Σχετικά με τον μέγιστο αριθμό ανεξάρτητων κυκλωμάτων σε ένα γράφημα

P. Erdös, L. Pösa

Μερκούρης Παπαμιχαήλ[1]

[1]ΔΠΜΣ στους Αλγόριθμους, την Λογική και τα Διακριτά Μαθηματικά
ΕΚΠΑ, ΕΜΠ

Αλγοριθμική Θεωρία Γραφημάτων, Εαρινό 2020

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Σύνολο Ανεξάρτητων Ακμών

Σύνολο Ανεξάρτητων Ακμών

Έστω ένα πολυγράφημα $M = (V, E)$. Θα λέμε ένα σύνολο $\mathcal{I} \subseteq E$ *σύνολο ανεξάρτητων ακμών*, αν

$$\forall e_i, e_j \in \mathcal{I}, e_i \cap e_j = \emptyset$$

Σύνολο (Ασθενώς) Ανεξάρτητων Κυκλωμάτων

Σύνολο (Ασθενώς) Ανεξάρτητων Κυκλωμάτων

Έστω ένα πολυγράφημα $M = (V, E)$. Θα λέμε μια οικογένεια υπογραφημάτων $\mathcal{C} \subseteq_{\upsilon\pi} 2^M$ *σύνολο ανεξάρτητων κυκλωμάτων*, όταν κάθε $C \in \mathcal{C}$ είναι κύκλωμα και

$$\forall C_i, C_j \in \mathcal{C}, V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$$

Όταν ισχύει

$$\forall C_i, C_j \in \mathcal{C}, E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset$$

θα λέμε το $\mathcal{C}$ σύνολο *ασθενώς* ανεξάρτητων κυκλωμάτων.

Το Πρόβλημα

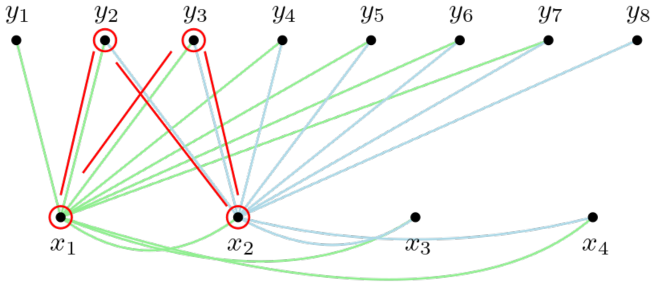
Ανεξάρτητο σύνολο κυκλωμάτων

Είσοδος: Έστω δύο φυσικοί αριθμοί $n, k \in \mathbb{N}$.
Έξοδος: Ένας φυσικός αριθμός $\ell \in \mathbb{N}\cdot$ τέτοιο ώστε, κάθε πολυγράφημα $M = (V, E)$, με $n(M) = n$ και $m(M) = \ell$ να περιέχει τουλάχιστον k ανεξάρτητα κυκλώματα.

Περιεχόμενα

Λήμμα 1

Έστω ένα γράφημα G^n με n κόμβους, όπου $n \geq 6k$. Έστω, επίσης, ότι το G^n περιέχει $2k$ κόμβους βαθμού $n-k$. Τότε, περιέχει τουλάχιστον k ανεξάρτητα τετράπλευρα C_4.



Σχήμα 1: Παράδειγμα για το Λήμμα 1. Εδώ $k = 2$, $n = 12$ και για κάθε κόμβο $x_i, d(x_i) = n - k = 10$.

Ανεξάρτητα Κυκλώματα σε Γραφήματα (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(n,k)$ όπου

$$f(n,k) = (2k-1)n - 2k^2 + k$$

Αποδεικνύεται το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 1

Έστω δύο φυσικοί αριθμοί $k > 1$ και $n \geq 24k$. Τότε, κάθε γράφημα G με n κόμβους και $f(n,k)$ ακμές, είτε περιέχει k ανεξάρτητα κυκλώματα, είτε $2k-1$ κόμβους βαθμού $n-1$.

Ανεξάρτητα Κυκλώματα σε Γραφήματα (2)

Η απόδειξη που παρουσιάζεται από τους Erdös και Pösa:

- Είναι επαγωγική, ως προς το πλήθος των κόμβων n.
- Διακρίνει περιπτώσεις, ως προς τον βαθμό των κορυφών.
- Σε κάθε περίπτωση, χωρίζουμε το γράφημα στα σύνολα V^+, V^-.
- Το V^+ είναι ένα «μικρό» σύνολο, με *«μεγάλο»* βαθμό.
- Το V^- είναι ένα «μεγάλο» σύνολο, με *μικρό* βαθμό.

Θα εξετάσουμε τις απλούστερες περιπτώσεις του Θεωρήματος 1.

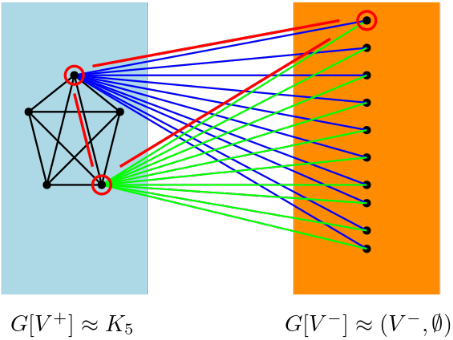
- Υποθέτουμε ότι το $G^n_{f(n,k)}$ έχει $2k$ κορυφές βαθμού $\geq n-k$.
- Το ζητούμενο θα προκύπτει από το Λήμμα 1.
- Θεωρούμε ότι το G περιέχει το πολύ $2k-1$ κορυφές, βαθμού $\geq n-k$.
- Επιπλέον, ότι όλες οι άλλες κορυφές έχουν βαθμό $< 2k$.
- Παρατηρούμε ότι τότε $m(G) \leq f(n,k)$.

Πράγματι, θεωρούμε $V^+, V^- \subseteq V$, τ.ω. $V = V^+ \uplus V^-$, όπου

$$V^+ = \{v \in V \mid d(G) \geq n - k\}$$
$$V^- = \{v \in V \mid d(G) \leq 2k - 1\}$$

Από υπόθεση $|V^+| \leq 2k - 1$, άρα $|V^-| \geq n - 2k + 1$.
Έστω $\Delta^+ = \Delta(V^+) \leq n - 1$ και $\Delta^- = \Delta(V^-) \leq 2k - 1$. Τότε, από το Λήμμα Χειραψίας έχουμε για το πλήθος των ακμών,

$$\begin{aligned} m(G) = \frac{1}{2}\left(\sum_{v \in V} d(v)\right) &\leq \frac{1}{2}(|V^+|\Delta^+ + |V^+|\Delta^-) \\ &\leq \frac{1}{2}[(2k-1)(n-1) + |V^-|(2k-1)] \\ &\leq \frac{1}{2}[(2k-1)(n-1) + (n-2k+1)(2k-1)] \end{aligned}$$

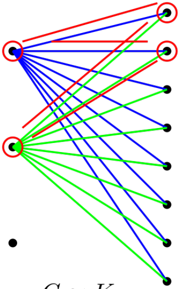


Σχήμα 2: Εδώ έχουμε $k = 2$, $n = 15$. Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα που εξετάζουμε είναι μερικά γραφήματα του παραπάνω γραφήματος G. Στο παραπάνω γράφημα, μπορούμε να επιλέξουμε $\frac{|V^+|}{2}$ ανεξάρτητα κυκλώματα, επιλέγοντας μια ακμή της κλίκας.

Ανεξάρτητα Κυκλώματα σε Γραφήματα (6)

Θεώρημα 3

Έστω δύο φυσικοί αριθμοί $n, k \in \mathbb{N}, n \geq 4k$. Τότε κάθε γράφημα G με n κόμβους και $(2k-1)n - (2k-1)^2 + 1$ ακμές, το οποίο *δεν περιέχει τρίγωνα*, έχει k ανεξάρτητα κυκλώματα.



Σχήμα 3: *Αντιπαράδειγμα* του Θεωρήματος 4 $k = 2$, $n = 8$. Εδώ έχουμε $(2k-1)n - (2k-1)^2$ ακμές και $\lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor = 1$ κυκλώματα.

Περιεχόμενα

Ασθενώς Ανεξάρτητα Κυκλώματα σε Πολυγραφήματα (1)

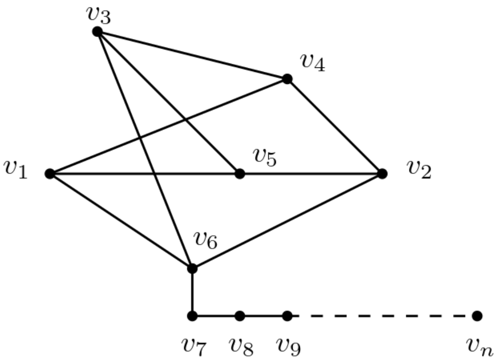
Συνεχίζουμε με το πρόβλημα ασθενώς ανεξάρτητων κυκλωμάτων σε πολυγραφήματα. Θα θέλαμε να δείξουμε κάτι σαν το ακόλουθο.

Θεώρημα 3

Έστω δύο φυσικοί αριθμοί $n, k \in \mathbb{N}$. Υπάρχει κάποια συνάρτηση $g(k)$, τέτοια ώστε, κάθε πολυγράφημα M με n κόμβους και $n + g(k)$ ακμές έχει τουλάχιστον k κυκλώματα. Επιπλέον,

$$g(k) = \Theta(k \log k)$$

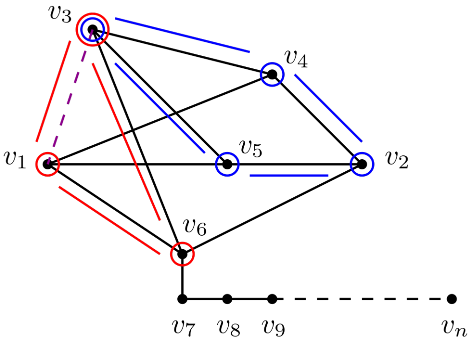
Ασθενώς Ανεξάρτητα Κυκλώματα σε Πολυγραφήματα (2)



Σχήμα 4: Δίνουμε το παραπάνω σχήμα ως αντιπαράδειγμα του $g(2) \leq 3$ ή $g(2) \geq 4$.Παρατηρήστε ότι στο παραπάνω γράφημα δεν έχουμε δύο ανεξάρτητα κυκλώματα.

Θεώρημα 4

Κάθε πολυγράφημα M με n κόμβους και $n + 4$ ακμές έχει τουλάχιστον δύο ασθενώς ανεξάρτητα κυκλώματα ή $g(2) = 4$.



Σχήμα 5: Παρατηρούμε ότι αν προσθέσουμε την μωβ ακμή το προηγούμενο αντιπαράδειγμά μας δεν δουλεύει. Τώρα υπάρχουν δύο ασθενώς ανεξάρτητα κυκλώματα.

Ασθενώς Ανεξάρτητα Κυκλώματα σε Πολυγραφήματα (4)

Η απόδειξη των Erdös και Pösa για το Θεώρημα 3 βασίζεται σε δύο λήμματα, όπου φράσουν το μήκος ενός κυκλώματος άνω και κάτω.

Λήμμα 2

Έστω ένας φυσικός αριθμός $n \geq 2$. Κάθε πολυγράφημα M με n κόμβους, όπου ο ελάχιστον βαθμός είναι 3 περιέχει ένα κύκλωμα με το πολύ $2 \log n$ ακμές.

Λήμμα 3

Έστω ένα φυσικός αριθμός $m \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένα γράφημα G με m κόμβους και $2m$ ακμές, το οποίο να μην περιέχει κύκλωμα με μήκος μικρότερο από $O(\log m)$.

Ασθενώς Ανεξάρτητα Κυκλώματα σε Πολυγραφήματα (5)

Λήμμα 2

Έστω ένας φυσικός αριθμός $n \geq 2$. Κάθε πολυγράφημα M με n κόμβους, όπου ο ελάχιστον βαθμός είναι 3 περιέχει ένα κύκλωμα με το πολύ $2 \log n$ ακμές.

Διαισθητικά, το Λήμμα 2:

- Μας δίνει έναν τρόπο να βρίσκουμε συνέχεια μικρά κυκλώματα σε ένα αυθαίρετο γράφημα.
- Αφαιρούμε αυτά τα κυκλώματα από το γράφημα και έτσι επαγωγικά κατασκευάζουμε ένα σύνολο ασθενώς ανεξάρτητων κυκλωμάτων.
- Επειδή, έχουν $O(\log n)$ μήκος, και το πολυγράφημά μας έχει $\Omega(k \log k)$ ακμές, θα βρούμε k ανεξάρτητα κυκλώματα.

Ασθενώς Ανεξάρτητα Κυκλώματα σε Πολυγραφήματα (6)

Λήμμα 3

Έστω ένα φυσικός αριθμός $m \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένα γράφημα G με m κόμβους και $2m$ ακμές, το οποίο να μην περιέχει κύκλωμα με μήκος μικρότερο από $O(\log m)$.

Διαισθητικά, το Λήμμα 3:

- Μας λέει ότι τα κυκλώματα σε ένα γράφημα δεν μπορούν να είναι πολύ μικρά.
- Επειδή, έχουν $\Omega(\log n)$ μήκος, και το πολυγράφημά μας έχει $O(k \log k)$ ακμές, *δεν* θα βρούμε k ανεξάρτητα κυκλώματα.

Ευχαριστώ για τον χρόνο σας!

A mathematician is a device for turning coffee into theorems.
– Paul Erdös (1913 - 1996)