Υπολογιστική Γεωμετρία
Απαλλακτική Εργασία

Πολύχρωμο Θεώρημα Καραθεοδωρή

Μερκούρης Παπαμιχαήλ

Μέρος 1ο

Εισαγωγή

Παρουσίαση Θεωρήματος

και

Αλγορίθμων

Εισαγωγικά

Θεώρημα Καραθεοδωρή (ΘΚ)

Έστω $P = \{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \ldots, \boldsymbol{p_n}\} \subset \mathbb{R}^d$ *ένα σύνολο σημείων. Αν το* $\mathbf{0}$ *ανήκει στο* $K\Pi(P)$, *τότε υπάρχει* $P' \subseteq P$ *μεγέθους* $d+1$, *τ.ω. το* $\mathbf{0}$ *να ανήκει στο* $K\Pi(P')$.

Θεώρημα Χρωμάτων Καραθεοδωρή (ΘΧΚ) [Barany]

Δεδομένων $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$, *πεπερασμένα σύνολα,* $\mathbf{0} \in conv(C_1) \cap conv(C_2) \cap \ldots \cap conv(C_{d+1})$, *υπάρχουν* $\boldsymbol{c_1} \in C_1, \boldsymbol{c_2} \in C_2, \ldots, \boldsymbol{c_{d+1}} \in C_{d+1}$ *τ.ω.* $\mathbf{0} \in conv(\{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \ldots, \boldsymbol{c_{d+1}}\})$

Το ΘΧΚ αποτελεί γενίκευση του ΘΚ, παρατηρούμε ότι στο ΘΧΚ για $C_1 = \ldots = C_{d+1}$, *παίρνουμε σαν πόρισμα το ΘΚ*

Περιγραφή Προβλήματος

Πρόβλημα Θεωρήματος Χρωμάτων Καραθεοδωρή (ΠΘΧΚ)

Δεδομένων τριών κλάσεων χρωμάτων $C_1, C_2, C_3 \subseteq \mathbb{R}^2$, *πεπερασμένα σύνολα*, $\mathbf{0} \in conv(C_1) \cap conv(C_2) \cap conv(C_3)$, *βρείτε* $\boldsymbol{c_1} \in C_1$, $\boldsymbol{c_2} \in C_2$, $\boldsymbol{c_3} \in C_3$, *μια πολύχρωμη συλλογή τ.ω.* $\mathbf{0} \in Τρίγωνο(\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3})$. *Από ΘΧΚ γνωρίζουμε ότι υπάρχει τέτοια συλλογή χρωμάτων* $C = \{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}\}$.

Από την απόδειξη του ΘΧΚ προκύπτει άμεσα ο εξής αλγόριθμος:

Αλγόριθμος ΠολύχρωμοΤρίγωνο (C_1, C_2, C_3)

1. *Έστω* $\boldsymbol{c_1} \in C_1$, $\boldsymbol{c_2} \in C_2$, $\boldsymbol{c_3} \in C_3$, $C = \{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}\}$ *μια πολύχρωμη συλλογή*
2. $T \leftarrow Τρίγωνο(\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3})$
3. $D \leftarrow min_{\boldsymbol{t} \in T} \|\boldsymbol{t}\|_2$
4. *Όσο* $D > 0$ *επανάλαβε:*
5. $\quad \boldsymbol{t}' \leftarrow arg\ min_{\boldsymbol{t} \in T} \|\boldsymbol{t}\|_2$
6. $\quad l \leftarrow$ *Η ευθεία που διέρχεται από το* t *και είναι κάθετη στο* $\overrightarrow{0t}$
7. $\quad \boldsymbol{s} \leftarrow$ *Σημείο της ΚλάσηςΧρώματος*$(\boldsymbol{t}')$ *που βρίσκεται από την ίδια πλευρά της ευθείας* l *με το* $\mathbf{0}$
8. $\quad T \leftarrow (T \cup \{\boldsymbol{s}\}) \setminus \{\boldsymbol{t}'\}$
9. $\quad D \leftarrow min_{\boldsymbol{t} \in T} \|\boldsymbol{t}\|_2$
10. *Επέστρεψε* T

Σύντομη Ανάλυση Αλγορίθμου

Ο προηγούμενος απλοϊκός αλγόριθμος τερματίζει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων βάσει του ΘΧΚ:

- Όσο η απόσταση D > 0 (βλ. γραμμή 4), υπάρχει σημείο s που μπορεί να μειώσει την απόσταση του T από το **0.**
- Οι κλάσεις χρωμάτων όμως στην είσοδο είναι πεπερασμένα σύνολα
- Έτσι ο αλγόριθμος θα τερματίσει στην χειρότερη περίπτωση μετά από n^3 βήματα $n = \max\{|C_1|, |C_2|, |C_3|\}$.
- Πολυπλοκότητα χειρότερη περίπτωσης $O(n^3)$.
- Γενικεύεται άμεσα για αυθαίρετη διάσταση, πολυπλοκότητα ΧΠ $O(n^{d+1})$, εκθετικός ως προς τη διάσταση.

Σχετικοί Αλγόριθμοι

<u>Εύρεση και παρουσίαση αποδοτικών αλγορίθμων για το ΠΘΧΚ</u>

Η εύρεση αποδοτικού (πολυωνυμικού) αλγορίθμου για το ΠΘΧΚ παραμένει ανοιχτό πρόβλημα [1]. Υπάρχουν ωστόσο αλγόριθμοι που λύνουν το ΠΘΧΚ προσεγγιστικά ή υπό ειδικές περιπτώσεις:

<u>Α) Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι</u>

1) Εύρεση ε-κοντά στο **0** πολύχρωμης συλλογής σε χρόνο poly(L, log(1/ε), 1/ρ) [1], [2].

2) Εύρεση max(d – m + 2, ceil[(d+1)/2])-πολύχρωμης συλλογής, σε χρόνο $O(d^5)$ [1].

3) Εύρεση ceil[εd]-πολύχρωμης συλλοχής, σε χρόνο $d^{O(1/\varepsilon \ln(1/\varepsilon))}$ [1].

<u>Β) Ακριβείς Αλγόριθμοι, σε ειδικές περιπτώσεις ή παραλλαγές</u>

1) Εύρεση πολύγχρωμης συλλογής με είσοδο δισύνολα ως κλάσεις χρωμάτων, σε χρόνο $O(d^3)$ [1].

2) Εύρεση πολύχρωμης συλλογής για $\Theta(d^2 \log d)$ κλάσεις χρωμάτων, σε χρόνο $d^{o(\log d)}$ [1].

Στόχοι Απαλλακτικής

Τα θέματα που σκέφτομαι να δώσω περισσότερο έμφαση στην συνέχεια της απαλλακτικής είναι οι αλγόριθμοι:

- 1 από την οικογένεια A
- όλοι στην οικογένεια B

<u>Μέρος 2ο</u>

Ανάλυση 1ου Αλγορίθμου Οικογένειας Α'

Εύρεση Πολύχρωμης Συλλογής ε-κοντά στο **0**

Παρουσίαση των Αλγορίθμων και Σχετικές Αποδείξεις

Γενίκευση του <u>Αλγόριθμου ΠολύχρωμοΤρίγωνο</u> σε αυθαίρετη διάσταση d και για προσεγγίσεις ε-κοντά στο **0**. Θα εξεταστούν:

1) Η ορθότητα του αλγορίθμου.
2) Το άνω φράγμα στον αριθμό των επαναλήψεων.
3) Η πολυπλοκότητας του αλγορίθμου πραγματικών πράξεων.

Θα γίνει λόγος για την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σε ρητές πράξεις (για μηχανές Τούρινγκ).

Επιπλέον Υποθέσεις

Στο εξής στην ανάλυσή μας θα κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. *Θεωρούμε τα σημεία της εισόδου κανονικοποιημένα, δηλαδη αν* $c \in C_i$ *για κάποιο* C_i *της εισόδου* $1 \leq \|c\|_2 \leq 2$.

2. *Ακόμη θεωρούμε πως η Ευκλίδεια σφαίρα* $B(\mathbf{0}, \rho)$, *ακτίνας* ρ, $0 \leq \rho \leq 1$, *με κέντρο το* $\mathbf{0}$, *περιέχεται στο κυρτό περίβλημα κάθε μονοχρωματικού συνόλου* C_i.
   Προφανώς για $\rho = 0$, *έχουμε απλά* $\mathbf{0} \in conv(C_i)\ \forall i$.

Αλγόριθμος Εύρεσης ε-κοντά στο **0** Πολύχρωμης Συλλογής

$$\underline{\boldsymbol{Αλγόριθμος\ ΠολύχρωμηΣυλλογή\left(U_c=\{C_i\ :\ i\in[d+1]\},\ \varepsilon\geq 0\right)}}$$

1. $k \leftarrow 1$
2. $T_1 \leftarrow ΤυχαίαΠολύχρωμηΣυλλογή\left(U_c\right)$
3. $\boldsymbol{x_1} \leftarrow arg\ min_{\boldsymbol{x}\in conv(T)}\|\boldsymbol{x}\|_2$
4. $Όσο\ \ \|\boldsymbol{x_k}\|_2>\varepsilon :$
5. $\quad i \leftarrow τυχαίο\ \ χρώμα\ \ τ.ω.\ \ i\notin\chi\left(\boldsymbol{x_k}\right)$
6. $\quad \boldsymbol{t} \leftarrow arg\ min_{\boldsymbol{t}\in C_i}\{\boldsymbol{x_k}\cdot\boldsymbol{t}\}$
7. $\quad T_{k+1} \leftarrow \left(T\cup\{\boldsymbol{t}\}\right)\setminus\{\boldsymbol{t_i}\}$
8. $\quad \boldsymbol{x_{k+1}} \leftarrow arg\ min_{\boldsymbol{x}\in conv(T)}\|\boldsymbol{x}\|_2$
9. $\quad k \leftarrow k+1$
10. $Επέστρεψε\ \ T$

Απόδειξη Ορθότητας

<u>Πρόταση</u>

Έστω $\varepsilon > 0$ *και* $0 \le \rho \le 1$, *και έστω* $C_1, \ldots, C_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$ *κανονικοποιημένα σύνολα σημείων, για τα οποία ισχύει* $B(\mathbf{0}, \rho) \subset conv(C_i)$. *Τότε όταν εφαρμόζεται ο Αλγόριθμος ΠολύχρωμηΣυλλογή η ακόλουθη αναδρομική σχέση ισχύει όσο* $\boldsymbol{x_k} \ne \mathbf{0}$.

$$(1)\ A\nu \quad \rho = 0, \quad \frac{1}{\|\boldsymbol{x_{k+1}}\|_2} \ge \frac{1}{4} + \frac{1}{\|\boldsymbol{x_k}\|_2^2}, \qquad \alpha\nu \quad \rho > 0, \quad \|x_{k+1}\|_2 \le \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)\|x_k\|_2^2$$

Άνω Φράγμα στον Αριθμό Επαναλήψεων

Λήμμα

Έστω $\varepsilon > 0$ *και* $0 \le \rho \le 1$ *και έστω* $C_1, \ldots, C_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$ *κανονικοποιημένα σύνολα σημείων, για τα οποία ισχύει* $B(\mathbf{0}, \rho) \subset conv(C_i)$. *Τότε όταν ισχύουν τα ακόλουθα άνω φράγματα για τον αριθμό των επαναλήψεων* (k) *του Αλγορίθμου ΠολύχρωμηΣυλλογή για εύρεση πολύχρωμης συλλογής σε απόσταση* ε *από το* $\mathbf{0}$.

$$(2)\ Αν\ \ \rho = 0,\ \left\lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rceil = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \qquad αν\ \ \rho > 0,\ 1 + \left\lceil \frac{16}{\rho^2} \log \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil = O\left(\frac{1}{\rho^2} \log \frac{2}{\varepsilon}\right)$$

Εύρεση του $\mathbf{x_k}$

- $\textit{Στον Αλγόριθμο ΠολύχρωμηΣυλλογή χρειάζεται να βρουμε το}$ $\boldsymbol{x_k} = arg\ min_{\boldsymbol{x} \in conv(T)} \|\boldsymbol{x}\|_2, \quad (γρ.\ 3,\ 8).$
- *Απαιτείται η* <u>*ελαχιστοποίηση μιας τετραγωνικής μορφής* $(\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{x})$</u>,
- *Μία δύσκολη εργασία λύνεται μόνο προσεγγιστικά.*
- *Ακολουθεί παραλλαγή του αλγορίθμου που χρησιμοποιεί μόνο Γραμμική Άλγεβρα.*
- *Στον αλγόριθμο που ακολουθεί θα κρατάμε σε κάθε βήμα το διάνυσμα* $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}$ *των συντελεστών του σημείου* $\boldsymbol{x_k}$, *όταν γράφεται σαν κυρτός συνδιασμός των κορυφών του* T

Αλγόριθμος ΓρήγορηΠολύχρωμηΣυλλογή (1)

$\underline{\boldsymbol{\textit{Αλγόριθμος ΓρήγορηΠολύχρωμηΣυλλογή}}\left(\boldsymbol{U_c = \{C_i : i \in [d+1]\}, \ \varepsilon \geq 0}\right)}$

1. $k \leftarrow 1$
2. $T_1 \leftarrow \textit{ΤυχαίαΠολύχρωμηΣυλλογή}(U_c) \quad // \ T_1 = \{t_1, t_2, \ldots, t_{d+1}\}$
3. $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{1}} \leftarrow (1, 0, \ldots, 0)$
4. $\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} \leftarrow \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}} \quad // \ \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{t}_{\mathbf{1}}$
5. $\textit{Όσο} \ \|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}\|_2 > \varepsilon :$
6. $\quad i \leftarrow \textit{τυχαίο χρώμα τ.ω.} \ \lambda_i^k = 0$
7. $\quad \boldsymbol{t} \leftarrow \textit{arg min}_{\boldsymbol{t} \in C_i} \{\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{t}\}$
8. $\quad T_{k+1} \leftarrow (T \cup \{\boldsymbol{t}\}) \setminus \{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}\}$
9. $\quad \boldsymbol{p} \leftarrow \textit{proj}_{\overline{x_k t_i}} \mathbf{0}$
10. $\quad \boldsymbol{\lambda} \leftarrow \textit{το διάνυσμα συντελεστών του} \ \boldsymbol{p} \ \textit{συναρτήσει των} \ \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}$

Αλγόριθμος ΓρήγορηΠολύχρωμηΣυλλογή (2)

$\quad Αν \;\; ΑφινικώςΕξαρτημένα\left(T_{k+1}\right):$

$\qquad Άλλαξε \;\; το \;\; \boldsymbol{\lambda} \;\; ώστε \;\; κάποιο \;\; \lambda_i = 0, \;\; ενώ \;\; ισχύει$

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \boldsymbol{t_i}.$$

$\quad Αν \;\; \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0} \;\; \wedge \;\; \forall i \;\; \lambda_i \neq 0$

$\qquad a \;\leftarrow\; πραγματικός \;\; αριθμός \;\; τ.ω. \;\; το \;\; \alpha\, \boldsymbol{p} \;\; το$

$\qquad\qquad το \;\; σημείο \;\; τομής \;\; της \;\; \varepsilon_{\boldsymbol{0p}} \;\; με \;\; το \;\; conv\left(T\right)$

$\qquad Αν \;\; \alpha \leq 0:$

$\qquad\quad \boldsymbol{p} \;\leftarrow\; \boldsymbol{0}$

$\qquad Αλλιώς:$

$\qquad\quad \boldsymbol{p} \;\leftarrow\; a\, \boldsymbol{p}$

$\qquad \boldsymbol{\lambda} \;\leftarrow\; το \;\; διάνυσμα \;\; συντελεστών \;\; του \;\; \boldsymbol{p}$

$\qquad\qquad συναρτήσει \;\; των \;\; \boldsymbol{t_i}$

$\quad \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k+1}} \;\leftarrow\; \boldsymbol{\lambda}$

$\quad \boldsymbol{x_{k+1}} \;\leftarrow\; \boldsymbol{p}$

$\quad k \;\leftarrow\; k+1$

$Επέστρεψε \;\; T$

Λεπτομέρειες Υλοποίησης (1) [γρ. 9, 10]

Εφόσον το $\boldsymbol{p}$ *είναι η προβολή του* $\mathbf{0}$ *στο ευθύγραμμο τμήμα* $\overline{\boldsymbol{x_k t}}$,
όπου $\boldsymbol{t} = arg\ min_{\boldsymbol{t} \in C_i} \{\boldsymbol{x_k} \cdot \boldsymbol{t}\}$ [*βλ. γρ.* 7]
έχουμε:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\langle \boldsymbol{t} - \boldsymbol{x_k},\ \boldsymbol{t} \rangle \boldsymbol{x_k} + \langle \boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x_k} \rangle \boldsymbol{t}}{\|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{x_k}\|_2^2}$$

Επειδή για το $\boldsymbol{x_k}$ *έχουμε ήδη υπολογίσει τα* λ_j^k *μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές* λ_j' *του* $\boldsymbol{p}$, *ως εξής*:

$$\lambda_j' = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\langle \boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x_k} \rangle}{\|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{x_k}\|_2^2}, & j = i \\ \dfrac{\langle \boldsymbol{t} - \boldsymbol{x_k},\ \boldsymbol{t} \rangle}{\|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{x_k}\|_2^2} \lambda_j^k, & j \neq i \end{array} \right\}$$

Λεπτομέρειες Υλοποίησης (2) [γρ. 11, 12]

Μπορούμε να υπολογίσουμε το κατηγόρημα $\textit{ΑφινικώςΕξαρτημένα}\left(T_{k+1}\right)$ *με Γκαουσιανή Απαλοιφή. Αν έχει τιμή ΑΛΗΘΕΣ τότε μπορούμε να βρούμε μία μη τετριμένη αφινική σχέση*

$$\sum_{i=1}^{d+1} \mu_i \boldsymbol{t_i} = \mathbf{0}, \qquad \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i = 0$$

Τότε παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$ *των συντελεστών στην παραπάνω σχέση μπορεί επίσης να παίξει τον ρόλο του* $\boldsymbol{\lambda}$*. Έτσι είναι δυνατόν να βρούμε έναν αριθμό* δ *τ.ω.:*

$$\boldsymbol{\lambda} \leftarrow \boldsymbol{\lambda} + \delta \boldsymbol{\mu}$$

και το (νέο) $\boldsymbol{\lambda}$ *να παραμείνει μη αρνητικό και κάποιο* $\lambda_i = 0.$

Λεπτομέρειες Υλοποίησης (3) [γρ. 14]

Για να βρούμε τον αριθμό α, *αρκεί να βρούμε το πρώτο σημείο τομής της ευθείας* $\varepsilon_{\mathbf{0p}}$ *με το κυρτό περίβλημα του* T. *Για* $i = 1, \dots, d+1$ *η* $\varepsilon_{\mathbf{0p}}$ *τέμνει το υπερεπίπεδο* $\mathit{aff}\left(T_{k+1} \setminus \{t_i\}\right)$ *ανν η ορίζουσα*

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \boldsymbol{p} & \boldsymbol{t}_1 & & \boldsymbol{t}_{i-1} & \boldsymbol{t}_{i+1} & & t_{d+1} \end{bmatrix} \geq 0$$

σε αυτή την περίπτωση το σημείο τομής είναι το $\alpha_i \boldsymbol{p}$, *όπου*:

$$a_i = -\frac{1}{\Delta} \det\left[\boldsymbol{t}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{t}_{i-1} \ \boldsymbol{t}_{i+1} \ \cdots \ \boldsymbol{t}_{d+1}\right]$$

Λεπτομέρειες Υλοποίησης (4) [γρ. 19]

Τέλος για τον υπολογισμό των συντελεστών του α $\boldsymbol{p}$ *έχουμε:*

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \boldsymbol{t_1} & & t_{d+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix}$$

Πολυπλοκότητα Πραγματικών Πράξεων

Θεώρημα 1

Δεδομένου $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ *και κανονικοποιημένα σύνολα σημείων* $C_1, \ldots, C_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$, *όπου* $|C_i| \leq n$ *και* $B(0, \rho) \subset conv(C_i)$, *οι πραγματικές πράξεις του Αλγορίθμου ΓρήγορηΠολύχρωμηΣύλλογή για να βρει πολύχρωμη συλλογή* $\varepsilon-$*κοντά στο* $\mathbf{0}$ *είναι:*

$$O\left(\frac{nd + d^4}{\rho^2} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Πολυπλοκότητα Ρητών Πράξεων σε Μηχανές Τούρινγκ

Θεώρημα 2

Δεδομένου $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ *και κανονικοποιημένα σύνολα σημείων* $C_1, \ \ldots, C_{d+1} \subset \mathbb{Q}^d$, *όπου αναπαρήστανται από συμβολοσειρά* L *δηφίων και* $|C_i| \leq n$ *και* $B(0, \rho) \subset conv(C_i)$, *οι ρητές πράξεις του Αλγορίθμου ΓρήγορηΠολύχρωμηΣύλλογή για να βρει πολύχρωμη συλλογή* $\varepsilon-$*κοντά στο* $\mathbf{0}$ *είναι*:

$$poly\left(L, \ \log \frac{1}{\varepsilon}, \ \frac{1}{\rho} \right)$$

Αναφορές

[1] Computational Aspects of the Colorful Caratheodory Theorem
– Wolfrang Mulzer, Yannik Stein (2015)

[2] Colorful Linear Programming and its Relatives
– Imre Barany, Shmuel Ohn (1997)