APÊNDICE

B Expansão em frações parciais

Antes de apresentarmos a abordagem do MATLAB para a expansão em frações parciais das funções de transferência, vamos discutir o método manual para essa expansão.

Expansão em frações parciais quando $F(s)$ envolve somente polos distintos. Consideremos $F(s)$ escrito na forma fatorada

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}, \quad \text{para } m < n$$

onde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e $z_1, z_2, \ldots, z_m$ podem ser quantidades reais ou complexas, mas para cada complexo p_i ou z_j existe o correspondente complexo conjugado de p_i ou z_j, respectivamente. Se $F(s)$ possuir somente polos distintos, então ela poderá ser expandida em uma soma de frações parciais simples, como está indicado a seguir:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n} \tag{B.1}$$

onde a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) são constantes. O coeficiente a_k é chamado *resíduo* do polo em $s = -p_k$. O valor de a_k pode ser encontrado ao se multiplicar ambos os lados da Equação B.1 por $(s + p_k)$ e ao fazer $s = -p_k$, o que resulta em:

$$\begin{aligned}\left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k} &= \left[\frac{a_1}{s+p_1}(s+p_k) + \frac{a_2}{s+p_2}(s+p_k)\right.\\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_k}{s+p_k}(s+p_k) + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}(s+p_k)\right]_{s=-p_k}\\ &= a_k\end{aligned}$$

Vemos que todos os termos expandidos são eliminados, com exceção de a_k. Assim, o resíduo a_k é determinado por:

$$a_k = \left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}$$

Note que, como $f(t)$ é uma função real de tempo, se p_1 e p_2 forem complexos conjugados, então os resíduos a_1 e a_2 também serão complexos conjugados. Somente um dos complexos conjugados, a_1 ou a_2, deve ser calculado, porque o outro é conhecido automaticamente.

Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

$f(t)$ é obtido como:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Exemplo B.1 Determine a transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

A expansão em frações parciais de $F(s)$ é:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

onde a_1 e a_2 são determinadas como

$$a_1 = \left[(s+1)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-1} = \left[\frac{s+3}{s+2}\right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[(s+2)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-2} = \left[\frac{s+3}{s+2}\right]_{s=-2} = -1$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right] \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo B.2 Obtenha a transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$$

Nesse caso, como o grau do polinômio do numerador é maior que o do polinômio do denominador, devemos dividir o numerador pelo denominador:

$$G(s) = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Observe que a transformada de Laplace da função impulso unitário $\delta(t)$ é 1 e que a transformada de Laplace de $d\delta(t)/dt$ é s. O terceiro termo do lado direito da última equação é $F(s)$ no Exemplo B.1. Assim, a transformada inversa de Laplace de $G(s)$ é dada por:

$$g(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad \text{para } t \geq 0-$$

Exemplo B.3 Encontre a transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$$

Observe que o polinômio do denominador pode ser fatorado da seguinte maneira:

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + j2)(s + 1 - j2)$$

Se a função $F(s)$ incluir um par de polos complexos conjugados, não é conveniente expandir $F(s)$ do modo usual em frações parciais, mas fazer a expansão na soma de uma função senoidal amortecida e uma função cossenoidal amortecida.

Observando-se que $s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 2^2$ e tendo como referência a transformada de Laplace de $e^{-\alpha t}$ sen ωt e $e^{-\alpha t}$ cos ωt, podemos reescrever da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\omega t] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cos\omega t] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

a função $F(s)$ pode ser escrita como a função senoidal amortecida e a função cossenoidal amortecida

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s+12}{s^2+2s+5} = \frac{10+2(s+1)}{(s+1)^2+2^2} \\ &= 5\frac{2}{(s+1)^2+2^2} + 2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} \end{aligned}$$

Segue-se que:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] \\ &= 5e^{-1}\,\mathrm{sen}\,2t + 2e^{-1}\cos 2t, \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

Expansão em frações parciais quando $F(s)$ inclui polos múltiplos. Em vez de discutirmos um caso genérico, utilizaremos um exemplo para mostrar como obter a expansão em frações parciais de $F(s)$.

Consideremos a seguinte $F(s)$:

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

A expansão em frações parciais dessa $F(s)$ envolve três termos,

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1}{s+1} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{(s+1)^3}$$

onde b_3, b_2 e b_1 são determinados a seguir. Por meio da multiplicação de ambos os lados dessa última equação por $(s+1)^3$, teremos:

$$(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)} = b_1(s+1)^2 + b_2(s+1) + b_3 \tag{B.2}$$

Se $s = -1$, a Equação B.2 dará:

$$\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_3$$

Além disso, a diferenciação de ambos os lados da Equação B.2 referente a s resulta em:

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right] = b_2 + 2b_1(s+1) \tag{B.3}$$

Se definirmos $s = -1$ na Equação B.3, então

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_2$$

Pela diferenciação de ambos os lados da Equação B.3 em relação a s, o resultado é:

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right] = 2b_1$$

Pela análise precedente, pode-se constatar que os valores de b_3, b_2 e b_1 são determinados sistematicamente como:

$$b_3 = \left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1}$$

$$= (s^2 + 2s + 3)_{s=-1}$$

$$= 2$$

$$b_2 = \left\{\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-1}$$

$$= \left[\frac{d}{ds}(s^2 + 2s + 3)\right]_{s=-1}$$

$$= (2s + 2)_{s=-1}$$

$$= 0$$

$$b_1 = \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}(s^2 + 2s + 3)\right]_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2}(2) = 1$$

Desse modo, obteremos:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0}{(s+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right]$$

$$= e^{-t} + 0 + t^2 e^{-t}$$

$$= (1 + t^2)e^{-t}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Comentários. Para as funções de grande complexidade, com denominadores que envolvem polinômios de ordem elevada, a expansão em frações parciais pode consumir muito tempo. Nesses casos, o uso do MATLAB é recomendado.

Expansão em frações parciais com o MATLAB. O MATLAB tem um comando para obter a expansão em frações parciais de $B(s)/A(s)$. Considere a seguinte função $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

onde alguns dos a_i e b_j podem ser nulos. No MATLAB, os vetores linha num e den são formados pelos coeficientes do numerador e do denominador da função de transferência. Ou seja,

```
num = [b0 b1 ... bn]
den = [1 a1 ... an]
```

O comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

determina os resíduos (r), os polos (p) e os termos diretos (k) da expansão em frações parciais da relação entre dois polinômios $B(s)$ e $A(s)$.

A expansão em frações parciais de $B(s)/A(s)$ é dada por:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s - p(1)} + \frac{r(2)}{s - p(2)} + \cdots + \frac{r(n)}{s - p(n)} + k(s) \tag{B.4}$$

Comparando as equações B.1 e B.4, notamos que $p(1) = -p_1, p(2) = -p_2, \ldots, p(n) = -p_n$; $r(1) = a_1, r(2) = a_2, \ldots, r(n) = a_n$. [$k(s)$ é um termo direto.]

Exemplo B.4 Considere a seguinte função de transferência:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Para essa função,

```
num = [2 5 3 6]
den = [1 6 11 6]
```

O comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

apresenta o seguinte resultado:

```
[r,p,k] = residue(num,den)
r =
    -6.0000
    -4.0000
    3.0000
p =
    -3.0000
    -2.0000
    -1.0000
k =
    2
```

(Note que os resíduos retornam na coluna vetor r, o lugar dos polos, na coluna vetor p, e o termo direto, na linha vetor k.) Esta é a representação em MATLAB da seguinte expansão em frações parciais de $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$= \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

Observe que, se $p(j) = p(j+1) = \ldots = p(j+m-1)$ [isto é, $p_j = p_{j+1} = \ldots = p_{j+m-1}$], o polo $p(j)$ é um polo de multiplicidade m. Nesses casos, a expansão inclui termos como segue:

$$\frac{r(j)}{s = p(j)} + \frac{r(j+1)}{[s - p(j)]^2} + \cdots + \frac{r(j+m-1)}{[s - p(j)]^m}$$

Para obter mais detalhes, veja o Exemplo B.5.

Exemplo B.5 Expanda a seguinte $B(s)/A(s)$ em frações parciais com MATLAB:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Para essa função, temos:

```
num = [1 2 3]
den = [1 3 3 1]
```

O comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

apresenta o resultado mostrado a seguir:

```
num = [1 2 3];
den = [1 3 3 1];
[r,p,k] = residue(num,den)
r =
    1.0000
    0.0000
    2.0000
p =
    -1.0000
    -1.0000
    1.0000
k =
    []
```

Esta é a representação em MATLAB da seguinte expansão em frações parciais de $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s+1} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

Note que o termo direto k é zero.