PPGEE - Teoria de Sistemas Lineares
Prof. Antonio Silveira

Introdução ao controle LQ aplicado a sistemas MIMO

* Análise de zeros em sistemas MIMO

Considerando um exemplo com um sistema MIMO de 2-entradas e 2-saídas:

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= G_{11}(z)U_1(z) + G_{12}(z)U_2(z) \\ Y_2(z) &= G_{21}(z)U_1(z) + G_{22}(z)U_2(z) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{B_{11}(z)z^{-1}}{A_{11}(z)} & \frac{B_{12}(z)z^{-1}}{A_{12}(z)} \\ \frac{B_{21}(z)z^{-1}}{A_{21}(z)} & \frac{B_{22}(z)z^{-1}}{A_{22}(z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= \frac{B_{11}(z)z^{-1}}{A_{11}(z)}U_1(z) + \frac{B_{12}(z)z^{-1}}{A_{12}(z)}U_2(z) \\ Y_1(z) &= \frac{A_{12}(z)B_{11}(z)z^{-1}}{A_{11}(z)A_{12}(z)}U_1(z) + \frac{A_{11}(z)B_{12}(z)z^{-1}}{A_{11}(z)A_{12}(z)}U_2(z) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} Y_2(z) &= \frac{B_{21}(z)z^{-1}}{A_{21}(z)}U_1(z) + \frac{B_{22}(z)z^{-1}}{A_{22}(z)}U_2(z) \\ Y_2(z) &= \frac{A_{22}(z)B_{21}(z)z^{-1}}{A_{21}(z)A_{22}(z)}U_1(z) + \frac{A_{21}(z)B_{22}(z)z^{-1}}{A_{21}(z)A_{22}(z)}U_2(z) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{B_{11}}(z)z^{-1}}{\mathbf{A_1}(z)} & \frac{\mathbf{B_{12}}(z)z^{-1}}{\mathbf{A_1}(z)} \\ \frac{\mathbf{B_{21}}(z)z^{-1}}{\mathbf{A_2}(z)} & \frac{\mathbf{B_{22}}(z)z^{-1}}{\mathbf{A_2}(z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} \tag{6}$$

O sistema MIMO, após a reorganização dos seus polinômios, possui zeros específicos referentes aos seus elementos da matriz de transferência, mas devido a estrutura acoplada entre entradas e saídas, no caso MIMO surge um novo conceito de zeros: de transmissão (ou zeros invariantes).

* Zeros de transmissão (zeros do sistema MIMO)

Considere o seguinte sistema contínuo (o desenvolvimento algébrico se estende ao caso discreto) no espaço de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
&sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\
&Y(s) = CX(s) + DU(s)
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
P(s) \begin{bmatrix} -X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x(0) \\ Y(s) \end{bmatrix} \tag{9}
$$

$$
P(s) := \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \tag{10}
$$

em que $P(s) \in \mathbb{R}(s)$ é a matriz de Rosenbrock do sistema no espaço de estado. Esta matriz é utilizada para introduzir o conceito de zeros no espaço de estado (Hespanha, 2009).

Os zeros de transmissão ou zeros invariantes de um sistema MIMO serão aqueles cujas frequências s causam o decaimento do posto da matriz $P(s)_{n\times m}$ a um valor inferior a $\min(n, m)$.

O exemplo mostrado a seguir, extraído da página 179 de Hespanha (2009), foi utilizado pelo autor para introduzir este conceito:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} u \\
&y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} u
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
P(s) = \begin{bmatrix} s & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & s+2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & s+1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}
$$

É possível testar o posto da matriz para diversas frequências, mas para quando $s = -2$, o posto da matriz decai de 4 para 3. Portanto, $s = -2$ é o zero de transmissão do sistema.

```
s = 0;
Ps = [s   1    -1   1   0;
     -1  s+2  -1   1   1;
     0   -1   s+1  1   2;
     0   -1    0   0   0];

rank(Ps) = 4

s = -1;
Ps = [s   1    -1   1   0;
     -1  s+2  -1   1   1;
     0   -1   s+1  1   2;
     0   -1    0   0   0];

rank(Ps) = 4

s = -2;
Ps = [s   1    -1   1   0;
     -1  s+2  -1   1   1;
```

```
    0   -1   s+1  1   2;
    0   -1    0   0   0];

rank(Ps) = 3
```

Também, se verificarmos diretamente pelo uso da função tzero do Matlab, chegaremos ao mesmo resultado:

```
A = [0 -1 1; 1 -2 1; 0 1 -1];
B = [1 0; 1 1; 1 2];
C = [0 1 0]; D = [0 0];
sys = ss(A,B,C,D);
tzero(sys) = -2
```

*** Analogia com sistemas MIMO descritos por matrizes de funções de transferência:**

Consideremos o seguinte exemplo:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{z-0.3679} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Neste exemplo é importante frisar que nas funções de transferência internas de $G(z)$ não há raízes associadas aos polinômios dos numeradores, há apenas o polo em 0.3679. No entanto, quando $z = e^{-\omega T_s}$ se aproxima de 0.3679 e o respectivo elemento da matriz $G(z)$ tende ao infinito, o posto da matriz $G(z)$ decai de 2 para 1. Portanto, 0.3679 é o zero de transmissão deste sistema MIMO.

```
rank([1 (1/(0.3678999-0.3679)); 0 1])

ans =  2


rank([1 (1/(0.36789999-0.3679)); 0 1])

ans =   1
```

*** Análise de sistemas MIMO no domínio da frequência via valores singulares**

- Decomposição dos valores singulares de uma matriz:

Seja H uma matriz real $\bar{n} \times \bar{m}$ e $M := H^T H$, simétrica e semidefinida, tal que $n = \min(\bar{n}, \bar{m})$ e todos os autovalores de M são reais e não negativos. Seja r o número de autovalores positivos, então os autovalores de $M := H^T H$ podem ser ordenados da seguinte maneira:

$$\lambda_1^2 \geqslant \lambda_2^2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r^2 > 0 = \lambda_{r+1}^2 = \cdots = \lambda_n^2 \tag{14}$$

Este conjunto de autovalores, normalmente organizado nesta ordem decrescente, quando reescrito na forma

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n \tag{15}$$

estabelece o conjunto dos valores singulares da matriz H.

Considere o exemplo mostrado a seguir, calculado a partir da relação entre (14) e (15), também diretamente pela função SVD (singular value decomposition) do Matlab:

```
H = [-4 -1   2;
      2 0.5 -1];

M = H'*H;

eig(M)
ans =

  -0.0000
   0.0000
  26.2500

sqrt(eig(M))
ans =

   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   5.1235 + 0.0000i

svd(H)
ans =

    5.1235
    0.0000
```

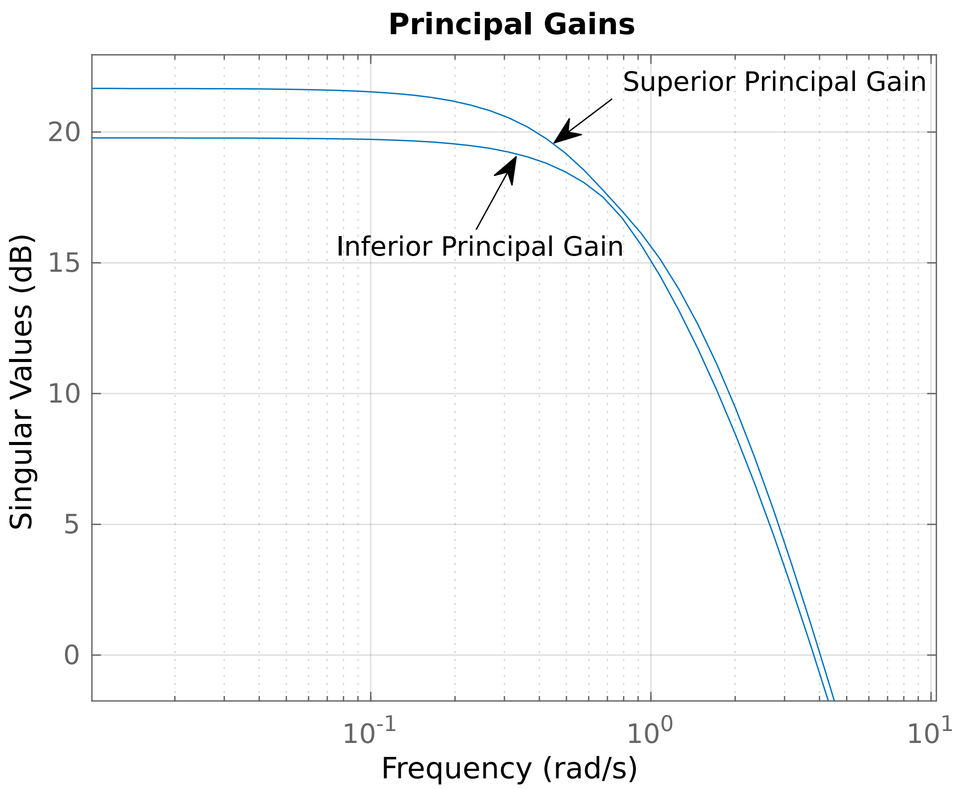
*** Análise em frequência de sistemas MIMO pelos ganhos principais (SVD da matriz de ganhos)**

"it is now well known that multivariable sensitivity and robustness cannot be reliably evaluated one loop at a time."
(John Doyle, 1982)

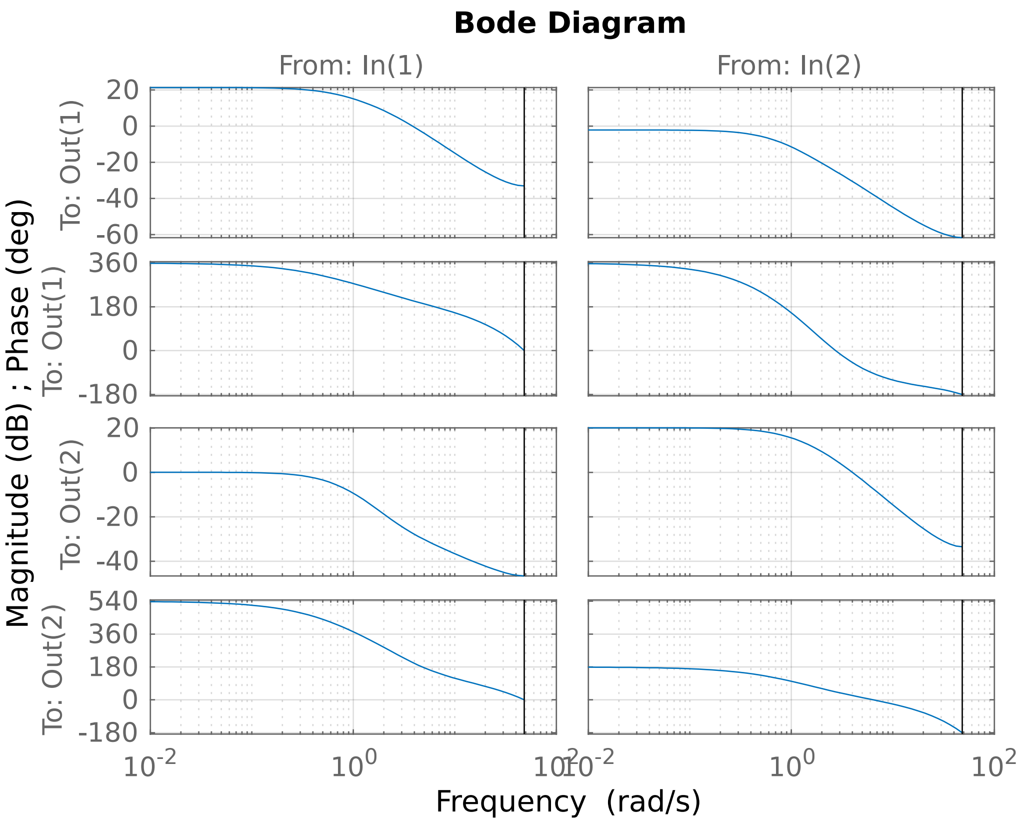
- Exemplo com sistema MIMO de velocidades horizontais de um quadrirotor

```
%% Quadrotor's horizontal speeds state space model
% x1 = phi   = roll_angle [rad]
% x2 = theta = pitch_angle [rad]
% x3 = u_spd = forward_speed [m/s]
% x4 = v_spd = lateral_speed [m/s]

% u1 = lateral thruster [-1,1]
```

```
% u2 = forward thruster [-1,1]
% y1 = v_spd = lateral_speed [m/s]
% y2 = u_spd = forward_speed [m/s]
% (Axes in NED coordinate system)
clear all; close all; clc;

A = [   0.8177    -0.00617  -0.0006665   -0.007602;
        0.005481   0.8208    0.009405     0.0007079;
        0.02713   -0.7337    0.9996      -0.0005473;
        0.7289    -0.01162   0.001246     0.9989   ];

B =  [  0.09348   0.002153;
       -0.001933  0.09677 ;
       -0.007098  0.003633;
       -0.007148  0.002068];

C =  [  0   0   0   1;
        0   0   1   0];

D = zeros(2,2);

Ts = 0.065; % seconds

sys = ss(A,B,C,D,Ts)
disp('Transmission zeros from SS model:'); disp( tzero(sys) );

%% Transfer function model from the state-space realization

Gz = tf(sys)
disp('Zeros from G(z) model using TZERO:'); disp( tzero(Gz) );
disp('Zeros from G(z) model using ZERO:'); disp( zero(Gz) );


%% Frequency response analysis based on the Singular Value Plots
% vs Bode plots
figure(1);
        sigma(sys), grid; title('Principal Gains'); % SV plots
figure(2);
        bode(sys), grid; % Bode plots
```



Principal Gains
Superior Principal Gain
Inferior Principal Gain
Singular Values (dB)
20
15
10
5
0
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency (rad/s)



Bode Diagram
From: In(1)
From: In(2)
Magnitude (dB) ; Phase (deg)
To: Out(1)
To: Out(2)
20
0
-20
-40
-60
360
180
0
-180
540
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
Frequency (rad/s)

*** Equação de Lyapunov e sua intrínseca relação de estabilidade com os métodos de controle LQ**

Considere o seguinte sistema descrito pela equação de estado homogênea

$$\dot{x} = Ax \tag{16}$$

Este sistema será estável, no senso de Lyapunov, se para cada matriz simétrica definida positiva Q (i.e., $x^T Qx > 0,\ Q_{n\times n}$), existir uma solução P única para a seguinte equação de Lyapunov:

$$A^T P + PA = -Q \tag{17}$$

A matriz P resultante será simétrica e definida positiva. Também, deve ser verdadeira a seguinte inequação matricial:

$$A^T P + PA < 0 \tag{18}$$

Para comprovar tais condições para a estabilidade, pode-se utilizar a seguinte solução arbitrária da equação homogênea do sistema (16):

$$v(t) := x^T(t)Px(t) \geqslant 0 \tag{19}$$

A análise dinâmica pode ser realizada derivando-se a Eq. (19), tal que

$$\dot{v} = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = x^T(A^T P + PA)x = -x^T Qx \leqslant 0 \tag{20}$$

e como o resultado é menor ou igual a zero, pode-se afirmar que $v(t)$ decresce com o passar do tempo, destacando que a potência ou energia futura de $v(t)$ será menor do que a sua condição inicial, sendo, assim, estável no senso de Lyapunov.

Pode-se concluir que

$$v(t) = x^T(t)Px(t) \leqslant v(0) = x^T(0)Px(0) \tag{21}$$

e que qualquer solução futura de $v(t)$ será menor ou igual a sua condição inicial e se tratando de um sistema linear invariante no tempo cujas condições iniciais sejam nulas, o sistema será assintoticamente estável.

Como a equação de Lyapunov recai na estrutura da Equação Algébrica de Ricatti de Controlador e Observador para controle e observação de estado ótimas, consequentemente se tem a prova das condições de estabilidade do controle LQ e do método de Kalman com base no Teorema de Estabilidade de Lyapunov.