Problème du cercle minimum : Naïf vs Welzl

Écrit par:

BENAISSA Meriem 21418006

Encadrant :

Bùi Xuân Bình Minh

Promotion 2024 - 2025

Calcul du cercle minimum d'un ensemble de points

Résumé : Ce travail porte sur la recherche du plus petit cercle englobant un ensemble de points dans un plan 2D. Nous comparons la performance d'un algorithme naïf de complexité en ordre de $\mathcal{O}(n^4)$ à celles de l'algorithme de Welzl, qui détermine ce cercle de façon récursive en temps attendu linéaire. L'étude met en évidence les avantages en termes d'efficacité et de temps de l'approche de Welzl face à la méthode naïf.

Mots-clés : plus petit cercle englobant, algorithme de Welzl, complexité algorithmique.

Contents

1 Introduction

Le problème du cercle minimum consiste à trouver le plus petit cercle englobant un ensemble de points 2D. Classique en géométrie computationnelle, il est crucial pour la robotique, la vision par ordinateur et l'analyse de données. Des approches comme l'algorithme naïf, ($\mathcal{O}(n^4)$), offrent précision mais inefficacité. L'algorithme de Welzl, ($\mathcal{O}(n)$), plus efficace, construit le cercle de manière incrémentale. Ce projet implémente et compare ces méthodes sur de grands ensembles de données, analysant précision et performances via des représentations graphiques.

2 Définition du problème et structures de données

2.1 Définition du problème

Le **problème du cercle minimum** consiste à déterminer, à partir d'un ensemble fini de points dans le plan euclidien, le plus petit cercle (en termes de rayon) qui englobe tous ces points. Ce cercle est appelé **cercle de couverture minimal** (ou *Smallest Enclosing Circle* en anglais).

Formellement, étant donné un ensemble de points $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$, il s'agit de trouver un cercle C de centre $O \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r \geq 0$ tel que :

- **Inclusion :** Chaque point de l'ensemble P est contenu dans ou sur le cercle :

$$\forall p_i \in P,\ d(O, p_i) \leq r$$

  où $d(O, p_i)$ représente la distance euclidienne entre le centre O et le point p_i.

- **Minimalité :** Le rayon r du cercle est le plus petit possible.

Ce problème a diverses **applications pratiques**, notamment :

- La localisation optimale de ressources ou de services (ex : couverture de réseau).
- La reconnaissance de formes en informatique graphique.
- La minimisation des contraintes géométriques en robotique.

2.2 Structures de données utilisées

Pour résoudre ce problème et implémenter les algorithmes (naïf et de Welzl), les principales structures de données utilisées sont :

1. **Représentation d'un point :** Chaque point du plan est représenté par un objet de la classe `Point` de la bibliothèque `java.awt`. Il est défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y) :

   `import java.awt.Point;`

2. **Représentation d'un cercle :** Un cercle est défini par :

   - Un **centre** : un objet `Point`
   - Un **rayon** : un entier représentant la distance entre le centre et la frontière du cercle

   Dans le code, le cercle est représenté par la classe `Circle` fournie :

   `import supportGUI.Circle;`

3. **Représentation d'une ligne :** Pour calculer le diamètre, une paire de points est représentée par un objet de la classe `Line` :

   `import supportGUI.Line;`

4. **Ensemble de points :** L'ensemble des points est manipulé sous forme de `ArrayList`:

   `import java.util.ArrayList;`

5. **Calcul de la distance euclidienne :** La méthode `distance` calcule la distance au carré entre deux points pour optimiser les calculs :

```
1 public static double distance(Point a, Point b) {
2     double dx = a.getX() - b.getX();
3     double dy = a.getY() - b.getY();
4     return dx * dx + dy * dy;
5 }
```

6. **Gestion des aléas (pour l'algorithme de Welzl) :** L'algorithme de Welzl utilise une approche récursive randomisée. La classe `Random` est utilisée pour sélectionner un point de manière aléatoire :

   ```
   import java.util.Random;
   ```

En résumé, ces structures de données permettent une gestion efficace des points, des cercles et des lignes, facilitant ainsi l'implémentation des deux algorithmes étudiés (naïf et Welzl).

3 Analyse Thèorique des Algorithmes

3.1 Algorithme Naïf

3.1.1 Principe

L'algorithme naïf détermine le cercle minimum couvrant un ensemble de points en évaluant tous les cercles possibles définis par deux ou trois points. L'approche repose sur la propriété géométrique qu'un cercle minimal doit passer par au moins deux points du contour, et au maximum trois points si aucun deux points ne suffisent à le définir.

3.1.2 Fonctionnement

1. Pour chaque paire de points :
   - Calculer le cercle dont le segment est le diamètre.
2. Pour chaque triplet de points :
   - Calculer le cercle circonscrit.
3. Vérifier si tous les points sont contenus dans le cercle.
4. Retourner le plus petit cercle valide.

3.1.3 Complexité temporelle

L'algorithme naïf utilise deux boucles imbriquées pour les paires $\mathcal{O}(n^2)$ et trois boucles imbriquées pour les triplets $\mathcal{O}(n^3)$. Ainsi, sa complexité temporelle est :

- Pour les paires : $\mathcal{O}(n^2)$
- Pour les triplets : $\mathcal{O}(n^3)$
- Pour chaque paire/ triplets, il faut vérifier si tous les autres points sont inclus dans le cercle : $\mathcal{O}(n)$ vérifications.

Donc, la complexité globale de l'algorithme naïf est $\mathcal{O}(n^4)$.

3.1.4 Limites

- Inefficace pour des ensembles de grande taille en raison de sa complexité.
- Sensible aux erreurs d'arrondi lors du calcul du centre du cercle circonscrit.

3.1.5 Avantages

- Implémentation directe et intuitive.
- Facile à déboguer et à valider.

3.2 Algorithme de Welzl

3.2.1 Principe

L'algorithme de Welzl est une approche incrémentale et randomisée pour trouver le cercle minimum en $\mathcal{O}(n)$ en moyenne. L'idée principale est de construire le cercle minimal en ajoutant les points un par un et en ajustant le cercle uniquement lorsque le point ajouté est en dehors du cercle courant.

3.2.2 Fonctionnement

1. Si l'ensemble de points est vide ou si trois points définissent déjà un cercle, retourner le cercle minimal trivial.

2. Choisir un point au hasard.
3. Calculer récursivement le cercle minimal des points restants.
4. Si le point choisi est à l'intérieur du cercle calculé, retourner ce cercle.
5. Sinon, recalculer le cercle en incluant le point sur sa frontière.

3.2.3 Complexité temporelle

La complexité moyenne de l'algorithme est $\mathcal{O}(n)$ grâce à l'approche randomisée et à l'optimisation par le principe de l'inclusion sur la frontière. Dans le pire des cas, la complexité peut atteindre $\mathcal{O}(n^2)$ si l'ordre des points est défavorable.

3.2.4 Limites

- Sensible à l'ordre des points : une mauvaise randomisation peut ralentir l'algorithme.
- Plus complexe à implémenter et déboguer que l'algorithme naïf.

3.2.5 Avantages

- Bien plus efficace que l'algorithme naïf sur de grands ensembles.
- Complexité optimale en moyenne $\mathcal{O}(n)$.

3.3 Comparaison des algorithmes

Critère	**Algorithme Naïf**	**Algorithme de Welzl**
Principe	Exhaustif (paires et triplets)	Randomisé et incrémental
Complexité	$\mathcal{O}(n^4)$	$\mathcal{O}(n)$ en moyenne, $\mathcal{O}(n^2)$ pire
Simplicité	Plus simple à implémenter	Plus complexe à coder
Efficacité	Inefficace pour grands jeux	Adapté aux grands jeux
Robustesse	Précis mais lent	Rapide mais sensible à l'ordre
Applications	Pédagogique, petite taille	Grands ensembles, applications réelles

Table 1: Comparaison des algorithmes

4 Implémentation

4.1 Algorithme naïf

voilà un psaudo-code pour l'algorithme naïf qui correspond à notre implémentation (la fonction *calculCercleMinAlgoNaif* dans le code source) :

Algorithm 1: Algorithme naïf du cercle minimum

Input: Une liste de points P
Output: Un cercle minimum C englobant tous les points
if $|P| = 1$ **then**
  return null;
for *chaque paire* $(p, q) \in P \times P$ **do**
  $C \leftarrow$ cercle de centre $\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et rayon $\frac{d(p,q)}{2}$;
  if C *couvre tous les points de* P **then**
    return C;
for *chaque triplet* $(p, q, r) \in P \times P \times P$ **do**
  if p, q, r *non alignés* **then**
    $C \leftarrow$ cercle circonscrit du triangle (p, q, r);
    if C *couvre tous les points de* P **then**
      return C;

Optimisation : Pour éviter les calculs redondants, nous utilisons des calculs optimisés pour la distance et la vérification d'inclusion des points dans un cercle.

4.2 Algorithme de Welzl

voilà un psaudo-code pour l'algorithme de Welzl qui correspond à notre implémentation (la fonction *CalculCercleMinAlgoWelzl* dans le code source) :

Algorithm 2: Algorithme de Welzl (MINIDISK)

Input: Une liste de points P
Output: Un cercle minimum C englobant tous les points
Procédure principale : ;
return `B_Minidisk(`P, $\emptyset$`);`

Sous-procédure : `B_Minidisk(`P, R`);`
if $P = \emptyset$ *ou* $|R| = 3$ **then**
  return b_md(R**);**
Choisir un point $p \in P$ de manière aléatoire;
$C \leftarrow$ `B_Minidisk(`$P \setminus \{p\}$, R`);`
if $p \notin C$ **then**
  $R \leftarrow R \cup \{p\}$;
  $C \leftarrow$ `B_Minidisk(`$P \setminus \{p\}$, R`);`
  $R \leftarrow R \setminus \{p\}$
return C;

4.2.1 Sous-algorithme : Calcul du cercle avec b_md

La méthode `b_md` construit un cercle minimal couvrant un ensemble de points à partir des points de support (jusqu'à 3 points définissant le cercle unique). Voici les différents cas gérés :

Algorithm 3: b_md : Cercle minimal pour les points de support

Input: Une liste de points R (maximum 3 points)
Output: Le plus petit cercle passant par les points de R
if $|R| = 0$ **then**
  return Cercle centré sur $(0, 0)$ avec rayon 0;
else if $|R| = 1$ **then**
  return Cercle centré sur $R[0]$ avec rayon 0;
else if $|R| = 2$ **then**
  return Cercle de centre $\frac{R[0]+R[1]}{2}$ et rayon $\frac{(R[0],R[1]}{2}$;
else if $|R| = 3$ **then**
  return Cercle circonscrit au triangle formé par $R[0], R[1], R[2]$;

Détails d'implémentation :

- Si R est vide, on retourne un cercle de rayon nul.
- Si R contient un ou deux points, on calcule le cercle directement.
- Si R contient trois points, on calcule le cercle circonscrit en utilisant des formules géométriques classiques.

4.2.2 Calcul du cercle circonscrit d'un triangle

Algorithm 4: Cercle circonscrit d'un triangle

Input: Trois points p, q, s
Output: Le cercle circonscrit
if p, q, s *sont alignés* **then**
    return null (pas de cercle valide);
Calcul des coordonnées du centre (c_x, c_y) à l'aide de la géométrie du triangle;
Calcul du rayon r comme la distance entre (c_x, c_y) et l'un des points;
return Cercle(c_x, c_y, r);

5 Méthodologie des tests

5.1 Objectif des expérimentations

L'objectif principal des expérimentations est d'évaluer et de comparer les performances de l'algorithme de Welzl et de l'algorithme naïf pour le calcul du cercle minimum couvrant un ensemble de points. Ces tests permettent de mesurer la correction et l'efficacité temporelle des deux approches sur des ensembles de points de différentes tailles et origines.

5.2 Environnements de test

Les expérimentations ont été réalisées sur deux ensembles de données distincts :

- **Jeu de données VAROUMAS :** Un ensemble de 1664 fichiers, chacun contenant au moins 256 points. Ces fichiers ont été récupérés à partir de l'URL fournie dans l'énoncé du projet.

- **Jeu de données personnalisé :** Créé à partir du fichier `input.point` fourni lors du premier travail machine (TME1). Ce fichier contient 10 000 points et a été divisé en sous-ensembles de tailles variées ($100, 200, \ldots, 2500$ points) afin d'analyser l'impact de la taille des données sur la performance des algorithmes.

5.3 Processus d'expérimentation

Pour chaque fichier de points, les étapes suivantes ont été réalisées :

1. Lecture et extraction des points à partir des fichiers `.points`.
2. Exécution de l'algorithme naïf (`DefaultTeam.calculCercleMinAlgoNaif`).
3. Mesure du temps d'exécution en microsecondes à l'aide de la méthode `System.nanoTime()`.
4. Exécution de l'algorithme de Welzl (`DefaultTeam.calculCercleMinAlgoWelzl`).
5. Comparaison des résultats des deux algorithmes et stockage des mesures dans un fichier CSV.

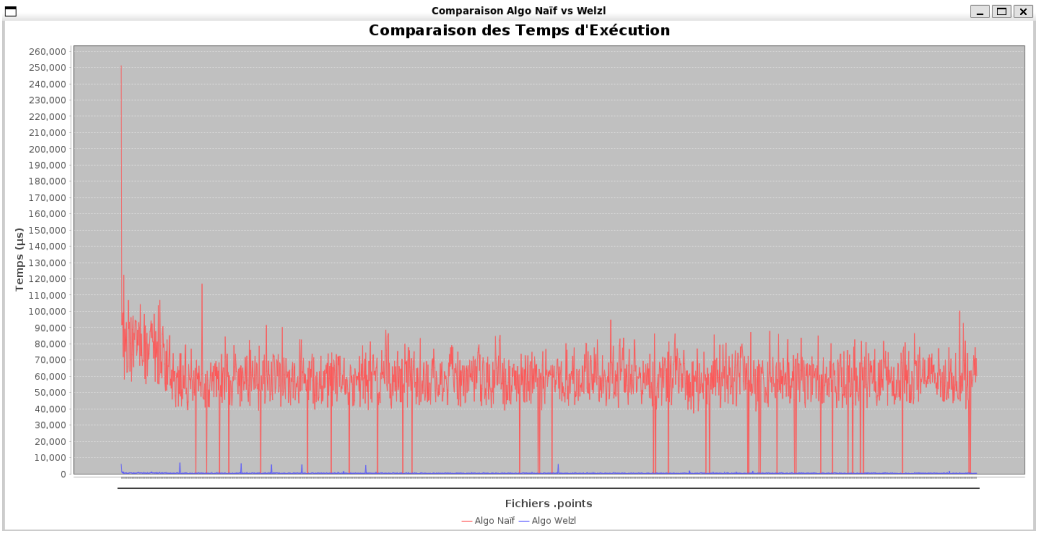
La classe `Experimentation` automatise ces étapes. Chaque exécution enregistre les résultats sous la forme suivante :

```
Fichier, Temps Naif (µs), Temps Welzl (µs)
```

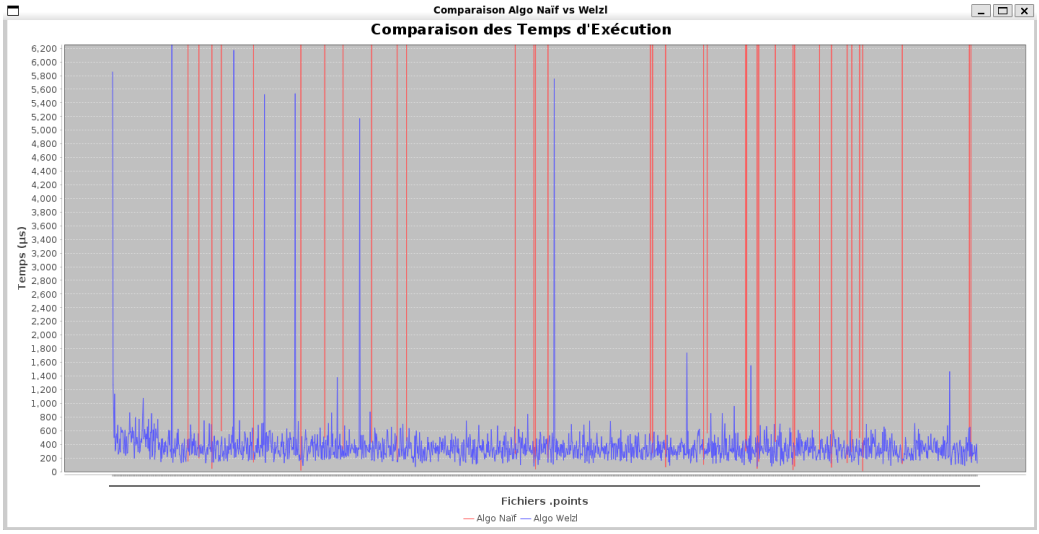
6 Résultats expérimentaux

6.1 Comparaison sur la base VAROUMAS

La figure Figure 1 illustre les performances des deux algorithmes sur la base VAROUMAS. On observe clairement que l'algorithme de Welzl est nettement plus rapide que l'approche naïve. En raison de la différence significative de temps d'exécution, nous avons également réalisé un zoom spécifique sur l'algorithme de Welzl pour mieux apprécier ses variations.



(a) Temps d'exécution sur la base VAROUMAS (algorithme naïf vs Welzl).

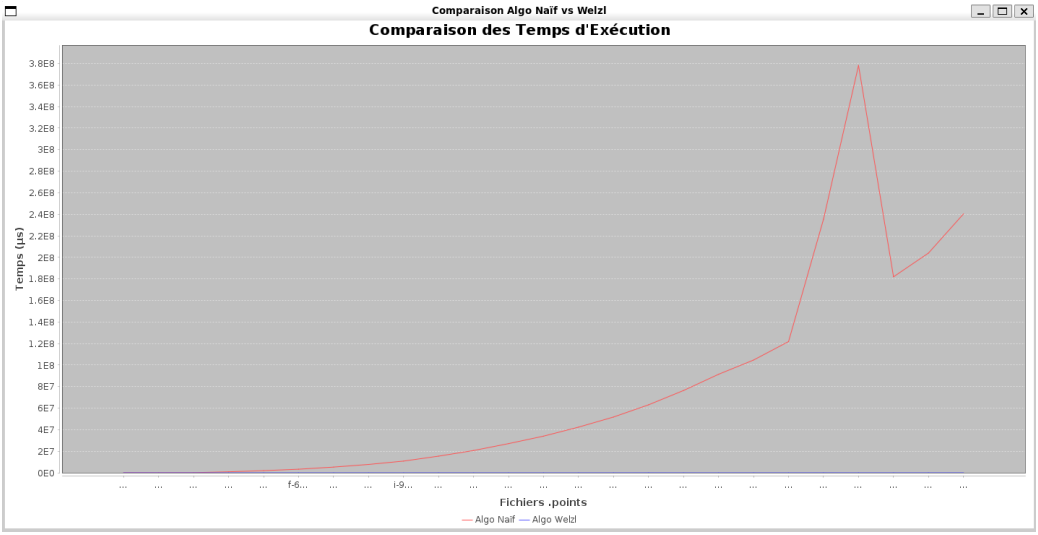


(b) Zoom sur l'algorithme de Welzl pour la base VAROUMAS.

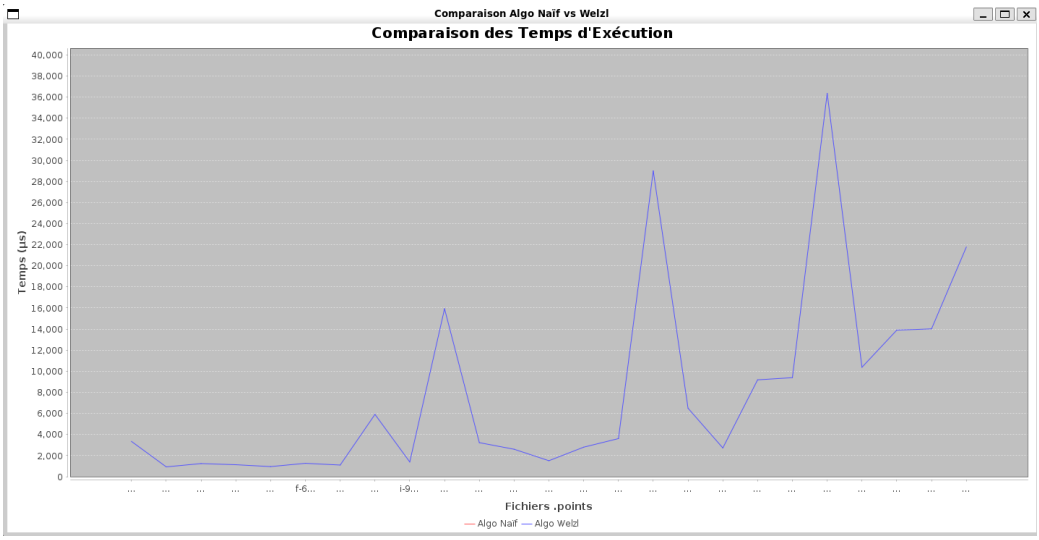
Figure 1: Analyse des performances sur la base VAROUMAS.

6.2 Comparaison sur les données personnalisées

Nous avons également testé les deux algorithmes sur des instances personnalisées pour diversifier l'évaluation. Les résultats, présentés dans la figure 2, confirment la supériorité de l'algorithme de Welzl. Comme précédemment, un zoom est effectué pour analyser plus finement les performances de Welzl.



(a) Temps d'exécution sur les données personnalisées (algorithme naïf vs Welzl).

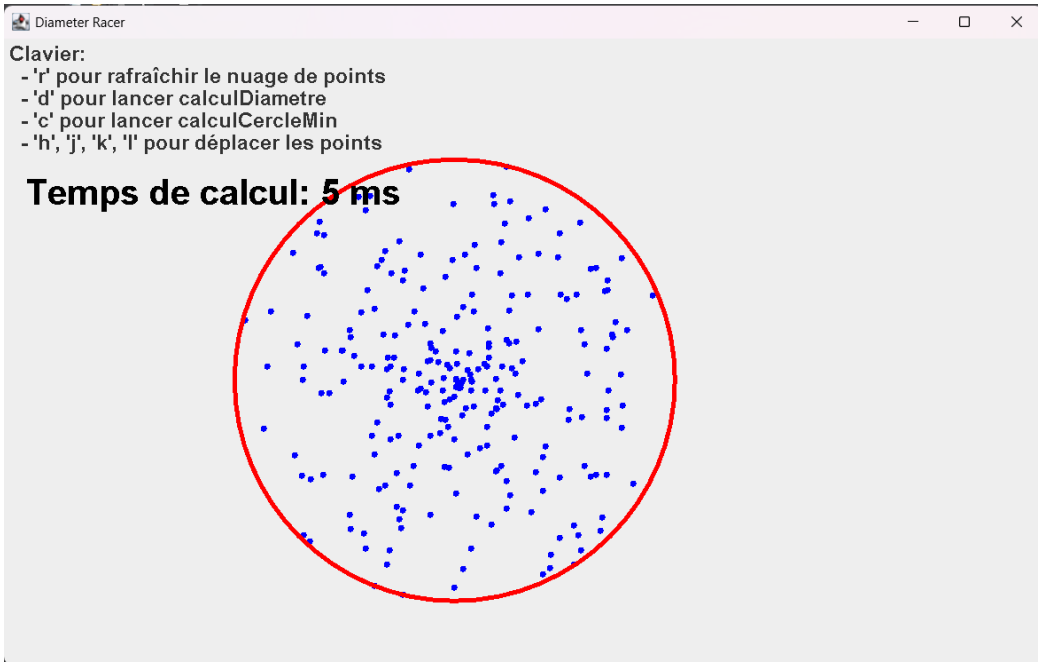


(b) Zoom sur l'algorithme de Welzl pour les données personnalisées.

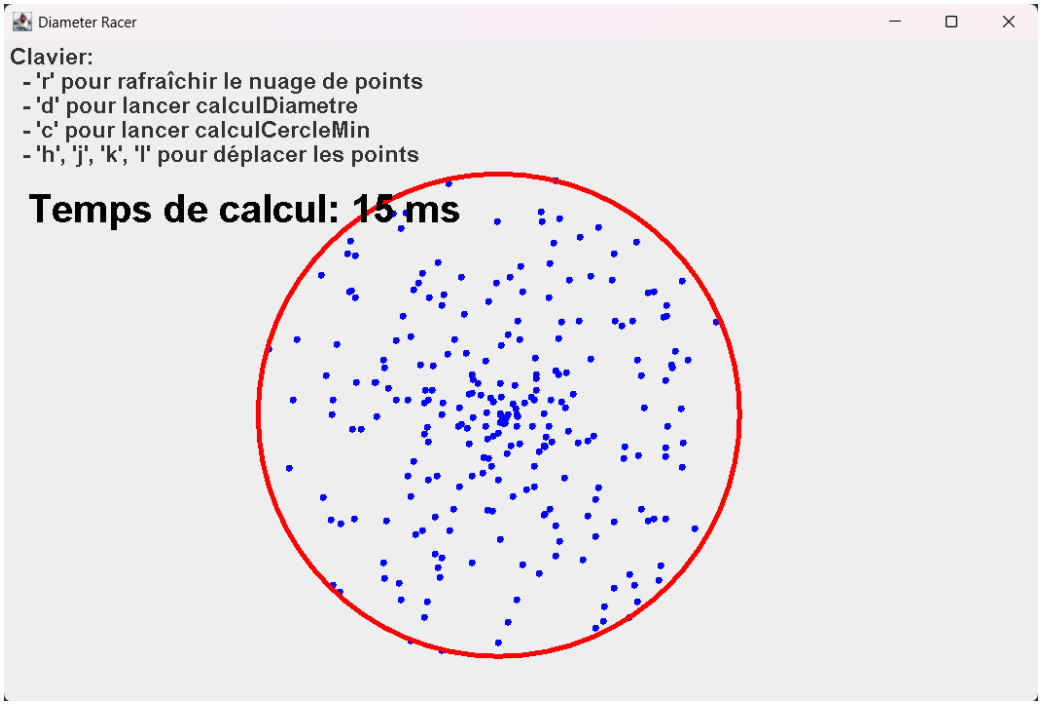
Figure 2: Analyse des performances sur les données personnalisées.

6.3 Analyse complémentaire des performances

Pour compléter l'analyse, nous avons inclus deux figures supplémentaires montrant le temps d'exécution précis de chaque algorithme et le cercle formée par les deux algorithmes:



(a) Détails des temps d'exécution sur un fichier de 256 points avec Welzl.



(b) Détails des temps d'exécution sur un fichier de 256 points avec l'algorithme naïf.

Figure 3: Résultat des deux algorithme avec le ant.

6.4 Interprétation des résultats

Les résultats confirment les propriétés attendues :

- L'algorithme naïf, de complexité $\mathcal{O}(n^4)$, devient rapidement impraticable pour de grandes instances.
- L'algorithme de Welzl, avec une complexité moyenne en $\mathcal{O}(n)$, offre un gain considérable en temps d'exécution.
- Le zoom est nécessaire pour évaluer Welzl en détail car le temps du programme naïf est trop élevé.

7 Discussion

Les résultats expérimentaux permettent de comparer les performances de l'algorithme naïf et de l'algorithme de Welzl pour le calcul du plus petit cercle englobant un ensemble de points (voir Figure 1a et Figure 1b).

7.1 Analyse des performances

Les diagrammes (Figure 1a et Figure 1b) révèlent des différences notables entre les deux approches. Dans la Figure 1a, on observe que l'algorithme naïf présente des temps d'exécution nettement plus élevés,

La Figure 1b confirme cette tendance : la croissance du temps d'exécution de l'algorithme naïf suit une courbe exponentielle, tandis que l'algorithme de Welzl affiche une progression linéaire plus efficace. Ces résultats sont cohérents avec la complexité théorique de chaque approche : Algorithme naïf : $\mathcal{O}(n^4)$, Algorithme de Welzl : $\mathcal{O}(n)$ en moyenne.

7.2 Interprétation des résultats

L'écart de performance devient significatif pour des ensembles de points de taille importante. Cela s'explique par la nature combinatoire de l'algorithme naïf, qui explore toutes les combinaisons possibles pour déterminer le plus petit cercle englobant.

En revanche, l'algorithme de Welzl utilise une approche récursive et aléatoire plus efficace, réduisant ainsi considérablement le nombre de calculs nécessaires.

Ces observations soulignent l'efficacité de l'algorithme de Welzl pour des applications pratiques où le traitement rapide de grands ensembles de données est essentiel.

7.3 Limites et perspectives

Malgré ses performances supérieures, l'algorithme de Welzl peut présenter des cas où la répartition particulière des points engendre une légère dégradation de sa complexité. Une étude plus approfondie sur ces cas pathologiques permettrait d'affiner les résultats.

Par ailleurs, des optimisations supplémentaires, telles que l'utilisation de structures de données plus sophistiquées (ex : arbres de recherche équilibrés), pourraient améliorer les performances pour des jeux de données très volumineux.

En conclusion, les résultats expérimentaux confirment la supériorité de l'algorithme de Welzl en termes d'efficacité et de scalabilité, en particulier pour de grandes instances du problème du plus petit cercle englobant.

8 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons étudié et comparé deux approches pour résoudre le problème du cercle minimum : un algorithme naïf basé sur une recherche exhaustive et l'algorithme de Welzl, plus optimisé et fondé sur une approche récursive et aléatoire.

Les résultats expérimentaux montrent clairement l'efficacité de l'algorithme de Welzl en termes de temps de calcul. Alors que l'algorithme naïf présente une complexité d'ordre $\mathcal{O}(n^4)$, rendant son exécution impraticable pour de grandes instances, l'algorithme de Welzl atteint une complexité moyenne de $\mathcal{O}(n)$, offrant un gain de performance significatif sur des ensembles de points de taille importante.

Nous avons également validé la correction de l'algorithme de Welzl en le confrontant à l'algorithme naïf, considéré comme une référence exacte. Les résultats obtenus sur l'ensemble de la base de test montrent que l'algorithme de Welzl fournit

systématiquement des cercles corrects et optimaux, confirmant sa fiabilité.

En conclusion, l'algorithme de Welzl s'impose comme une solution efficace et optimisée pour le problème du cercle minimum. Ce travail pourrait servir de base à d'autres recherches visant à améliorer la robustesse et à étendre l'application de cet algorithme à des domaines plus complexes, tels que la géométrie computationnelle en dimensions supérieures.

Question bonus : Extension des algorithmes en 3D

En 3D, le problème devient celui de la **sphère minimum** (Minimum Bounding Sphere, MBS) contenant un ensemble de points. L'algorithme de Welzl peut être généralisé : il construit la plus petite sphère englobant un ensemble P tout en maintenant un ensemble R de points sur sa surface.

Complexité et efficacité L'algorithme naïf a une complexité $\mathcal{O}(n^5)$ en 3D, contre $\mathcal{O}(n^4)$ en 2D. En revanche, l'algorithme de Welzl conserve une complexité moyenne $\mathcal{O}(n)$ même en dimension $d \geq 3$, le rendant efficace jusqu'à $d = 30$.

Défis et applications Les principaux défis incluent la gestion des erreurs d'arrondi et des cas dégénérés (points coplanaires). Cet algorithme est utilisé en modélisation 3D, biologie et simulation géométrique.

Conclusion L'algorithme de Welzl reste performant en 3D, bien qu'il nécessite une gestion précise des aspects numériques et des cas limites.

References

[1] Binh-Minh Bui-Xuan, Cours sur les collisions simples et probleme du cercle minimum : https://www-npa.lip6.fr/~buixuan/cpa2024

[2] eclipse IDE : mum : https://www.eclipse.org/downloads/

[3] LaTeX pour le rapport : https://fr.overleaf.com/project

[4] article sur l'algorithme de Welzl : https://www.stsci.edu/~RAB/Backup%20Oct%2022%202011/f_3_CalculationForWFIRSTML/Bob1.pdf

[5] lien vers la base VAROUMAS: http://www-npa.lip6.fr/buixuan/files/cpa2024/Varoumasbenchmark.zip

[6] Algorithme de Welzl sur Wikipedia: https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_du_cercle_minimum