

# Notes de cours, ELE-6411, Notions de base

Notes de cours, ELE-6411, Notions de base.....	1
1. Rappels sur les circuits électriques .....	3
1.1. Définition du régime permanent .....	3
1.1.1 Régime permanent sans harmoniques .....	3
1.2. Régime permanent harmonique en présence de fonctions non-linéaires.....	3
1.3. Notions de base.....	3
1.3.1 Champ électrique .....	4
1.3.2 Potentiel électrique .....	4
1.3.3 Courant électrique .....	4
1.3.4 Puissance électrique .....	5
1.4. Phaseurs.....	5
1.5. Résistance .....	5
1.5.1 Définition de la valeur efficace .....	6
1.6. Inductance .....	6
1.6.1 Puissance dans une inductance.....	7
1.7. Condensateur .....	7
1.7.1 Puissance dans un condensateur .....	7
1.8. Impédance .....	8
1.9. Puissance apparente.....	8
1.10. Facteur de puissance.....	8
2. Notions fondamentales en analyse de circuit .....	9
2.1. Théorème de superposition .....	9
2.2. Théorème de Thévenin .....	9
2.3. Théorème de Norton.....	9
2.4. Analyse directe dans le domaine du temps.....	9
2.5. Analyse nodale en régime permanent.....	10
3. Circuits triphasés .....	12
3.1. Schéma unifilaire .....	12
3.2. Généralités .....	13
3.3. Connexion en étoile .....	14
3.4. Connexion en triangle.....	15
3.5. Charges équilibrées.....	16
3.6. Mesure de puissance.....	16
3.7. Méthode des deux wattmètres .....	17
3.8. Puissance instantanée .....	18
3.9. Exemple de circuit triphasé .....	18
3.10. Transformateurs triphasés .....	19
3.10.1 Transformateur Dy11 .....	20
3.10.2 Transformateur Dy1 .....	21
3.10.3 Transformateur Yd1 .....	22
3.10.4 Transformateur Yd11 .....	23
4. Système en PU .....	25
4.1. Introduction .....	25
4.2. Définitions .....	25
4.3. Conversion des équations .....	25
4.4. Changement de base .....	26
4.5. Impédance en pu d'un transformateur.....	26
5. Matrices de transformation et composantes symétriques .....	27
5.1. Rappel sur un système équilibré .....	27

5.2.	Les équations de transformation .....	27
5.3.	Transformation de Fortescue, 'power variant' .....	28
5.4.	Exemples d'application .....	30
5.4.1	Calcul de courant de court-circuit monophasé.....	30
5.4.2	Calcul de courant de court-circuit triphasé .....	32
5.4.3	Calcul de courant de court-circuit biphasé .....	32
5.4.4	Calcul de courant de court-circuit biphasé-terre .....	33
5.5.	Utilisation du circuit de séquence directe .....	33
5.6.	Courants de court-circuit en régime transitoire .....	34
5.7.	Équivalent de réseau .....	34
5.8.	Transformation de Fortescue, 'power invariant' .....	35
5.9.	Transformations réelles .....	35
5.9.1	Transformation réelle de Clarke.....	36
5.9.2	Transformation pour une ligne de transport biterne (double-circuit) .....	36
5.10.	Impédances de séquence des transformateurs.....	37
5.11.	Impédances de séquences d'une machine synchrone.....	39
5.12.	Relation entre les harmoniques et les séquences .....	39
6.	Transformation qd0.....	40
7.	Transmission de puissance .....	42
7.1.	Modèle simple de la ligne de transport.....	42
7.2.	Exemple de calcul de tension avec contrainte de charge PQ .....	46

# 1. Rappels sur les circuits électriques

## 1.1. Définition du régime permanent

### 1.1.1 Régime permanent sans harmoniques

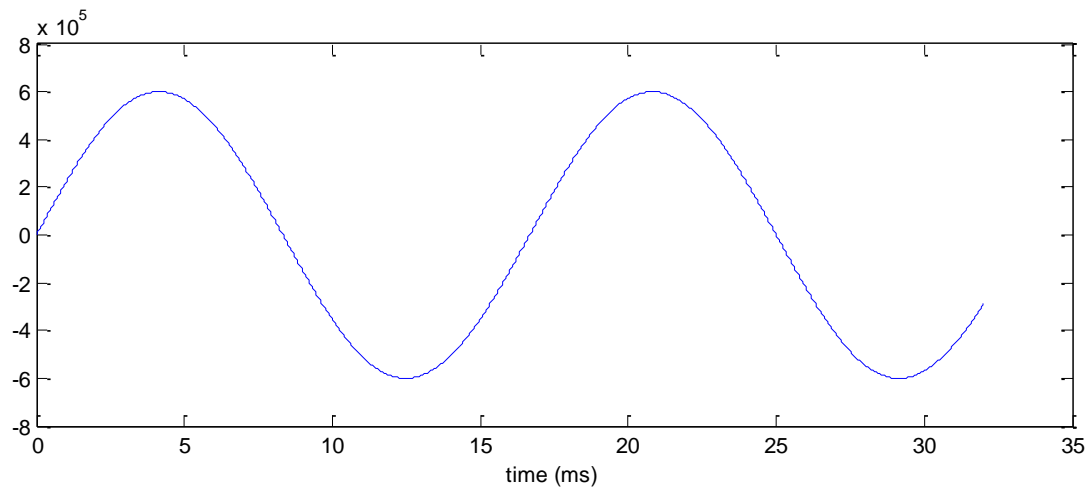


Figure 1 Tension de la phase a d'une ligne de transport de 735kV

## 1.2. Régime permanent harmonique en présence de fonctions non-linéaires.

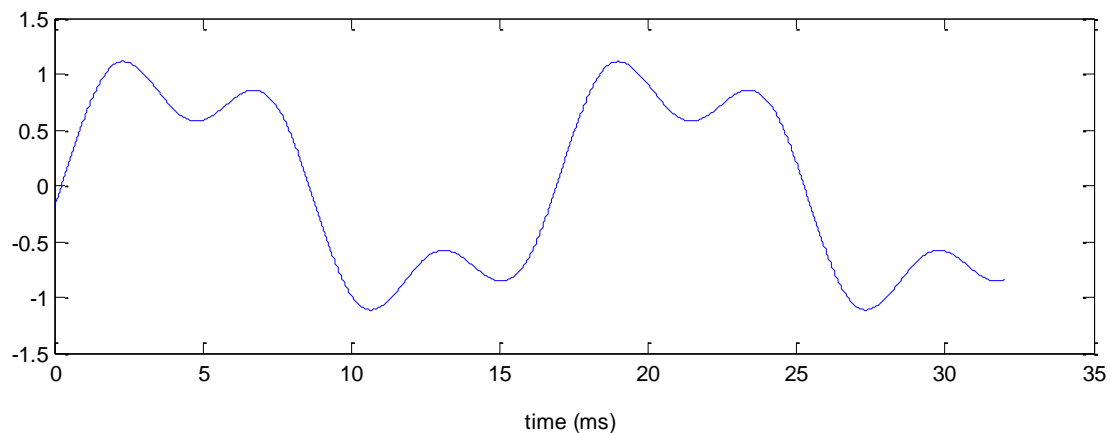


Figure 2 Régime permanent avec troisième harmonique

## 1.3. Notions de base

- Observation sur la présence d'électricité : certains matériaux s'attirent et d'autres se repoussent
- Présence de charge électrique
- Aspect magnétique : mouvement relatif des charges (les unes par rapport aux autres)
- Phénomènes électriques et Phénomènes magnétiques : électromagnétisme

- Source des forces électriques et magnétiques : charge électrique élémentaire
- Particule quelconque : charge électrique élémentaire positive, charge électrique élémentaire négative ou électriquement neutre (quantité égale de charges positives et négatives)
- Définition de la charge électrique élémentaire : charge que possède l'électron
- Quantification des charges électriques : charge électrique =  $N \times$  charge électrique élémentaire
- Unité de charge électrique : Coulomb
- Quantité de charge sur un électron :  $1.6022 \times 10^{-19}$  C, donc  $1 \text{ C} = 6.24 \times 10^{18}$  é. Il faut  $6.24 \times 10^{18}$  charges élémentaires (protons ou électrons) pour faire une charge totale de 1C
- Définition exacte d'un Coulomb : quantité de charges qui traversent en une seconde une section droite d'un conducteur dans lequel circule un courant de 1 A.
- Composition de l'atome : électrons et protons. Si l'attachement à l'atome de l'électron est faible, l'électron est libre de se mouvoir.
- Conducteur : grand nombre d'électrons libres
- Semiconducteur : état intermédiaire
- Isolant : peu d'électrons libres

### 1.3.1 Champ électrique

Si un électron (ou une particule) est placé dans une région où il y a un champ électrique, il y a une force exercée sur l'électron et il y a mouvement. Un champ électrique  $\vec{E}$  existe en un point P de l'espace si une petite charge ponctuelle positive placée à ce point subit une force électrique  $\vec{F}$ . Il n'est pas nécessaire qu'il y ait une charge électrique au point P pour que  $\vec{E}$  existe à ce point, pour détecter le champ il faut placer une charge ponctuelle Q :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad (\text{N/C}) \quad (1)$$

### 1.3.2 Potentiel électrique

Potentiel électrique ou différence de potentiel est le travail fait par le champ électrique pour déplacer une unité de charge électrique d'un point A à un autre point B.

Travail par unité de charge (énergie par unité de charge) :

$$W' = \frac{Fx}{Q} \quad (\text{Nm/C ou J/C}) \quad (2)$$

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} dx \quad (3)$$

Dans la cas d'un champ constant :

$$V_{AB} = E \Delta x \quad (4)$$

Autre écriture :

$$V = \frac{dW}{dQ} \quad (5)$$

Le potentiel s'exprime en Volts :

$$1 \text{ V} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}} \quad (6)$$

Dans certains manuels on utilise la lettre E pour la tension.

### 1.3.3 Courant électrique

Il existe un courant électrique quand on observe un mouvement de charges. Le courant est donné par la variation de charge par unité de longueur :

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (7)$$

Les unités sont les ampères :

$$1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}} \quad (8)$$

Le sens (arbitraire) du courant est le sens du champ électrique, le sens du mouvement des particules positives.

### 1.3.4 Puissance électrique

Variation d'énergie par unité de temps :

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dQ} \frac{dQ}{dt} = e(t) i(t) \quad (9)$$

Ici on utilise la lettre  $e$  pour exprimer la différence de potentiel.

La puissance électrique moyenne est :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t e(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \left[ \int_0^t e(t) i(t) dt - \int_0^{t-T} e(t) i(t) dt \right] \quad (\text{W}) \quad (10)$$

L'énergie est l'intégrale de la puissance pendant un temps donné :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (11)$$

L'unité de l'énergie est le joule (J).

### 1.4. Phaseurs

$$a(t) = A_{\max} \cos(\omega t + \lambda) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \lambda) = \Re \{ A_{\max} e^{j(\omega t + \lambda)} \} = \Re \{ A e^{j\lambda} \sqrt{2} e^{j\omega t} \} \quad (12)$$

Phaseur :

$$\bar{A} = A e^{j\lambda} = A \underline{\lambda} \quad (13)$$

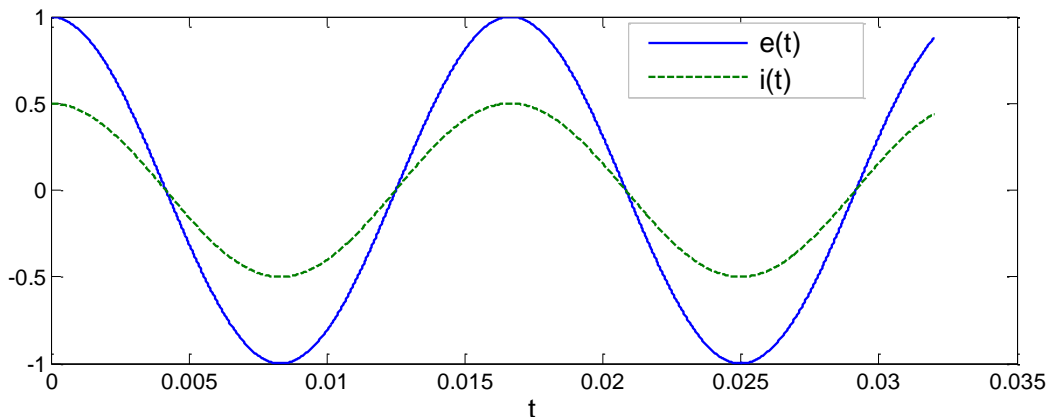
### 1.5. Résistance

La tension et le courant d'une résistance sont en phase.

$$e(t) = \cos(\omega t) \quad (14)$$

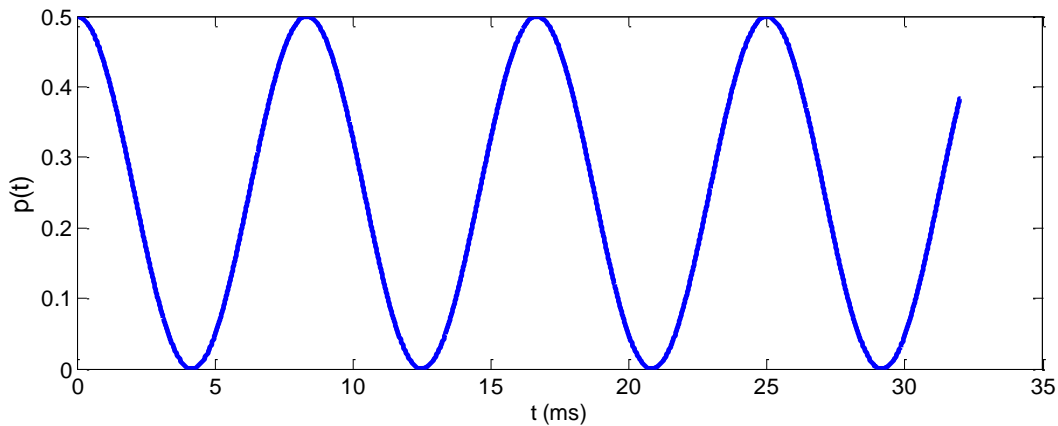
$$i = e/R \quad (15)$$

On peut aussi utiliser la notation  $e(t) = v(t)$



La puissance est calculée par :

$$p(t) = e(t) i(t) = e_m i_m \cos^2(\omega t) = 2E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos^2(\omega t) = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} (1 + \cos 2\omega t) \quad (16)$$



La valeur moyenne de cette puissance est (W) :

$$P = \frac{e_m i_m}{2} = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \quad (17)$$

La fréquence est 2 fois la fréquence de la tension.

### 1.5.1 Définition de la valeur efficace

La valeur efficace est la valeur que doit une tension à courant-continu pour fournir la même puissance moyenne.

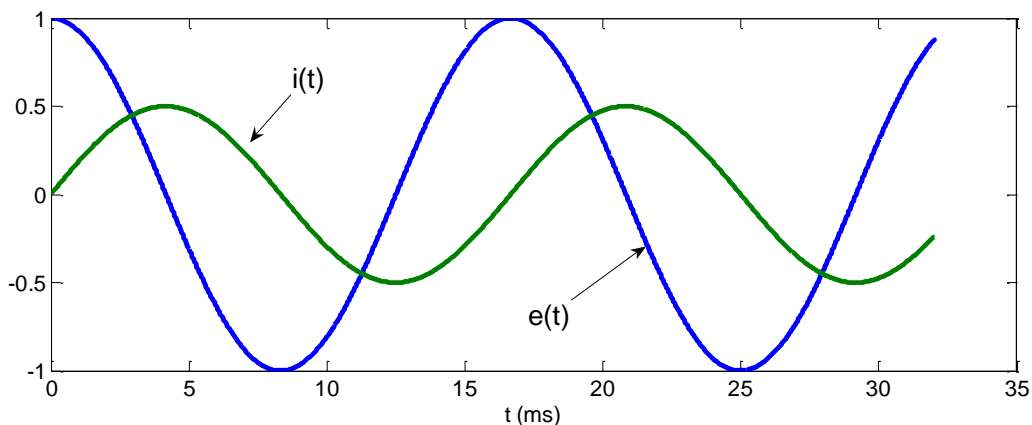
Un courant périodique  $i(t)$  dissipe une puissance moyenne à travers une résistance équivalente à celle dissipée par un courant continu d'amplitude égale à la valeur efficace du courant  $i(t)$ .

## 1.6. Inductance

$$e_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (18)$$

$$i_L(t) = \frac{E_m}{\omega L} \sin(\omega t + \lambda) = \frac{E_m}{\omega L} \cos(\omega t + \lambda - 90^\circ) = \sqrt{2} I_{L\text{eff}} \sin(\omega t + \lambda) \quad (19)$$

Le courant est en retard sur la tension de  $90^\circ$ .



Définition de réactance ( $\Omega$ ) :

$$X_L = \omega L \quad (20)$$

Impédance de l'inductance :

$$Z_L = j\omega L \quad (21)$$

### 1.6.1 Puissance dans une inductance

Si on assume que :

$$i_L(t) = \sqrt{2} I_{L_{eff}} \sin(\omega t) \quad (22)$$

alors

$$e_L(t) = \sqrt{2} X_L I_{L_{eff}} \cos \omega t \quad (23)$$

La puissance instantanée est donnée par :

$$p_L(t) = e_L i_L = I_{L_{eff}}^2 X_L \sin 2\omega t = Q \sin 2\omega t \quad (24)$$

La puissance  $Q$  est la puissance réactive en voltampère réactif (VAR).

La puissance instantanée varie à la fréquence double de celle du courant, mais sa valeur moyenne est nulle.

On peut calculer la puissance  $q_L(t)$  en déphasant la tension de  $90^\circ$  ( $T/4$ ):

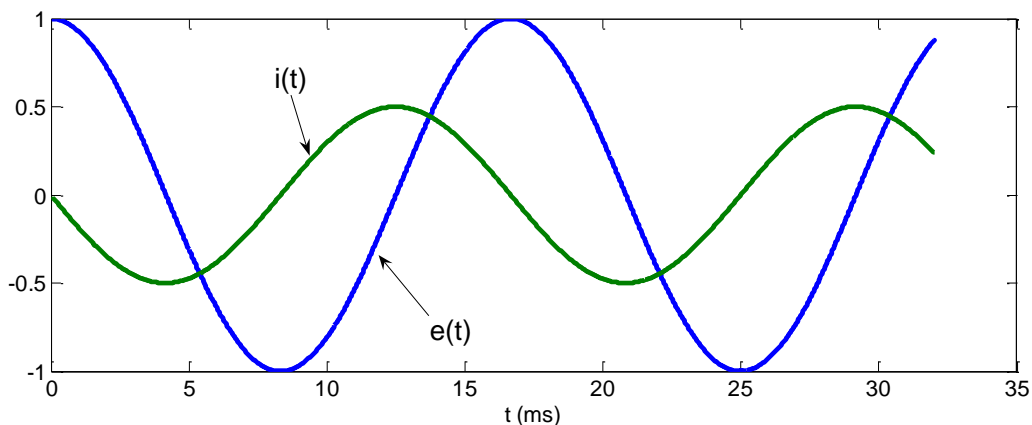
$$q_L(t) = 2 I_{L_{eff}}^2 X_L \sin^2(\omega t) = Q [1 - \cos(2\omega t)] \quad (25)$$

La moyenne de cette équation permet d'obtenir la puissance  $Q$ .

### 1.7. Condensateur

$$i_C(t) = C \frac{de_C(t)}{dt} = -\omega C E_m \sin(\omega t + \lambda) = \omega C E_m \cos(\omega t + \lambda + 90^\circ) \quad (26)$$

Le courant est en avance sur la tension de  $90^\circ$ .



Définition de réactance ( $\Omega$ ) :

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (27)$$

On peut aussi écrire :

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (28)$$

Impédance du condensateur :

$$Z_C = -jX_C = -\frac{j}{\omega C} \quad (29)$$

ou

$$Z_C = jX_C \quad (30)$$

#### 1.7.1 Puissance dans un condensateur

Soit :

$$e_C(t) = \sqrt{2} E_{C_{eff}} \cos \omega t \quad (31)$$

alors :

$$i_C(t) = -\sqrt{2} I_{C_{eff}} \sin \omega t \quad (32)$$

et :

$$p_C(t) = -\frac{I_{C_{eff}}^2}{\omega C} \sin 2\omega t = Q \sin 2\omega t \quad (33)$$

Le calcul automatique de la puissance  $Q$  pour un condensateur est identique à la procédure présentée par l'équation (25). Cette équation s'applique aussi à un circuit arbitraire composé d'inductances, de condensateurs et de résistances.

## 1.8. Impédance

L'impédance sous forme d'un phaseur (nombre complexe) :

$$\bar{Z} = R + jX = Z \angle \theta \quad (34)$$

Pour un cas générique :

$$e(t) = \sqrt{2} E_{eff} \cos \omega t \quad (35)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I_{eff} \cos(\omega t - \theta) \quad (36)$$

$$p(t) = E_{eff} I_{eff} \cos \theta (1 + \cos 2\omega t) + E_{eff} I_{eff} \sin \theta \sin 2\omega t = P(1 + \cos 2\omega t) + Q \sin 2\omega t \quad (37)$$

Donc :

$$P = E_{eff} I_{eff} \cos \theta = R I_{eff}^2 \quad (38)$$

$$Q = E_{eff} I_{eff} \sin \theta = X I_{eff}^2 \quad (39)$$

## 1.9. Puissance apparente

$$\vec{S} = P + jQ = E_{eff} I_{eff} \cos \theta + j E_{eff} I_{eff} \sin \theta = E_{eff} I_{eff} \angle \theta = S \angle \theta = \sqrt{P^2 + Q^2} \angle \theta = \vec{E} \vec{I}^* \quad (40)$$

## 1.10. Facteur de puissance

$$\text{facteur de puissance} = \cos \theta = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z} \quad (41)$$



## 2. Notions fondamentales en analyse de circuit

### 2.1. Théorème de superposition

S'applique seulement dans le cas linéaire.

### 2.2. Théorème de Thévenin

Permet de calculer un circuit équivalent et utilisé pour faire des calculs à un point du circuit électrique.

### 2.3. Théorème de Norton

Permet de calculer un circuit équivalent et utilisé pour faire des calculs à un point du circuit électrique. Il est possible de convertir un équivalent Thévenin en un équivalent Norton.

### 2.4. Analyse directe dans le domaine du temps

On peut solutionner un circuit dans le domaine du temps en écrivant directement les équations du circuit. Soit le circuit de la Figure 3.

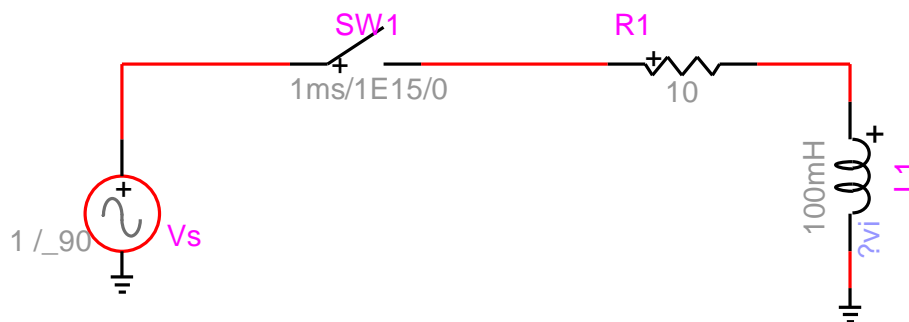


Figure 3 Circuit RL simple

Les équations du circuit sont :

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (42)$$

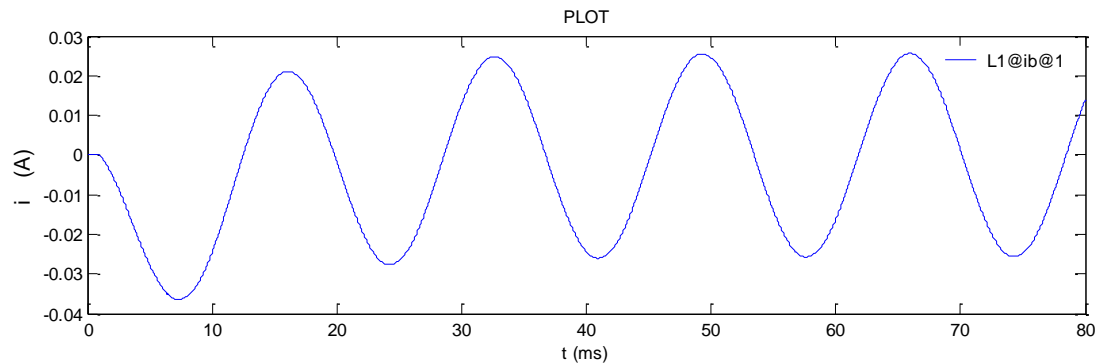
$$v_s = V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (43)$$

$$I(s) = \frac{V_m / L}{(s + R/L)(s^2 + \omega^2)} (\omega \cos \theta + s \sin \theta) \quad (44)$$

$$i(t) = \frac{V_m}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}} [\sin(\omega t + \theta - \phi)] - \frac{V_m}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}} \left[ \sin(\theta - \phi) e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad (45)$$

$$\tan \phi = \frac{\omega L}{R} \quad (46)$$

La réponse transitoire est composée d'une réponse forcée et d'une réponse naturelle. L'onde qui résulte de l'équation (45) est montrée à la figure suivante. La réponse forcée est la réponse en régime permanent.



**Figure 4 Réponse du circuit RL simple**

## 2.5. Analyse nodale en régime permanent

Méthode rapide pour l'écriture des équations de circuit. Méthode utilisée aussi dans la plupart des logiciels de calcul des circuits électrique et électroniques.

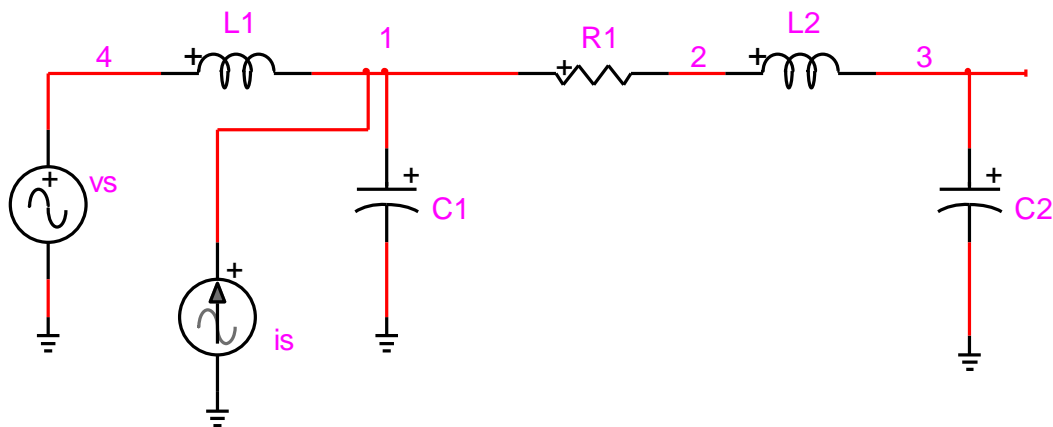
$\sum \text{courants qui quittent un noeud} = \sum \text{courants qui entrent dans un noeud}$

Équations génériques d'analyse nodale :

$$\mathbf{Y}\mathbf{v} = \mathbf{i} \quad (47)$$

où  $\mathbf{Y}$  est la matrice d'admittance nodale,  $\mathbf{v}$  est le vecteur des tensions inconnues et  $\mathbf{i}$  est le vecteur des courants entrants.

Soit le circuit de la Figure 5.



**Figure 5 Circuit utilisé pour la présentation de l'analyse nodale**

Les équations dans le domaine phasor (domaine de la fréquence) peuvent être obtenus par inspection :

$$\begin{bmatrix}
 \frac{1}{sL_1} + sC_1 + \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_1} & 0 & \frac{-1}{sL_1} & 0 \\
 \frac{-1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL_2} & \frac{-1}{sL_2} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-1}{sL_2} & \frac{1}{sL_2} + sC_2 & 0 & 0 \\
 \frac{-1}{sL_1} & 0 & 0 & \frac{1}{sL_1} & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 i_{v_s}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 i_s \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 v_s
 \end{bmatrix}
 \quad (48)$$

Notons ici l'utilisation d'une inconnue de courant  $i_{v_s}$  pour la source de tension.

Il est assez simple de programmer l'équation (48) en utilisant MATLAB. Le code peut-être écrit pour une fréquence ou pour un balayage en fréquence. Pour le calcul à la fréquence fondamentale nous avons :

```

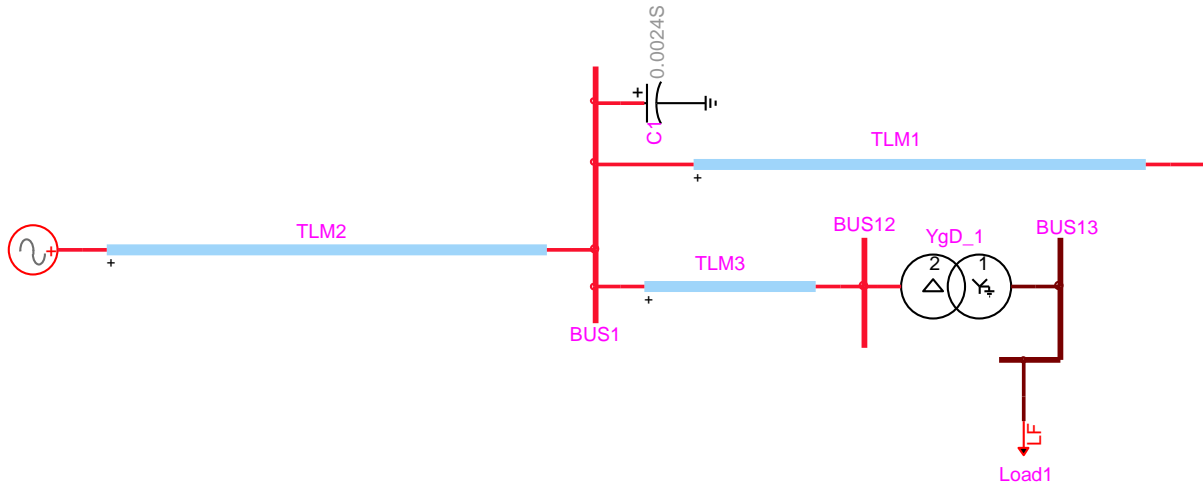
function V=nodal1
L1=1e-03;    L2=22e-03;
C1=.1557e-06; C2=.1557e-06;
R1=.574;
j=sqrt(-1);
f=60; w=2*pi*f;
s=j*w;
Y=[ 1/(s*L1) + s*C1 + 1/R1    -1/R1    0    -1/(s*L1)    0
    -1/R1    1/R1+1/(s*L2)    -1/(s*L2)    0    0
    0    -1/(s*L2)    1/(s*L2)+s*C2    0    0
    -1/(s*L1)    0    0    1/(s*L1)    1
    0    0    0    1    0];
I=[ 1 0 0 0 200]';
V=Y\I;

```

### 3. Circuits triphasés

#### 3.1. Schéma unifilaire

Le circuit triphasé est composé de trois fils en parallèle qui interconnectent une source triphasée à une charge triphasée. Le réseau de transport électrique est triphasé et généralement considéré comme équilibré (balancé). Les réseaux de distribution ne sont pas nécessairement équilibrés. On utilise les schémas unifilaires pour simplifier la représentation des réseaux triphasés équilibrés. Un exemple de schéma unifilaire est présenté à la Figure 6. Il s'agit ici d'un réseau équilibré.



**Figure 6 Exemple de schéma unifilaire, réseau équilibré.**

Les déséquilibres d'un réseau de transport peuvent exister au niveau des éléments constitutifs, comme les lignes de transmission, ou de la charge. Il est aussi possible de tracer des schémas unifilaires qui représentent explicitement les éléments ou les connexions déséquilibrés.

Les composants d'un circuit (ou réseau) triphasé peuvent être découplés ou couplés. Dans le cas d'une ligne de transport la matrice d'impédance série générique est donnée par :

$$Z_{\ell} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Si la ligne est équilibrée :

$$Z_{\ell} = \begin{bmatrix} Z_S & Z_M & Z_M \\ Z_M & Z_S & Z_M \\ Z_M & Z_M & Z_S \end{bmatrix} \quad (50)$$

Ce qui veut dire que les termes propres et mutuels sont identiques pour les trois phases. Si le terme mutuel est nul ( $Z_M = 0$ ), alors la ligne est découplée.

Le transformateur triphasé de la Figure 6 est constitué de trois unités monophasées découplées. Le montage est présenté à la Figure 7. Chacun des transformateurs monophasés peut être modélisé par des impédances de fuite et de magnétisation.

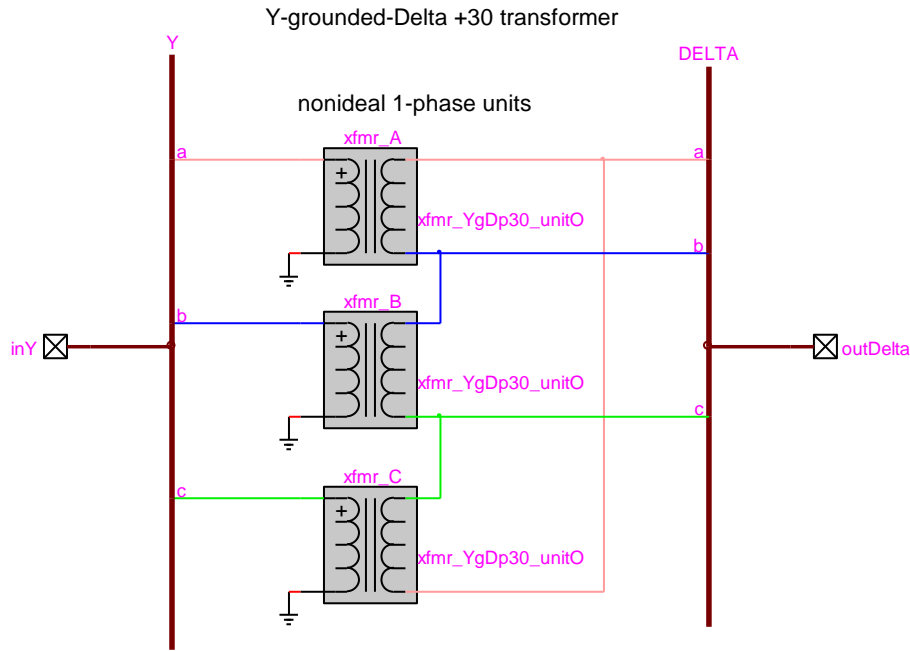


Figure 7 The 3-phase transformer circuit of Figure 6.

### 3.2. Généralités

Voici trois fonctions de tension pour une source triphasée de séquence directe:

$$\begin{aligned} e_a &= e_m \cos(\omega t) \\ e_b &= e_m \cos(\omega t - 120^\circ) \\ e_c &= e_m \cos(\omega t + 120^\circ) \\ e_a + e_b + e_c &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Le déphasage de  $120^\circ$  correspond à  $\frac{2\pi}{3}$  et 5.555ms. Si on prend  $f = 60\text{Hz}$  on obtient les formes

d'onde de la Figure 8.

L'opérateur  $a$  :

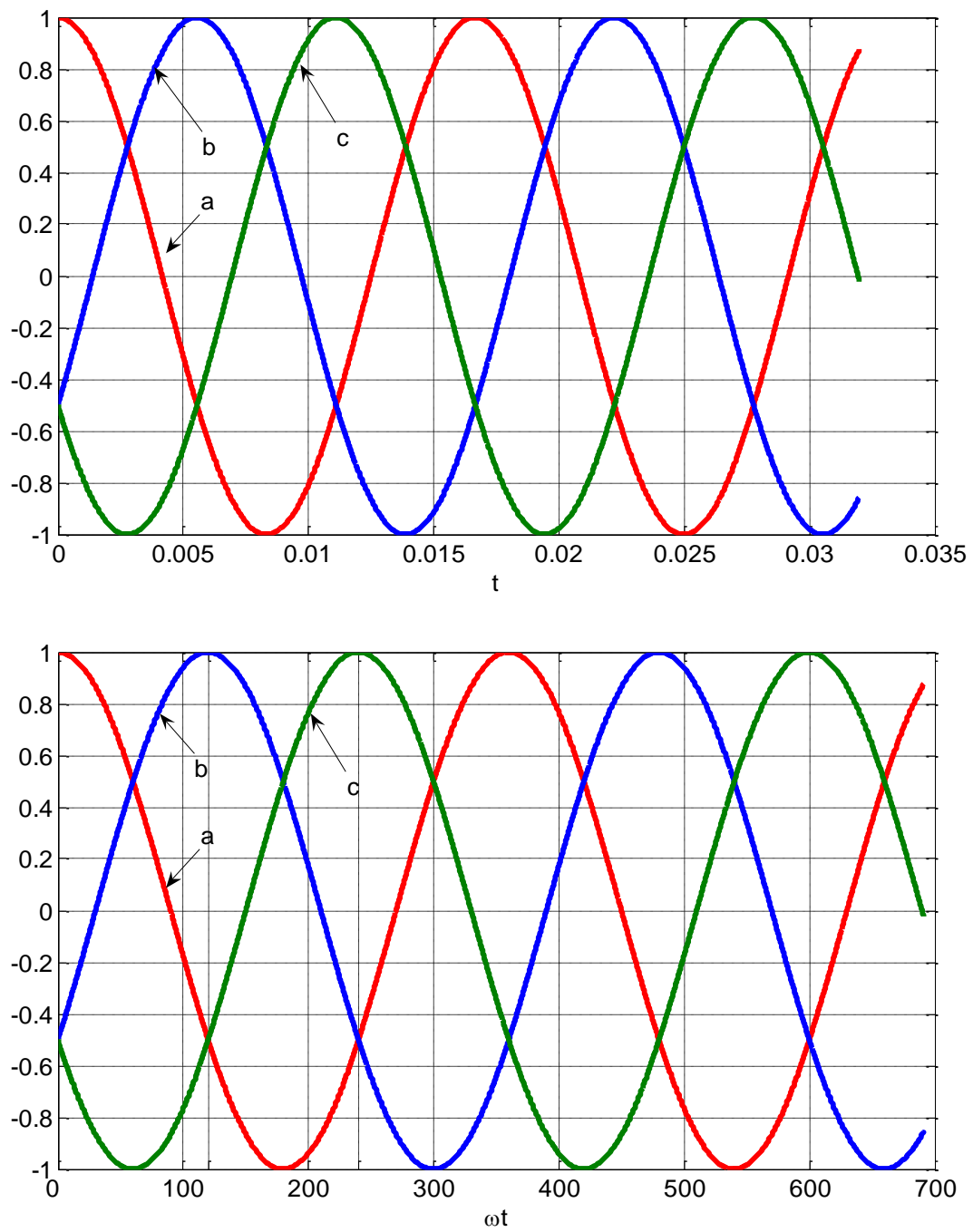
$$\begin{aligned} a &= 1\angle 120^\circ = -0.5 + j0.86602540378444 \\ a^2 &= 1\angle 240^\circ = -0.5 - j0.86602540378444 \\ a^3 &= 1 \end{aligned} \quad (52)$$

Sous forme de phaseur, on peut écrire :

$$\begin{aligned} E_a &= E \\ E_b &= E\angle -120^\circ = a^2 E_a \\ E_c &= E\angle 120^\circ = a E_a \end{aligned} \quad (53)$$

Ces équations représentent les tensions de phase. Les équations des tensions de ligne sont :

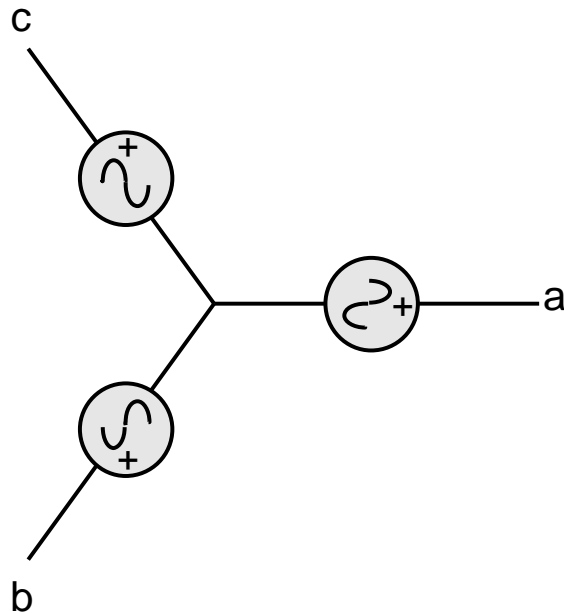
$$\begin{aligned} E_{ab} &= \sqrt{3}E_a\angle 30^\circ \\ E_{bc} &= \sqrt{3}E_b\angle 30^\circ = \sqrt{3}E_a\angle -90^\circ \\ E_{ca} &= \sqrt{3}E_c\angle 30^\circ = \sqrt{3}E_a\angle 150^\circ \end{aligned} \quad (54)$$



**Figure 8 Fonctions triphasées balancées**

### 3.3. Connexion en étoile

Les équations de tension sont données par les équations (53).



### 3.4. Connexion en triangle

Dans cette connexion la tension de ligne est la même que celle de la source. Pour les courants nous avons du côté source :

$$\begin{aligned} I_a &= I_{ba} - I_{ac} = \sqrt{3} I_{ba} \angle -30^\circ \\ I_b &= I_{cb} - I_{ba} = \sqrt{3} I_{cb} \angle -30^\circ \\ I_c &= I_{ac} - I_{cb} = \sqrt{3} I_{ac} \angle -30^\circ \end{aligned} \quad (55)$$

Du côté charge :

$$\begin{aligned} I_a &= I_{ab} - I_{ca} = \sqrt{3} I_{ab} \angle -30^\circ \\ I_b &= I_{bc} - I_{ab} = \sqrt{3} I_{bc} \angle -30^\circ \\ I_c &= I_{ca} - I_{bc} = \sqrt{3} I_{ca} \angle -30^\circ \end{aligned} \quad (56)$$

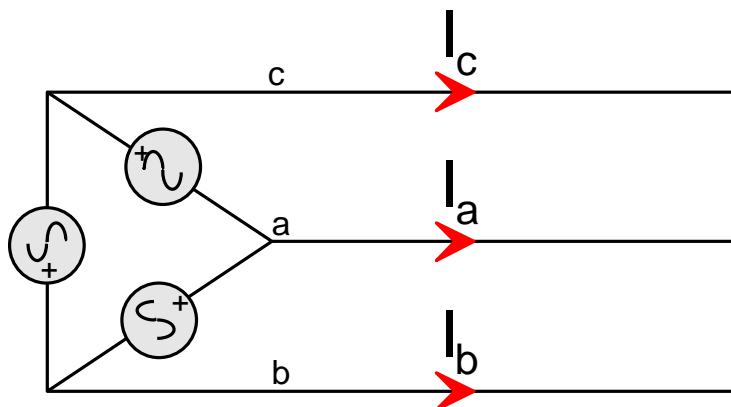


Figure 9 Connexion en triangle

### 3.5. Charges équilibrées

Une charge équilibrée est composée de 3 impédance identiques en partie réelle et en partie imaginaire.  
Une charge peut être en étoile (Y) ou en triangle (Delta).

Conversion de Delta à Y :

$$Z_a = \frac{Z_{ab}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (57)$$

$$Z_b = \frac{Z_{bc}Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (58)$$

$$Z_c = \frac{Z_{ca}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (59)$$

Conversion de Y à Delta :

$$Z_{ab} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c} \quad (60)$$

$$Z_{bc} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a} \quad (61)$$

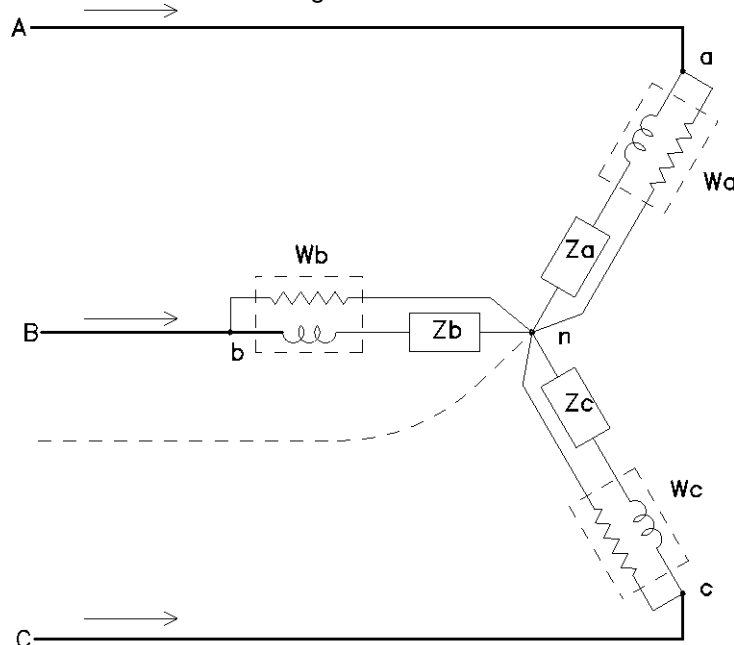
$$Z_{ca} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b} \quad (62)$$

### 3.6. Mesure de puissance

Valeur moyenne de la puissance :

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T p_a dt = \frac{1}{T} \int_0^T e_a i_a dt \quad (63)$$

La mesure peut se faire comme montrée à la Figure 10.



**Figure 10 Mesure de la puissance dans chacune des phases de la charge**

Puissance instantanée totale :

$$p = p_a + p_b + p_c \quad (64)$$



### 3.7. Méthode des deux wattmètres

Dans cette méthode :

$$P_b = 0$$

donc

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T e_{ab} i_a dt = |E_{ab}| |I_a| \cos(\angle E_{ab} \hat{I}_a) = |E_{ab}| |I_a| \cos(\theta + 30^\circ) \quad (65)$$

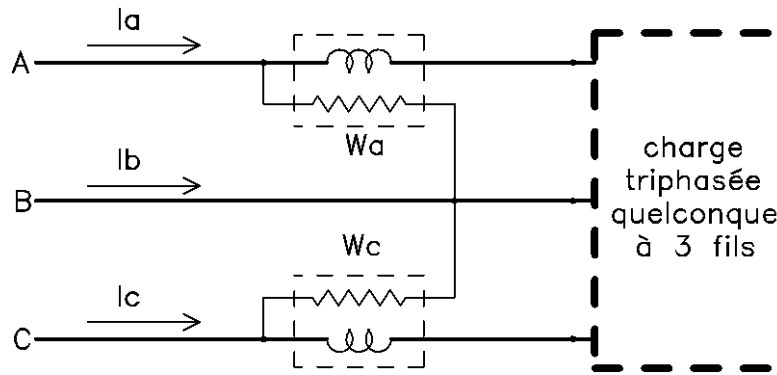
$$P_c = \frac{1}{T} \int_0^T e_{cb} i_c dt = |E_{cb}| |I_c| \cos(\angle E_{cb} \hat{I}_c) = |E_{cb}| |I_c| \cos(\theta - 30^\circ) \quad (66)$$

Si le circuit est équilibré :

$$P_a = E_\ell I_\ell \cos(\theta + 30^\circ) \quad (67)$$

$$P_c = E_\ell I_\ell \cos(\theta - 30^\circ) \quad (68)$$

Notons que si  $-60^\circ < \theta < 60^\circ$   $P_a$  et  $P_c$  sont positifs. Ceci correspond à un facteur de puissance de 0.5.



**Figure 11 Mesure de la puissance par la méthode des 2 wattmètres**

De façon générale la puissance triphasée est calculée en écrivant :

$$S = 3E_{ph} (I_{ph})^* = \sqrt{3}E_\ell \angle -30^\circ (I_\ell)^* = 1.5E_{phm} (I_{\ell m})^* \quad (69)$$

Il est à noter que :

$$P_a + P_c = \sqrt{3}E_\ell I_\ell \cos \theta = P \quad (70)$$

$$P_c - P_a = E_\ell I_\ell \sin \theta = \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad (71)$$

$$\cos \theta = \cos \left[ \arctan \left( \frac{\sqrt{3}(P_c - P_a)}{P_c + P_a} \right) \right] \quad (72)$$

Notons que dans le cas d'une charge à trois fils (sans point neutre connecté à la terre), la somme des courants de charge est nulle et ainsi la puissance total est donnée par:

$$p_3 = e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c = e_a i_a - e_b (i_a + i_c) + e_c i_c = e_{ab} i_a + e_{cb} i_c \quad (73)$$

La moyenne de cette puissance permet de calculer la puissance  $P$  même si la charge n'est pas équilibrée. Par contre le calcul de la puissance  $Q$  ne peut pas se faire avec seulement deux wattmètres quand la charge devient déséquilibrée.

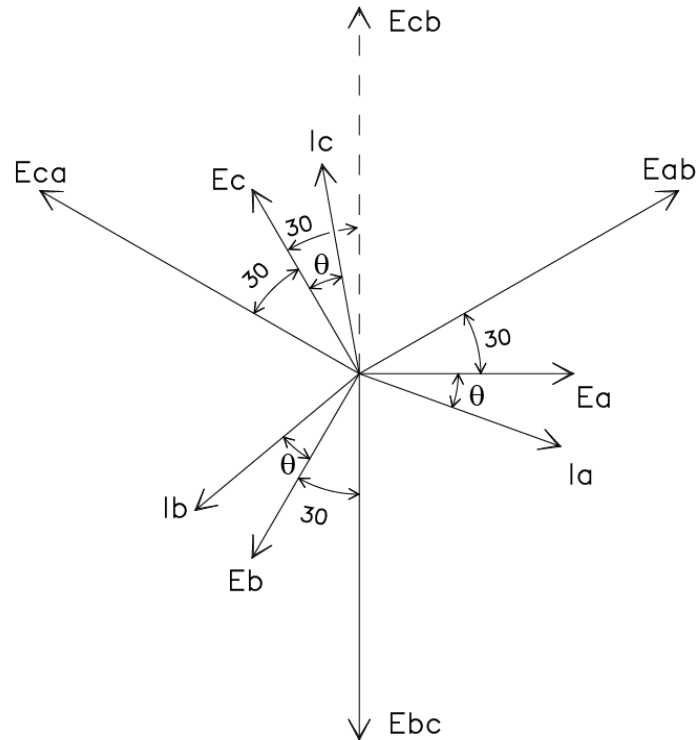


Figure 12 Relations entre tensions et courants

### 3.8. Puissance instantanée

Dans un circuit triphasé équilibré on peut écrire les équations de courant en appliquant le déphasage  $\theta$  aux équations de tension (voir équations (51)) :

$$\begin{aligned} i_a &= i_m \cos(\omega t - \theta) \\ i_b &= i_m \cos(\omega t - 120^\circ - \theta) \\ i_c &= i_m \cos(\omega t + 120^\circ - \theta) \\ i_a + i_b + i_c &= 0 \end{aligned} \quad (74)$$

Le calcul de la puissance totale est basé sur la somme :

$$p_3 = p_a + p_b + p_c = 1.5 e_m i_m \cos \theta \quad (75)$$

Cette constante correspond au résultat obtenu de l'équation (69).

### 3.9. Exemple de circuit triphasé

Le circuit de la Figure 13 présente un exemple de circuit triphasé. On peut étudier ce circuit en utilisant des techniques de réduction ou en programmant son système d'équations. Le circuit peut être équilibré ou déséquilibré. Le code de calcul suivant est utilisé dans Matlab:

```
%Source
EA=120;
EB=-60-j*104;
EC=-60+j*104;
%Impédance de source
ZA= (0.4+j*1); YA= 1/ZA;
ZB=ZA; YB=YA;
ZC=ZA; YC=YA;
%Impédance de ligne
ZL=(0.6+j*2);
YL=1/ZL;
```

```

%Impédance de charge
Za= j*80; Ya=1/(j*80);
Zb= 80; Yb=1/(80);
Zc= 80; Yc=1/(80);
%Impédance de neutre
Zn=(1+j*3);
Yn=1/Zn;

%%Calcul simple par équivalent Thévenin/Norton
ZAt= ZA+ZL+Za; YAt=1/ZAt;
ZBt= ZB+ZL+Zb; YBt=1/ZBt;
ZCt= ZC+ZL+Zc; YCt=1/ZCt;
INorton= EA*YAt+EB*YBt+EC*YCt;
V4=INorton*(YAt+YBt+YCt+Yn)^-1

%%Utilisation de l'analyse nodale (version modifiée-augmentée)
%+1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
Yaug=[
YA -YA 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
-YA YA+YL -YL 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 -YL YL+Ya -Ya 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 -Ya Ya+Yb+Yc+Yn 0 0 -Yb 0 0 -Yc 0 0 0 0
0 0 0 0 YB -YB 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 -YB YB+YL -YL 0 0 0 0 0 0
0 0 0 -Yb 0 -YL YL+Yb 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 YC -YC 0 0 0 1
0 0 0 0 0 0 0 -YC YC+YL -YL 0 0 0
0 0 0 -Yc 0 0 0 0 -YL YL+Yc 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
];
% 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
Iaug=[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 EA EB EC ].';
Vaug=Yaug\Iaug;

```

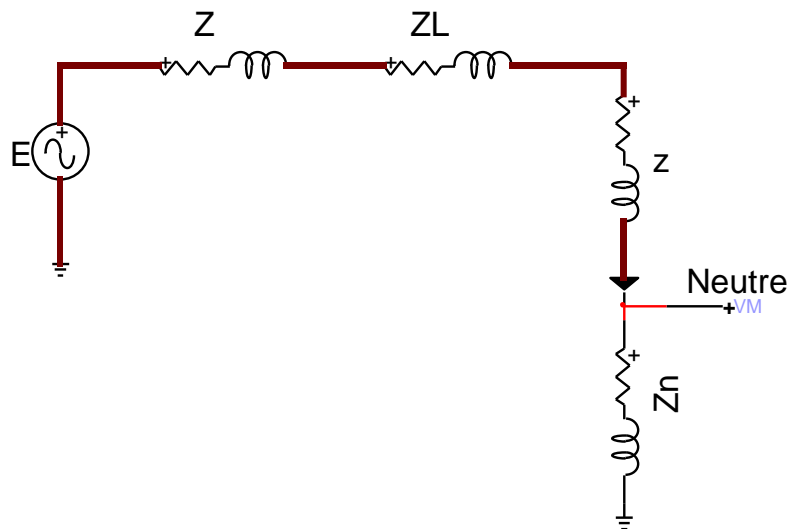


Figure 13 Exemple de circuit triphasé

### 3.10. Transformateurs triphasés

Il y a plusieurs façons de connecter des transformateurs. L'utilisation de  $Y_{\#}$  ou  $D_{\#}$  permet de spécifier les différentes configurations. Le numéro  $\#$  réfère à l'angle de phase sur un cadran de 12 heures de

l'enroulement  $w_1$  par rapport à la tension de la phase 'a' de la séquence directe. Dans les tableaux qui suivent le point neutre est identifié par la lettre N.

La liste des connexions possibles pour  $Y_{\#}$  est :

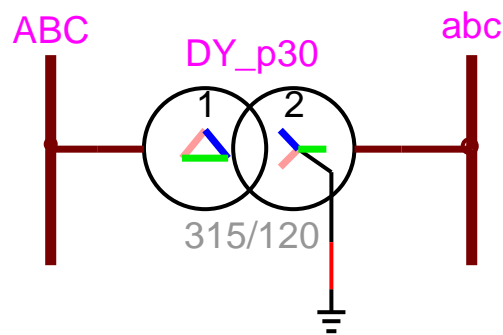
Type	Connexions			Déphasage de $w_1$ par rapport à la phase 'a' (degrés)
	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$Y_0$	a-N	b-N	c-N	0
$Y_4$	b-N	c-N	a-N	-120
$Y_8$	c-N	a-N	b-N	120
$Y_6$	N-a	N-b	N-c	-180
$Y_{10}$	N-b	N-c	N-a	60
$Y_2$	N-c	N-a	N-b	-60
$D_1 (D_{AB})$	a-c	b-a	c-b	-30
$D_5$	b-a	c-b	a-c	-150
$D_9$	c-b	a-c	b-a	90
$D_{11} (D_{AC})$	a-b	b-c	c-a	30
$D_3$	b-c	c-a	a-b	-90
$D_7$	c-a	a-b	b-c	150

Les configurations les plus fréquentes dans l'industrie nord-américaine sont  $Y_0$ ,  $Y_6$ ,  $D_1$  et  $D_{11}$ . Pour vérifier le déphasage d'une connexion il suffit de calculer la phase de  $w_1$  à partir de la connexion. Dans le cas  $D_1$ , par exemple :

$$1\angle 0 - 1\angle 120^\circ = \sqrt{3}\angle -30^\circ \quad (76)$$

### 3.10.1 Transformateur Dy11

La connexion Dy11 est présentée à la Figure 14. Le sous-réseau équivalent de la connexion est présenté à la Figure 15. Si on assume que le transformateur triphasé est composé de trois unités indépendants, il est possible de modéliser chacun des transformateurs par le circuit de la Figure 16.



**Figure 14 Connexion Dy11, composée de  $D_{11}$  et  $Y_0$ , exemple 315/120, +30 degrés au secondaire**

Les tensions au secondaire du transformateur ont une avance de phase de 30 degrés par rapport au primaire. Si le rapport de transformation est  $m : 1$  on peut écrire :

$$E_{ab} = \sqrt{3}E_{an}\angle 30^\circ = \sqrt{3}\frac{E_{AB}}{m}\angle 30^\circ = \sqrt{3}\sqrt{3}\frac{E_{AN}}{m}\angle 60^\circ \quad (77)$$

$$E_{an} = \sqrt{3} \frac{E_{AN}}{m} \angle 30^\circ \quad (78)$$

Le rapport de transformation  $m$  est celui entre les enroulements individuels au primaire et au secondaire. Dans la plupart des présentations on utilise les tensions ligne-ligne pour désigner le rapport de transformation. Dans le cas de la Figure 14 le rapport de transformation est 315/120, donc 315 kV (ligne-ligne) au primaire et 120 kV (ligne-ligne) au secondaire. La relation avec  $m$  est donnée par :

$$m = \sqrt{3} \frac{315}{120} \quad (79)$$

Delta-Y transformer, +30 on secondary  
Dy11 connection

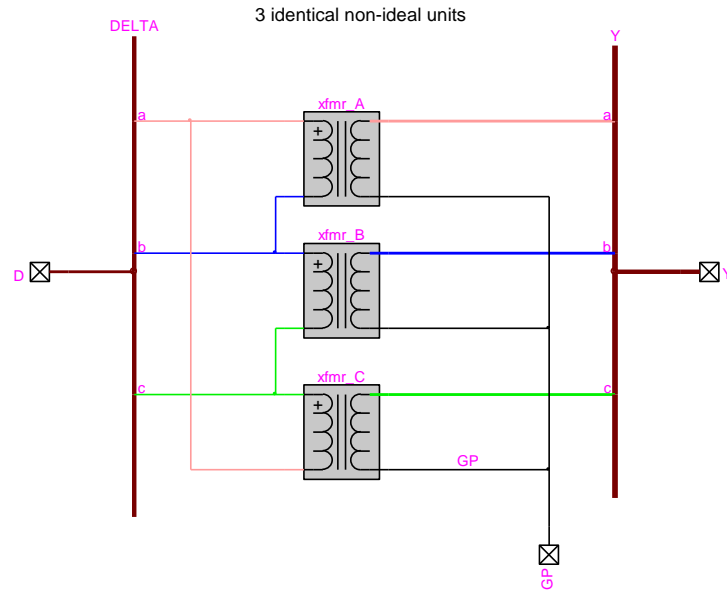


Figure 15 Sous-réseau de la connexion Dy11

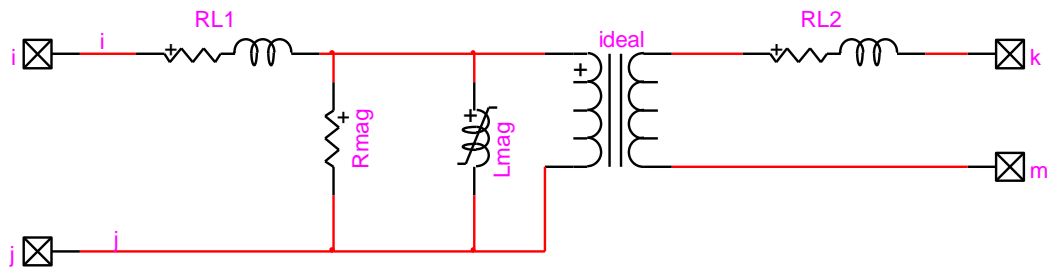


Figure 16 Transformateur monophasé utilisé dans la modélisation du transformateur triphasé

### 3.10.2 Transformateur Dy1

La connexion Dy11 est présentée à la Figure 17. Le sous-réseau équivalent de la connexion est présenté à la Figure 18.

Les tensions au secondaire du transformateur ont un retard de phase de 30 degrés par rapport au primaire. Si le rapport de transformation est  $m : 1$  on peut écrire :

$$E_{ab} = \sqrt{3} E_{an} \angle 30^\circ = \sqrt{3} \frac{E_{AC}}{m} \angle 30^\circ = \sqrt{3} \frac{E_{AB}}{m} \angle -30^\circ = \sqrt{3} \sqrt{3} \frac{E_{AN}}{m} \angle 0^\circ \quad (80)$$

$$E_{an} = \sqrt{3} \frac{E_{AN}}{m} \angle -30^\circ \quad (81)$$

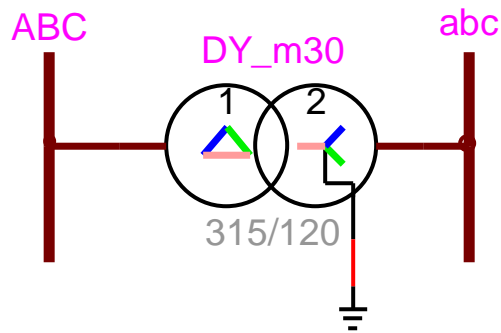


Figure 17 Connexion Dy1, composée de  $D_1$  et  $Y_0$ , exemple 315/120, -30 degrés au secondaire

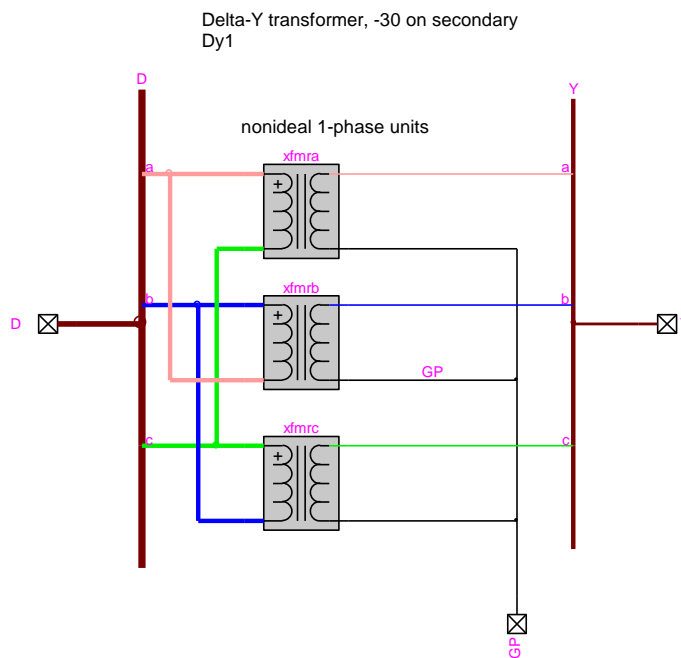
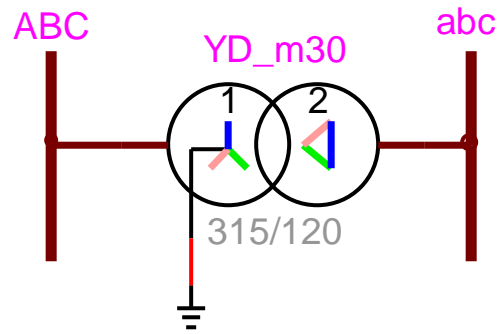


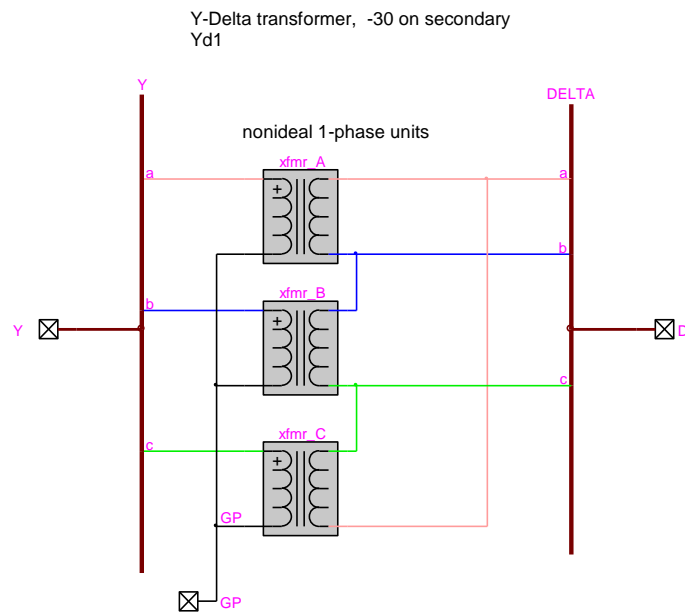
Figure 18 Sous-réseau de la connexion Dy1

### 3.10.3 Transformateur Yd1

Ce type de transformateur est présenté à la Figure 19 et le sous-réseau équivalent est de celui de la Figure 20. La tension au secondaire est en retard de 30 degrés par rapport au primaire.



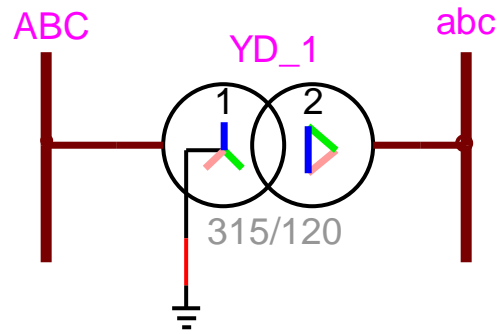
**Figure 19 Connexion Yd1, composée de  $Y_0$  et  $D_{11}$ , exemple 315/120, -30 degrés au secondaire**



**Figure 20 Sous-réseau de la connexion Yd1**

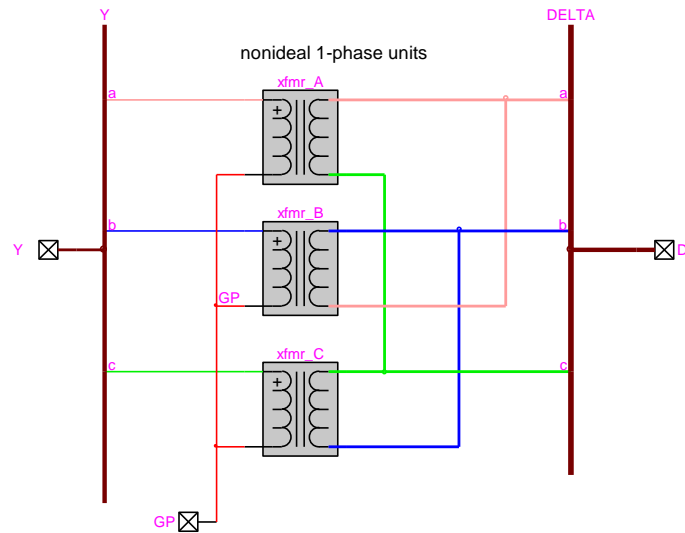
### 3.10.4 Transformateur Yd11

Ce type de transformateur est présenté à la Figure 20 et le sous-réseau équivalent est de celui de la Figure 21. La tension au secondaire est en avance de 30 degrés par rapport au primaire.



**Figure 21 Connexion Yd11, composée de  $Y_0$  et  $D_1$ , exemple 315/120, +30 degrés au secondaire**

Y-Delta transformer, +30 on secondary  
Yd11



**Figure 22 Sous-réseau de la connexion Yd11**



## 4. Système en PU

### 4.1. Introduction

L'utilisation des pu offre plusieurs avantages pour les réseaux électriques:

1. généralisation des équations qui décrivent le comportement du système,
2. les données en pu permettent de normaliser et offrent des informations génériques contrairement aux ampères, ohms et volts,
3. élimination du rapport de transformation dans les logiciels et méthodes de calcul basées sur les pu et des simplifications.

### 4.2. Définitions

Le système en pu est applicable pour les systèmes monophasés (1-phase) et triphasés (3-phases).

Soient les définitions suivantes:

$S_{B_1}$  : base de puissance, 1-phase, en VA

$S_B$  : base de puissance, 3-phases, en VA

$V_{B_1}$  : base de tension 1-phase en V, phase-terre (ligne-terre), valeur efficace

$V_B$  : base de tension 3-phases, ligne-ligne, valeur efficace

Les quantités suivantes sont dérivées des définitions précédentes:

$I_B$  : base de courant de ligne, s'applique aux conditions 1-phase and 3-phases, valeur efficace

$Z_B$  : base d'impédance, s'applique aux conditions 1-phase and 3-phases, impédance phase-terre

Les équations (scalaires) suivantes résultent des définitions précédents:

$$S_{B_1} = \frac{S_B}{3} \quad (82)$$

$$S_B = \sqrt{3} V_B I_B \quad (83)$$

$$V_{B_1} = \frac{V_B}{\sqrt{3}} \quad (84)$$

$$I_B = \frac{S_{B_1}}{V_{B_1}} = \frac{S_B}{\sqrt{3} V_B} \quad (85)$$

$$Z_B = \frac{V_{B_1}}{I_B} = \frac{(V_{B_1})^2}{S_{B_1}} = \frac{(V_B)^2}{S_B} \quad (86)$$

On peut convertir une quantité  $X$  en pu en utilisant la formule suivante:

$$X_{pu} = \frac{X}{X_{base}} \quad (87)$$

### 4.3. Conversion des équations

Pour convertir une équation en pu il faut diviser toutes ses parties par les bases correspondantes.

Soit, par exemple, le calcul de puissance triphasée donnée par l'équation suivante:

$$\tilde{S} = \sqrt{3} \tilde{V}_{LL} (\tilde{I}_L)^* = 3 \tilde{V}_{LN} (\tilde{I}_L)^* \quad (88)$$

où le tilde est utilisé pour désigner des phaseurs, LL signifie ligne-ligne, LN signifie ligne-terre et  $I_L$  désigne le courant de ligne (courant dans le fil). La conversion en pu résulte dans l'équation suivante:

$$\tilde{S}_{pu} = \tilde{V}_{pu} (\tilde{I}_{pu})^* \quad (89)$$

Le même traitement s'applique au calcul d'impédance:

$$\tilde{Z}_{pu} = \frac{\tilde{Z}}{Z_B} = \frac{\frac{3|\tilde{V}_{LN}|^2}{\tilde{S}^*}}{Z_B} = \frac{\frac{|\tilde{V}_{LL}|^2}{\tilde{S}^*}}{\frac{(V_B)^2}{S_B}} = \frac{|\tilde{V}_{pu}|^2}{(\tilde{S}_{pu})^*} \quad (90)$$

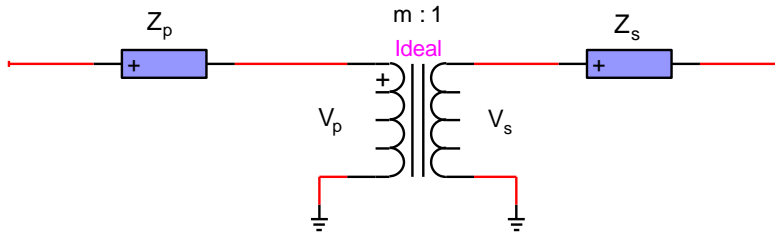
#### 4.4. Changement de base

Si une donnée d'impédance est disponible sur une base différente de la base utilisée dans le système étudié, il est requis d'effectuer une conversion de base. La procédure directe de conversion consiste au retour sur les quantités fondamentales (Ohms) et le calcul avec la nouvelle base. Cette procédure est simplifiée en utilisant directement la formule de conversion ('old' réfère à l'ancienne base et 'new' réfère à la nouvelle base):

$$\tilde{Z}_{pu_{new}} = \tilde{Z}_{pu_{old}} \left( \frac{V_{B_{old}}}{V_{B_{new}}} \right)^2 \frac{S_{B_{new}}}{S_{B_{old}}} \quad (91)$$

#### 4.5. Impédance en pu d'un transformateur

Les transformateurs à haute tension sont souvent composés d'unités monophasés (Figure 23). Ce type de modèle est acceptable dans la plupart des cas pour des études à fréquence fondamentale. Le rapport de transformation est donné par  $m$ .



**Figure 23 Transformer unit with leakage impedances**

L'impédance vue du primaire est donnée par:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_p + m^2 \tilde{Z}_s \quad (92)$$

Les bases de pu au primaire et secondaire sont:

$$Z_{B_p} = \frac{(V_{B_p})^2}{S_B} \quad (93)$$

$$Z_{B_s} = \frac{(V_{B_s})^2}{S_B} = \frac{(V_{B_p})^2}{m^2 S_B} = \frac{Z_{B_p}}{m^2} \quad (94)$$

La conversion en pu de l'équation (92) donne:

$$Z_{pu} = \frac{\tilde{Z}_p}{Z_{B_p}} + \frac{m^2 \tilde{Z}_s}{Z_{B_p}} = \tilde{Z}_{p_{pu}} + \tilde{Z}_{s_{pu}} \quad (95)$$

Cette approche permet d'éliminer le rapport de transformation dans les équations en pu d'un réseau complet.

## 5. Matrices de transformation et composantes symétriques

### 5.1. Rappel sur un système équilibré

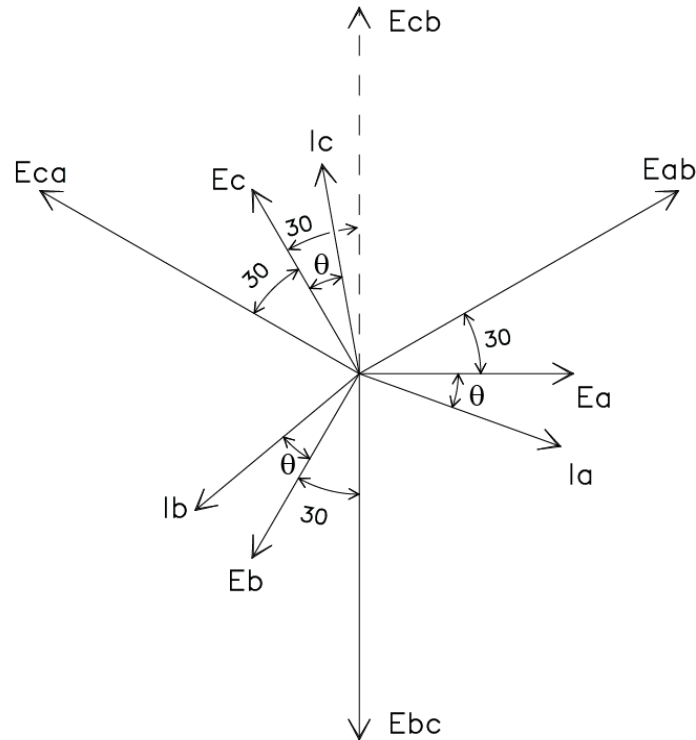


Figure 24 Système équilibré (balancé)

### 5.2. Les équations de transformation

Soit un système d'équations dans le domaine phaseur :

$$\mathbf{V}_{abc} = \mathbf{Z}_{abc} \mathbf{I}_{abc} \quad (96)$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (97)$$

Il est possible d'écrire ce type d'équation pour une branche arbitraire d'un réseau ou pour un point d'observation triphasé. Toutes les variables de l'équation (97) sont complexes.

Si dans le cas particulier les termes mutuels (impédance mutuelles) sont nuls :

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (98)$$

Les impédances  $Z_{aa}$ ,  $Z_{bb}$  et  $Z_{cc}$  sont les impédances propres.

On doit aussi rappeler que l'opérateur  $a$  est donné par :

$$\begin{aligned} a &= 1 \angle 120^\circ = -0.5 + j0.86602540378444 \\ a^2 &= 1 \angle 240^\circ = -0.5 - j0.86602540378444 \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} a^3 &= 1 \\ 1 + a + a^2 &= 0 \end{aligned} \quad (100)$$

$$1 - a = \sqrt{3} \angle -30^\circ \quad (101)$$

$$a - 1 = \sqrt{3} \angle 150^\circ \quad (102)$$

$$1 - a^2 = \sqrt{3} \angle 30^\circ \quad (103)$$

$$a - a^2 = \sqrt{3} \angle 90^\circ \quad (104)$$

$$\frac{1}{a} = a^2 \quad (105)$$

### 5.3. Transformation de Fortescue, 'power variant'

Matrice de transformation de type 'power variant' :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (107)$$

On note que :

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A}^* = 3 \quad (108)$$

La transformation du système d'équations (96) donne :

$$\mathbf{A} \mathbf{V}_{012} = \mathbf{Z} \mathbf{A} \mathbf{I}_{012} \quad (109)$$

avec :

$$\mathbf{V}_{abc} = \mathbf{A} \mathbf{V}_{012} \quad (110)$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$\mathbf{V}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}_{abc} \quad (112)$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (113)$$

De la même façon :

$$\mathbf{I}_{abc} = \mathbf{A} \mathbf{I}_{012} \quad (114)$$

et

$$\mathbf{I}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}_{abc} \quad (115)$$

Dans ces équations on réfère par défaut à la phase a :

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{0a} \\ V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} \quad (116)$$

Il est possible de calculer pour les autres phases en faisant les changements d'angle appropriés :

$$\begin{bmatrix} V_{0a} \\ V_{0b} \\ V_{0c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} V_0 \quad (117)$$

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{1b} \\ V_{1c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & a^2 & \\ & & a \end{bmatrix} V_1 \quad (118)$$

$$\begin{bmatrix} V_{2a} \\ V_{2b} \\ V_{2c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & a & \\ & & a^2 \end{bmatrix} V_2 \quad (119)$$

On note ici que dans le cas de la séquence directe :

$$\begin{aligned} V_{1ab} &= \sqrt{3}V_{1a} \underline{30^\circ} \\ V_{1bc} &= \sqrt{3}V_{1b} \underline{30^\circ} = \sqrt{3}V_{1a} \underline{-90^\circ} \\ V_{1ca} &= \sqrt{3}V_{1c} \underline{30^\circ} = \sqrt{3}V_{1a} \underline{150^\circ} \end{aligned} \quad (120)$$

Par contre pour la séquence inverse :

$$\begin{aligned} V_{2ab} &= \sqrt{3}V_{2a} \underline{-30^\circ} \\ V_{2ca} &= \sqrt{3}V_{2c} \underline{-30^\circ} = \sqrt{3}V_{2a} \underline{-150^\circ} \\ V_{2bc} &= \sqrt{3}V_{2b} \underline{-30^\circ} = \sqrt{3}V_{2a} \underline{90^\circ} \end{aligned} \quad (121)$$

L'équation (111) peut aussi être écrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \\ V_{b0} \\ V_{b1} \\ V_{b2} \\ V_{c0} \\ V_{c1} \\ V_{c2} \end{bmatrix} \quad (122)$$

L'équation (109) peut être réécrite sous la forme :

$$\mathbf{V}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{A} \mathbf{I}_{012} \quad (123)$$

donc :

$$\mathbf{Z}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{A} \quad (124)$$

La version générique de cette impédance est donnée par :

$$\mathbf{Z}_{012} = \begin{bmatrix} Z_{S0} + 2Z_{M0} & Z_{S2} - Z_{M2} & Z_{S1} - Z_{M1} \\ Z_{S1} - Z_{M1} & Z_{S0} - Z_{M0} & Z_{S2} + 2Z_{M2} \\ Z_{S2} - Z_{M2} & Z_{S1} + 2Z_{M1} & Z_{S0} - Z_{M0} \end{bmatrix} \quad (125)$$

$$Z_{S0} = \frac{1}{3} [Z_{aa} + Z_{bb} + Z_{cc}] \quad (126)$$

$$Z_{S1} = \frac{1}{3} [Z_{aa} + aZ_{bb} + a^2Z_{cc}] \quad (127)$$

$$Z_{S2} = \frac{1}{3} [Z_{aa} + a^2Z_{bb} + aZ_{cc}] \quad (128)$$

$$Z_{M0} = \frac{1}{3} [Z_{bc} + Z_{ca} + Z_{ab}] \quad (129)$$

$$Z_{M1} = \frac{1}{3} [Z_{bc} + aZ_{ca} + a^2Z_{ab}] \quad (130)$$

$$Z_{M2} = \frac{1}{3} [Z_{bc} + a^2 Z_{ca} + a Z_{ab}] \quad (131)$$

Si on pose  $Z_{ac} = Z_{bc} = Z_{ab} = 0$  :

$$\mathbf{Z}_{012} = \begin{bmatrix} Z_{S0} & Z_{S2} & Z_{S1} \\ Z_{S1} & Z_{S0} & Z_{S2} \\ Z_{S2} & Z_{S1} & Z_{S0} \end{bmatrix} \quad (132)$$

donc :

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{S0} & Z_{S2} & Z_{S1} \\ Z_{S1} & Z_{S0} & Z_{S2} \\ Z_{S2} & Z_{S1} & Z_{S0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (133)$$

Ce qui indique un couplage entre les circuits de séquence quand les impédances propres ne sont pas égales.

Si on pose  $Z_{ac} = Z_{bc} = Z_{ab}$  :

$$Z_{M0} = Z_{ab} = Z_M, \quad Z_{M1} = 0, \quad Z_{M2} = 0 \quad (134)$$

Si on pose  $Z_{aa} = Z_{bb} = Z_{cc}$  :

$$Z_{S0} = Z_{aa} = Z_S, \quad Z_{S1} = 0, \quad Z_{S2} = 0 \quad (135)$$

La combinaison des équations (134) et (135) donne :

$$\mathbf{Z}_{abc} = \begin{bmatrix} Z_S & Z_M & Z_M \\ Z_M & Z_S & Z_M \\ Z_M & Z_M & Z_S \end{bmatrix} \quad (136)$$

$$\mathbf{Z}_{012} = \begin{bmatrix} Z_S + 2Z_M & 0 & 0 \\ 0 & Z_S - Z_M & 0 \\ 0 & 0 & Z_S - Z_M \end{bmatrix} \quad (137)$$

Notons que dans ces conditions :

$$Z_0 = Z_S + 2Z_M \quad (138)$$

$$Z_1 = Z_S - Z_M \quad (139)$$

Pour une impédance de m phases :

$$Z_S = \frac{Z_0 + (m-1)Z_1}{m} \quad (140)$$

$$Z_0 = Z_S + (m-1)Z_M \quad (141)$$

$$Z_M = \frac{Z_0 - Z_1}{m} \quad (142)$$

La puissance totale (nombre complexe) est calculée en utilisant :

$$S = \mathbf{V}_{abc}^t \mathbf{I}_{abc}^* = \mathbf{V}_{012}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A}^* \mathbf{I}_{012}^* = 3 \mathbf{V}_{012}^t \mathbf{I}_{012}^* = 3 [V_0 I_0^* + V_1 I_1^* + V_2 I_2^*] \quad (143)$$

Normalement une source (machine tournante) ne peut fournir que de la puissance de séquence directe.

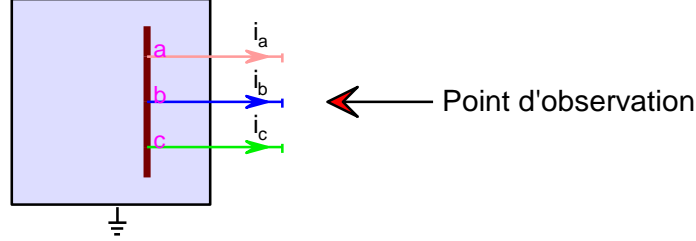
## 5.4. Exemples d'application

### 5.4.1 Calcul de courant de court-circuit monophasé

Une des applications importantes des circuits de séquence est le calcul des courants de court-circuit en régime permanent ou le calcul des variables en régime permanent à un point donné du réseau. La majorité des méthodes assument un réseau équilibré (seulement deux séquences distinctes). Soit un point d'observation arbitraire présenté dans la Figure 25. Le système générique d'équations dans le domaine phaseur qui représente ce point est :

$$\mathbf{V}_{th} - \mathbf{Z}_{th} \mathbf{I}_{abc} = \mathbf{V}_{abc} \quad (144)$$

Le vecteur  $\mathbf{V}_{th}$  est le vecteur des tensions Thévenin (phase-terre), la matrice  $\mathbf{Z}_{th}$  est la matrice Thévenin, le vecteur  $\mathbf{I}_{abc}$  est le vecteur des courants qui sortent du point d'observation et le vecteur  $\mathbf{V}_{abc}$  est le vecteur des tensions au point d'observation. La matrice  $\mathbf{Z}_{th}$  est une matrice pleine similaire à la matrice de l'équation (97). Normalement si le point d'observation est en circuit ouvert,  $\mathbf{I}_{abc} = \mathbf{0}$ .



**Figure 25 Point arbitraire dans un réseau équilibré**

Le système d'équations (144) peut aussi s'écrire dans le domaine des séquences (modes) en appliquant la matrice de transformation de l'équation (106) et son inverse de l'équation (107) :

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}_{th} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z}_{th} \mathbf{I}_{abc} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}_{abc} \quad (145)$$

De plus, en utilisant les équations génériques (112) et (114) :

$$\mathbf{V}_{th012} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z}_{th} \mathbf{A} \mathbf{I}_{012} = \mathbf{V}_{012} \quad (146)$$

L'équation (124) permet finalement d'écrire le système complet dans le domaine des séquences :

$$\mathbf{V}_{th012} - \mathbf{Z}_{012} \mathbf{I}_{012} = \mathbf{V}_{012} \quad (147)$$

Puisque le réseau observé est assumé équilibré, on obtient 3 circuits découplés :

$$\begin{bmatrix} V_{th0} \\ V_{th1} \\ V_{th2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & & \\ & Z_1 & \\ & & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (148)$$

Donc le système initial couplé a été transformé en un système équivalent découplé dans le domaine des séquences.

Normalement le réseau équilibré ne peut générer que des tensions de séquence directe, donc :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ V_{th1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & & \\ & Z_1 & \\ & & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (149)$$

Si on utilise le système d'équations (149) pour étudier un défaut phase-terre à la phase a à travers une impédance de défaut  $Z_f$  :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ V_{th1} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} I_a = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_f I_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (150)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V_{th1} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} I_a = \begin{bmatrix} Z_f I_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (151)$$

$$\begin{bmatrix} V_{th_a} \\ V_{th_b} \\ V_{th_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0/3 + Z_1/3 + Z_2/3 + Z_f & 0 & 0 \\ Z_0/3 + a^2 Z_1/3 + a Z_2/3 & 1 & 0 \\ Z_0/3 + a Z_1/3 + a^2 Z_2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (152)$$

Le vecteur  $\mathbf{V}_{th}$  est en fait la tension équilibrée au point d'observation avant défaut. Par conséquent cette équation permet de calculer directement le courant de défaut  $I_a$  et les tensions  $V_b$  et  $V_c$  sur les phases saines:

$$I_a = \frac{3V_{th_a}}{Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_f} \quad (153)$$

$$V_b = V_{th_b} - \frac{Z_0 + a^2 Z_1 + a Z_2}{Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_f} V_{th_a} \quad (154)$$

$$V_c = V_{th_c} - \frac{Z_0 + a Z_1 + a^2 Z_2}{Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_f} V_{th_a} \quad (155)$$

Dans le cas d'un réseau équilibré et si on assume une impédance de défaut  $Z_f = 0$ , on obtient à partir de l'équation (153):

$$I_a = \frac{3V_{th_a}}{Z_0 + 2Z_1} \quad (156)$$

Si on assume que le réseau soumis au défaut est découplé (pas de couplage entre les phases), alors le courant de défaut monophasé devient:

$$I_a = \frac{V_{th_a}}{Z_1} \quad (157)$$

#### 5.4.2 Calcul de courant de court-circuit triphasé

Dans le cas d'un défaul triphasé il s'agit d'un défaut équilibré et donc le courant de défaut est calculé par:

$$I_a = \frac{V_{th_a}}{Z_1 + Z_f} \quad (158)$$

Un défaut triphasé est un défaut équilibré et aussi appelé un défaut solide. Ce type de défaut est plutôt rare dans les réseaux électriques, mais permet en général de calculer le courant de court-circuit maximal et donc d'établir les limites d'opération des disjoncteurs.

Les défauts de type phase-terre ou biphasé sont des défauts déséquilibrés. Les défauts déséquilibrés sont plus fréquents. Sous certaines conditions ces défauts peuvent dépasser le courant de défaut triphasé équilibré.

#### 5.4.3 Calcul de courant de court-circuit biphasé

Dans le cas d'un défaul biphasé (phases b et c) on peut écrire les conditions suivantes au point de défaut:

$$I_b = -I_c \quad (159)$$

$$I_a = 0 \quad (160)$$

Selon l'équation (115)

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_b \\ -I_b \end{bmatrix} \quad (161)$$

et donc

$$I_0 = 0 \quad (162)$$

$$I_1 = -I_2 \quad (163)$$

$$V_0 = 0 \quad (164)$$

Selon l'équation (111)

$$V_b - V_c = (a^2 - a)(V_1 - V_2) \quad (165)$$

Selon l'équation (114)



$$I_b Z_f = (a^2 I_1 + a I_2) Z_f = (a^2 - a) I_1 Z_f = (a^2 - a)(V_1 - V_2) \quad (166)$$

Finalement à partir de cette dernière équation

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{Z_f} = \frac{V_{th_a} - Z_1 I_1 + I_2 Z_2}{Z_f} \quad (167)$$

et

$$I_1 = \frac{V_{th_a}}{Z_f + Z_1 + Z_2} \quad (168)$$

Pour ce qui est du courant de la phase b:

$$I_b = \frac{(a^2 - a) V_{th_a}}{Z_f + Z_1 + Z_2} \quad (169)$$

#### 5.4.4 Calcul de courant de court-circuit biphasé-terre

L'approche matricielle est plus simple à appliquer et permet de calculer de façon automatique.

Dans ce cas si le défaut est entre les phases b, c et la terre, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ V_{th_1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & & \\ & Z_1 & \\ & & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (170)$$

où  $V_{th_1} = V_{th_a}$ . L'équation précédente peut être réécrite comme suit

$$\begin{bmatrix} 0 \\ V_{th_1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & & \\ & Z_1 & \\ & & Z_2 \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (171)$$

Les manipulations algébriques permettent d'obtenir

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3V_{th_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2Z_f + Z_0 & 2Z_f + Z_0 \\ 1 & aZ_f + a^2Z_f + aZ_1 & aZ_f + a^2Z_f + a^2Z_1 \\ 1 & a^2Z_f + aZ_f + a^2Z_2 & a^2Z_f + aZ_f + aZ_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (172)$$

Cette équation permet de calculer les courants de court-circuit et la tension de la phase saine.

#### 5.5. Utilisation du circuit de séquence directe

On peut démontrer qu'il est acceptable d'utiliser le circuit de séquence directe pour analyser un réseau équilibré. Soit le réseau de Figure 26. La tension de la source (au point K) est donnée par le vecteur  $\mathbf{V}_{th}$ , l'impédance de la ligne est la matrice  $\mathbf{Z}_{line}$ , la tension au point M est donnée par le vecteur  $\mathbf{V}_{abc}$  et le courant sortant de la ligne au point M est représenté par le vecteur  $\mathbf{I}_M$ . On peut écrire

$$\mathbf{V}_{th} - \mathbf{Z}_{line} \mathbf{I}_M = \mathbf{V}_{abc} \quad (173)$$

et en appliquant la matrice de transformation de Fortescue:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}_{th} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z}_{line} \mathbf{A} \mathbf{I}_{M012} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}_{abc} \quad (174)$$

$$\mathbf{V}_{th012} - \mathbf{Z}_{line012} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}_{Mabc} = \mathbf{V}_{012} \quad (175)$$

Cette équation permet d'écrire pour la séquence directe :

$$V_{th_1} - Z_{line_1} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M_a} \\ a^2 I_{M_a} \\ a I_{M_a} \end{bmatrix} = V_1 \quad (176)$$

et par conséquent

$$V_{th_1} - Z_{line_1} I_{M_a} = V_1 \quad (177)$$

On sait que la matrice  $\mathbf{Z}_{\text{line}}$  est composée d'un terme propre  $\mathbf{Z}_{\text{lineS}}$  et d'un terme mutuel  $\mathbf{Z}_{\text{lineM}}$ , et par conséquent l'équation (177) devient

$$V_{th1} - (\mathbf{Z}_{\text{lineS}} - \mathbf{Z}_{\text{lineM}})I_{M_a} = V_1 \quad (178)$$

Selon l'équation (173)

$$V_{th_a} - \mathbf{Z}_S I_{M_a} - \mathbf{Z}_M I_{M_b} - \mathbf{Z}_M I_{M_c} = V_1 \quad (179)$$

$$V_{th_a} - \mathbf{Z}_S I_{M_a} - \mathbf{Z}_M a^2 I_{M_a} - \mathbf{Z}_M a I_{M_a} = V_1 \quad (180)$$

Cette dernière peut être simplifiée pour donner

$$V_{th_a} - (\mathbf{Z}_{\text{lineS}} - \mathbf{Z}_{\text{lineM}})I_{M_a} = V_1 \quad (181)$$

ce qui est identique à (177).



Figure 26 Réseau simple équilibré

## 5.6. Courants de court-circuit en régime transitoire

Ces calculs de courant de court-circuit sont effectués en régime permanent, mais en réalité le courant de court-circuit possède une composante transitoire. L'approche simplifiée permettant d'expliquer le contenu transitoire est obtenue de l'équation (45) pour un courant de court-circuit  $i(t)$  :

$$i(t) = I_m [\sin(\omega t + \theta - \varphi)] - I_m \left[ \sin(\theta - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad (182)$$

avec

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \quad (183)$$

Le deuxième terme de l'équation (182) représente la partie transitoire. Dans les réseaux électriques  $\omega L \gg R$  ( $X \gg R$ ). Une machine synchrone de 100 MVA avec un facteur de puissance de 0.85 peut avoir un rapport  $X/R$  de 110. Un transformateur de même puissance a un rapport  $X/R$  typique de 45. Dans les réseaux de basse tension le rapport  $X/R$  devient beaucoup plus petit et peut être plus bas que 10. Le rapport  $X/R$  peut être utilisé pour estimer, par exemple, le courant crête qui traverse un disjoncteur au moment du défaut.

L'angle  $\theta$  permet ici de représenter l'instant du défaut. Dans le réseau triphasé les courants sont décalés de  $120^\circ$  et auront par conséquent des asymétries différentes.

## 5.7. Équivalent de réseau

On utilise les courants et puissances de court-circuit pour identifier des équivalents de réseau à un point d'interconnexion. Si on assume un réseau équilibré, alors l'équation (158) permet de calculer le courant de court-circuit triphasé et l'équation (156) indique le courant de court-circuit monophasé de l'équivalent Thevenin du réseau:

$$I_{\text{court-circuit-tri}} = \frac{V_{th_a}}{Z_1} \quad (184)$$

$$I_{\text{court-circuit-mono}} = \frac{3 V_{th_a}}{Z_0 + 2Z_1} \quad (185)$$

Les puissances de court-circuit correspondantes sont données par:

$$S_{\text{court-circuit-tri}} = 3 \frac{(V_{th_a})^2}{Z_1^*} = \frac{(V_{LL})^2}{Z_1^*} \quad (186)$$

$$S_{\text{court-circuit-mono}} = 9 \frac{(V_{th_a})^2}{2Z_1^* + Z_0^*} = 3 \frac{(V_{LL})^2}{2Z_1^* + Z_0^*} \quad (187)$$

où  $V_{LL} = \sqrt{3} V_{th_a}$ .

On peut calculer la puissance de court-circuit en utilisant la tension nominale:

$$|S_{\text{court-circuit-tri}}| = \sqrt{3} |V_{LL_{nom}}| |I_{\text{court-circuit-tri}}| \quad (188)$$

Selon l'équation (83) et le fait que  $|V_{LL_{nom}}| = V_B$  (tension de base), la conversion en pu de cette équation donne

$$|S_{\text{court-circuit-tri}_{pu}}| = |I_{\text{court-circuit-tri}_{pu}}| \quad (189)$$

Pour estimer l'influence d'un système à courant alternatif sur l'interaction avec un équipement interconnecté (convertisseur à courant continu, par exemple), on utilise le rapport de court-circuit ou Short-Circuit Ratio (SCR) en anglais:

$$SCR = \frac{S_{\text{court-circuit}_{ca}}}{P_{\text{nom}_{\text{convertisseur}}}} \quad (190)$$

Dans cette équation  $S_{\text{court-circuit}_{ca}}$  représente le module de la puissance de court-circuit du réseau ca obtenu de l'équation (186) en MVA et  $P_{\text{nom}_{\text{convertisseur}}}$  est la puissance nominale du convertisseur en MW.

Le calcul de SCR peut tenir compte des filtres et autres équipements ca associés au convertisseur et dans quel cas on parle de ESCR pour 'effective short-circuit ratio'. Un système qui possède un  $ESCR > 5$  est considéré comme fort et un système avec  $ESCR < 3$  est considéré comme faible.

## 5.8. Transformation de Fortescue, 'power invariant'

Dans cette version la matrice de transformation utilisée est :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (191)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (192)$$

On note que :

$$\mathbf{A}^{*t} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{-1} \quad (193)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{1} \quad (194)$$

Le calcul de puissance devient donc :

$$S = \mathbf{V}_{abc}^t \mathbf{I}_{abc}^* = \mathbf{V}_{012}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A}^* \mathbf{I}_{012}^* = \mathbf{V}_{012}^t \mathbf{I}_{012}^* = V_0 I_0^* + V_1 I_1^* + V_2 I_2^* \quad (195)$$

## 5.9. Transformations réelles

La forme générale d'une transformation modale est donnée par :

$$\mathbf{x}_{012} = \mathbf{T}_{012} \mathbf{x}_{abc} \quad (196)$$

ou pour un nombre arbitraire de modes :

$$\mathbf{x}_{\text{mode}} = \mathbf{T}_m^{-1} \mathbf{x}_{\text{phase}} \quad (197)$$

La transformation inverse est donnée par :

$$\mathbf{x}_{abc} = \mathbf{T}_{012}^{-1} \mathbf{x}_{012} \quad (198)$$

ou

$$\mathbf{x}_{\text{phase}} = \mathbf{T}_m \mathbf{x}_{\text{modal}} \quad (199)$$

Donc une matrice qui représente la relation entre les quantités dans le domaine modal peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{Z}_{\text{modal}} = \mathbf{T}_m^{-1} \mathbf{Z}_{\text{phase}} \mathbf{T}_m \quad (200)$$

### 5.9.1 Transformation réelle de Clarke

L'utilisation de matrices complexes est problématique dans le domaine du temps. Pour éviter des problèmes de convolution la diagonalisation peut se faire avec des matrices réelles. La transformation de Clarke ou  $\alpha\beta 0$  est donnée par :

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad (201)$$

Donc :

$$\mathbf{Z}_{012} = \mathbf{T}_3^{-1} \mathbf{Z}_{\text{phase}} \mathbf{T}_3 \quad (202)$$

Dans le cas général d'une ligne m-phase on peut écrire :

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{m(m-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{m(m-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdots & \frac{-(j-1)}{\sqrt{j(j-1)}} & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{-(m-1)}{\sqrt{m(m-1)}} \end{bmatrix} \quad (203)$$

Il faut noter que  $\mathbf{T}_m$  est orthogonal :

$$\mathbf{T}_m^{-1} = \mathbf{T}_m^t \quad (204)$$

### 5.9.2 Transformation pour une ligne de transport biterne (double-circuit)

Le cas d'une ligne biterne requiert l'utilisation d'une matrice de transformation particulière. Une ligne biterne est composée de 2 lignes triphasées équilibrées et peut être modélisée par la matrice :

$$\mathbf{Z}_d = \begin{bmatrix} Z_S & Z_M & Z_M & Z_P & Z_P & Z_P \\ Z_M & Z_S & Z_M & Z_P & Z_P & Z_P \\ Z_M & Z_M & Z_S & Z_P & Z_P & Z_P \\ Z_P & Z_P & Z_P & Z_S & Z_M & Z_M \\ Z_P & Z_P & Z_P & Z_M & Z_S & Z_M \\ Z_P & Z_P & Z_P & Z_M & Z_M & Z_S \end{bmatrix} \quad (205)$$

La version diagonalisée de cette matrice est donnée par :

$$\hat{\mathbf{Z}}_d = \begin{bmatrix} Z_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{IL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_L \end{bmatrix} \quad (206)$$

avec :

$$Z_G = Z_S + 2Z_M + 3Z_P = Z_0 + Z_{0C} \quad (207)$$

$$Z_{IL} = Z_S + 2Z_M - 3Z_P = Z_0 - Z_{0C} \quad (208)$$

$$Z_L = Z_S - Z_M = Z_+ \quad (209)$$

$Z_{0C}$  est le mode de couplage de séquence homopolaire entre les 2 lignes. La transformation en sens inverse est obtenue à partir de :

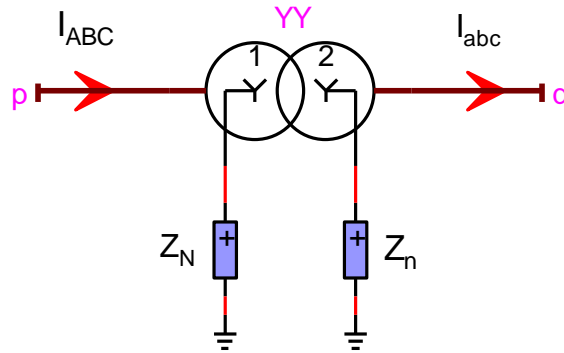
$$Z_M = \frac{Z_G + Z_{IL} - 2Z_L}{6} \quad (210)$$

$$Z_S = \frac{Z_G + Z_{IL} + 4Z_L}{6} \quad (211)$$

$$Z_P = \frac{Z_G - Z_{IL}}{6} \quad (212)$$

## 5.10. Impédances de séquence des transformateurs

Le calcul des impédances de séquence et par le fait même des circuits de séquence, est effectué en appliquant des injections de courant de séquence selon la séquence requise. Dans le cas du transformateur de la Figure 27, le calcul de l'impédance de séquence directe est assez simple car l'injection de trois courants de séquence directe ne cause aucune élévation de tension dans les impédances de neutre. Si on ramène les impédances de fuite des unités monophasées au primaire, alors l'impédance de séquence directe en pu devient  $Z_1 = Z_{pq}$  (p étant le côté de l'enroulement 1 et q étant le côté de l'enroulement 2). Le même calcul s'applique à l'impédance de séquence inverse :  $Z_2 = Z_{pq}$ .



**Figure 27 Transformateur de connexion Y-Y de rapport de transformation m : 1**

Pour ce qui est de l'impédance de séquence homopolaire, il suffit d'injecter 3 courants de séquence homopolaire du côté p et de court-circuiter l'enroulement q. L'impédance  $Z_{pq}$  des unités monophasées est modélisé au primaire. Les équations requises sont :

$$V'_{A_0} = V_{AN_0} + 3Z_N I_{A_0} \quad (213)$$

$$V_{a_0} = 0 = V_{an_0} - 3Z_n I_{a_0} = \frac{1}{m} V_{AN_0} - 3mZ_n I_{A_0} \quad (214)$$

$$0 = V_{AN_0} - 3m^2 Z_n I_{A_0} \quad (215)$$

La substitution de l'équation (215) dans l'équation (213) résulte dans :

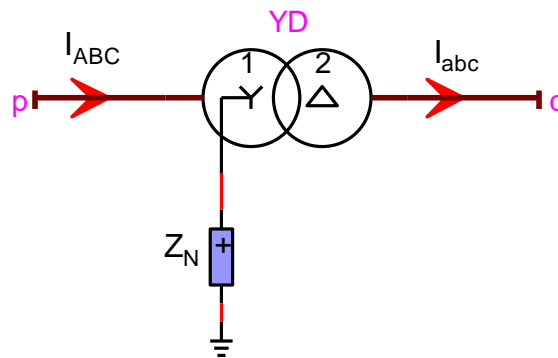
$$V'_{A_0} = (3m^2 Z_n + 3Z_N) I_{A_0} \quad (216)$$

Si on ajoute l'impédance  $Z_{pq}$  pour remonter à la tension  $V_{A_0}$  (avant l'impédance) alors l'impédance totale en pu devient :

$$Z_0 = Z_{pq} + 3Z_n + 3Z_N \quad (217)$$

Le terme  $m^2$  est éliminé durant la conversion en pu.

Pour le cas d'un transformateur de configuration Y-Delta les calculs doivent tenir compte du déphasage entre le primaire et le secondaire.



**Figure 28 Transformateur de connexion Y-Delta de rapport de transformation  $m : 1$**

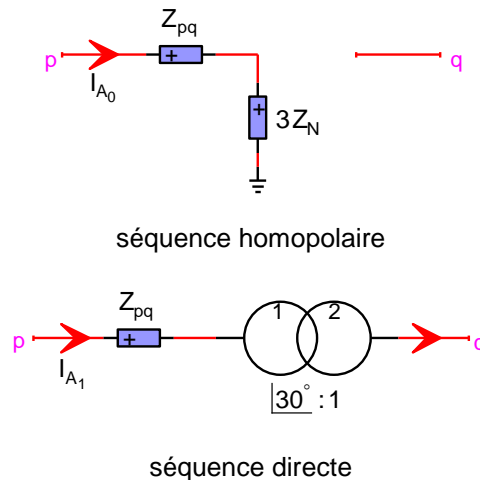
Les équations pour chacune des séquences deviennent :

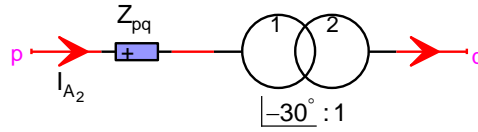
$$V'_{A_0} - 3Z_N I_{A_0} = m V_{ab_0} = 0 \quad (218)$$

$$V'_{A_1} = m V_{ab_1} = m\sqrt{3} \angle 30^\circ V_{a_1} \quad (219)$$

$$V'_{A_2} = m V_{ab_2} = m\sqrt{3} \angle -30^\circ V_{a_2} \quad (220)$$

Les 3 circuits de séquence qui en résultent sont présentés à la Figure 29. Il est à noter que la conversion en pu élimine les termes  $m\sqrt{3}$ .





séquence inverse

Figure 29 Les 3 circuits de séquence (en pu) du transformateur de la Figure 28.

### 5.11. Impédances de séquences d'une machine synchrone

Dans le cas d'une machine synchrone on peut démontrer que sa matrice d'impédance est de forme circulaire :

$$Z = \begin{bmatrix} Z_k & Z_m & Z_n \\ Z_n & Z_k & Z_m \\ Z_m & Z_n & Z_k \end{bmatrix} \quad (221)$$

La diagonalisation d'une telle matrice crée 3 impédances de séquence distinctes.

### 5.12. Relation entre les harmoniques et les séquences

Supposons une tension de séquence directe, d'amplitude  $A_1$  et de fréquence fondamentale  $\omega_1$  décrite par

$$v_{a_1} = A_1 \cos(\omega_1 t) \quad (222)$$

$$v_{b_1} = A_1 \cos \left[ \omega_1 \left( t - \frac{2\pi}{3\omega_1} \right) \right] \quad (223)$$

$$v_{c_1} = A_1 \cos \left[ \omega_1 \left( t + \frac{2\pi}{3\omega_1} \right) \right] \quad (224)$$

La tension de séquence inverse de deuxième harmonique est alors donnée par :

$$v_{a_2} = A_2 \cos(2\omega_1 t + \phi_2) \quad (225)$$

$$v_{b_2} = A_2 \cos \left[ 2\omega_1 \left( t - \frac{2\pi}{3\omega_1} \right) + \phi_2 \right] = A_2 \cos \left( 2\omega_1 t + \frac{2\pi}{3} + \phi_2 \right) \quad (226)$$

$$v_{c_2} = A_2 \cos \left[ 2\omega_1 \left( t + \frac{2\pi}{3\omega_1} \right) + \phi_2 \right] = A_2 \cos \left( 2\omega_1 t - \frac{2\pi}{3} + \phi_2 \right) \quad (227)$$

La tension de séquence homopolaire de troisième harmonique est alors donnée par :

$$v_{a_3} = A_3 \cos(3\omega_1 t + \phi_3) \quad (228)$$

$$v_{b_3} = A_3 \cos \left[ 3\omega_1 \left( t - \frac{2\pi}{3\omega_1} \right) + \phi_3 \right] = A_3 \cos(3\omega_1 t + \phi_3) \quad (229)$$

$$v_{c_3} = A_3 \cos \left[ 3\omega_1 \left( t + \frac{2\pi}{3\omega_1} \right) + \phi_3 \right] = A_3 \cos(3\omega_1 t + \phi_3) \quad (230)$$

On peut écrire de façon générale pour l'harmonique de rang  $n$ :

$$v_{a_n} = A_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n) \quad (231)$$

$$v_{b_n} = A_n \cos \left( n\omega_1 t - \frac{2n\pi}{3} + \phi_n \right) \quad (232)$$

$$v_{c_3} = A_n \cos\left(n\omega_1 t + \frac{2n\pi}{3} + \phi_n\right) \quad (233)$$

## 6. Transformation qd0

Changement de variable qui formule des variables triphasées à un référentiel arbitraire.

De façon générique :

$$\mathbf{f}_{qd0} = \mathbf{K} \mathbf{f}_{abc} \quad (234)$$

$$\mathbf{K} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin \theta & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (235)$$

avec :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (236)$$

$$\theta = \int \omega dt = \int_0^t \omega(\xi) d\xi + \theta(0) \quad (237)$$

L'angle  $\theta$  est l'angle entre l'axe q et la phase a (voir Figure 30). Si  $\theta = 0$  :

$$\mathbf{K}|_{\theta=0} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (238)$$

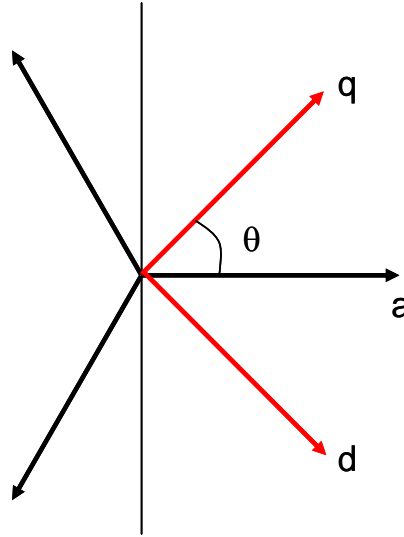
L'inverse de la matrice de l'équation (235) est donnée par :

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (239)$$

La puissance instantanée est donnée par :

$$p(t) = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \frac{3}{2} (v_q i_q + v_d i_d + 2v_0 i_0) \quad (240)$$





**Figure 30 Transformation qd0**

De façon générale si  $x$  est le référentiel des variables transformées et  $y$  le référentiel de la transformation :

$$\mathbf{f}_{qd0}^y = {}^x\mathbf{K}^y \mathbf{f}_{abc}^x \quad (241)$$

$$\mathbf{f}_{qd0}^x = \mathbf{K}^x \mathbf{f}_{abc} \quad (242)$$

$$\mathbf{f}_{qd0}^y = {}^x\mathbf{K}^y \mathbf{K}^x \mathbf{f}_{abc} \quad (243)$$

$$\mathbf{f}_{qd0}^y = \mathbf{K}^y \mathbf{f}_{abc} \quad (244)$$

$${}^x\mathbf{K}^y = \mathbf{K}^y (\mathbf{K}^x)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y - \theta_x) & -\sin(\theta_y - \theta_x) & 0 \\ \sin(\theta_y - \theta_x) & \cos(\theta_y - \theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (245)$$

Pour un système triphasé arbitraire à la fréquence  $\omega_e$  :

$$\begin{aligned} f_a &= \sqrt{2}F \cos(\omega_e t + \theta_e(0)) \\ f_b &= \sqrt{2}F \cos\left(\omega_e t + \theta_e(0) - \frac{2\pi}{3}\right) \\ f_c &= \sqrt{2}F \cos\left(\omega_e t + \theta_e(0) + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (246)$$

la transformation donne :

$$\begin{aligned} F_q &= \sqrt{2}F \cos((\omega_e - \omega)t + \theta_e(0) - \theta(0)) \\ F_d &= -\sqrt{2}F \sin((\omega_e - \omega)t + \theta_e(0) - \theta(0)) \end{aligned} \quad (247)$$

En utilisant la notation des phaseurs :

$$\tilde{F}_a = F e^{j\theta_e(0)} \quad (248)$$

$$\tilde{F}_q = F e^{j(\theta_e(0) - \theta(0))} \quad (249)$$

$$\tilde{F}_d = j\tilde{F}_q \quad (250)$$

Si  $\theta(0) = 0$  :

$$\tilde{F}_a = \tilde{F}_q \quad (251)$$

Si  $\theta(0) = 0$  et  $\omega = \omega_e$  :

$$F_q = \sqrt{2}F \cos(\theta_e(0)) \quad (252)$$

$$F_d = -\sqrt{2}F \sin(\theta_e(0))$$

$$\sqrt{2}\tilde{F}_a = F_q - jF_d \quad (253)$$

## 7. Transmission de puissance

### 7.1. Modèle simple de la ligne de transport

En se référant à la Figure 31 on peut écrire les équations suivantes pour les puissances à la réception R et à la source. On assume un déphasage  $\delta$  entre la source et la réception ( $\tilde{E}_S = E_S \angle \delta$  et  $\tilde{E}_R = E_R \angle 0$ ). Les phaseurs sont désignés par le tilde. Du côté de la réception :

$$\tilde{S}_R = \tilde{E}_R \tilde{I}^* = \tilde{E}_R \left[ \frac{\tilde{E}_S - \tilde{E}_R}{jX} \right]^* = \tilde{E}_R \left[ \frac{E_S \cos \delta + jE_S \sin \delta - \tilde{E}_R}{jX} \right]^* \quad (254)$$

On peut noter que les résultats seront les mêmes avec  $\tilde{E}_S = E_S \angle 0$  et  $\tilde{E}_R = E_R \angle -\delta$ .

À partir de l'équation (254) on peut écrire les équations de puissance :

$$P_R = \frac{E_S E_R}{X} \sin \delta \quad (255)$$

$$Q_R = \frac{E_S E_R \cos \delta - E_R^2}{X} \quad (256)$$

Du côté de la source :

$$P_S = \frac{E_S E_R}{X} \sin \delta \quad (257)$$

$$Q_S = \frac{E_S^2 - E_S E_R \cos \delta}{X} \quad (258)$$

$$Q_S - Q_R = \frac{E_S^2 + E_R^2 - 2E_S E_R \cos \delta}{X} = X I^2 \quad (259)$$

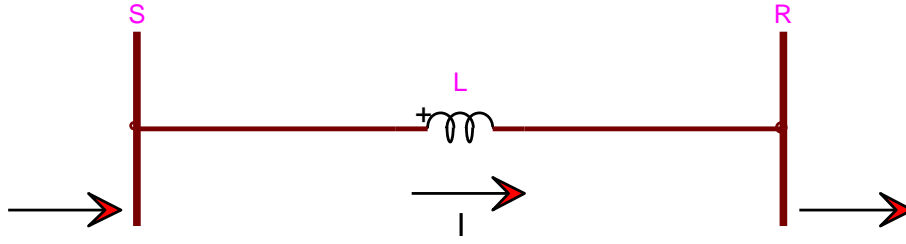
Notons que le courant à la réception est connu en utilisant  $P_R$  et  $Q_R$  :

$$\tilde{I}^* \tilde{I} = \frac{P_R + jQ_R}{\tilde{E}_R} \left[ \frac{P_R + jQ_R}{\tilde{E}_R} \right]^* = I^2 = \frac{P_R^2 + Q_R^2}{E_R^2} \quad (260)$$

Ce qui permet d'écrire pour les pertes sur la ligne (dans le cas où  $R \neq 0$ ) :

$$Q_p = X I^2 = X \frac{P_R^2 + Q_R^2}{E_R^2} \quad (261)$$

$$P_p = R I^2 = R \frac{P_R^2 + Q_R^2}{E_R^2} \quad (262)$$



**Figure 31 Transfert de puissance entre 2 points pour une ligne inductive**

Si l'angle  $\delta = 0$  (pas de déphasage entre les 2 tensions) , alors les équations précédentes donnent :

$$P_R = 0 \quad (263)$$

$$Q_R = \frac{E_R (E_S - E_R)}{X} \quad (264)$$

$$Q_S = \frac{E_S (E_S - E_R)}{X} \quad (265)$$

$$Q_S - Q_R = \frac{(E_S - E_R)^2}{X} = X I^2 \quad (266)$$

Si on pose  $E_S > E_R$  alors  $Q_S > 0$  et  $Q_R > 0$  . Ce qui signifie un transfert de puissance réactive de la source vers la réception. Dans ce cas le courant  $\tilde{I}$  est en retard sur la tension.

Si on pose  $E_S < E_R$  alors  $Q_S < 0$  et  $Q_R < 0$  . Ce qui signifie un transfert de puissance réactive de la réception vers la source. Dans ce cas le courant  $I$  est en avance sur la tension.

Si l'angle  $\delta \neq 0$  et  $E_S = E_R = E$  on obtient :

$$P_S = P_R = \frac{E^2}{X} \sin \delta \quad (267)$$

$$Q_S = -Q_R = \frac{E^2}{X} (1 - \cos \delta) = \frac{1}{2} X I^2 \quad (268)$$

Si  $\delta > 0$  alors la puissance  $P$  circule de la source à la réception.

Si  $\delta < 0$  alors la puissance  $P$  circule de la réception vers la source.

La source et la réception fournissent la moitié de la puissance réactive sur la ligne.

La tension de la source est reliée à la tension de réception par l'équation suivante :

$$\tilde{E}_S = \tilde{E}_R + jX\tilde{I} = \tilde{E}_R + jX \frac{P_R - jQ_R}{\tilde{E}_R^*} \quad (269)$$

Supposons que le facteur de puissance de la charge est  $\cos \phi$  et que la tension de source est

$\tilde{E}_S = E_S \underline{0}$  (tension de base) :

$$\tilde{E}_{R_{pu}}^* = E_{R_{pu}}^2 + j \frac{P_R - jQ_R}{\frac{E_S^2}{2X}} = E_{R_{pu}}^2 + \frac{1}{2} P_{R_{pu}} \tan \phi + j \frac{1}{2} P_{R_{pu}} = E_{R_{pu}}^2 + \frac{1}{2} Q_{R_{pu}} + j \frac{1}{2} P_{R_{pu}} \quad (270)$$

Donc :

$$E_{R_{pu}}^2 = \left( E_{R_{pu}}^2 + \frac{1}{2} Q_{R_{pu}} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} P_{R_{pu}} \right)^2 \quad (271)$$

La puissance de base a été choisie comme étant :  $\frac{E_S^2}{2X}$ . Cette puissance correspond à la puissance maximale transmissible pour un facteur de puissance unitaire. Elle est obtenue en remarquant que pour une charge d'impédance  $\tilde{Z}_L = Z_L \angle \phi$  :

$$I = \frac{E_S}{\sqrt{(Z_L \cos \phi)^2 + (X + Z_L \sin \phi)^2}} = \frac{E_S}{X \sqrt{1 + \frac{Z_L^2}{X^2} + 2 \frac{Z_L}{X} \sin \phi}} \quad (272)$$

$$E_R = Z_L I = \frac{Z_L}{X} \frac{E_S}{\sqrt{1 + \frac{Z_L^2}{X^2} + 2 \frac{Z_L}{X} \sin \phi}} \quad (273)$$

$$P_R = E_R I \cos \phi = Z_L I^2 \cos \phi = Z_L \frac{E_S^2}{(Z_L \cos \phi)^2 + (X + Z_L \sin \phi)^2} \cos \phi = Z_L \frac{E_S^2}{X^2 \left( 1 + \frac{Z_L^2}{X^2} + 2 \frac{Z_L}{X} \sin \phi \right)} \cos \phi \quad (274)$$

À partir de cette équation on peut poser pour  $\phi = 0$  :

$$P_{R_{\max}} = \frac{E_S^2}{2X} \quad (275)$$

La division de l'équation (274) par (275) donne :

$$P_{R_{pu}} = \frac{Z_L}{X} \frac{2}{\left( 1 + \frac{Z_L^2}{X^2} + 2 \frac{Z_L}{X} \sin \phi \right)} \cos \phi \quad (276)$$

La solution de l'équation (270) pour différentes valeurs de puissance et facteurs de puissance est présentée à la Figure 32.

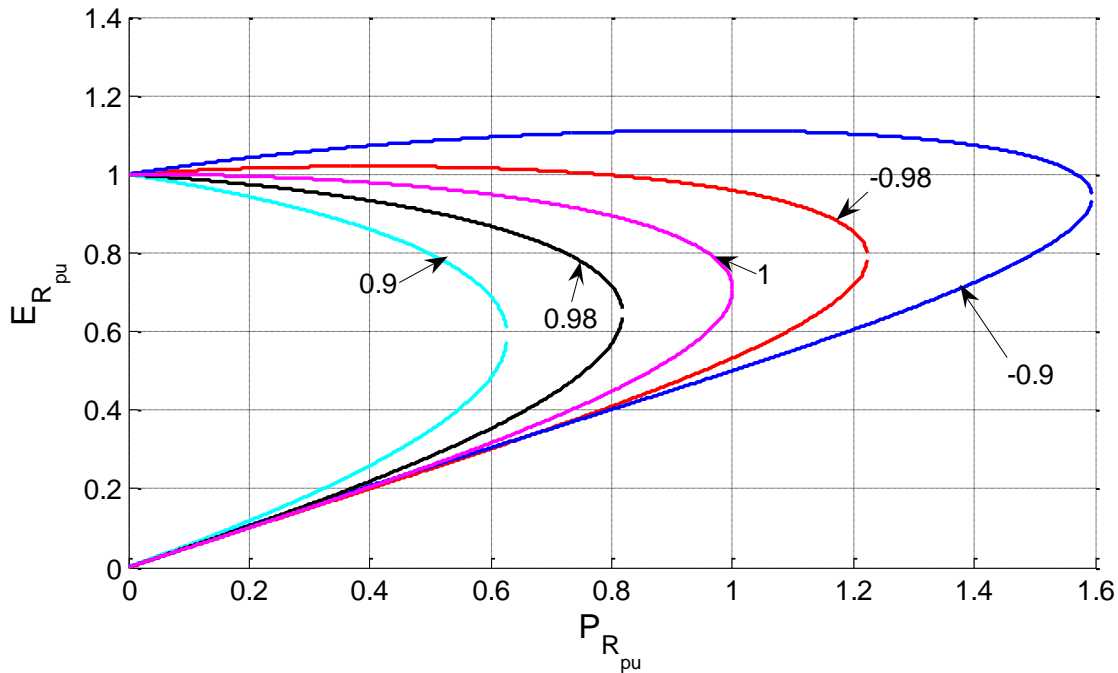


Figure 32 Tension de réception en fonction de la puissance pour différents facteurs de puissance

On constate ici qu'il existe des points d'opération instables.

Les courbes de la Figure 33 sont obtenues à partir de l'équation (270).

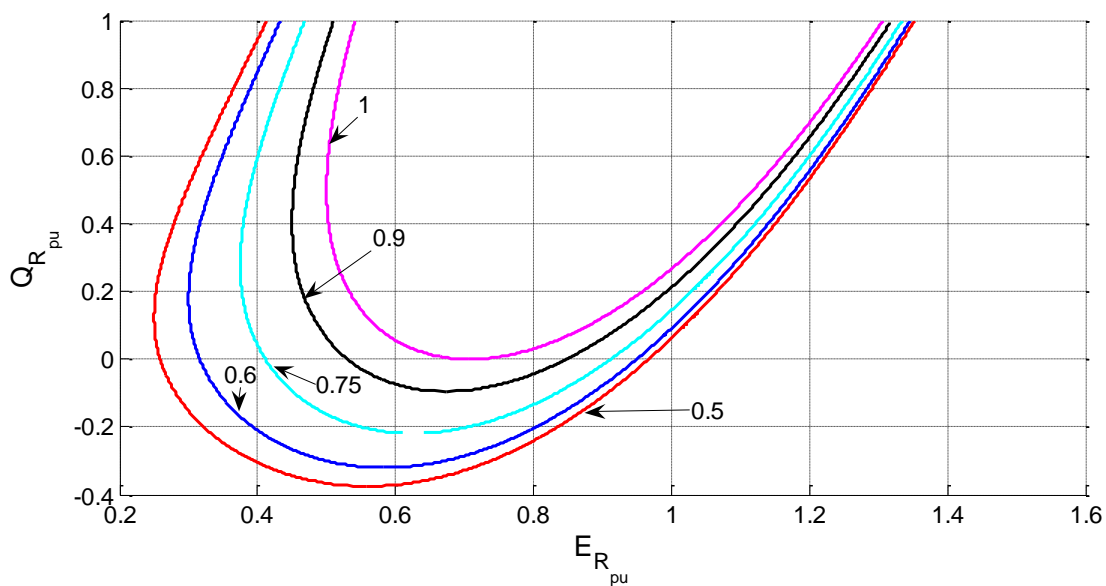
Les limites de stabilité de tension sont obtenues quand la dérivée de  $Q_R$  par rapport à  $E_R$  devient zéro.

Les points à gauche de cette condition sont des points instables. Le système est stable dans la région

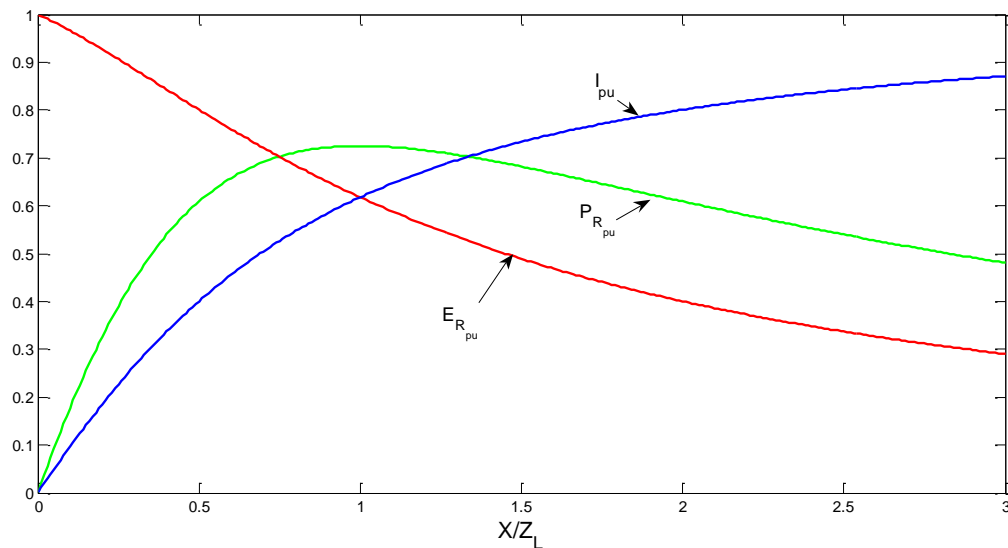
$$\frac{\partial Q_R}{\partial E_R} > 0 \quad (277)$$

La limite de la stabilité de tension est atteinte quand la différentielle est nulle. On réalise que cette condition est liée à la modélisation de charge.

Les courbes de la Figure 34 sont obtenues à partir des équations (272), (273) et (276). Les quantités sont en pu.



**Figure 33 Puissance réactive injectée à la réception en fonction de la tension pour différentes valeurs de  $P_R / P_{R_{max}}$**



**Figure 34 Tension, puissance et courant de charge en fonction de l'accroissement de charge**

## 7.2. Exemple de calcul de tension avec contrainte de charge PQ

Une ligne (voir Figure 35) de 200 km est alimentée par une source de tension idéale de 230 kV (RMS, ligne-ligne). Les données de la ligne sont :

$R' = 0.0243404 \Omega/\text{km}$ ,  $L' = 0.9238 \text{ mH}/\text{km}$ ,  $C' = 0.0126 \mu\text{F}/\text{km}$ .

La charge est de 90 MW et 10 Mvars.

Le premier objectif est de calculer la tension (module et phase) à la barre R en utilisant un modèle (approximatif) de charge à la tension nominale. Il faut d'abord calculer le modèle équivalent de la charge et appliquer un diviseur de tension :

```
Vnom=230e03/sqrt(3);
Rcharge=Vnom^2/90e06; %P power at nominal voltage
Xcharge=j*Vnom^2/10e06; %Q power at nominal voltage
Zcharge=Rcharge*Xcharge/(Rcharge+Xcharge);
Len=200;
Zs=0.024304*Len+j*2*pi*60*0.9238e-03*Len;
Zg=1/(j*2*pi*60*0.0126e-06/2*Len); %line shunt capacitor

Zpara=Zg*Zcharge/(Zg+Zcharge); %line shunt and load
Vcharge=Vnom*Zpara/(Zpara+Zs);
[Vm,Vp]=r2p(Vcharge);
```

Ce qui donne la tension en kV (valeur efficace) et en degrés le phaseur :  $121.755 \text{ kV} \angle -18.99898^\circ$

La tension de la source (phase-terre) est 132.791 kV. Donc cette tension correspond à 0.92 pu, ce qui est en dessous de la limite acceptable de 0.95 pu.

Le deuxième objectif est de calculer la tension à la réception R sans appliquer un modèle approximatif de charge.

Il faut d'abord établir l'équation équivalente en tenant compte de la puissance  $S$  à la réception ( $S = P + jQ$ ). Si la ligne a une impédance série totale de  $R + jX$ , alors en utilisant le tilde pour distinguer les phaseurs des modules, on obtient :

$$\tilde{V}_S = \left[ \tilde{V}_R Y_{\text{shunt}} + \frac{S^*}{\tilde{V}_R} \right] [R + jX] + \tilde{V}_R$$

$$\tilde{V}_S \tilde{V}_R^* = \left[ V_R^2 Y_{\text{shunt}} + S^* \right] [R + jX] + V_R^2$$

$$Y_{\text{shunt}} = jB = j\omega \frac{C}{2}$$

$$\tilde{V}_S \tilde{V}_R^* = \left[ V_R^2 jB + P - jQ \right] [R + jX] + V_R^2 = V_R^2 jBR - V_R^2 BX + PR + jPX - jQR + QX + V_R^2$$

$$\tilde{V}_S \tilde{V}_R^* = PR - V_R^2 BX + QX + V_R^2 + V_R^2 jBR + jPX - jQR$$

$$\tilde{V}_R^* = \frac{PR + V_R^2 (1 - BX) + QX}{\tilde{V}_S} + \frac{V_R^2 jBR + jPX - jQR}{\tilde{V}_S}$$

$$V_R^2 = \left[ \frac{PR + V_R^2 (1 - BX) + QX}{\tilde{V}_S} \right]^2 + \left[ \frac{V_R^2 BR + PX - QR}{\tilde{V}_S} \right]^2$$

Supposons que  $x = V_R^2$ ,  $x$  sera une solution positive.

$$x = \left[ \frac{x(1 - BX) + (PR + QX)}{\tilde{V}_S} \right]^2 + \left[ \frac{xBR + (PX - QR)}{\tilde{V}_S} \right]^2$$

$$x \tilde{V}_S^2 = x^2 (1 - BX)^2 + 2(1 - BX)(PR + QX)x + (PR + QX)^2 + x^2 (BR)^2 + 2BR(PX - QR)x + (PX - QR)^2$$

$$x^2 \left[ (1 - BX)^2 + (BR)^2 \right] + \left[ 2(1 - BX)(PR + QX) + 2BR(PX - QR) - \tilde{V}_S^2 \right] x + (PR + QX)^2 + (PX - QR)^2 = 0$$

Il s'agit d'une équation de deuxième ordre qui a 2 solutions. La solution permet de trouver la tension à le module de la tension à la réception. Le phaseur peut complet peut être calculé en appliquant :

$$\tilde{V}_R = \frac{\left\{ \left[ V_R^2 Y_{\text{shunt}} + S^* \right] [R + jX] + V_R^2 \right\}^*}{(\tilde{V}_S)^*}$$

Le code utilisé pour le calcul est donné par :

```
%Solving a system with PI section with actual PQ constraints
w=2*pi*60;

C=0.0126e-06;
L=.9238e-03;
R=.0243404;

Yshunt=j*w*C*100;
Zserie=(R+j*w*L)*200;

Vs=230e03/sqrt(3);
%_Load:
P=90e06;
Q=10e06; %adjust accordingly

X=imag(Zserie); R=real(Zserie);

%Terms from the second order equation
B=w*C*100;

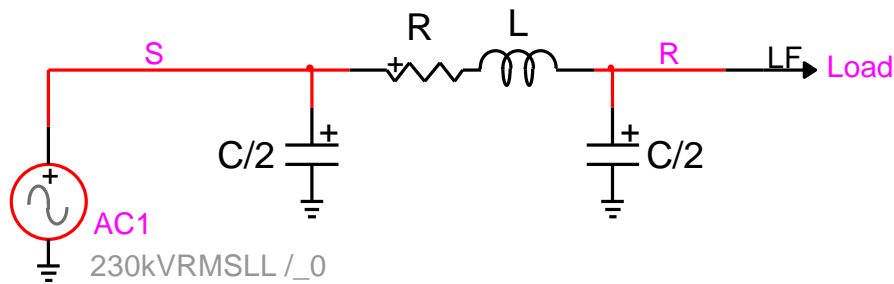
a=(1-B*X)^2+(B*R)^2;
b=2*(1-B*X)*(P*R+Q*X)+2*B*R*(P*X-Q*R)-Vs^2;
c=(P*R+Q*X)^2+(P*X-Q*R)^2;

x1=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
x2=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)

%+ 2 solutions
Vr1=sqrt(x1);
Vr2=sqrt(x2);
```

```
%+Phase computation if the correct solution is Vr1
Vr=conj( ( Vr1^2*Yshunt + (P - j*Q) )*(R+ j*X) +Vr1^2 ) / Vs;
[m,p]=r2p(Vr);
disp( [ 'Solution voltage phasor: ' num2str(m) '/' num2str(p) ] )
```

Il y a deux solutions pour  $x$ , et par conséquent deux solutions pour la tension à la barre R. La première solution donne  $115.142 \text{ kV} \angle -24.1306^\circ$  (soit 0.87 pu). La seconde solution donne une tension de 0.43 pu et donc dans une région d'opération inacceptable.



**Figure 35** Ligne de transmission à 230 kV