



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MERCEDES MARIA BARBOSA DINIZ

**TEORIA DE SISTEMAS LINEARES  
ATIVIDADE 2**

BELÉM  
2025

MERCEDES MARIA BARBOSA DINIZ

TEORIA DE SISTEMAS LINEARES  
ATIVIDADE 2

Relatório com requisito para obtenção parcial de nota na disciplina de Teoria de Sistemas Lineares, ministrada pelo Professor. Antonio da Silva Silveira

BELÉM  
2025

## Sumário

<b>1</b>	<b>Modelagem do Sistema</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Projeto do Controlador LQG</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>7</b>

## Lista de Figuras

1.1	Diagramas de corpo livre dos elementos do sistema de pêndulo invertido.	4
1.2	Diagrama de bode do modelo contínuo e discreto.	5
2.1	Diagrama do controlador LQG.	6
3.1	Simulação do controlador LQG sem perturbação e sinal de referência nulo.	8
3.2	Variáveis de estados estimadas na simulação sem perturbação e sinal de referência nulo.	8
3.3	Simulação do controlador LQG com sinal de referência nulo e ruído no sensor do pendulo.	9
3.4	Simulação do controlador LQG com sinal de referência nulo e deformação de aproximadamente 2° sobre o pêndulo.	9
3.5	Simulação do controlador LQG com perturbação e ruído do sensor.	10

## Lista de Tabelas

1	Avaliação de diferentes sintonias do controlador LQR	10
---	--	----

# 1 Modelagem do Sistema

Esta atividade tem como objetivo revisar os conceitos relacionados ao projeto de um controlador LQG (Linear-Quadrático-Gaussiano), aplicado ao controle de um pêndulo invertido sobre um carro. A modelagem foi baseada no *Control Tutorials for Matlab and Simulink (CTMS)* da University of Michigan, disponível em <https://ctms.engin.umich.edu>, com a Figura 1.1 ilustrando os elementos considerados na modelagem física.

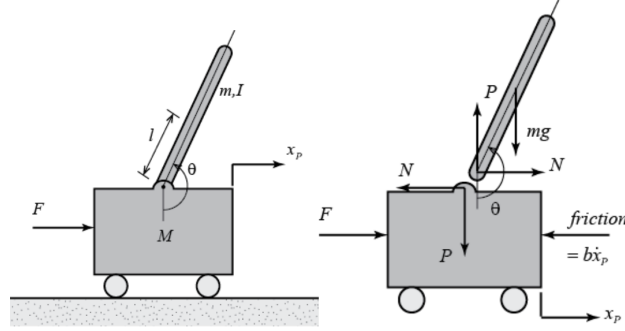


Figura 1.1: Diagramas de corpo livre dos elementos do sistema de pêndulo invertido.

Com quatro variáveis de estado  $x = [x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi}]^T$ , onde  $x$  representa a posição do carro e  $\phi$  o ângulo do pêndulo com a vertical, e  $\dot{x}, \dot{\phi}$  suas respectivas derivadas, a representação em espaço de estados contínua do sistema é dada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2)$$

com as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(I+ml^2)b}{p} & \frac{m^2gl^2}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mlb}{p} & \frac{mgl(M+m)}{p} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{p} \\ 0 \\ \frac{ml}{p} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

sendo  $p = I(M + m) + Mml^2$  o denominador comum da dinâmica.

Onde os parâmetros físicos são: massa do carro  $M = 0.5$  kg, massa do pêndulo  $m = 0.2$  kg, comprimento  $l = 0.3$  m, inércia  $I = 0.006$  kg  $\cdot$  m<sup>2</sup>, atrito  $b = 0.1$  N  $\cdot$  s/m e aceleração da gravidade  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>.

A análise dos autovalores da matriz  $A$ , que representam os polos do sistema contínuo, revelou a presença de um polo instável:

$$\lambda = \{0, -0.1428, -5.6041, 5.5651\}$$

O valor positivo de 5,5651 indica que o sistema é instável, pois este polo encontra-se no semiplano direito do plano  $s$ . Esta instabilidade é típica de sistemas de pêndulo invertido, cuja configuração naturalmente tende ao desequilíbrio.

Para discretização do modelo, foi utilizado um período de amostragem  $T_s = 0.005$  s, calculado a partir da maior frequência natural do sistema com um fator de segurança. Na Figura 1.2, temos a comparação dos diagramas

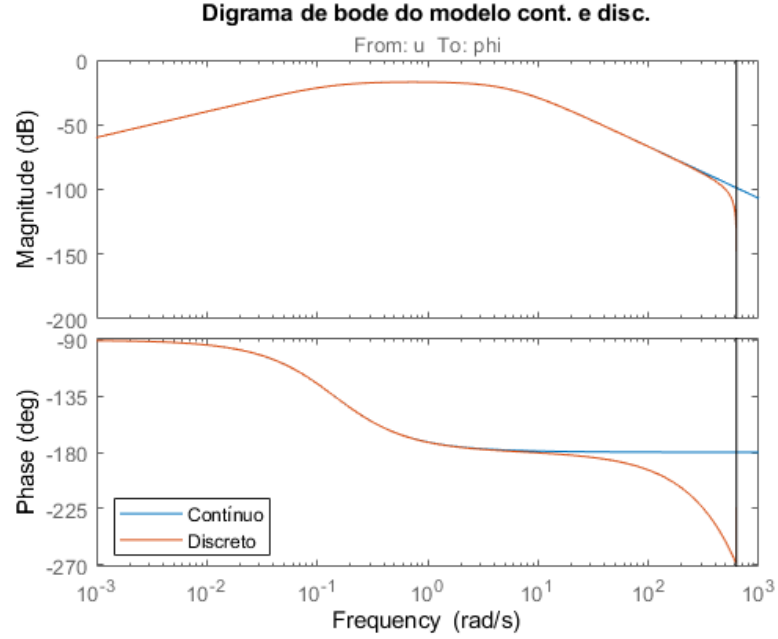


Figura 1.2: Digrama de bode do modelo contínuo e discreto.

de Bode do modelo original e sua versão discretizada, nela podemos observar que os mesmos divergem nas altas frequências e que na região de inversão de fase há o aumento do ganho, caracterizando um sistema instável.

Em seguida, foi implementado um modelo aumentado com ação integral, necessário para eliminar o erro em regime permanente, o mesmo foi construído como as matrizes:

$$A_a = \begin{bmatrix} I & C_d A_d \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} C_d B_d \\ B_d \end{bmatrix},$$

$$C_a = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$$

Para verificar se o sistema era controlável e observável, foram verificadas as matrizes de controlabilidade e observabilidade do modelo aumentado, definidas como:

$$Co = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Ob = \begin{bmatrix} C & CA & \dots & (CA^{n-1}) \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

De forma mais prática, um sistema é dito controlável se é possível influenciar diretamente a dinâmica de todas as variáveis de estado, por meio das entradas do sistema. Já a observabilidade indica se é possível deduzir esses mesmos estados apenas observando as saídas medidas.

Para que o sistema seja considerado controlável ou observável, é necessário que o *posto* (ou *rank*) das matrizes Co e Ob, respectivamente, sejam igual ao número total de variáveis de estado, representado por  $n$ .

No contexto deste trabalho, foi utilizado um modelo aumentado, que inclui uma variável integradora adicional, totalizando  $n = 5$  variáveis de estado. Os postos das matrizes foram  $\text{rank}(Co) = 4$  e  $\text{rank}(Ob) = 4$ , logo, o sistema não é nem controlável, nem observável.

## 2 Projeto do Controlador LQG

O controle LQG (Linear-Quadrático-Gaussiano) é um método de controle ótimo para sistemas com incertezas representadas por ruído gaussiano. Ele combina o controle LQR (Linear-Quadrático) com um filtro de Kalman, que atua como um estimador de estados, permitindo lidar com a incerteza na medição do estado do sistema. Sendo assim, o LQG encontra um controlador que minimiza um custo quadrático, levando em conta a dinâmica do sistema e os ruídos de processo e de medição.

Na Figura 2.1, temos o esquema de controle por realimentação de estados com um estimador de estado completo, onde fica claro o papel do controlador LQR e do filtro de Kalman que compõem o LQG.

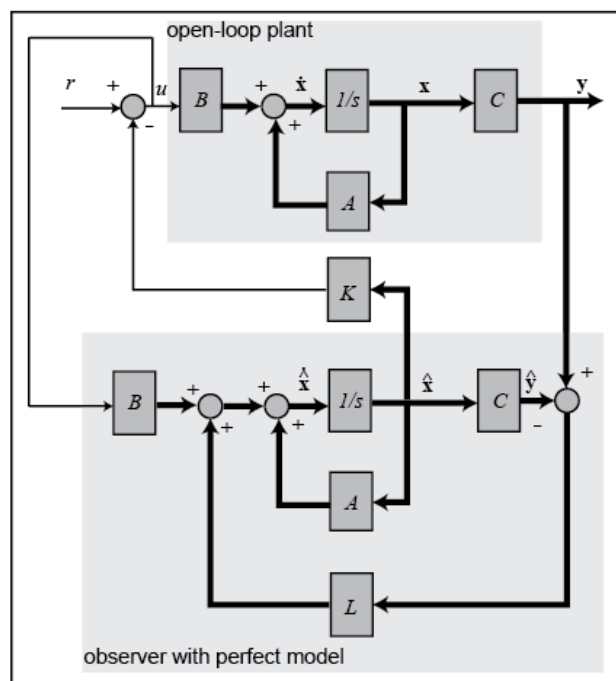


Figura 2.1: Diagrama do controlador LQG.

O projeto do controlador LQR e do filtro de Kalman envolve a resolução a equações diferenciais de Riccati. Estas equações são fundamentais para calcular as matrizes que permitem obter os ganhos ótimos de controle e de estimação.

A equação a diferenças de Riccati para o controlador LQR é dada por:

$$P_{lqr}(k+1) = A^\top P_{lqr}(k)A - A^\top P_{lqr}(k)B (B^\top P_{lqr}(k)B + R_{lqr})^{-1} B^\top P_{lqr}(k)A + Q_{lqr} \quad (5)$$

Sendo  $Q_{lqr}$  a matriz de penalização dos estados e  $R_{lqr}$  a penalização do esforço de controle. A solução de  $P_{lqr}$  permite obter o ganho ótimo de realimentação de estados:

$$K = \left[ A^\top P_{lqr} B (B^\top P_{lqr} B + R_{lqr})^{-1} \right]^\top \quad (6)$$

Analogamente, o filtro de Kalman resolve uma equação de Riccati, relacionada à estimação de estados a partir de medições ruidosas:

$$P_{kf}(k+1) = AP_{kf}(k)A^\top - AP_{kf}(k)C^\top (CP_{kf}(k)C^\top + R_{kf})^{-1} CP(k)A^\top + Q_{kf} \quad (7)$$

Nessa equação,  $Q_{kf}$  é a covariância do ruído de processo, e  $R_{kf}$  representa a covariância do ruído de medição. A matriz de ganho do filtro de Kalman é dada por:

$$L = AP_{kf}C^\top (CP_{kf}C^\top + R_{kf})^{-1} \quad (8)$$

No projeto do controlador LQR e do filtro de Kalman, as matrizes  $Q$  e  $R$  foram definidas como  $Q = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1)$  e  $R = 1$ , respectivamente. A matriz  $Q$  penaliza as variáveis de estado, atribuindo a mesma importância a todas as variáveis do sistema, enquanto  $R$  penaliza o esforço de controle e medições. De forma análoga, no filtro de Kalman,  $Q$  reflete a incerteza do modelo do sistema (ruído de processo), e  $R$  a incerteza das medições, sendo ambos ajustados para garantir um bom desempenho de estimativa e controle no sistema.

No caso prático estudado, o sistema modelado não é totalmente controlável nem observável, o que pode inviabilizar a aplicação direta de alguns métodos clássicos. Contudo, uma condição menos restritiva — chamada detectabilidade — pode ser verificada.

A detectabilidade é uma propriedade que garante que todos os modos instáveis do sistema sejam observáveis, o que é suficiente para a estabilidade do filtro de Kalman e do controlador LQG.

No contexto do projeto, uma forma prática de avaliar a detectabilidade é por meio da observabilidade generalizada da dupla  $(\sqrt{Q}, A)$ . Esta abordagem considera que os estados ponderados por  $Q$  devem ser observáveis, conforme a matriz de observabilidade modificada:

$$\mathcal{O}_Q = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{Q}A \\ \vdots \\ \sqrt{Q}A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Se  $\mathcal{O}_Q$  tiver posto completo, então o sistema satisfaz a detectabilidade com relação ao peso  $Q$ . Isso implica que os modos instáveis serão estabilizados pela ação do controlador, uma vez que estão ponderados na função de custo.

Essa condição é suficiente para garantir a existência de uma solução positiva definida para a equação de Riccati associada, possibilitando o cálculo do ganho ótimo  $K$  do LQR.

### 3 Resultados e Discussões

A seguir serão apresentados os resultados obtidos por meio da simulação do sistema de controle LQG para diferentes condições operacionais: ausência de perturbações, presença de ruído nos sensores e aplicação de perturbações no pêndulo. As simulações visam avaliar a robustez do controlador e a capacidade do filtro de Kalman em estimar corretamente os estados do sistema.

A Figura 3.1 mostra a resposta do sistema sob controle LQG quando não há perturbações externas e o sinal de referência é nulo. Observa-se que o sistema converge para a origem em torno de 2 segundos e sem oscilações significativas, o que indica a estabilidade da malha fechada. Na Figura 3.2, são mostradas as variáveis de estado estimadas pelo filtro de Kalman.

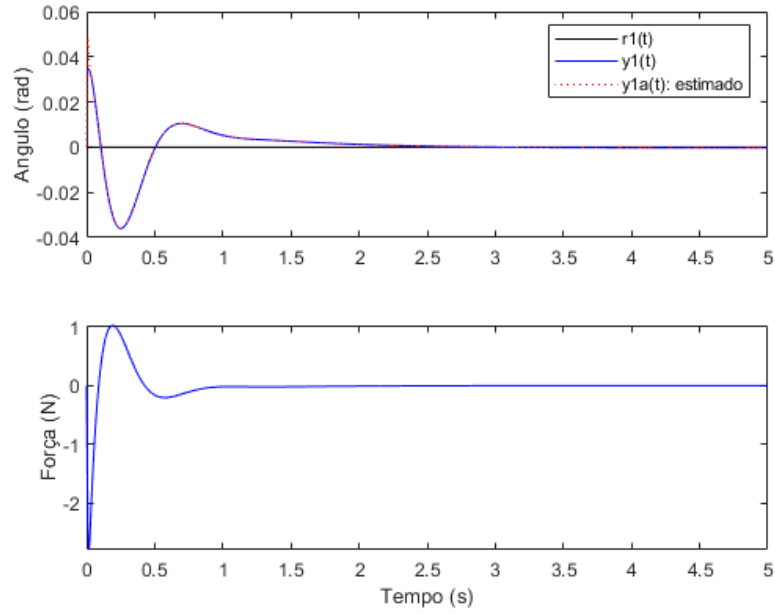


Figura 3.1: Simulação do controlador LQG sem perturbação e sinal de referência nulo.

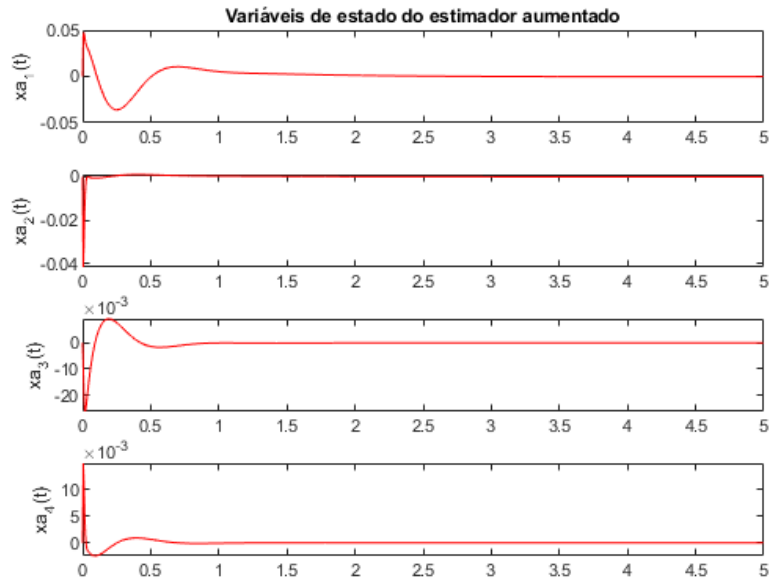


Figura 3.2: Variáveis de estados estimadas na simulação sem perturbação e sinal de referência nulo.

A Figura 3.3 apresenta o desempenho do sistema quando um ruído branco gaussiano (WGN) é adicionado à medição do pêndulo. O ruído utilizado possui média zero e variância  $1 \times 10^{-5}$ , representando uma interferência de baixa intensidade. Observa-se que o controlador mantém a estabilidade do sistema, e as flutuações nas variáveis medidas são bem filtradas pelo estimador. Essa simulação evidencia a capacidade do filtro de Kalman em rejeitar ruídos de medição, sem comprometer o desempenho do sistema.



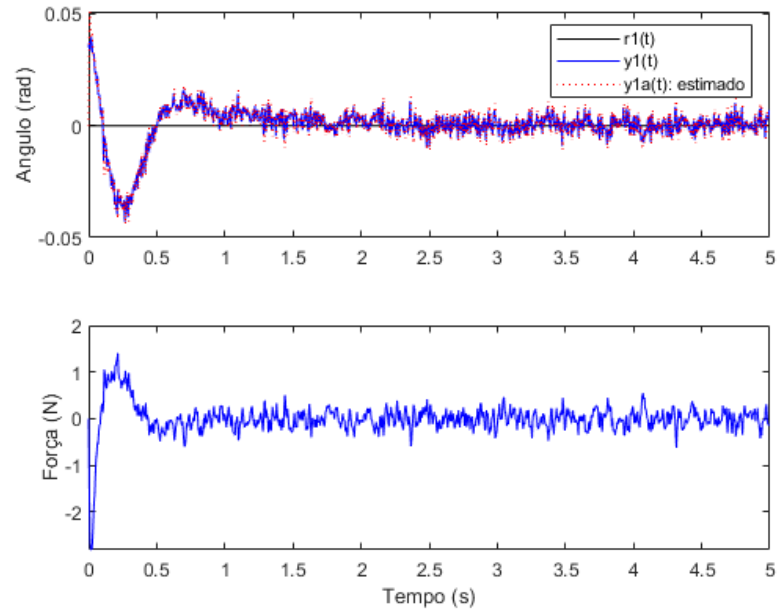


Figura 3.3: Simulação do controlador LQG com sinal de referência nulo e ruído no sensor do pêndulo.

Na Figura 3.4, o sistema é submetido a uma perturbação angular inicial de aproximadamente  $2^\circ$  no pêndulo, enquanto o sinal de referência permanece nulo. O sistema responde rapidamente, retornando à condição de equilíbrio.

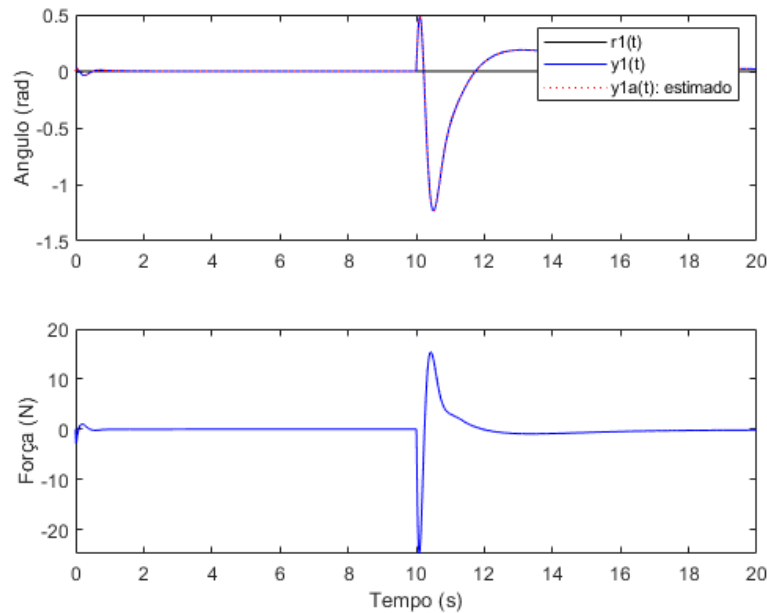


Figura 3.4: Simulação do controlador LQG com sinal de referência nulo e deformação de aproximadamente  $2^\circ$  sobre o pêndulo.

Por fim, a Figura 3.5 mostra o cenário mais adverso, no qual o sistema sofre tanto uma perturbação angular quanto a adição de ruído de medição. Apesar da condição desafiadora, o controlador LQG é capaz de estabilizar o sistema, ainda que com uma leve degradação na qualidade da resposta. O filtro de Kalman continua fornecendo

estimativas suficientemente precisas para manter a ação de controle efetiva.

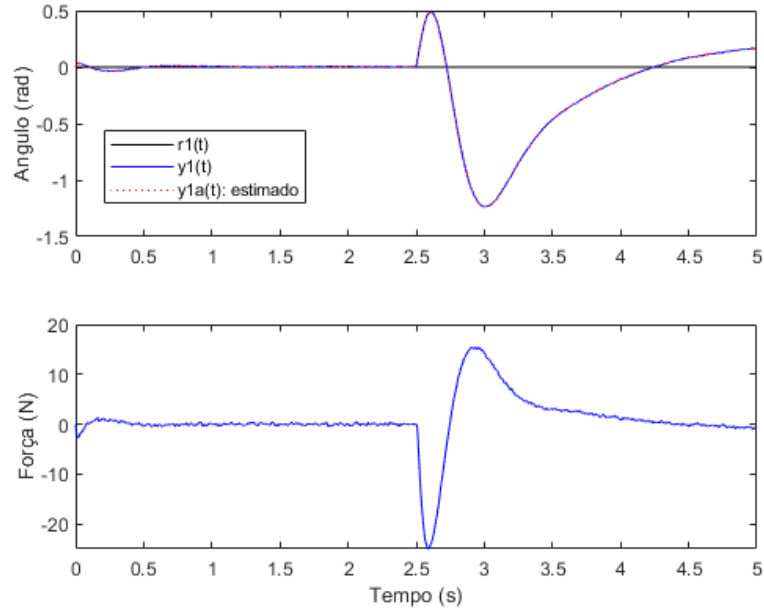


Figura 3.5: Simulação do controlador LQG com perturbação e ruído do sensor.

Foram avaliadas também quatro diferentes sintonias do controlador LQR, destacados na Tabela 1, com o objetivo de minimizar a função de custo quadrática discreta. A primeira sintonia foi a usada nas simulação anteriores, onde se adotou pesos unitários em todas as variáveis de estado e no esforço de controle, servindo como referência. A segunda sintonia priorizou fortemente o ângulo do pêndulo, resultando na menor penalidade total, com  $J = 2,012710^4$ . A terceira sintonia aumentou o peso sobre o controle ( $R = 10$ ), penalizando fortemente o esforço de atuação, o que resultou no maior custo. Por fim, a última buscou uma ponderação intermediária, reforçando as velocidades do carro e do pêndulo, mantendo custo menor que o caso base.

Tabela 1: Avaliação de diferentes sintonias do controlador LQR

#	Pesos (Q, R)	Custo J
1	$Q = I_{5 \times 5}, \quad R = 1$	$2,9045 \times 10^4$
2	$Q = \text{diag}(0.1, 0.1, 100, 0.1, 0.5), \quad R = 1$	$2,0127 \times 10^4$
3	$Q = \text{diag}(1, 1, 100, 1, 1), \quad R = 10$	$2,3061 \times 10^5$
4	$Q = \text{diag}(1, 10, 100, 10, 1), \quad R = 1$	$2,4229 \times 10^4$