Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι για τα Προβλήματα Προσανατολισμού και Ελαττωμένης Ωφέλειας Περιοδεύοντος Πωλητή

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Νίκος Λαζαρόπουλος[1] Μερκούρης Παπαμιχαήλ[2]

[1]ΠΜΣ στην Πληροφορική
Υπολογιστικά Συστήματα: Λογισμικό και Υλικό

[2]ΔΠΜΣ στους Αλγόριθμους, την Λογική και τα Διακριτά Μαθηματικά

Χειμερινό Εξάμηνο 2020

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Ορισμοί

Στο **Πρόβλημα Προσανατολισμού**, σκοπός είναι η εύρεση μιας διαδρομής που ξεκινά από έναν κόμβο s και συλλέγει ωφέλεια από τους κόμβους που διατρέχει, με το μήκος της να μην ξεπερνά μια δεδομένη ποσότητα.

Στο **Πρόβλημα ΠΠ Ελαττωμένης Ωφέλειας**, αντί για ένα όριο μήκους, μας δίνεται ένας συντελεστής ελάττωσης γ. Ο στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε τη συνολική ωφέλεια, δεδομένης της συσσωρευτικής ελάττωσης που υφίσταται στο πέρασμα από κάθε κόμβο. Θεωρούμε ότι η ελάττωση για έναν κόμβο τη στιγμή t ορίζεται ως γ^t.

Min Excess Path Problem

Το κριτήριο του Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος (Min Excess Path):
Το πλεόνασμα ενός μονοπατιού ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ του μήκους ενός s,t-μονοπατιού και της ελάχιστης απόστασης μεταξύ των κόμβων s και t. Το πλεόνασμα σε ένα s,t-μονοπάτι οφείλεται στην ανάγκη της συλλογής ωφέλειας. Το πρόβλημα λοιπόν αφορά στην αποτίμηση μιας s,t-διαδρομής ελαχίστου πλεονάσματος, για την οποία η συνολική ωφέλεια πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με k.
Η προσέγγιση της βέλτιστης διαδρομής για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος παίζει κύριο ρόλο στους αλγορίθμους των προβλημάτων Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας και Προσανατολισμού, αφού εμφανίζεται σαν υπορουτίνα τους.

Περιεχόμενα

Συμβολισμός (1)

Εισάγουμε εδώ έναν συμβολισμό, όπου θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, με μήκη πάνω στις ακμές και οφέλη πάνω στους κόμβους.

- Τα *μήκη* στις ακμές δίνονται από τη συνάρτηση $d\colon E \to \mathbb{R}^+$.
- Τα *οφέλη* στους κόμβους δίνονται από την συνάρτηση $\pi\colon V \to \mathbb{R}^+$. Θα συμβολίζουμε $\pi_v = \pi(v)$.

Θα ενδιαφερόμαστε για *ομοαφετηριακά* μονοπάτια, τα οποία ξεκινούν από έναν εναρκτήριο κόμβο $s \in V$. Έστω, ένα $s, v-$ μονοπάτι P, τότε συμβολίζουμε με:

- $d_v = d(s, v)$, την *συντομότερη* απόσταση των s, v.
- $d^P(v)$, την απόσταση των s, v *κατά μήκος* του μονοπατιού P.
- Θα ισχύει $d_v \leq d^P(v)$.

Συμβολισμός (2)

Έστω, τα υποσύνολα κόμβων και ακμών V', E' εισάγουμε τον συμβολισμό:

- $\Pi(V') = \sum_{v \in V'} \pi_v$
- $d(E') = \sum_{e \in E'} d(e)$

Για το πρόβλημα ελαττωμένης ωφέλειάς, για ένα $s, t-$μονοπάτι P, με παράγοντα ελάττωσης γ, θα συμβολίζουμε:

- $\rho_v^P = \pi_v \gamma^{d^P(s,v)}$, το όφελος που αποκομίζουμε από τον κόμβο v.
- $\rho^P = \sum_{v \in P} \rho_v^P$, το συνολικό όφελος του μονοπατιού.

Παραδοχές

Στο εξής, κάνουμε τις εξής παραδοχές για τα Προβλήματα Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας και Προσανατολισμού.

- Θεωρούμε όλα τα οφέλη να είναι ακέραιοι στο σύνολο $\{1, \ldots, n^2\}$.
- Το καταφέρνουμε αυτό, προσαρμόζοντας όλα τα οφέλη, ώστε το μέγιστο όφελος να ισούται με n^2.
- Έτσι, το μέγιστο συνολικό όφελος θα είναι της τάξης του n^3.
- Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να δοκιμάσουμε όλα τα δυνατά συνολικά οφέλη σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Η προσαρμογή αυτή δεν επηρεάζει την ποιότητα της προσέγγισής μας.

Περιεχόμενα

Κίνητρο

Οι αλγόριθμοι που παρουσιάζουμε βρίσκουν εφαρμογή και παίρνουν κίνητρο στην πλοήγηση αυτομάτων (ρομπότ).

- Στην Συνδυαστική Βελτιστοποίηση, μοντελοποιείται σαν Προβλήματα Συλλογής Ωφέλειας Περιοδεύοντος Πωλητή.

- Στην Τεχνητή Νοημοσύνη, μοντελοποιείται σαν Μαρκοβιανές Διαδικασίες Απόφασης.

Αιτιοκρατία

Μπορούμε να απαλείψουμε την στοχαστικότητα στα μοντέλα Μαρκοβιανών Διαδικασιών Απόφασης, υποθέτοντας ότι:

- Οι ενέργειες των αυτομάτων είναι «σχεδόν» αιτιοκρατικές.
- Υποθέτουμε μικρή πιθανότητα αποτυχίας των ενεργειών των αυτομάτων ($\leq \epsilon$).
- Η πιθανότητα αποτυχίας, κατά μέσο όρο και μετά από πολλά βήματα συγκλίνει στο μηδέν.

Έτσι, η αιτιοκρατική θεώρηση είναι λογική.

Περιεχόμενα

Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος

Ο προσεγγιστικός Αλγόριθμος

1. Έστω $P^\star$ το συντομότερο s, t-μονοπάτι με συνολική ανταμοιβή κόμβων $\Pi(P^\star) \geq k$ και $\epsilon(P^\star) = d(P^\star) - d(s,t)$, όπου $d(s,t)$ η συντομότερη απόσταση των s, t.
2. Ο αλγόριθμος για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος επιστρέφει μια διαδρομή P με $\Pi(P) \geq k$ και μήκος $d(P) = d(s,t) + a_{EP}\epsilon(P^\star)$, όπου $a_{EP} = \frac{3}{2}a_{CP} - \frac{1}{2}$.
3. Προκύπτει μια $(2.5 + \delta)-$προσέγγιση για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος.
4. Γίνεται χρήση ενός γνωστού αλγορίθμου [a] για την εύρεση του Μονοπατιού Ελαχίστου Κόστους (Min-Cost Path ή MCP) που έχει προσεγγιστικό λόγο $a_{CP} = 2 + \delta$.

---

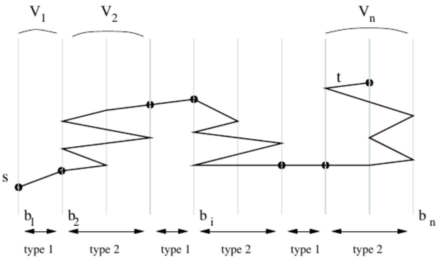
[a] K. Chaudhuri, B. Godfrey, S. Rao, and K. Talwar. Paths, trees, and minimum latency tours. In Proceedings of the 44th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Cambridge, Massachusetts, 2003.

Η ιδέα του Αλγορίθμου (1)

Κατασκευή της βέλτιστης διαδρομής

1. Ο αλγόριθμος στη γενική περίπτωση χωρίζει τη βέλτιστη διαδρομή σε τμήματα που είναι **μονότονα** (το μονοπάτι P λέμε ότι είναι μονότονο αν για την ακολουθία κορυφών $\{s, u_1, u_2, \ldots, u_n, t\}$που το ορίζει ισχύει $0 = d_s < d_1 < d_2 < \ldots < d_n < d_t$) για τα οποία προκύπτει η συντομότερη διαδρομή συνολικής ωφέλειας τουλάχιστον ίσης με k με ένα απλό πρόγραμμα Δ.Π.
2. Και σε τμήματα «ζικ-ζακ» (δημιουργώντας μεγάλο πλεονάζον). Αποδεικνύεται ότι το συνολικό μήκος των ζικ-ζακ τμημάτων είναι συγκρίσιμο με το πλεόνασμα της βέλτιστης διαδρομής.
3. Η προτεινόμενη λύση χρησιμοποιεί τις βέλτιστες μονοτόνες διαδρομές και προσεγγίζει το μήκος των ζικ-ζακ τμημάτων κατά έναν σταθερό παράγοντα· αποδίδοντας μια συνολική αύξηση ανάλογη με το πλεόνασμα.

Η ιδέα του Αλγορίθμου (2)



Σχήμα: Οι τύποι διαστημάτων ενός μονοπατιού.

Υπολογισμός της συνεισφοράς των «ζικ-ζακ» τμημάτων

Η βασική συνεισφορά του άρθρου για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος συνίσταται στην προσέγγιση των επιμέρους μονοπατιών στα ζικ-ζακ τμήματα, δηλαδή σε αυτά που δεν έχουν την ιδιότητα της μονοτονίας των αποστάσεων από την πηγή. Από εκεί προκύπτει η απόδειξη του προσεγγιστικού λόγου.

Η ιδέα του Αλγορίθμου (3)

Κατασκευή της βέλτιστης διαδρομής - 1

1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{N}$ με
$f(d) = card(\{e \in E(P) | e = \{u_1, u_2\}, d_{u_1} < d \leq d_{u_2}\})$.
Ισχύει ότι $\forall d \in [0, d_t], f(d) \geq 1$.
2. Η συνάρτηση f είναι τμηματικά σταθερή με την ασυνέχειά της να παρατηρείται σε εκείνες τις τιμές του d που συμπίπτουν με την απόσταση κάποιου κόμβου.
3. Το διάστημα $[0, d_t]$ διαμερίζεται στις περιοχές $B_{1,i}$ για τις οποίες $f(d) = 1$ και στις $B_{2,i}$ όπου $f(d) \geq 2$.
4. Τα διαστήματα $B_{1,i}, B_{2,i}$ είναι μεγιστικά και καλούνται τύπου-1 και τύπου-2 αντίστοιχα.
5. Με V_i συμβολίζεται το σύνολο των κόμβων που βρίσκονται στο $i-$διάστημα.

Κατασκευή της βέλτιστης διαδρομής - 2

1. Το βέλτιστο μονοπάτι διέρχεται από κάθε σύνολο V_i μόνο μία φορά.
2. Ένα από κάθε δύο γειτονικά διαστήματα B_i, B_{i+1} είναι τύπου-1
3. Προκύπτει ότι το συνολικό μήκος των τμημάτων τύπου-2 είναι το πολύ $\frac{3}{2}\epsilon(P^*)$, $\epsilon(P^\star) = d(P^\star) - d(s,t)$.
4. Δεδομένης της βέλτιστης λύσης για τα τμήματα τύπου-1 και σχεδόν βέλτιστης για τα τύπου-2 προκύπτει ο σχεδόν βέλτιστος τρόπος για να τοποθετήσουμε κάποια τμήματά τους μαζί, με μονότονο τρόπο και χρησιμοποιώντας ένα δυναμικό πρόγραμμα.
5. Έτσι, ο αλγόριθμος για το Μονοπάτι Ελάχιστου Πλεονάσματος αποδεικνύεται να έχει προσεγγιστικό λογο ίσο με $a_{EP} = \frac{3}{2}a_{CP} - \frac{1}{2}$, όπου a_{CP} ο προσεγγιστικός λόγος του Προβλήματος Μονοπατιού Ελαχίστου Κόστους.

Η ιδέα του Αλγορίθμου (5)

Συνεισφορά στο Μονοπάτι Ελαχίστου Κόστους

Οι συγγραφείς παρουσιάζουν επιπλέον μια ελαφρώς βελτιωμένη προσέγγιση για το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάσματος αξιοποιώντας τις λεπτομέρειες του αλγορίθμου για το Μονοπάτι Ελάχιστου Κόστους. Μέσω μιας τεχνικής που διπλασιάζει ορισμένες από τις ακμές σε ένα δέντρο κάλυψης κορυφών (περιλαμβάνει τους κόμβους s, t και δεν διπλασιάζει τις ακμές που ανήκουν στο μονοπάτι $s-t$ επί του δέντρου) και συλλογής ανταμοιβής τουλάχιστον ίσης με k επιτυγχάνουν προσεγιστικό λόγο ίσο με $2+\delta$.

Πρόβλημα Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας (1)

Ορισμός Προβλήματος

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο βεβαρυμένο γράφημα (τα βάρη των ακμών αντιπροσωπεύουν τον χρόνο να διασχίσουμε μια δεδομένη ακμή) $G = (V, E)$, με τιμή ανταμοιβής π_v σε κάθε μία κορυφή . Στόχος είναι η εύρεση ενός μονοπατιού που επισκέπτεται κάθε κορυφή τη χρονική στιγμή t_v, ώστε να μεγιστοποιείται η ποσότητα $\rho = \sum \pi_v \gamma^{t_v}$. Με γ συμβολίζουμε τον παράγοντα ελάττωσης για τον οποίο ισχύει $0 < \gamma < 1$.

Πρόβλημα Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας (2)

Αλγόριθμος

1. Αν $\gamma \neq 1/2$ μετατρέπουμε κάθε μήκους l σε l' έτσι ώστε $\gamma^l = \left(\frac{1}{2}\right)^{l'}$.
2. Έστω το τροποποιημένο γράφημα G', όπου σε κάθε κόμβο u αντιστοιχίζουμε την ποσότητα $\pi_{u'} = \gamma^{d_u}\pi_u$, d_u είναι η ελάχιστη απόσταση του κάθε κόμβου από τον εναρκτήριο κόμβο s.
3. Αναζητούμε εξαντλητικά κάποιον κόμβο t, κοντά στον τελευταίο κόμβο του βέλτιστου μονοπατιού $P^\star$. Απαιτούμε το πλεόνασμα του t, πάνω στο $P^\star$, να μην ξεπερνά δοσμένη σταθερά ϵ.
4. Αναζητούμε, επιπλέον την τιμή k, που είναι η τιμή της ανταμοιβής $\Pi'(P_t^*)$.
5. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο για το Μονοπάτι Ελαχίστου Πλεονάσματος και παίρνουμε ένα μονοπάτι P που έχει ανταμοιβή τουλάχιστον ίση με k.

Πρόβλημα Μέγιστης Ελαττωμένης Ωφέλειας (3)

Προσεγγιστικός Λόγος

Για τον προτεινόμενο αλγόριθμο αποδεικνύεται ότι ισχύει $\rho(P) \geq (1 - \frac{1}{2^\epsilon})\rho(P^*)/2^{\alpha_{EP}\epsilon}$,
όπου α_{EP} ο λόγος προσέγγισης του Προβλήματος Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος.

Πρόβλημα Προσανατολισμού (1)

Ορισμός Προβλήματος

Έστω ένα βεβαρυμένο γράφημα $G = (V, E)$, με μήκη πάνω στις ακμές και οφέλη στους κόμβους. Έστω, επίσης, ένας εναρκτήριος κόμβος $s \in V$ και ένας φυσικός αριθμός $D \in \mathbb{N}$. Το ζητούμενο είναι να βρούμε ένα μονοπάτι P, το οποίο να ξεκινάει από το s, έχει μήκος το πολύ D και μεγιστοποιεί το συνολικό όφελος.

Πρόβλημα Προσανατολισμού (2)

Γίνεται η ακόλουθη παρατήρηση.

Λήμμα 5.1

Έστω ένα μονοπάτι P_{st} από το s στο t με $|P_{st}| \leq D$ και να ισχύει, $d_t \geq d_v$ *για κάθε κόμβο* v *στο* P_{st}. Έστω, επίσης, $\Pi = \Pi(P_{st})$. Τότε, υπάρχει ένα μονοπάτι από τον s σε κάποιον άλλο κόμβο v, με πλεόνασμα το πολύ $\frac{D-d_v}{r}$ και όφελος τουλάχιστον $\frac{\Pi}{r}$ (για κάθε φυσικό $r \geq 1$).

Ενώ, αποδεικνύεται και η παρακάτω η *ισχυροποίηση* του παραπάνω λήμματος.

Λήμμα 5.2

Έστω ένα μονοπάτι από το s στο t μέγιστου μήκους D, το οποίο συλλέγει όφελος Π. Τότε, υπάρχει ένα μονοπάτι από τον s σε κάποιον άλλο κόμβο v, με πλεόνασμα το πολύ $\frac{D-d_v}{r}$ και όφελος τουλάχιστον $\frac{\Pi}{r+1}$ (για κάθε φυσικό $r \geq 1$).

Πρόβλημα Προσανατολισμού (3)

Κάνουμε χρήση των παραπάνω Λημμάτων στον εξής αλγόριθμο

Αλγόριθμος

$\alpha \leftarrow \lceil \alpha_{EP} \rceil + 1$

Για $k \leftarrow 1$ **ως** $\Pi_{\max}$:

- **Για κάθε** $v \in V$:
  - Υπολόγισε ένα s, v–μονοπάτι P_{sv} Ελάχιστου Πλεονάσματος το οποίο να συλλέγει όφελος τουλάχιστον k/α.
  - **Αν** $|P_{sv}| \leq D$:
    - **Επέστρεψε** P_{sv}

Παρατηρήστε πως αναζητώντας εξαντλητικά όλα τα k και v μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάποιο από αυτά θα αντιστοιχεί στο όφελος και κάποιον κόμβο v του βέλτιστου μονοπατιού.

Πρόβλημα Προσανατολισμού (4)

Αποδεικνύουμε την εγγύηση προσέγγισης στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε για το Πρόβλημα Προσανατολισμού δίνει μια $(\alpha_{EP}+1)$–προσέγγιση της βέλτιστης λύσης, όπου α_{EP} ο παράγοντας προσέγγισης για το Μονοπάτι Ελάχιστου Πλεονάσματος.

Απόδειξη

Από το Λήμμα 5.2, παίρνουμε ότι υπάρχει ένα s,v–μονοπάτι P_{sv} με πλεόνασμα $\frac{D-d_v}{\lceil\alpha_{EP}\rceil}$, το οποίο συλλέγει όφελος, $\frac{\Pi^\star}{\lceil\alpha_{EP}\rceil+1}$. Από τον ορισμό πλεονάσματος, θα ισχύει για το μήκος του s,v–μονοπατιού $|P_{sv}| = d_v + \frac{D-d_v}{\lceil\alpha_{EP}\rceil}$. Συνεπώς, ο προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Μονοπάτι Ελαχίστου Πλεονάσματος θα επιστρέψει ένα μονοπάτι μήκους $d_v + (D-d_v) = D$, με το ίδιο όφελος $\frac{\Pi^\star}{\lceil\alpha_{EP}\rceil+1}$.

Περιεχόμενα

Πρόβλημα Δέντρου Μέγιστης Ωφέλειας (1)

Ορισμός Προβλήματος

Έστω ένα βεβαρυμένο γράφημα $G = (V, E)$, με μήκη πάνω στις ακμές και οφέλη στους κόμβους. Έστω, επίσης ένας κόμβος $r \in V$ και ένας φυσικός αριθμός $D \in \mathbb{N}$. Ζητάμε να βρούμε ένα δέντρο $T \subseteq G$ με $r \in V(T)$, τέτοιο ώστε:

$$d(T) = \sum_{l \in leaf(T)} d(r, l) \leq D$$

Με χρήση του Αλγορίθμου για το Πρόβλημα Προσανατολισμού μπορούμε να πάρουμε μία $2\alpha_{PP}$-προσέγγιση για το Πρόβλημα Δέντρου Μέγιστης Ωφέλειας.

Πρόβλημα Δέντρου Μέγιστης Ωφέλειας (2)

Θα δείξουμε ότι το μονοπάτι βέλτιστης ωφέλειας προσεγγίζει στο ζητούμενο δέντρο.

1. Έστω $T^\star$ το βέλτιστο δέντρο.
2. Περνάμε δύο φορές από κάθε ακμή.
3. Παίρνουμε περίπατο Euler μήκους $2D$.
4. Χωρίζουμε το δέντρο σε μονοπάτια από την ρίζα του r, σε κάθε κόμβο του.
5. Το μήκος κάθε μονοπατιού θα είναι το πολύ D.
6. Έστω, P' το μονοπάτι με το μεγαλύτερο όφελος, ανάμεσα στα παραπάνω.
7. Αν $P^\star$ το μονοπάτι μεγαλύτερου οφέλους με μήκος το πολύ D.
8. Έχουμε $\Pi(P^\star) \geq \Pi(P') \geq \frac{\Pi(T^\star)}{2}$.

Πρόβλημα Κύκλου Μέγιστης Ωφέλειας (1)

Ορισμός Προβλήματος

Έστω ένα βεβαρυμένο γράφημα $G = (V, E)$, με μήκη πάνω στις ακμές και οφέλη στους κόμβους. Έστω, επίσης ένας κόμβος $s \in V$ και ένας φυσικός αριθμός $D \in \mathbb{N}$. Ζητάμε να βρούμε έναν κύκλο $C \subseteq G$ με $s \in V(C)$, τέτοιο ώστε $|C| \leq D$.

Με χρήση του Αλγορίθμου για το Πρόβλημα Προσανατολισμού μπορούμε να πάρουμε μία $2\alpha_{PP}$-προσέγγιση για το Πρόβλημα Κύκλου Μέγιστης Ωφέλειας.

Πρόβλημα Κύκλου Μέγιστης Ωφέλειας (2)

1. Ζητάμε από τον Αλγόριθμο για το Πρόβλημα Προσανατολισμού να βρει ένα μονοπάτι μήκους $D/2$, που ξεκινάει από το s.

2. Αν t το πέρας του μονοπατιού που επιστρέφεται, συνδέουμε το s με το t με το ελάχιστο μονοπάτι.

3. Έτσι, το μήκος του προκύπτοντος κύκλου C δεν θα ξεπερνάει το D.

4. Το όφελος του βέλτιστου κύκλου $C^\star$ δεν μπορεί να ξεπερνά το διπλάσιο του οφέλους του C.

Πρόβλημα Προσανατολισμού Πολλαπλών Μονοπατιών (1)

Σε αυτό το πρόβλημα μας επιτρέπεται να κατασκευάσουμε k μονοπάτια, καθ' ένα από τα οποία να έχει μήκος το πολύ D. Δίνεται ο παρακάτω αλγόριθμος.

Αλγόριθμος Προσανατολισμού Πολλαπλών Μονοπατιών

Για $i \leftarrow 1$ ***ως*** k :
- **Για κάθε** $s \in G$:
  - Υπολόγισε μια προσέγγιση του βέλτιστου μονοπατιού P_s από το s, με $|P_s| \leq D$
- $P_i \leftarrow \max_{P_s} \Pi(P_s)$
- **Για κάθε** $v \in P_i$:
  - $\pi(v) \leftarrow 0$

Επέστρεψε $\{P_i \mid i \in [k]\}$

Πρόβλημα Προσανατολισμού Πολλαπλών Μονοπατιών (2)

Σχετικά με την ποιότητα της προσέγγισης του προηγούμενου αλγορίθμου αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Έστω α_{PP} ο λόγος προσέγγισης για το Πρόβλημα Προσανατολισμού. Ο Αλγόριθμος Προσανατολισμού Πολλαπλών Μονοπατιών, στην περίπτωση που όλα τα μονοπάτια έχουν κοινή αρχή, έχει λόγο προσέγγισης $1/(1 - e^{\alpha_{PP}})$. Σε διαφορετική περίπτωση ο λόγος προσέγγισης είναι $\alpha_{PP} + 1$.

Περιεχόμενα

Δυσκολία Προσέγγισης (1)

- Όλα τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν είναι NP–δύσκολα.

- Προκύπτουν σαν γενικεύσεις του Προβλήματος Περιοδεύοντος Πωλητή.

- Για τα Προβλήματα Μονοπατιού Ελαχίστου Πλεονάασματος και Προσανατολισμού αποδεικνύεται πως δεν υπάρχει Προσεγγιστικό Σχήμα Πολυωνυμικού Χρόνου ($PTAS$), εκτός αν $P = NP$.

Δυσκολία Προσέγγισης (2)

Θεώρημα

Το Πρόβλημα Μονοπατιού Ελάχιστου Πλεονάσματος είναι NP–δύσκολο να προσεγγιστεί με ακρίβεια μεγαλύτερη από $\frac{220}{219}$.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι μία α–προσέγγιση του ΜΕΠ είναι μια α–προσέγγιση του ΠΠΠ. Μπορούμε να αναχθούμε από το ΠΠΠ στο ΜΕΠ στο ίδιο γράφημα. Για θεωρούμε αρχή και πέρας του ζητούμενου μονοπατιού, οποιουσδήποτε δύο διαφορετικούς κόμβους και απαιτούμε όφελος, τουλάχιστον $n = |V|$. Από το άρθρο [a] των Παπαδημητρίου και Vempala για το ΠΠΠ προκύπτει το ζητούμενο.

[a] Christos Papadimitriou and Santosh Vempala. On the approximability of the traveling salesman problem. In Proceedings of the 32th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 2000.

Δυσκολία Προσέγγισης (3)

Με αναγωγή του ΠΠΠ σε $\{1,2\}$–μετρικές στο Πρόβλημα Προσανατολισμού, και από την δουλεία [1] των Engebretsen και Karpinski έπαιται το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Το Πρόβλημα Προσανατολισμού είναι *NP*–δύσκολο να προσεγγιστεί με ακρίβεια μεγαλύτερη από $\frac{1481}{1480}$.

[1] Lars Engebretsen and Marek Karpinski. Approximation hardness of TSP with bounded metrics. In Procceedings of the 28th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, pages 201–212. Springer-Verlang, 2001.

Περιεχόμενα

Σύνοψη

Παρακάτω δίνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στον άρθρο.

Problem	Best approx.	Source/Reduction	Hardness of approximation
min-cost s-t path (k-PATH)	$\alpha_{CP} = 2 + \delta$	[9]	$220/219$
min-excess path	$\alpha_{EP} = 2.5 + \delta$	$\frac{3}{2}(\alpha_{CP}) - \frac{1}{2}$	$220/219$
(MIN-EXCESS-PATH)	$\alpha_{EP} = 2 + \delta$	algorithm based on [9]	
max discounted-prize path	$\alpha_{DP} = 6.75 + \delta$	$(1 + \alpha_{EP})(1 + 1/\alpha_{EP})^{\alpha_{EP}}$	?
(DISCOUNTED-REWARD-TSP)			
max-prize path (ORIENTEERING)	$\alpha_{PP} = 4$	$1 + \lceil \alpha_{EP} \rceil$	$1481/1480$
max-prize tree	$\alpha_{PT} = 8$	$2\alpha_{PP}$	?
max-prize cycle	$\alpha_{PC} = 8$	$2\alpha_{PP}$	$1481/1480$
max-prize multiple-path	$\alpha_{kPP} = 5$	$\alpha_{PP} + 1$	$1481/1480$

Σχήμα: Συνοπτική παρουσίαση αποτελεσμάτων.

Βιβλιογραφία

Οι αλγόριθμοι και οι αποδείξεις που παρουσιάστηκαν προέρχονται από το παρακάτω άρθρο.

- A. Blum, S. Chawla, D. R. Karger, T. Lane, A. Meyerson and M. Minkoff, Approximation Algorithms for Orienteering and Discounted-Reward TSP. IEEE, 2013.

Τέλος

Ευχαριστούμε για τον χρόνο σας!