Matrices

MATEMÁTICA PARA CIENCIA DE DATOS

PROF. ESTEBAN BALLESTERO

Matriz

Arreglo rectangular de $m \times n$ números distribuidos en un orden de m ***filas*** y $\boldsymbol{n}$ ***columnas***. Se denota con letras mayúsculas

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \dots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a_{mn}})$$

Además, asumiremos siempre para efectos de este curso que los elementos de las matrices son números reales, a menos que se indique lo contrario

Elemento de una matriz (entrada)

es el valor de una posición específica en una matriz. Se denota como a_{mn} (elemento de la eme-ésima fila y la ene-ésima columna).

Considere la siguiente matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & -92 \\ 0 & 3 & 25 \end{pmatrix}$$

Note que es una matriz de tamaño: 2 x 3 (Dos filas, 3 columnas).

La entrada $a_{12} = \frac{2}{3}$ (Entrada en la posición fila 1 y columna 2)

La entrada $a_{23} = 25$ (Entrada en la posición fila 2 y columna 3)

Matriz cuadrada

Matrices cuadradas	Matrices rectangulares
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 11 & -16 \\ -23 & 31 \end{pmatrix}$
$\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices iguales

Dos matrices $A = (a_{mn})$ y $B = b_{mn}$ son iguales si:

1. Tienen el mismo tamaño $m \times n$.
2. Sus componentes correspondientes son iguales, es decir

$$\boldsymbol{a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j, i = 1, 2 \ldots, m y j = 1, 2, \ldots, n}$$

Cumplen igualdad de tamaño y entradas

Matriz nula

Es aquella matriz de tamaño $m \times n$ donde cada uno de sus elementos a_{mn} vale cero.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} = (\mathbf{0}_{mn})$$

Diagonal principal

Está compuesta por todos los a_{ij}, tales que $i = j$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1m}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mm}} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a_{mm}})$$

Matriz diagonal

Es una matriz cuadrada tal que $\forall i \neq j, a_{ij} = 0$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a_{mm}} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a_{mm}})$$

Nota: la matriz diagonal debe cumplir el requisito de que todas sus entradas que NO estén en la diagonal principal donde i=j, tenga como valor cero, pero NO dice nada sobre la diagonal, por lo que esta puede admitir el valor cero o cualquier otro número real. Por ejemplo, la matriz nula también es diagonal

Matriz identidad de orden n

Es una matriz diagonal tal que $\forall i = j, a_{ij} = 1$, es decir, cada entrada de la diagonal tiene el valor de 1, cualquier otra entrada tiene valor de 0.

$$\boldsymbol{I_n} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{a_{ij}}\right)$$ **($\boldsymbol{n}$ = TAMAÑO)**

Matriz triangular

Superior	Inferior
es aquella matriz cuadrada en donde todos los elementos que se encuentran **BAJO** la diagonal principal, **SON NULOS.** $(a_{ij} = 0, \forall i > j)$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} = (a_{mm})$	es aquella matriz cuadrada en donde todos los elementos que se encuentran **SOBRE** la diagonal principal, **SON NULOS.** $(a_{ij} = 0, \forall i < j)$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} = (a_{mm})$

Matriz fila y columna

Fila: Es aquella matriz $\boldsymbol{A}$ que tiene **una fila y $\boldsymbol{n}$ columnas**, es decir su tamaño es $1 \times n$.

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{11}} \quad \boldsymbol{a_{12}} \quad \boldsymbol{a_{13}} \quad \boldsymbol{a_{14}} \quad \ldots \quad \boldsymbol{a_{1n}}]$$

Columna: Es aquella matriz $\boldsymbol{A}$ que tiene m **filas y una columna**, es decir su tamaño es $m \times 1$.

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \\ \boldsymbol{a_{31}} \\ \ldots \\ \boldsymbol{a_{m1}} \end{bmatrix}$$

Matriz transpuesta

Sea A una matriz $m \times n$. Se llama matriz transpuesta de A y se denota por A^t
$A^t = (a_{ji})$ (intercambio de filas por columnas)

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 2 & 100 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{FILA 1} \\ \text{FILA 2} \\ \text{FILA 2} \end{array} \end{array}$$

$$Si\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = (a_{nm})$$

$$A^T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & 100 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \text{COL 1} & \text{COL 2} & \text{COL 3} \end{array} \end{array}$$

Matriz simétrica

Una matriz A de tamaño $n \times n$ es simétrica si la matriz y su transpuesta son iguales, es decir $A = A^t$ ($\forall i, j, i = 1,2,\ldots,m y j = 1,2,\ldots,n, a_{ij} = a_{ji}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Como se puede ver en el ejemplo, en las matrices simétricas si consideramos los datos de la matriz original A que está sobre la diagonal principal, veremos que son idénticos a los que están por debajo de esta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz antisimétrica

Una matriz A de tamaño $n \times n$ es antisimétrica si la matriz es igual a su transpuesta negativa, es decir $A = -A^t$. $\left(\forall i, j \in Z, a_{ij} = -a_{ij}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad -A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A = -A^t$$

En el caso de la matriz antisimétrica, se puede observar que las entradas en la parte superior de la diagonal principal son opuestas a las entradas en la parte inferior de esta

Matriz idempotente, nilpotente e involutiva

- **Matriz Idempotente:** Una matriz A de tamaño $n \times n$ es idempotente si se cumple que: $A^2 = A$.

- **Matriz Nilpotente:** Una matriz A de tamaño $n \times n$ es Nilpotente de orden p si se cumple que: $A^p = 0$.

- **Matriz Involutiva:** Una matriz A de tamaño $n \times n$ es involutiva si se cumple que: $A^2 = I$.

Matriz de probabilidades

Es aquella matriz cuadrada que tiene:

- **TODOS Y CADA UNO** de sus componentes **POSITIVOS**
- **LA SUMA** de los elementos de cada fila **es 1**

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operaciones: suma y resta

Para sumar o restar dos matrices, el único requisito es que estas tengan el mismo tamaño; el proceso se lleva a cabo realizando la operación (suma o resta) entre cada una de las entradas, de las matrices correspondientes.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} (a_{11} \pm b_{11}) & \cdots & (a_{1n} \pm b_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} \pm b_{m1}) & \dots & (a_{mn} \pm b_{mn}) \end{bmatrix}$$

Operaciones: multiplicación escalar

Sea Auna matriz $m \times n$ y $\lambda \in R$, el producto λA se obtiene como:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mm} \end{bmatrix}$$

Operaciones: multiplicación

Para realizar un producto de matrices es indispensable que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz. Sea A, Bmatrices de tamaño respectivamente $m \times n\ \ y\ \ n \times p$. Además:

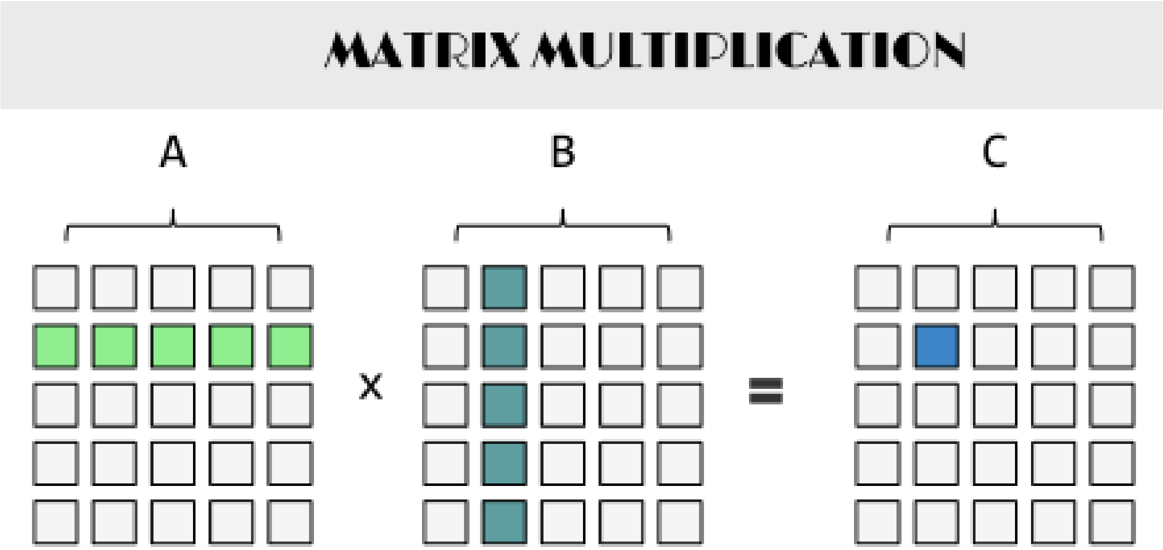
$$\boldsymbol{A = (a_{ij}), con \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}} \text{ y } \boldsymbol{B = (b_{jk}), con \begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, p \end{matrix}}$$

entonces $\boldsymbol{AB = C = (c_{ik})}$, donde $\boldsymbol{c_{ik} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk}) = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) & \cdots & (a_{11}b_{1q} + a_{12}b_{2q} + \cdots + a_{1n}b_{nk}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1}) & \cdots & (a_{m1}b_{1q} + a_{m2}b_{2q} + \cdots + a_{mn}b_{nk}) \end{bmatrix}$$

Operaciones: multiplicación



Ejemplo: Sean A y B las matrices:$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y B $= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ Encuentre AB yBA

Solución: Como $A = (a_{22})$ y $B = \left(b_{2,1}\right)$ entonces AB es una matriz de tamaño 2×1, mientras queBA no es posible realizarlo.$AB = \begin{bmatrix} 1 * 4 + 0 * 5 \\ -1 * 4 + 1 * 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Propiedades de las matrices

Sean A, B, C matrices de tamaño $m \times n$, y λ un escalar. Entonces:

1.	$A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$	Cerrada
2.	$(A + B) + C = A + (B + C)$	Asociatividad.
3.	$A + 0 = 0 + A = A$	Neutro aditivo.
4.	$A + (-A) = -A + A = 0$	Inverso aditivo.
5.	$A + B = B + A$	Conmutatividad.
6.	$0A = 0$	El cero de la izquierda es escalar.
7.	$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$	Distributividad.

8.	$(\lambda + \delta) A = \lambda A + \delta A$	Distributividad
9.	$(\lambda \delta) A = \lambda (\delta A)$	Asociatividad de mult. de escalares.
10.	$I_n A = A I_n = A$	Identidad o neutro multiplicativo.
11.	$A B \neq B A$	No conmutativo.
12.	$(A B) C = A (B C)$	Asociatividad.
13.	$A (B + C) = AB + AC$ $(A + B) C = AC + BC$	Distributividad respecto a la suma.

Resultados importantes

1.	$(A^t)^t = A$	
2.	$(A\,B)^t = B^t A^t$	
3.	$(A + B)^t = A^t + B^t$	A y B de orden m x n.
4.	$(A^{-1})^{-1} = A$	A invertible.
5.	$(A\,B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	A y B invertibles.

Matrices inversas

Sea$A$ una matriz cuadrada de orden n. Se dice que A es invertible o "no singular " si existe una matriz denotada por A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Matriz invertible:

- Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.
- Si A y B son matrices invertibles, entonces AB es invertible y :

$$\boldsymbol{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Matriz ortogonal

Una matriz A es ortogonal sí y solo sí su inversa es igual a su transpuesta, es decir: $A_{ort} \Leftrightarrow A^{-1} = A^{t}$

Determinante de una matriz

Número real que permite conocer en primera instancia si la matriz de orden n es o no invertible. Se denota por $det\,A$.

Si la matriz es de 2 x 2, entonces:

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Resultado: Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces:

1. A es invertible o “no singular” si $|A| \neq 0$
2. A es singular si $|A| = 0$

Sistemas de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas

Matriz asociada al sistema: Es aquella matriz cuyos elementos son los coeficientes de un sistema de ecuaciones.

Si se tiene un sistema de ecuaciones como:

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = d_1$

$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots + b_nx_n = d_2$

$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n = d_3$

: : : : : :

$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \ldots + w_nx_n = d_n$

La matriz asociada al sistema es:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \cdots & \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} & \cdots & \boldsymbol{b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boldsymbol{w_1} & \boldsymbol{w_2} & \boldsymbol{w_3} & \cdots & \boldsymbol{w_n} \end{bmatrix}$$

Sistemas de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas

Matriz Aumentada del Sistema: Es aquella matriz aumentada con los resultados del sistema de ecuaciones:

$$(A|D) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \boldsymbol{d_1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & \boldsymbol{d_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n & \boldsymbol{d_n} \end{bmatrix}$$