UNIVERSITÀ DI PARMA

Quantum Portfolio Optimization

Corso di Quantum Computing (a.a. 2024/25)

Merenda Saverio Mattia

Contenuto del seminario

- ***Descrivere*** il problema di ottimizzazione del portafoglio finanziario

Contenuto del seminario

- ***Descrivere*** il problema di ottimizzazione del portafoglio finanziario
- ***Introdurre*** l'applicazione del quantum computing al problema

Contenuto del seminario

- ***Descrivere*** il problema di ottimizzazione del portafoglio finanziario
- ***Introdurre*** l'applicazione del quantum computing al problema
- ***Analizzare*** i risultati ottenuti e ***confrontare*** le metodologie

Problema dell'ottimizzazione del portafoglio

- ***Obiettivo:*** selezionare un insieme di asset che **massimizzano** i rendimenti e **minimizzano** il rischio, rispettando un budget

Problema dell'ottimizzazione del portafoglio

- ***Obiettivo:*** selezionare un insieme di asset che <u>**massimizzano**</u> i rendimenti e <u>**minimizzano**</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_x \left(q x^T \Sigma x - x\mu^T + (1^T x - B)^2 \right)$$

Problema dell'ottimizzazione del portafoglio

- ***Obiettivo:*** selezionare un insieme di asset che massimizzano i rendimenti e minimizzano il rischio, rispettando un budget

$$\min_x \left(q x^T \Sigma x - x \mu^T + (1^T x - B)^2 \right)$$

- $x \in \{0,1\}^n$: vettore delle variabili decisionali binarie (quali asset selezionare)

Problema dell'ottimizzazione del portafoglio

- ***Obiettivo:*** selezionare un insieme di asset che <u>**massimizzano**</u> i rendimenti e <u>**minimizzano**</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_x \left(q x^T \Sigma x - x \mu^T + (1^T x - B)^2 \right)$$

- $x \in \{0,1\}^n$: vettore delle variabili decisionali binarie (quali asset selezionare)

- $\mu \in \mathbb{R}^n$: rendimenti attesi degli asset

Problema dell'ottimizzazione del portafoglio

- ***Obiettivo:*** selezionare un insieme di asset che <u>**massimizzano**</u> i rendimenti e <u>**minimizzano**</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_{x} \left(qx^T \Sigma x - x\mu^T + (1^T x - B)^2 \right)$$

- $x \in \{0,1\}^n$: vettore delle variabili decisionali binarie (quali asset selezionare)
- $\mu \in \mathbb{R}^n$: rendimenti attesi degli asset
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$: covarianza tra gli asset

Problema dell'ottimizzazione del portafoglio

- ***Obiettivo:*** selezionare un insieme di asset che <u>**massimizzano**</u> i rendimenti e <u>**minimizzano**</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_{x}\left(qx^T\Sigma x - x\mu^T + (1^T x - B)^2\right)$$

- $x \in \{0,1\}^n$: vettore delle variabili decisionali binarie (quali asset selezionare)
- $\mu \in \mathbb{R}^n$: rendimenti attesi degli asset
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$: covarianza tra gli asset
- $q > 0$: avversione al rischio

Problema dell'ottimizzazione del portafoglio

- ***Obiettivo:*** selezionare un insieme di asset che <u>**massimizzano**</u> i rendimenti e <u>**minimizzano**</u> il rischio, rispettando un budget

$$\min_x \left(q x^T \Sigma x - x \mu^T + (1^T x - B)^2 \right)$$

  - $x \in \{0,1\}^n$: vettore delle variabili decisionali binarie (quali asset selezionare)
  - $\mu \in \mathbb{R}^n$: rendimenti attesi degli asset
  - $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$: covarianza tra gli asset
  - $q > 0$: avversione al rischio
  - B : budget disponibile

Perché il quantum computing?

- ***Limiti classici:*** complessità cresce **esponenzialmente** con il numero di asset (2^n)

Perché il quantum computing?

- ***Limiti classici:*** complessità cresce **esponenzialmente** con il numero di asset (2^n)
- ***Vantaggi*** del quantum computing:

Perché il quantum computing?

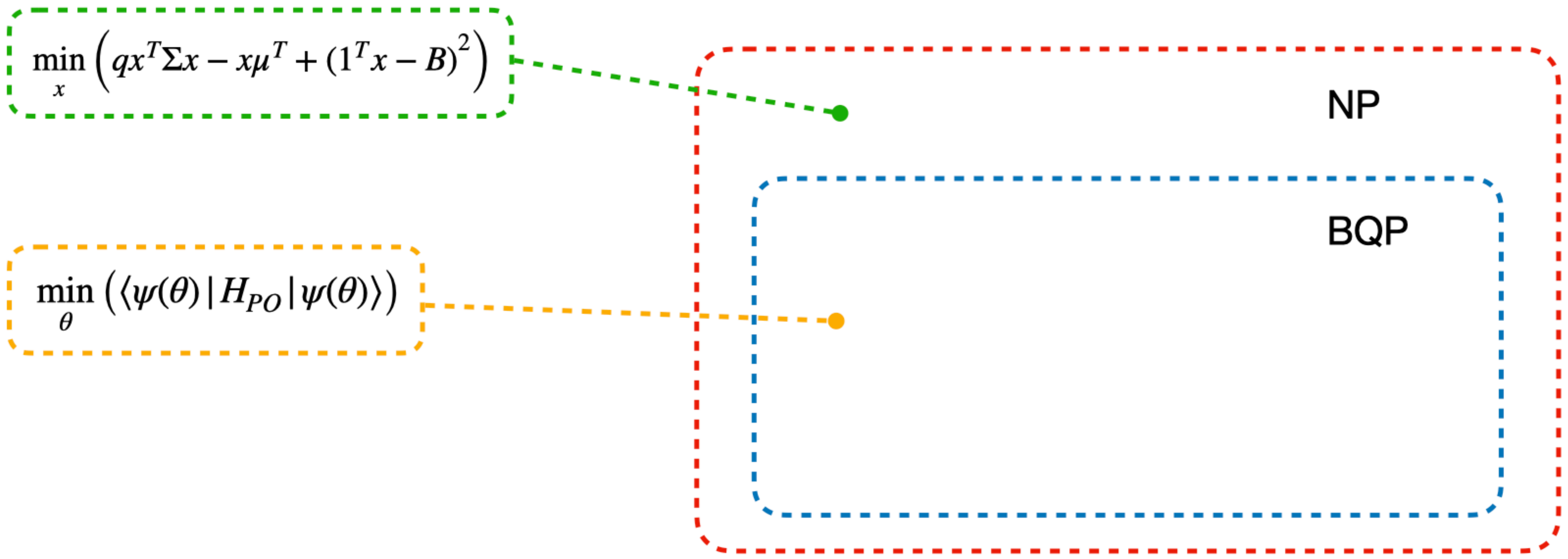
- ***Limiti classici:*** complessità cresce **esponenzialmente** con il numero di asset (2^n)
- ***Vantaggi*** del quantum computing:
  - Capacità di esplorare simultaneamente più configurazioni

Perché il quantum computing?

- ***Limiti classici:*** complessità cresce **<u>esponenzialmente</u>** con il numero di asset (2^n)
- ***Vantaggi*** del quantum computing:
  - Capacità di esplorare simultaneamente più configurazioni
  - Classe di complessità Bounded-error Quantum Polynomial (BQP)

Perché il quantum computing?

- ***Limiti classici:*** complessità cresce **<u>esponenzialmente</u>** con il numero di asset (2^n)
- ***Vantaggi*** del quantum computing:
  - Capacità di esplorare simultaneamente più configurazioni
  - Classe di complessità Bounded-error Quantum Polynomial (BQP)



Algoritmi proposti (1/3)

Branch-and-bound[1]

- ***Metodo classico*** di riferimento per calcolare la *ground truth*

Algoritmi proposti (1/3)

Branch-and-bound[1]

- ***Metodo classico*** di riferimento per calcolare la *ground truth*
- Complessità esponenziale (2^n)

Algoritmi proposti (2/3)

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

- ***Algoritmo ibrido*** che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

Algoritmi proposti (2/3)

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

- ***Algoritmo ibrido*** che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

$$\min_{\theta} \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

Algoritmi proposti (2/3)

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

- ***Algoritmo ibrido*** che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

$$\min_{\theta} \langle \psi(\theta) \,|\, H \,|\, \psi(\theta) \rangle$$

- H : hamiltoniano che rappresenta il problema

Algoritmi proposti (2/3)

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

- ***Algoritmo ibrido*** che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

$$\min_{\theta} \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

  - H : hamiltoniano che rappresenta il problema

- ***CPU:*** aggiorna iterativamente i parametri dell'ansatz quantistico θ

Algoritmi proposti (2/3)

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

- ***Algoritmo ibrido*** che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

$$\min_{\theta} \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

  - H : hamiltoniano che rappresenta il problema

- ***CPU:*** aggiorna iterativamente i parametri dell'ansatz quantistico θ

- ***QPU:*** calcola la funzione obiettivo

Algoritmi proposti (3/3)

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

- ***Algoritmo ibrido*** che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio

Algoritmi proposti (3/3)

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

- ***Algoritmo ibrido*** che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio

- $\hat{U}_C(\gamma) = e^{-i\gamma \hat{H}_C}$: operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni

Algoritmi proposti (3/3)

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

- ***Algoritmo ibrido*** che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio

- $\hat{U}_C(\gamma) = e^{-i\gamma\hat{H}_C}$: operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni

- $\hat{U}_M(\beta) = e^{-i\beta\hat{H}_M}$: operatore di mixing che codifica i vincoli e la funzione obiettivo

Algoritmi proposti (3/3)

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

- ***Algoritmo ibrido*** che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio

- $\hat{U}_C(\gamma) = e^{-i\gamma \hat{H}_C}$: operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni

- $\hat{U}_M(\beta) = e^{-i\beta \hat{H}_M}$: operatore di mixing che codifica i vincoli e la funzione obiettivo

$$|\psi_p(\gamma, \beta)\rangle = e^{-i\beta_p \hat{H}_M} e^{-i\gamma_p \hat{H}_C} \ldots e^{-i\beta_1 \hat{H}_M} e^{-i\gamma_1 \hat{H}_C} |s\rangle$$

Algoritmi proposti (3/3)

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

- ***Algoritmo ibrido*** che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio

- $\hat{U}_C(\gamma) = e^{-i\gamma\hat{H}_C}$: operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni

- $\hat{U}_M(\beta) = e^{-i\beta\hat{H}_M}$: operatore di mixing che codifica i vincoli e la funzione obiettivo

$$|\psi_p(\gamma, \beta)\rangle = e^{-i\beta_p\hat{H}_M}e^{-i\gamma_p\hat{H}_C}\ldots e^{-i\beta_1\hat{H}_M}e^{-i\gamma_1\hat{H}_C}|s\rangle$$

- ***CPU:*** ottimizza i parametri β e γ per migliorare progressivamente il risultato

Algoritmi proposti (3/3)

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

- ***Algoritmo ibrido*** che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio

- $\hat{U}_C(\gamma) = e^{-i\gamma \hat{H}_C}$: operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni

- $\hat{U}_M(\beta) = e^{-i\beta \hat{H}_M}$: operatore di mixing che codifica i vincoli e la funzione obiettivo

$$|\psi_p(\gamma, \beta)\rangle = e^{-i\beta_p \hat{H}_M} e^{-i\gamma_p \hat{H}_C} \ldots e^{-i\beta_1 \hat{H}_M} e^{-i\gamma_1 \hat{H}_C} |s\rangle$$

- ***CPU:*** ottimizza i parametri β e γ per migliorare progressivamente il risultato

- ***QPU:*** calcola la funzione obiettivo

Algoritmi proposti (3/3)

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

- ***Algoritmo ibrido*** che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio

- $\hat{U}_C(\gamma) = e^{-i\gamma\hat{H}_C}$: operatore di costo che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni

- $\hat{U}_M(\beta) = e^{-i\beta\hat{H}_M}$: operatore di mixing che codifica i vincoli e la funzione obiettivo

$$|\psi_p(\gamma,\beta)\rangle = e^{-i\beta_p\hat{H}_M}e^{-i\gamma_p\hat{H}_C}\ldots e^{-i\beta_1\hat{H}_M}e^{-i\gamma_1\hat{H}_C}|s\rangle$$

- ***CPU:*** ottimizza i parametri β e γ per migliorare progressivamente il risultato

- ***QPU:*** calcola la funzione obiettivo

$$F_p(\gamma,\beta) = \langle\psi_p(\gamma,\beta)|\hat{H}_C|\psi_p(\gamma,\beta)\rangle$$

Implementazione degli algoritmi

- ***Configurazione del problema:***
  - Numero di asset: 8
  - Budget: 5
  - Rischio: 30%
  - Ripetizioni: 50

Implementazione degli algoritmi

- ***Configurazione del problema:***
  - Numero di asset: 8
  - Budget: 5
  - Rischio: 30%
  - Ripetizioni: 50
- ***Metodi:***

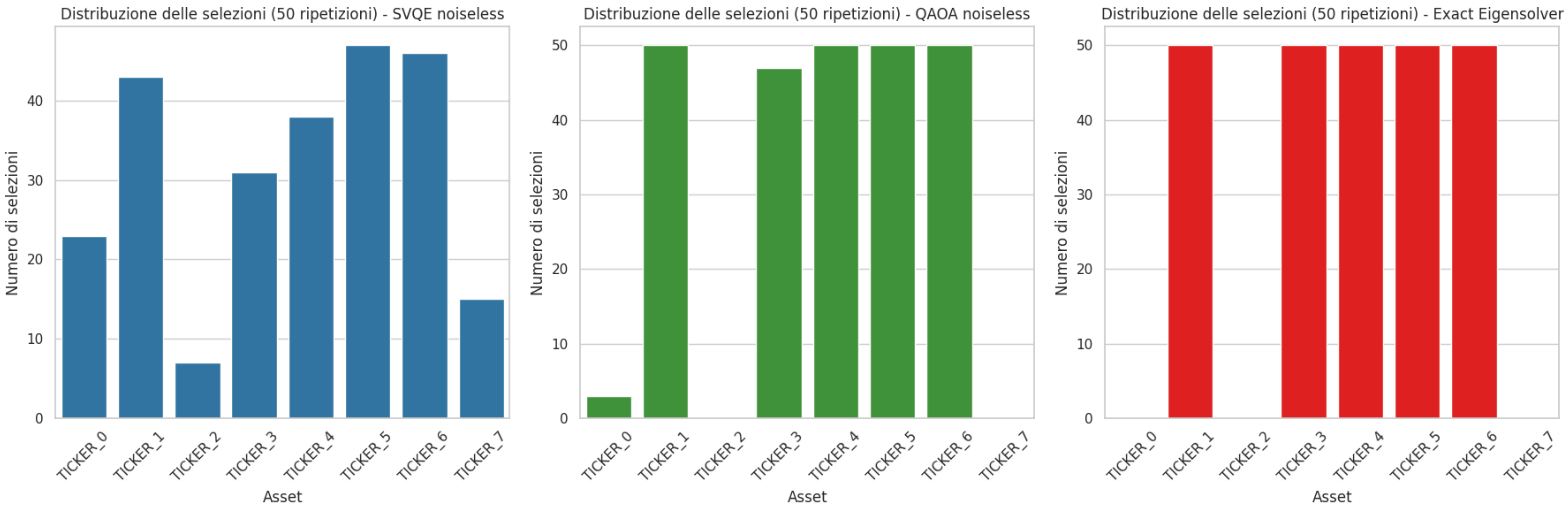
Implementazione degli algoritmi

- ***Configurazione del problema:***
  - Numero di asset: 8
  - Budget: 5
  - Rischio: 30%
  - Ripetizioni: 50
- ***Metodi:***
  - Simulazione <u>senza rumore</u> (**noiseless**)

Implementazione degli algoritmi

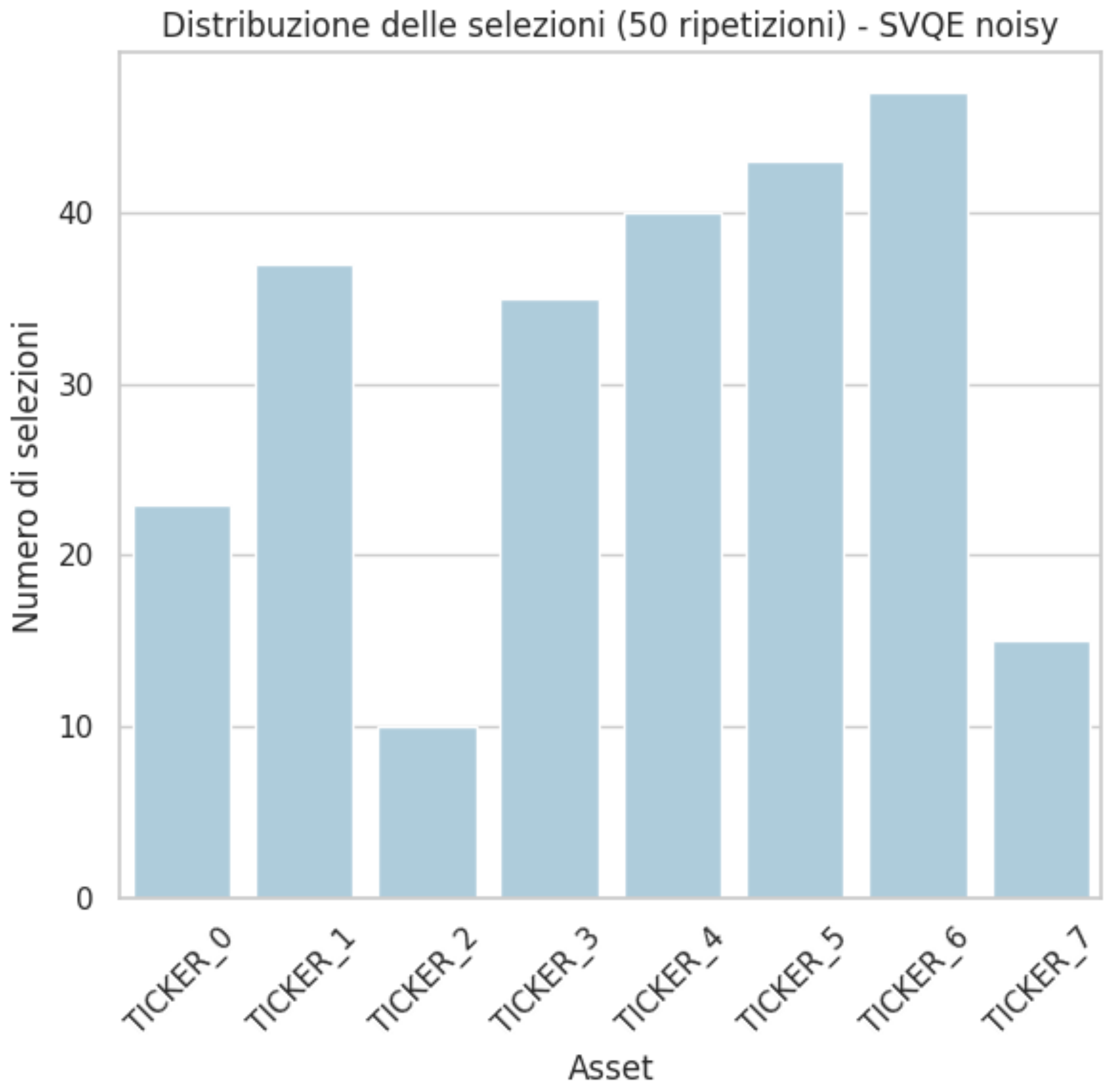
- ***Configurazione del problema:***
  - Numero di asset: 8
  - Budget: 5
  - Rischio: 30%
  - Ripetizioni: 50
- ***Metodi:***
  - Simulazione senza rumore (**noiseless**)
  - Simulazione con rumore (**noisy**) per rappresentare hardware reale

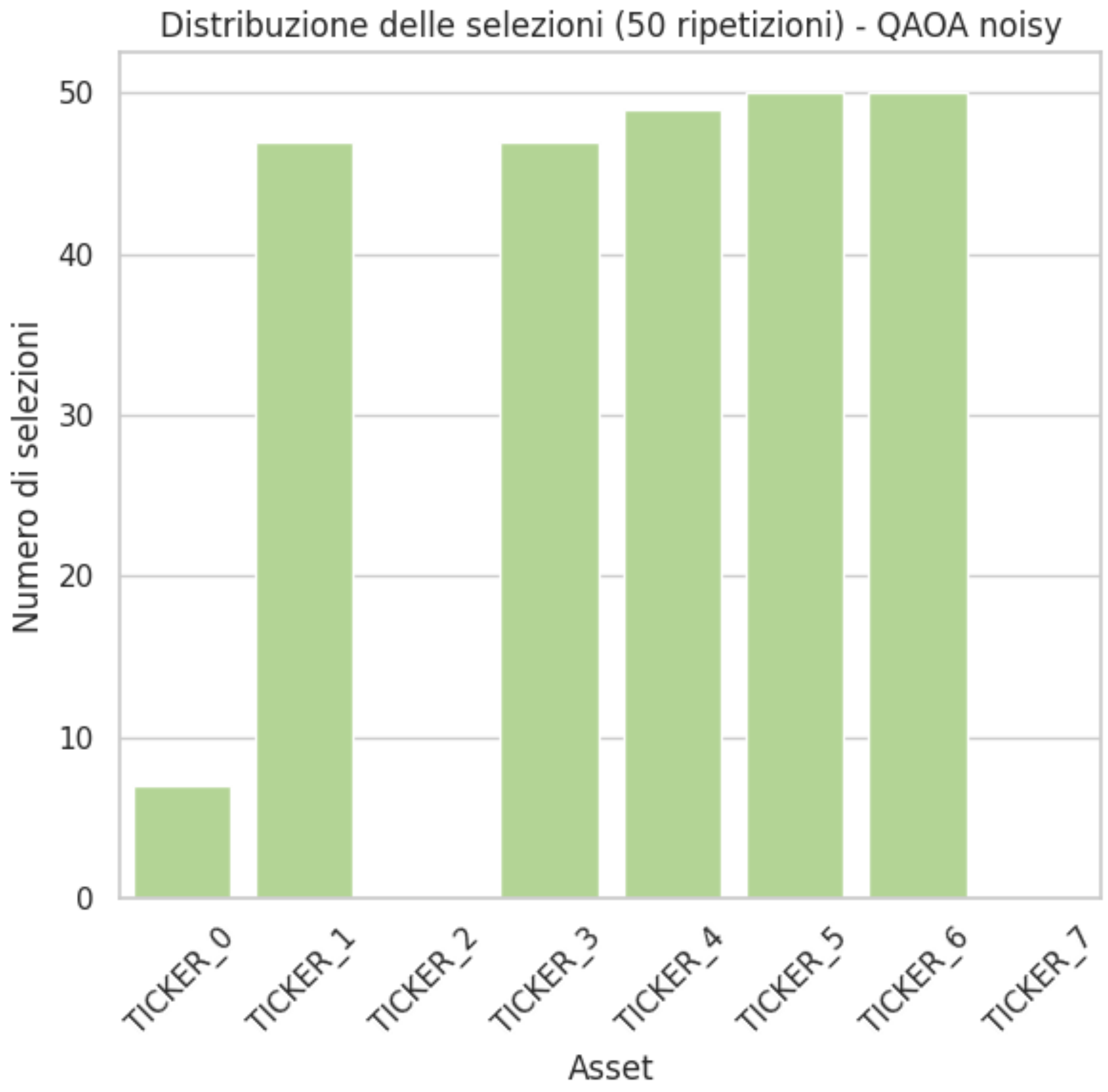
Risultati senza rumore (noiseless)

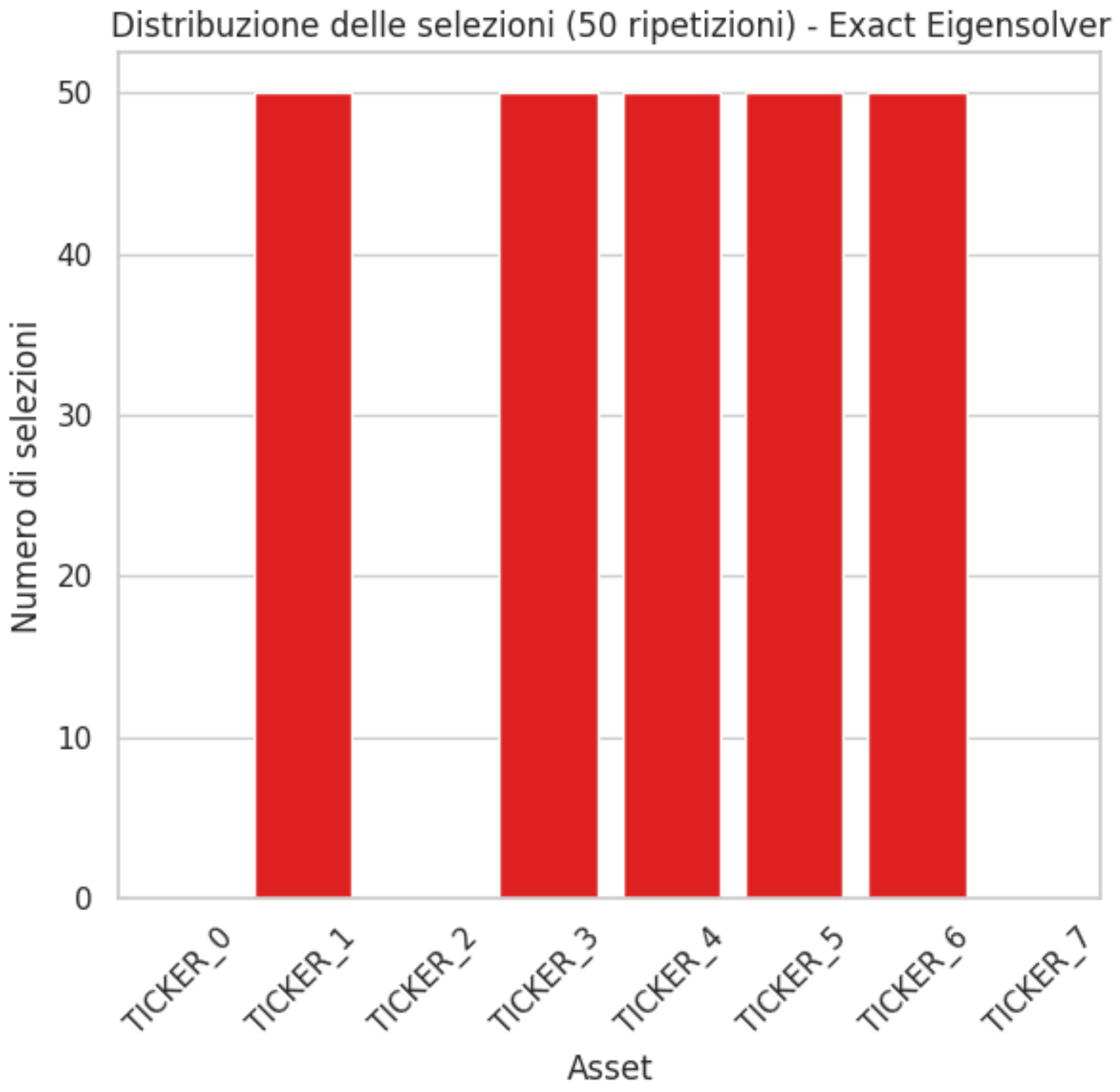


- Il QAOA tende a concentrarsi su configurazioni ristrette
- Il VQE esplora con maggiore diversificazione

Risultati con rumore (noisy)







- Diminuzione della precisione per VQE e QAOA
- Incremento dell'incertezza nelle distribuzioni degli asset selezionati

Conclusioni

- L'approccio quantistico offre un ***potenziale significativo*** per problemi complessi come l'ottimizzazione del portafoglio

Conclusioni

- L'approccio quantistico offre un ***potenziale significativo*** per problemi complessi come l'ottimizzazione del portafoglio

- ***Limiti attuali della tecnologia quantistica:***

Conclusioni

- L'approccio quantistico offre un ***potenziale significativo*** per problemi complessi come l'ottimizzazione del portafoglio

- ***Limiti attuali della tecnologia quantistica:***

    - Problemi su larga scala, come il portafoglio con migliaia di qubit, rimangono <u>impraticabili</u>

Conclusioni

- L'approccio quantistico offre un ***potenziale significativo*** per problemi complessi come l'ottimizzazione del portafoglio
- ***Limiti attuali della tecnologia quantistica:***
  - Problemi su larga scala, come il portafoglio con migliaia di qubit, rimangono **impraticabili**
  - Il rumore **compromette la qualità** delle soluzioni proposte, rendendo inefficace l'approccio quantistico

Q&A

Quantum Portfolio Optimization

Corso di Quantum Computing (a.a. 2024/25)

Merenda Saverio Mattia

UNIVERSITÀ
DI PARMA

Bibliografia

1. *Land, Ailsa H and Doig, Alison G (2010). An automatic method for solving discrete programming problems, Springer.*

2. *Blekos, Kostas et al., (2024). "A review on quantum approximate optimization algorithm and its variants", Physics Reports, Vol. 1068, pp. 1–66.*

3. *Buonaiuto, Giuseppe et al., (2023). "Best practices for portfolio optimization by quantum computing, experimented on real quantum devices", Scientific Reports, Vol. 13 No. 1, p. 19434.*

4. *Qiskit (2024). Portfolio Optimization using Qiskit Finance, qiskit-community.github.io/qiskit-finance/tutorials/portfolio-optimization*