^T(t+1)P(t)}{1 + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)} \varphi(t+1) \\ K(t+1) &= \frac{P(t)\varphi(t+1)\{I + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)\} - P(t)\varphi(t+1)\varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)}{1 + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)} \end{aligned}$$

$$K(t+1) = \frac{P(t)\varphi(t+1)\{I + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1) - \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)\}}{1 + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)}$$

$$K(t+1) = \frac{P(t)\varphi(t+1)}{1 + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)}$$

*Exemplo 5.6* – Considere o processo

$$y(t) + a_1y(t-1) = b_0u(t-1) + e(t)$$

onde  $a_1 = -0.8$  e  $b_0 = 1$ . A variância do ruído  $e(t)$  é 0.01. Admite-se que o sinal de entrada é um sinal do tipo *PRBS* (*Pseudo Random Binary Sequence*). As equações do estimador dos mínimos quadrados recursivo, equação (5.25), são utilizadas para estimar  $a_1$  e  $b_0$ . As estimativas são mostradas na figura (5.4) quando  $\hat{\theta}(0)=0$  e  $P(0)=10I_{2x2}$ . As estimativas, após algumas observações, convergem para os valores verdadeiros (Seborg *et al.*, 1989).

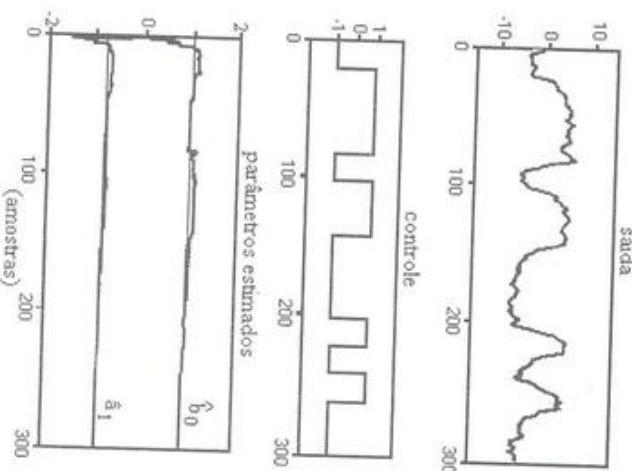


Figura 5.4 – Medidas e estimativas através do estimador *MQR*.

Observações:

- A variável  $\varepsilon(t+1)$  no algoritmo dos *MQR*

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \varphi^T(t+1)\hat{\theta}(t)$$

é o erro entre a saída do processo e a saída prevista utilizando as estimativas do vetor de parâmetros  $\hat{\theta}(t)$  a partir dos instantes anteriores ao instante de tempo  $t$ . Por esta razão, é usualmente denominado *erro de previsão da saída ou série de inovações*,

- O erro de previsão torna-se zero quando  $\hat{\theta}(t) \rightarrow \theta$ . Assim, a medida da qualidade do estimador reflete-se na matriz definida positiva,  $P(t)$ , denominada *matriz de covariância do estimador*  $\hat{\theta}$ . O tamanho (magnitude) dos elementos da diagonal de  $P(t)$  está relacionado com a variabilidade dos correspondentes elementos em  $\hat{\theta}$ . Por exemplo, se o elemento  $(I, I)$  é pequeno, significa que a estimativa de  $\hat{a}_i$  é adequada (variância baixa). Por outro lado, se o elemento  $(na+I, na+I)$  é grande, significa que a estimativa é inadequada (variância alta);
- Para a inicialização do algoritmo dos *MQR*, deve-se atribuir os valores de  $\hat{\theta}(0)$  e  $P(0)$ . Se uma condição inicial para os valores dos parâmetros está disponível a partir do conhecimento *a priori* do processo, então estes valores devem ser utilizados para  $\hat{\theta}(0) = ml_{(na+nb+1)(na+nb+1)}$ , onde  $m$  é uma constante de valor pequeno ( $\approx 10$ ). Se nenhum conhecimento sobre o sistema está disponível,  $\hat{\theta}(0)$  pode ser inicializado com valores pequenos e  $m$  assumindo um valor grande ( $\approx 10^3$  ou maior);
- Em termos da identificação *on-line*, tem-se que o computador processa as informações em tempo real do processo no estimador *MQR* de modo a obter um modelo estimado adequado (figura 5.5).



Figura 5.5 – Computador em uma tarefa de estimação recursiva.

⇒ A cada período de amostragem, utilizam-se as medidas de entrada e saída do processo e existe limitação no tempo de processamento;

- No contexto de controle adaptativo durante a fase inicial de processamento, quando os parâmetros do processo estão sendo sintonizados, o sinal de controle é inadequado e uma mudança é produzida na variável do processo, comprometendo o comportamento dinâmico do sistema em malha fechada;
- Se as estimativas iniciais são pobres, então  $P(t)$  é construída como uma matriz diagonal com elementos positivos e de magnitude elevada. Quando as estimativas melhoram, os elementos de  $P(t)$  decrescem em magnitude, de modo que o ganho,  $K(t)$ , torna-se aproximadamente nulo, resultando  $\hat{\theta}(t+T) \approx \hat{\theta}(t)$ ;
- Uma vez parametrizado o processo, deve-se qualificar o modelo estimado utilizando técnicas de *validação de modelos*. Entre as diversas técnicas de validação, pode-se investigar a magnitude de certos índices de desempenho (Brosilow e Joseph, 2002). Os *índices de desempenho* para a avaliação da qualidade dos modelos matemáticos podem ser calculados pelas seguintes equações:

$$S/R = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_r^2}$$

onde  $\sigma_y^2$  é a variância da saída durante o teste de identificação e  $\sigma_r^2$  representa a variância da saída para uma entrada constante, sendo calculados por

$$\sigma_y^2 = \sigma_r^2 = \frac{\sum_{t=1}^N [y(t) - \bar{y}]^2}{N};$$

- A qualidade do modelo estimado de um sistema depende em parte da natureza do sinal de entrada aplicado durante a fase de coleta das amostras. Isto acontece porque o sinal de entrada excita, em variados graus de intensidade que dependem de suas características, as denominadas *frequências naturais ou modos do sistema*, ou seja, o sinal de entrada força o sistema a revelar, na saída, as suas características dinâmicas. Assim, o sinal *PRBS*, ao ser aplicado como entrada no processo real, tem dupla finalidade: i) excitar os modos do

sistema que correspondem ao conteúdo espectral; ii) prevenir a ocorrência de um mau condicionamento numérico e/ou colunas iguais na matriz de covariância. O sinal *PRBS* só pode assumir dois valores (ou níveis),  $\pm\delta$ . A comutação de um nível para outro ocorre de forma aleatória, cuja estatística pode ser controlada (seleção do conteúdo espectral do sinal *PRBS*) e baseia-se em determinadas regras de implementação (Ljung, 1999). Por exemplo, um sinal *PRBS* pode ser gerado a partir de um registrador de deslocamento, portas lógicas digitais do tipo *E* e *OU*, cujo comprimento máximo da sequência é  $N_s = 2^{n_r} - 1$ , onde  $n_r$  é o número de bits do registrador de deslocamento (Barreiros, 1989). Um procedimento possível de implementação de uma sequência *PRBS* é aplicar a seguinte lógica: utilizar a função *RAND* do *Matlab* para gerar uma sequência de números aleatórios uniformemente distribuída no intervalo  $[0, 1]$ , armazenando-a no vetor *sna*. Definir uma variável *alfa* com um valor qualquer entre zero e um. Para cada elemento do vetor *sna* maior ou igual a *alfa*, associa-se o valor  $+\delta$  ao elemento correspondente de um outro vetor denominado *PRBS*; para cada elemento do vetor *sna* menor que *alfa*, associa-se o valor  $-\delta$  ao elemento correspondente do vetor *PRBS*. Como os elementos do vetor *sna* são uniformemente distribuídos no intervalo  $[0, 1]$ , o valor médio dos elementos é 0,5. Portanto, uma seleção de *alfa* maior que 0,5 proporciona um nível tendencioso para  $-\delta$ , enquanto que a seleção de *alfa* menor que 0,5 proporciona um nível tendencioso para  $+\delta$ . Mediante a seleção de *alfa*, pode-se induzir uma maior ou menor taxa de comutação entre  $+\delta$  e  $-\delta$ , controlando assim o conteúdo espectral do sinal *PRBS*. Aumenta-se a frequência da sequência *PRBS* (taxa de comutação entre  $+\delta$  e  $-\delta$ ) se o valor de *alfa* está próximo de 0,5. A amplitude do sinal *PRBS* é alterada através de um fator multiplicativo *beta* (Sakai, 1999). A tabela (5.4) implementa em *Matlab* a sequência *PRBS* para *alfa* = 0,5, *beta* = 1 e *tf* = 5.

Tabela 5.4 – Programação em *Matlab* de uma *PRBS*.

```
% Sequência binária pseudo-aleatória
clear all
delta=input('Intervalo de integração DELTA t = ');
t=input('Tempo final tf = ');
t=[0:delta:tf];sn=rand(size(t));l=0;
while l==0
    alfa=input('Valor de alfa = ');
    if alfa<=1
        if alfa>=0
```

```
    l=1;
end
end
if l==0
    disp('Alfa deve estar entre 0 e 1');
end
for i=1:length(t)
    if sn(i)<=alfa, sbpa(i)=-1;
    else sbpa(i)=1;
end
plot(t,sbpa);
```

- Outra sugestão de projeto do sinal de entrada do tipo *PRBS*, conforme discutido em Rivera e Flores (2000) e Broossilow e Joseph (2002) para sistemas monovariáveis, é apresentada. Inicialmente o usuário deve ter uma estimativa das constantes de tempo rápida (menor),  $\tau_L$ , e lenta (maior),  $\tau_H$ , que caracterizam o sistema sob análise. Assim, define-se a largura de banda de freqüências para excitação do sinal de entrada (que também está associada à parte plana do espectro sobre o qual o sinal de entrada tem potência suficiente), isto é,

$$\frac{\omega}{\beta_s \tau_R} \leq \omega \leq \frac{\alpha_s}{\tau_L}$$

onde  $\beta_s$  é o fator representando o tempo de estabilização do processo (para  $T_{95\%}$ ,  $\beta_s = 3$ ; para  $T_{99\%}$ ,  $\beta_s = 5$ ) e  $\alpha_s$  é o fator representando a velocidade da resposta em malha fechada como um múltiplo do tempo de resposta em malha aberta. A geração do sinal *PRBS* é caracterizada por dois parâmetros: o número de bits do registrador,  $n_r$ , e o tempo de chaveamento,  $T_{sw}$ . A sequência repete-se após  $N_s T_{sw}$  unidades de tempo, onde  $N_s = 2^{n_r} - 1$ . A caracterização do tempo de chaveamento e o comprimento da sequência obedecem às seguintes relações:

$$T_{sw} \leq \frac{2.8\tau_L}{\alpha_s} ; N_s = 2^{n_r} - 1 \geq \frac{2\pi\beta_s \tau_R}{T_{sw}}$$

onde  $n_r$  e  $N_s$  são valores inteiros e  $T_{sw}$  deve ser um múltiplo inteiro do período de amostragem  $T_s$ . Admitindo que  $\tau_H = \tau_L = 10 \text{ min}$ ,  $\beta_s = 5$ ,  $\alpha_s = 2$ ,

- obtém-se  $T_{sw} = 14$ ,  $n_r = 4$ ,  $N_s T_{sw} = 210 \text{ min}$ . Para uma amplitude de  $\pm 2,5$ , o seguinte comando do *Matlab* pode ser executado (Brosilow e Joseph (2002)):  $u = prbs(\underline{\omega}, \bar{\omega}, T, \text{amplitude}) = prbs(0.02, 0.2, 1.4, 2.5)$ :
- Uma excitação consistente em identificação de sistemas requer que o sinal de entrada satisfaça o requerimento de excitação persistente. Adicionalmente, a análise da correlação estatística entre os sinais de entrada, saída e erro de previsão oferece algumas vantagens práticas (Ljung, 1999). Isto significa procurar o melhor intervalo de medidas para identificação da planta, observando se uma das seguintes análises residuais é satisfeita: i) calcular a função correlação cruzada entre os sinais de entrada e erro de previsão pela seguinte equação:

$$\Gamma_{eu}(k) = \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)u(t-k)$$

O modelo estimado é adequado (os sinais de entrada e erro de previsão não são correlacionados) quando os valores de  $r_{eu}(k)$  para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  são aproximadamente nulos. Em aplicações práticas, utiliza-se um intervalo de  $\pm 10\%$ ; ii) calcular a função correlação para o erro de previsão da saída pela seguinte equação:

$$r_e(k) = \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)\varepsilon(t-k)$$

As medidas são adequadas para modelagem quando o conjunto de elementos de  $r_e(k)$  para  $k \neq 0$  está no intervalo  $\pm 10\%$  do valor normalizado  $r_e(0) = 1$  (Isermann, 1980; Brosilow e Joseph, 2002);

- Se os parâmetros são variantes no tempo, deve-se modificar o estimador para evitar que o ganho torne-se pequeno, mantendo-se assim a capacidade de adaptação do estimador dos *MQR* (estimador em alerta).

## 5.5 ESTIMAÇÃO DE PROCESSOS VARIANTES NO TEMPO

O rastreamento de parâmetros variantes no tempo é um importante problema na identificação de sistemas dinâmicos. Independentemente da aplicação dada ao estimador, é necessário que ele seja eficaz no rastreamento das mudanças no sistema identificado (presença de não-linearidades). Adicionalmente, deve-se obter um modelo matemático que represente adequadamente o comportamento do sistema controlado, visando à aplicação em controladores adaptativos (Wellstead e Zarrop, 1991; Shah e Cluett, 1991).

➤ *Pergunta:* Como aumentar a adaptabilidade do algoritmo dos *MQR*?

### 5.5.1 PROBLEMA DO RASTREAMENTO DE PARÂMETROS VARIANTES

Quando o número de iterações aumenta, os parâmetros estimados podem convergir. Esta convergência é normalmente refletida pela diminuição dos elementos da matriz  $P(t)$  e é desejável para o caso de sistemas invariantes no tempo. Entretanto, quando o sistema é variante no tempo, é necessário evitar que os elementos da matriz  $P(t)$  se tornem “muito” pequenos, para que possa ocorrer a correção dos estimadores  $\hat{\theta}(t)$ . Na prática, procura-se um compromisso entre a capacidade de adaptação  $\{P(t)\}$  grande e a convergência no algoritmo de estimação  $\{P(t)\}$  pequeno.

Para manter a capacidade de adaptação do estimador, limitando a valores mínimos os elementos da matriz de covariância (controlar a magnitude dos elementos de  $P(t)$ ), dois procedimentos são avaliados:

⇒ Atualização de  $P(t)$  e Fator de esquecimento.

### 5.5.2 ATUALIZAÇÃO DE $P(t)$

Para a atualização da matriz de covariância, os elementos de  $P(t)$  são aumentados pela adição de uma matriz diagonal semidefinita positiva  $Q(t)$ . Então, a nova matriz de covariância é calculada por

$$P(t) = P(t) + Q(t) \quad (5.26)$$

A literatura de identificação apresenta dois procedimentos baseados na equação (5.26), isto é, *random walk* e *covariance resetting*.

### 5.5.2.1 BUSCA ALEATÓRIA (RANDOM WALK)

Para a aplicação da técnica *random walk*, adiciona-se, a cada iteração, a matriz  $Q(t)$  cujos elementos descrevem a suposta razão de variação dos parâmetros do sistema. Por questão de simplicidade e estabilidade do algoritmo dos *MQR*, usualmente a matriz  $Q(t)$  apresenta estrutura diagonal,  $Q(t) = qI_{(na+nb+1) \times (na+nb+1)}$ , onde  $q \in \mathcal{R}^*$ .

Se somente certos parâmetros mudam, então  $Q(t)$  pode ser selecionada com zeros na diagonal em todas as posições exceto naquelas que correspondem aos parâmetros variantes. Por exemplo, se é conhecido que somente o primeiro e o terceiro elementos no vetor de parâmetros modificam-se no sistema com quatro parâmetros, então  $Q(t)$  é dada por

$$Q(t) = \text{diag}(q_1, 0, q_3, 0)$$

Os valores de  $q_1$  e  $q_3$  devem refletir a magnitude da mudança dos parâmetros. Por exemplo, se o parâmetro  $\theta_1$  muda “pouco”, então  $q_1 = 0.05$  deve ser tentado; se o parâmetro  $\theta_3$  muda em 100%, então  $q_3 = 0.5$  deve ser tentado. Além disso, existe considerável liberdade na seleção do tamanho dos elementos da diagonal de  $Q(t)$ . Deve-se lembrar que são positivos porque  $P(t)$  é uma matriz definida positiva. Também é importante observar que  $Q(t)$  aumenta o comprimento do passo de ajuste e um valor “grande” causa uma excessiva oscilação nos correspondentes parâmetros estimados.

A equação (5.27) foi proposta e testada heuristicamente por Arruda (1988) e pode ser utilizada na seleção da matriz  $Q(t) = qI_{(na+nb+1) \times (na+nb+1)}$ , isto é,

$$q = \frac{t_r[P(t)]}{[na + nb + 1]} \quad (5.27)$$

onde  $t_r[P(t)]$  é o traço da matriz  $P(t)$  e  $[na + nb + 1]$  representa o número de parâmetros estimados.

A influência da técnica *random walk* nas estimativas paramétricas pode ser observada no exemplo 5.7 (Wellstead e Zarrop, 1991).

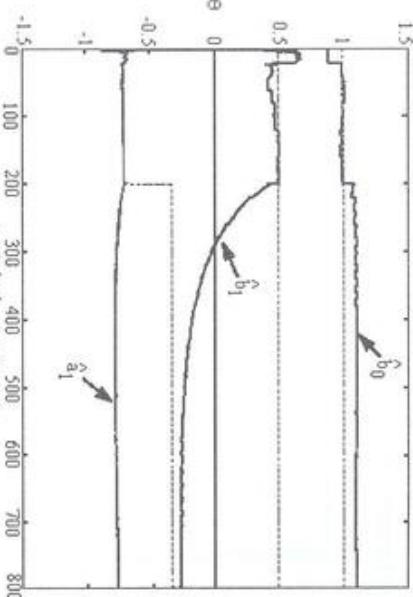
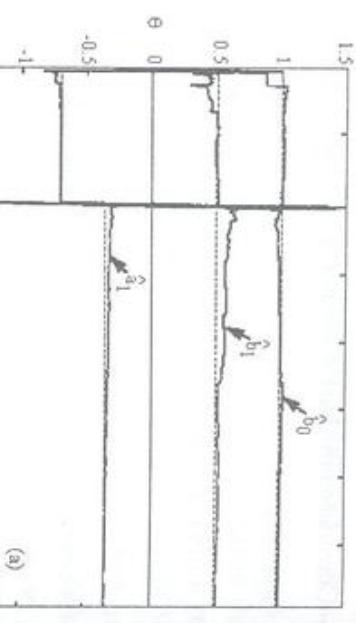


Figura 5.6 – Estimador dos *MQR* sem a técnica de busca aleatória.

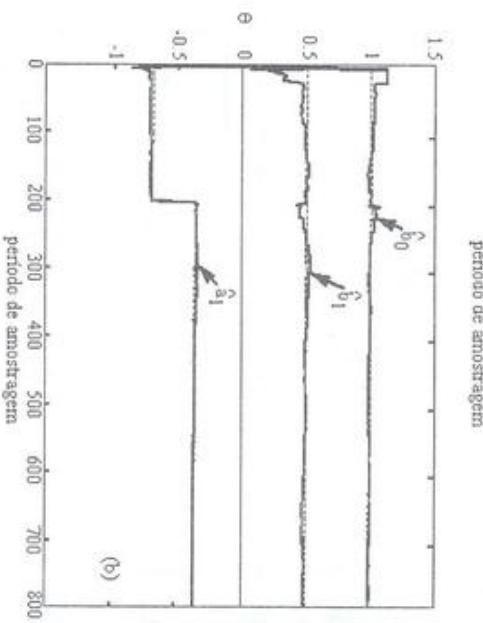
*Exemplo 5.7* – Considere um sistema caracterizado pelo seguinte modelo:  
 $y(t) = -a_1y(t-1) + b_0u(t-1) + b_1u(t-2) + e(t)$   
 onde  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 0.5$  e  $a_1 = \begin{cases} 0.7 & \text{se } 0 < t < 200 \\ 0.35 & \text{se } t \geq 200 \end{cases}$

A figura (5.6) ilustra os parâmetros estimados utilizando-se o *MQR*-padrão com  $\hat{\theta}(0)=0$ ,  $P(0) = 100I_{3x3}$  e sem a aplicação do procedimento *random walk*. Na figura (5.7), o método *random walk* é aplicado no instante de tempo  $t = 200$  quando  $a_1$  varia, onde  $Q(t) = 10I_{3x3}$  e  $Q(t) = 0.1I_{3x3}$ , respectivamente.

### 5.5.2.2 REINICIALIZAÇÃO DE $P(t)$ (COVARIANCE RESETTING)



(a)

Figura 5.7 – MQR com busca aleatória: (a)  $Q(t) = 10I_{3x3}$ , (b)  $Q(t) = 0.1I_{3x3}$ .

De acordo com os resultados das figuras (5.6) e (5.7), observa-se que a utilização do estimador dos MQR convencional proporciona uma convergência lenta nos parâmetros estimados. A adição de uma matriz “grande” para  $Q(t)$ , conduz a excessivas variações nas estimativas enquanto que, utilizando-se uma matriz “pequena” para  $Q(t)$ , tem-se um rápido transitório nos parâmetros estimados. Para a aplicação da técnica *random walk*, é necessário conhecer *a priori* que  $a_t$  é o parâmetro variante, bem como o instante de tempo em que acontece a mudança paramétrica.

Outro procedimento para a regulagem dos elementos de  $P(t)$  utiliza o erro de estimação  $|y(t) - \hat{y}(t)|$ , que também pode ser observado e implementado para a reinicialização de  $P(t)$  somente se o valor absoluto do erro de estimativa excede um valor especificado pelo usuário.

### 5.5.2.3 FATOR DE ESQUECIMENTO

Para processos variantes no tempo, é necessário fornecer ao algoritmo dos mínimos quadrados recursivo uma capacidade de adaptação mínima, impedindo que o ganho do estimador tenda a zero. Esta capacidade pode ser obtida dando-se uma maior importância às novas medidas pela regulagem do fator de esquecimento.

⇒ Introduzir uma constante no algoritmo (denominada *fator de esquecimento*) que pondera mais as últimas medidas.

O algoritmo dos MQR-padrão foi desenvolvido considerando-se

$$P(t+1) = [\phi^T(t+1)\phi(t+1)]^{-1}$$

onde

$$\phi^T(t+1)\phi(t+1) = \phi^T(t)\phi(t) + \varphi(t+1)\varphi^T(t+1) \quad (5.28)$$

Se os parâmetros são variantes, uma modificação no estimador dos *MQR* faz-se necessária para evitar que o ganho torne-se “muito” pequeno. Assim, em vez da equação (5.28), pode-se utilizar

$$\phi^T(t+1)\phi(t+1) = \lambda[\phi^T(t)\phi(t)] + \phi(t+1)\phi^T(t+1) \quad (5.29)$$

onde  $\lambda$  é o fator de esquecimento, assumindo valores entre 0 (*zero*) e 1 (*um*), penalizando as informações antigas na presença de novas medidas.

O algoritmo dos *MQR*-padrão minimiza o seguinte critério:

$$J(N, \theta) = \sum_{t=1}^N [y(t) - \phi^T(t)\theta]^2$$

em cada instante de tempo e pondera cada erro de estimação,  $e(i) = y(i) - \phi^T(i)\theta$ , igualmente. Uma mudança paramétrica no sistema identificado significa que erros recentes devem ser mais fortemente enfatizados do que erros anteriores de modo a permitir ao estimador dos *MQR* adaptar-se ao novo sistema. Assim, para modelar as variações dos parâmetros variantes, o critério dos *MQR* modifica-se para

$$J(N, \theta) = \sum_{t=1}^N \lambda^{N-t} e^2(t)$$

e o efeito do desconto dos erros passados pode ser visto como

$$J(N, \theta) = \lambda J(N-1, \theta) + e^2(N)$$

Deste modo, as medidas velhas são exponencialmente “esquecidas” e maior ênfase é atribuída às novas medidas. O algoritmo de estimação dos mínimos quadrados com fator de esquecimento apresenta a seguinte forma recursiva (Ljung, 1999):

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1) \left[ y(t+1) - \phi^T(t+1)\hat{\theta}(t) \right]$$

$$K(t+1) = \frac{P(t)\phi(t+1)}{\lambda + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)} \quad (5.30)$$

$$P(t+1) = \frac{1}{\lambda} \left[ P(t) - \frac{P(t)\phi(t+1)\phi^T(t+1)P(t)}{\lambda + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)} \right]$$

Observação:

- O algoritmo dos *MQR* com fator de esquecimento evita que os elementos de  $P(t)$  tendam a zero, mantendo o estimador em “alerta” para rastrear dinâmicas variantes, isto é,
  - ⇒ se  $\lambda = 1$ , tem-se a mesma ponderação (*MQR*-padrão);
  - ⇒ na prática, tem-se  $0.9 \leq \lambda \leq 1$  (ponderação maior para as medidas atuais).

Para aumentar a sensibilidade do estimador dos *MQR* na presença de variações nos parâmetros do sistema, implementa-se um fator de esquecimento variável. Esta técnica pode utilizar o erro de previsão para verificar, em cada período de amostragem, o estado do estimador. Se o erro é menor que um determinado valor fornecido pelo operador, então os parâmetros estimados estão próximos dos valores verdadeiros. Neste caso, o fator de esquecimento deve assumir valor próximo de um. Se o erro é grande, o fator de esquecimento deve assumir valores pequenos ( $0.9 \leq \lambda \leq 1$ ) de forma que a sensibilidade do estimador aumente para permitir o rastreamento dos parâmetros e, consequentemente, reduzir o erro de previsão. Dentre os vários métodos para a regulação do fator de esquecimento, tem-se

i) *Fator de esquecimento constante*

Neste método,  $\lambda(t)$  é calculado por

$$\lambda(t) = \lambda_0 \text{ onde } 0.9 \leq \lambda_0 \leq 1;$$

ii) *Fator de esquecimento variável*

➢ Fator de esquecimento com traço limitado de  $P(t)$

Neste método, calcula-se  $\lambda(t)$  para manter o traço da matriz de covariância  $P(t)$  superior a uma constante  $t_{r0}$  definida pelo usuário, isto é,

$$\lambda(t) = \begin{cases} t_r[P(t)], & \text{se } t_r[P(t)] < t_{r0} \\ t_{r0}, & \text{de outra forma} \end{cases}$$

Seleciona-se o traço mínimo ( $t_m$ ) de modo que, em regime, o estimador apresente pequena variância em torno do valor estimado. Esta variância deve permitir uma adaptação a variações lentas nos parâmetros a serem identificados;

► Fator de esquecimento exponencial

Neste método, procura-se manter  $\lambda(t)$  em 1 ou na vizinhança ( $\lambda(t) = 0.999$ ). Quando uma mudança paramétrica é detectada,  $\lambda(t)$  pode ser ajustado para 0.95, o que implica uma rápida variação nos parâmetros estimados, e o comportamento de  $\lambda(t)$  tem um ajuste exponencial crescendo para 1 ou 0.999. Assim, é possível ajustar  $\lambda(t)$  de acordo com

$$\lambda(t) = \lambda_0 \lambda(t-1) + [1 - \lambda_0]$$

onde  $\lambda_0 < 1$  e  $\lambda(0) < 1$ . Por exemplo, para  $\lambda_0 = 0.95$  e  $\lambda(0) = 0.95$ , resulta que

$$\lambda(5) = 0.9632 ; \lambda(10) = 0.9715 ; \lambda(20) = 0.9829$$

...

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 1$$

Outro procedimento de ajuste do fator de esquecimento exponencial é dado por

$$\lambda(t) = \lambda_0 \lambda(t-1) + \lambda[1 - \lambda_0]$$

Neste caso, para  $\lambda_0 = 0.95$  e  $\lambda = 0.999$ , obtém-se

$$\lambda(t) = 0.95\lambda(t-1) + 0.999(0.05)$$

e, em regime, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda = 0.999$$

A influência da técnica do fator de esquecimento nas estimativas paramétricas pode ser observada no exemplo 5.8 (Wellstead e Zarrop, 1991).

*Exemplo 5.8* – Considere um sistema representado por

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + b_0 u(t-1) + e(t)$$

As figuras (5.8) e (5.9) mostram a influência sobre o estimador dos *MQR* para diferentes valores do fator de esquecimento. Neste exemplo, o coeficiente  $b_0$  muda em  $t = 200$  e os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  são constantes, isto é,

$$a_1 = -1 ; a_2 = 0.25 ; b_0 = 1 \quad (t < 200) ; b_0 = 2 \quad (t \geq 200)$$

Observe que o efeito de redução de  $\lambda(t)$  aumenta a sensibilidade das estimativas de mudança do parâmetro  $b_0$ . Uma penalidade associada, entretanto, é que a variabilidade das estimativas aumenta.

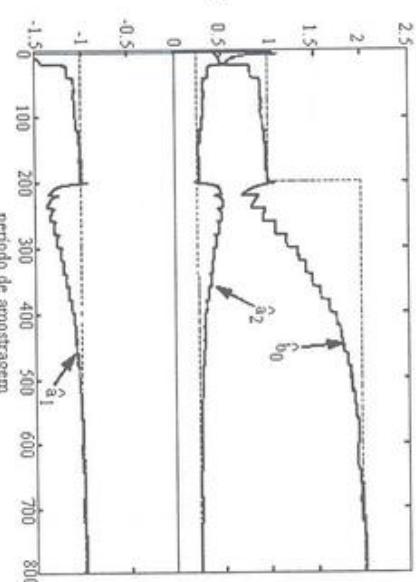


Figura 5.8 – Estimador dos *MQR* com  $\lambda(t) = 0.99$ .

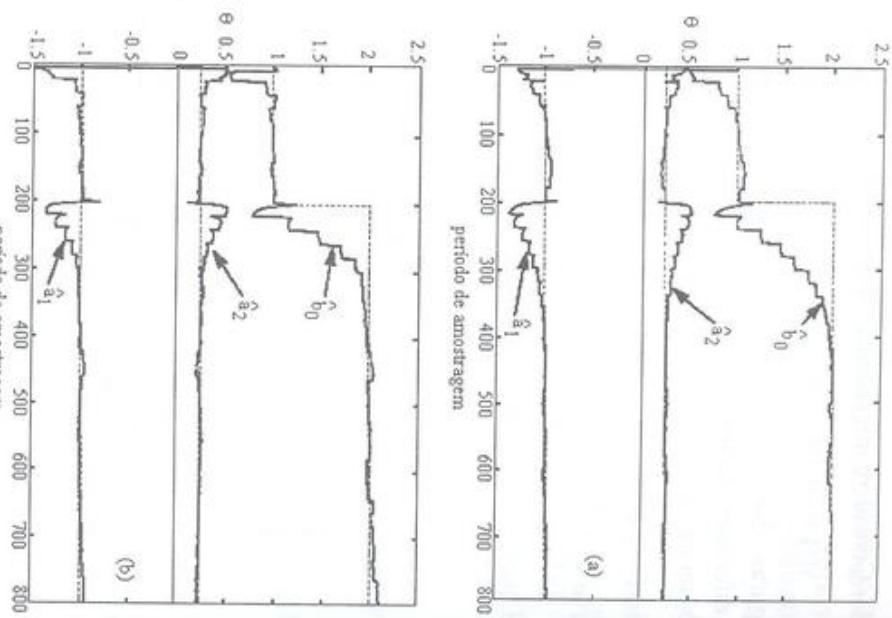


Figura 5.9 – Estimador dos MQR com: (a)  $\lambda(t) = 0.98$ , (b)  $\lambda(t) = 0.97$ .

#### Comentários:

- A utilização do fator de esquecimento variante no tempo permite que o algoritmo dos MQR rastreie melhor as variações nos parâmetros do que o algoritmo com fator de esquecimento constante. Entretanto, com um fator de esquecimento constante ou variável, aumentam-se de um mesmo valor todos os elementos da matriz  $P(t)$ . Assim, os parâmetros que não são variantes no tempo oscilam;

- através da escolha apropriada dos elementos da matriz  $Q(t)$ , na aplicação da técnica da atualização de  $P(t)$ , os elementos da matriz de covariância e o ganho do estimador podem não tender mais a zero. Este método é mais seletivo que a utilização do fator de esquecimento, pois permite aumentar separadamente os elementos individuais da matriz  $P(t)$ ;
- Para um dado fator de esquecimento, o estimador de parâmetros conduz a estimativas baseadas nas últimas  $N_\lambda$  amostras de dados (memória do estimador), onde

$$N_\lambda \approx \frac{1}{1 - \lambda(t)} \text{ (constante de tempo associada com } \lambda)$$

Assim, o valor de  $\lambda(t) = \lambda_0 = 0.98$  conduz à estimativa de parâmetros baseado essencialmente nas últimas  $N_\lambda = 50$  amostras de dados, enquanto que o valor de  $\lambda_0 = 0.995$  conduz à estimativa de parâmetros baseado essencialmente nas últimas  $N_\lambda = 200$  amostras;

- O procedimento do fator de esquecimento funciona de forma adequada somente se o processo tem excitação. Um uso inadequado do fator de esquecimento algumas vezes produz uma condição inadequada, denominada *blow up*, na matriz de covariância. Isto acontece quando um fator de esquecimento constante  $\lambda(t) < 1$  é utilizado e o sistema está operando em regime por um longo período de tempo (pode também acontecer se  $P(t - 1)\phi(t) \rightarrow 0$ ). Neste caso, a matriz  $P(t)$  aumenta exponentialmente, de acordo com a seguinte equação:

$$P(t) \approx \frac{P(t-1)}{\lambda(t)}$$

é evitado este problema de operação do estimador dos MQR com um fator de esquecimento variável. A figura (5.10) ilustra a presença do fenômeno *blow up* a partir do instante 400, quando o traço da matriz de covariância cresce significativamente;

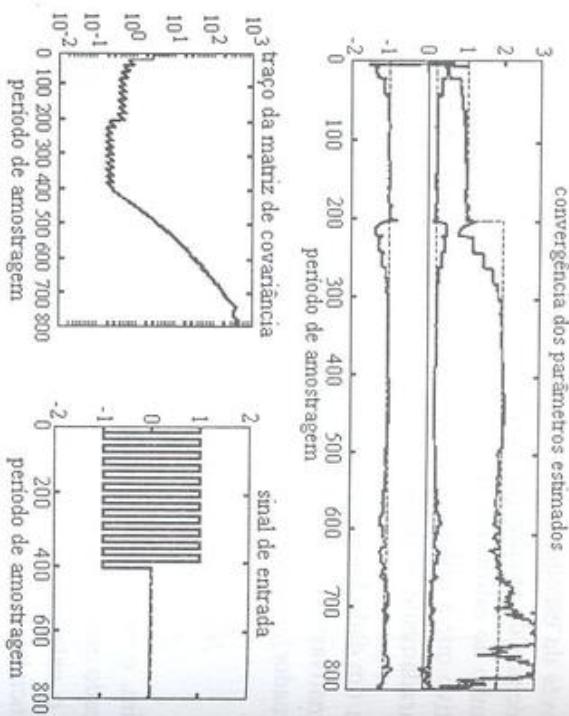


Figura 5.10 – Presença de *blow up* pela falta de excitação.

- A utilização de algoritmos de estimação paramétricos em computadores para ser bem-sucedida, exige que o algoritmo seja robusto o suficiente para contornar os problemas que frequentemente ocorrem nas implementações em tempo real (robustez numérica do estimador).

Os problemas relacionados às limitações dos equipamentos (conversores, sensores, erros de arredondamento dos computadores) introduzem imprecisão numérica devido ao mal condicionamento da matriz de covariância que perde sua propriedade de matriz definida positiva, instabilizando o algoritmo de identificação. Este problema é solucionado se a matriz de covariância é decomposta de acordo com

$$P(t) = U(t)D(t)U^T(t)$$

onde  $U(t)$  é uma matriz triangular superior com todos os seus elementos da diagonal unitária e  $D(t)$  é uma matriz diagonal. Na literatura, este método é conhecido como fatoração  $UD$  (*Upper Diagonal*) de Biernan (1977) e garante que a matriz  $P(t)$  seja definida positiva, tenha boa estabilidade numérica e os erros numéricos sejam diminuídos. Åström e Wittenmark (1990) apresentam o código em *Pascal* do estimador de parâmetros dos mínimos quadrados utilizando a fatoração  $UD$ ;

- Para solucionar os problemas de estimação de parâmetros, é necessário inserir no sistema um módulo de supervisão baseado em procedimentos heurísticos. Desta forma, funções de segurança são implementadas no nível superior para melhorar o desempenho dos algoritmos de estimação no nível inferior, a partir das medidas do processo sob identificação (figura 5.11). Em processos complexos, a presença de parâmetros e perturbações não-modeladas pode comprometer o desempenho de estimação com respeito a *turn off*, *windup*, imprecisões no algoritmo de estimação com respeito a *turn off*, *windup*, parâmetros variantes no tempo e dinâmicas não-modeladas, o módulo de supervisão deve ser implementado para: i) monitorar o erro de previsão e estimativas de parâmetros para mudanças abruptas no processo que resultam na ruptura do modelo estimado; ii) ajustar as medidas e os parâmetros de projeto do algoritmo de estimação a mudanças nas condições de operação da planta (Isermann, 1980);

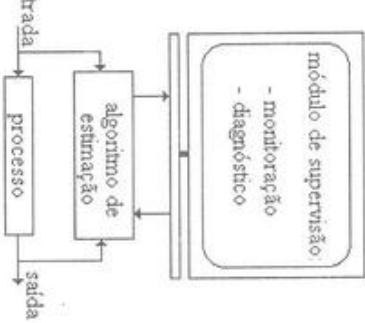


Figura 5.11 – Estimação com supervisão.

- A determinação da ordem do sistema é uma importante tarefa na estimativa de parâmetros (Hang *et al.*, 1993). Na apresentação dos exemplos anteriores, foi assumido o conhecimento da ordem dos processos, isto é, o valor de  $na = n$  era conhecido *a priori*. Na prática, entretanto, a ordem do processo pode não ser exatamente conhecida. Se um modelo de ordem incorreta é empregado, podem ocorrer erros ou redundâncias de termos (aumento do tempo de processamento do algoritmo). Quando a ordem do modelo empregado na estimação de parâmetros é aumentada, a soma dos quadrados do erro de previsão

• Critérios de Informação ( $CI$ ) podem ser avaliados para manter a ordem do modelo da planta estimada tão simples quanto possível (*princípio da parcimônia*). Critérios como de informação *Bayesiana*, de *Akaike* ou *minimum description length* combinam a variância residual do erro de estimativa e a ordem do modelo (Haber e Unbehauen, 1990). A figura (5.13) ilustra o comportamento do critério de informação para detectar a ordem do modelo estimado com base no menor resíduo de estimativa associado ao menor conjunto de parâmetros estimados.

Isto é, um conjunto das variáveis da planta ( $u(t)$ ) e ( $y(t)$ ) pode ser utilizado para a estimativa de parâmetros usando um modelo de ordem particular. O mesmo procedimento pode então ser conduzido com os dados utilizando modelos de ordens diferentes. Observando o gráfico de  $S_n$  com a ordem do sistema  $n$ , uma ordem do modelo pode ser selecionada, por exemplo,  $n^*$ , onde a inclinação  $\Delta S_n / \Delta n$  é íngreme para  $n < n^*$  e suave para  $n > n^*$ . Este procedimento está ilustrado na figura (5.12):

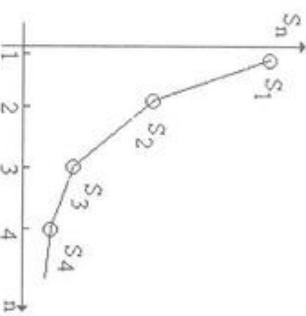


Figura 5.12 – Teste de detecção da ordem do sistema.

- O atraso de transporte  $d$  do processo pode também ser identificado de forma similar ao caso da determinação da ordem do modelo. Para uma dada ordem do modelo e uma sequência de valores de  $d$  (por exemplo,  $d = 1, 2, \dots$ ), a melhor estimativa de  $d$  é aquela que conduz ao menor valor da soma dos quadrados do erro de previsão. Portanto, é possível combinar a determinação do atraso de transporte e a ordem do modelo do processo em um problema de identificação pela simples interação do procedimento de detecção do atraso para uma sequência de  $n$  valores (Hang *et al.*, 1993; Moraes, 2004);

↑ critério de informação

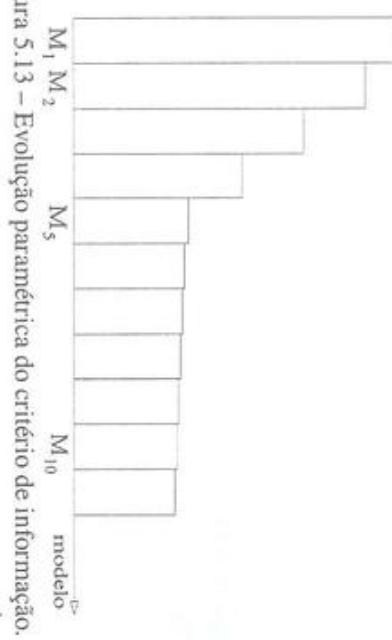


Figura 5.13 – Evolução paramétrica do critério de informação.

Inicialmente, um modelo de baixa ordem é selecionado, por exemplo ordem  $1$  ( $lm$ ), então aumenta-se a ordem do modelo estimado e o  $CI$  é avaliado para cada incremento na ordem do modelo. Assim, a estrutura adequada do modelo estimado é aquela que proporciona a menor taxa de variação do critério de informação. Diversos critérios de informação podem ser obtidos da literatura de identificação como uma complementação da função custo básica dos mínimos quadrados, isto é,  $J_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k)]^2$

com alguns termos extras que penalizam a complexidade do modelo matemático da planta e podem ser selecionados de acordo com um dos seguintes testes (Haber e Unbehauen, 1990; Ljung, 1996):

► Critério de Informação de Akaike (*Akaike Information Criterion*)

$$AIC = N \ln[J_N] + 2p$$

onde  $N$  é o número de medidas da experimentação e  $p$  é o número de parâmetros do modelo estimado;

► Erro de Predição Final (*Final Prediction Error*)

$$FPE = N \ln[J_N] + N \ln \left[ \frac{N+p}{N-p} \right];$$

► Critério de Informação Bayesiana (*Bayesian Information Criterion*)

$$BIC = N \ln[J_N] + p \ln[N].$$

## 5.6 ALGORITMO DE ESTIMAÇÃO DA APROXIMAÇÃO ESTOCÁSTICA

O estimador dos mínimos quadrados recursivo apresenta um número significativo de cálculos a cada iteração, o que pode inviabilizá-lo em algumas aplicações práticas envolvendo controle adaptativo (compatibilizar o tempo de processamento em tempo real do algoritmo com a dinâmica da planta a ser controlada). Isto se deve ao fato de o processo apresentar uma constante de tempo pequena (processo rápido) ou se o processo é complexo. Isto é, se as ordens de  $na$  (associado aos pólos em malha aberta) e  $nb$  (associado aos zeros em malha aberta) são grandes. Assim, na equação de atualização das estimativas

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + P(t+1)\varphi(t+1)\varepsilon(t+1) \quad (5.31)$$

deve-se substituir  $P(t+1)$  por uma expressão que seja mais simples de calcular. Portanto, pode-se utilizar  $P(t+1)$  na equação (5.31) pelo ajuste de um ganho  $\gamma(t+1)$ , ou seja,

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \gamma(t+1)\varphi(t+1)\varepsilon(t+1) \quad (5.32)$$

cuja seleção obedece a um dos seguintes procedimentos:

- i) Sequência ganho escalar constante

$$\gamma(t) = \gamma_0 = \text{escalar constante}$$

- ii) Sequência ganho com aprendizado seqüencial

$$\gamma(t) = \frac{\alpha}{\beta + \varphi^T(t)\varphi(t)}$$

onde  $\beta > 0$  e  $0 < \alpha < 2$ .

- iii) Sequência ganho com o vetor total de medidas

$$\gamma(t) = \left[ \sum_{k=1}^t |\varphi(k)|^2 \right]^{-1} = [r(t)]^{-1} \quad (5.33)$$

Com a seleção de  $\gamma(t)$  pela equação (5.33), o algoritmo da equação (5.32) torna-se

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + [r(t)]^{-1}\varphi(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)]; r(t) = r(t-1) + |\varphi(t)|^2$$

Observações:

- As vantagens do método de estimativa da aproximação estocástica são a simplicidade e a velocidade de cálculo. As desvantagens do método de estimativa da aproximação estocástica são a baixa convergência dos parâmetros estimados e a “pobre” adaptação a mudanças nos parâmetros variantes do sistema (Wellstead e Zarrop, 1991);
- No caso da sequência ganho com aprendizado seqüencial, se  $\beta = \alpha = I$ , o algoritmo denomina-se *LMS* (*Least Mean Squares*) (Ljung, 1999);
- Outros algoritmos para identificação de sistemas dinâmicos utilizando a técnica da aproximação estocástica são (Sinha e Kuszta, 1983):
  - Saridis e Stein (1968):

$$\hat{h}(t) = \hat{h}(t-1) + \gamma(t)u(t)[y(t) - u^T(t)\hat{h}(t-1)]$$

onde

$$\hat{h} = [\hat{h}_1 \ \hat{h}_2 \ \dots \ \hat{h}_\ell]^T$$

$$u(t) = [u(t-1) \ u(t-2) \ \dots \ u(t-\ell)]^T$$

$$\gamma(t) = 1/t \quad (t = 1, 2, \dots)$$

e sendo  $\hat{h}(t)$  a estimativa dos elementos da resposta impulsiva. Se a função de transferência discreta do modelo do sistema contém  $(na+nb+1)$  parâmetros, então  $\ell = na + nb + 1$  amostras da resposta ao impulso são estimadas;

➤ Kwatny (1972):

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) - \left( \frac{\gamma}{t} \right) \frac{[\phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) - y(t)]\hat{\phi}(t-1)}{\|\hat{\phi}(t-1)\|^2}$$

onde a notação é similar ao estimador dos mínimos quadrados e  $\gamma$  é uma constante positiva;

- Se  $e(t)$  é um ruído branco, o estimador dos  $MQ$  é assintoticamente não-polarizado. Entretanto, para o caso onde  $e(t)$  não é branco, tem-se a seguinte representação para a planta (modelo geral):

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-d) + e(t)$$

$$e(t) = C(z^{-1})w(t)$$

onde  $w(t)$  é uma seqüência ruído branco (Teorema da Separação). Portanto, neste caso, deve-se verificar como alterar o estimador  $\{\hat{A}(z^{-1}), \hat{B}(z^{-1}), \hat{C}(z^{-1})\}$  para que as estimativas sejam ainda não-polarizadas.

## 5.7 ALGORITMO DE ESTIMAÇÃO DA VARIÁVEL INSTRUMENTAL

Nas seções (5.3) e (5.4) foram apresentados os estimadores dos  $MQ$  não-recursivo e recursivo, respectivamente. O algoritmo de estimação dos  $MQ$  é assintoticamente não-polarizado se a perturbação atuante no processo,  $e(t)$ , é uma seqüência de variáveis aleatórias do tipo branca. Para obterem-se valores estimados não-polarizados, quando a perturbação não é branca, utiliza-se o método da variável instrumental (*VI*), estudada por Young (1970). Assim, uma nova variável, denominada *variável instrumental*, é definida, procurando-se correlacioná-la com as medidas de entrada e saída do processo e descorrelacioná-la com o ruído do sistema.

A seguir, discute-se a aplicabilidade de implementação do método da *VI*. Substituindo-se a equação (5.7) na equação (5.13), obtém-se o seguinte valor para a estimativa  $\hat{\theta}$ :

$$\hat{\theta} = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T [\theta E]$$

Após algumas manipulações algébricas, tem-se

$$\hat{\theta} = \theta + [\phi^T \phi]^{-1} [\phi^T E] \quad (5.34)$$

A estimativa  $\hat{\theta}$  é dita consistente se converge para  $\hat{\theta}$  quando o número de amostras aumenta ( $N \rightarrow \infty$ ). Portanto, determina-se a consistência do estimador, equação (5.34), calculando a esperança matemática da variável  $\hat{\theta}$ ,  $\Xi[\hat{\theta}]$ , em termos de probabilidade, por

$$\Xi[\hat{\theta}] = \theta + \Xi[\phi^T \phi]^{-1} \Xi[\phi^T E]$$

Para avaliar se  $\hat{\theta}$  converge para  $\hat{\theta}$ , calculam-se os termos  $\Xi[\phi^T \phi]$  e  $\Xi[\phi^T E] = 0$ , a estimativa é não-polarizada e, consequentemente,  $\hat{\theta}$  converge para  $\hat{\theta}$ . Se a perturbação não é branca, o termo  $\Xi[\phi^T E] \neq 0$ , e o método dos mínimos quadrados fornece estimativas polarizadas, isto é,  $\hat{\theta}$  não converge para  $\hat{\theta}$ , inviabilizando sua implementação (Goodwin e Payne, 1977). Este problema de polarização pode ser contornado com a técnica da variável

instrumental. Assim, deve-se selecionar uma matriz variável instrumental,  $Z$ , composta de elementos da variável instrumental (novo sinal),  $z(t)$ , tal que  $z(t)$  seja correlacionada com as medidas do processo (entrada e saída) e não correlacionada com o ruído, isto é,

$$\Xi[Z^T E] = 0 \quad ; \quad \Xi[Z^T \phi] = \psi \text{ (matriz não-singular)}$$

A estimativa de  $\hat{\theta}$ , obtida pelo método da variável instrumental (algoritmo não-recursivo), é calculada conforme a equação (5.35), ou seja,

$$\hat{\theta}_{VI} = [Z^T(t)\phi(t)]^{-1} Z^T(t)Y(t) \quad (5.35)$$

onde a matriz  $Z(t)$  é dada por

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z^T(1) \\ \vdots \\ z^T(N) \end{bmatrix}$$

e  $\phi(t)$  e  $Y(t)$  estão definidos nas seções anteriores. A análise da convergência do algoritmo da variável instrumental está disponível em Ljung (1999). Muitas vezes, a dificuldade em selecionar a variável instrumental  $z(t)$  torna o método da  $VI$  não atrativo para determinadas aplicações (o algoritmo da  $VI$  não estima os parâmetros do modelo do ruído).

## 5.7.1 ALGORITMO NÃO-RECURSIVO DA VARIÁVEL INSTRUMENTAL

Considere novamente o modelo da equação (5.7), isto é,

$$Y = \phi\theta_0 + E$$

onde  $\theta_0$  representa os parâmetros verdadeiros do sistema que devem ser estimados. Multiplicando-se pela matriz da  $VI$  transposta,  $Z^T$ , tem-se que

$$Z^T Y = Z^T \phi\theta_0 + Z^T E$$

$$\theta_0 = [Z^T \phi]^{-1} [Z^T Y] - [Z^T \phi]^{-1} [Z^T E]$$

Admitindo-se que a equação

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{VI}(N) &= [Z^T \phi]^{-1} [Z^T Y] \\ &= \theta_0 + [Z^T \phi]^{-1} [Z^T E] \end{aligned}$$

calcula o algoritmo da  $VI$  não-recursivo (método *off-line*), então a condição  $\hat{\theta}_{VI}(N) \rightarrow \theta_0$ , quando  $N \rightarrow \infty$ , é assegurada se está subordinada às hipóteses de que

- O sinal  $z(t)$  não está correlacionado com  $e(t)$ ;
- O sinal  $e(t)$  tem média nula;
- A inversa da matriz  $[Z^T \phi]^{-1}$  existe.

## 5.7.2 ALGORITMO RECURSIVO DA VARIÁVEL INSTRUMENTAL

As equações para o estimador recursivo da variável instrumental podem ser obtidas de maneira similar às dos mínimos quadrados recursivo (Ljung e Söderström, 1983). A partir das medidas de entrada e saída do processo, obtém-se o algoritmo da variável instrumental recursivo (método *on-line*) segundo as seguintes equações:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1) \{y(t+1) - \phi^T(t+1)\hat{\theta}(t)\}$$

$$K(t+1) = \frac{P(t)z(t+1)}{\lambda + \phi^T(t+1)P(t)z(t+1)} \quad (5.36)$$

$$P(t+1) = \frac{1}{\lambda} \left\{ P(t) - \frac{P(t)z(t+1)\phi^T(t+1)P(t)}{\lambda + \phi^T(t+1)P(t)z(t+1)} \right\}$$

## 5.7.3 SELEÇÃO DA VARIÁVEL INSTRUMENTAL

Diversos procedimentos para a seleção da variável instrumental,  $z(t)$ , têm sido apresentados na literatura de identificação de processos (Söderström et al., 1987). Geralmente, os elementos de  $z(t)$  são selecionados como os

valores atrasados ou filtrados dos sinais de entrada e saída. Uma representação em diagrama de blocos da seleção da  $Vl$  a partir do modelo nominal da planta é apresentada na figura (5.14).

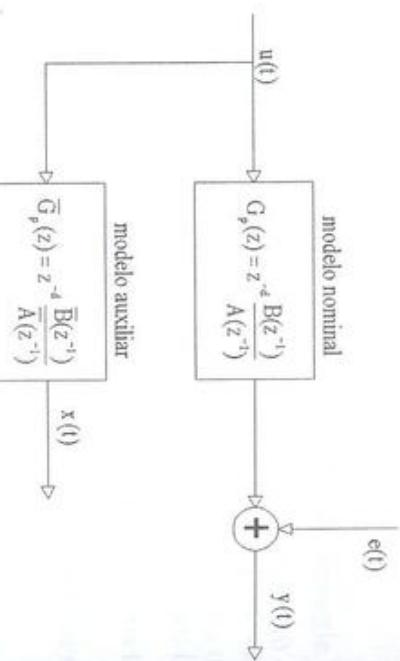


Figura 5.14 – Diagrama esquemático da variável instrumental.

A seguir, discutem-se algumas abordagens fundamentadas nos trabalhos de Young (1970), Söderström e Stoica (1983), Ljung (1999) e Wellstead e Zarrop (1991).

Considere a seguinte variável instrumental:

$$z(t) = [u(t-d) \dots u(t-d-na-nb)]^T \quad (5.37)$$

onde o sinal  $x(t)$  é obtido do seguinte modelo auxiliar:

$$\bar{A}(z^{-1})x(t) = \bar{B}(z^{-1})u(t-d) \quad (5.38)$$

e os polinômios  $\bar{A}(z^{-1})$  e  $\bar{B}(z^{-1})$  são obtidos dos parâmetros reais do sistema. Seleciona-se a variável instrumental de acordo com os seguintes procedimentos:

i) Variável instrumental via filtros adaptativos

Quando os valores paramétricos do sistema são desconhecidos, então obtém-se as últimas estimativas dos parâmetros do sistema,  $\bar{A}(z^{-1}) = \hat{A}(z^{-1})$  e  $\bar{B}(z^{-1}) = \hat{B}(z^{-1})$ . Em seguida, determina-se  $x(t)$  pela equação

$\hat{A}(z^{-1})x(t) = \hat{B}(z^{-1})u(t-d)$

e, consequentemente,  $z(t)$  é obtida pela equação (5.37).

ii) Variável instrumental via medidas atrasadas

Outro procedimento para seleção dos polinômios  $\bar{A}(z^{-1})$  e  $\bar{B}(z^{-1})$  da equação (5.37) é  $\bar{A}(z^{-1}) = I$  e  $\bar{B}(z^{-1}) = z^{-nb}$ . Assim, o vetor  $z(t)$  pode ser reescrito como

$$z(t) = [u(t-d) \dots u(t-d-na-nb)]^T \quad (5.39)$$

que contém somente as entradas atrasadas (Ljung e Söderström, 1983). A tabela (5.5) ilustra o código em *Matlab* do estimador da  $Vl$  com medidas atrasadas.

Tabela 5.5 – Programação em *Matlab* do estimador da  $Vl$ .

```
% Estimador da variável instrumental
% aplicado a uma planta de segunda ordem
clear all
nit=input(' Quantas iterações ? ');
for i=1:nit
    if rand>0.5
        u(i)=1;
    else
        u(i)=-1;
    end
end
e=u*.1;
lambda=1;p=1000*eye(4,4); % Condições iniciais
teta=[0;0;0;0];tetaux=[0;0;0;0];zeta=[0;0;0;0];
for t=1:6
    y(i)=0;x(t)=0;erro(t)=0;
    a1(t)=teta(1);a2(t)=teta(2);b0(t)=teta(3);b1(t)=teta(4);
    for t=6:nit
        % Iteração da simulação
        y(t)=1.5*y(t-1)-0.7*y(t-2)+u(t-1)+0.5*u(t-2)+..
        e(t)-e(t-1)+0.2*e(t-2);
        fi=[-y(t-1);-y(t-2);u(t-1);u(t-2)];
        zeta=[u(t-1);u(t-2);u(t-3);u(t-4)];
        erro(t)=y(t)-teta'*fi;
        k=p*zeta/(lambda+fi'*p*zeta);
        tetaux=teta;teta=teta+k*erro(t);
    end
end
```

```

p=(p-k*f1'*p)/lambda;
a1(t)=teta(1);a2(t)=teta(2);b0(t)=teta(3);b1(t)=teta(4);
end
t=1:nit;
subplot(221),plot(t,a1(t)),title('a1'),xlabel('amostragem');
subplot(222),plot(t,a2(t)),title('a2'),xlabel('amostragem');
subplot(223),plot(t,b0(t)),title('b0'),xlabel('amostragem');
subplot(224),plot(t,b1(t)),title('b1'),xlabel('amostragem');

```

### iii) Variável instrumental refinada

O método da variável instrumental refinada foi proposto por P.C. Young (1976), onde uma pré-filtragem nos dados do algoritmo é incluída. Portanto, o estimador de parâmetros é composto das seguintes equações básicas:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1) \{y(t+1) - \varphi_F^T(t+1)\hat{\theta}(t)\}$$

$$K(t+1) = \frac{P(t)z(t+1)}{\lambda + \varphi_F^T(t+1)P(t)z(t+1)} \quad (5.40)$$

$$P(t+1) = \frac{1}{\lambda} \left\{ P(t) - \frac{P(t)z(t+1)\varphi_F^T(t+1)P(t)}{\lambda + \varphi_F^T(t+1)P(t)z(t+1)} \right\}$$

$$y_F(t) = T(z^{-1})y(t) \quad ; \quad \varphi_F(t) = T(z^{-1})\varphi(t)$$

onde  $T(z^{-1})$  é o pré-filtro selecionado pelo usuário para evitar instabilidade na estimação e o vetor  $z(t)$  pode ser selecionado pelas equações (5.37) ou (5.39).

## 5.7.4 ALGORITMO DA VARIÁVEL INSTRUMENTAL SIMÉTRICA

O algoritmo da variável instrumental apresentado pela equação (5.36) pode apresentar problemas em aplicações em tempo real causados pelo mal condicionamento (definida negativa ou singular) da matriz de covariância  $P(t)$ . Este problema pode ser contornado utilizando-se a fatoração  $UD$  de Bierman (1977), conforme discutido na seção (5.5). Para implementar a fatoração  $UD$ , é necessário introduzir uma nova forma para o algoritmo da variável instrumental, denominado *algoritmo da variável instrumental simétrica* (Ljung e Söderström, 1983) e representado pelas seguintes equações:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1) \{y(t+1) - \varphi^T(t+1)\hat{\theta}(t)\} \quad (5.41)$$

$$K(t+1) = \frac{P(t)z(t+1)}{\lambda + z^T(t+1)P(t)z(t+1)}$$

$$P(t+1) = \frac{1}{\lambda} \left[ P(t) - \frac{P(t)z(t+1)z^T(t+1)P(t)}{\lambda + z^T(t+1)P(t)z(t+1)} \right]$$

## 5.8 ALGORITMO DE ESTIMAÇÃO DA MATRIZ ESTENDIDA

No projeto do estimador dos *MQR*, utilizou-se um modelo matemático para representar o processo do tipo

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t) + e(t)$$

Quando também a saída da planta está corrompida por um ruído do tipo não-branco (colorido), pode-se utilizar o algoritmo de estimação da matriz estendida para evitar estimativas polarizadas. Admitindo um modelo média-móvel para o ruído  $e(t)$ , isto é,

$$e(t) = C(z^{-1})w(t) \quad (5.42)$$

então o modelo paramétrico do processo caracteriza-se pela seguinte função de transferência linear discreta:

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})w(t)$$

ou

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + w(t) \quad (5.43)$$

onde os vetores de medidas e parâmetros são

$$\varphi^T(t) = [-y(t-1) \dots y(t-d) \dots u(t-d-nb) \dots w(t-1) \dots w(t-nc)]$$

$$\theta^T(t) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ c_1 \ \dots \ c_n]$$

Assumindo que  $w(t)$  é mensurável, então a equação (5.43) é equivalente à equação

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + e(t)$$

e os parâmetros desconhecidos (polinômios estimados  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$ ) são obtidos resolvendo-se o problema do estimador dos mínimos quadrados com duas entradas,  $u(t)$  e  $w(t)$ . Como na prática  $f(w(t))$  é um sinal não-observável, então pode ser estimado (inferido) a partir do erro de previsão, isto é,

$$\hat{w}(t) = y(t) - \Phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (5.44)$$

Obviamente, pode-se considerar a parcela  $C(z^{-l})w(t)$  como simplesmente o erro e estimar os coeficientes dos polinômios  $/A(z^{-l}), B(z^{-l})$  da equação (5.43) utilizando-se o estimador dos *MQR*. Entretanto, as estimativas geradas são polarizadas, a menos que  $C(z^{-l}) = I$ . A tabela (5.6) ilustra a programação em *Matlab* do estimador recursivo da matriz estendida enquanto que o exemplo (5.9) descreve o comportamento inadequado do estimador *MQR* na estimativa de um parâmetro da planta.

Tabela 5.6 – Código em *Matlab* do estimador recursivo da matriz estendida.

```
% Estimador da matriz estendida
clear all
nit=input(' Quantas iterações ? ');
for i=1:nit
    if rand>0.5
        u(i)=1;
    else
        u(i)=-1;
    end
    end
e=u.*0.1;
lambda=1;p=1000*eye(6,6);teta=[0;0;0;0;0;0];
for t=1:6
    y(i)=0;w(i)=0;erro(t)=0;
    a1(t)=teta(1);a2(t)=teta(2);b0(t)=teta(3);b1(t)=teta(4);
    c1(t)=teta(5);c2(t)=teta(6);
end
for t=6:nit
    y(t)=1.5*y(t-1)-0.7*y(t-2)+u(t-1)+0.5*u(t-2)+e(t)-e(t-1)+0.2*e(t-2);
    fi=[-y(t-1);-y(t-2);u(t-1);u(t-2);w(t-1);w(t-2)];
    erro(t)=y(t)-teta.*fi;
    k=p*fi/(lambda+fi.*p*fi);
    teta=teta+k*erro(t);
    p=(p-k*fi.*p)/lambda;
    w(t)=y(t)-teta.*fi;
    a1(t)=teta(1);a2(t)=teta(2);b0(t)=teta(3);b1(t)=teta(4);
    c1(t)=teta(5);c2(t)=teta(6);
end
t=1:nit;
subplot(221),plot(t,a1(t)),title('a1'), xlabel('amostragem');
subplot(222),plot(t,a2(t)),title('a2'), xlabel('amostragem');
subplot(223),plot(t,b0(t)),title('b0'), xlabel('amostragem');
subplot(224),plot(t,b1(t)),title('b1'), xlabel('amostragem');
```

*Exemplo 5.9* – Considere um sistema representado pela equação a diferenças

$$y(t) = a_1 y(t-1) + e(t) + c_1 e(t-1)$$

onde  $a_1 = 0.6$ ,  $c_1 = 0.4$  e  $\{e(t)\}$  é uma seqüência ruído colorido. A figura (5.15) ilustra a estimativa de  $a_1$  pelo estimador dos *MQR* admitindo-se o modelo de primeira ordem da forma

$$y(t) = \hat{a}_1 y(t-1) + e(t)$$

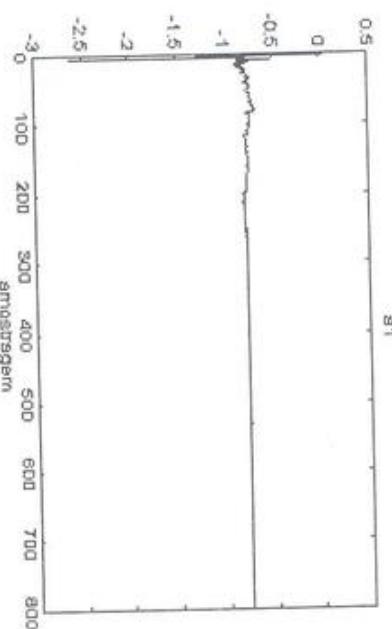


Figura 5.15 – Comportamento polarizado na aplicação do estimador dos *MQR*.

Da figura (5.15) pode-se observar o comportamento polarizado da estimativa de  $a_1$  ( $a_1 = 0.8544$ ), ou seja, o parâmetro estimado  $a_1$  está incorreto. Portanto, obtém-se adequadas estimativas de  $a_1$  se os algoritmos VI ou *MQR* estendido são implementados (Wellstead e Zarrop, 1991).

## 5.9 PROBLEMAS

- 1) Admitir o modelo matemático da forma

$$y(t) = \beta u(t)$$

onde  $y(t)$  é a saída e  $u(t)$  é a entrada. Avaliar o parâmetro  $\beta$  utilizando o estimador dos mínimos quadrados não-recursivo para diferentes conjuntos de medidas, isto é,  $N = 3, 4, 5$ . As medidas de entrada e saída coletadas são

t	y(t)	u(t)
0	2.15	+1
1	-1.94	-1
2	-2.05	-1
3	1.98	+1
4	-2.10	-1
5	2.10	+1

- 2) Identificar a função de transferência discreta de um processo governado pela seguinte equação a diferenças:

$$y(t) + a_1 y(t-1) = b_0 u(t-1)$$

utilizando o estimador dos mínimos quadrados (procedimento *off-line*). As medidas de entrada e saída são

t	y(t)	u(t)
1	0	1.197
2	0.239	-1.830
3	-0.486	-0.420
4	0.159	-0.5721
5	0.194	-0.287
6	0.0039	0.435
7	0.0067	-1.404
8	-0.315	0.193
9	0.196	-1.771
10	-0.452	0.701
11	0.366	-0.389
12	-0.261	-1.040
13	-0.077	-1.256
14	-0.212	0.966

Estimar os parâmetros  $b_0$  e  $b_1$  pelo método dos mínimos quadrados não-recursivo.

- 4) Seja o processo

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_0 u(t-1) + e(t)$$

onde  $e(t)$  é um ruído branco com média 0 (*zero*). Uma experimentação, onde  $0 \leq t \leq (N-1)$ , é realizada para a estimativação dos parâmetros  $a_1$  e  $b_0$ . Os seguintes dados foram calculados:

$$\sum y^2(t) = 30$$

$$\sum u^2(t) = 50$$

$$\sum y(t+1)y(t) = 1$$

$$\sum y(t)u(t) = 20$$

$$\sum y(t+1)u(t) = 36$$

Determinar pelo método dos mínimos quadrados não-recursivo as estimativas dos parâmetros  $a_1$  e  $b_0$ .

- 5) Admitir o processo discreto representado por

$$G_p(z) = \frac{0.5z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z^{-1})} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

- a) Obter a saída do processo  $y(t)$  para os seguintes sinais de entrada:

- 3) Considerar o processo discreto caracterizado pela equação

$$y(t) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1)$$

onde as seguintes medidas foram obtidas:

- b) Utilizando como modelo estimado função de transferência discreta de primeira ordem

$$G_p(z) = \frac{b_0 z^{-1}}{(1-a_1 z^{-1})}$$

determinar os parâmetros  $a_1$  e  $b_0$  pelo método dos mínimos quadrados (procedimento *off-line*) para as três entradas. Discutir a precisão dos resultados (admitir 20 medidas).

- 6) Seja o sistema representado pelo seguinte modelo de segunda ordem:

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t) + e(t)$$

onde

$$A(z^{-1}) = 1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}$$

$$B(z^{-1}) = 1 + 0.5z^{-1}$$

$$d = 1$$

e sendo  $e(t)$  um sinal ruído branco com média 0 (*zero*) e desvio padrão 0.01. Seja  $u(t)$  uma seqüência  $N(0, I)$  ou PRBS com amplitude  $\pm I$ .

- i) Simular e identificar os parâmetros do processo com o estimador dos *MQR*, para as seguintes condições:  $(na, nb) = (I, 0), (I, I), (2, 0), (2, I)$ ;

- ii) Plotar os parâmetros estimados em função do número de amostras ( $N = 100$ );

- iii) Analisar a variância e a função de covariância dos parâmetros estimados pelo erro de estimação, isto é,

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

- 7) Considerar um processo discreto de primeira ordem dado pela equação a diferenças

$$y(t) = a_1 y(t-1) + b_0 u(t-1) + e(t)$$

onde os valores verdadeiros dos parâmetros são  $a_1 = 0.5$ ,  $b_0 = I$  e a variância do ruído branco é 0.05. Avaliar a convergência dos parâmetros estimados sob as seguintes condições experimentais:

- i)  $u(t) = 0, 0$ ;  
 ii)  $u(t) = I, 0$ ;  
 iii)  $u(t)$  é um ruído branco com média 0 (*zero*) e variância  $I$  (*um*);  
 iv)  $u(t) = 0, Iy(t)$ ;

- v)  $u(t) = 0.1y(t) + r(t)$ , onde  $r(t)$  é um ruído branco com média 0 (*zero*) e variância  $I$  (*um*), não correlacionado com o ruído do processo  $e(t)$ ;

- vi)  $u(t) = 0.1y(t-1)$ ;

- vii)  $u(t) = 0.1\sin(y(t))$ .

O estimador dos mínimos quadrados recursivo deve ser inicializado com os seguintes parâmetros:  $P(0) = 10I_{2,2}$ ,  $a_1(0) = 0$ ,  $b_0(0) = I$ .

- 8) Considerar o sistema de primeira ordem caracterizado pela seguinte equação a diferenças:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t)$$

onde  $A(z^{-1}) = I - 0.8z^{-1}$ ,  $B(z^{-1}) = b_0$ ,  $C(z^{-1}) = I$ . Admitir para  $\{u(t)\}$  e  $\{e(t)\}$  seqüências ruído branco de média 0 (*zero*) e variância  $I$  e 0.01, respectivamente. O parâmetro  $b_0$  modifica-se de acordo com

$$\begin{array}{lll} b_0 = 2 & \text{para} & 0 \leq t \leq 20 \\ b_0 = 3 & \text{para} & 21 \leq t \leq 40 \\ & & 61 \leq t \leq 80 \end{array}; \quad \begin{array}{lll} 41 \leq t \leq 60 \\ 81 \leq t \leq 100 \end{array}$$

Identificar os parâmetros do sistema via método dos *MQR* e comparar o desempenho dos estimadores com

- i) Fator de esquecimento:  $\lambda = I$  e 0.9;

- ii) *Random walk*: onde os elementos da matriz  $Q(t)$  são  $q_{11} = q_{12} = q_{21} = 0$  e  $q_{22} = 0.05$ .

- 9) Admitir um processo discreto *AR* (*Auto-Regressive*) dado por

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + e(t)$$

onde os parâmetros são  $a_1 = -1.5$  e  $a_2 = 0.56$ . O ruído branco  $e(t)$  apresenta média 0 (*zero*) e variância  $I$  (*um*). Admitir  $a_1(0) = a_2(0) = 0$  e  $P(0) = 10I_{2,2}$

## Capítulo 6

para 1000 iterações. Comparar o desempenho do estimador dos *MQR*-padrão com o algoritmo da aproximação estocástica de modo que

- i)  $(\alpha, \beta) = (0.1, 1)$  e  $(0.01, 1)$  (sequência ganho com aprendizado seqüencial);
- ii)  $\gamma = 0.005$  e  $0.01$  (sequência ganho escalar);
- iii)  $y$  ajustado pelo vetor total de medidas.

- 10) Considerar o sistema discreto de segunda ordem caracterizado pela seguinte equação a diferenças:

$$y(t) - 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) = u(t-1) + 0.5u(t-2) + e(t) - e(t-1) + 0.2e(t-2)$$

onde  $u(t)$  é um sinal do tipo *PRBS* e  $S/R = 10$ . Comparar o desempenho dos estimadores da variável instrumental e da matriz estendida, onde

- i) Para o algoritmo da variável instrumental o modelo a ser estimado é

$$y(t) + \hat{a}_1 y(t-1) + \hat{a}_2 y(t-2) = \hat{b}_1 u(t-1) + \hat{b}_2 u(t-2)$$

A variável instrumental é selecionada por

$$z(t) = [-x(t-1) - x(t-2)u(t-1)u(t-2)]^T$$

$$x(t) = z^T(t)\hat{\theta}(t-1)$$

onde  $\theta(0) = 0$ ,  $P(0) = 1000I_{4 \times 4}$ ,  $\lambda = 0.99$  e  $N = 100, 500, 2000$  iterações. A razão para utilizar  $\theta(t-1)$  em lugar de  $\theta(t)$  é uma tentativa de melhorar a estabilidade do algoritmo;

- ii) Para o algoritmo da matriz estendida o modelo estimado tem a forma

$$y(t) + \hat{a}_1 y(t-1) + \hat{a}_2 y(t-2) = \hat{b}_1 u(t-1) + \hat{b}_2 u(t-2) + e(t) + \hat{c}_1 e(t-1) + \hat{c}_2 e(t-2)$$

onde  $\theta(0) = 0$ ,  $P(0) = 1000I_{6 \times 6}$ ,  $\lambda = 0.99$  e  $N = 100, 500, 2000$  iterações.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE IDENTIFICAÇÃO

---

*Fundamentos para identificação via relé. Estimação de modelos ponto a ponto. Estimação de modelos de primeira e segunda ordem. Aplicações via experimentação e simulação. Problemas.*

---

### 6.1 FUNDAMENTOS PARA IDENTIFICAÇÃO VIA RELÉ

Na atualidade, em função de uma grande parte dos controladores manufaturados de processos industriais apresentarem um sistema de sintonia denominado *auto-tuning*, é inevitável uma breve descrição da metodologia do relé no contexto da estimação de modelos matemáticos de ordem reduzida a partir da resposta em frequência (Hang *et al.*, 1993; Åström e Wittenmark, 1995; Almeida e Coelho, 2002).

Os experimentos com relé na malha de realimentação, com o propósito de identificação de processos, tornaram-se populares a partir do trabalho de Åström e Hägglund (1984). Este método foi utilizado para determinar o ganho crítico e a frequência crítica e, por consequência, automatizar o método de oscilação de projeto do controlador *PID* proposto por Ziegler e Nichols (1942). A abordagem baseia-se na modelagem da não-linearidade através de sua função descritiva e na interpretação em termos do diagrama de Nyquist para a obtenção de informação em frequência do processo. A identificação do processo é feita a partir da estimação em frequência da função de transferência do processo em malha aberta. A figura (6.1)

ilustra o elemento não-linear (relé) realimentando um sistema de controle para o propósito da identificação paramétrica.

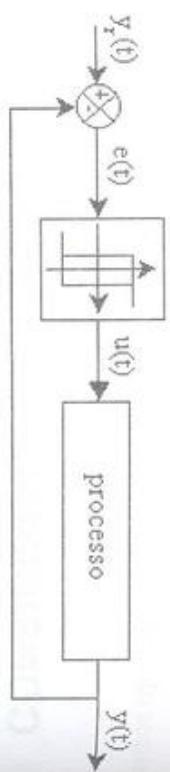


Figura 6.1 – Realimentação do processo através do relé.

Da saída do processo e da especificação da não-linearidade, determinam-se os parâmetros relevantes (amplitude e frequência de oscilação) necessários para a estimativa da função de transferência do processo em malha aberta  $G(j\omega)$ . Para a estimativa de  $G(j\omega)$ , utilizam-se dois tipos de relés: i) o relé sem histerese é utilizado para estimar a função de transferência na frequência de cruzamento, ou seja, na parte negativa do eixo real no plano  $G(j\omega)$ ; ii) o relé com histerese é empregado para estimar a função de transferência em diferentes freqüências. A seleção do relé é determinada em matemático e do método de sintonia do controlador *PID* a ser empregado.

O relé sem histerese, figura (6.2a), pode ser modelado no domínio do tempo por

$$\begin{array}{ll} \text{se } [e(t) > 0] & \text{então } u(t) = +d \\ \text{se } [e(t) < 0] & \text{então } u(t) = -d \end{array}$$

Adicionalmente, o relé com histerese, figura (6.2b), pode ser modelado no domínio do tempo por simples regras lógicas descritas no comportamento da histerese, isto é,

$$\begin{array}{ll} \text{se } [|e(t)| > \varepsilon \text{ & } e(t) > 0] & \text{então } u(t) = +d \\ \text{se } [|e(t)| > \varepsilon \text{ & } e(t) < 0] & \text{então } u(t) = -d \\ \text{se } [|e(t)| < \varepsilon \text{ & } u(t - 1) = +d] & \text{então } u(t) = +d \\ \text{se } [|e(t)| < \varepsilon \text{ & } u(t - 1) = -d] & \text{então } u(t) = -d \end{array}$$

onde  $d$  e  $\varepsilon$  são definidos conforme a figura (6.2b).

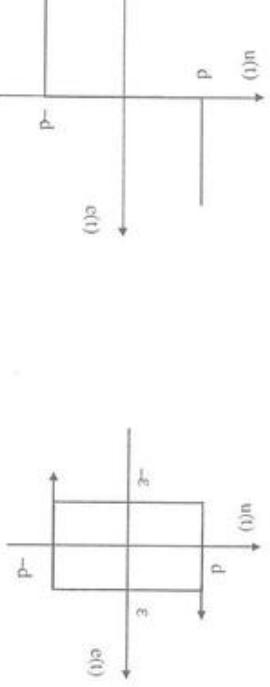


Figura 6.2 – (a) Relé sem histerese; (b) Relé com histerese.

Os sinais  $y(t)$  e  $u(t)$  são mostrados na figura (6.3). A saída do relé  $u(t)$ , variável de controle, corresponde a uma onda quadrada. Com os sinais de saída do relé, figuras (6.3a) e (6.3b), como entrada para o processo, e considerando-se que a resposta do processo em malha fechada seja dominada pelas componentes de baixa freqüência, a saída oscila de forma senoidal, como ilustram as figuras (6.3a) e (6.3b).

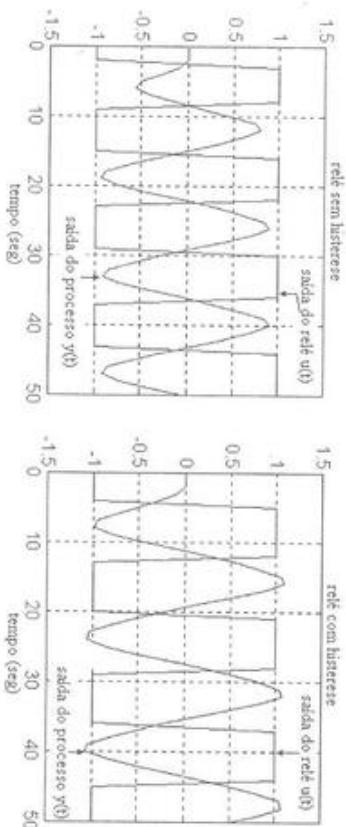


Figura 6.3 – Saída do relé  $u(t)$ , sinal quadrado; saída do processo  $y(t)$ , característica senoidal.

Observações:

Na prática, a histerese é implementada no relé, conforme a figura (6.1b), uma vez que, na presença de ruído e sem a histerese na malha, o relé pode chavear nos estados liga/desliga, isto é, apresentar um comportamento oscilatório randômico;

- Em aplicações práticas, a largura da histerese é selecionada com base no nível do ruído, por conveniência, duas vezes maior do que a amplitude do ruído;

- O método clássico da resposta em frequência de *ZieglerNichols* tem algumas vantagens. A técnica baseia-se em um simples experimento e procura-se identificar a frequência de oscilação (*ultimate frequency*) da saída do processo. Entretanto, é difícil automatizar ou executar este experimento de tal forma que a amplitude de oscilação mantenha-se sob controle. Adicionalmente, o funcionamento do processo próximo da instabilidade é perigoso, fazendo com que seja necessário interromper os fluxos normais de operação de uma planta industrial, o que nem sempre é exequível;
- Vários pontos sobre a curva de Nyquist podem ser determinados pela repetição da experimentação com diferentes relações entre  $d$  e  $\varepsilon$ . Adicionalmente, controla-se a amplitude do ciclo-limite em um nível desejado pela seleção apropriada da amplitude do relé.

## 6.2 ESTIMAÇÃO DE MODELOS PONTO A PONTO

A função descritiva ou função descritiva senoidal de um elemento não-linear é definida como a relação complexa entre a componente harmônica fundamental do sinal de saída e do sinal de entrada, isto é,

$$N = \frac{Y}{U} \angle \text{FASE}$$

onde  $N$  é a função descritiva,  $U$  é a amplitude da componente fundamental do sinal de entrada e  $Y$  é a amplitude da componente fundamental do sinal de saída (Ogata, 2002).

Considerando o relé sem histerese e com histerese, tem-se as seguintes equações relatando as funções descritivas:

$$N(a) = \frac{4d}{\pi a} ; \quad N(a) = \frac{4d}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2} - j \frac{4d\varepsilon}{\pi a^2}$$

A partir da modelagem do relé por função descritiva e da operação do sistema sob o controle do relé, pode-se determinar a função de transferência do processo por

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(a)} \Rightarrow G(j\omega) = -\frac{\pi a}{4d} ; \quad G(j\omega) = -\frac{\pi}{4d} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2} - j \frac{\pi \varepsilon}{4d} \quad (6.1)$$

onde  $a$  é a amplitude de oscilação do sinal na saída do processo e  $\omega$  é a frequência de oscilação medida.

Pela equação (6.1), pode-se estimar a função de transferência do processo na frequência de cruzamento utilizando-se o relé sem histerese. A equação (6.1) permite também estimar a função de transferência do processo em diferentes frequências utilizando-se um relé com histerese e ajustando-se diferentes valores para o parâmetro  $\varepsilon$ . As interseções, no *plano\_G(s)*, dos lugares geométricos do recíproco inverso da função descritiva do relé com o lugar geométrico de  $G(j\omega)$  estabelecem pontos de operação correspondentes às frequências da parte do diagrama de Nyquist situadas no terceiro quadrante do *plano\_G(s)*. Neste quadrante, estão situadas as frequências que, em geral, são de interesse para análise e projeto de sistemas de controle e que podem ser completamente definidas através de experimentos com o relé. Veja a figura (6.4).

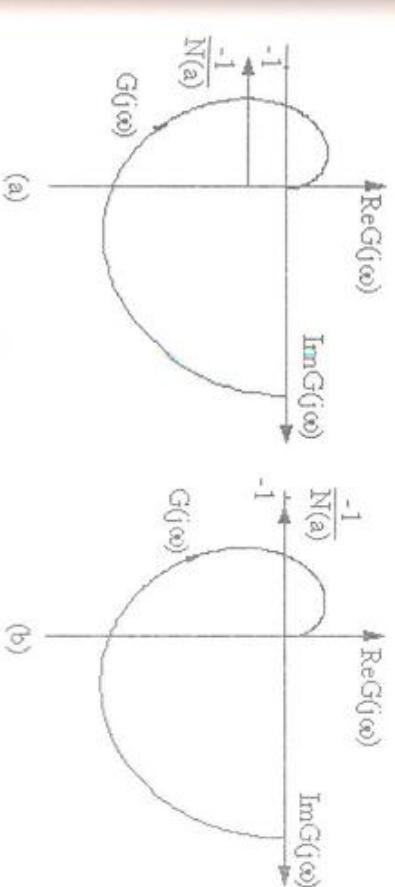


Figura 6.4 – Interseção dos lugares geométricos do recíproco inverso da função descritiva do relé com histerese (a) e sem histerese (b) com o lugar geométrico de  $G(j\omega)$ .

Para a estimativa do ponto de interseção da função de transferência com o eixo imaginário negativo, utiliza-se um integrador com o relé na malha de realimentação (sem histerese). Neste caso, a função de transferência é calculada por

$$G(j\omega) = -j \frac{T_a}{4d} \omega \quad (6.2)$$

A tabela (6.1) ilustra a programação em *Matlab* da técnica relé com histerese na modelagem ponto a ponto do processo de segunda ordem do exemplo (6.1).

Tabela 6.1 – Código em *Matlab* da técnica do relé.

```
% Modelagem matemática: partes real e imaginária
% Relé com histerese
% Planta de segunda ordem
clear all;
Tamostra=1;nptos=100;d=0.5;eps=0.0870;
for t=1:T,
    u(t)=-d;e(t)=0;y(t)=0;tempo(t)=t*Tamostra;
end;
for t=5:nptos, % Experimentação com o relé
    y(t)=1.436*y(t-1)-0.5134*y(t-2)+...
    0.04286*u(t-2)+0.03431*u(t-3);
    e(t)=-y(t);
    if ((abs(e(t))>eps) & (e(t)>0)) u(t)=+d; end;
    if ((abs(e(t))>eps) & (e(t)<0)) u(t)=-d; end;
    if ((abs(e(t))<eps) & (u(t-1)==+d)) u(t)=+d; end;
    if ((abs(e(t))<eps) & (u(t-1)==-d)) u(t)=-d; end;
    if (e(t)==+eps) u(t+1)=+d; end;
    if (e(t)==-eps) u(t+1)=-d; end;
    tempo(t)=t*Tamostra;
end;
ch=0;i=1;
for k=4:nptos, % Período
    s1=u(k);s2=u(k-1);
    if s1~=s2
        ch=ch+1;
        i=i+1;
    end
end
per=(nptos*4)/ch)*2*Tamostra;
omega=(2*pi)/(per);
arm=eps;
for t=1:nptos,
    if y(t)>=arm arm=y(t); end;
```

Identificar o processo em diferentes freqüências utilizando a técnica do relé onde  $d = 0.5$  e  $\varepsilon = 0.0307, 0.0474, 0.0870, 0.1632$ .

$ReG_p(j\omega)$	$ReG_p(j\omega)$ estimado	$ImG_p(j\omega)$	$\omega rad/seg$	$a rad/seg$ estimado
-0.2900	-0.2829	-0.0482	0.50	0.5135
-0.3019	-0.2917	-0.0745	0.48	0.4833
-0.3208	-0.3281	-0.1366	0.44	0.4229
-0.3282	-0.3343	-0.2563	0.38	0.3625

Note que os erros estimados da freqüência e da parte real mantêm-se em média, em torno de 4%. Portanto, a técnica de modelagem ponto a ponto torna-se atrativa para a estimativa de parâmetros em aplicações práticas.

## 6.2.1 ESTIMAÇÃO NÃO-RECURSIVA PELA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

O conhecimento da função de transferência de uma planta é necessário em diversas aplicações (previsão, controle, etc.). A seguir, apresenta-se um método não-iterativo para estimativa em freqüência de um modelo estável de segunda ordem com atraso de transporte com base nas partes real e imaginária do sistema, isto é, magnitude e fase (Wang *et al.*, 1997b).

```
end;
a=arm;
realG=(-pi*sqrt(a^2-eps^2))/(4*d); % Partes real e imaginária
imagG=(-pi*eps)/(4*d);
saída=[u;y];plot(tempo,saída);
```

Considere o seguinte modelo matemático da planta:

$$G_p(s) = \frac{e^{-1s}}{as^2 + bs + c}$$

que pode representar processos monotônicos ou oscilatórios. As equações de magnitude e fase são dadas por

$$|G_p(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

$$\arg[G_p(j\omega)] = -L\omega - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{b\omega}{(c - a\omega^2)}\right)$$

Se a resposta em frequência do processo  $G_p(j\omega)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$  está disponível *a priori*, por exemplo, calculada pela técnica da estimativa de modelos ponto a ponto, conforme apresentado na seção (6.2), então é possível reescrever a equação da magnitude na forma clássica do estimador dos mínimos quadrados não-recursivo, ou seja,

$$\bar{\Gamma} = \phi\theta$$

onde

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{|G_p(j\omega_1)|^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{|G_p(j\omega_M)|^2} \end{bmatrix}; \quad \phi = \begin{bmatrix} \omega_1^4 & \omega_1^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_M^4 & \omega_M^2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 \\ b^2 - 2ac \\ \vdots \\ c^2 \end{bmatrix}$$

e, assim, identificar os parâmetros do modelo  $a, b, c, L$ , isto é,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\theta_1} \\ \sqrt{\theta_2 + 2\sqrt{\theta_1\theta_3}} \\ \sqrt{\theta_2} \end{bmatrix}; \quad L\omega = -\arg[G_p(j\omega)] - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{b\omega}{(c - a\omega^2)}\right)$$

Observação:

- Aplicando-se o método de estimativa ao processo de segunda ordem do exemplo (6.1), onde  $d = 0,5$  e  $\varepsilon = 0,1931, 0,1632, 0,1355, 0,1101, 0,0870$ , obtém-se os seguintes valores paramétricos:  $a = 11,2562$ ,  $b = 7,7003$ ,  $c = 1,3542$ ,  $L = 2,3088$ . Logo, a técnica mostra-se atrativa para a modelagem de sistemas através do experimento via relé e pode ser aplicada na sintonia automática de controladores de processos.

### 6.3 ESTIMAÇÃO DE MODELOS DE PRIMEIRA E DE SEGUNDA ORDEM

Recentemente, o método de identificação através do relé vem sendo empregado para a estimativa de modelos matemáticos de baixa ordem com ou sem atraso de transporte para aplicações em processos industriais (Wang *et al.*, 1997a). Um dos principais objetivos é sem dúvida a utilização destes modelos em abordagens de projeto de controladores do tipo *PID*, Predictor de Smith, *IMC* (*Internal Model Control*), entre outros (Hang *et al.*, 1993; Wang *et al.*, 1995; Åström e Wittenmark, 1995).

Na prática, a grande maioria dos processos industriais pode ser modelada por funções de transferência de primeira ou de segunda ordem com atraso de transporte (Morari e Zafiro, 1989; Wang *et al.*, 1997a; Almeida, 2002). Considerando que o modelo estimado do processo está representado por

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-\theta_1 s}}{(\tau_1 s + 1)} \quad (6.3)$$

e o relé é implementado conforme a figura (6.5a), então expressões para o atraso de transporte ( $\theta_i$ ), ganho estático do processo ( $K$ ) e constante de tempo ( $\tau_i$ ) podem ser obtidas, conforme apresentado em Wang *et al.* (1997a).

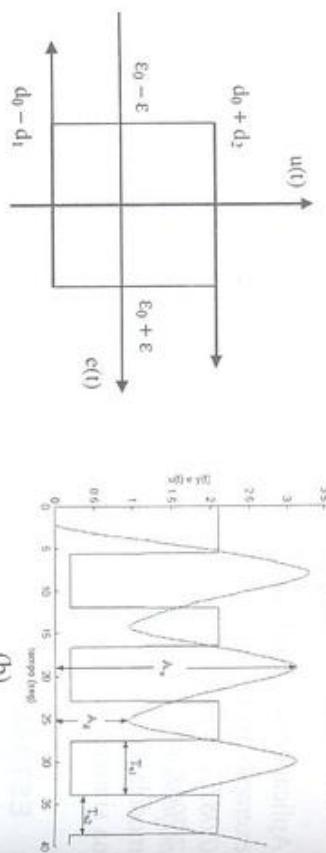


Figura 6.5 – (a) Relé não-simétrico; (b) Saída do relé (onda quadrada) e saída do processo.

Seja o ganho estático do processo calculado por

$$K = \frac{\int_0^{T_{u1}+T_{u2}} y(t) dt}{\int_0^{T_{u1}+T_{u2}} u(t) dt} = G_p(0) \quad (6.4)$$

onde  $T_{u1}$  e  $T_{u2}$  estão definidos na figura (6.5b). Assim, a constante de tempo pode ser obtida por

$$\tau_{u1} = \frac{T_{u1}}{\ln \left[ \frac{(d_1 + d_2)Ke^{\theta} - (d_1 - d_0)K - \varepsilon_0 + \varepsilon}{(d_0 + d_2)K - (\varepsilon_0 + \varepsilon)} \right]} \quad (6.5)$$

onde  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_0$  são definidos na figura (6.5a) e o atraso de transporte resultante é

$$\theta_1 = \ln \left[ \frac{(d_1 - d_0)K + \varepsilon_0 - \varepsilon}{A_d + (d_1 - d_0)K} \right] \quad (6.6)$$

A figura (6.6) e a tabela (6.2) ilustram a programação em Matlab/Simulink da técnica do relé com histerese na estimativa de modelos de primeira ordem aplicados a um processo de segunda ordem.

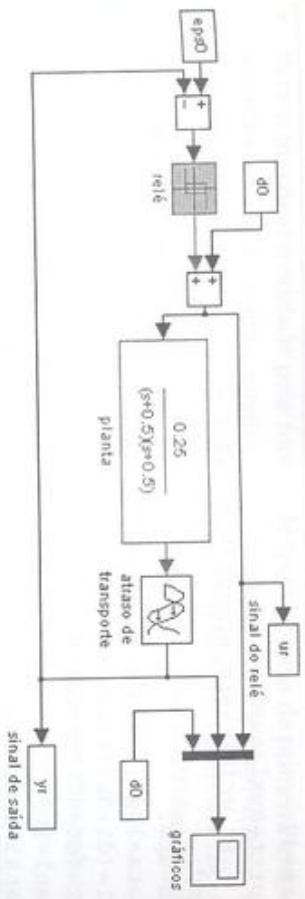


Figura 6.6 – Diagrama em Simulink da modelagem via relé.

Tabela 6.2 – Código em Matlab: relé não-simétrico.

```
% Método do Relé para identificação de um modelo
% de primeira ordem com atraso de transporte, isto é,
% Gp(s)=K*exp(-teta1*s)/(taul*s+1)
%
% Os vetores ur e yr são obtidos através do Simulink
d0=2;d1=0.5;d2=0.5;eps0=2;eps=0.3;nptos=80;Tamostra=0.1;
nptos1=nptos/Tamostra;kont=0;
for t=2:nptos1,
    if (ur(t) ~= ur(t-1))
        kont=kont+1;ch(kont)=t;
    end;
end;
rul=(ch(6)-ch(5))*Tamostra;Tu2=(ch(5)-ch(4))*Tamostra;
aux1=ch(3);aux2=ch(5);i=0;
for t=aux1:aux2,
    i=i+1;
    yi(i)=yr(t);ui(i)=ur(t);
    ti(i)=i*Tamostra;
end;
a1=0.5*((0 yi)+[yi 0]).*([ti 0]-[0 ti]);
a1=sum(a1(1,2:length(yi)));
a2=0.5*([0 ui]+[ui 0]).*([ti 0]-[0 ti]);
a2=sum(a2(1,2:length(ui)));
K=a1/a2;
% Ganho
arm=d0;
for t=aux1:aux2,
    if yr(t)>=arm arm=yr(t); end;
end;
Au=arm;
% Pico positivo
```

```

arm=d0;
for t=aux1:aux2,
    if yr(t)<=arm arm=yr(t); end;
end;
Ad=arm;
teta=log(((d1-d0)*K-eps+eps0)/((d1-d0)*K+Ad));
x1=(d1+d2)*K*exp(teta)-(d1-d0)*K+eps-eps0;
x2=(d0+d2)*K-eps-eps0;
taul=Tu1*log(x1/x2)                                % pico negativo e Atraso
total=taul*teta                                     % Cte. de tempo
                                                    % Atraso de transporte

```

Outro método disponível na literatura de controle de processos, para estimação do modelo matemático conforme equação (6.3), baseia-se nas seguintes equações (Hang *et al.*, 1993):

$$\tau_1 = \frac{T_u}{2\pi} \sqrt{(K_u K)^2 - 1} \quad (6.7)$$

$$\theta_1 = \frac{T_u}{2\pi} \left( \pi - \arctan \frac{2\pi}{T_u} \tau_1 \right) \quad (6.8)$$

Observações:

- O ganho estático  $K$  pode ser estimado a partir das medidas de entrada e saída em regime permanente para uma mudança degrau na entrada da planta;

- Se o relé sem histerese é empregado, o ganho final  $K_u$  é calculado por

$$K_u = \frac{4d}{\pi a}$$

enquanto que, se o relé é implementado com histerese, então utiliza-se

$$G_p(s) = \frac{K e^{-\theta_2 s}}{(\tau_2 s + 1)^2} \quad (6.9)$$

A constante de tempo  $\tau_2$  e o atraso de transporte  $\theta_2$  estão relacionados com o ganho estático  $K$ , ganho final  $K_u$  e período final  $T_u$  pelas seguintes equações:

- Os parâmetros  $K_u$  e  $T_u = T_{u1} + T_{u2}$  (período final) são obtidos do experimento com o relé, e  $\tau_2$  e  $\theta_2$  podem ser calculados pelas equações (6.7) e (6.8), respectivamente;

$$\tau_2 = \frac{T_u}{2\pi} \sqrt{K_u K - 1} \quad (6.10)$$

- Para o processo modelado pela função de transferência de primeira ordem, equação (6.3), as regras empíricas de sintonia de Ziegler/Nichols ou Cohen/Coon podem ser aplicadas na parametrização do controle PID. As tabelas (6.3) e (6.4) ilustram a sintonia (*tuning*) do controlador PID (Brosilow e Joseph, 2002; Almeida, 2002).

Tabela 6.3 – Parâmetros *PID* baseados na sintonia de Ziegler/Nichols.

Controlador	$K_c$	$T_i$	$T_d$
<i>P</i>	$\frac{1}{K} \frac{\tau_1}{\theta_1} \left( 1 + \frac{\theta_1}{3\tau_1} \right)$	$\infty$	0
<i>PI</i>	$(0.9/K)(\tau_1/\theta_1)$	$\theta_1/0.3$	0
<i>PID</i>	$(1.2/K)(\tau_1/\theta_1)$	$2\theta_1$	$\theta_1/2$

Tabela 6.4 – Parâmetros *PID* baseados na sintonia de Cohen/Coon.

Controlador	$K_c$	$T_i$	$T_d$
<i>P</i>	$\frac{1}{K} \frac{\tau_1}{\theta_1} \left( 1 + \frac{\theta_1}{3\tau_1} \right)$	$\infty$	0
<i>PI</i>	$\frac{1}{K} \frac{\tau_1}{\theta_1} \left( \frac{9}{10} + \frac{\theta_1}{12\tau_1} \right)$	$\theta_1 \frac{30 + 3(\theta_1/\tau_1)}{9 + 20(\theta_1/\tau_1)}$	0
<i>PID</i>	$\frac{1}{K} \frac{\tau_1}{\theta_1} \left( \frac{4}{3} + \frac{\theta_1}{4\tau_1} \right)$	$\theta_1 \frac{32 + 6(\theta_1/\tau_1)}{13 + 8(\theta_1/\tau_1)}$	$\theta_1 \frac{4}{11 + 2(\theta_1/\tau_1)}$

$$\theta_2 = \frac{T_u}{2\pi} \left( \pi - 2 \arctan \frac{2\pi}{T_u} \tau_2 \right) \quad (6.11)$$

onde  $K_u$  e  $T_u$  são obtidos do experimento com o relé, e  $\tau_2$  e  $\theta_2$  podem ser calculados a partir das equações (6.10) e (6.11), respectivamente (Hang *et al.*, 1993).

Observações:

- A aplicação dos modelos de planta estimados com ordem reduzida (primeira e segunda ordens) não se limita ao projeto de controladores *PID*, podendo também ser utilizados na síntese de controladores clássicos ou avançados;
- Os modelos das equações (6.3) e (6.9), e as correspondentes fórmulas de sintonias, são comuns em processos industriais adaptativos (*auto-tuning*, *self-tuning*);
- A técnica de realimentação do relé pode ser utilizada para substituir o procedimento manual (tentativa e erro) na sintonia de controladores *PID*. A figura (6.7) ilustra o princípio de implementação da técnica adaptativa *auto-tuning*. Quando a malha de controle está no modo de sintonia, isto é, a saída está no estado de oscilação constante, os parâmetros *PID* são determinados e armazenados automaticamente. Se as características do processo mudam, então o sistema de controle *PID* pode ser ressintonizado.

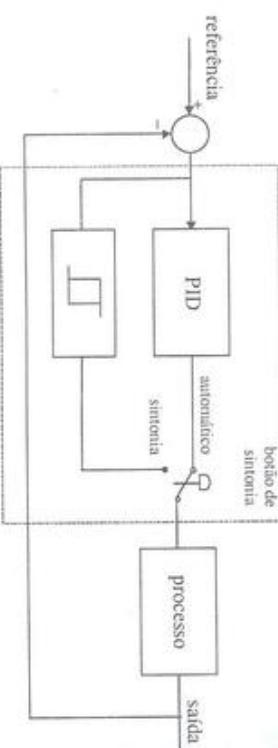


Figura 6.7 – Controlador adaptativo do tipo *auto-tuning*.

## 6.4 APLICAÇÕES VIA EXPERIMENTAÇÃO E SIMULAÇÃO

*Exemplo 6.2* – Um exemplo da aplicação prática do método do relé em um processo denominado *fan-and-plate*, desenvolvido no Laboratório de Controle

de Processos do Departamento de Automação e Sistemas (DAS/UFSC), está ilustrado na figura (6.8). Informações adicionais estão disponíveis em <http://lcp.das.ufsc.br>. A seguir, faz-se uma breve descrição do processo e, em seguida, o método do relé é utilizado na etapa de identificação.

Um motor DC acelera o jato de ar através de um túnel de característica asfunilada. Na extremidade do túnel, encontra-se posicionada uma placa retangular. O objetivo de controle em malha fechada é regular a deflexão angular da placa. O tamanho do túnel e as entradas laterais de ar podem ser regulados, provocando perturbações de carga. Perturbações elétricas também podem ser adicionadas ao sistema. O protótipo é caracterizado por fase não-mínima, atraso de transporte e fluxo turbulento e ressonante. Assim, pode-se validar técnicas de identificação sob difíceis condições de operação em um sistema complexo.

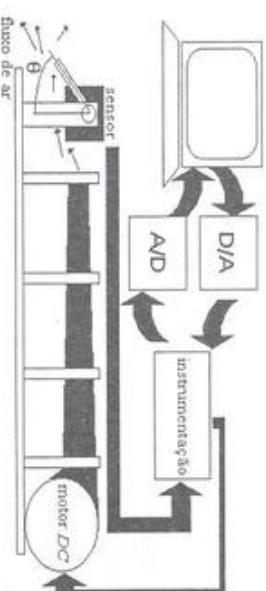


Figura 6.8 – Diagrama esquemático do processo *fan-and-plate*.

Para o processo *fan-and-plate*, o resultado do experimento com o relé e o diagrama de Nyquist referente ao modelo de primeira ordem com atraso de transporte são apresentados na figura (6.9). Neste experimento, utiliza-se um relé com histerese segundo as seguintes especificações:  $d_1 = d_2 = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 0$  e  $\varepsilon = 0.3$ . Um período de amostragem de 0.2 segundo é utilizado na aquisição das medidas e o processo é fixado no meio da faixa de operação ( $d_0 = 2.5$  volts).

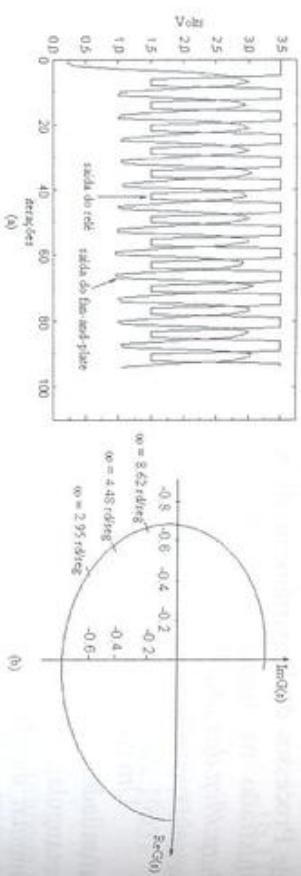


Figura 6.9 – Aplicação do relé no processo *fan-and-plate*.

Como resultado da aplicação das equações (6.7) e (6.8), o modelo matemático estimado de primeira ordem com atraso de transporte para o processo *fan-and-plate* é

$$\hat{G}_p(s) = \frac{0.822}{0.12s + 1} e^{-0.21s}$$

Embora um modelo estimado de baixa ordem tenha sido obtido para o processo *fan-and-plate*, ele não representa adequadamente o processo em todos os níveis de funcionamento. O modelo matemático de primeira ordem representa, apenas, uma aproximação linear local do modelo do processo na faixa de acionamento do processo durante o procedimento de identificação.

*Exemplo 6.3* – Como exemplo de simulação para avaliação do método do relé (não-simétrico com histerese), através da modelagem de baixa ordem, considere um processo de segunda ordem dado por

$$G_p(s) = \frac{1}{(2s+1)^2} e^{-2s}$$

e os parâmetros do relé ajustados como:  $\varepsilon_0 = 2$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ,  $d_0 = 2$ ,  $d_l = 0.5$  e  $d_r = 0.5$ . A partir das equações (6.4), (6.5) e (6.6), o modelo estimado de primeira ordem para o processo é

$$\hat{G}_p(s) = \frac{1}{3.4094s + 1} e^{-2.732s}$$

A figura (6.10a) apresenta o processo sob o controle do relé, enquanto que a figura (6.10b) apresenta as curvas de Nyquist real e estimada para o processo. Observa-se pela figura (6.10b) que, do ponto de vista do diagrama de Nyquist, resultados satisfatórios são obtidos nas baixas, médias e altas freqüências, resultando, portanto, uma estimativa adequada.

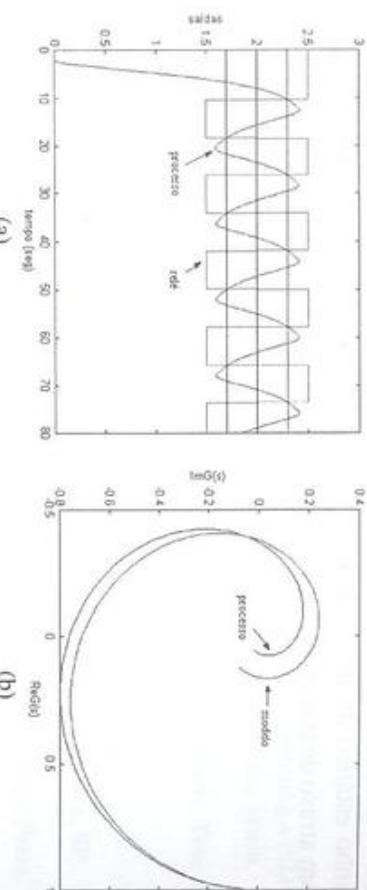


Figura 6.10 – (a) Experimento com o relé; (b) Curvas de Nyquist real e estimada.

## 6.5 PROBLEMAS

- I) Considerar as seguintes condições de operação e os sistemas de controle não-lineares:

- i) Relé sem histerese com amplitude  $d = 1$  e a planta de terceira ordem caracterizada por

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s(s+1)(s+2)},$$

- ii) Relé com histerese de parâmetros  $d = 5$ ,  $\varepsilon = 1$  e a planta de primeira ordem representada por

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3e^{-0.1s}}{(2s+1)}.$$

## BIBLIOGRAFIA

Para cada sistema, determinar a amplitude e a freqüência do ciclo-limite da saída. Verificar os resultados com o ambiente de simulação *Matlab/Simulink*.

2) Obter as constantes  $K_u$  e  $T_u$  a partir da figura (6.3). Comparar e comentar os valores obtidos.

3) Utilizar os valores de  $K_u$  e  $T_u$  encontrados da figura (6.3)e, considerando o ganho estático do processo  $K = I$ , determinar o modelo de primeira ordem com atraso de transporte da equação (6.3).

- Aguirre, L.A. (2000). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*, Editora da UFMG.
- Almeida, O.M. (2002). *Controle PID Auto-Ajustável, Inteligente e Preditivo*, Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis, SC.
- Almeida, O.M. e A.A.R. Coelho (2002). A Fuzzy Logic Method for Autotuning a PID Controller: SISO and MIMO Systems, *15<sup>th</sup> IFAC World Congress*, Barcelona, Spain.
- Amaral, W.C. (1980). *Identificação Recursiva de Sistemas Multivariáveis*, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, SP.
- Arruda, L.V.R. (1988). *Um Supervisor baseado em Conhecimento para Modelagem de Processos*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, SP.
- Åström, K.J. (1970). *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press, NY.
- Åström, K.J. e B. Wittenmark (1990). *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Åström, K.J. e B. Wittenmark (1995). *Adaptive Control*, Addison-Wesley, Inc.
- Åström, K.J. e T. Hägglund (1984). Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins, *Automatica*, v.20, p.645-651.
- Åström, K.J. e T. Hägglund (1995). *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, Instrument Society of America.
- Barreiros, J.A.L. (1989). *A Pole Shifting Self-Tuning Power System Stabilizer*, Dissertação de Mestrado, UMIST, Manchester, Inglaterra.
- Bierman, G.J. (1977). *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*, Academic Press, NY.
- Brosilow, C. e B. Joseph (2002). *Techniques of Model-Based Control*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

- Clarke, D.W. e P.J. Gawthrop (1975). Self-Tuning Controller, *IEE Proc.*, v.112, p.929-934.
- Clarke, D.W.; C. Mohtadi e P.S. Tuffs (1987). Generalized Predictive Control. Part 1: The Basic Algorithm. Part 2: Extensions and Interpretation, *Automatica*, v.23, p.137-148, 149-160.
- Coelho, A.A.R. e L.V.R. Arruda (1988). Implementação do Controlador Auto-Ajustável com Detecção de Ruptura do Modelo, *3º Congresso Nacional de Automação Industrial*, São Paulo, SP, p.308-313.
- Coelho, L.S.; H. Simas e A.A.R. Coelho (1999). Design Issues and Laboratory Experiments in a Self-Tuning Control Teaching, *14º IFAC World Congress*, Beijing, China, v.M, p.217-222.
- Coelho, L.S.; O.M. Almeida; H. Simas e A.A.R. Coelho (1998). Intelligent and Self-Tuning PID Controllers: Methods and Application, *XII Congresso Brasileiro de Automática*, v.1, p.375-380.
- Dorf, R.C. e R.H. Bishop (1995). *Modern Control Systems*, Addison Wesley, Inc.
- Faleiros, A.C. e T. Yoneyama (2002). *Teoria Matemática de Sistemas*, Editora Arte & Ciência.
- Gessing, R. (1996). Measurements and Estimation in Adaptive Control Systems, *13º IFAC World Congress*, San Francisco, USA, p.103-108.
- Goodwin, G.C. e R.L. Payne (1977). *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*, Academic Press, NY.
- Haber, R. e H. Unbehauen (1990). Structure Identification of Nonlinear Dynamic Systems – A Survey on Input/Output Approaches, *Automatica*, v.26, p.651-677.
- Hägglund, T. e K.I. Åström (2000). Supervision of Adaptive Control Algorithms, *Automatica*, v.36, p.1171-1180.
- Hang, C.C. e D. Chin (1991). Reduced Order Process Modeling in Self-Tuning Control, *Automatica*, v.27, p.529-534.
- Hang, C.C.; T.H. Lee e W.K. Ho (1993). *Adaptive Control*, Instrument Society of America.
- Isermann, R. (1980). Practical Aspects of Process Identification, *Automatica*, v.16, p.575-587.
- Isermann, R. e K.-H. Lachmann (1985). Parameter Adaptive Control with Configuration Aids and Supervision Functions, *Automatica*, v.21, p.625-638.
- Jacquot, R.G. (1995). *Modern Digital Control Systems*, Marcel Dekker, Inc.
- Johansson, R. (1993). *System Modeling and Identification*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Levine, W.S. (1996). *The Control Handbook*, IEEE Press and CRC Press.
- Ljung, L. (1996). Development of System Identification, *13º IFAC World Congress*, San Francisco, USA, p.141-146.
- Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Ljung, L. e T. Glad (1994). *Modeling of Dynamic Systems*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Ljung, L. e T. Söderström (1983). *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press.
- Malik, O.P.; G.S. Hope e S.J. Cheng (1991). Some Issues on the Practical Use of Recursive Least Squares Identification in Self-Tuning Control, *International Journal of Control*, v.53, p.1021-1033.
- Marchi, P.A.; L.S. Coelho e A.A.R. Coelho (1999). Comparative Study of Parametric and Structural Methodologies in Identification of Experimental Nonlinear Process, *IEEE Int. Conf. on Control Applications*, Kohala Coast, Hawaii, p.1062-1067.
- Mendel, J.M. (1973). *Discrete Techniques of Parameter Estimation: The Equation Error Formulation*, Marcel Dekker, Inc.
- Mollenkamp, R.A. (1988). *Controle Automático de Processos*, EBRAS Editora Brasileira.
- Moraes, C.A.S. (2004). *Modelagem, Controle e Minimização do Consumo de Energia de uma Unidade de Fracionamento de Náfta*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, SP.

- Morari, M. e E. Zafirou (1989). *Robust Process Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Ogata, K. (2002). *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Palmor, Z.J. e M. Blau (1994). An Auto-Tuner for Smith Real-Time Compensator, *International Journal of Control*, v.60, p.117-135.
- Rivera, D.E. e M.E. Flores (2000). Beyond Step Testing and Process Reaction Curves: Introducing Meaningful System Identification Concepts in the Undergraduate Chemical Engineering Curriculum, *Symposium on System Identification*, Santa Barbara, CA.
- Roffel, B.; P.J. Vermeer e P.A. Chin (1989). *Simulation and Implementation of Self-Tuning Controllers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Sakai, C.Y. (1999). *Identificação de Sistemas Multivariáveis do Tipo SIMO pelo Método dos Mínimos Quadrados*, Dissertação de Mestrado, UFPa, Belém, PA.
- Salgado, T.; G. Goodwin e R. Middleton (1988). Modified Least Squares Algorithm Incorporating Experimental Resetting and Forgetting, *International Journal of Control*, v.47, p.477-491.
- Seborg, D.E.; T.F. Edgar e S.L. Shah (1986). Adaptive Control Strategies for Process Control: A Survey, *AIChE Journal*, v.32, p.881-913.
- Seborg, D.E.; T.F. Edgar e D.A. Mellichamp (1989). *Process Dynamics and Control*, John Wiley & Sons.
- Shah, S.L. e W.R. Cluett (1991). Recursive Least Squares Based Estimation Schemes for Self-Tuning Control, *The Canadian Journal of Chemical Eng.*, v.69, p.89-96.
- Sinha, N.K. e B. Kuszta (1983). *Modeling and Identification of Dynamic Systems*, Van Nostrand Reinhold Company Inc.
- Söderström, T. e P. Stoica (1983). *Instrumental Variable Methods for System Identification*, Springer-Verlag, NY, Lectures Notes in Control and Information Sciences.
- Söderström, T.; P. Stoica e E. Trulsson (1987). Instrumental Variable Methods for Closed-Loop Systems, *Proc. 10<sup>th</sup> IFAC World Congress*, Munich, Germany, v.10, p.364-369.
- Sripada, N.R. e D.G. Fisher (1987). Improved Least Squares Identification, *International Journal for Control*, v.46, p.1889-1913.
- Wang, Q.G.; C.C. Hang e B. Zou (1997a). Low-Order Modeling from Relay Feedback, *Ind. Eng. Chem. Res.*, v.36, p.375-381.
- Wang, Q.G.; C.C. Hang e Q. Bi (1997b). Process Frequency Response Estimation from Relay Feedback, *Control Eng. Practice*, v.5, p.1293-1302.
- Wang, Q.G.; T.H. Lee e K.K. Tan (1995). Automatic Tuning of Finite Spectrum Assignment Controllers for Relay Systems, *Automatica*, v.31, p.477-482.
- Wellstead, P.E. e M.B. Zarrop (1991). *Self-Tuning Systems: Control and Signal Processing*, John Wiley & Sons.
- Wittenmark, B.W. e K.J. Åström (1984). Practical Issues in the Implementation of Self-Tuning, *Automatica*, v.20, p.595-605.
- Young, P.C. (1970). An Instrumental Variable Method for Real-Time Identification of a Noisy Process, *Automatica*, v.6, p.271-287.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, v.8, p.338-353.
- Ziegler, J.G. e N.B. Nichols (1942). Optimum Settings for Automatic Controllers, *Transactions ASME*, v.64, p.759-768.

A interpretação de imagens aéreas  
Algoritmos numéricos – sequências e paralelos

Análise sensorial de alimentos

Anomalias laringeas congênitas

Assistência social: do discurso do Estado à prática do Serviço Social

Avaliação nutricional de coletividades

AutoCAD 2000 – guia prático para desenhos em 2D

AutoCAD R14 – guia prático para desenhos em 2D

AutoCAD R14 – guia prático para desenhos em 3D

Cálculo 1

Cálculo A

Cálculo C

Cálculo de indutância e de força em circuitos elétricos

Cálculo e Álgebra Linear com Derive

Câncer – o que você precisa saber

Centro cirúrgico: aspectos fundamentais para Enfermagem

Classificação Decimal Universal – CDU

Construindo em alvenaria estrutural

Desenho geométrico

Diagnóstico do meio líquido de bacias hidrográficas

Elementos básicos de fotogrametria e sua utilização prática

Eletromagnetismo e cálculo de campos

Eletrotécnica básica: um enfoque voltado à informática

Engenharia de protocolos com LOTOS/ISO

Estatística aplicada às Ciências Sociais

Ferramentas de corte I

Ferramentas de corte II

Filtros seletores de sinais

Fundamentos de Cartografia

Fundamentos de sistemas hidráulicos

Geracão de vapor

Gramática básica do Latim

Influência alicantina no Português do Brasil

Inteligência Artificial

Inteligência Artificial: ferramentas e teorias

Introdução à Engenharia

Introdução à Física Nuclear e de Partículas Elementares

Introdução à Matemática

Introdução à Química Inorgânica Experimental

Introdução à Teoria dos Grafos

Introdução à Topologia Geral

Introdução ao Laboratório de Física

Le Français Partie: pratique de la prononciation du Français

Macroescultura dental

Manual básico de Desenho Técnico

Matemática – 100 exercícios de grupos

Matemática Financeira através da HP-12C

Maple V

Monitoramento global integrado de propriedades rurais

Natação: ensine a nadar

Noções básicas de Geometria Descritiva

O papel da escola na construção de uma sociedade democrática

Oleos e gorduras vegetais – processamento e análise

Promenades – textes et exercices pour la classe de Français

Química Básica – teoria e experimentos

Redação

Redação oficial

Redes de Petri

Taguchi e a melhoria da qualidade: uma releitura crítica

Teaching in a clever way – tarefas comunicativas para professores de Língua Inglesa do 1º grau

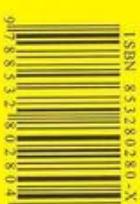
Tecnologia de grupo e organização da manufatura

Teoria fundamental do motor de indução

Topografia contemporânea – Planimetria

Transmissão de energia elétrica

Ventilação industrial



ISBN 853780280-X

9788537802804