UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

TEORIA DE SISTEMAS LINEARES

Prof. Antonio Silveira (asilveira@ufpa.br)

Prova 01. Data: 13/05/2024.

SOLUÇÃO

1) Dado o sistema mostrado a seguir, verifique se ele é (a) **estável**, se é (b) **controlável** e (c) **observável**. Por fim, (d) obtenha a **função de transferência** que descreve a sua relação de entrada e saída [3,0 pts].

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 20 & -200 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 200 \end{bmatrix} x$$

$$a) \;\det(sI - A) = 0$$
$$\det \begin{pmatrix} s-20 & s+200 \\ 0 & s \end{pmatrix} = 0$$
$$(s-20)\,s = 0$$
$$\lambda_1 = 20$$
$$\lambda_2 = 0$$

$$b) \; C_o = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$$
$$\det(C_o) \neq 0 \text{ seria controlável}$$
$$C_o = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 & -200 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -200 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det(C_o) = 200, \text{ sistema controlável}$$

$$c) \; \mathrm{O}_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}, \det(\mathrm{O}_b) \neq 0 \text{ seria observável}$$
$$\mathrm{O}_b = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 200 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & -200 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 200 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det(\mathrm{O}_b) = 0, \text{ sistema não observável}$$

$$d)\ \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D = C\frac{Adj\begin{pmatrix} s-20 & s+200 \\ 0 & s \end{pmatrix}}{(s-20)\,s}B$$

$$Adj\begin{pmatrix} s-20 & s+200 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \left[cof\begin{pmatrix} s-20 & s+200 \\ 0 & s \end{pmatrix}\right]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^2 s & (-1)^3 0 \\ (-1)^3(s+200) & (-1)^4(s-20) \end{bmatrix}^T = \begin{pmatrix} s & -s-200 \\ 0 & s-20 \end{pmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -s-200 \\ 0 & s-20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(s-20)\,s} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 200(s-20\ ) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(s-20)\,s}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{200(s-20)}{(s-20)\,s} = \frac{200}{s}$$

2) Para o sistema mostrado a seguir, utilizando a fórmula de Ackermann, projete um observador de estado, tal que os polos de malha fechada desse observador sejam posicionados em

$$-2 \pm j2$$

Apresente, como resultado, o ganho L do observador, escrevendo também a equação de estado e de saída desse sistema projetado [3,0 pts].

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(O_b) = 2,$ sistema observável

$$P_{Ocl}(s) = (s+2+j2)\,(s+2-j2) = s^2 + 4s + 8$$
$$P_{Ocl}(A^T) = (A^T)^2 + 4(A^T)^1 + 4(A^T)^0$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(O_b^T\right)^{-1} P_{Ocl}(A^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Euqação de Estado e de Saída:

$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L\,[y - \bar{y}]$

$\bar{y} = C\bar{x}$

3) Para o sistema MIMO mostrado a seguir, obtenha uma realização de estado, apresentando as matrizes A, B, C, D obtidas [4,0 pts].

$$\dddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 - 2y_2 = u_1$$
$$\ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 + 2y_1 = \dot{u}_2$$

$$\dddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 - 2y_2 = u_1$$
$$\dot{y}_2 + 2y_2 + 2\int y_1 dt = u_2$$
$$x_1 = \int y_1 dt; \quad x_2 = \dot{x}_1 = y_1; \quad x_3 = \dot{x}_2 = \dot{y}_1; \quad x_4 = \dot{x}_3 = \ddot{y}_1; \quad x_5 = y_2$$

$$\dddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 - 2y_2 = u_1$$
$$\boxed{\dot{x}_4 = -2x_2 - 3x_3 + 2x_5 + u_1}$$
$$\dot{y}_2 + 2y_2 + 2\int y_1 dt = u_2$$
$$\boxed{\dot{x}_5 = -2x_1 - 2x_5 + u_2}$$

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = x_2 & \\ \dot{x}_2 = x_3 & y_2 = x_5 \\ & y_1 = x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 & \end{array}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$