UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MERCEDES MARIA BARBOSA DINIZ

TEORIA DE SISTEMAS LINEARES
ATIVIDADE 1

BELÉM
2025

MERCEDES MARIA BARBOSA DINIZ

TEORIA DE SISTEMAS LINEARES
ATIVIDADE 1

Relatório com requisito para obtenção parcial de nota na disciplina de Teoria de Sistemas Lineares, ministrada pelo Professor. Antonio da Silva Silveira

BELÉM
2025

Sumário

1 Introdução 4

2 Modelagem da Planta 4

3 Projeto dos Controladores 6
3.1 Controlador PID 6
3.2 Controlador PI-D 8

4 Resultados e Discussões 9

Lista de Figuras

1.1 Conjunto de dados experimentais disponibilizados. 4
2.1 Comparação das plantas modeladas com o sinal original. 5
3.1 Diagrama do sistema com o controlador PID. 6
3.2 Resposta do sistema com PID. 7
3.3 Diagrama do sistema com o controlador PI-D. 8
3.4 Resposta do sistema com PI-D. 9
4.1 Simulação com um perturbação de carga de 30%. 10

Lista de Tabelas

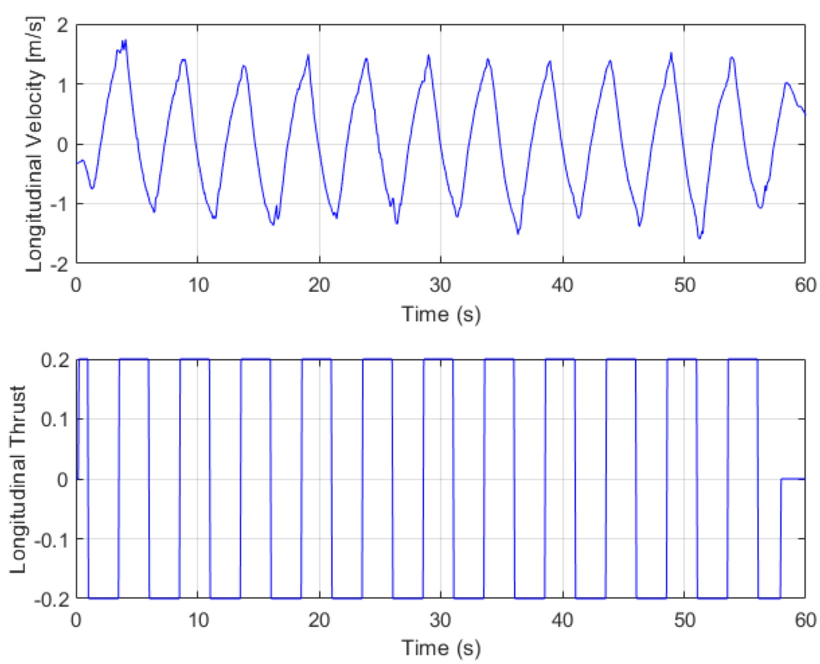
1 Índices de desempenho dos controladores na simulação com perturbação. 10

1 Introdução

Esta atividade tem como objetivo revisar os conceitos relacionados ao projeto de controladores PID digitais, aplicando-os no controle da velocidade longitudinal de um quadricóptero. Para isso, foi utilizado um conjunto de dados experimentais, exibido na Figura 1.1 e disponibilizado em `https://lacos.ufpa.br/plantas/ardrone/ardrone.html`, a partir do qual foram desenvolvidos dois modelos da planta: um modelo de segunda ordem, empregado na etapa de projeto e sintonia do controlador, e um modelo de terceira ordem, utilizado posteriormente nas simulações para validação dos controladores.

A sintonia do controlador PID foi realizada manualmente, com base no modelo de segunda ordem, e os ganhos obtidos também foram aplicados na estrutura PI-D, conforme previsto na atividade. Em seguida, ambos os controladores foram testados em simulação no modelo de terceira ordem, com a realização de dois experimentos principais: seguimento de referência do tipo degrau unitário e rejeição de perturbação de carga correspondente a 30% da referência.

Figura 1.1: Conjunto de dados experimentais disponibilizados.



2 Modelagem da Planta

O primeiro passo para a síntese dos controladores foi a modelagem do sistema dinâmico correspondente à velocidade longitudinal do quadricóptero. Para isso, foi utilizada uma abordagem baseada em dados experimentais, a partir dos quais se buscou identificar representações discretas do sistema.

O modelo de segunda ordem foi escolhido para representar uma aproximação simplificada da planta. Sua função de transferência discreta foi estruturada na forma:

$$G_1(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{1}$$

A partir dessa representação no domínio z, obtém-se diretamente a equação a diferenças correspondente, que descreve o comportamento do sistema no tempo discreto:

$$y[n] = -a_1.y[n-1] - a_2.y[n-2] + b_0.u[n-1] + b_1.u[n-2] \tag{2}$$

Complementarmente, um modelo de terceira ordem foi identificado para capturar de forma mais precisa as dinâmicas da planta, incluindo eventuais efeitos de modos mais rápidos ou atrasos internos. A função de transferência proposta para esse modelo é expressa por:

$$G_2(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} \tag{3}$$

o que, no domínio do tempo discreto, resulta na equação a diferenças:

$$y[n] = -a_1.y[n-1] - a_2.y[n-2] - a_3.y[n-3] + b_0.u[n-1] + b_1.u[n-2]b_2.u[n-2] \tag{4}$$

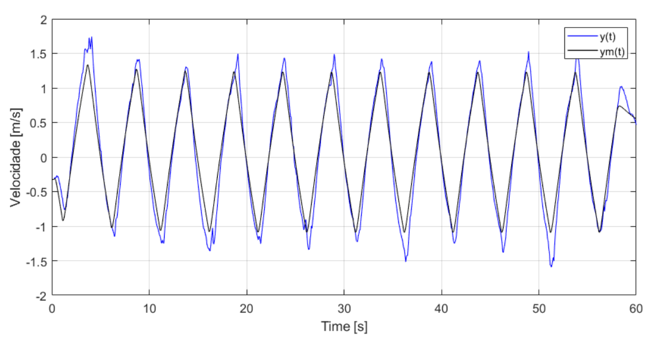
Para a obtenção dos coeficientes dos modelos, utilizou-se o método dos mínimos quadrados, técnica clássica de identificação paramétrica. Nesse método, busca-se minimizar o erro quadrático entre as saídas medidas e as saídas estimadas pelo modelo. Denotando por $\mathbf{Y}$ o vetor de saídas medidas, por $\mathbf{\Phi}$ a matriz de regressores (formada pelas saídas e entradas passadas), e por $\hat{\theta}$ o vetor de parâmetros a serem ajustados, a solução ótima é dada por:

$$\hat{\theta} = \left(\mathbf{\Phi^T \Phi}\right)^{-1} \mathbf{\Phi^T Y} \tag{5}$$

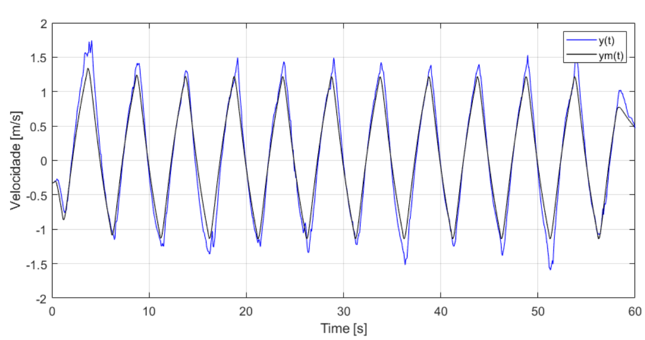
É importante destacar que a matriz $\mathbf{\Phi^T \Phi}$ precisa ser inversível para que a solução acima exista. Este método assume que os dados são suficientemente persistentes para excitar todas as dinâmicas relevantes da planta, e que os efeitos de ruído e de modelagem não nula são desprezáveis em comparação ao sinal útil.

Na Figura 2.1 pode-se observa nas curvas em preto os modelos gerados em comparação com o sinal real do *datalog*, destacado em azul.

Figura 2.1: Comparação das plantas modeladas com o sinal original.



(a) Modelo de 2ª Ordem.



(b) Modelo de 3ª Ordem.

3 Projeto dos Controladores

A etapa seguinte consistiu no projeto dos controladores digitais para o sistema. Como solicitado, os sinais de controle foram limitados entre -1 e 1. A síntese dos controladores foi realizada a partir da aproximação conhecida como *Backward Difference*, que permite transformar a ação contínua do PID em uma forma discreta compatível com sistemas digitais dado a seguinte aproximação do valor de s:

$$s := \frac{1 - Z^{-1}}{T_s} \tag{6}$$

Nesta abordagem, os ganhos contínuos do PID, K_p, K_i e K_d, são convertidos nos parâmetros discretos s_0, s_1 e s_2 através das expressões:

$$s_0 = K_p + K_i T_s + \frac{K_d}{T_s} \qquad s_1 = -K_p - 2\frac{K_d}{T_s} \qquad s_2 = \frac{K_d}{T_s} \tag{7}$$

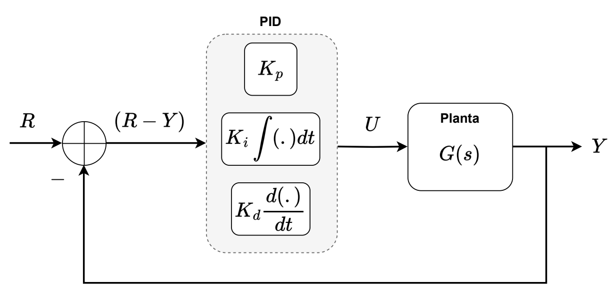
3.1 Controlador PID

O controlador PID contínuo utilizado nesta atividade é descrito pela equação 8, onde $U(s)$ representa o sinal de controle no domínio de Laplace, $R(s)$ é o sinal de referência, $Y(s)$ é a saída do sistema e os parâmetros k_p, k_i e k_d correspondem aos ganhos proporcional, integral e derivativo, respectivamente.

$$U(s) = \left(k_p + k_i\frac{1}{s} + k_d s\right) \times (R(s) - Y(s)) \tag{8}$$

A Figura 3.1 ilustra o diagrama em bloco do sistema de controle em malha fechada com realimentação unitaria, contendo o controlador PID e a planta. O sinal de erro, obtido da diferença entre a referência e a saída do sistema, é processado pelas ações proporcional, integral e derivativa para gerar o sinal de controle $u(t)$.

Figura 3.1: Diagrama do sistema com o controlador PID.

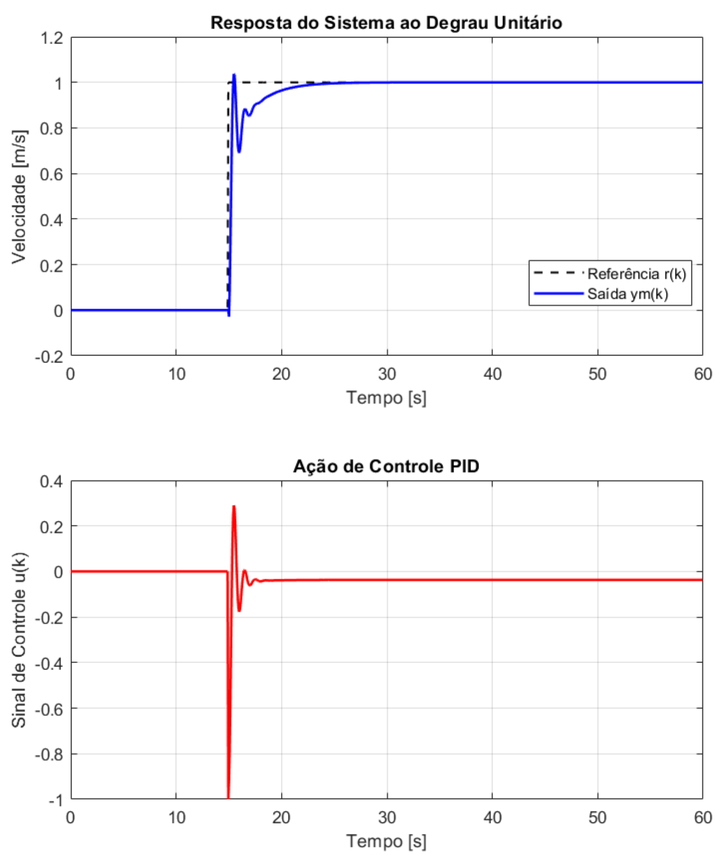


Para implementação em tempo discreto, o controlador foi discretizado utilizando a aproximação por diferenças retroativas (*Backward Difference*), conforme indicado na equação 9. Nessa equação, T_s representa o período de amostragem e z^{-1} é o operador de atraso unitário. A equação é reorganizada em uma forma recursiva, onde os termos s_0, s_1 e s_2 agregam os efeitos dos ganhos k_p, k_i e k_d em cada termo do erro com atraso.

$$
\begin{aligned}
u[k] &= \left(k_p + k_i\frac{T_s}{1-z^{-1}} + k_d\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)\times(r[k]-y[k])\\
&\Rightarrow u[k]\times(1-z^{-1}) = \left(k_p + k_i\frac{T_s}{1-z^{-1}} + k_d\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)\times(r[k]-y[k])\times(1-z^{-1})\\
&\Rightarrow u[k]-u[k-1] = \left[k_p - k_p z^{-1} + k_i T_s + \frac{k_d}{T_s}\cdot(1-2z^{-1}+z^{-2})\right]\times(r[k]-y[k])\\
&\Rightarrow u[k] = u[k-1] + \left(k_p + k_i T_s + \frac{k_d}{T_s}\right)\times(r[k]-y[k]) + \left(-k_p - \frac{2k_d}{T_s}\right)\times(r[k-1]-y[k-1])\\
&\quad + \left(\frac{k_d}{T_s}\right)\times(r[k-2]-y[k-2])\\
&\therefore u[k] = u[k-1] + s_0\times(r[k]-y[k]) + s_1\times(r[k-1]-y[k-1]) + s_2\times(r[k-2]-y[k-2])
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Os ganhos utilizados na sintonia foram $k_p = -1.2$, $k_i = -0.5$ e $k_d = -0.01$. A resposta do sistema ao degrau unitário, com o controlador PID aplicado ao modelo de segunda ordem, é apresentada na Figura 3.2. Nessa simulação, observa-se que o sistema atingiu a referência com sobressinal de aproximadamente 3.68% e tempo de assentamento de 4.22 segundos, atendendo aos critérios de desempenho especificados.

Figura 3.2: Resposta do sistema com PID.



3.2 Controlador PI-D

O controlador PI-D é uma variação da estrutura PID em que a ação derivativa atua apenas sobre a saída do sistema, evitando amplificação de ruído no sinal de referência. A equação contínua do controlador PI-D está apresentada na equação 10.

$$U(s) = \left(k_p + k_i \frac{1}{s}\right) R(s) - \left(k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s\right) Y(s) \tag{10}$$

A Figura 3.3 apresenta o diagrama de blocos do sistema com controlador PI-D, evidenciando que a ação derivativa incide apenas sobre o caminho da realimentação, enquanto o sinal de referência passa apenas pelas ações proporcional e integral.

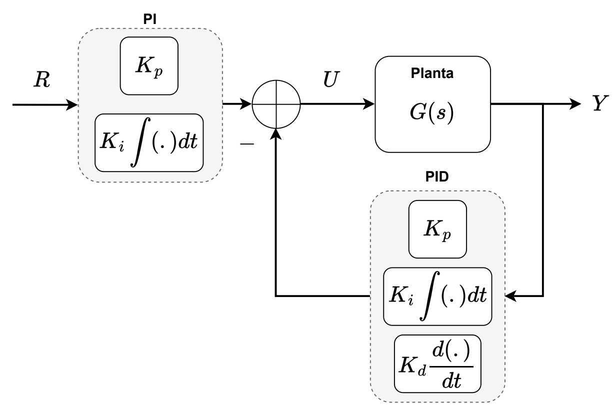


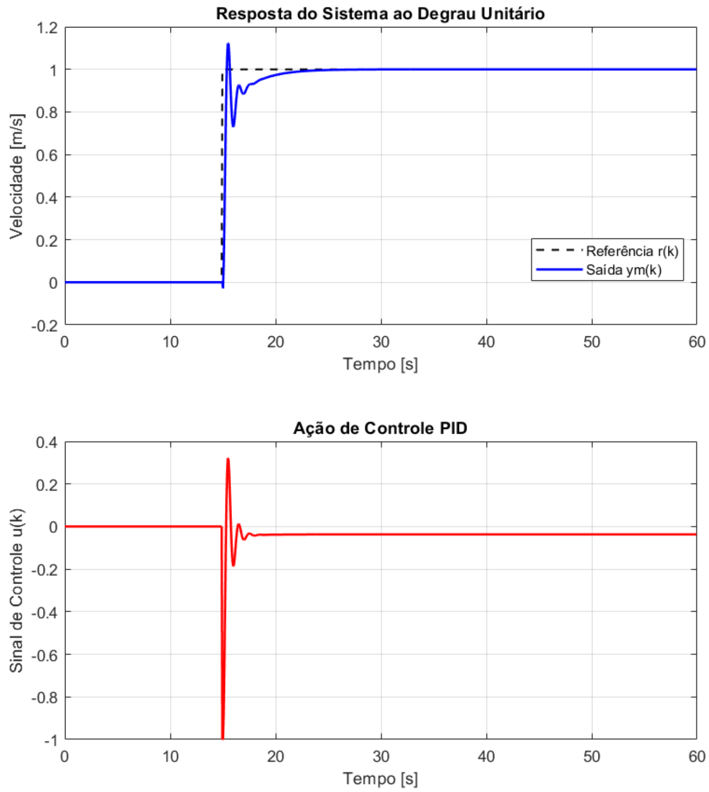
Figura 3.3: Diagrama do sistema com o controlador PI-D.

A discretização do controlador PI-D foi realizada utilizando a aproximação *Backward Difference*. O procedimento de discretização, apresentado na equação 11, resulta em uma equação recursiva que expressa o sinal de controle $u[k]$ em função dos valores atuais e passados da referência $r[k]$ e da saída do sistema $y[k]$.

$$\begin{aligned}
u[k] &= \left(k_p + k_i \frac{T_s}{1-z^{-1}}\right) r[k] - \left(k_p + k_i \frac{T_s}{1-z^{-1}} + k_d \frac{1-z^{-1}}{T_s}\right) y[k] \\
&\Rightarrow u[k](1-z^{-1}) = \left[\left(k_p + k_i \frac{T_s}{1-z^{-1}}\right) r[k] - \left(k_p + k_i \frac{T_s}{1-z^{-1}} + k_d \frac{1-z^{-1}}{T_s}\right) y[k]\right](1-z^{-1}) \\
&\Rightarrow u[k] - u[k-1] = \left(k_p - k_p z^{-1} + k_i T_s\right) r[k] - \left(k_p - k_p z^{-1} + k_i T_s + \frac{k_d}{T_s}(1 - 2z^{-1} + z^{-2})\right) y[k] \\
&\Rightarrow u[k] = u[k-1] + (k_p + k_i T_s) r[k] + (-k_p) r[k-1] \\
&\quad - \left[\left(k_p + k_i T_s + \frac{k_d}{T_s}\right) y[k] + \left(-k_p - \frac{2k_d}{T_s}\right) y[k-1] + \left(\frac{k_d}{T_s}\right) y[k-2]\right] \\
&\therefore u[k] = u[k-1] + (k_p + k_i T_s) r[k] + (-k_p) r[k-1] - (s_0 y[k] + s_1 y[k-1] + s_2 y[k-2])
\end{aligned} \tag{11}$$

Conforme solicitado, os valores dos ganhos do controlador PI-D foram os mesmos utilizados na sintonia do controlador PID: $k_p = -1.2$, $k_i = -0.5$ e $k_d = -0.01$. A Figura 3.4 apresenta a resposta do sistema ao degrau unitário com o controlador PI-D aplicado ao modelo de segunda ordem. Nessa simulação, observa-se que o sistema atingiu a referência com um sobressinal de aproximadamente 12.24% e tempo de assentamento de 3.51 segundos.

Figura 3.4: Resposta do sistema com PI-D.



4 Resultados e Discussões

Após o projeto e sintonia dos controladores, a etapa de validação foi realizada com simulações no modelo de terceira ordem da planta. O objetivo foi observar o desempenho dos controladores PID e PI-D no cenários: o seguimento de uma referência do tipo degrau unitário com rejeição de uma perturbação de carga correspondente a 30% do valor da referência, introduzida na saída no instante de 30 segundos.

A Figura 4.1 apresenta os resultados da simulação, nela é possível observar que, até o instante da perturbação, ambos os controladores acompanham a referência de forma satisfatória, embora com um sobressinal maior do observado na etapa de sintonia. Quando a perturbação é aplicada, nota-se um desvio na saída, seguido por uma ação corretiva do controlador para retomar a referência.

Para uma análise mais quantitativa do desempenho dos controladores, foram considerados quatro índices principais: a energia (E) e a potência média (P) do sinal de controle, o erro quadrático integral (ISE) e o erro médio quadrático normalizado (NMSE). A Tabela 1 apresenta os valores obtidos para cada índice, nela pode-se observa que ambos os controladores apresentaram desempenhos similares em termos de erro e consumo energético. O controlador PID apresentou ligeiramente menor energia acumulada e ISE, e o valor de NMSE próximo de zero para ambos os controladores indica um bom rastreamento da referência, mesmo na presença da perturbação.

Figura 4.1: Simulação com um perturbação de carga de 30%.

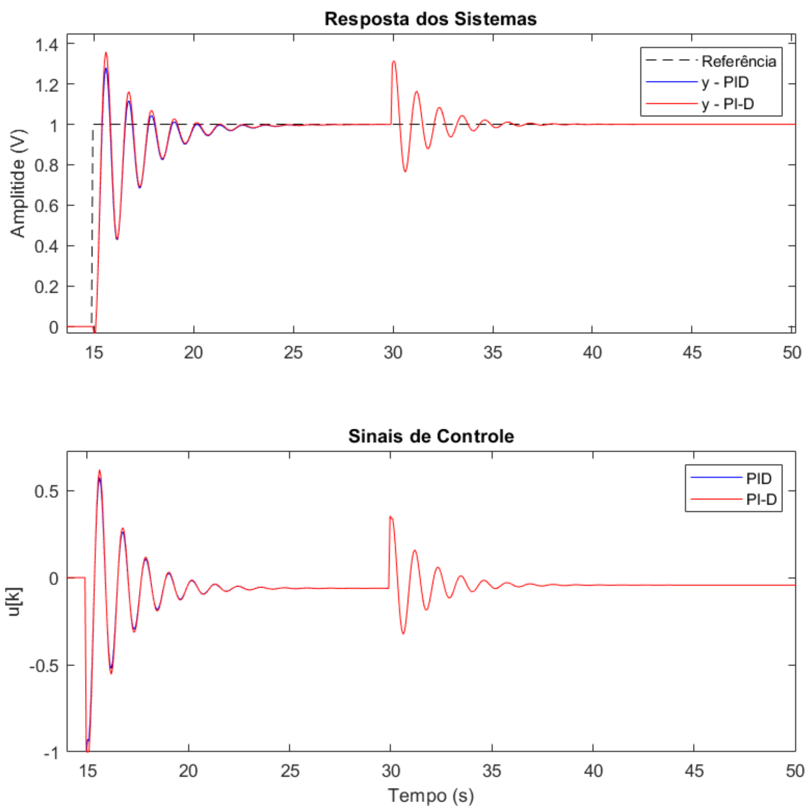


Tabela 1: Índices de desempenho dos controladores na simulação com perturbação.

	PID	**PI-D**
E	10.20	11.17
P	0.01	0.01
ISE	8.59	8.60
NMSE	0.01	0.01