Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, ITEC-UFPA.
PPGEE0013 - TEORIA DE SISTEMAS LINEARES, Prova 01**, 05/07/2023, 14:50h às 16:30h.**
Prof. Antonio Silveira (asilveira@ufpa.br)

SOLUÇÃO:

1) [2,5 pts] Para o sistema dinâmico mostrado a seguir, com duas entradas e duas saídas, obtenha uma representação no espaço de estados.

$$\ddot{y}_1(t) + 2\dot{y}_1(t) - 2y_2(t) = u_1(t)$$
$$y_2(t) - y_1(t) = u_2(t)$$

Resp.)

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ \dot{y}_1 &= x_2 \\ y_2 &= y_1 + u_2 = x_1 + u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 - 2\left(y_1 + u_2\right) = u_1 \\ &\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 - 2y_1 - 2u_2 = u_1 \\ &\dot{x}_2 + 2x_2 - 2x_1 - 2u_2 = u_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 + u_1 + 2u_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + u_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

2) [2,5 pts] Para a realização de estado mostrada a seguir, se esta for controlável, projete um regulador por realimentação total de estado, tal que a dinâmica de malha fechada seja criticamente amortecida e a frequência natural seja $\omega_n = 1$ rad/s. Após, apresente a equação (a lei de controle) desse regulador e o diagrama de blocos desse regulador conectado ao sistema controlado.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + [0]\, u(t)$$

Resp.)
Teste de controlabilidade:

$$C_o = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\det\left(C_o\right) = -8$$

Como o determinante da matriz de controlabilidade é diferente de zero, **o sistema é controlável**.

Requisitos de malha fechada: $\zeta = 1$ e $\omega_n = 1$

Polinômio de alocação definido por esses requisitos: $P_{cl}(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = s^2 + 2s + 1$

Cálculo do ganho pelo método de Ackermann:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} (C_o)^{-1} P_{cl}(A)$$

$$(C_o)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\,(C_o)}{\det\,(C_o)} = \frac{\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}^T}{-8} = \frac{\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}{-8} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{cl}(A) = AA + 2A + I$$

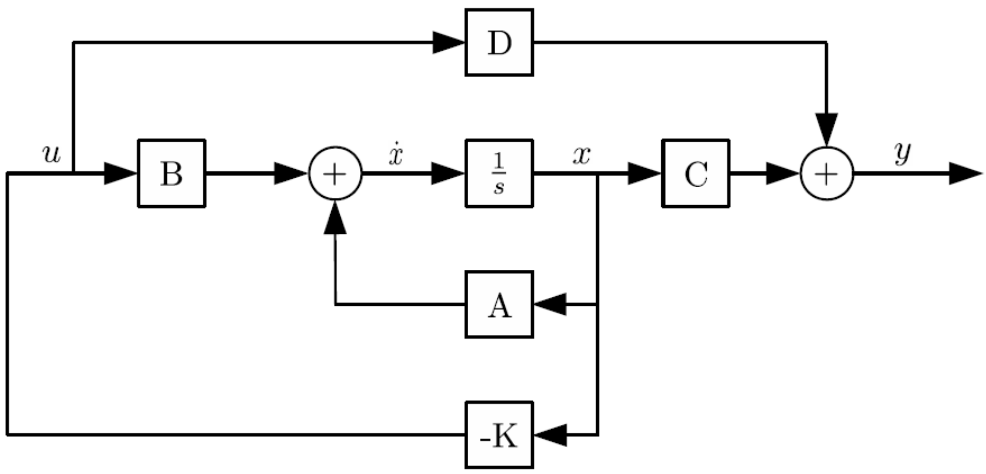
$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{cl}(A) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{K = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{u(t) = -Kx(t)}$$



3) [2,5 pts] Para a realização de estado mostrada a seguir, se esta for observável, projete um estimador de estado, tal que a dinâmica de malha fechada desse estimador seja duas vezes mais veloz que a dinâmica de malha aberta, mas mantendo o mesmo fator de amortecimento do modelo de projeto. Após, apresente as equações desse estimador e o diagrama de blocos desse estimador conectado ao sistema observado.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + [0]\, u(t)$$

Resp.)

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\det(O_b) = 1, \text{ logo o sistema é observá vel.}$$

Para ser possível especificar a dinâmica de malha fechada é necessário saber a dinâmica de malha aberta. Portanto, verifica-se com base nos autovalores da matriz A, o polinômio característico de malha aberta do sistema:

$$P_{ol}(s) = \det(sI - A) = \det\left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix}$$

$$P_{ol}(s) = s^2 + 2s + 1 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2$$
$$\zeta = 1 \text{ e } \omega_n = 1 \text{ rad/s}$$

Com base na dinâmica de malha aberta, verifica-se que o observador de estado deverá manter o mesmo fator de amortecimento crítico, mas terá $\omega_{n_{ob}} = 2\omega_n = 2$ rad/s. Sendo assim, o polinômio de alocação ou polinômio de malha fechada do observador de estado será:

$$P_{cl}(s) = s^2 + 4s + 4$$

Resolvendo o cálculo do ganho por Ackermann:

$$L^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left({O_b}^T\right)^{-1} P_{cl}(A^T)$$

$$\left({O_b}^T\right)^{-1} = O_b = I$$

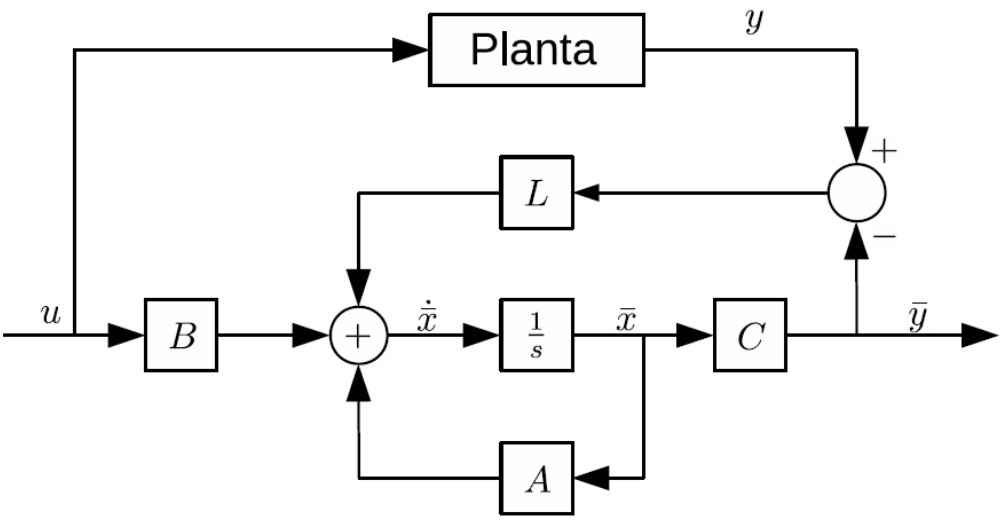
$$P_{cl}(A^T) = A^T A^T + 4A^T + 4I$$

$$A^T A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$P_{cl}(A^T) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{L = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A - LC)\,\bar{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$
$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t)$$



4) [2,5 pts] Considerando o modelo discreto mostrado a seguir, obtenha a sua forma aumentada pela inclusão de um integrador discreto, tal que o vetor de estado aumentado seja dado por $x_a(k) = \begin{bmatrix} \Delta x(k) & y(k) \end{bmatrix}^T,\ \Delta = 1 - z^{-1}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

Resp.)

$$\begin{aligned} &\Delta x(k+1) = \mathbf{A}\Delta x(k) + \mathbf{B}\Delta u(k) \\ &y(k+1) - y(k) = \mathbf{C}\Delta x(k+1) = \mathbf{CA}\Delta x(k) + \mathbf{CB}\Delta u(k) \\ &y(k+1) = y(k) + \mathbf{CA}\Delta x(k) + \mathbf{CB}\Delta u(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{CB} \end{bmatrix} \Delta u(k) \\ &y_a(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + [0]\, \Delta u(k) \end{aligned}$$