UFPA – UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PPGEE – PROGRMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
LACOS – LABORATÓRIO DE CONTROLE E SISTEMAS
DISCIPLINA: TERORIA DE SISTEMAS LINEARES
PROFESSOR: ANTONIO SILVEIRA (asilveira@ufpa.br)

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Calcule os determinantes das matrizes:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \quad M_5 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_6 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 2 & -5 & \lambda_3 - 3 \end{bmatrix}$$

2) Quando possível, calcule as inversas das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}$$

3) Para novas matrizes A, B, C, D, simbólicas, mostre que

a) $$\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & I \end{array}\right]\right) = \det(A)$$

b) $$\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right]\right) = \det(A)\det(C)$$

c) $$\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]\right) = \det(A)\det\left(D - CA^{-1}B\right) \quad \text{se } A^{-1} \text{ existir}$$
$$= \det(D)\det\left(A - BD^{-1}C\right) \quad \text{se } D^{-1} \text{ existir}$$

4) Mostre que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica (i.e., $M = M^T$) com uma matriz anti-simétrica (i.e., $M = -M^T$).

5) Mostre que $\mathbf{Tr}(AB) = \mathbf{Tr}(BA)$, $A \in \Re^{n\times n}$ e $B \in \Re^{n\times n}$, onde $\mathbf{Tr}(.) \triangleq$ função Traço.

6) Mostre que $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right) = \det(A+B)\det(A-B)$, $A \in \Re^{n\times n}$ e $B \in \Re^{n\times n}$.

7) Determine a solução do conjunto de equações:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

8) Calcule os autovalores das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

9) Trace os Diagramas de Bode (i.e., módulo e fase) dos seguintes sistemas:

a) $G(s) = 1$

b) $G(s) = \dfrac{1}{s}$

c) $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$

d) $G(s) = \dfrac{4}{(s+3)(s+8)}$

e) $G(s) = \dfrac{5(1+0,01s)^2}{s(1+0,0001s)^2}$

f) $G(s) = \dfrac{4}{(s+5)^2}$

10) Discorra sobre Margem de Ganho e Margem de Fase de sistemas de controle, pela análise do Diagrama de Bode da malha direta (i.e., análise em malha aberta do compensador em série com o modelo do processo). Faça a distinção entre a representação da magnitude em dB e em taxa de amplificação (AR, *amplitude ratio*).

11) Discorra, em termos das margens de Ganho e de Fase, quais valores caracterizam um sistema de controle com estabilidade e desempenho robustos. Comente os valores tanto em ganho dB como em ganho AR.
12) Discorra sobre as curvas de **Sensibilidade Complementar** e de **Sensibilidade** e avalie como se pode obter as Margens de Ganho e de Fase a partir destas duas curvas (i.e., análise em malha fechada).

13) Elabore um exemplo com um processo sub-amortecido de segunda ordem ligado à uma malha de controle PI. Usando este exemplo, avalie as margens de Ganho e de Fase pelo método de Bode (em malha aberta) e compare com a avaliação a partir das margens obtidas via funções de sensibilidade (análise em malha fechada).

14) Utilizando o mesmo exemplo elaborado na Questão 13, obtenha uma realização controlável em espaço de estados para este sistema e projete um regulador por realimentação de estados tal que os polos de malha fechada sejam puramente reais. Após, mostre como é possível verificar o Diagrama de Bode da malha direta utilizando as matrizes do sistema em espaço de estados e o ganho do regulador.

15) Para o mesmo sistema usado nas questões (13) e (14), projete um observador de estados tal que os autovalores de malha fechada deste observador sejam duas vezes mais velozes que os autovalores de malha aberta. Após, desenvolva as equações que permitem avaliar o Diagrama de Bode de malha direta do observador, considerando a transferência da saída medida para a saída estimada. Também, desenvolva as equações de malha fechada do observador que permitem realizar testes de convergência deste observador, usando a transferência da saída medida para a saída estimada. Faça um teste de resposta ao degrau deste observador e verifique se ele opera duas vezes mais rápido que o sistema (a planta) em malha aberta.

16) Uma planta foi modelada no espaço de estados na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

onde $x, u, y,$ são, o vetor de estados, a entrada e a saída, respectivamente. Esta planta é controlada por um **compensador dinâmico** que utiliza a seguinte lei de controle para seguimento de uma referência y_r com realimentação total de **estados estimados**, designados pelo vetor de estados estimados $\hat{x}$:

$$u = -K\hat{x} + y_r$$

Sabendo que o **estimador de estados** desse compensador dinâmico é descrito pelo sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L\left(y - \hat{y}\right) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

mostre que é possível obter um modelo que descreve este **sistema completo em malha fechada** na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} y_r$$

17) Para o sistema mostrado a seguir, utilizando a fórmula de Ackermann, projete um observador de estados tal que os pólos do sistema observador sejam o dobro dos pólos de malha aberta da planta. Apresente, como resultado, o ganho L do observador.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

18) Para o sistema MIMO mostrado a seguir, obtenha um modelo em espaço de estados apresentando as equações de estado e de saída, indicando as matrizes A, B, C, D.

$$\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 - 2y_2 = u_1$$
$$\ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 + 2y_1 = u_2$$

19) Dado o sistema mostrado a seguir, descrito no espaço de estados, verifique se este sistema é (i) **estável**, se é (ii) **controlável** e (iii) **observável**. Por fim, (iv) **obtenha a função de transferência** que descreve a sua relação de entrada e saída.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 20 & -200 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 200 \end{bmatrix} x$$

20) Para o sistema mostrado a seguir, utilizando a fórmula de Ackermann, projete um observador de estados tal que os pólos do sistema observador em malha fechada sejam posicionados em $-2 \pm j2$. Apresente, como resultado, o ganho L do observador, escrevendo também a equação de estados completa deste observador de estados.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

21) Dado o sistema mostrado a seguir, descrito no espaço de estados, verifique se este sistema é (i) **estável**, se é (ii) **controlável** e (iii) **observável**. Por fim, (iv) **obtenha a função de transferência** que descreve a sua relação de entrada e saída.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$