Controle Linear Quadrático: ênfase no método do Regulador Linear Quadrático – LQR, operando via realimentação total de estado.

O método LQR se baseia em determinar o ganho K de realimentação de estado de regulador,

$$u(t) = -Kx(t) \tag{1}$$

tal que esta lei de controle minimize a função custo definida por

$$J_{LQR} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right] dt \tag{2}$$

estando o problema de otimização sujeito às restrições do sistema dinâmico a ser regulado, dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3}$$

A função custo do LQR, para fins práticos, não considera os instantes de tempo negativos, pois assume-se a hipótese de que o sistema regulador sempre será iniciado de algum instante de tempo real e que pode ser chamado de instante zero, de tal forma que esta costuma ser representada, também, por

$$\bar{J}_{LQR} = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right] dt \tag{4}$$

A solução de K pelo método LQR é vantajosa devido as propriedades de estabilidade e robustez inerentes do método, tal que se a realização de estado adotada no projeto for controlável, e as matrizes de ponderação do problema de otimização forem simétricas e $Q \geqslant 0$ e $R > 0$, então a solução de malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)\, x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{5}$$

será estável, assintoticamente (i.e., terá autovalores de $A - BK$ com parte real negativa).

Obs: No que se refere às condições de controlabilidade, ainda verificaremos que existem algumas exceções mesmo para quando o sistema não for controlável, tal que o método LQR ainda poderá ser aplicado.

Para que seja possível de se compreender os porquês das garantias de estabilidade do método LQR, precisamos retornar aos conceitos de estabilidade de sistemas dinâmicos, mas direcionando ao *senso de estabilidade de Lyapunov*, que se destaca como o conceito geral de estabilidade, aplicável a sistemas lineares e não-lineares. Tais conceitos são discutidos em diversos livros da área e nesta disciplina apontei o **livro do Prof. Hespanha, na página 65, Seção 8.2**.

Além do conceito geral de estabilidade no senso de Lyapunov, outro tópico relacionado ao entendimento do método LQR e suas propriedades são as equações de Lyapunov, onde podemos dar um exemplo como se mostra a seguir:

$$A^T P + PA = -Q \tag{6}$$

Com base nesta equação, o Teorema de Estabilidade de Lyapunov garante que um sistema homogêneo

$$\dot{x}(t) = Ax \tag{7}$$

é assintoticamente estável se, para toda e qualquer matriz simétrica Q definida-positiva, existir uma solução única P, simétrica e definida-positiva. Ou seja, o sistema será assintoticamente estável se

$$A^T P + PA < 0 \tag{8}$$

Como no problema de regulação de estado tem-se uma realização de estado homogênea, e veremos que a solução do LQR é baseada em uma equação de Lyapunov, então, verifica-se que se existir uma única solução P, simétrica e definida-positiva, dadas as matrizes Q, R, e o sistema dinâmico do projeto, então o regulador será assintoticamente estável em malha fechada.