



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MERCEDES MARIA BARBOSA DINIZ

**TEORIA DE SISTEMAS LINEARES  
ATIVIDADE 3**

BELÉM  
2025

MERCEDES MARIA BARBOSA DINIZ

TEORIA DE SISTEMAS LINEARES  
ATIVIDADE 3

Relatório com requisito para obtenção parcial de nota na disciplina de Teoria de Sistemas Lineares, ministrada pelo Professor. Antonio da Silva Silveira

BELÉM  
2025

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Margem de Ganho e Fase</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Análise da Estabilidade do Controlador do Pêndulo Invertido sobre o Carro</b>	<b>6</b>
3.1	Análise da Estabilidade Relativa do LQR	6
3.2	Análise da Estabilidade Relativa do Filtro de Kalman	7
3.3	Análise da Estabilidade Relativa do LQG	8

## Lista de Figuras

1.1	Diagrama do LQG.	4
2.1	Função de sensibilidade e de sensibilidade complementar.	5
2.2	Análise da estabilidade pelo diagrama de bode	5
3.1	Teste de seguimento de referencia do controlador LQG.	6
3.2	Função sensibilidade e sensibilidade complementar do LQR em malha fechada.	7
3.3	Diagrama de Bode do LQR em malha aberta.	7
3.4	Função sensibilidade e sensibilidade complementar do filtro de Kalman em malha fechada.	8
3.5	Diagrama de Bode do filtro de Kalman em malha aberta.	8
3.6	Função sensibilidade e sensibilidade complementar do LQG em malha fechada.	9
3.7	Diagrama de Bode do LQG em malha aberta.	9

## Lista de Tabelas

# 1 Introdução

Esta atividade tem como objetivo revisar a análise da estabilidade relativa, via margens de ganho e de fase, do controle digital de um pêndulo invertido sobre carro. A modelagem foi baseada no *Control Tutorials for Matlab and Simulink* (CTMS) da University of Michigan, disponível em <https://ctms.engin.umich.edu>, com a Figura 1.1 ilustrando o esquema do compensador dinâmico completo.

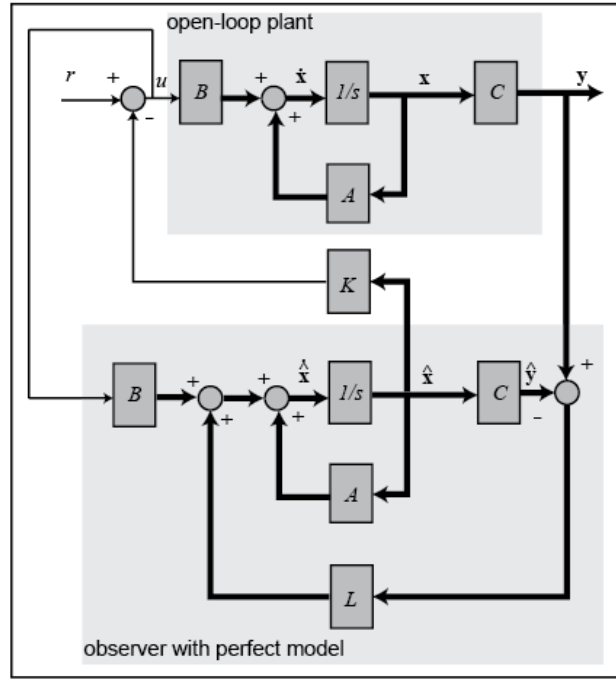


Figura 1.1: Diagrama do LQG.

## 2 Margem de Ganho e Fase

A análise de estabilidade relativa por meio das funções de sensibilidade é uma abordagem amplamente utilizada para avaliar o desempenho e a robustez de sistemas de controle. As funções de sensibilidade  $S_{sen}$  e sensibilidade complementar  $T_{sen}$ , capturam diretamente o impacto de perturbações e incertezas sobre o sistema, permitindo a obtenção de margens de estabilidade através de medidas como os ganhos máximos  $m_s$  e  $m_t$ :

$$m_t = \max(|T_{sen}|), \quad m_s = \max(|S_{sen}|).$$

Em sistemas estáveis, a análise em malha aberta pode ser realizada com segurança. Nestes casos, como ilustrado na Figura 2.1, é comum que o sistema apresente elevado ganho em baixas e médias frequências — o que favorece o seguimento de referência e a rejeição de perturbações — e atenuação significativa em altas frequências, contribuindo para a redução de ruídos e melhor comportamento dinâmico.

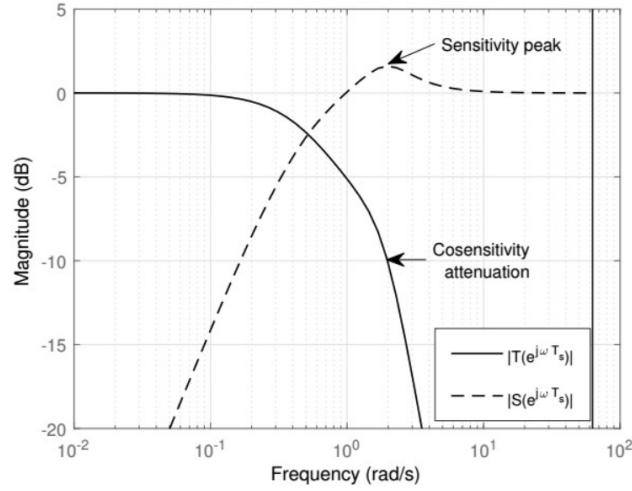


Figura 2.1: Função de sensibilidade e de sensibilidade complementar.

Estimativas conservadoras para as margens de ganho e de fase em função dos valores máximos das normas singulares das funções  $S_{sen}$  e  $T_{sen}$ , podem ser calculadas respectivamente como:

$$G_{m\text{dB}} \geq \min \left( 20 \log_{10} \left( \frac{m_s}{m_s - 1} \right), 20 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{m_t} \right) \right) \text{ e} \quad (1)$$

$$P_{m\text{deg}} \geq \frac{180}{\pi} \cdot \min \left( 2 \sin^{-1} \left( \frac{1}{2m_s} \right), 2 \sin^{-1} \left( \frac{1}{2m_t} \right) \right). \quad (2)$$

Outra forma de visualizar a resposta em frequência é por meio do diagrama de Bode (Figura 2.2), que apresenta as curvas de magnitude e fase. A margem de fase corresponde ao atraso de fase que pode ser introduzido no sistema de malha aberta antes que a estabilidade seja perdida em malha fechada — isto é, a diferença entre  $180^\circ$  e a fase na frequência onde o ganho é unitário (0 dB). Já a margem de ganho representa o fator pelo qual o ganho pode ser aumentado até que o sistema atinja a condição de instabilidade, sendo calculado na frequência onde a fase é  $-180^\circ$ .

Valores negativos para essas margens indicam instabilidade. Margens robustas geralmente estão entre  $1,7 \leq G_{m\text{dB}} \leq 2$  para o ganho, e  $30^\circ \leq P_{m\text{deg}} \leq 45^\circ$  para a fase.

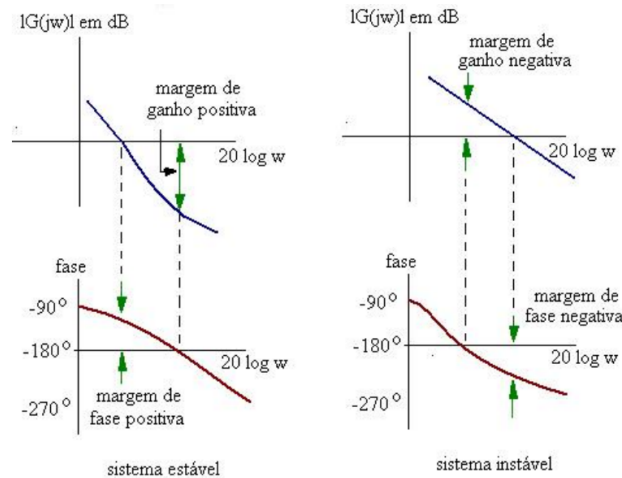


Figura 2.2: Análise da estabilidade pelo diagrama de bode

### 3 Análise da Estabilidade do Controlador do Pêndulo Invertido sobre o Carro

O problema do pêndulo invertido sobre o carro é intrinsecamente instável, tornando a análise em malha aberta inadequada e sendo apresentada nesse trabalho apenas para fins didáticos.

A estrutura de controle implementada baseou-se no controlador LQG, composto por um regulador LQR e um filtro de Kalman, conforme discutido na Atividade 2<sup>1</sup>. Os pesos adotados foram  $Q = I_{5 \times 5}$  e  $R = 1$ . O mesmo falha nos testes de seguimento de referência, conforme apresentado na Figura 3.1, com o ângulo do pêndulo estabilizando na origem, indicando que o ganho DC do sistema em malha fechada não é unitário.

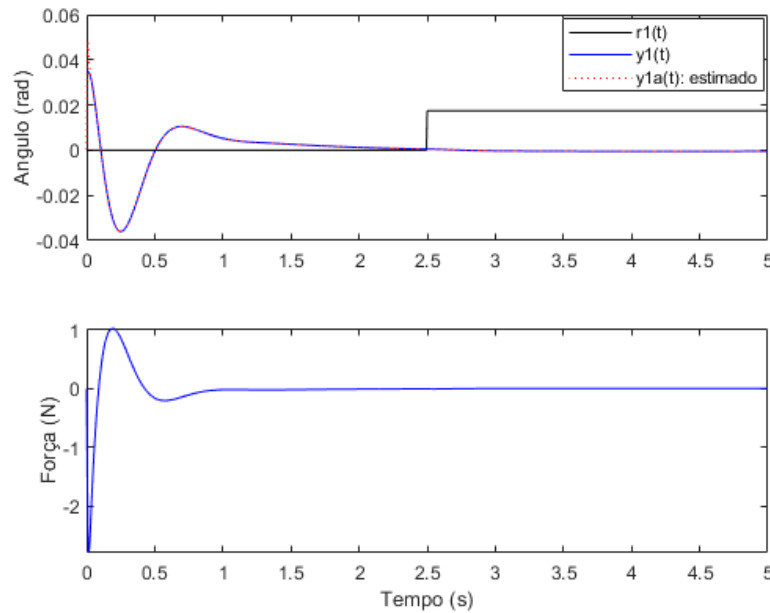


Figura 3.1: Teste de seguimento de referencia do controlador LQG.

#### 3.1 Análise da Estabilidade Relativa do LQR

Na Figura 3.2, observa-se que as curvas  $|T_{sen}|$  e  $|S_{sen}|$  do LQR não seguem o comportamento típico desejado, como comparado à referência teórica da Figura 2.1, sugerindo a necessidade de métodos alternativos para avaliação de robustez. Dela podemos concluir que o sistema permite a passagem de perturbações e que tem um seguimento de referência insatisfatório.

Para as curvas de sensibilidade e sensibilidade complementar da Figura 3.6, as margens de ganho e fase obtidas foram, respectivamente,  $G_{m\text{dB}} \geq 33,9830$  e  $P_{m\text{deg}} \geq 58,6972$ .

A Figura 3.3 apresenta o diagrama de Bode da planta com o LQR em malha aberta. A margem de ganho torna-se negativa, e há inversão de fase nas frequências de banda passante, o que evidencia a instabilidade.

<sup>1</sup>[https://github.com/mercedesDiniz/TSL/blob/main/atividades/a2/control\\_LQG\\_pendulo.m](https://github.com/mercedesDiniz/TSL/blob/main/atividades/a2/control_LQG_pendulo.m)

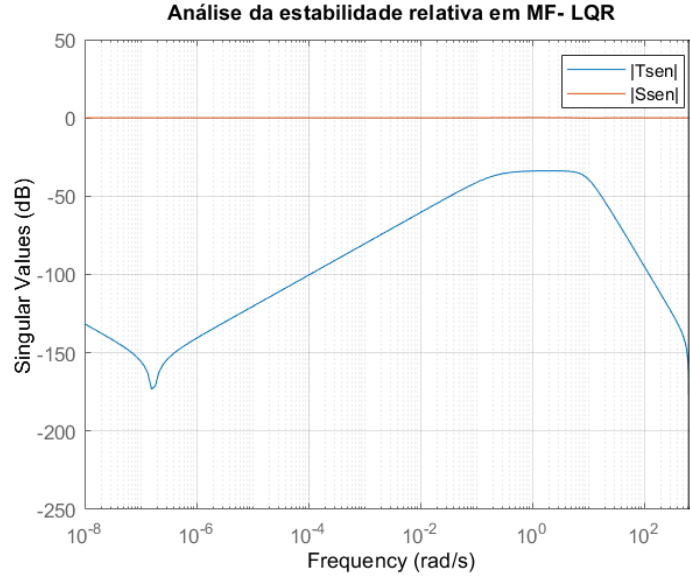


Figura 3.2: Função sensibilidade e sensibilidade complementar do LQR em malha fechada.

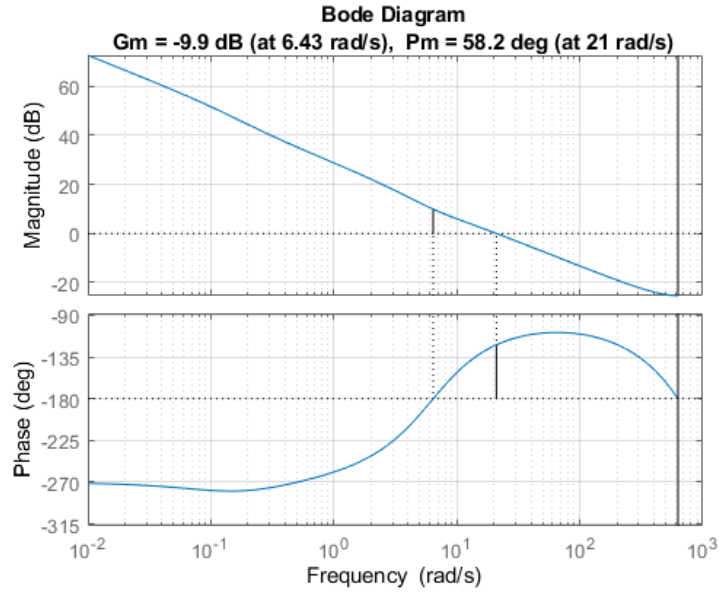


Figura 3.3: Diagrama de Bode do LQR em malha aberta.

### 3.2 Análise da Estabilidade Relativa do Filtro de Kalman

Como mostra a Figura 3.4, as curvas  $|S_{sen}|$  e  $|T_{sen}|$  se aproximam da forma típica da Figura 2.1, o que justifica a aplicação da análise de robustez via sensibilidade. No entanto, o sistema ainda apresenta baixa atenuação de perturbações. As margens de ganho e fase obtidas foram, respectivamente,  $G_{m\text{dB}} \geq 4,3887$  e  $P_{m\text{deg}} \geq 27.8769$ .

O diagrama de Bode em malha aberta, apresentado na Figura 3.5, a margem de ganho confirma a fragilidade do sistema, com cruzamento de fase próximo a  $-180^\circ$ .

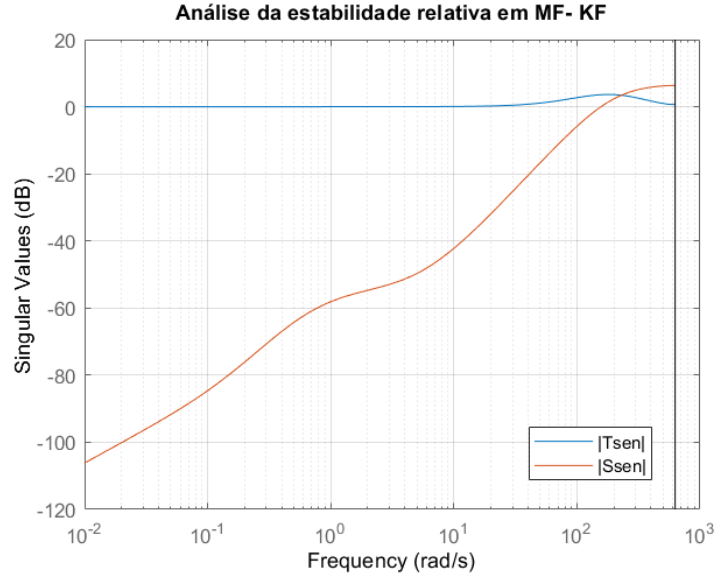


Figura 3.4: Função sensibilidade e sensibilidade complementar do filtro de Kalman em malha fechada.

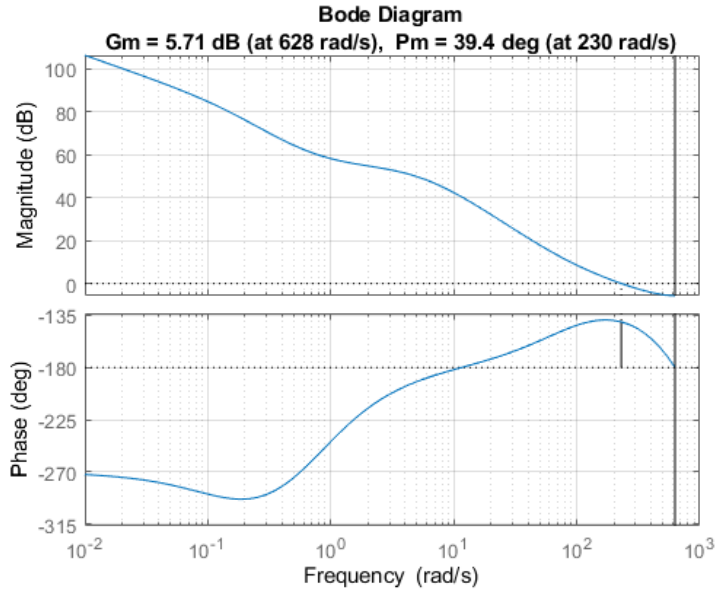


Figura 3.5: Diagrama de Bode do filtro de Kalman em malha aberta.

### 3.3 Análise da Estabilidade Relativa do LQG

A Figura 3.6 mostra as curvas do sistema completo do controlador digital, e evidencia um conflito entre o LQR e o filtro de Kalman, sua combinação não resulta em uma solução ótima para o sistema como um todo. O problema específico do pêndulo invertido apresenta desafios de controlabilidade e observabilidade — sendo apenas detectável — o que compromete a eficiência da solução proposta.

As margens de ganho e fase obtidas foram, respectivamente,  $G_{m\text{dB}} \geq 33,9828$  e  $P_{m\text{deg}} \geq 58,6973$ .

O diagrama de Bode do LQG, apresentado na Figura 3.7 deixa claro que o mesmo é instável em malha aberta.



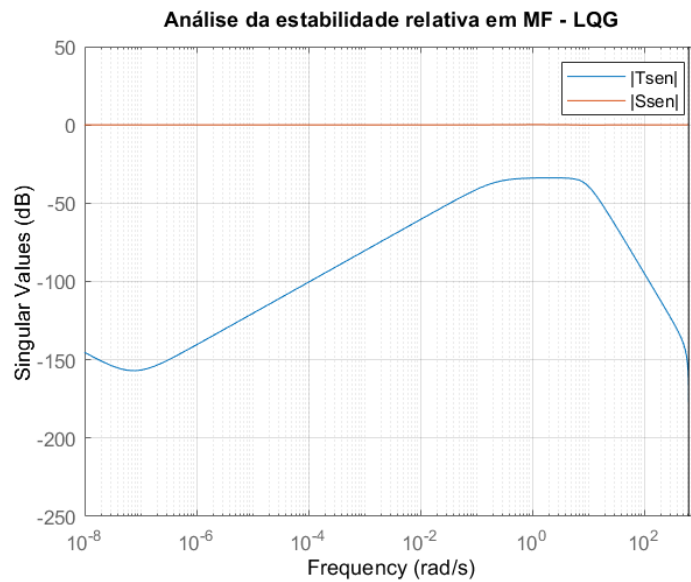


Figura 3.6: Função sensibilidade e sensibilidade complementar do LQG em malha fechada.

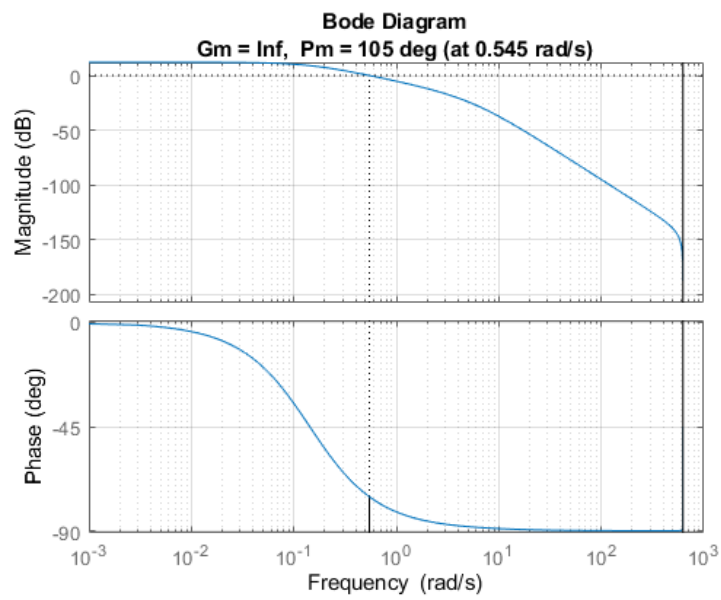


Figura 3.7: Diagrama de Bode do LQG em malha aberta.