Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, ITEC-UFPA.
PPGEE0013 – Teoria de Sistemas Lineares (2019.1), Prova 01**, 19/06/2018, 9:20h às 11:00h.**
Prof. Antonio Silveira (asilveira@ufpa.br)

SOLUÇÃO:

1) [4,0 pts] Sabendo que a equação algébrica de Riccati de **controlador** e que o ganho ótimo do **LQR** são, respectivamente, calculados por

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$

$$K = R^{-1}B^T P$$

Projete um filtro de Kalman para o sistema G(s) mostrado a seguir, apresentando, como resultados, **(a)** o ganho do filtro, **(b)** a equação de estado e a de saída estimada, **(c)** o diagrama de blocos do filtro de Kalman conectado a G(s). **(d)** Responda, também, se o filtro projetado é estável, justificando a resposta.

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 5s + 6}$$

Resp. (a) Para a realização do projeto é necessária uma realização de estados de G(s). Optando por

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 6u$$

$$x_1 = y\ ; \quad x_2 = \dot{y}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

pode-se então seguir para o projeto do filtro de Kalman.

Pela dualidade entre o caso controlador e o caso observador, a equação de Riccati e do ganho para o filtro de Kalman ficam, respectivamente, nas seguintes formas:

$$0 = AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP$$

$$L^T = R^{-1}CP$$

Como a realização de estado arbitrada é observável, para que se tenha uma solução de uma P simétrica basta escolher uma $Q \geq 0$ e uma $R > 0$. Usando $Q = C^T C$ e $R = 1$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + p_{12} & 0 + p_{22} \\ -6p_{11} - 5p_{12} & -6p_{12} - 5p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 + p_{12} & -6p_{11} - 5p_{12} \\ 0 + p_{22} & -6p_{12} - 5p_{22} \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p_{12} & p_{22} - 6p_{11} - 5p_{12} \\ -6p_{11} - 5p_{12} + p_{22} & -12p_{12} - 10p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & 0 \\ p_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p_{12} & p_{22} - 6p_{11} - 5p_{12} \\ -6p_{11} - 5p_{12} + p_{22} & -12p_{12} - 10p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {p_{11}}^2 & p_{11}p_{12} \\ p_{11}p_{12} & {p_{12}}^2 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p_{12} - {p_{11}}^2 & p_{22} - 6p_{11} - 5p_{12} - p_{11}p_{12} \\ -6p_{11} - 5p_{12} + p_{22} - p_{11}p_{12} & -12p_{12} - 10p_{22} - {p_{12}}^2 \end{bmatrix}$$

Obs: a partir deste ponto a solução da P se tronava mais complexa do que se havia idealizado para a solução da questão. Por este motivo, os alunos que conseguiram realizar a construção do problema, com a equação de Riccati de estimador, além de apresentarem a matriz P como uma matriz simétrica, obtiveram o item (a) integralmente.

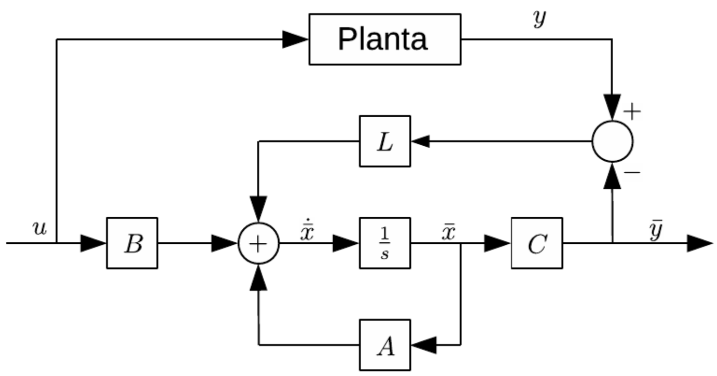
$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4425 & -0,4021 \\ -0,4021 & 0,4664 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0,4425 \\ -0,4021 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\,\hat{x} + Bu + Ly$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

(c)



(d) Sabendo que a realização de estado obtida é observável e que para $Q \geq 0$ e $R > 0$ há solução para uma matriz de covariância P, então, os autovalores de (A-LC) são assintoticamente estáveis.

2) [3,0 pts] Para o sistema MIMO mostrado a seguir, obtenha um modelo no espaço de estados apresentando as equações de estado e de saída.

$$\dddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 - 2y_2 = u_1$$
$$\ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 + 2y_1 = u_2$$

Resp.) Arbitrando as seguintes variáveis de estado:

$$x_1 = y_1; \quad x_2 = \dot{y}_1; \quad x_3 = \ddot{y}_1$$
$$x_4 = y_2; \quad x_5 = \dot{y}_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_2 - 2x_1 + 2x_4 + u_1 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = -2x_5 - 2x_1 + u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

3) [3,0 pts] Obtenha a função de transferência do sistema mostrado a seguir.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 20 & -200 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 200 \end{bmatrix} x$$

Resp.)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s-20 & 200 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$
$$\det(sI - A) = s^2 - 20s$$
$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s & -200 \\ 0 & s-20 \end{bmatrix}}{s^2 - 20s}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -200 \\ 0 & s-20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2 - 20s} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 200s - 4000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2 - 20s}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{200s - 4000}{s^2 - 20s}$$