CIENCIA DE DATOS

Vectores

MATEMÁTICA PARA CIENCIA DE DATOS

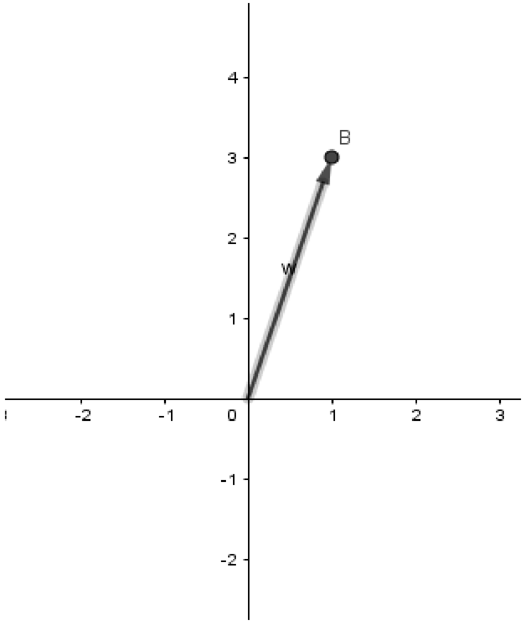
PROF. ESTEBAN BALLESTERO

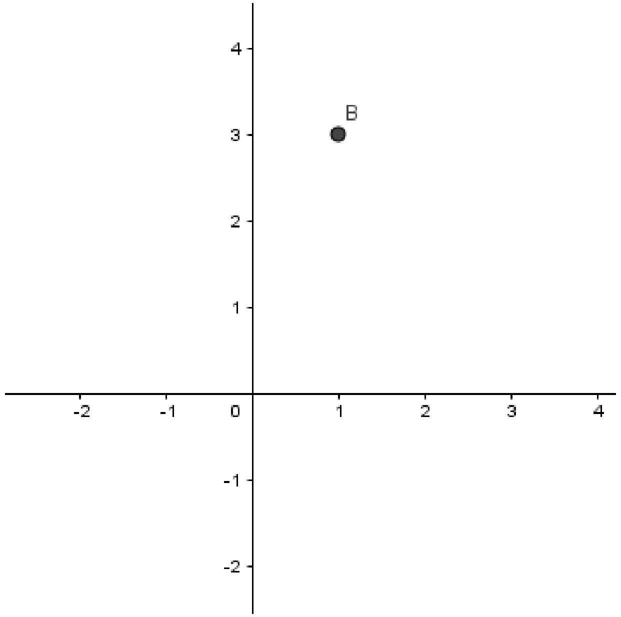
Vectores: Plano xy

- Es un par ordenado (a, b) donde $a, b \in R$.
- A los valores a y b se le llaman elementos o componentes del vector.
- Note que la notación (a, b) también se usa para punto, entonces, cuál es la diferencia:

Vectores

Característica	Vector	Punto
Notación (a, b)	X	X
Tiene magnitud	X	
Tiene dirección	X	



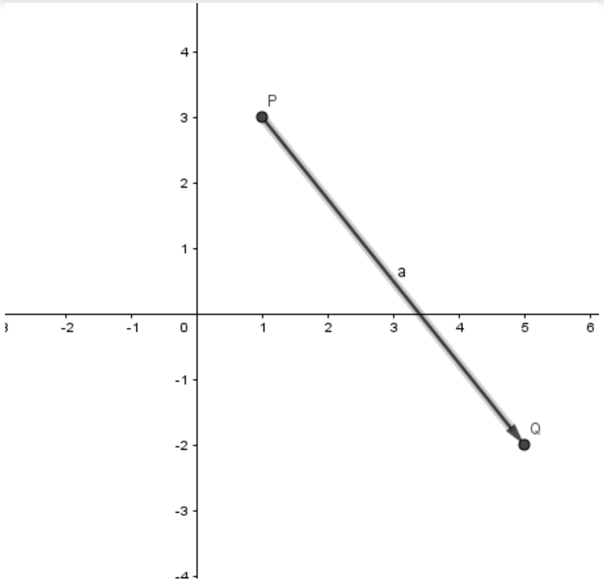


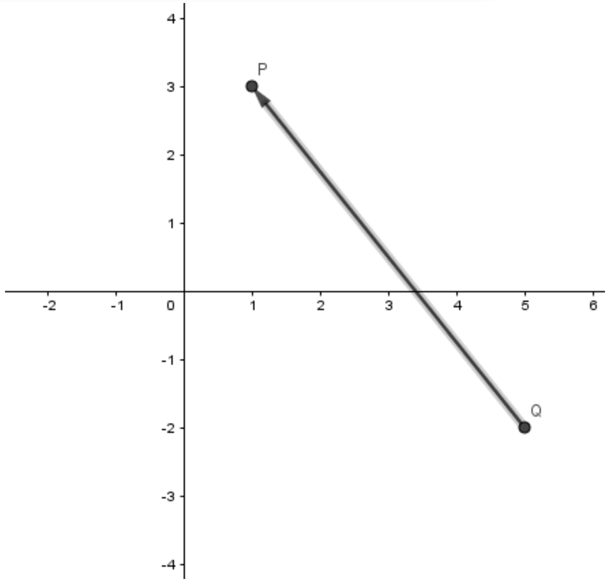
Vectores

- Cuando se trabaja con el vector (a, b)se debe entender que este inicia en el punto $(0,0)$ y termina en el punto (a, b).
- Análogamente para puntos en el espacio (a, b, c), estos inicia en $(0,0,0)$.
- Vectores nulos: en $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2 y$ $(0,0,0)$ $en \mathbb{R}^3$

Vectores dirigidos

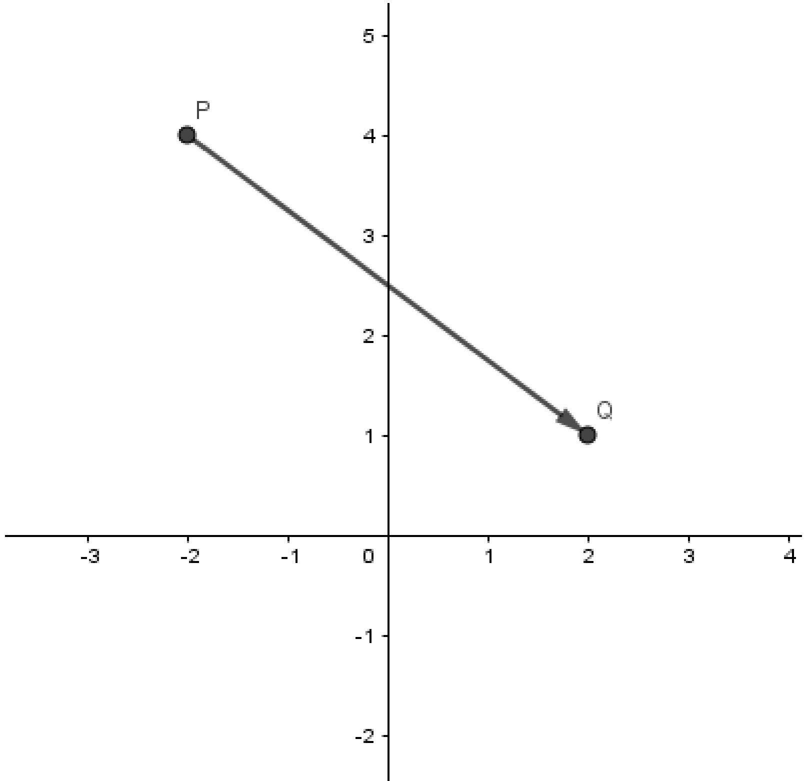
Característica	Vector: $\overrightarrow{PQ}$	Vector: $\overrightarrow{QP}$
Inicia	P	Q
Termina	Q	P
Cálculo	$Q - P$	$P - Q$
Estos vectores tienen la misma magnitud, pero van en dirección opuesta		





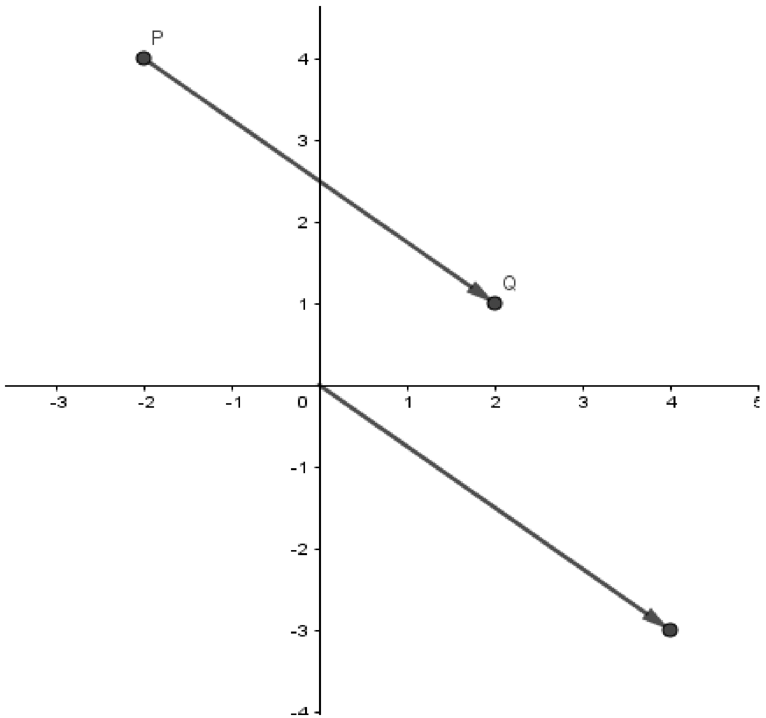
Ejemplo:

- Calcule y dibuje el vector $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (-2,4)\ \ y\ \ Q = (2,1)$



Solución:

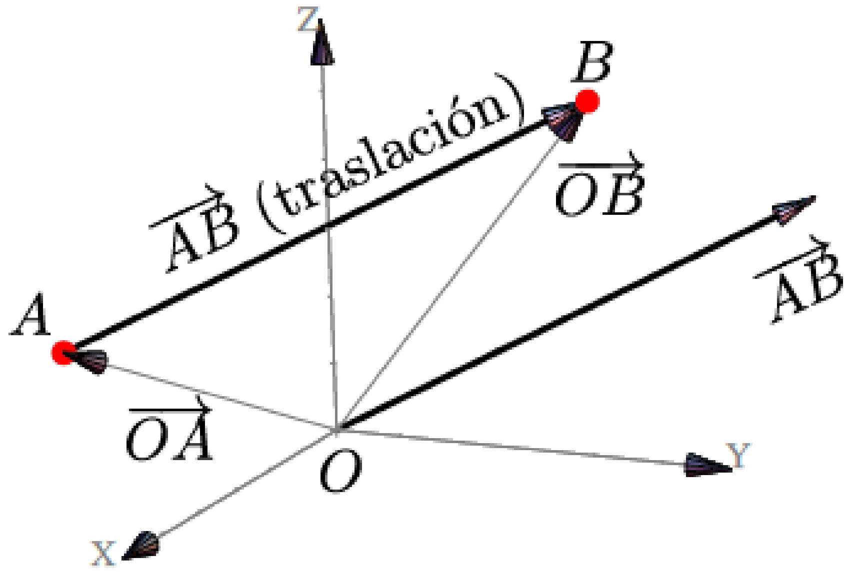
- $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,1) - (-2,4) = (4,-3)$
- Si graficamos este vector con el que se tenía en la lámina anterior, ocurre lo siguiente, ¿Por qué?:



Traslaciones…

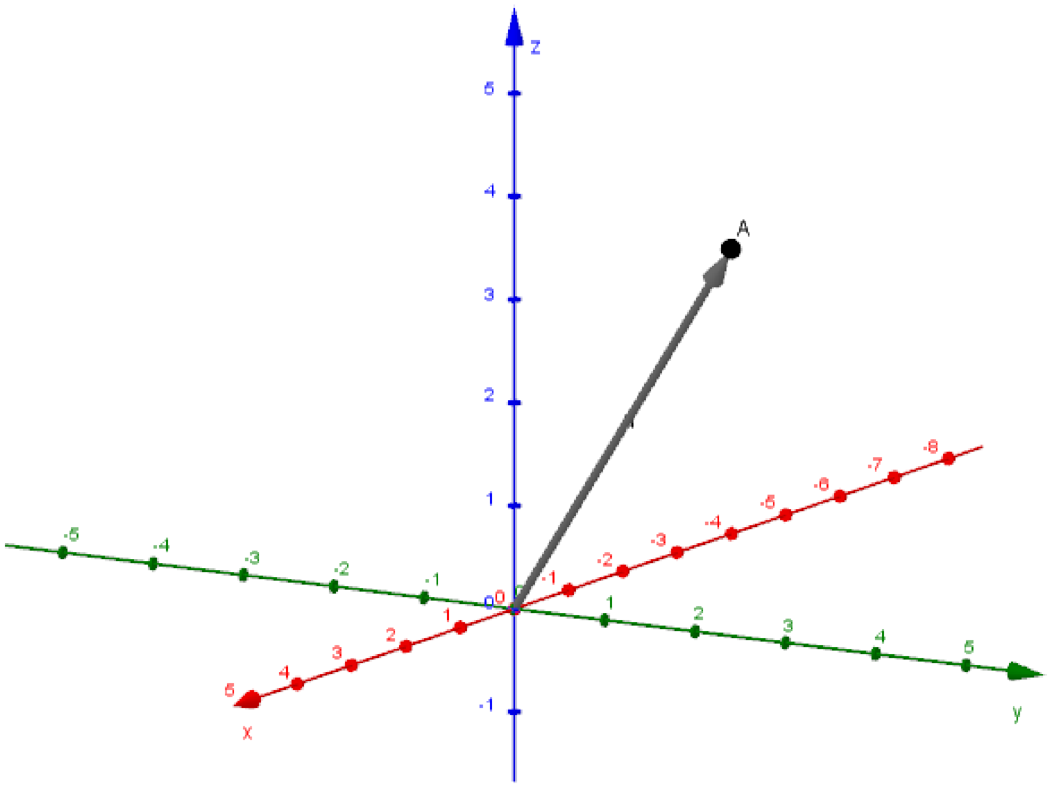
Los vectores están anclados en el origen. Sin embargo, frecuentemente visualizamos un vector como su traslación: El vector $\overrightarrow{AB}$ está anclado en el origen, pero lo visualizamos como el "vector" que va de A hasta B. Formalmente:

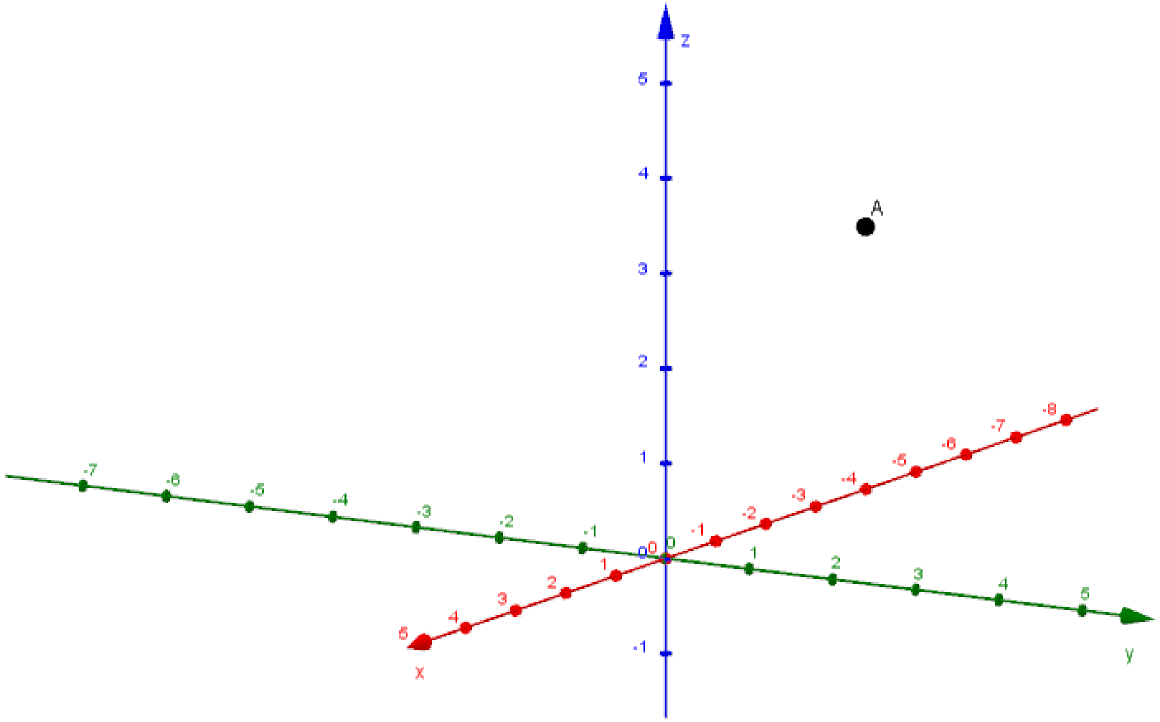
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}$$



Vectores en el espacio

Vector	Punto





Magnitud y dirección de un vector

- Como anteriormente se indicó, un vector tiene dos componentes importantes: **magnitud** (medida para el vector, su longitud) y **dirección**(suele darse a partir de ángulos)

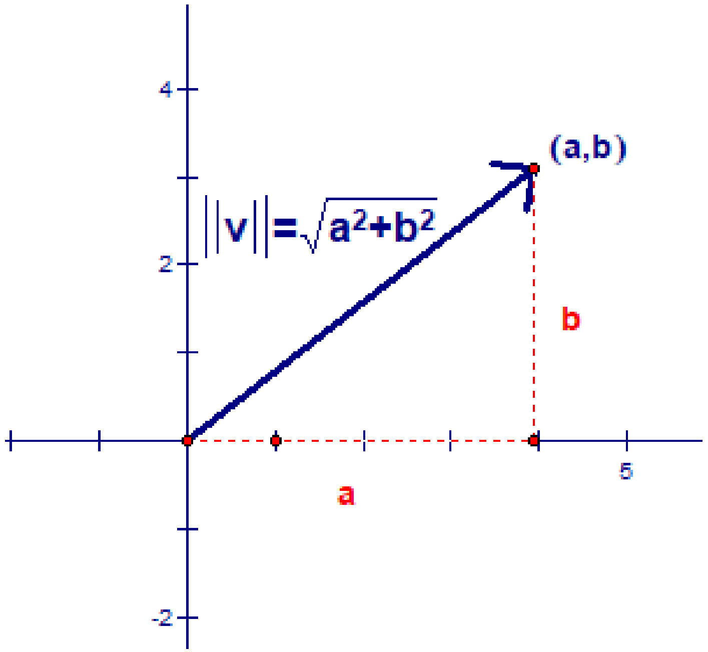
Magnitud de un vector o norma

- Vectores en $\mathbb{R}^2$: Sea $v = (a, b)$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

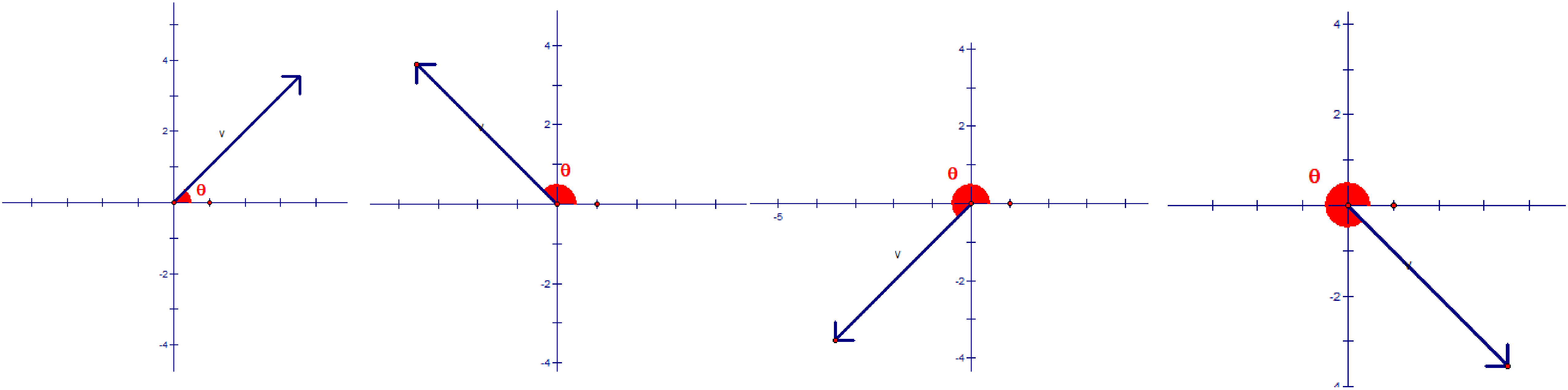
- Vectores en $\mathbb{R}^3$: Sea $v = (a, b, c)$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Dirección

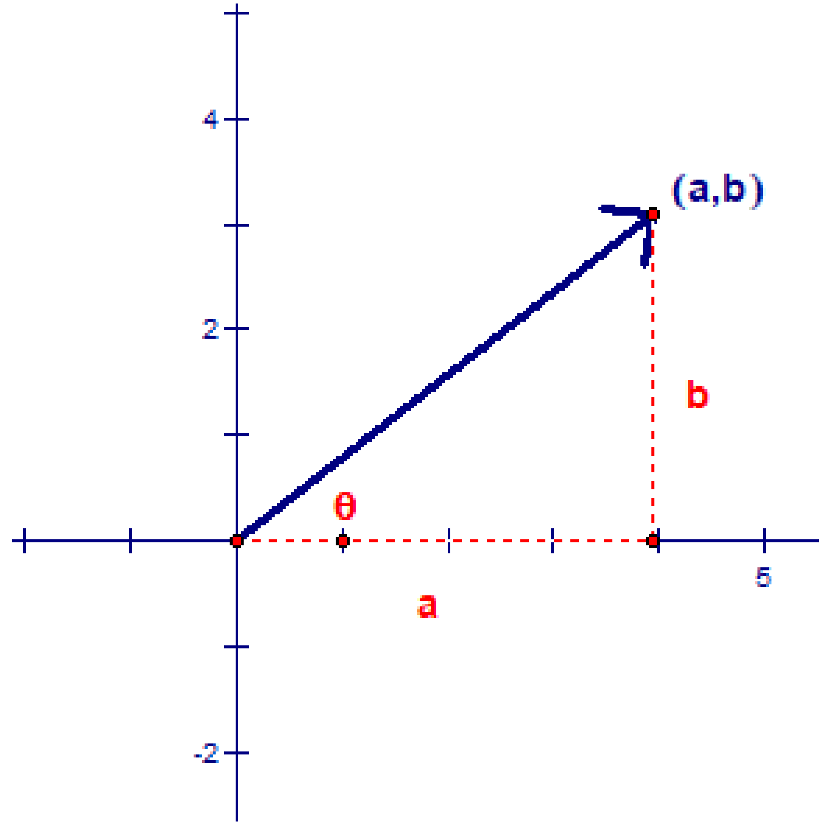
- La dirección de un vector es el ángulo (en radianes) que forma el vector con el semieje "x" positivo. $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$



Dirección: en $\mathbb{R}^2$

- $tan(\theta) = \frac{b}{a}$

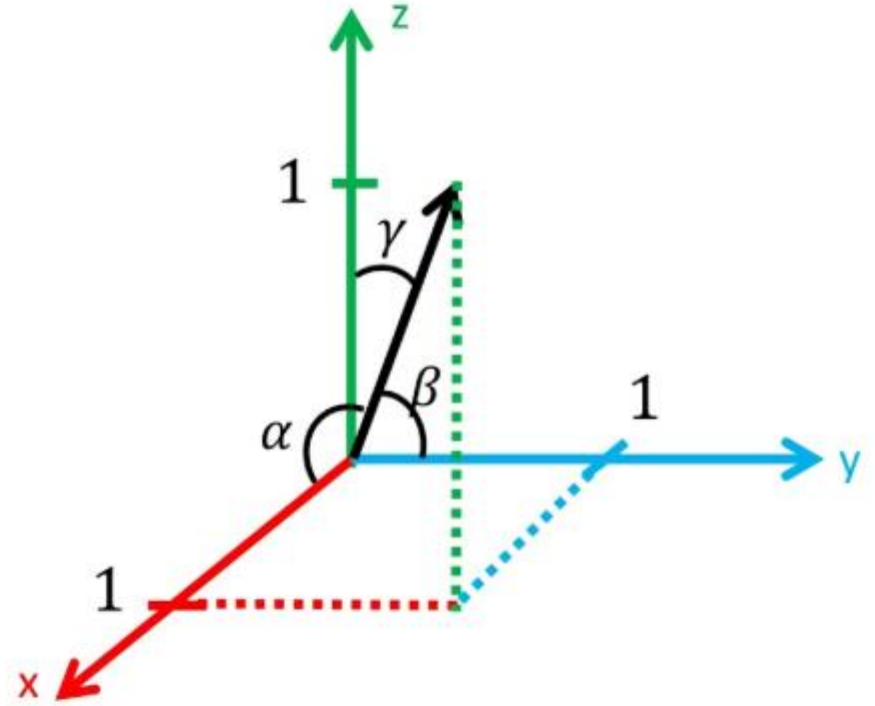
- Para determinar el ángulo θ:
- $\theta = acrtan\left(\frac{b}{a}\right)$ ó $\theta = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$



Dirección: en $\mathbb{R}^3$

- Para el caso de los vectores en $\mathbb{R}^3$, no se maneja es posible dar la dirección con un único vector, así, la ubicación de este en el espacio requiere de 3 ángulos específicos:

- α:ángulo entre el vector y el semieje x positivo
- β:ángulo entre el vector y el semieje y positivo
- γ:ángulo entre el vector y el semieje z positivo



Cosenos directores

A partir de los ángulos directores y partiendo de un vector $v = (x_0, y_0, z_0)$, se obtienen los cosenos directores:

$$\cos(\alpha) = \frac{x_0}{\|v\|}$$
$$\cos(\beta) = \frac{y_0}{\|v\|}$$
$$\cos(\gamma) = \frac{z_0}{\|v\|}$$

¿Será el vector $u = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$ un vector unitario?

Multiplicación por un escalar

- Sea $v=(a,b)\epsilon\mathbb{R}^2$un vector y $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}$ un escalar, se define el producto escalar de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\alpha}v=(\boldsymbol{\alpha}a,\boldsymbol{\alpha}b)$$

Además, la magnitud de $\boldsymbol{\alpha}v$ se calcularía:

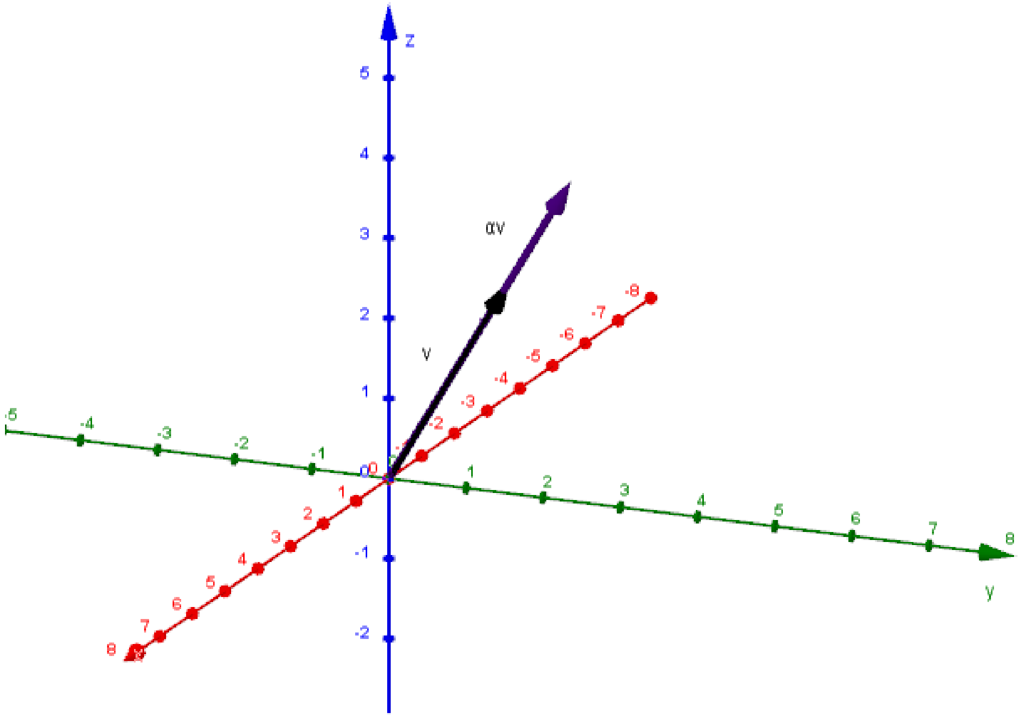
$$\|\boldsymbol{\alpha}v\|=|\boldsymbol{\alpha}|\|v\|$$

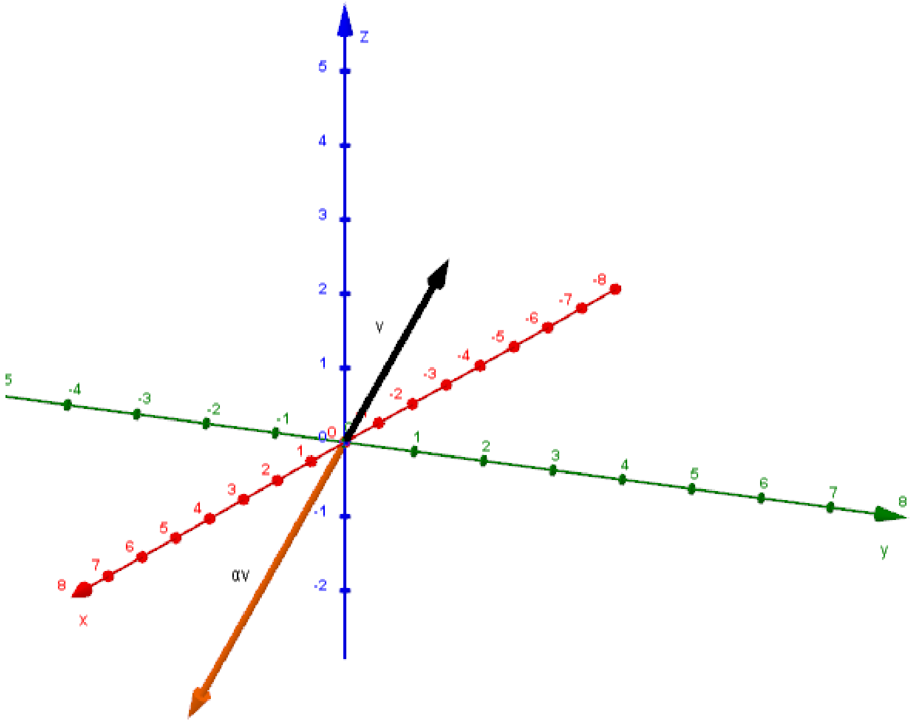
*Los resultados anteriores se amplían análogamente para vectores en $\mathbb{R}^3$

Multiplicación por un escalar

- El vector $\boldsymbol{\alpha}v$, es un vector paralelo al vector v

$\boldsymbol{\alpha > 0}$: $la\ dirección\ de\ \boldsymbol{\alpha}v\ es\ la\ misma\ que\ la\ de\ v$	$\boldsymbol{\alpha < 0}$: $la\ dirección\ de\ \boldsymbol{\alpha}v\ ela\ misma\ que\ la\ de\ v + \pi$





Teorema 1.14 (Propiedades de los vectores).

Si $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces,

1.) Conmutatividad: $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$

2.) Asociatividad: $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$

3.) Elemento neutro: $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}$

4.) Inversos: $\overrightarrow{v} + -\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

5.) $1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$

6.) $\alpha\beta\overrightarrow{v} = \alpha(\beta\overrightarrow{v})$

7.) $\alpha(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \alpha\overrightarrow{v} + \alpha\overrightarrow{w}$

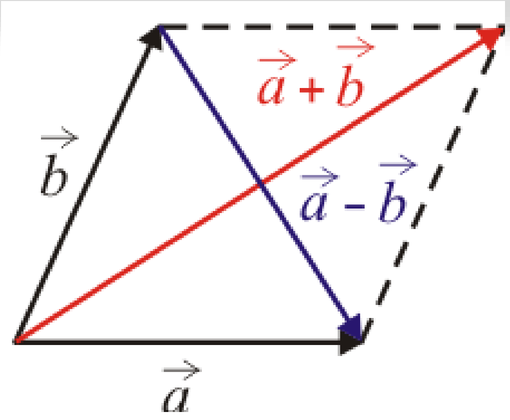
8.) $(\alpha + \beta)\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{v}$

Propiedades para vectores

Definición 1.4 (Suma y resta).

Si $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$;

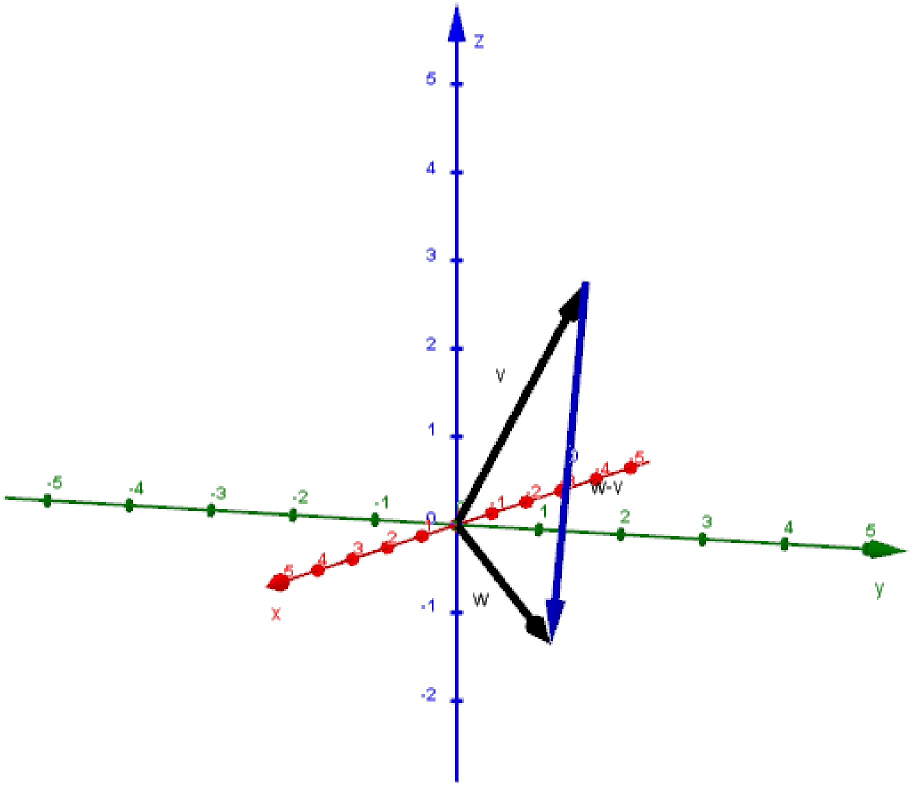
$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)$$

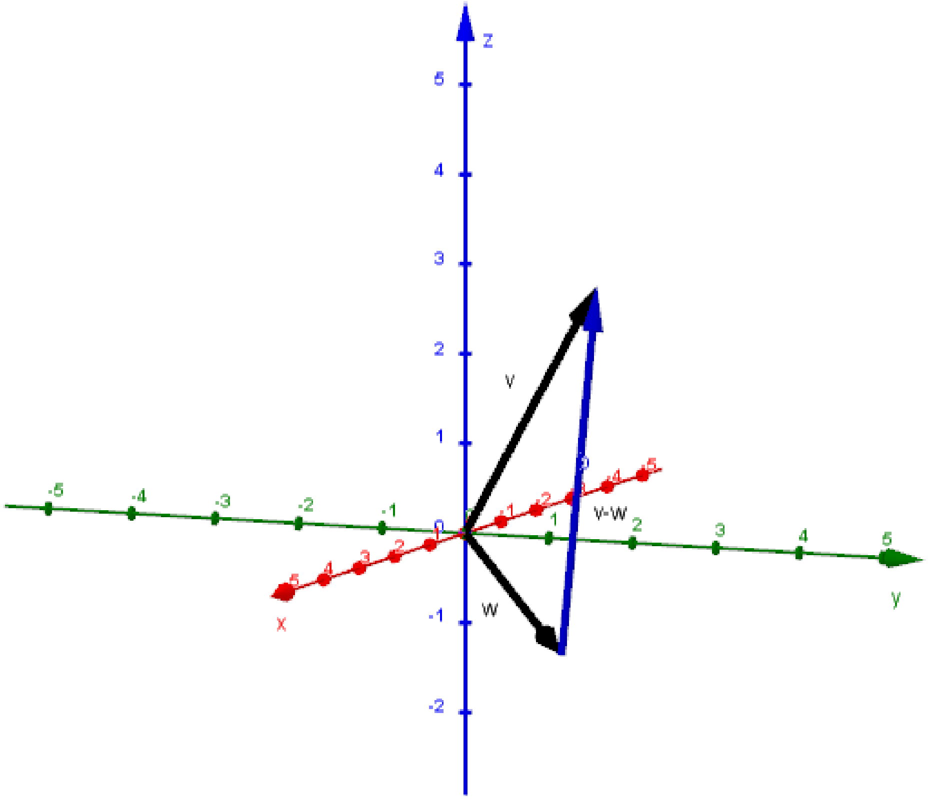


Suma de vectores

Resta de vectores

- $\|v - w\| = \|w - v\|$, pero $v - w$ tiene dirección opuesta a $w - v$





Vectores unitarios: especiales

- En $\mathbb{R}^2$: $i = (1,0)$ y $j = (0,1)$

Cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ se puede escribir en términos del los vectores i, j

- En $\mathbb{R}^3$: $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ y $\mathrm{k} = (0,0,1)$

Cualquier vector en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir en términos del los vectores i, j, k.

Vectores unitarios

¿Cómo encontrar un vector unitario con la misma dirección que un vector dado?

Si v representa a cualquier vector, entonces el vector $\frac{v}{\|v\|}$ es un vector unitario en la misma dirección de v.

Producto para vectores

- Existen dos tipos de producto para vectores:
- Producto punto: el resultado es un escalar
- Producto vectorial o producto cruz: el resultado es un vector

Producto punto

En $\mathbb{R}^2$:

Si $u = (a_1, b_1)$ y $v = (a_2, b_2)$, el producto escalar o producto punto se define:

$$\boldsymbol{u \cdot v = a_1 a_2 + b_1 b_2}$$

En $\mathbb{R}^3$:

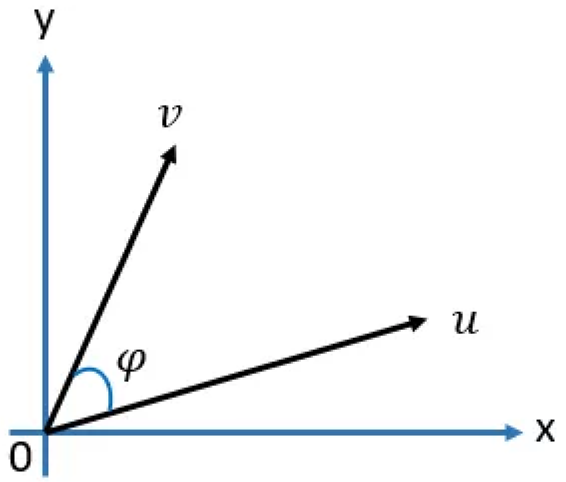
Si $u = (a_1, b_1, c_1)$ y $v = (a_2, b_2, c_2)$, el producto escalar o producto punto se define:

$$u \cdot v = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

Ángulo entre dos vectores

Entre dos vectores cualesquiera u, v, se puede apreciar que hay dos ángulos que los separan. De esta manera, se define a φ como el ángulo entre los vectores como el ángulo NO NEGATIVO más pequeño entre u y v, así:

$$\mathbf{0 \leq \boldsymbol{\varphi} \leq \boldsymbol{\pi}}$$



Ángulo entre dos vectores

Sean u y v dos vectores no nulos. Si φ es el ángulo entre dichos vectores , entonces se cumple:

$$\cos(\varphi) = \frac{uv}{\|u\|\|v\|}$$

$$uv = \|u\|\|v\| \; cos(\varphi)$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{uv}{\|u\|\|v\|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{uv}{\|u\|\|v\|}\right)$$

Vectores paralelos

Dos vectores $u\ y\ v$ se dice que son paralelos si cumplen alguna de las siguientes condiciones:

1. $\boldsymbol{\varphi = 0} \vee \boldsymbol{\varphi = \pi}$
2. **Si** $\boldsymbol{u \neq 0\ y\ v = \alpha u}$

Vectores ortogonales

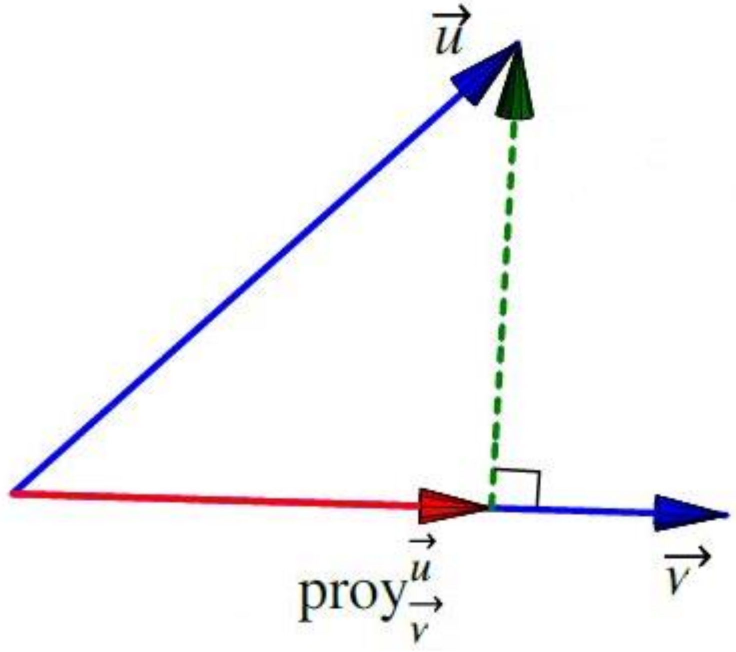
Dos vectores u y v se dice que son ortogonales (perpendiculares) si cumplen alguna de las siguientes condiciones:

1. $\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{2}}$
2. **Si** $\boldsymbol{u, v \neq 0}$: $\boldsymbol{v \cdot u = 0}$

Proyección de un vector

Si u y v son vectores NO nulos, la proyección de u sobre v es un vector definido por:

$$Proy_v u = \frac{uv}{\|v\|^2}\, v$$



Donde $\frac{uv}{\|v\|^2}$ es la componente de u en la dirección de v, corresponde a un escalar.

¿Es $proy_v u \parallel v$?, ¿En qué casos la $Proy_v u = 0$?

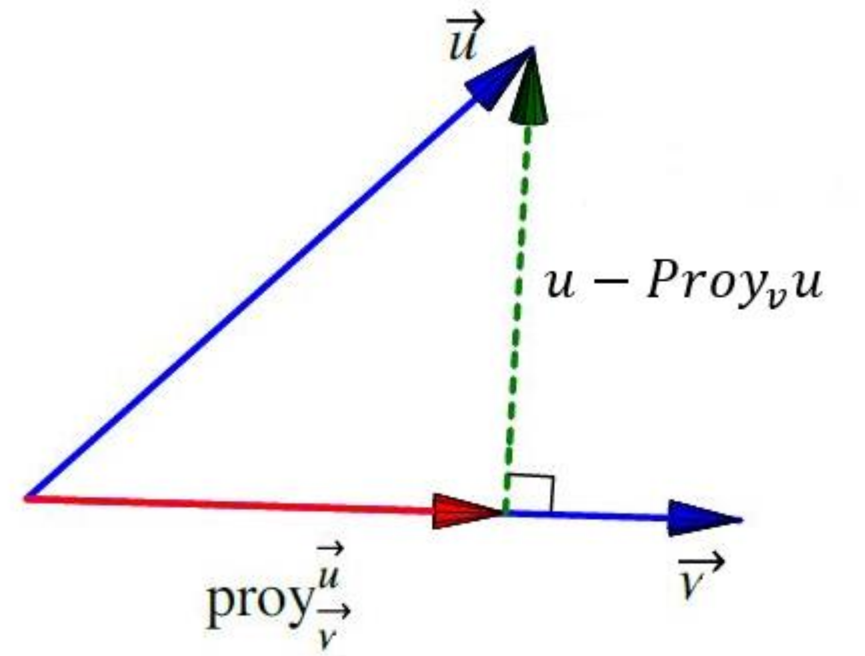
Proyección de un vector

Resultado:

Si $v \neq 0$ es un vector, entonces, para cualquier otro vector u, se cumple que:

$$w = u - \frac{uv}{\|v\|^2} v = u - Proy_v u$$

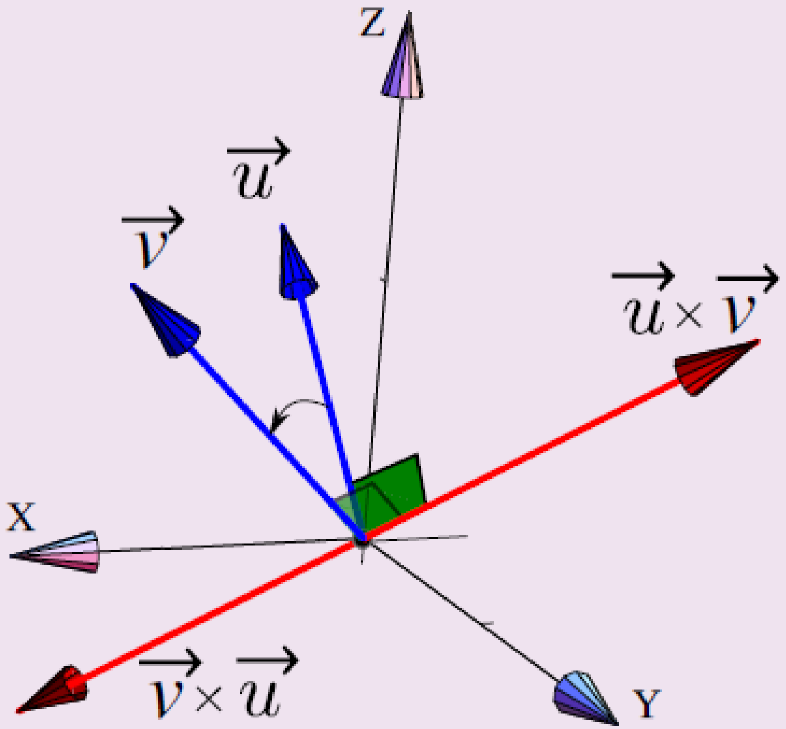
Es un vector ortogonal a v



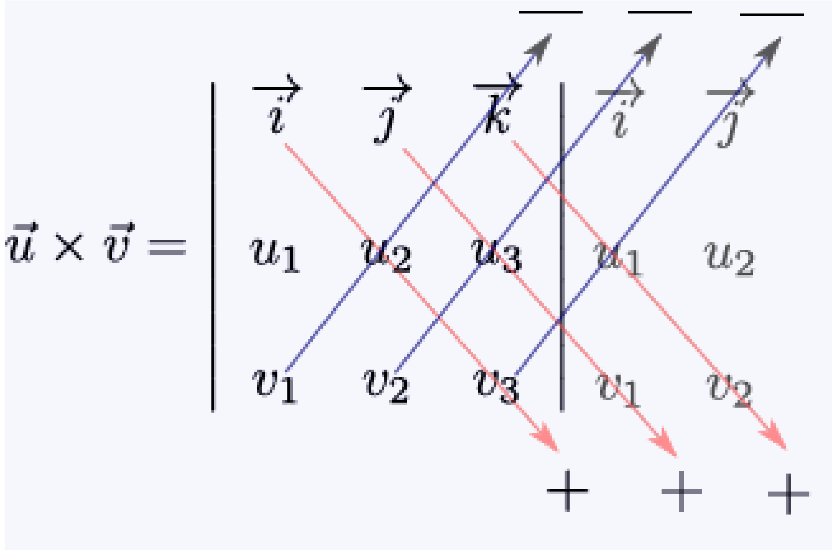
Producto cruz o vectorial

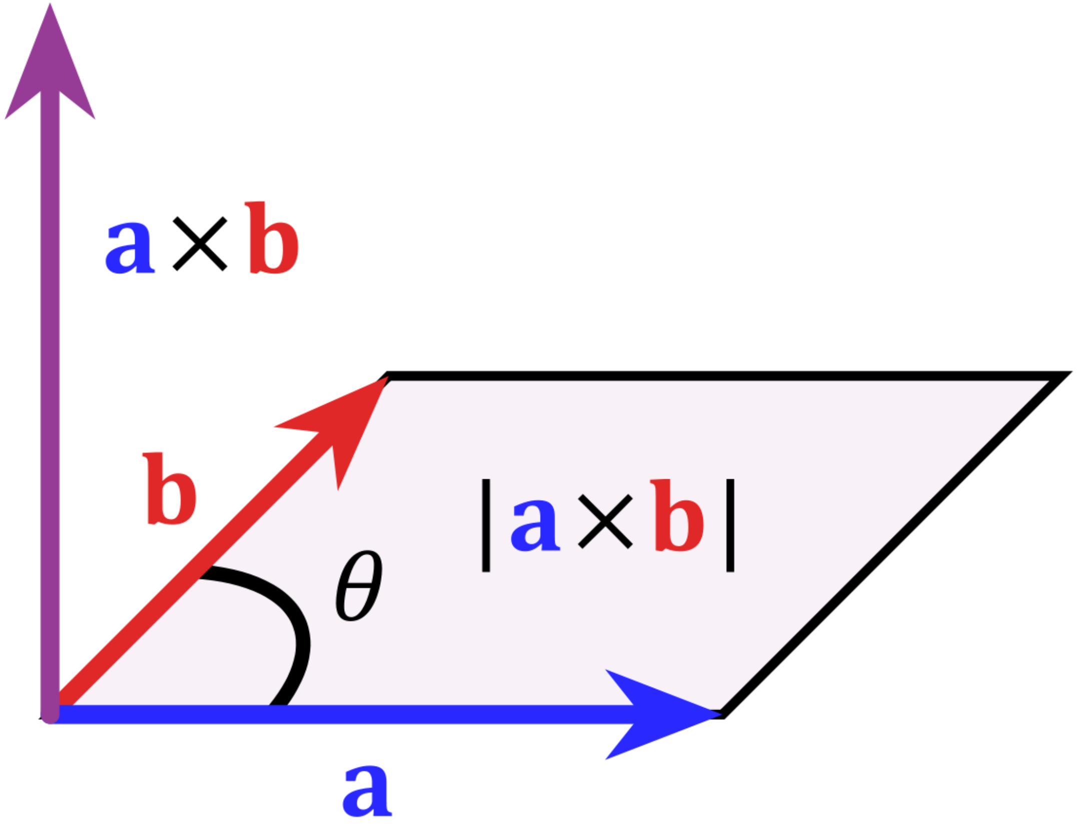
Consideremos los vectores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. El producto cruz $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ se define de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\hat{\imath} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\hat{\jmath} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\hat{k} \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\hat{\imath} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\hat{\jmath} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\hat{k}
\end{aligned}$$



Producto cruz o vectorial





Producto cruz o vectorial

Consideremos los vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

1.) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = 0$

2.) $\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = 0$

3.) $||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 ||\overrightarrow{v}||^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2$ (igualdad d Lagrange)

4.) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$

5.) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$

6.) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$

7.) $\alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = (\alpha \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\alpha \overrightarrow{v})$

8.) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

9.) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = 0$