Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Χειμώνας 2021

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι για τα Προβλήματα Προσανατολισμού και Ελαττωμένης Ανταμοιβής ΠΠ[1][2] & Συνδέσεις με τα Προβλήματα Μερικού και με Προϋπολογισμό, Συνόλου Κυριαρχίας[3][4]

Νίκος Λαζαρόπουλος
Μεταπτυχιακός Φοιτητής
ΠΜΣ Επιστήμης Υπολογιστών
Α.Μ.: cs3200001

Μερκούρης Παπαμιχαήλ
Μεταπτυχιακός Φοιτητής
ΔΠΜΣ ΑΛΜΑ
Α.Μ: al1200018

Ορισμοί Προβλημάτων

Σε αυτό το άρθρο, παρουσιάζεται ο πρώτος προσεγγιστικός αλγόριθμος σταθερού παράγοντα για το Πρόβλημα Προσανατολισμού με δεδομένο κόμβο εκκίνησης (rooted Orienteering Problem), καθώς και για το Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή Ελαττωμένης Ωφέλειας (Discounted Reward TSP), η διερεύνηση του οποίου σχετίζεται με το κίνητρο της πλοήγησης αυτομάτων. Και στα δύο προβλήματα, μας δίνεται ένα γράφημα με μήκη στις ακμές, ανταμοιβές στους κόμβους και κάποιος κόμβος έναρξης. Στο Πρόβλημα Προσανατολισμού, σκοπός είναι η εύρεση μιας διαδρομής που ξεκινά από έναν κόμβο s και συλλέγει ωφέλεια από τους κόμβους που διατρέχει, με το μήκος της να μην ξεπερνά μια δεδομένη ποσότητα. Στο πρόβλημα ΠΠ Ελαττωμένης Ωφέλειας, αντί για ένα όριο μήκους, μας δίνεται ένας συντελεστής ελάττωσης γ. Ο στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε τη συνολική ωφέλεια, δεδομένης της συσσωρευτικής ελάττωσης που υφίσταται στο πέρασμα από κάθε κόμβο. Θεωρούμε ότι η ελάττωση για έναν κόμβο τη στιγμή t ορίζεται ως γ^t.

Βασική συμβολή του άρθρου είναι η εισαγωγή του κριτηρίου του Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος (Min Excess Path). Το πλεόνασμα ενός μονοπατιού ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ του μήκους ενός $s,t-$μονοπατιού και της ελάχιστης απόστασης μεταξύ των κόμβων s και t. Το πλεόνασμα σε ένα $s,t-$μονοπάτι οφείλεται στην ανάγκη της συλλογής ωφέλειας. Το πρόβλημα λοιπόν αφορά στην αποτίμηση μιας $s,t-$διαδρομής ελαχίστου πλεονάσματος, για την οποία η συνολική ωφέλεια να είναι τουλάχιστον k. Η προσέγγιση της βέλτιστης διαδρομής για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος παίζει κύριο ρόλο στους αλγορίθμους των προβλημάτων Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας και Προσανατολισμού, αφού εμφανίζεται σαν υπορουτίνα τους.

Οι συγγραφείς επιλύουν το πρόβλημα του Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος χρησιμοποιώντας μια υπορουτίνα που προσεγγίζει μια παραλλαγή του k-TSP από προγενέστερη μελέτη πάνω στο πρόβλημα εύρεσης $s,t-$διαδρομής ελαχίστου κόστους (πρόβλημα k-PATH). Δοσμένου του προσεγγιστικού λόγου α_{CP} στο k-PATH, ο προτεινόμενος αλγόριθμος για το Μονοπάτι Ελάχιστο Πλεονάσματος αποδεικνύεται να έχει προσεγγιστικό λόγο ίσο με $\alpha_{EP} = 1.5\alpha_{CP} - 0.5$. Περαιτέρω, παρουσιάζεται μια βελτίωση στην προσέγγιση για το πρόβλημα εξετάζοντας τις λεπτομέρειες του αλγορίθμου διαδρομής ελάχιστου κόστους.

Όλα τα προβλήματα που συζητούνται σε αυτό το άρθρο είναι $NP-$δύσκολα, καθώς αποτελούν γενικεύσεις του Προβλήματος Περιοδεύοντος Πωλητή. Όπως αποδεικνύεται στο άρθρο, τόσο το πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος όσο και το Πρόβλημα Προσανατολισμού είναι $APX-$δύσκολα. Δηλαδή, δεν γίνεται να προσεγγιστούν από έναν αυθαίρετο σταθερό παράγοντα δ, εκτός αν $P = NP$.

[1] Approximation Algorithms for Orientering and Discounted-Reward TSP

[2] Avrim Blum, Shuchi Chawla, David R. Karger, Terran Lane, Adam Meyerson, Maria Minkoff, Approximation Algorithms for Orienteering and Discounted-Reward TSP, In proceedings 44th Symposium on Foundation of Computer Science, 2003.

[3] Partial and Budgeted Connected Dominating Set Problems

[4] Samir Khuller, Manish Purohit, and Kanth K. Sarpatwar, Analyzing the Optimal Neighborhood: Algorithms for Partial and Budgeted Connected Dominating Set Problems, in proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Descrete Algorithms, 2014

Εφαρμογές

Τα προβλήματα που αναλύονται στο άρθρο των Blum κ.ά. παίρνουν το κίνητρό τους, και βρίσκουν εφαρμογές, στην πλοήγηση αυτομάτων (ρομπότ) και στον σχεδιασμό διαδρομών. Στις κοινότητες της Θεωρητικής Επιστήμη Υπολογιστών και Βελτιστοποίησης τα προβλήματα αυτά μοντελοποιούνται σαν Προβλήματα Συλλογής Ωφέλειας Περιοδεύοντος Πωλητή. Στην Τεχνητή Νοημοσύνη, τέτοια προβλήματα, θα μοντελοποιηθούν σαν Μαρκοβιανές Διαδικασίες Απόφασης. Οι συγγραφείς, παρ' όλα αυτά, δεν υιοθετούν μια πιθανοθεωρητική αντιμετώπιση, αφού όλοι οι αλγόριθμοι που παρουσιάζονται είναι αιτιοκρατικοί. Δικαιολογούν αυτή τους την αντιμετώπιση για πολλά προβλήματα πλοήγησης αυτομάτων. Συχνά, οι ενέργειες των αυτομάτων μπορεί να χαρακτηριστούν «σχεδόν» αιτιοκρατικές (υπό την έννοια ότι αποτυγχάνουν με μικρή πιθανότητα $\leq \epsilon$). Έτσι, κατά μέσω όρο, και μετά από πολλά βήματα η όποια στοχαστικότητα αναιρείται. Συνεπώς, μπορούμε να πάρουμε μια καλή προσέγγιση αντιμετωπίζοντας τα προβλήματα αυτά αιτιοκρατικά.

Κύρια Αποτελέσματα

Θα δώσουμε, τώρα, μια συνοπτική περιγραφή των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στο άρθρο. Αρχικά, θα παρουσιάσουμε το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος, στο οποίο ανάγονται όλα τα προβλήματα του άρθρου. Έπειτα, δίνουμε τα κυριότερα προβλήματα που παρουσιάζονται, αυτά του Μονοπατιού Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας και Προσανατολισμού. Τα Προβλήματα αυτά λύνονται με την χρήση του αλγορίθμου για το Μονοπάτι Ελάχιστου Πλεονάσματος.

Το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος[5]

Έστω $P^\star$ το συντομότερο $s,t-$μονοπάτι με συνολική ανταμοιβή κόμβων $\Pi(P^\star) \geq k$. Έστω ακόμη $\epsilon(P^\star) = d(P^\star) - d(s,t)$, όπου $d(s,t)$ η συντομότερη απόσταση των s,t. Ο αλγόριθμος για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος επιστρέφει μια διαδρομή P με $\Pi(P) \geq k$ και μήκος $d(P) = d(s,t) + a_{EP}\epsilon(P^\star)$, όπου $a_{EP} = \frac{3}{2}a_{CP} - \frac{1}{2}$. Έτσι, προκύπτει μια $(2.5+\delta)-$προσέγγιση για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος, χρησιμοποιώντας έναν γνωστό αλγόριθμο[6] για την εύρεση του Μονοπατιού Ελαχίστου Κόστους (Min-Cost Path ή MCP) που έχει προσεγγιστικό λόγο $a_{CP} = 2+\delta$.

Ο αλγόριθμος στη γενική περίπτωση χωρίζει τη βέλτιστη διαδρομή σε τμήματα που είτε είναι *μονότονα* (το μονοπάτι P λέμε ότι είναι *μονότονο* αν για την ακολουθία κορυφών $\{s, u_1, u_2, ..., u_n, t\}$που το ορίζει ισχύει $0 = d_s < d_1 < d_2 < ... < d_n < d_t$) για τα οποία εύκολα προκύπτει η συντομότερη διαδρομή συνολικής ωφέλειας τουλάχιστον ίσης με k (με ένα απλό *δυναμικό πρόγραμμα*) είτε *«ζικ-ζακ»* (δημιουργώντας μεγάλο πλεονάζον). Αποδεικνύεται ότι το συνολικό μήκος των ζικ-ζακ τμημάτων είναι συγκρίσιμο με το πλεόνασμα της βέλτιστης διαδρομής. Η προτεινόμενη λύση χρησιμοποιεί τις βέλτιστες μονοτόνες διαδρομές και προσεγγίζει το μήκος των ζικ-ζακ τμημάτων κατά έναν σταθερό παράγοντα· αποδίδοντας μια συνολική αύξηση ανάλογη με το πλεόνασμα.

Η βασική συνεισφορά του άρθρου για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος συνίσταται στην προσέγγιση των επιμέρους μονοπατιών στα ζικ-ζακ τμήματα, δηλαδή σε αυτά που *δεν* έχουν την ιδιότητα της μονοτονίας των αποστάσεων από την πηγή. Από εκεί προκύπτει η απόδειξη του προσεγγιστικού λόγου. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{N}$ με $f(d) = card(\{e \in E(P) | e = \{u_1, u_2\}, d_{u_1} < d \leq d_{u_2}\})$. Ισχύει ότι $\forall d \in [0, d_t], f(d) \geq 1$. Η συνάρτηση f είναι τμηματικά σταθερή, με την ασυνέχειά της να παρατηρείται σε εκείνες τις τιμές του d που συμπίπτουν με την απόσταση κάποιου κόμβου. Το διάστημα $[0, d_t]$ διαμερίζεται στις περιοχές $B_{1,i}$ για τις οποίες $f(d) = 1$ και στις $B_{2,i}$ όπου $f(d) \geq 2$. Τα διαστήματα $B_{1,i}, B_{2,i}$ είναι μεγιστικά και καλούνται *τύπου-1* και *τύπου-2* αντίστοιχα. Με V_i συμβολίζεται το σύνολο των κόμβων που βρίσκονται στο $i-$διάστημα. Βασιζόμενοι στο ότι (i)το βέλτιστο μονοπάτι διέρχεται από κάθε σύνολο V_i μόνο μία φορά και ότι (ii) ένα από κάθε δύο γειτονικά διαστήματα B_i, B_{i+1} είναι *τύπου-1* οι συγγραφείς αποδεικνύουν ότι το συνολικό μήκος των τμημάτων *τύπου-2* είναι το πολύ $\frac{3}{2}\epsilon(P^*)$. Δεδομένης της βέλτιστης λύσης για τα τμήματα *τύπου-1* και σχεδόν βέλτιστης για τα *τύπου-2* προκύπτει ο βέλτιστος τρόπος για να τοποθετήσουμε κάποια υποσύνολά τους μαζί, *μονότονα* χρησιμοποιώντας ένα *δυναμικό πρόγραμμα*. Έτσι, ο αλγόριθμος για το Μονοπάτι Ελάχιστου Πλεονάσματος αποδεικνύεται να έχει προσεγγιστικό λόγο ίσο με $a_{EP} = \frac{3}{2}a_{CP} - \frac{1}{2}$, όπου a_{CP} ο προσεγγιστικός λόγος του Προβλήματος Μονοπατιού Ελαχίστου Κόστους.

Οι συγγραφείς παρουσιάζουν επιπλέον μια ελαφρώς βελτιωμένη προσέγγιση για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος αξιοποιώντας τις λεπτομέρειες του αλγορίθμου για το Μονοπάτι Ελάχιστου Κόστους. Μέσω μιας τεχνικής που διπλασιάζει ορισμένες από τις ακμές σε ένα δέντρο κάλυψης κορυφών (περιλαμβάνει τους κόμβους s,t και δεν διπλασιάζει τις ακμές που ανήκουν στο μονοπάτι $s-t$ επί του δέντρου) και συλλογής ανταμοιβής τουλάχιστον ίσης με k επιτυγχάνουν προσεγγιστικό λόγο ίσο με $2+\delta$.

[5] Min-Excess Path

[6] K. Chaudhuri, B. Godfrey, S. Rao, and K. Talwar. Paths, trees, and minimum latency tours. In Proceedings of the 44th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Cambridge, Massachusetts, 2003.

Το Πρόβλημα Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας[7]

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο βεβαρυμένο γράφημα (τα βάρη των ακμών αντιπροσωπεύουν τον χρόνο να διασχίσουμε μια δεδομένη ακμή), με τιμή ανταμοιβής π_v σε κάθε μία κορυφή v. Στόχος είναι η εύρεση ενός μονοπατιού που επισκέπτεται κάθε κορυφή v τη χρονική στιγμή t_v, ώστε να μεγιστοποιείται η ποσότητα $\rho = \sum \pi_v \gamma^{t_v}$. Με γ συμβολίζουμε τον παράγοντα ελάττωσης για τον οποίο ισχύει $0 < \gamma < 1$. Γίνεται η υπόθεση, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο συντελεστής ελάττωσης είναι $\gamma = 1/2$. Σε αντίθετη περίπτωση απλά μετατρέπεται κάθε μήκος l σε $l^{'}$ έτσι ώστε $\gamma^l = \left(\frac{1}{2}\right)^{l^{'}}$. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος προβλέπει για κάθε κόμβο u την ποσότητα $\pi_{u'} = \gamma^{d_u}\pi_u$, όπου d_u η ελάχιστη απόσταση του κόμβου, από τον εναρκτήριο κόμβο s. Έτσι προκύπτει ένα τροποποιημένο γράφημα $G^{'}$. Μαντεύουμε κάποιον κόμβο t, κοντά στον τελευταίο κόμβο του βέλτιστου μονοπατιού $P^\star$. Απαιτούμε το πλεόνασμα του t, πάνω στο $P^\star$, να μην ξεπερνά δοσμένη σταθερά ϵ. Μαντεύουμε, επιπλέον την τιμή k, που είναι η τιμή της ανταμοιβής $\Pi^{'}(P_t^*)$. Τότε, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμος για το Μονοπάτι Ελαχίστου Πλεονάσματος και παίρνουμε ένα μονοπάτι P που έχει ανταμοιβή τουλάχιστον ίση με k.

Για τον προτεινόμενο αλγόριθμο αποδεικνύεται ότι ισχύει $\rho(P) \geq (1 - \frac{1}{2^\epsilon})\rho(P^*)/2^{\alpha_{EP}\epsilon}$, όπου α_{EP} ο λόγος προσέγγισης του Προβλήματος Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος.

Το Πρόβλημα Προσανατολισμού[8]

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο βεβαρυμένο γράφημα, όπου τα βάρη των ακμών αντιστοιχούν στο μήκος κάθε ακμής. Πάλι θεωρούμε πως υπάρχει κάποιο όφελος σε κάθε κόμβο v, το οποίο θα συμβολίζουμε με π_v. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα μονοπάτι συνολικού μήκους το πολύ D, με εναρκτήριο κόμβο s, το οποίο να μεγιστοποιεί το όφελος. Και εδώ, θα μαντέψουμε την τιμή της βέλτιστης λύσης k, δοκιμάζοντας όλα τα δυνατά k. Έστω $\alpha = \lceil \alpha_{EP} + 1 \rceil$. Στον αλγόριθμο που παρουσιάζεται, χωρίσουμε το βέλτιστο όφελος σε α τμήματα. Έπειτα, ζητάμε από τον αλγόριθμο για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος να βρει ένα μονοπάτι από το s προς κάθε άλλο κόμβο v του γραφήματος με όφελος τουλάχιστον k/α. Ως λύση επιστρέφεται το $s, v-$μονοπάτι με συνολικό μήκος το πολύ D. Αποδεικνύεται πως η βέλτιστη λύση θα περιέχει κάποιο μονοπάτι με μικρό πλεονάζον, το οποίο με την σειρά του είναι μια προσέγγιση της βέλτιστης λύσης. Ειδικότερα, στο άρθρο τους οι Blum κ.ά. Αποδεικνύουν πως υπάρχει κάποιο $s, v-$μονοπάτι με πλεονάζον το πολύ $\frac{D-d_v}{\alpha_{EP}}$ το οποίο συλλέγει όφελος τουλάχιστον $\frac{\Pi^\star}{\alpha_{PP}}$, με το $\Pi^\star$ να συμβολίζει το βέλτιστο όφελος και α_{PP} τον λόγο προσέγγισης που θέλουμε να πετύχουμε για το Πρόβλημα Προσανατολισμού. Υποθέτοντας πως υπάρχει τέτοιο μονοπάτι ο αλγόριθμος θα επιστρέψει κάποιο μονοπάτι με συνολικό μήκος $d_v + \alpha_{EP}\frac{D-d_v}{\alpha_{EP}} = D$ και όφελος τουλάχιστον $\frac{\Pi^\star}{\alpha_{PP}}$. Το οποίο θα μας δώσει και την επιθυμητή προσέγγιση. Τέλος, στην απόδειξη της αναγωγής στο Πρόβλημα Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος, υπολογίζεται πως $\alpha_{PP} = \lceil \alpha_{EP} \rceil + 1$.

Επεκτάσεις

Στο άρθρο παρουσιάζονται επιπλέον αποτελέσματα για τα συγγενικά προβλήματα του δέντρου και κύκλου μέγιστης ωφέλειας. Αμφότερα τα προβλήματα ανάγονται στο Πρόβλημα Προσανατολισμού. Στο Πρόβλημα Δέντρου Μέγιστης Ωφέλειας[9] δεδομένου ενός βεβαρημένου γραφήματος G με μήκη στις ακμές και οφέλη στους κόμβους, ζητάμε να βρούμε ένα δέντρο $\mathcal{T}$ με ρίζα r, τέτοιο ώστε $d(\mathcal{T}) = \sum_{l \in leaf(\mathcal{T})} d(r,l) \leq D$. Το όφελος του δέντρου θα το συμβολίζουμε με $\Pi(\mathcal{T}) = \sum_{v \in \mathcal{T}} \pi_v$. Παρ' όλο που η εκδοχή του προβλήματος, χωρίς το περιορισμό ρίζας, έχει μελετηθεί, το πρόβλημα για ριζωμένο δέντρο έμενε ανοιχτό μέχρι πρόσφατα. Οι συγγραφείς έκανα τις εξής παρατηρήσεις. Θεωρήστε το βέλτιστο δέντρο $\mathcal{T}^\star$. Αν περιπλανηθούμε πάνω στις ακμές του δέντρο και από τις δύο κατευθύνσεις θα πάρουμε έναν περίπατο Euler μήκους το πολύ $2D$. Στην συνέχεια, χωρίζουμε το δέντρο σε μονοπάτια από την ρίζα προς κάθε κόμβο του. Το μήκος τους θα είναι το πολύ D. Έστω P' το μονοπάτι, ανάμεσα τους, με το μεγαλύτερο όφελος. Έστω $P^\star$ το μονοπάτι μεγαλύτερης ωφέλειας, με μήκος το πολύ D, πάνω σε ολόκληρο το γράφημα G. Τότε θα έχουμε $\Pi(P^\star) \geq \Pi(P') \geq \frac{\Pi(\mathcal{T}^\star)}{2}$. Έτσι, ολοκληρώνεται η αναγωγή και παίρνουμε μια $2\alpha_{PP}-$προσέγγιση για το $\mathcal{T}^\star$. Για το Πρόβλημα Κύκλου Μέγιστης Ωφέλειας ζητάμε να βρούμε έναν κύκλο μήκους D που να περιέχει κάποιον κόμβο s. Πάλι θα προσεγγίζουμε την ζητούμενη λύση (εδώ έναν κύκλο) από ένα μονοπάτι. Εδώ θα ζητήσουμε από τον αλγόριθμο για το Πρόβλημα Προσανατολισμού να μας βρει ένα μονοπάτι μήκους $D/2$ με αρχή το s. Έπειτα, αν t το πέρας του μονοπατιού που επιστρέφεται, συνδέουμε το s με το t με το ελάχιστο μονοπάτι. Έτσι, το μήκος του προκύπτοντος κύκλου δεν θα ξεπερνάει το D. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε μία $2\alpha_{PP}-$προσέγγιση του Προβλήματος Κύκλου Μέγιστης Ωφέλειας.

Ένα άλλο συγγενικό πρόβλημα που εξετάζουν οι συγγραφείς, είναι η παραλλαγή του Προβλήματος Προσανατολισμού, όπου μας επιτρέπεται να κατασκευάσουμε μέχρι k μονοπάτια, κάθε ένα από τα οποία να έχει μήκος το πολύ D, ενώ δεν μας δίνεται κάποιος εναρκτήριος κόμβος s. Στο άρθρο το πρόβλημα αυτό ονομάζεται Προσανατολισμός Πολλαπλών Μονοπατιών[10] Θα προσεγγίσουμε την λύση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Προβλήματος Προσανατολισμού k φορές, μαντεύοντας, κάθε φορά, κάποιον εναρκτήριο κόμβο s. Κάθε φορά που κάνουμε κλήση στον αλγόριθμο θα μηδενίζουμε το

[7] Discounted-Reward TSP
[8] Orientering
[9] Max-Prized Tree
[10] Multiple-Path Orientering

όφελος όλων των κόμβων που έχουμε επισκεφτεί. Έτσι παίρνουμε έναν λόγο προσέγγισης $1/(1-e^{-\alpha_{PP}})$, στην περίπτωση που όλα τα μονοπάτια έχουν κοινή αρχή, διαφορετικά ο λόγος προσέγγισης θα είναι $\alpha_{pp}+1$.

Δυσκολία Προσέγγισης

Όλα τα προβλήματα που εξετάστηκαν στο άρθρο των Blum κ.ά. είναι $NP-$δύσκολα, εφόσον προκύπτουν σαν γενικεύσεις του Προβλήματος Περιοδεύοντος Πωλητή. Οι συγγραφείς στο άρθρο τους προσφέρουν επιχειρήματα για την δυσκολία προσέγγισης των προβλημάτων Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος και Προσανατολισμού. Η δυσκολία προσέγγισης του Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος προκύπτει από την $APX-$δυσκολία του ΠΠΠ (Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή)[11]. Μάλιστα, για να αναχθούμε από το ΠΠΠ στο Μονοπάτι Ελάχιστου Πλεονάσματος, αρκεί να δώσουμε οποιουσδήποτε δύο κόμβους σαν αρχή και πέρας του ζητούμενου μονοπατιού, να θεωρήσουμε μοναδιαίο όφελος σε κάθε κόμβο και να ζητήσουμε συνολικό όφελος τουλάχιστον n. Η δυσκολία προσέγγισης που δίνεται από του συγγραφείς για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος είναι $\frac{220}{219}$. Ακόμη, στο άρθρο αποδεικνύεται η δυσκολία προσέγγισης $\frac{1481}{1480}$ για το Πρόβλημα Προσανατολισμού ανάγοντας το ΠΠΠ για γραφήματα με μήκη στο $\{1, 2\}$ στο πρόβλημα αυτό. Η αναγωγή βασίζεται στην δουλειά των Engebresten and Karpinski[12].

Συνδέσεις με το 2ο Επιστημονικό Άρθρο

Σύνοψη του 2ου Άρθρου

Στην συνέχεια σχολιάζουμε τις συνδέσεις μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου επιστημονικού άρθρο. Στο 2ο Επιστημονικό Άρθρο μελετώνται προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για δύο παραλλαγές του Προβλήματος Συνεκτικού Συνόλου Κυριαρχίας (Connected Dominating Set Problem). Η πρώτη αφορά το Μερικό Συνεκτικό Σύνολο Κυριαρχίας (Partial Connected Dominating Set), ενώ η δεύτερη το Συνεκτικό Σύνολο Κυριαρχίας με Προϋπολογισμό (Budgeted Connected Dominating Set). Στο Πρόβλημα Συνεκτικού Σύνολου Κυριαρχίας, δεδομένου ενός γραφήματος $G=(V, E)$, ζητάμε την εύρεση ενός συνόλου κυριαρχίας $S \subseteq V$, τέτοιο ώστε το εναγόμενο γράφημα $G[S]$ να είναι συνεκτικό. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο κυριαρχίας $S \subseteq V$ είναι ένα σύνολο κόμβων, όπου κάθε κόμβος του γραφήματος, είτε θα ανήκει στο S, είτε θα έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο S. Φυσικά, ζητάμε το μικρότερο σύνολο S με την προηγούμενη ιδιότητα, αφού το ίδιο το V είναι ένα τετριμμένο σύνολο κυριαρχίας. Στις δύο παραλλαγές που μελετώνται στο άρθρο των Khuller κ.ά., αυτές οι προϋποθέσεις χαλαρώνονται. Στο πρόβλημα Μερικού Συνεκτικού Συνόλου Κυριαρχίας (PCDS) , μας δίνεται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και κάποιος ακέραιος $k \in \mathbb{N}$. Ο στόχος μας είναι να βρούμε ένα *ελάχιστο υποσύνολο κορυφών* $S \subseteq V$, που σχηματίζουν ένα συνεκτικό υπογράφημα $G[S] \subseteq_{v\pi} G$, και κυριαρχεί σε τουλάχιστον k κορυφές. Από τη άλλη, στο πρόβλημα του Συνεκτικού Συνόλου Κυριαρχίας με Προϋπολογισμό (BCDS), υπάρχει ένας περιορισμός (προϋπολογισμός) $k \in \mathbb{N}$ στην πληθικότητα των κορυφών που μπορούμε να επιλέξουμε. Ο στόχος μας είναι να βρούμε ένα συνεκτικό υπογράφημα που επάγεται από τις επιλεγόμενες κορυφές και κυριαρχεί σε όσο το δυνατόν περισσότερες κορυφές. Παρατηρήστε την δυϊκότητα στα δύο προβλήματα. Στο PCDS φράσουμε το πλήθος των κόμβων που κυριαρχούνται και ζητάμε την βελτιστότητα ως προς το μέγεθος του συνόλου κυριαρχίας· στο BCDS απαιτούμε το αντίστροφο.

Στους προσεγγιστικούς αλγορίθμους που περιγράφονται χρησιμοποιείται μια υπορουτίνα για το Πρόβλημα Εύρεσης του Δέντρου Steiner με Ποσόστωση (Quoata Steiner Tree). Συνεπώς, είναι χρήσιμο να σταθούμε και σε αυτό το πρόβλημα. Στο Πρόβλημα Εύρεσης του Δέντρου Steiner με Ποσόστωση (QST), μας δίνεται ένα γράφημα $G=(V, E)$ με κόστη d_e στις ακμές και οφέλη π_v στους κόμβους. Το ζητούμενο είναι, για μία ποσόστωση $k \in \mathbb{N}$, να βρούμε ένα δέντρο $T \subseteq_{v\pi} G$, τέτοιο ώστε να εξασφαλίζεται όφελος k, με το μικρότερο κόστος. Μάλιστα, η στρατηγική που ακολουθούν οι συγγραφείς του δεύτερου άρθρου είναι να ορίζουν μια κατάλληλη συνάρτηση ωφέλειας για το δοθέν γράφημα και έπειτα να «τρέχουν» έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο για το QST Πρόβλημα. Παρατηρούμε, λοιπόν, πως ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος για το QST Πρόβλημα βρίσκεται στο κέντρο της ανάλυσης των συγγραφέων.

Συνδέσεις των Δύο Άρθρων και Σχετικές Παρατηρήσεις

Με μια πρώτη ματιά βλέπουμε πως και τα δύο άρθρα καταπιάνονται με προβλήματα βελτιστοποίησης πάνω σε δύο μεταβλητές. Προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε το όφελος, ελαχιστοποιώντας το κόστος. Αυτό στην πράξη επιτυγχάνεται απαιτώντας ένα φράγμα για μία από τις δύο μεταβλητές και βελτιστοποιώντας ως προς την άλλη. Για παράδειγμα, στο Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος, ζητάμε να εξασφαλίζεται ένα όφελος, ελαχιστοποιώντας το πλεόνασμα του μονοπατιού. Παρακάτω δίνουμε την τυπική περιγραφή του Προβλήματος Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος και του Δέντρου Steiner με Ποσόστωση.

[11] Christos Papadimitriou and Santosh Vempala. On approximability of the traveling salesman problem. In Procceedings of the 32nd Annual ACM Symposium of Theory of Computing

[12] Lars Engebresten and Marek Karpinski. Approximation hardness of TSP with bounded metrics. In proceedings of the 28th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, pages 201-212. Springer-Verlang, 2001

<table>
<tr><th colspan="2">Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος</th><th colspan="2">Πρόβλημα Δέντρου Steiner με Ποσόστωση</th></tr>
<tr><td>Είσοδος:</td><td>1. Ένα γράφημα $G = (V, E)$
2. Μία αφετηρία και ένα πέρας $s, t \in V$
3. Τα βάρη στις ακμές $d\colon E \to \mathbb{R}_+$
4. Τα οφέλη στους κόμβους $\Pi\colon V \to \mathbb{R}_+$
5. Ποσόστωση $k \in \mathbb{N}$</td><td>Είσοδος:</td><td>1. Ένα γράφημα $G = (V, E)$,
2. Τα βάρη στις ακμές $d\colon E \to \mathbb{R}_+$
3. Τα οφέλη στους κόμβους $\Pi : V \to \mathbb{R}_+$
4. Ποσόστωση $k \in \mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td>Έξοδος:</td><td>Ένα μονοπάτι $P_{st} \subseteq G$ τέτοιο ώστε:
$P_{st} = \min_P(d^P(s,t) - d(s,t))$
$\Pi(P_{st}) \geq k$</td><td>Έξοδος:</td><td>Ένα δέντρο $T^\star \subseteq G$ τέτοιο ώστε:
$T^\star = \min_T d(T) = \Sigma_{e\in E} d(e)$
$\Pi(T^\star) \geq k$</td></tr>
</table>

Συνεπώς, μας γεννήθηκε το ερώτημα, τι θα γινόταν αν στην ανάλυση του δεύτερου άρθρου αντικαθιστούσαμε τον αλγόριθμο για το Δέντρο Steiner με τον αλγόριθμο που παρουσιάζεται στο πρώτο άρθρο για το Μονοπάτι Ελάχιστου Πλεονάσματος, αφού οι «προδιαγραφές» των δύο αλγορίθμων εμφανίζουν αξιοσημείωτες ομοιότητες. Επιπλέον, είναι κατανοητό πως αν ένα γράφημα έχει ένα συνεκτικό σύνολο κυριαρχίας, τότε υπάρχει ένα συνεκτικό σύνολο κυριαρχίας, το οποίο να είναι δέντρο· αρκεί να πάρουμε το δέντρο επικάλυψης (spanning tree) του συνόλου κυριαρχίας. Παρ΄ όλα αυτά, υπάρχουν περιπτώσεις, όπου ένα γράφημα έχει σύνολο κυριαρχίας, το οποίο να είναι μονοπάτι. Σχετικά, θεωρητικά αποτελέσματα, για το πότε συμβαίνει αυτό, υπάρχουν στο άρθρο των Fraudree κ.ά Minimum Degree and Dominating Paths[13].

[13] Ralph J. Fraudree, Ronald J. Gould, Michael S. Jacobson, Douglas B. West, Minimum Degree and Dominating Paths, 2015. Το άρθρο παρουσιάστηκε στο μάθημα Συνδυαστική Βελτιστοποίηση από την Ελένη Αθανασοπούλου και τον Νίκο Παπαργύρη.