**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра МО ЭВМ**

отчет

**по лабораторной работе №3**

**по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»**

**Тема: Расстояние Левенштейна. Вариант 10.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 3343 |  | Наумкин А. Д. |
| Преподаватель |  | Жангиров Т. Р. |

Санкт-Петербург

2025

## Цель работы

Нахождения редакционного предписания алгоритмом Вагнера-Фишера.

## Задание

№1 - Над строкой ε (будем считать строкой непрерывную последовательность из латинских букв) заданы следующие операции:

replace(ε, a, b) – заменить символ a на символ b.

insert(ε, a) – вставить в строку символ a (на любую позицию).

delete(ε, b) – удалить из строки символ b.

Каждая операция может иметь некоторую цену выполнения (положительное число).

Даны две строки A и B, а также три числа, отвечающие за цену каждой операции. Определите минимальную стоимость операций, которые необходимы для превращения строки A в строку B.

Входные данные: первая строка – три числа: цена операции replace, цена операции insert, цена операции delete; вторая строка – A; третья строка – B.

Выходные данные: одно число – минимальная стоимость операций.

Sample Input:

1 1 1

entrance

reenterable

Sample Output:

5

№2 - Над строкой ε (будем считать строкой непрерывную последовательность из латинских букв) заданы следующие операции:

replace(ε, a, b) – заменить символ a на символ b.

insert(ε, a) – вставить в строку символ a (на любую позицию).

delete(ε, b) – удалить из строки символ b.

Каждая операция может иметь некоторую цену выполнения (положительное число).

Даны две строки A и B, а также три числа, отвечающие за цену каждой операции. Определите последовательность операций (редакционное предписание) с минимальной стоимостью, которые необходимы для превращения строки A в строку B.

Входные данные: первая строка – три числа: цена операции replace, цена операции insert, цена операции delete; вторая строка – A; третья строка – B.

Выходные данные: первая строка – последовательность операций (M – совпадение, ничего делать не надо; R – заменить символ на другой; I – вставить символ на текущую позицию; D – удалить символ из строки); вторая строка – исходная строка A; третья строка – исходная строка B.

Sample Input:

1 1 1

entrance

reenterable

Sample Output:

IMIMMIMMRRM

entrance

reenterable

Модификация: Вар. 10 После выполнения вычислений базовой части пользователь выбирает строку для расширения (первую или вторую) и вводит продолжение этой строки. Требуется вычислить редакционное расстояние с учётом изменившейся строки, используя уже вычисленные ранее таблицы (временная сложность должна зависеть от длины добавления и длины другой строки и не должна зависеть от изначальной длины расширенной строки).

## Выполнение работы

Код для решения задачи №1 реализует расстояние Левенштейна с произвольными весами операций: замены (replace), вставки (insert), удаления (delete).

Алгоритм строит матрицу dp размером (len(s1) + 1) x (len(s2) + 1), где dp[i][j] — минимальная стоимость преобразования первых i символов строки s1 в первые j символов строки s2.

Шаги алгоритма:

Инициализация:

* Первая строка матрицы заполняется как стоимость вставок (от пустой строки к s2).
* Первый столбец — стоимость удалений (от s1 к пустой строке).

Заполнение матрицы:

* Для каждой ячейки dp[i][j] выбирается минимум из:
* dp[i-1][j-1] + cost\_replace — если заменять s1[i-1] на s2[j-1] (или оставить, если совпадают),
* dp[i][j-1] + cost\_insert — если вставить символ s2[j-1],
* dp[i-1][j] + cost\_delete — если удалить s1[i-1].

Расширение строк (индивидуальное задание):

* Функции extend\_levenshtein\_first и extend\_levenshtein\_second дополняют уже вычисленную матрицу без пересчета всей матрицы:
* При добавлении символов в s1 — добавляются новые строки.
* При добавлении символов в s2 — добавляются новые столбцы.

**Оценка сложности алгоритма**

Базовая функция levenshtein():

Время: O(m⋅n), где m = len(s1), n = len(s2) — так как каждая из m × n ячеек матрицы заполняется за O(1).

Память: O(m⋅n) требуется полная матрица m+1 × n+1 для хранения промежуточных значений.

Функции расширения (extend\_levenshtein\_first, extend\_levenshtein\_second):

Пусть k — длина добавочной строки (extension).

extend\_levenshtein\_first (расширение s1 на k символов):

Время: O(k⋅n)

Память: O(k⋅n)

extend\_levenshtein\_second (расширение s2 на k символов):

Время: O(k⋅m)

Память: O(k⋅m)

Для выполнения задания №2, был написан код, который решает задачу нахождения редакционного расстояния, а также восстанавливает последовательность операций для преобразования исходной строки в целевую.

Основные этапы:

Инициализация:

* Матрица dp**:** Создается матрица размера (m+1) x (n+1), где m = len(A) и n = len(B).
* Первая строка (индекс 0) заполняется стоимостью вставок (превращение пустой строки в первые j символов строки B).
* Первый столбец (индекс 0) заполняется стоимостью удалений (превращение первых i символов строки A в пустую строку).

Заполнение матрицы:

* Для каждого индекса i (от 1 до m) и j (от 1 до n):
  + **Замена или совпадение:** Если символы A[i-1] и B[j-1] совпадают, то операция замены не требует затрат и используется значение dp[i-1][j-1]. Если символы различны, стоимость определяется как dp[i-1][j-1] + price[0].
  + **Вставка:** Стоимость вычисляется как dp[i][j-1] + price[1].
  + **Удаление:** Стоимость вычисляется как dp[i-1][j] + price[2].
  + Выбирается минимальное значение из указанных вариантов, и оно записывается в dp[i][j].

Восстановление последовательности операций:

* Функция backtrace(dp, price, A, B):
  + Начинается с нижнего правого угла матрицы (dp[m][n]) и осуществляется обратный ход, чтобы восстановить последовательность операций преобразования:
  + Если достигнут первый ряд (i = 0), остается лишь вставка оставшихся символов строки B.
  + Если достигнут первый столбец (j = 0), остаётся выполнить операции удаления для оставшихся символов строки A.
  + Если символы A[i-1] и B[j-1] равны и стоимость текущей позиции совпадает с dp[i-1][j-1], операция считается совпадением (обозначается символом 'M').
  + Если значение в dp[i][j] получено за счет замены, вставки или удаления, выбирается соответствующая операция (обозначается соответственно 'R', 'I' и 'D').

В процессе обратного прохода формируется последовательность операций, которая затем переворачивается для получения правильного порядка преобразований.

**Оценка сложности алгоритма**

Время: Полное время работы алгоритма определяется доминирующим этапом заполнения матрицы: O(m⋅n)

Память: Пространственная сложность алгоритма составляет: O(m⋅n) для хранения матрицы.

## Тестирование

Результаты тестирования представлены в таблице 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Входные данные | Выходные данные | Комментарии |
| 1. | 1 1 1  qwerty  qwsdeg | Редакционное расстояние: 4 | Алгоритм Вагнера-Фишера. Результат вычислен верно. |
| 2. | 5 2 3  abc  cbaa | Редакционное расстояние: 12 | Алгоритм Вагнера-Фишера. Результат вычислен верно. |
| 3. | 100 100 100  asdf  asdf | Редакционное расстояние: 0 | Алгоритм Вагнера-Фишера. Результат вычислен верно. |
| 4. | 1 1 1  wierghwij  sooidfhgi | IRRRRRMRMD  wierghwij  sooidfhgi | Алгоритм Вагнера-Фишера c восстановлением действий. Результат вычислен верно. |

Табл. 1. – Результаты тестирования

## Выводы

Был реализован алгоритм Вагнера-Фишера для вычисления редакционного предписания, определяя минимальное количество операций (вставки, удаления, замены) для преобразования одной строки в другую.

# Приложение А

1 – Файл main.py

DEBUG = False # Общий режим отладки

DEBUG\_VERBOSE = True # Выводить матрицу после каждой итерации

def print\_matrix(matrix, s1, s2):

print(" ", end="")

for ch in " " + s2:

print(f"{ch:>5}", end="")

print()

for i in range(len(matrix)):

ch = " " if i == 0 else s1[i - 1] if i - 1 < len(s1) else " "

print(f"{ch:>3} |", end="")

for j in range(len(matrix[0])):

print(f"{matrix[i][j]:5}", end="")

print()

print()

def levenshtein(price, s1, s2):

# price[0] - replace, price[1] - insert, price[2] - delete

m, n = len(s1), len(s2)

matrix = [[0] \* (n + 1) for \_ in range(m + 1)]

if DEBUG:

print("==> Инициализация первой строки (вставки):")

for j in range(1, n + 1):

matrix[0][j] = j \* price[1]

if DEBUG:

print(f" Вставить '{s2[j - 1]}' в позицию 0: {j} \* {price[1]} = {matrix[0][j]}")

if DEBUG:

print("\n==> Инициализация первого столбца (удаления):")

for i in range(1, m + 1):

matrix[i][0] = i \* price[2]

if DEBUG:

print(f" Удалить '{s1[i - 1]}' из позиции {i - 1}: {i} \* {price[2]} = {matrix[i][0]}")

if DEBUG\_VERBOSE:

print("\nНачальная матрица:")

print\_matrix(matrix, s1, s2)

for i in range(1, m + 1):

for j in range(1, n + 1):

a, b = s1[i - 1], s2[j - 1]

match\_or\_replace = 0 if a == b else price[0]

cost\_replace = matrix[i - 1][j - 1] + match\_or\_replace

cost\_insert = matrix[i][j - 1] + price[1]

cost\_delete = matrix[i - 1][j] + price[2]

matrix[i][j] = min(cost\_replace, cost\_insert, cost\_delete)

if DEBUG:

print(f"\n==> Позиция s1[{i - 1}]='{a}' и s2[{j - 1}]='{b}' (i={i}, j={j}):")

if a == b:

print(" Символы совпадают")

print(f" Стоимость: dp[{i - 1}][{j - 1}] = {matrix[i - 1][j - 1]}")

else:

print(" Символы разные")

print(f" Стоимость замены: dp[{i - 1}][{j - 1}] + {price[0]} = {cost\_replace}")

print(f" Стоимость вставки : dp[{i}][{j - 1}] + {price[1]} = {cost\_insert}")

print(f" Стоимость удаления : dp[{i - 1}][{j}] + {price[2]} = {cost\_delete}")

print(f" --> Выбрано минимальное значение: {matrix[i][j]}")

if DEBUG\_VERBOSE:

print("\nТекущая матрица:")

print\_matrix(matrix, s1, s2)

if DEBUG:

print("\n==> Финальная матрица:")

print\_matrix(matrix, s1, s2)

return matrix[m][n], matrix

def extend\_levenshtein\_first(matrix, price, s1, s2, extension):

"""

Расширение первой строки. Предполагается, что matrix уже содержит матрицу расстояний для старой s1.

После расширения s1 = s1 + extension, вычисляем только новые строки.

Временная сложность: O( |extension| \* len(s2) )

"""

old\_m = len(s1)

s1\_extended = s1 + extension

new\_m = len(s1\_extended)

n = len(s2)

if DEBUG:

print(f"\n==> Расширяем первую строку '{s1}' на: '{extension}'")

# Для новых строк создаём строки в матрицы

for i in range(old\_m + 1, new\_m + 1):

# Вычисляем dp[i][0]: удаление всех символов s1\_extended[0:i]

new\_row = [0] \* (n + 1)

new\_row[0] = i \* price[2]

for j in range(1, n + 1):

a = s1\_extended[i - 1]

b = s2[j - 1]

cost\_replace = matrix[i - 1][j - 1] + (0 if a == b else price[0])

cost\_insert = new\_row[j - 1] + price[1]

cost\_delete = matrix[i - 1][j] + price[2]

new\_row[j] = min(cost\_replace, cost\_insert, cost\_delete)

if DEBUG:

print(f"\n==> Расширение: новая позиция s1[{i - 1}]='{a}' и s2[{j - 1}]='{b}' (i={i}, j={j}):")

if a == b:

print(" Символы совпадают")

print(f" Стоимость: dp[{i - 1}][{j - 1}] = {matrix[i - 1][j - 1]}")

else:

print(f" Стоимость замены: dp[{i - 1}][{j - 1}] + {price[0]} = {cost\_replace}")

print(f" Стоимость вставки: dp[{i}][{j - 1}] + {price[1]} = {cost\_insert}")

print(f" Стоимость удаления: dp[{i - 1}][{j}] + {price[2]} = {cost\_delete}")

print(f" --> Выбрано: {new\_row[j]}")

matrix.append(new\_row)

if DEBUG:

print("\n==> Финальная матрица после расширения первой строки:")

print\_matrix(matrix, s1\_extended, s2)

return matrix[new\_m][n], s1\_extended

def extend\_levenshtein\_second(matrix, price, s1, s2, extension):

"""

Расширение второй строки. Предполагается, что matrix уже содержит матрицу расстояний для старой s2.

После расширения s2 = s2 + extension, вычисляем только новые столбцы.

Временная сложность: O( |extension| \* len(s1) )

"""

old\_n = len(s2)

s2\_extended = s2 + extension

new\_n = len(s2\_extended)

m = len(s1)

if DEBUG:

print(f"\n==> Расширяем вторую '{s2}' строку на: '{extension}'")

# Добавляем новые столбцы ко всем строкам матрицы

for i in range(m + 1):

# Для строки 0, базовая инициализация, если i == 0: dp[0][j] = j \* price[1]

for j in range(old\_n + 1, new\_n + 1):

if i == 0:

val = j \* price[1]

matrix[0].append(val)

else:

a = s1[i - 1]

b = s2\_extended[j - 1]

cost\_replace = matrix[i - 1][j - 1] + (0 if a == b else price[0])

cost\_insert = matrix[i][j - 1] + price[1]

cost\_delete = matrix[i - 1][j] + price[2]

matrix[i].append(min(cost\_replace, cost\_insert, cost\_delete))

if DEBUG:

print(f"\n==> Расширение: новая позиция s1[{i - 1}]='{a}' и s2[{j - 1}]='{b}' (i={i}, j={j}):")

if a == b:

print(" Символы совпадают")

print(f" Стоимость: dp[{i - 1}][{j - 1}] = {matrix[i - 1][j - 1]}")

else:

print(f" Стоимость замены: dp[{i - 1}][{j - 1}] + {price[0]} = {cost\_replace}")

print(f" Стоимость вставки: dp[{i}][{j - 1}] + {price[1]} = {cost\_insert}")

print(f" Стоимость удаления: dp[{i - 1}][{j}] + {price[2]} = {cost\_delete}")

print(f" --> Выбрано: {matrix[i][j]}")

if DEBUG:

print("\n==> Финальная матрица после расширения второй строки:")

print\_matrix(matrix, s1, s2\_extended)

return matrix[m][new\_n], s2\_extended

if \_\_name\_\_ == '\_\_main\_\_':

if not DEBUG:

DEBUG\_VERBOSE = False

price = list(map(int, input().split()))

s1 = input().strip()

s2 = input().strip()

dist, matrix = levenshtein(price, s1, s2)

print(f"\nРедакционное расстояние: {dist}")

print("\nВыберите строку для расширения:")

print("1 - расширить первую строку")

print("2 - расширить вторую строку")

print("0 - не расширять")

choice = input("Ваш выбор: ").strip()

if choice == "1":

extension = input("Введите продолжение первой строки: ")

new\_dist, s1\_extended = extend\_levenshtein\_first(matrix, price, s1, s2, extension)

print(f"\nНовое редакционное расстояние для '{s1\_extended}' и '{s2}': {new\_dist}")

elif choice == "2":

extension = input("Введите продолжение второй строки: ")

new\_dist, s2\_extended = extend\_levenshtein\_second(matrix, price, s1, s2, extension)

print(f"\nНовое редакционное расстояние для '{s1}' и '{s2\_extended}': {new\_dist}")

else:

print("\nРасширение не выполнено.")

2 – Файл back.py

DEBUG = False

def print\_matrix(matrix, A, B):

m, n = len(matrix), len(matrix[0])

header = " " + " ".join([" "] + list(B))

print(header)

for i in range(m):

label = " " if i == 0 else A[i - 1]

row = " ".join(f"{matrix[i][j]:2}" for j in range(n))

print(f"{label:>3} | {row}")

print()

def compute\_dp(price, A, B):

m, n = len(A), len(B)

matrix = [[0] \* (n + 1) for \_ in range(m + 1)]

for i in range(1, m + 1):

matrix[i][0] = i \* price[2]

if DEBUG:

print(f"Инициализация dp[{i}][0] = {matrix[i][0]} (удаление символа '{A[i - 1]}')")

for j in range(1, n + 1):

matrix[0][j] = j \* price[1]

if DEBUG:

print(f"Инициализация dp[0][{j}] = {matrix[0][j]} (вставка символа '{B[j - 1]}')")

if DEBUG:

print("\nНачальная матрица DP:")

print\_matrix(matrix, A, B)

for i in range(1, m + 1):

for j in range(1, n + 1):

cost\_replace = matrix[i - 1][j - 1] + (0 if A[i - 1] == B[j - 1] else price[0])

cost\_insert = matrix[i][j - 1] + price[1]

cost\_delete = matrix[i - 1][j] + price[2]

matrix[i][j] = min(cost\_replace, cost\_insert, cost\_delete)

if DEBUG:

print(f"\nВычисляем dp[{i}][{j}] для A[{i - 1}]='{A[i - 1]}' и B[{j - 1}]='{B[j - 1]}':",

f" Заменить = {cost\_replace}, Вставить = {cost\_insert}, Удалить = {cost\_delete} => dp[{i}][{j}] = {matrix[i][j]}")

if DEBUG:

print("\nИтоговая матрица DP:")

print\_matrix(matrix, A, B)

return matrix

def backtrace(dp, price, A, B):

i, j = len(A), len(B)

ops = []

if DEBUG:

print("\nОбратный ход по матрице для восстановления операций:")

while i > 0 or j > 0:

if DEBUG:

print(f"\nНа позиции dp[{i}][{j}], текущая стоимость: {dp[i][j]}")

if i == 0:

ops.append('I')

if DEBUG:

print(f"(I) Вставляем символ '{B[j - 1]}' (i={i}, j={j})")

j -= 1

elif j == 0:

ops.append('D')

if DEBUG:

print(f"(D) Удаляем символ '{A[i - 1]}' (i={i}, j={j})")

i -= 1

elif A[i - 1] == B[j - 1] and dp[i][j] == dp[i - 1][j - 1]:

ops.append('M')

if DEBUG:

print(f"(M) Символы равны: A[{i - 1}]='{A[i - 1]}' и B[{j - 1}]='{B[j - 1]}'")

i -= 1

j -= 1

elif dp[i][j] == dp[i - 1][j - 1] + price[0]:

ops.append('R')

if DEBUG:

print(f"(R) Заменяем A[{i - 1}]='{A[i - 1]}' на B[{j - 1}]='{B[j - 1]}'")

i -= 1

j -= 1

elif dp[i][j] == dp[i][j - 1] + price[1]:

ops.append('I')

if DEBUG:

print(f"(I) Вставляем символ '{B[j - 1]}'")

j -= 1

elif dp[i][j] == dp[i - 1][j] + price[2]:

ops.append('D')

if DEBUG:

print(f"(D) Удаляем символ '{A[i - 1]}'")

i -= 1

ops.reverse()

if DEBUG:

print("\nПоследовательность операций:", "".join(ops))

return "".join(ops)

if \_\_name\_\_ == '\_\_main\_\_':

price = list(map(int, input().split()))

A = input().strip()

B = input().strip()

dp = compute\_dp(price, A, B)

ops = backtrace(dp, price, A, B)

print(ops)

print(A)

print(B)