CIENCIA DE DATOS

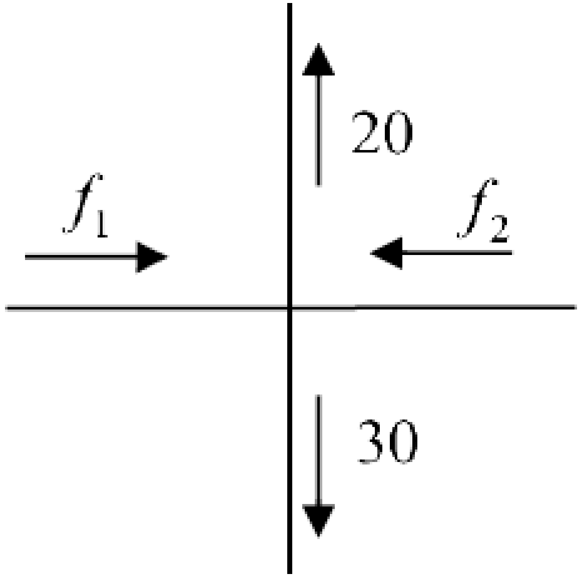
Vectores: Parte 2

MATEMÁTICA PARA CIENCIA DE DATOS

PROF. ESTEBAN BALLESTERO

Sistemas de ecuaciones

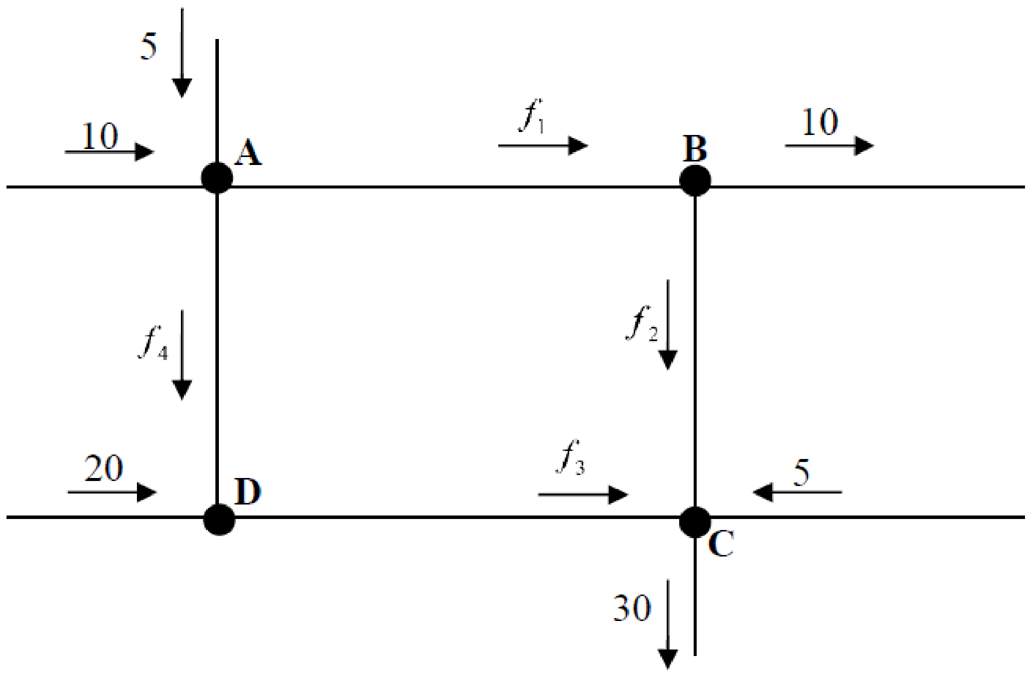
La adjunta, muestra una parte de una red, con dos ramas que entran a un nodo y dos que salen de él. La regla de conservación del flujo implica que el flujo total de entrada, $f1+f2$ unidades, debe coincidir con el flujo total de salida 20+30 unidades. De este modo tenemos la ecuación lineal $f1+f2=50$ correspondiente a este nodo.



Sistemas de ecuaciones

Podemos analizar el flujo a través de toda una red construyendo ecuaciones de este tipo y resolviendo el sistema resultante de ecuaciones lineales.

Describa los flujos posibles a través de la red de tuberías de agua que se muestra en la figura, donde el flujo se mide en litros por minuto.

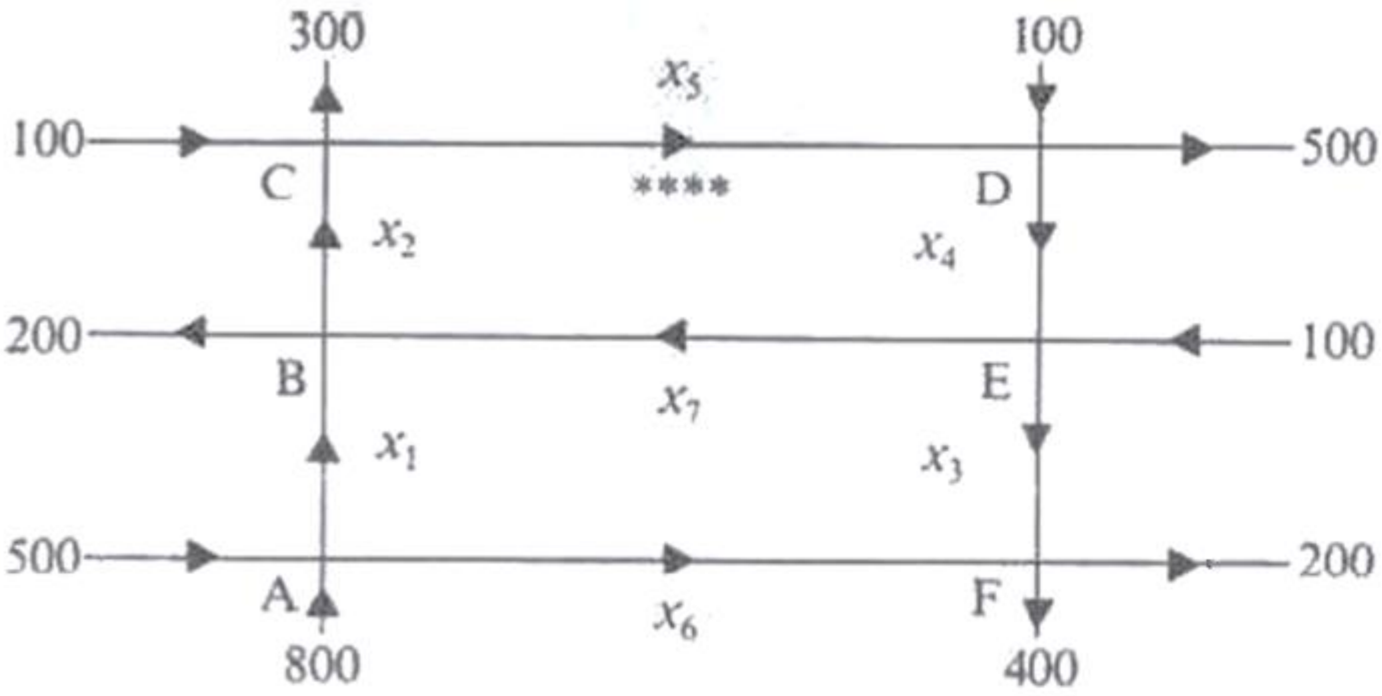


Sistemas de ecuaciones

Imagine que en un sector determinado de la capital (San José), se hizo un estudio sobre el fluido de tránsito de las calles y las avenidas. Supongamos que en un sector de estas vías se pretende realizar una manifestación por razones particulares de parte de algunos manifestantes.

En la figura siguiente se muestra el comportamiento de estas vías en las horas pico. Suponiendo que la manifestación se realizará en la calle x_5, entonces los oficiales de tránsito pueden hasta cierto punto, controlar el flujo de vehículos reajustando los semáforos, colocando policías en los cruces claves o cerrando la calle crítica al tránsito de vehículos. Note que si se disminuye el tránsito en x_5 , aumentará instantáneamente el flujo de tránsito en las otras calles aledañas. Dadas las circunstancias, minimice el tránsito en x_5 de manera que no ocasione congestionamientos en las otras calles

Sistemas de ecuaciones



Combinaciones lineales

En el curso hemos venido estudiando los vectores, a partir de la siguiente notación: sea $v = (a.b.c)\ en\ \Re^3$se puede escribir de la siguiente forma:

$$v = ai + bj + ck$$

En este caso dice que v es una combinación lineal de los tres vectores *i*, *j*, *k*. De manera general, se tiene la siguiente definición.

Combinaciones lineales

Sea $v_1, \ldots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 +, \ldots, + a_n v_n$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son escalares. Se llama combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$

Vectores linealmente independientes

Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son linealmente dependientes si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos ceros tales que:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 +, \ldots, + c_n v_n = 0$$

Si los vectores no son linealmente dependientes se dice que son linealmente independientes (li).

Vectores linealmente independientes

En general $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son li si la ecuación

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 +, \ldots, + c_n v_n = 0$$

se cumple solo para $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Son ld si el vector cero de v se puede expresar con combinación lineal con coeficientes no todos ceros.

Nota1: Recordemos que en un sistema de ecuaciones homogénea de n ecuaciones con m incógnitas posee infinitas soluciones si $n > m$.

Nota2: Sea A una matriz $n \times n$. Entonces $|A| \neq 0$ sii las columnas de A son li

Rango de una matriz

Si se analiza por columnas, corresponde a la cantidad de columnas que sean li. Análogamente se calcularía por filas.

Valores y vectores propios

- También son conocidos como valores y vectores característicos, autovalores y autovectores, eigen-valores y eigen-vectores

Ejemplo:

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, calcule:

1. $Av_1 = \lambda_1 v_1$
2. $Av_2 = \lambda_2 v_2$

¿Qué se puede concluir?

Valores y vectores propios

Si A es una matriz de orden $n$con entradas reales o complejas, el número λ (real o complejo) se denomina valor característico de A si existe un vector no nulo en los complejos, llamado vector característico tal que:

$$Av = \lambda v$$