Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, ITEC-UFPA.
PPGEE0013 – Teoria de Sistemas Lineares (2018.1), Prova 01**, 12/06/2018, 14:00h às 16:00h.**
Prof. Antonio Silveira (asilveira@ufpa.br)

SOLUÇÃO.

1) Para o sistema MIMO mostrado a seguir, obtenha um modelo em espaço de estados apresentando as equações de estado e de saída, indicando as matrizes *A*, *B*, *C*, *D*. [2,5 pts]

$$\dddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 - 2y_2 = \dot{u}_1 + u_1$$
$$\ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 + 2y_1 = u_2$$

Uma **possível realização** desse sistema, em espaço de estados, é:

$$y_1 = x_1; \quad \dot{y}_1 = x_2; \quad \ddot{y}_1 = x_3; \quad \dot{u}_1 = x_4$$
$$y_2 = x_5; \quad \dot{y}_2 = x_6$$

$$\dot{x}_3 + 3x_2 + 2x_1 - 2x_5 = x_4 + u_1$$
$$\dot{x}_6 + 2x_6 + 2x_1 = u_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

2) Para o sistema mostrado a seguir, responda os seguintes itens: [5,0 pts]
(a) O sistema é assintoticamente estável? É BIBO estável?
(b) Verifique se esta realização de estado do sistema é controlável e observável.
(c) Projete um regulador de estados, cuja lei de controle é $u = -Kx$, que aloque os autovalores de malha fechada em -1 e -2. Apresente, como resultado, o vetor de ganho *K* calculado.
(d) Projete um observador de estados tal que os autovalores de malha fechada, deste sistema observador, sejam alocados em -1 e -2. Apresente, como resultado, o vetor de ganho *L* calculado.
(e) Esboce o diagrama de blocos do sistema compensador dinâmico formado pela junção do regulador e do observador de estados, isto é, o regulador opera via realimentação de estados estimados, $u = -K\hat{x}$.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

(a)
Todo sistema assintoticamente estável é também BIBO estável. Sendo assim, basta verificar se os autovalores da matriz A têm parte real negativa. Se tiverem, o sistema é então estável, assintoticamente.

$$\det\left([\lambda I - A]\right) = 0$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} \lambda + 4 & 2 \\ -4 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$(\lambda + 4)\,\lambda + 8 = 0$$
$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -2 \pm j2$$

Como o sistema possui par de pólos complexos conjugados com parte real igual a -2, o sistema é estável, assintoticamente. Portanto, é também BIBO estável.

(b) Para ser controlável e observável, as matrizes de controlabilidade e observabilidade do sistema devem ter determinantes diferentes de zero. Sendo assim:

$$C_o = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\det\left(C_o\right) = 16$$
$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det(O_b) = -4$$

Logo, o sistema é controlável e observável.

(c)
Alocar os autovalores do sistema em -1 e -2 significa projetar um sistema em M.F. cujo polinômio característico é dado por

$$\Delta_{mf}(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

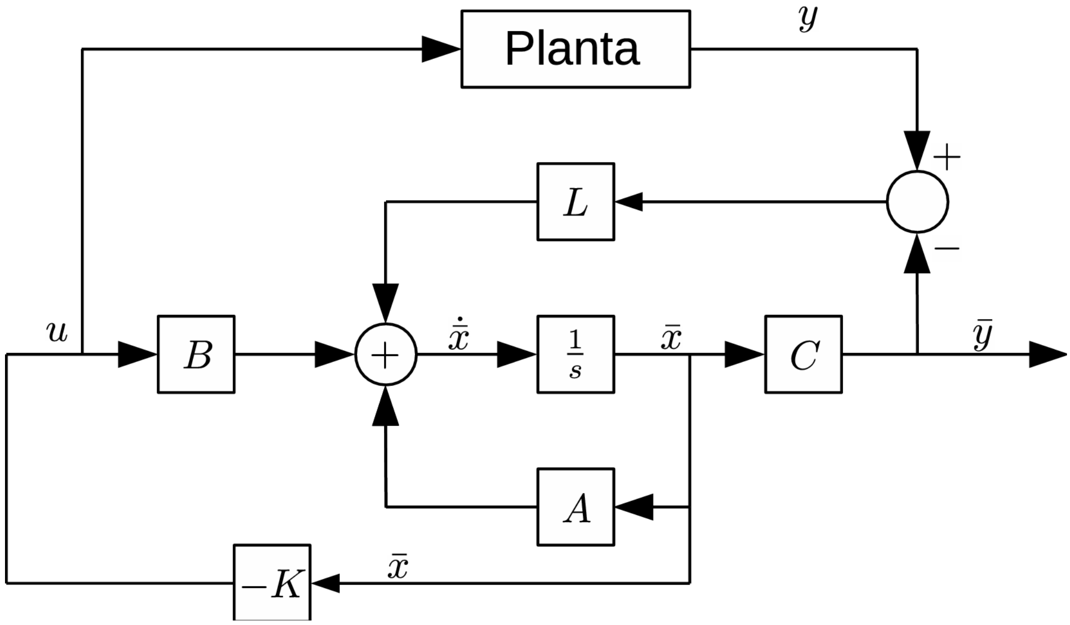
Usando-se a fórmula de Ackermann,

$$K = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] (C_o)^{-1} \Delta_{mf}(A)$$
$$\Delta_{mf}(A) = A^2 + 3A + 2I = \left[\begin{array}{cc} -2 & 2 \\ -4 & -6 \end{array} \right]$$
$$(C_o)^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,125 \end{array} \right]$$
$$K = \left[\begin{array}{cc} -0,5 & -0,75 \end{array} \right]$$

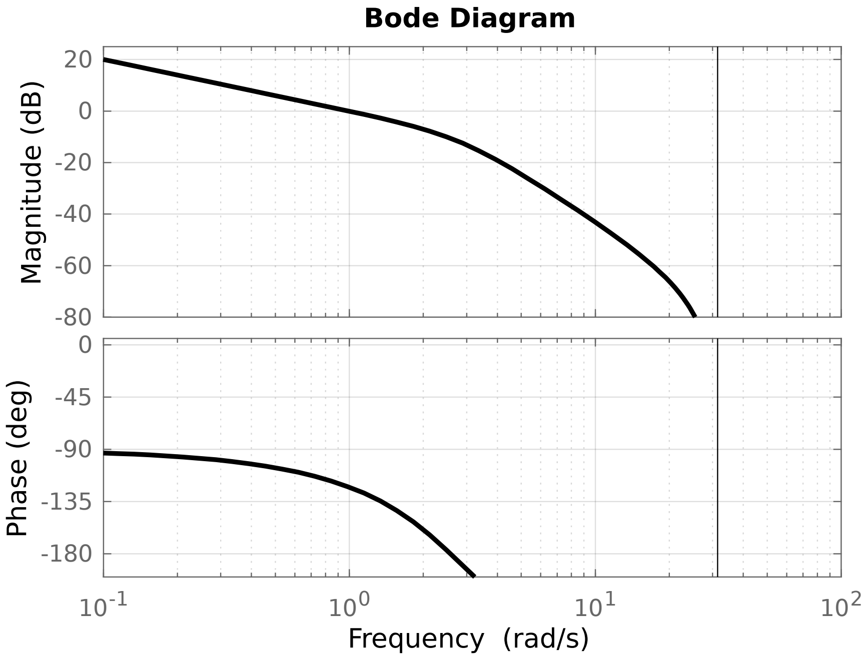
(d) O projeto do observador pedido usará o mesmo polinômio de alocação, sendo assim, possível ir diretamente para a solução dual de Ackermann, para o caso observador, dado por:

$$L^T = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] \left(O_b{}^T\right)^{-1} \Delta_{mf}(A^T)$$
$$\Delta_{mf}(A^T) = \left(A^T\right)^2 + 3A^T + 2I = [\Delta_{mf}(A)]^T = \left[\begin{array}{cc} -2 & -4 \\ 2 & -6 \end{array} \right]$$
$$\left(O_b{}^T\right)^{-1} = \left(O_b{}^{-1}\right)^T = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0,25 & 0 \end{array} \right]$$
$$L = \left[\begin{array}{c} -0,5 \\ -1 \end{array} \right]$$

(e)



3) Considerando o diagrama de Bode de $C(z)G(z)$, mostrado na figura a seguir, em que $G(z)$ é o equivalente discreto do sistema $G(s)$ da Questão 2, responda: [2,5 pts]
(a) $C(z)$ é um compensador do tipo avanço ou atraso de fase? Por que?
(b) Segundo o critério de estabilidade de Bode, este é um sistema de controle robusto? Responda com base nos valores aproximados das margens de ganho e de fase.



(a) O sistema da Questão 2 é do tipo-0, isto é, não possui integrador, já que seus autovalores são $-2 \pm j2$. Sendo assim, C(z) precisa ser um compensador do tipo atraso de fase. Pela curva de fase verifica-se que C(z)G(z) já inicia com defasamento de 90 graus e por isto se trata de um sistema C(z) integrador. A curva de magnitude confirma esta afirmação, já que há o decaimento de 20dB/déc que se acentua, posteriormente, na frequência de ressonância do sistema G(z). Não há, em nenhuma parte dos gráficos apresentados, qualquer comportamento de elevação de ganho ou de elevação de fase, logo não há qualquer avanço de fase.

(b) A frequência de cruzamento (onde a curva de magnitude cruza 0dB) ocorrem em 1rad/s. Nesta frequência, a “distância” da curva de fase para o ângulo de inversão de fase (isto é, 180 graus) é maior que 45 graus. Pode-se afirmar então que a margem de fase (MF) de C(z)G(z) é superior a 45 graus.

A frequência de inversão de fase, ocorre, aproximadamente, em $10^{0,5}$ rad/s. Observando-se a curva de magnitude nesta frequência, se permite afirmar que há atenuação superior a 5dB, caracterizando assim uma margem de ganho maior (MG) que 5dB.

Considerando-se então MG $\geqslant 5$ dB e MF $\geqslant 45^o$, este sistema possui as características de resposta frequência, pelo critério de estabilidade de Bode, de um sistema de controle robusto.