UDESC – Universidade do Estado de Santa Catarina
PPGEEL – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
CDI – Controle Digital
Professor: Antonio Silveira (antonios@joinville.udesc.br)
Aula 11

FILTRO DE KALMAN

1. Estimação total de estados por Filtro de Kalman

Em estudo preliminar sobre controle LQR estivemos considerando que todos os estados do sistema controlado eram variáveis medidas. No entanto, sabemos que são raros os casos em que, de fato, todas as variáveis de estado são medidas ou que simplesmente pode-se aplicar aproximações da derivada para obter, por exemplo, variações da variável medida do processo para compor modelos de estado do tipo Posição-Velocidade-Aceleração (PVA).

Existem casos em que uma determinada variável de estado é inferida a partir de informações de múltiplos sensores e que uma abordagem de estimação em malha aberta acarreta erros com o passar do tempo. Quando se trata desse tipo de problema, o estimador baseado em Filtro de Kalman é um poderoso artifício, especialmente para fusão sensorial ou outros problemas envolvendo sistemas MIMO.

O Estimador de Kalman também pode ser utilizado sobre sistemas SISO mais simples e sua estrutura é exatamente a mesma de um observador total de estados qualquer. A principal diferença, assim como com o regulador LQR, é o método de projeto e obviamente os resultados ótimos e procedimento sistemático de projeto.

O algoritmo de projeto do Filtro de Kalman é dual ao LQR, tal como veremos mais adiante. A diferença direta em relação ao caso regulador é que ao invés de considerarmos que o sistema controlado deve seguir um sinal de referência, queremos que a saída estimada siga a saída medida do processo. Isto é feito a partir da análise recursiva dos dados de entrada e saída do processo controlado, ou seja, avaliando a cada instante de amostragem a relação de causa e efeito buscando-se reconstruir a trajetória dos estados estimados do sistema que explicam a trajetória das saídas medidas do sistema controlado dadas as entradas aplicadas.

Considere um sistema qualquer descrito pelo seguinte modelo de estados:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{1}$$

onde a matriz de saída C não mais é de rank cheio e, consequentemente, o número de variáveis medidas de saída é inferior ao número de estados do modelo em (1).

O problema do Filtro de Kalman pode ser resumido em obter o ganho ótimo de Kalman, L, tal que o estimador dado por

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\left[y(k) - \hat{y}(k)\right] \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) \end{aligned} \tag{2}$$

seja capaz de minimizar o erro de estimação dado por $e_{est}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$. O calculo de L é feito com base na minimização do funcional quadrático

$$J = \mathbf{E}\left\{\left[x(k) - \hat{x}(k)\right]^T \left[x(k) - \hat{x}(k)\right]\right\} \tag{3}$$

Reescrevendo-se a equação do Filtro de Kalman em (2) é possível tornar explícita a sua estrutura em malha fechada e que se assemelha ao caso regulador do LQR em malha fechada, ou seja,

$$\hat{x}(k+1) = \left[A - LC\right]\hat{x}(k) + Bu(k) + Ly(k) \tag{4}$$

É importante notar em (4) que as entradas do estimador a partir de $u(k)$ e $y(k)$ poderiam ser agregadas em uma única pseudo-entrada e o problema estaria reescrito de forma análoga ao LQR. No entanto, para o caso de estimação pode-se simplificar o problema ainda mais, já que a entrada $u(k)$ deixa de ser produto do problema e passa a ser função deste, sendo conhecida *a priori*. Por outro lado, a variável $y(k)$ é considerada sujeita à perturbação estocástica, e o objetivo é determinar o ganho L tal que considerando $y(k)$ como uma entrada ponderada por esse ganho, o erro de estimação $x(k) - \hat{x}(k)$ seja mitigado com o passar do tempo.

Com as considerações do parágrafo anterior é possível redefinir o problema de estimação a partir da seguinte expressão do estimador em malha fechada desprezando-se a entrada conhecida, $u(k)$, ou seja,

$$\hat{x}(k+1) = \left(A - LC\right)\hat{x}(k) + Ly(k) \tag{5}$$

Se compararmos a expressão (5) com o caso regulador LQR em malha fechada, dado por

$$x(k+1) = \left(A - BK\right)x(k) + By_r(k) \tag{6}$$

é possível verificar a semelhança na estrutura resultante de (5) e (6). Essa semelhança é um resultado bem estabelecido na teoria de Controle Linear Ótimo Quadrático e garante a dualidade entre o projeto do Filtro de Kalman e do regulador LQR. A seguir, apresenta-se o resumo desta dualidade:

$$\begin{array}{ccc} \text{LQR} & \leftrightarrow & \text{KF} \\ A & \leftrightarrow & A^T \\ B & \leftrightarrow & C^T \\ K & \leftrightarrow & L \end{array} \tag{7}$$

- Equação a diferenças de Riccati de controlador (LQR):

$$P(k+1) = A^T P(k) A - A^T P(k) B\left(B^T P(k) B + R\right)^{-1} B^T P(k) A + Q \tag{8}$$

- Equação a diferenças de Riccati de estimador (KF):

$$S(k+1) = AS(k)A^T - AS(k)C^T\left(CS(k)C^T + R_{\text{kf}}\right)^{-1} CS(k)A^T + Q_{\text{kf}} \tag{9}$$

- Ganho ótimo de controlador (LQR):

$$K = \left[A^T PB \left(B^T PB + R \right)^{-1} \right]^T \tag{10}$$

- Ganho ótimo de estimador (KF):

$$L = ASC^T \left(CSC^T + R_{\mathrm{kf}} \right)^{-1} \tag{11}$$

2. Projeto do Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman projetado pelo caso dual ao LQR de horizonte infinito, obviamente, requer as mesmas condições que seu análogo regulador, ou seja: o sistema sob análise precisa ser observável (o LQR requer controlabilidade), a matriz dinâmica não pode ser singular e o par $(A^T, \sqrt{Q})$ deve ser ao menos detectável.

Existem métodos analíticos de projetar o Filtro de Kalman que fornecem resultados prescritos, tal como o caso de tempo mínimo (*deadbeat*) e variância mínima. Para recordar este assunto, basta recorrer ao material de aula sobre Controle de Variância Mínima, pois o preditor desse tipo de sistema é solução particular do Filtro de Kalman. No entanto, para garantir o uso de todo o potencial do Filtro de Kalman a partir de uma abordagem estocástica, faz-se necessário o conhecimento do modelo de perturbações de alta frequência atuante nos estados, o que nem sempre é conhecido. Deste modo, o que normalmente é feito é a consideração de que ao menos a saída do sistema, $y(k)$, está contaminada por um ruído gaussiano designado pela sequência $\xi(k)$ e cuja variância é σ_ξ^2. Além disso, considera-se que esse ruído já está incorporado à $y(k)$ e que se conhece, razoavelmente, a frequência em que ele atua.

Essas considerações sobre o ruído somadas ao razoável conhecimento de um modelo matemático que descreve o que se quer explicar sobre o comportamento de um sistema dinâmico, delimitam uma banda de interesse no projeto. Isto estabelece uma forma de projeto do Filtro de Kalman, apontada por Cruz (1996), como não-ortodoxa. No entanto, esta forma vem sendo empregada desde a década de 1970 e hoje em dia pode ser considerada como um método tradicional e que ficou conhecido como *Loop-Shaping* (Cruz, 1996; Stevens e Lewis, 2003).

É importante lembrarmos o motivo pelo qual estamos estudando o Filtro de Kalman neste ponto do curso. Nosso interesse é fundi-lo ao LQR, já que este controlador precisa dos estados para operar satisfatoriamente. Isto significa que o Filtro de Kalman tem papel fundamental no comportamento dinâmico do sistema em malha fechada, ou seja, o grau de liberdade de sintonia pode ser estendido do ponto de vista do projeto do Filtro de Kalman, pela apropriada seleção das matrizes de ponderação, Q_{kf} e R_{kf}. O projeto e avaliação da dinâmica do filtro indica o quão apropriado este é para um determinado problema.

2.1. Análise no domínio do tempo e da frequência (*Loop-shaping*)

Uma maneira de avaliar a dinâmica do Filtro de Kalman é através da resposta desse filtro em malha fechada, no domínio do tempo (Stevens e Lewis, 2003), onde

$$\hat{x}(k+1) = (A - LC)\hat{x}(k) + Ly^*(k) \tag{12}$$

pode ser utilizado para verificar a convergência do filtro quando sujeito a um sinal conhecido, introduzido no sistema a partir de $y^*(k)$. O teste de resposta ao degrau é comumente empregado para essa avaliação, onde é possível observar o tempo de acomodação e se há oscilações ou sobre-sinal na dinâmica do estimador.

A análise do filtro é complementada via resposta em frequência do sistema em malha aberta buscando-se moldar, de maneira apropriada, de acordo com os requisitos de filtragem, a forma da curva de magnitude em frequência dos ganhos (principais – caso MIMO) do filtro. Este método, designado como *loop-shaping*, fornece informações qualitativas sobre os níveis dos ganhos nas baixas frequências e nas altas frequências, permitindo avaliar a robustez do Filtro de Kalman de maneira a garantir seu funcionamento como estimador, além de filtro de perturbações de alta frequência. A análise de resposta em frequência é conduzida através da descrição do filtro em malha aberta (Stevens e Lewis, 2003), sendo esta,

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Ly^*(k) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) \end{aligned} \tag{13}$$

2.2. Funcionamento das matrizes Q_{kf} e R_{kf}

Vamos utilizar as matrizes de ponderação do Filtro de Kalman somente na forma diagonal, favorecendo a simplicidade na seleção de seus elementos por tentativa e erro.

A matriz Q_{kf} é responsável por moldar a curva de magnitude em frequência do Filtro de Kalman. A relatividade entre a magnitude dos elementos de sua diagonal pondera a forma pela qual as variáveis de estado são priorizadas no problema de otimização do estimador. Quanto maior o valor de um dado elemento é em relação aos demais, maior á a prioridade de convergência da variável de estado relativa a esse elemento. De maneira inversa, quanto menor o valor de um dado elemento da diagonal de Q_{kf}, filtra-se mais a sua variável de estado correspondente (STEVENS; LEWIS, 2003).

Em aplicações do tipo fusão sensorial, a priorização adequada dos elementos de Q_{kf} sobre estados sensorialmente medidos é fundamental. Apenas para exemplificar, imaginemos um estimador de posição baseado em múltiplos sensores para prover redundância, sensores esses que poderiam ser: INS (*Inertial Navigation System* – baseado em acelerômetros), GPS (*Global Positioning System* – baseado em localização por satélites) e mais um sistema de posicionamento baseado em antenas de comunicação. As chances de se perder os sinais dos satélites ou mesmo não conseguir uma triangulação com as antenas de comunicação são grandes, logo, maior seria a prioridade dos dados provenientes do sistema INS, mas as estimações seriam mais precisas quando os três sistemas estivessem em operação. Adiante veremos um clássico exemplo, mais simples, baseado em um sistema de uma entrada e duas saídas de um pêndulo invertido sobre um carro.

A matriz R_{kf} é responsável por deslocar a curva de magnitude em frequência para os lados, podendo-se utilizá-la para ajustar a frequência de corte desejada para o Filtro de Kalman. A relatividade entre a magnitude dos elementos de sua diagonal, pondera a prioridade que é dada no problema de otimização a um determinado sub-sistema (caso MIMO). Quanto maior for a magnitude da ponderação do elemento, menor será a largura de banda do sub-sistema (caso MIMO) correspondente e, consequentemente, mais lenta será a dinâmica do estimador em relação as variáveis de estado estimadas a partir desse sub-sistema (STEVENS; LEWIS, 2003).

Obs: reforçando novamente que os métodos de projetar e analisar sistemas do tipo Filtro de Kalman são diversificados e que, neste curso, buscou-se apresentar apenas conteúdo suficiente para a estimação de estados para o LQR, favorecendo questões práticas. Caso o aluno necessite de maiores informações sobre esse tema vastamente documentado na literatura de controle, recomenda-se a leitura das referências citadas.

3. Bibliografia

ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. Optimal filtering. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, Prentice-Hall, Inc, 1979.

ASTROM, K. J; WITTENMARK, B. Computer-controlled systems: Theory and Design. Mineola, New York, USA: 3rd Ed, Dover Publications, 1997.

COELHO, A. A. R.; COELHO, L. S. Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares. Florianópolis, SC, Brasil: Editora da Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

CRUZ, J. J. Controle Robusto Multivariável. Editora da USP. 1996.

STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L. Aircraft control and simulation. Hoboken, New Jersey, USA: 2nd Ed, John Wiley and Sons, Inc, 2003.