

## Quantum Portfolio Optimization

Corso di Quantum Computing (a.a. 2024/25)

Merenda Saverio Mattia

#### Contenuto della discussione

• Descrivere il problema di ottimizzazione del portafoglio finanziario

#### Contenuto della discussione

- · Descrivere il problema di ottimizzazione del portafoglio finanziario
- Introdurre l'applicazione del quantum computing al problema

#### Contenuto della discussione

- Descrivere il problema di ottimizzazione del portafoglio finanziario
- Introdurre l'applicazione del quantum computing al problema
- · Analizzare i risultati ottenuti e confrontare le metodologie

• Obiettivo: selezionare un insieme di asset che <u>massimizzano</u> i rendimenti e <u>minimizzano</u> il rischio, rispettando un budget

• Obiettivo: selezionare un insieme di asset che <u>massimizzano</u> i rendimenti e <u>minimizzano</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_{x} \left( qx^{T} \Sigma x - x\mu^{T} + \left( 1^{T} x - B \right)^{2} \right)$$

 Obiettivo: selezionare un insieme di asset che <u>massimizzano</u> i rendimenti e <u>minimizzano</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_{x} \left( qx^{T} \Sigma x - x\mu^{T} + \left( 1^{T} x - B \right)^{2} \right)$$

•  $x \in \{0,1\}^n$ : vettore delle variabili decisionali binarie (quali asset selezionare)

• Obiettivo: selezionare un insieme di asset che <u>massimizzano</u> i rendimenti e <u>minimizzano</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_{x} \left( qx^{T} \Sigma x - x\mu^{T} + \left( 1^{T} x - B \right)^{2} \right)$$

- $x \in \{0,1\}^n$ : vettore delle variabili decisionali binarie (quali asset selezionare)
- $\mu \in \mathbb{R}^n$ : rendimenti attesi degli asset

• Obiettivo: selezionare un insieme di asset che <u>massimizzano</u> i rendimenti e <u>minimizzano</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_{x} \left( qx^{T} \Sigma x - x\mu^{T} + \left( 1^{T} x - B \right)^{2} \right)$$

- $x \in \{0,1\}^n$ : vettore delle variabili decisionali binarie (quali asset selezionare)
- $\mu \in \mathbb{R}^n$ : rendimenti attesi degli asset
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : covarianza tra gli asset

 Obiettivo: selezionare un insieme di asset che <u>massimizzano</u> i rendimenti e <u>minimizzano</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_{x} \left( qx^{T} \Sigma x - x\mu^{T} + \left( 1^{T} x - B \right)^{2} \right)$$

- $x \in \{0,1\}^n$ : vettore delle variabili decisionali binarie (quali asset selezionare)
- $\mu \in \mathbb{R}^n$ : rendimenti attesi degli asset
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : covarianza tra gli asset
- q > 0: avversione al rischio

 Obiettivo: selezionare un insieme di asset che <u>massimizzano</u> i rendimenti e <u>minimizzano</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_{x} \left( qx^{T} \Sigma x - x\mu^{T} + \left( 1^{T} x - B \right)^{2} \right)$$

- $x \in \{0,1\}^n$ : vettore delle variabili decisionali binarie (quali asset selezionare)
- $\mu \in \mathbb{R}^n$ : rendimenti attesi degli asset
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : covarianza tra gli asset
- q > 0: avversione al rischio
- B: budget disponibile

• Obiettivo: selezionare un insieme di asset che <u>massimizzano</u> i rendimenti e <u>minimizzano</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_{x} \left( \begin{array}{c|c} risk & return & budget penalty \\ \hline min \left( \begin{array}{c|c} qx^T \Sigma x & -x\mu^T & +(1^T x-B)^2 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

· Limiti classici: complessità cresce <u>esponenzialmente</u> con il numero di asset

- · Limiti classici: complessità cresce <u>esponenzialmente</u> con il numero di asset
- Vantaggi:

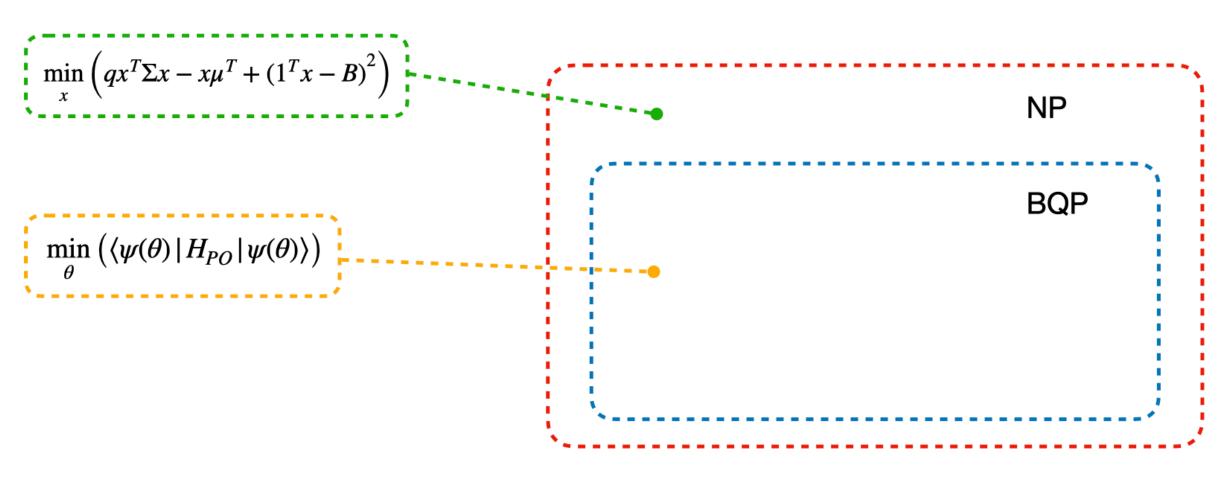
- · Limiti classici: complessità cresce <u>esponenzialmente</u> con il numero di asset
- Vantaggi:
  - O Capacità di esplorare simultaneamente più configurazioni

· Limiti classici: complessità cresce <u>esponenzialmente</u> con il numero di asset

#### Vantaggi:

- O Capacità di esplorare simultaneamente più configurazioni
- O Classe di complessità Bounded-error Quantum Polynomial (BQP)

- · Limiti classici: complessità cresce <u>esponenzialmente</u> con il numero di asset
- Vantaggi:
  - O Capacità di esplorare simultaneamente più configurazioni
  - O Classe di complessità Bounded-error Quantum Polynomial (BQP)



Branch-and-bound<sup>1</sup>

· Metodo classico di riferimento per calcolare la ground truth

Branch-and-bound<sup>1</sup>

- · Metodo classico di riferimento per calcolare la ground truth
- Complessità esponenziale:  $O(2^n)$

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

• Algoritmo ibrido che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

• Algoritmo ibrido che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

$$\min_{\theta} \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

• Algoritmo ibrido che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

$$\min_{\theta} \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

• H: hamiltoniano che rappresenta il problema

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

• Algoritmo ibrido che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

$$\min_{\theta} \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

- *H*: hamiltoniano che rappresenta il problema
- CPU: aggiorna iterativamente i parametri dell'ansatz quantistico  $\theta$

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

• Algoritmo ibrido che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

$$\min_{\theta} \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

- *H*: hamiltoniano che rappresenta il problema
- CPU: aggiorna iterativamente i parametri dell'ansatz quantistico  $\theta$
- QPU: calcola la funzione obiettivo

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

quantum computer

$$|0\rangle \longrightarrow \operatorname{ansatz}(\theta) \longrightarrow E(\theta) = \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

$$\theta_{new} \longleftarrow \operatorname{optimization}(\theta) \longleftarrow E(\theta)$$

classical computer

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

• Algoritmo ibrido che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio

- Algoritmo ibrido che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio
- $\hat{U}_C(\gamma)=e^{-i\gamma\hat{H}_C}$ : operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni

- Algoritmo ibrido che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio
- $\hat{U}_C(\gamma)=e^{-i\gamma\hat{H}_C}$ : operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni
- $\hat{U}_M(\beta) = e^{-i\beta \hat{H}_M}$ : operatore di mixing che codifica i vincoli e la funzione obiettivo

- Algoritmo ibrido che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio
- $\hat{U}_C(\gamma)=e^{-i\gamma\hat{H}_C}$ : operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni
- $\hat{U}_M(\beta)=e^{-i\beta\hat{H}_M}$ : operatore di mixing che codifica i vincoli e la funzione obiettivo

$$|\psi_p(\gamma,\beta)\rangle = e^{-i\beta_p \hat{H}_M} e^{-i\gamma_p \hat{H}_C \dots e^{-i\beta_1 \hat{H}_M} e^{-i\gamma_1 \hat{H}_C} |s\rangle$$

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

- Algoritmo ibrido che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio
- $\hat{U}_C(\gamma)=e^{-i\gamma\hat{H}_C}$ : operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni
- $\hat{U}_M(\beta)=e^{-i\beta\hat{H}_M}$ : operatore di mixing che codifica i vincoli e la funzione obiettivo

$$|\psi_p(\gamma,\beta)\rangle = e^{-i\beta_p \hat{H}_M} e^{-i\gamma_p \hat{H}_C \dots e^{-i\beta_1 \hat{H}_M} e^{-i\gamma_1 \hat{H}_C} |s\rangle$$

• CPU: ottimizza i parametri  $\beta$  e  $\gamma$  per migliorare progressivamente il risultato

- Algoritmo ibrido che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio
- $\hat{U}_C(\gamma)=e^{-i\gamma\hat{H}_C}$ : operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni
- $\hat{U}_M(\beta)=e^{-i\beta\hat{H}_M}$ : operatore di mixing che codifica i vincoli e la funzione obiettivo

$$|\psi_p(\gamma,\beta)\rangle = e^{-i\beta_p \hat{H}_M} e^{-i\gamma_p \hat{H}_C \dots e^{-i\beta_1 \hat{H}_M} e^{-i\gamma_1 \hat{H}_C} |s\rangle$$

- CPU: ottimizza i parametri  $\beta$  e  $\gamma$  per migliorare progressivamente il risultato
- QPU: calcola la funzione obiettivo

- Algoritmo ibrido che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio
- $\hat{U}_C(\gamma)=e^{-i\gamma\hat{H}_C}$ : operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni
- $\hat{U}_M(\beta)=e^{-i\beta\hat{H}_M}$ : operatore di mixing che codifica i vincoli e la funzione obiettivo

$$|\psi_p(\gamma,\beta)\rangle = e^{-i\beta_p \hat{H}_M} e^{-i\gamma_p \hat{H}_C \dots e^{-i\beta_1 \hat{H}_M} e^{-i\gamma_1 \hat{H}_C} |s\rangle$$

- CPU: ottimizza i parametri  $\beta$  e  $\gamma$  per migliorare progressivamente il risultato
- QPU: calcola la funzione obiettivo

$$F_p(\gamma, \beta) = \langle \psi_p(\gamma, \beta) | \hat{H}_C | \psi_p(\gamma, \beta) \rangle$$

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

quantum computer

$$|0\rangle \longrightarrow \operatorname{ansatz}(\gamma, \beta) \longrightarrow F(\gamma, \beta) = \langle \psi(\gamma, \beta) | H | \psi(\gamma, \beta) \rangle$$

$$(\gamma_{new}, \beta_{new}) \leftarrow \text{optimization}(\gamma, \beta) \leftarrow F(\gamma, \beta)$$

classical computer

#### Risoluzione del problema (1/6)

#### Configurazione:

- Numero di asset: 8
- Budget: 5
- Rischio: 20%
- Ripetizioni: 50

#### Risoluzione del problema (1/6)

#### Configurazione:

- Numero di asset: 8
- Budget: 5
- Rischio: 20%
- Ripetizioni: 50

#### Metodologie utilizzate:

#### Risoluzione del problema (1/6)

#### Configurazione:

- Numero di asset: 8
- Budget: 5
- Rischio: 20%
- Ripetizioni: 50

#### Metodologie utilizzate:

• Simulazione <u>senza rumore</u> (noiseless)

### Configurazione:

- Numero di asset: 8
- Budget: 5
- Rischio: 20%
- Ripetizioni: 50

### Metodologie utilizzate:

- Simulazione <u>senza rumore</u> (noiseless)
- Simulazione <u>con rumore</u> (noisy) per rappresentare hardware reale

```
dp = RandomDataProvider(
    # settings
).run()
stock_data = dp._data

mu = dp.get_period_return_mean_vector()
sigma = dp.get_period_return_covariance_matrix()

po = PortfolioOptimization(
    expected_returns=mu,
    covariances=sigma,
    risk_factor=risk_factor,
    budget=budget
)

qp = po.to_quadratic_program()
```

#### Configurazione dei dati

Generati i dati dei rendimenti con la classe
 RandomDataProvider

```
dp = RandomDataProvider(
    # settings
).run()
stock_data = dp._data

mu = dp.get_period_return_mean_vector()
sigma = dp.get_period_return_covariance_matrix()

po = PortfolioOptimization(
    expected_returns=mu,
    covariances=sigma,
    risk_factor=risk_factor,
    budget=budget
)

qp = po.to_quadratic_program()
```

- Generati i dati dei rendimenti con la classe
   RandomDataProvider
- 2. Calcolati  $\mu$  e  $\Sigma$  con i dati degli andamenti

```
dp = RandomDataProvider(
    # settings
).run()
stock_data = dp._data

mu = dp.get_period_return_mean_vector()
sigma = dp.get_period_return_covariance_matrix()

po = PortfolioOptimization(
    expected_returns=mu,
    covariances=sigma,
    risk_factor=risk_factor,
    budget=budget
)

qp = po.to_quadratic_program()
```

- Generati i dati dei rendimenti con la classe
   RandomDataProvider
- 2. Calcolati  $\mu$  e  $\Sigma$  con i dati degli andamenti
- 3. Impostato il problema con la classe PortfolioOptimization

```
dp = RandomDataProvider(
    # settings
).run()
stock_data = dp._data

mu = dp.get_period_return_mean_vector()
sigma = dp.get_period_return_covariance_matrix()

po = PortfolioOptimization(
    expected_returns=mu,
    covariances=sigma,
    risk_factor=risk_factor,
    budget=budget
)

qp = po.to_quadratic_program()
```

- Generati i dati dei rendimenti con la classe
   RandomDataProvider
- 2. Calcolati  $\mu$  e  $\Sigma$  con i dati degli andamenti
- 3. Impostato il problema con la classe PortfolioOptimization
- 4. Problema convertito in programma quadratico con to\_quadratic\_program()

```
dp = RandomDataProvider(
    # settings
).run()
stock_data = dp._data

mu = dp.get_period_return_mean_vector()
sigma = dp.get_period_return_covariance_matrix()

po = PortfolioOptimization(
    expected_returns=mu,
    covariances=sigma,
    risk_factor=risk_factor,
    budget=budget
)

qp = po.to_quadratic_program()
```

Risoluzione classica

```
exact_mes = NumPyMinimumEigensolver()
exact_eigensolver = MinimumEigenOptimizer(exact_mes)
result_exact = exact_eigensolver.solve(qp)
```

#### Risoluzione classica

1. Approccio basato su autovalori usando la classe NumPyMinimumEigensolver

```
exact_mes = NumPyMinimumEigensolver()
exact_eigensolver = MinimumEigenOptimizer(exact_mes)
result_exact = exact_eigensolver.solve(qp)
```

#### Risoluzione classica

- I. Approccio basato su autovalori usando la classe NumPyMinimumEigensolver
- 2. Utilizzo del wrapper **MinimumEigenOptimizer** per il supporto alla risoluzione dei problemi quadratici

```
exact_mes = NumPyMinimumEigensolver()
exact_eigensolver = MinimumEigenOptimizer(exact_mes)
result_exact = exact_eigensolver.solve(qp)
```

Risoluzione con VQE

```
ansatz = TwoLocal(
    num_qubits=assets,
    rotation_blocks="ry",
    entanglement_blocks="cz",
    reps=1,
    entanglement="full",
    insert_barriers=True
vqe_mes = SamplingVQE(sampler=Sampler(),
                       ansatz=ansatz,
                       optimizer=cobyla)
vqe = MinimumEigenOptimizer(vqe_mes, penalty)
result = vqe.solve(qp)
```

Risoluzione con VQE

I. Generato ansatz con la classe TwoLocal

```
ansatz = TwoLocal(
    num_qubits=assets,
    rotation_blocks="ry",
    entanglement_blocks="cz",
    reps=1,
    entanglement="full",
    insert_barriers=True
vqe_mes = SamplingVQE(sampler=Sampler(),
                       ansatz=ansatz,
                       optimizer=cobyla)
vqe = MinimumEigenOptimizer(vqe_mes, penalty)
result = vqe.solve(qp)
```

#### Risoluzione con VQE

- I. Generato ansatz con la classe TwoLocal
- 2. Ansatz integrato nel metodo SamplingVQE con l'uso di un campionatore Sampler() e l'ottimizzatore cobyla per la minimizzazione dei parametri

```
ansatz = TwoLocal(
    num_qubits=assets,
    rotation_blocks="ry",
    entanglement_blocks="cz",
    reps=1,
    entanglement="full",
    insert_barriers=True
vqe_mes = SamplingVQE(sampler=Sampler(),
                       ansatz=ansatz,
                       optimizer=cobyla)
vge = MinimumEigenOptimizer(vge_mes, penalty)
result = vqe.solve(qp)
```

#### Risoluzione con VQE

- I. Generato ansatz con la classe TwoLocal
- 2. Ansatz integrato nel metodo SamplingVQE con l'uso di un campionatore Sampler() e l'ottimizzatore cobyla per la minimizzazione dei parametri
- 3. Utilizzo del wrapper MinimumEigenOptimizer

Risoluzione con QAOA

#### Risoluzione con QAOA

 Circuito generato con la classe QAOA utilizzando il campionatore Sampler() e l'ottimizzatore cobyla

#### Risoluzione con QAOA

- Circuito generato con la classe QAOA utilizzando il campionatore Sampler() e l'ottimizzatore cobyla
- 2. Utilizzo del wrapper **MinimumEigenOptimizer**

Introduzione del rumore

Introduzione del rumore

Generato backend con la classe
 GenericBackendV2

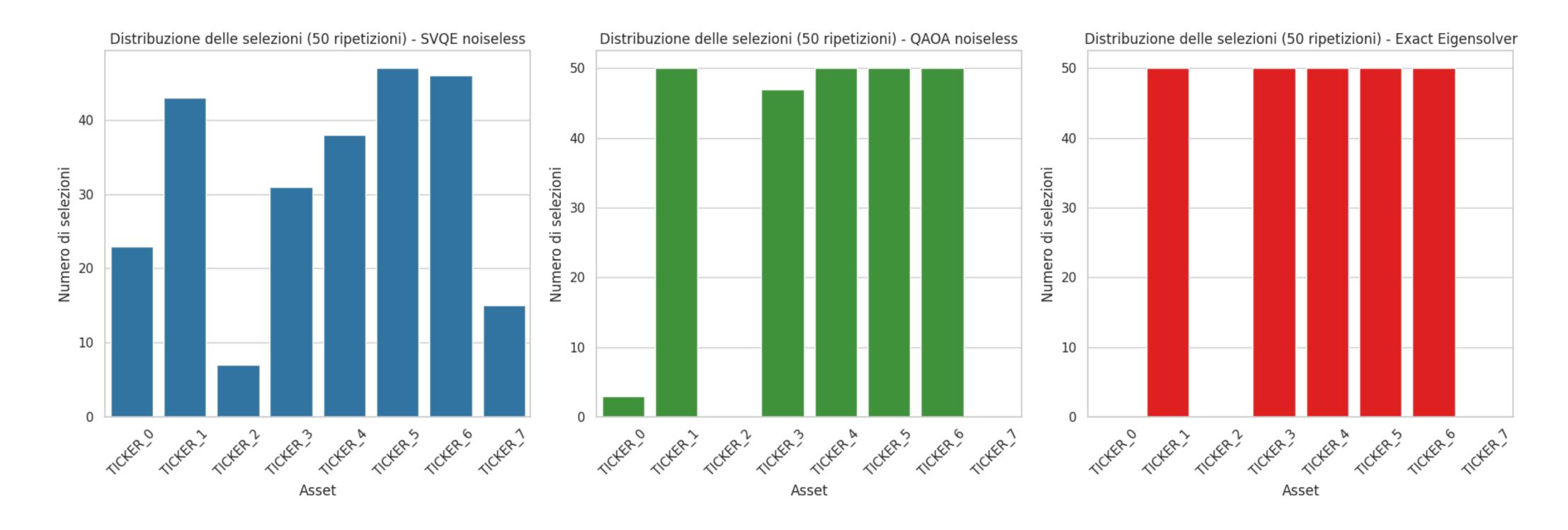
Introduzione del rumore

- Generato backend con la classe
   GenericBackendV2
- 2. Generato modello di rumore con la classe NoiseModel

#### Introduzione del rumore

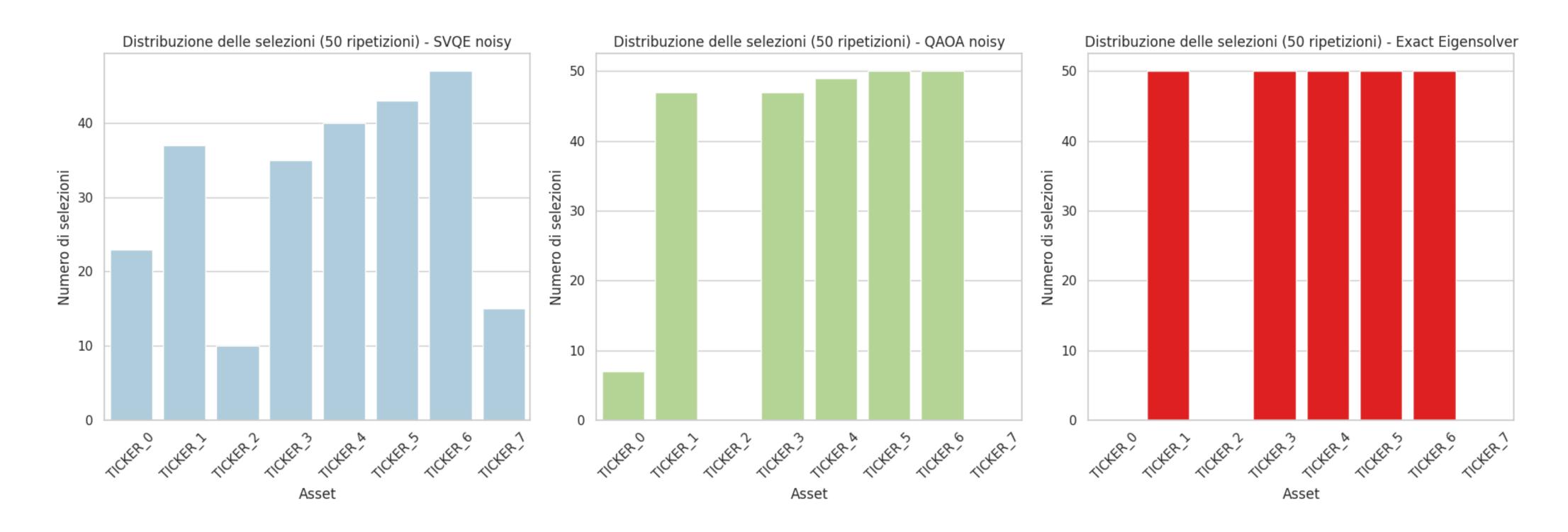
- Generato backend con la classe
   GenericBackendV2
- 2. Generato modello di rumore con la classe NoiseModel
- 3. Generato simulatore con rumore con la classe **AerSimulator**

### Risultati senza rumore (noiseless)



- Il QAOA tende a concentrarsi su configurazioni ristrette
- II VQE esplora con maggiore diversificazione

# Risultati con rumore (noisy)



- Diminuzione della precisione per VQE e QAOA
- Incremento dell'incertezza nelle distribuzioni degli asset selezionati

• L'approccio quantistico offre un **potenziale significativo** per problemi complessi come l'ottimizzazione del portafoglio

- L'approccio quantistico offre un **potenziale significativo** per problemi complessi come l'ottimizzazione del portafoglio
- · Limiti attuali della tecnologia quantistica:

- L'approccio quantistico offre un **potenziale significativo** per problemi complessi come l'ottimizzazione del portafoglio
- · Limiti attuali della tecnologia quantistica:
  - Problemi su larga scala, come il portafoglio con migliaia di qubit, rimangono impraticabili

- L'approccio quantistico offre un **potenziale significativo** per problemi complessi come l'ottimizzazione del portafoglio
- · Limiti attuali della tecnologia quantistica:
  - Problemi su larga scala, come il portafoglio con migliaia di qubit, rimangono impraticabili
  - Il rumore <u>compromette la qualità</u> delle soluzioni proposte, rendendo inefficace l'approccio quantistico



### Quantum Portfolio Optimization

Corso di Quantum Computing (a.a. 2024/25)

Merenda Saverio Mattia



# Bibliografia

- 1. Land, Ailsa H and Doig, Alison G (2010). An automatic method for solving discrete programming problems, Springer.
- 2. Blekos, Kostas et al., (2024). "A review on quantum approximate optimization algorithm and its variants", Physics Reports, Vol. 1068, pp. 1–66.
- 3. Buonaiuto, Giuseppe et al., (2023). "Best practices for portfolio optimization by quantum computing, experimented on real quantum devices", Scientific Reports, Vol. 13 No. 1, p. 19434.
- 4. Qiskit (2024). Portfolio Optimization using Qiskit Finance, <u>qiskit-community.github.io/</u> <u>qiskit-finance/tutorials/portfolio-optimization</u>