# Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Περίληψη 1ου Επιστημονικού Άρθρου

**Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι για τα Προβλήματα Προσανατολισμού**

**και Ελαττωμένης Ανταμοιβής ΠΠ**[1]

Νίκος Λαζαρόπουλος
Μεταπτυχιακός Φοιτητής
ΠΜΣ Επιστήμης Υπολογιστών
Α.Μ.: cs3200001

Μερκούρης Παπαμιχαήλ
Μεταπτυχιακός Φοιτητής
ΔΠΜΣ ΑΛΜΑ
Α.Μ: al1200018

## Ορισμοί Προβλημάτων

Σε αυτό το άρθρο, παρουσιάζεται ο πρώτος προσεγγιστικός αλγόριθμος σταθερού παράγοντα για το Πρόβλημα Προσανατολισμού με δεδομένο κόμβο εκκίνησης (rooted Orienteering Problem), καθώς και για το Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή Ελαττωμένης Ωφέλειας (Discounted Reward TSP), η διερεύνηση του οποίου σχετίζεται με το κίνητρο της πλοήγησης αυτομάτων. Και στα δύο προβλήματα, μας δίνεται ένα γράφημα με μήκη στις ακμές, ανταμοιβές στους κόμβους και κάποιος κόμβος έναρξης. Στο Πρόβλημα Προσανατολισμού, σκοπός είναι η εύρεση μιας διαδρομής που ξεκινά από έναν κόμβο $s$ και συλλέγει ωφέλεια από τους κόμβους που διατρέχει, με το μήκος της να μην ξεπερνά μια δεδομένη ποσότητα. Στο πρόβλημα ΠΠ Ελαττωμένης Ωφέλειας, αντί για ένα όριο μήκους, μας δίνεται ένας συντελεστής ελάττωσης $\gamma$. Ο στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε τη συνολική ωφέλεια, δεδομένης της συσσωρευτικής ελάτωσης που υφίσταται στο πέρασμα από κάθε κόμβο. Θεωρούμε ότι η ελάττωση για έναν κόμβο τη στιγμή $t$ ορίζεται ως $\gamma^t$.
Βασική συμβολή του άρθρου είναι η εισαγωγή του κριτηρίου του Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος (Min Excess Path). Το πλεόνασμα ενός μονοπατιού ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ του μήκους ενός $s,t-$μονοπατιού και της ελάχιστης απόστασης μεταξύ των κόμβων $s$ και $t$. Το πλεόνασμα σε ένα $s,t-$μονοπάτι οφείλεται στην ανάγκη της συλλογής ωφέλειας. Το πρόβλημα λοιπόν αφορά στην αποτίμηση μιας $s,t-$διαδρομής ελαχίστου πλεονάσματος, για την οποία η συνολική ωφέλεια να είναι τουλάχιστον $k$. Η προσέγγιση της βέλτιστης διαδρομής για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος παίζει κύριο ρόλο στους αλγορίθμους των προβλημάτων Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας και Προσανατολισμού, αφού εμφανίζεται σαν υπορουτίνα τους.
Οι συγγραφείς επιλύουν το πρόβλημα του Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος χρησιμοποιώντας μια υπορουτίνα που προσεγγίζει μια παραλλαγή του k-TSP από προγενέστερη μελέτη πάνω στο πρόβλημα εύρεσης $s,t-$διαδρομής ελαχίστου κόστους (πρόβλημα k-PATH). Δοσμένου του προσεγγιστικού λόγου $\alpha_{CP}$ στο k-PATH, ο προτεινόμενος αλγόριθμος για το Μονοπάτι Ελάχιστο Πλεονάσματος αποδεικνύεται να έχει προσεγγιστικό λόγο ίσο με $\alpha_{EP} = 1.5\alpha_{CP} - 0.5$. Περαιτέρω, παρουσιάζεται μια βελτίωση στην προσέγγιση για το πρόβλημα εξετάζοντας τις λεπτομέρειες του αλγορίθμου διαδρομής ελάχιστου κόστους.
Όλα τα προβλήματα που συζητούνται σε αυτό το άρθρο είναι $NP-$δύσκολα, καθώς αποτελούν γενικεύσεις του Προβλήματος Περιοδεύοντος Πωλητή. Όπως αποδεικνύεται στο άρθρο, τόσο το πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος όσο και το Πρόβλημα Προσανατολισμού είναι $APX-$δύσκολα. Δηλαδή, δεν γίνεται να προσεγγιστούν από έναν αυθαίρετο σταθερό παράγοντα $\delta$, εκτός αν $P = NP$.

## Εφαρμογές

Τα προβλήματα που αναλύονται στο άρθρο των Blum κ.ά. παίρνουν το κίνητρό τους, και βρίσκουν εφαρμογές, στην πλοήγηση αυτομάτων (ρομπότ) και στον σχεδιασμό διαδρομών. Στις κοινότητες της Θεωρητικής Επιστήμη Υπολογιστών και Βελτιστοποίησης τα προβλήματα αυτά μοντελοποιούνται σαν Προβλήματα Συλλογής Ωφέλειας Περιοδεύοντος Πωλητή. Στην Τεχνητή Νοημοσύνη, τέτοια προβλήματα, θα μοντελοποιηθούν σαν Μαρκοβιανές Διαδικασίες Απόφασης. Οι συγγραφείς, παρ' όλα αυτά, δεν υιοθετούν μια πιθανοθεωρητική αντιμετώπιση, αφού όλοι οι αλγόριθμοι που παρουσιάζονται είναι αιτιοκρατικοί. Δικαιολογούν αυτή τους την αντιμετώπιση για πολλά προβλήματα πλοήγησης αυτομάτων. Συχνά, οι ενέργειες των αυτομάτων μπορεί να χαρακτηριστούν «σχεδόν» αιτιοκρατικές (υπό την έννοια ότι αποτυγχάνουν με μικρή πιθανότητα $\leq \epsilon$). Έτσι, κατά μέσω όρο, και μετά από πολλά βήματα η όποια στοχαστικότητα αναιρείται. Συνεπώς, μπορούμε να πάρουμε μια καλή προσέγγιση αντιμετωπίζοντας τα προβλήματα αυτά αιτιοκρατικά.

[1] Approximation Algorithms for Orientering and Discounted-Reward TSP

# Κύρια Αποτελέσματα

Θα δώσουμε, τώρα, μια συνοπτική περιγραφή των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στο άρθρο. Αρχικά, θα παρουσιάσουμε το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος, στο οποίο ανάγονται όλα τα προβλήματα του άρθρου. Έπειτα, δίνουμε τα κυριότερα προβλήματα που παρουσιάζονται, αυτά του Μονοπατιού Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας και Προσανατολισμού. Τα Προβλήματα αυτά λύνονται με την χρήση του αλγορίθμου για το Μονοπάτι Ελάχιστου Πλεονάσματος.

### Το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος[2]

Έστω $P^\star$ το συντομότερο $s,t-$μονοπάτι με συνολική ανταμοιβή κόμβων $\Pi(P^\star) \geq k$. Έστω ακόμη $\epsilon(P^\star) = d(P^\star) - d(s,t)$, όπου $d(s,t)$ η συντομότερη απόσταση των $s,t$. Ο αλγόριθμος για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος επιστρέφει μια διαδρομή $P$ με $\Pi(P) \geq k$ και μήκος $d(P) = d(s,t) + a_{EP}\epsilon(P^\star)$, όπου $a_{EP} = \frac{3}{2}a_{CP} - \frac{1}{2}$. Έτσι, προκύπτει μια $(2.5+\delta)-$προσέγγιση για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος, χρησιμοποιώντας έναν γνωστό αλγόριθμο[3] για την εύρεση του Μονοπατιού Ελαχίστου Κόστους (Min-Cost Path ή MCP) που έχει προσεγγιστικό λόγο $a_{CP} = 2 + \delta$. Ο αλγόριθμος στη γενική περίπτωση χωρίζει τη βέλτιστη διαδρομή σε τμήματα που είτε είναι *μονότονα* (το μονοπάτι $P$ λέμε ότι είναι *μονότονο* αν για την ακολουθία κορυφών $\{s, u_1, u_2, ..., u_n, t\}$που το ορίζει ισχύει $0 = d_s < d_1 < d_2 < ... < d_n < d_t$) για τα οποία εύκολα προκύπτει η συντομότερη διαδρομή συνολικής ωφέλειας τουλάχιστον ίσης με $k$ (με ένα απλό *δυναμικό πρόγραμμα*) είτε *«ζικ-ζακ»* (δημιουργώντας μεγάλο πλεονάζον). Αποδεικνύεται ότι το συνολικό μήκος των ζικ-ζακ τμημάτων είναι συγκρίσιμο με το πλεόνασμα της βέλτιστης διαδρομής. Η προτεινόμενη λύση χρησιμοποιεί τις βέλτιστες μονοτόνες διαδρομές και προσεγγίζει το μήκος των ζικ-ζακ τμημάτων κατά έναν σταθερό παράγοντα· αποδίδοντας μια συνολική αύξηση ανάλογη με το πλεόνασμα.

Η βασική συνεισφορά του άρθρου για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος συνίσταται στην προσέγγιση των επιμέρους μονοπατιών στα ζικ-ζακ τμήματα, δηλαδή σε αυτά που *δεν* έχουν την ιδιότητα της μονοτονίας των αποστάσεων από την πηγή. Από εκεί προκύπτει η απόδειξη του προσεγγιστικού λόγου.
Έστω η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{N}$ με $f(d) = card(\{e \in E(P) | e = \{u_1, u_2\}, d_{u_1} < d \leq d_{u_2}\})$. Ισχύει ότι $\forall d \in [0, d_t], f(d) \geq 1$. Η συνάρτηση $f$ είναι τμηματικά σταθερή με την ασυνέχειά της να παρατηρείται σε εκείνες τις τιμές του $d$ που συμπίπτουν με την απόσταση κάποιου κόμβου. Το διάστημα $[0, d_t]$ διαμερίζεται στις περιοχές $B_{1,i}$ για τις οποίες $f(d) = 1$ και στις $B_{2,i}$ όπου $f(d) \geq 2$. Τα διαστήματα $B_{1,i}, B_{2,i}$ είναι μεγιστικά και καλούνται *τύπου-1* και *τύπου-2* αντίστοιχα. Με $V_i$ συμβολίζεται το σύνολο των κόμβων που βρίσκονται στο $i-$διάστημα. Βασιζόμενοι στο ότι $(i)$το βέλτιστο μονοπάτι διέρχεται από κάθε σύνολο $V_i$ μόνο μία φορά και ότι $(ii)$ ένα από κάθε δύο γειτονικά διαστήματα $B_i, B_{i+1}$ είναι *τύπου-1* οι συγγραφείς αποδεικνύουν ότι το συνολικό μήκος των τμημάτων *τύπου-2* είναι το πολύ $\frac{3}{2}\epsilon(P^*)$. Δεδομένης της βέλτιστης λύσης για τα τμήματα *τύπου-1* και σχεδόν βέλτιστης για τα *τύπου-2* προκύπτει ο βέλτιστος τρόπος για να τοποθετήσουμε κάποια υποσύνολά τους μαζί, *μονότονα* χρησιμοποιώντας ένα *δυναμικό πρόγραμμα*. Έτσι, ο αλγόριθμος για το Μονοπάτι Ελάχιστου Πλεονάσματος αποδεικνύεται να έχει προσεγγιστικό λογο ίσο με $a_{EP} = \frac{3}{2}a_{CP} - \frac{1}{2}$, όπου $a_{CP}$ ο προσεγγιστικός λόγος του Προβλήματος Μονοπατιού Ελαχίσου Κόστους.
Οι συγγραφείς παρουσιάζουν επιπλέον μια ελαφρώς βελτιωμένη προσέγγιση για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος αξιοποιώντας τις λεπτομέρειες του αλγορίθμου για το Μονοπάτι Ελάχιστου Κόστους. Μέσω μιας τεχνικής που διπλασιάζει ορισμένες από τις ακμές σε ένα δέντρο κάλυψης κορυφών (περιλαμβάνει τους κόμβους $s, t$ και δεν διπλασιάζει τις ακμές που ανήκουν στο μονοπάτι $s - t$ επί του δέντρου) και συλλογής ανταμοιβής τουλάχιστον ίσης με $k$ επιτυγχάνουν προσεγιστικό λόγο ίσο με $2 + \delta$.

### Το Πρόβλημα Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας[4]

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο βεβαρυμένο γράφημα (τα βάρη των ακμών αντιπροσωπεύουν τον χρόνο να διασχίσουμε μια δεδομένη ακμή), με τιμή ανταμοιβής $\pi_v$ σε κάθε μία κορυφή $v$. Στόχος είναι η εύρεση ενός μονοπατιού που επισκέπτεται κάθε κορυφή $v$ τη χρονική στιγμή $t_v$, ώστε να μεγιστοποιείται η ποσότητα $\rho = \sum \pi_v \gamma^{t_v}$. Με $\gamma$ συμβολίζουμε τον παράγοντα ελάττωσης για τον οποίο ισχύει $0 < \gamma < 1$. Γίνεται η υπόθεση, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο συντελεστής ελάττωσης είναι $\gamma = 1/2$. Σε αντίθετη περίπτωση απλά μετατρέπεται κάθε μήκος $l$ σε $l^{'}$ έτσι ώστε $\gamma^l = \left(\frac{1}{2}\right)^{l^{'}}$. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος προβλέπει για κάθε κόμβο $u$ την ποσότητα $\pi_{u^{'}} = \gamma^{d_u}\pi_u$, όπου $d_u$ η ελάχιστη απόσταση του κόμβου, από τον εναρκτήριο κόμβο $s$. Έτσι προκύπτει ένα τροποποιημένο γράφημα $G^{'}$. Μαντεύουμε κάποιον κόμβο $t$, κοντά στον τελευταίο κόμβο του βέλτιστου μονοπατιού $P^\star$. Απαιτούμε το πλεόνασμα του $t$, πάνω στο $P^\star$, να μην ξεπερνά δοσμένη σταθερά $\epsilon$. Μαντεύουμε, επιπλέον την τιμή $k$, που είναι η τιμή της ανταμοιβής $\Pi^{'}(P^*_t)$. Τότε, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμος για το Μονοπάτι Ελαχίστου Πλεονάσματος και παίρνουμε ένα μονοπάτι $P$ που έχει ανταμοιβή τουλάχιστον ίση με $k$.
Για τον προτεινόμενο αλγόριθμο αποδεικνύεται ότι ισχύει $\rho(P) \geq (1 - \frac{1}{2^\epsilon})\rho(P^*)/2^{\alpha_{EP}\epsilon}$, όπου $\alpha_{EP}$ ο λόγος προσέγγισης του Προβλήματος Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος.

[2] Min-Excess Path
[3] K. Chaudhuri, B. Godfrey, S. Rao, and K. Talwar. Paths, trees, and minimum latency tours. In Proceedings of the 44th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Cambridge, Massachusetts, 2003.
[4] Discounted-Reward TSP

**Το Πρόβλημα Προσανατολισμού**[5]

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο βεβαρυμένο γράφημα, όπου τα βάρη των ακμών αντιστοιχούν στο μήκος κάθε ακμής. Πάλι θεωρούμε πως υπάρχει κάποιο όφελος σε κάθε κόμβο $v$, το οποίο θα συμβολίζουμε με $\pi_v$. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα μονοπάτι συνολικού μήκους το πολύ $D$, με εναρκτήριο κόμβο $s$, το οποίο να μεγιστοποιεί το όφελος. Και εδώ, θα μαντέψουμε την τιμή της βέλτιστης λύσης $k$, δοκιμάζοντας όλα τα δυνατά $k$. Έστω $\alpha = \lceil \alpha_{EP} + 1 \rceil$. Στον αλγόριθμο που παρουσιάζεται, χωρίσουμε το βέλτιστο όφελος σε $\alpha$ τμήματα. Έπειτα, ζητάμε από τον αλγόριθμο για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος να βρει ένα μονοπάτι από το $s$ προς κάθε άλλο κόμβο $v$ του γραφήματος με όφελος τουλάχιστον $k/\alpha$. Ως λύση επιστρέφεται το $s,v-$μονοπάτι με συνολικό μήκος το πολύ $D$. Αποδεικνύεται πως η βέλτιστη λύση θα περιέχει κάποιο μονοπάτι με μικρό πλεονάζον, το οποίο με την σειρά του είναι μια προσέγγιση της βέλτιστης λύσης. Ειδικότερα, στο άρθρο τους οι Blum κ.ά. Αποδεικνύουν πως υπάρχει κάποιο $s,v-$μονοπάτι με πλεονάζον το πολύ $\frac{D-d_v}{\alpha_{EP}}$ το οποίο συλλέγει όφελος τουλάχιστον $\frac{\Pi^\star}{\alpha_{PP}}$, με το $\Pi^\star$ να συμβολίζει το βέλτιστο όφελος και $\alpha_{PP}$ τον λόγο προσέγγισης που θέλουμε να πετύχουμε για το Πρόβλημα Προσανατολισμού. Υποθέτοντας πως υπάρχει τέτοιο μονοπάτι ο αλγόριθμος θα επιστρέψει κάποιο μονοπάτι με συνολικό μήκος $d_v + \alpha_{EP}\frac{D-d_v}{\alpha_{EP}} = D$ και όφελος τουλάχιστον $\frac{\Pi^\star}{\alpha_{PP}}$. Το οποίο θα μας δώσει και την επιθυμητή προσέγγιση. Τέλος, στην απόδειξη της αναγωγής στο Πρόβλημα Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος, υπολογίζεται πως $\alpha_{PP} = \lceil \alpha_{EP} \rceil + 1$.

## Επεκτάσεις

Στο άρθρο παρουσιάζονται επιπλέον αποτελέσματα για τα συγγενικά προβλήματα του δέντρου και κύκλου μέγιστης ωφέλειας. Αμφότερα τα προβλήματα ανάγονται στο Πρόβλημα Προσανατολισμού. Στο Πρόβλημα Δέντρου Μέγιστης Ωφέλειας[6] δεδομένου ενός βεβαρημένου γραφήματος $G$ με μήκη στις ακμές και οφέλη στους κόμβους, ζητάμε να βρούμε ένα δέντρο $\mathcal{T}$ με ρίζα $r$, τέτοιο ώστε $d(\mathcal{T}) = \sum_{l \in leaf(\mathcal{T})} d(r,l) \leq D$. Το όφελος του δέντρου θα το συμβολίζουμε με $\Pi(\mathcal{T}) = \sum_{v \in \mathcal{T}} \pi_v$. Παρ' όλο που η εκδοχή του προβλήματος, χωρίς το περιορισμό ρίζας, έχει μελετηθεί, το πρόβλημα για ριζωμένο δέντρο έμενε ανοιχτό μέχρι πρόσφατα. Οι συγγραφείς έκανα τις εξής παρατηρήσεις. Θεωρήστε το βέλτιστο δέντρο $\mathcal{T}^\star$. Αν περιπλανηθούμε πάνω στις ακμές του δέντρο και από τις δύο κατευθύνσεις θα πάρουμε έναν περίπατο Euler μήκους το πολύ $2D$. Στην συνέχεια, χωρίζουμε το δέντρο σε μονοπάτια από την ρίζα προς κάθε κόμβο του. Το μήκος τους θα είναι το πολύ $D$. Έστω $P'$ το μονοπάτι, ανάμεσα τους, με το μεγαλύτερο όφελος. Έστω $P^\star$ το μονοπάτι μεγαλύτερης ωφέλειας, με μήκος το πολύ $D$, πάνω σε ολόκληρο το γράφημα $G$. Τότε θα έχουμε $\Pi(P^\star) \geq \Pi(P') \geq \frac{\Pi(\mathcal{T}^\star)}{2}$. Έτσι, ολοκληρώνεται η αναγωγή και παίρνουμε μια $2\alpha_{PP}-$προσέγγιση για το $\mathcal{T}^\star$. Για το Πρόβλημα Κύκλου Μέγιστης Ωφέλειας ζητάμε να βρούμε έναν κύκλο μήκους $D$ που να περιέχει κάποιον κόμβο $s$. Πάλι θα προσεγγίζουμε την ζητούμενη λύση (εδώ έναν κύκλο) από ένα μονοπάτι. Εδώ θα ζητήσουμε από τον αλγόριθμο για το Πρόβλημα Προσανατολισμού να μας βρει ένα μονοπάτι μήκους $D/2$ με αρχή το $s$. Έπειτα, αν $t$ το πέρας του μονοπατιού που επιστρέφεται, συνδέουμε το $s$ με το $t$ με το ελάχιστο μονοπάτι. Έτσι, το μήκος του προκύπτοντος κύκλου δεν θα ξεπερνάει το $D$. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε μία $2\alpha_{PP}-$προσέγγιση του Προβλήματος Κύκλου Μέγιστης Ωφέλειας.

Ένα άλλο συγγενικό πρόβλημα που εξετάζουν οι συγγραφείς, είναι η παραλλαγή του Προβλήματος Προσανατολισμού, όπου μας επιτρέπεται να κατασκευάσουμε μέχρι $k$ μονοπάτια, κάθε ένα από τα οποία να έχει μήκος το πολύ $D$, ενώ δεν μας δίνεται κάποιος εναρκτήριος κόμβος $s$. Στο άρθρο το πρόβλημα αυτό ονομάζεται Προσανατολισμός Πολλαπλών Μονοπατιών[7] Θα προσεγγίσουμε την λύση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Προβλήματος Προσανατολισμού $k$ φορές, μαντεύοντας, κάθε φορά, κάποιον εναρκτήριο κόμβο $s$. Κάθε φορά που κάνουμε κλήση στον αλγόριθμο θα μηδενίζουμε το όφελος όλων των κόμβων που έχουμε επισκεφτεί. Έτσι παίρνουμε έναν λόγο προσέγγισης $1/(1-e^{-\alpha_{PP}})$, στην περίπτωση που όλα τα μονοπάτια έχουν κοινή αρχή, διαφορετικά ο λόγος προσέγγισης θα είναι $\alpha_{pp} + 1$.

## Δυσκολία Προσέγγισης

Όλα τα προβλήματα που εξετάστηκαν στο άρθρο των Blum κ.ά. είναι $NP-$δύσκολα, εφόσον προκύπτουν σαν γενικεύσεις του Προβλήματος Περιοδεύοντος Πωλητή. Οι συγγραφείς στο άρθρο τους προσφέρουν επιχειρήματα για την δυσκολία προσέγγισης των προβλημάτων Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος και Προσανατολισμού. Η δυσκολία προσέγγισης του Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος προκύπτει από την $APX-$δυσκολία του ΠΠΠ (Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή)[8]. Μάλιστα, για να αναχθούμε από το ΠΠΠ στο Μονοπάτι Ελάχιστου Πλεονάσματος, αρκεί να δώσουμε οποιουσδήποτε δύο κόμβους σαν αρχή και πέρας του ζητούμενου μονοπατιού, να θεωρήσουμε μοναδιαίο όφελος σε κάθε κόμβο και να ζητήσουμε συνολικό όφελος τουλάχιστον $n$. Η δυσκολία προσέγγισης που δίνεται από του συγγραφείς για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος είναι $\frac{220}{219}$. Ακόμη, στο άρθρο αποδεικνύεται η δυσκολία προσέγγισης $\frac{1481}{1480}$ για το

[5]Orientering
[6]Max-Prized Tree
[7]Multiple-Path Orientering
[8]Christos Papadimitriou and Santosh Vempala. On approximability of the traveling salesman problem. In Procceedings of the 32nd Annual ACM Symposium of Theory of Computing

Πρόβλημα Προσανατολισμού ανάγοντας το ΠΠΠ για γραφήματα με μήκη στο $\{1, 2\}$ στο πρόβλημα αυτό. Η αναγωγή βασίζεται στην δουλειά των Engebresten and Karpinski[9].

[9] Lars Engebresten and Marek Karpinski. Approximation hardness of TSP with bounded metrics. In proceedings of the 28th International Colloquium on Automata, Languages ang Programming, pages 201-212. Springer-Verlang, 2001