Σχετικά με τον Αριθμό Ανεξάρτητων Κυκλωμάτων σε Γραφήματα

P. Erdös, L. Pósa

Αναφορά, Μερκούρη Παπαμιχαήλ

Αλγοριθμική Θεωρία Γραφημάτων,
Εαρινό 2020

1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια ανασκόπηση του άρθρου των Erdös και Pósa *«Σχετικά με τον Αριθμό Ανεξάρτητων Κυκλωμάτων σε Γραφήματα»*. Το άρθρο πραγματεύεται μια παλαιότερη την επέκταση μιας παλαιότερης εργασίας των Erdös και Galai σχετικά με σύνολα ανεξάρτητων ακμών σε γραφήματα. Συγκεκριμένα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1 (Σύνολο Ανεξάρτητων Ακμών)**.** *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, θα λέμε ένα υποσύνολο των ακμών του $\mathcal{I} \subseteq E$ ανεξάρτητο, όταν για κάθε $e_1, e_2 \in \mathcal{I} e_1 \cap e_2 = \emptyset$.*

Στο άρθρο τους οι Erdös και Galai έδωσαν ένα κάτω φράγμα στο πλήθος των ακμών που χρειάζεται να έχει ένα γράφημα G, ώστε να περιέχει k ανεξάρτητες ακμές. Ειδικότερα, απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1. *Έστω ένα γράφημα $G^n_{\ell+1}$, με n κόμβους και $\ell + 1$ ακμές, όπου*

$$\ell = \max \left\{ \binom{2k-1}{2}, (k-1)n - (k-1)^2 + \binom{k-1}{2} \right\}$$

περιέχει τουλάχιστον k ανεξάρτητες ακμές.

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται το πρόβλημα των ανεξάρτητων κυκλωμάτων σε γραφήματα και πολυγραφήματα. Συγκεκριμένα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2 (Ανεξάρτητα Κυκλώματα)**.** *Έστω ένα πολυγράφημα $M = (V, E)$. Θα λέμε μια οικογένεια υπογραφημάτων $\mathcal{C} \subseteq_{\upsilon\pi} 2^M$* σύνολο ανεξάρτητων κυκλωμάτων*, όταν για κάθε $C \in \mathcal{C}$, το C είναι κύκλωμα και*

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}, V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$$

Όταν ισχύει

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}, E(C_1) \cap E(C_2) = \emptyset$$

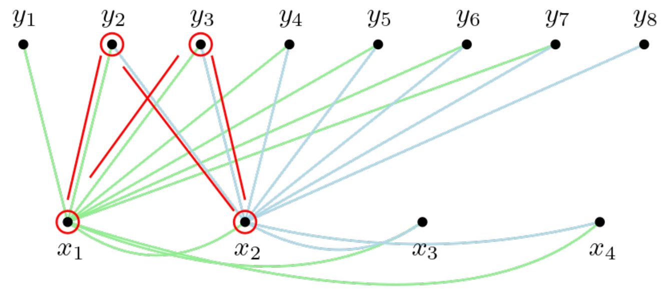
θα λέμε το $\mathcal{C}$ σύνολο ασθενώς *ανεξάρτητων κυκλωμάτων.*

Το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι, δεδομένου ενός γραφήματος G^n με n κόμβους και ενός αριθμού $k \in \mathbb{N}$· πόσες ακμές χρειάζεται να έχει το G^n, ώστε να περιέχει τουλάχιστον k ανεξάρτητα κυκλώματα.

2 Ανεξάρτητα Κυκλώματα σε Γραφήματα

Στο άρθρο των Erdös και Pósa γίνεται η διάκριση ανάμεσα στον αριθμό *ανεξάρτητων* κυκλωμάτων σε γραφήματα και *ασθενώς* ανεξάρτητων κυκλωμάτων σε πολυγραφήματα. Ξεκινάμε την παρούσα ενότητα εξετάζοντας το πρώτο από τα δύο προβλήματα, σε αυτή την κατεύθυνση δίνουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1. *Έστω ένα γράφημα G^n με n κόμβους, όπου $n \geq 6k$. Έστω, επίσης, ότι το G^n περιέχει $2k$ κόμβους βαθμού $n - k$. Τότε, θα περιέχει τουλάχιστον k ανεξάρτητα τετράπλευρα.*



Σχήμα 1: Παράδειγμα για το Λήμμα 1. Εδώ έχουμε $k = 2$, $n = 12$ και για κάθε κόμβο $x_i, d(x_i) = n - k = 10$.

Παρ' όλο που δεν θα προχωρήσουμε σε μια αυστηρή απόδειξη, θα σκιαγραφήσουμε την βασική ιδέα. Παρατηρήστε το Σχήμα 1. Εκεί δίνουμε ένα παράδειγμα της κλάσης γραφημάτων που περιγράφεται στο Λήμμα 1. Το γράφημα χωρίζεται στους κόμβους τύπου x, με μεγάλο βαθμό, και σε εκείνες τύπου y, με μικρό. Για κάθε τετράπλευρο που κατασκευάζουμε χρησιμοποιούμε δύο κόμβους x και δύο y. Η ιδέα αυτή κυριαρχεί τις αποδείξεις των Erdös και Pósa. Κάθε φορά θα διαμερίζουμε το σύνολο κόμβων του γραφήματος στα σύνολα V^+, V^-. Το V^+ θα είναι ένα μικρό σύνολο, με κόμβους μεγάλου βαθμού· ενώ το V^- θα είναι ένα μεγάλο σύνολο, με κόμβους μικρού βαθμού. Διαισθητικά, αυτός θα είναι ο πιο οικονομικός τρόπος, ώστε να αναγκάσουμε ένα γράφημα να έχει πολλά ανεξάρτητα κυκλώματα, με μικρό πλήθος ακμών.

Το προηγούμενο Λήμμα χρησιμοποιείται στην απόδειξη του επόμενου θεωρήματος, το οποίο είναι και το κυριότερο αυτής της ενότητας. Στην κατεύθυνση αυτή, θεωρούμε την ακόλουθη συνάρτηση.

$$f(n, k) = (2k - 1)n - 2k^2 + k$$

Θεώρημα 2. *Έστω δύο φυσικοί αριθμοί $k > 1$ και $n \geq 24k$. Τότε, κάθε γράφημα $G^n_{f(n,k)}$, με n κόμβους και $f(n, k)$ ακμές, είτε περιέχει k ανεξάρτητα κυκλώματα, είτε $2k - 1$ κόμβους βαθμού $n - 1$.*

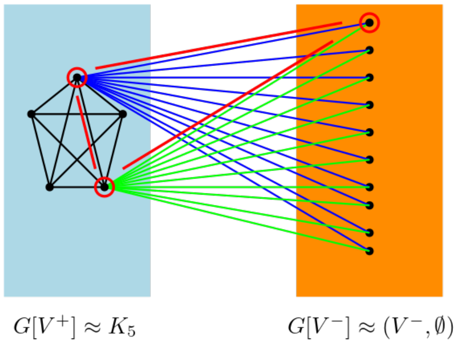
Όπως και στις επόμενες αποδείξεις, έτσι και εδώ διακρίνουμε περιπτώσεις, με βάση τον βαθμό των κόμβων. Έστω ότι το G^n έχει $2k$ κορυφές βαθμού $\geq n - k$. Τότε, από Λήμμα 1 θα υπάρχουν στο G^n k ανεξάρτητα τετράπλευρα και το ζητούμενο θα έχει αποδειχθεί. Έτσι, υποθέτουμε ότι το G^n έχει το πολύ $2k - 1$ κορυφές, βαθμού $\geq n - k$· και όλες οι άλλες κορυφές έχουν βαθμό $< 2k$. Παρατηρούμε, ότι τότε, $m(G^n) \leq f(n, k)$. Πράγματι, θεωρούμε τα σύνολα $V^+, V^- \subseteq V$, τ.ω. $V = V^+ \uplus V^-$, όπου

$$\begin{aligned} V^+ &= \{v \in V \mid d(G) \geq n - k\} \\ V^- &= \{v \in V \mid d(G) \leq 2k - 1\} \end{aligned}$$

Από υπόθεση $|V^+| \leq 2k - 1$, άρα $|V^-| \geq n - 2k + 1$. Έστω $\Delta^+ = \Delta(V^+) \leq n - 1$ και $\Delta^- = \Delta(V^-) \leq 2k - 1$. Τότε, από Λήμμα Χειραψίας έχουμε για το πλήθος των ακμών,

$$\begin{aligned} m(G^n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{v \in V} d(v)\right) &\leq \frac{1}{2}(|V^+|\Delta^+ + |V^-|\Delta^-) \\ &\leq \frac{1}{2}[(2k-1)(n-1) + |V^-|(2k-1)] \\ &\leq \frac{1}{2}[(2k-1)(n-1) + (n-2k+1)(2k-1)] \\ &= f(n, k) \end{aligned}$$

Συνεπώς, θα σχηματίζεται μία κατάσταση, όπως στο παρακάτω σχήμα.

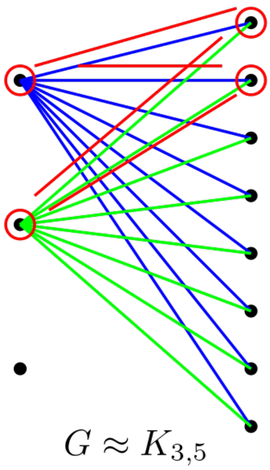


Σχήμα 2: Παράδειγμα για το Θεώρημα 2. Εδώ έχουμε $k = 2, n = 15$.

Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα που εξετάζει το Θεώρημα 1 είναι μερικά γραφήματα του Σχήματος 2. Στο παραπάνω σχήμα μπορούμε να επιλέξουμε $\frac{|V^+|}{2}$ ανεξάρτητα κυκλώματα, επιλέγοντας μία ακμή της κλίκας. Στην ίδια κατεύθυνση βρίσκεται και το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 3. *Έστω δύο φυσικοί αριθμοί $n, k \in \mathbb{N}, n \geq 4k$. Τότε κάθε γράφημα G^n με n κόμβους και $(2k-1)n - (2k-1)^2 + 1$ ακμές, το οποίο* δεν περιέχει τρίγωνα, *έχει k ανεξάρτητα κυκλώματα.*

Στο Σχήμα που ακολουθεί δίνουμε ένα παράδειγμα για το Θεώρημα 3. Παρατηρούμε ότι το φράγμα του Θεωρήματος είναι σφιχτό. Αφού δεν μπορούμε με $(2k-1)n - (2k-1)^2$ ακμές να πετύχουμε k ανεξάρτητα κυκλώματα.



Σχήμα 3: Παράδειγμα για το Θεώρημα 3. Εδώ έχουμε $(2k-1)n - (2k-1)^2$ ακμές και $\lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor = 1$ κυκλώματα.

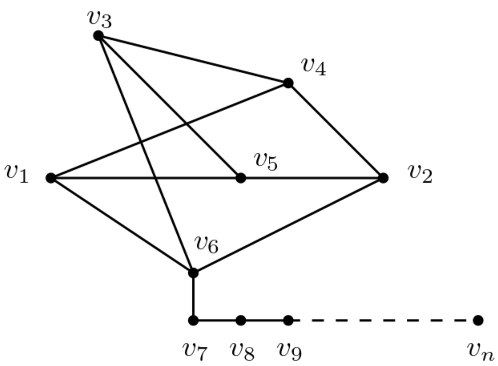
3 Ασθενώς Ανεξάρτητα Κυκλώματα σε Πολυγραφήματα

Συνεχίζουμε με το δεύτερο μέρος του άρθρου, όπου εξετάζουμε το πρόβλημα των ασθενώς ανεξάρτητων κυκλωμάτων σε πολυγραφήματα. Το κύριο θεώρημα αυτής της ενότητας είναι το ακόλουθο.

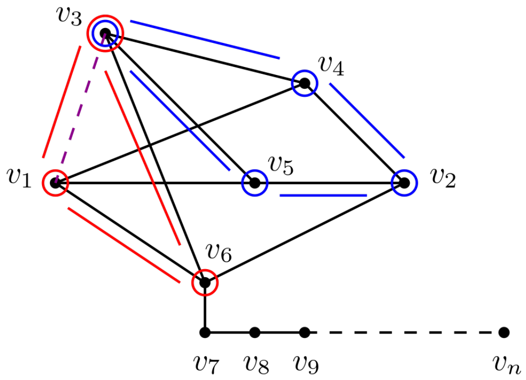
Θεώρημα 4. *Έστω δύο φυσικοί αριθμοί $n, k \in \mathbb{N}$. Υπάρχει κάποια συνάρτηση $g(k)$, τέτοια ώστε, κάθε πολυγράφημα $M^n_{n+g(k)}$, με n κόμβους και $n + g(k)$ ακμές, έχει τουλάχιστον k ασθενώς ανεξάρτητα κυκλώματα. Επιπλέον,*

$$g(k) = \Theta(k \log k)$$

Ξεκινάμε, από τα χαμηλά, συζητώντας την τιμή της συνάρτησης $g(2)$. Στο παρακάτω Σχήμα (αριστερά) δίνουμε ένα αντιπαράδειγμα για τον ισχυρισμό $g(2) \leq 3$.



(α) Αντιπαράδειγμα για την τιμή $g(2) \leq 3$.



(β) Παράδειγμα γραφήματος, όπου $g(2) = 4$.

Σχήμα 4: Με την προσθήκη μίας ακμής (βλ. δεξιά) διορθώνεται το αντιπαράδειγμα (βλ. αριστερά). Στο δεξιά σχήμα φαίνονται τα δύο ανεξάρτητα κυκλώματα, συμβολίζονται με μπλε και κόκκινο.

Στο παρακάτω Θεώρημα δίνουμε την σωστή τιμή για το $g(2)$, το οποίο και χρησιμοποιείται από τους συγγραφείς στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.

Θεώρημα 5. *Κάθε πολυγράφημα M^n_{n+4} με n κόμβους και $n+4$ ακμές έχει τουλάχιστον δύο ασθενώς ανεξάρτητα κυκλώματα ή $g(2) = 4$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4 –εκτός από το Θεώρημα 4, το οποίο αποδεικνύει την βάση της επαγωγής– χρειαζόμαστε και άλλα δύο Λήμματα. Κάθε ένα από τα οποία προσεγγίζουν το μήκος των κυκλωμάτων που υπάρχουν σε ένα πολυγράφημα. Το Λήμμα 2 φράσει άνω το μήκος των κυκλωμάτων, ενώ το Λήμμα 3 κάτω. Αρχίζουμε με το Λήμμα 2.

Λήμμα 2. *Έστω ένας φυσικός αριθμός $n \geq 2$. Κάθε πολυγράφημα M^n με n κόμβους, όπου ο ελάχιστον βαθμός είναι τουλάχιστον 3, $\delta(M^n) \geq 3$, περιέχει ένα κύκλωμα με το πολύ $2 \log n$ ακμές.*

Διαισθητικά, το Λήμμα 2 μας δίνει έναν τρόπο να βρίσκουμε συνέχει μικρά κυκλώματα σε ένα αυθαίρετο γράφημα. Αν αφαιρέσουμε αυτά τα κυκλώματα από το γράφημα, μπορούμε επαγωγικά να κατασκευάσουμε ένα σύνολο ασθενώς ανεξάρτητων κυκλωμάτων. Επειδή, τα κυκλώματα έχουν μήκος $O(\log n)$ κα το πολυγράφημά μας έχει $\Omega(k \log k)$ ακμές, μπορούμε να βρούμε k ανεξάρτητα κυκλώματα. Συνεχίζουμε με το Λήμμα 3.

Λήμμα 3. *Έστω ένας φυσικός αριθμός $m \in \mathbb{N}$. Το υπάρχει ένα γράφημα G^m_{2m} με m κόμβους και $2m$ ακμές, το οποίο να μην περιέχει κύκλωμα με μήκος μικρότερο από $O(\log m)$.*

Η διαίσθηση πίσω από το Λήμμα 3, είναι ότι τα κυκλώματα σε ένα γράφημα δεν μπορούν να είναι πολύ μικρά. Επειδή, έχουν μήκος $\Omega(\log n)$ κα το πολυγράφημα έχε $O(k \log k)$ ακμές, *δεν* θα βρούμε πάνω από k ανεξάρτητα κυκλώματα.

Με τις παραπάνω παρατηρήσεις ολοκληρώνεται η σκιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος 4. Μαζί της ολοκληρώνεται και η ανασκόπηση του άρθρου, όπου οι συγγραφείς με τα Θεωρήματα 2 και 4 καλύπτουν πλήρως τα προβλήματα που είχαν θέσει στην αρχή.

4 Βιβλιογραφία

[1] P. Erdös and L. Pósa, “On Independent Circuits Contained in a Graph”, Canadian Journal of Mathematics, vol. 17, pp. 347–352, 1965.