Υπολογιστική Γεωμετρία
Απαλλακτική Εργασία
Μερκούρης Παπαμιχαήλ
Α.Μ.: 1115201400148

Πολύχρωμο Θεώρημα Καραθεοδωρή

Σύνοψη

Η απαλλακτική μου εργασία είχε ως θέμα τις υπολογιστικές πτυχές του Πολύχρωμου Θεώρηματος Καραθεοδωρή (ΠΘΚ). Συγκεκριμένα εξετάστηκαν τα εξής άρθρα:

1. Computational Aspects of the Colorful Caratheodory Theorem – Wolfrang Mulzer, Yannik Stein [2015]
2. Colorful Linear Programming and its Relatives – Impre Barany, Shmuel Onn [1997]

Αφού έγινε στην πρώτη παρουσίαση μια σύντομη αναφορά στου αλγορίθμους που παρουσιάζονται στα δύο άρθρα (που έχουν να κάνουν με το ΠΘΚ), δόθηκε έμφαση στο αλγόριθμο που προκύπτει από την απόδειξη του ΠΘΚ· συγκεκριμένα αναλύθηκαν σε βάθος:

1. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.
2. Η προσεγγιστική παραλλαγή του.
3. Οι λεπτομέρειες υλοποίησης, πολυπλοκότητα πραγματικών πράξεων.

Εισαγωγικά

Το ΠΘΚ είναι πια πολύχρωμη γενίκευση του Θεωρήματος Καραθεοδωρή, από τον Barany:

Θεώρημα Καραθεοδωρή

Έστω $P = \{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \ldots, \boldsymbol{p_n}\} \subset \mathbb{R}^d$ *ένα σύνολο σημείων. Αν το* $\mathbf{0}$ *ανήκει στο* $K\Pi(P)$, *τότε υπάρχει* $P' \subseteq P$ *μεγέθους* $d+1$, *τ.ω. το* $\mathbf{0}$ *να ανήκει στο* $K\Pi(P')$.

Πολύχρωμο Θεώρημα Καραθεοδωρή [Barany]

Δεδομένων $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$, *πεπερασμένα σύνολα*, $\mathbf{0} \in conv(C_1) \cap conv(C_2) \cap \ldots \cap conv(C_{d+1})$, *υπάρχουν* $\boldsymbol{c_1} \in C_1, \boldsymbol{c_2} \in C_2, \ldots, \boldsymbol{c_{d+1}} \in C_{d+1}$ *τ.ω.* $\mathbf{0} \in conv(\{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \ldots, \boldsymbol{c_{d+1}}\})$

Παρατηρούμε πως για $C_1 = C_2 = \ldots = C_{d+1}$ έχουμε σαν πόρισμα το ΘΚ από το ΠΘΚ.

Ορισμός (Πολύχρωμη Συλλογή)

Το σύνολο των σημείων του ΠΘΚ, $\{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c_{d+1}}\}$ θα το λέμε *Πολύχρωμη Συλλογή*.

Συνεπώς το πρόβλημα το οποίο καλούμαστε να βρούμε αλγόριθμο που να το λύνει, είναι το ακόλουθο:

Πρόβλημα Πολύχρωμου Θεωρήματος Καραθεοδωρή (ΠΠΘΚ)

Δεδομένων κλάσεων χρωμάτων $C_1, \ldots, C_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{0} \in \cap_{i \in [d+1]} conv(C_i)$, *βρείτε* $\boldsymbol{c_1} \in C_1, \ldots, \boldsymbol{c_{d+1}} \in C_{d+1}$, *μια πολύχρωμη συλλογή* T *τ.ω.* $\mathbf{0} \in conv(\boldsymbol{c_1}, \ldots, \boldsymbol{c_{d+1}})$.

Προφανώς υποθέτουμε ότι το **0** δεν ανήκει σε κάποιο από τα C_i, ειδάλλως το πρόβλημα θα ήταν τετριμμένο· οποιαδήποτε πολύχρωμη συλλογή περιείχε το **0** θα ήταν κάποια λύση.

1. Αλγόριθμος ΠολύχρωμηΣυλλογή

Ο πρώτος αλγόριθμος με τον οποίο καταπιαστήκαμε προκύπτει άμεσα από την απόδειξη του ΠΘΚ:

Αλγόριθμος ΠολύχρωμηΣυλλογή $(\boldsymbol{U_c}=\{\boldsymbol{C_i} \ : \ \boldsymbol{i}\in[\boldsymbol{d+1}]\})$

1. $k \leftarrow 1$
2. $T_1 \leftarrow \mathit{ΤυχαίαΠολύχρωμηΣυλλογή}(U_c)$
3. $\boldsymbol{x_1} \leftarrow \arg\min_{x\in conv(T)} \|\boldsymbol{x}\|_2$
4. *Όσο* $\|\boldsymbol{x_k}\|_2 > 0$:
5. $\quad i \leftarrow$ *τυχαίο χρώμα τ.ω.* $i \notin \chi(\boldsymbol{x_k})$
6. $\quad \boldsymbol{t} \leftarrow \arg\min_{t\in C_i} \{\boldsymbol{x_k} \cdot \boldsymbol{t}\}$
7. $\quad T_{k+1} \leftarrow (T \cup \{\boldsymbol{t}\}) \setminus \{\boldsymbol{t_i}\}$
8. $\quad \boldsymbol{x_{k+1}} \leftarrow \arg\min_{x\in conv(T)} \|\boldsymbol{x}\|_2$
9. $\quad k \leftarrow k+1$
10. *Επέστρεψε* T

1.1 Συμβολισμοί

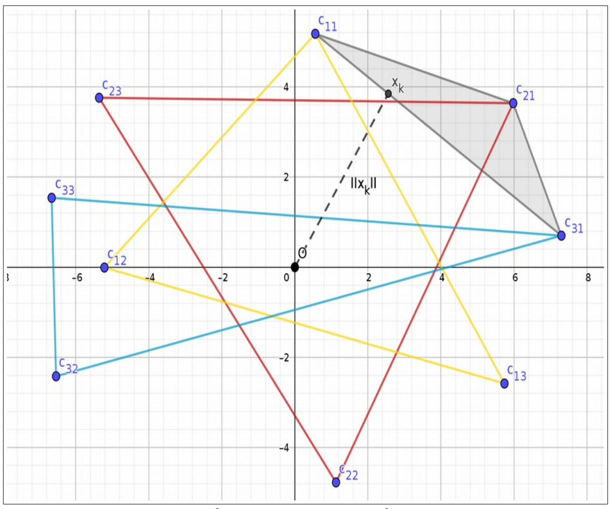
Το k συμβολίζει τον αριθμό της επανάληψης όπου βρίσκεται ο αλγόριθμος. Σε κάθε επανάληψη κρατάμε τις μεταβλητές T_k, την τρέχουσα πολύχρωμη συλλογή στην k-οστή επανάληψη και τη $\mathbf{x_k}$, το πλησιέστερο σημείο του κυρτού περιβλήματος της πολύχρωμη συλλογής T_k στην αρχή των αξόνων. Προφανώς $\|\mathbf{x_k}\|_2$ είναι η (πλησιέστερη) απόσταση του conv(T_k), από την αρχή των αξόνων **0**. Τέλος με $\chi(\mathbf{x_k})$ (ελληνικό χ) συμβολίζουμε το σύνολο των χρωμάτων του σημείου $\mathbf{x_k}$, δηλαδή:

$$\chi(\boldsymbol{x_k}) = \left\{ i \in [d+1] \ : \ \lambda_i > 0, \ \ \textit{όπου} \ \ \boldsymbol{x_k} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \boldsymbol{t_i} \right\}$$

τους δείκτες i για τους οποίους ο αντίστοιχος συντελεστής λ_i στον κυρτό συνδυασμό του $\mathbf{x_k}$ συναρτήσει των κορυφών του πολυτόπου T_k, $\mathbf{t_i}$ είναι μεγαλύτερος του 0. Παρατηρούμε πως το $\mathbf{x_k}$ θα βρίσκεται σε κάποια έδρα του πολυτόπου T_k.

1.2 Ο αλγόριθμος

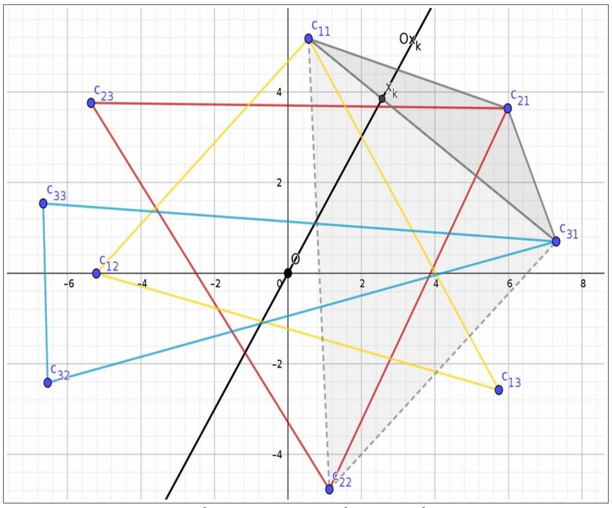
Ο αλγόριθμος δουλεύει ως εξής· αρχικοποιούμε το T_1 σε μια τυχαία πολύχρωμη συλλογή και υπολογίζουμε το σημείο με την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.



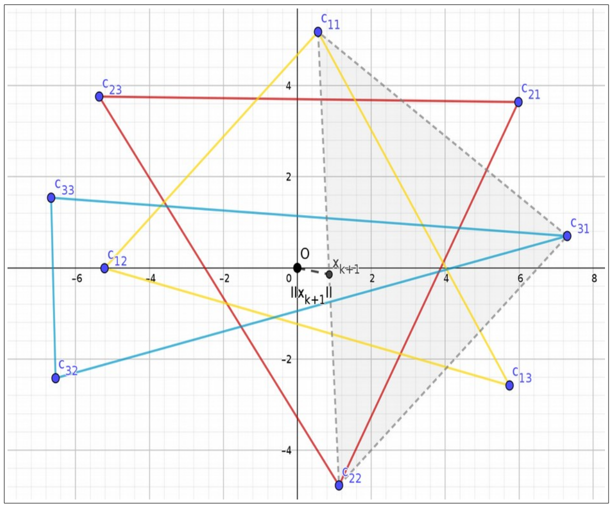
Σχήμα 1.1: Αρχικοποίηση

Η επανάληψη γρ. 4 – 9 συνεχίζει όσο η απόσταση του conv(T_k) είναι θετική, όσο το conv(T_k) δεν περιέχει το **0**. Σε κάθε επανάληψη επιλέγουμε (αυθαίρετα) ένα χρώμα i το οποίο δεν ανήκει στα χρώματα του

$\mathbf{x_k}$ [γρ. 5], δηλαδή μια κορυφή του πολυτόπου, που δεν ανήκει στην έδρα πάνω στην οποία βρίσκεται το $\mathbf{x_k}$. Την κορυφή αυτού του χρώματος πρόκειται να αλλάξουμε στο τρέχον βήμα, ώστε να πάμε από το πολύτοπο T_k στο T_{k+1}. (Στο Σχ. 1.1 η μόνη τέτοια κορυφή είναι η c_{21}, στην γενική περίπτωση όμως, όπου τα conv(C_i) δεν είναι πάντα simplex, η κορυφή που επιλέγουμε στην επανάληψη δεν είναι μοναδική.) Την νέα κορυφή **t** του T_{k+1}, την επιλέγουμε ως εκείνη που “βρίσκεται περισσότερο στην κατεύθυνση $\mathbf{x_k 0}$”, την κορυφή εκείνη που μεγιστοποιεί το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{x_k}\cdot(-\mathbf{t})$, για κάθε **t** ανήκει T_k (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Αλλαγή κορυφής



Σχήμα 1.3: Ενημέρωση του T_{k+1} και του $\mathbf{x_{k+1}}$

Τέλος αφού ενημερώσουμε το T_{k+1} υπολογίζουμε το $\mathbf{x_{k+1}}$ και την νέα ελάχιστη απόσταση από το **0**, $\|\mathbf{x_{k+1}}\|_2$.

1.3 Ορθότητα και Πολυπλοκότητα

Παρατηρούμε πως πράγματι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3 η απόσταση του conv(T) από το **0** μειώνεται σε κάθε βήμα . Εφόσον ο βρόγχος – όσο συνεχίζει ενώ $\|\mathbf{x_k}\|_2 > 0$ και η απόσταση του πολυτόπου από την αρχή των αξόνων μειώνεται σε κάθε βήμα, στην χειρότερη περίπτωση θα ελέγξουμε όλα τα πιθανά πολύτοπα των οποίων οι κορυφές συγκροτούν μια πολύχρωμη συλλογή. Άρα ο αλγόριθμος τερματίζει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. (Θα μιλήσουμε πιο αυστηρά για την ορθότητα του αλγορίθμου στην επόμενη ενότητα.)

Με μια απλοϊκή ανάλυση βλέπουμε πως ο αλγόριθμος ΠολύχρωμηΣυλλογή είναι εκθετικός ως προς την διάσταση, αφού στην χειρότερη περίπτωση θα ελέγξουμε όλα τα πιθανά πολύτοπα , των οποίων οι κορυφές συγκροτούν μια πολύχρωμη συλλογή. Δηλαδή έχουμε:

$$\text{ΠολύχρωμηΣυλλογή} \in O\binom{n}{d+1}, \quad n = max_{i\in[d+1]}\{|T_i|\}$$

1.4 Αλγόριθμος ΠροσεγγιστικήΠολύχρωμηΣυλλογή

Μπορούμε να έχουμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο, που να βρίσκει μία ε-κοντά στο **0** πολύχρωμη συλλογή, απλώς σταματώντας τον βρόγχο – όσο νωρίτερα.

Αλγόριθμος ΠροσεγγιστικήΠολύχρωμηΣυλλογή $\left(\boldsymbol{U_c=\{C_i\ :\ i\in[d+1]\},\ \varepsilon\geq 0}\right)$

1. $k \leftarrow 1$
2. $T_1 \leftarrow \text{ΤυχαίαΠολύχρωμηΣυλλογή}(U_c)$
3. $\mathbf{x_1} \leftarrow arg\ min_{x\in conv(T)}\|\mathbf{x}\|_2$
4. Όσο $\|\mathbf{x_k}\|_2 > \varepsilon$:
5. $\quad i \leftarrow$ τυχαίο χρώμα τ.ω. $i \notin \chi(\mathbf{x_k})$
6. $\quad \mathbf{t} \leftarrow arg\ min_{t\in C_i}\{\mathbf{x_k}\cdot\mathbf{t}\}$
7. $\quad T_{k+1} \leftarrow (T\cup\{\mathbf{t}\})\setminus\{\mathbf{t_i}\}$
8. $\quad \mathbf{x_{k+1}} \leftarrow arg\ min_{x\in conv(T)}\|\mathbf{x}\|_2$
9. $\quad k \leftarrow k+1$
10. Επέστρεψε T

Προφανώς για ε = 0, ως όρισμα στο αλγόριθμο ΠροσεγγιστικήΠολύχρωμηΣυλλογή, έχουμε τον αλγόριθμο ΠολύχρωμηΣυλλογή. Για την πολυπλοκότητα του προσεγγιστικού αλγορίθμου ισχύουν τα ίδια με τον ΠολύχρωμηΣυλλογή, αρκεί να παρατηρήσουμε πως στην χειρότερη περίπτωση $||\mathbf{x_k}||_2 < \varepsilon$ μόνο όταν $||\mathbf{x_k}||_2 = 0$, για κάποια είσοδο U_c.

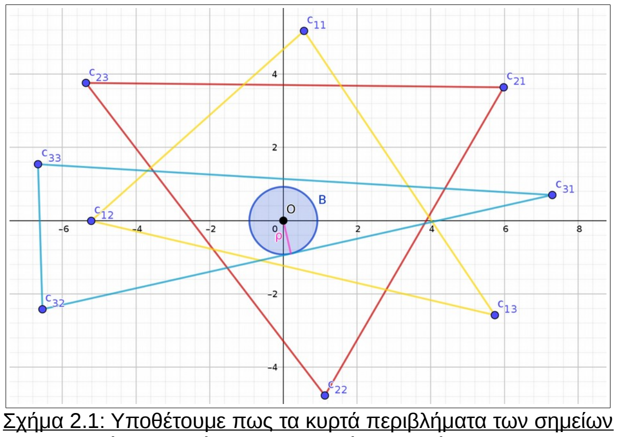
2. Προσεκτική Ανάλυση Ορθότητας και Πολυπλοκότητας

Θα δούμε τώρα πως η ανάλυση της πολυπλοκότητας των δύο αλγορίθμων είναι αρκετά απαισιόδοξη καθώς έχουν την ίδια πολυπλοκότητα με τους εξαντλητικούς αλγορίθμους, όπου απλά θα δοκιμάζαμε όλα τα πολύτοπα των οποίων οι κορυφές συγκροτούν μια πολύχρωμη συλλογή.

2.1 Υποθέσεις

Στην συνέχεια θα κάνουμε μια ισχυρότερη υπόθεση για τα κυρτά περιβλήματα των κορυφών εισόδου:

$$\forall C_i,\ B(\mathbf{0},\rho) \subset C_i,\ 0 \le \rho \le 1,\ \text{όπου}\ B(\mathbf{0},\rho)\ \text{η ευκλείδεια σφαίρα με κέντρο το}\ \mathbf{0}\ \text{και ακτίνα}\ \rho$$



Σχήμα 2.1: Υποθέτουμε πως τα κυρτά περιβλήματα των σημείων εισόδου περιέχουν την ευκλείδεια σφαίρα Β(**0**, ρ)

Η υπόθεση αυτή είναι δικαιολογημένη αφού το **0** ανήκει στο εσωτερικό των κυρτών περιβλημάτων conv(C_i), άρα εξ ορισμού:

$$\forall C_i\ \ \mathbf{0} \in \overset{\circ}{conv}(C_i)\ \Rightarrow\ \exists \varepsilon_i > 0\ \ \tau.\omega.\ \ B(\mathbf{0},\varepsilon_i) \subset conv(C_i)$$
$$\text{Τότε αρκεί να θέσουμε}\ \ \rho := min_{i \in [d+1]}\{\varepsilon_i\}$$

Επίσης για απλούστευση στο εξής θεωρούμε ότι τα σημεία εισόδου είναι κανονικοποιημένα, δηλαδή:
$$\forall C_j \in U_c\ \ \forall t_i \in C_j,\ \ 1 \le t_i \le 2$$

2.2 Ορθότητα

Αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.1

Έστω $\varepsilon > 0$ *και* $0 \le \rho \le 1$, *και έστω* $C_1, \ldots, C_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$ *κανονικοποιημένο σύνολα σημείων, για τα οποία ισχύει* $B(\mathbf{0},\rho) \subset conv(C_i)$. *Τότε όταν εφαρμόζεται ο Αλγόριθμος ΠολύχρωμηΣυλλογή η ακόλουθη αναδρομική σχέση ισχύει όσο* $\mathbf{x_k} \neq \mathbf{0}$.

$$(1)\ Αν\ \ \rho = 0,\ \ \frac{1}{||\mathbf{x_{k+1}}||_2} \ge \frac{1}{4} + \frac{1}{||\mathbf{x_k}||_2},\qquad αν\ \ \rho > 0:\ \ ||x_{k+1}||_2 \le \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)||x_k||_2^2$$

Από την Πρόταση 2.1 προκύπτει η ορθότητα των αλγορίθμων, αφού σε κάθε βήμα του αλγορίθμου η απόσταση $||\mathbf{x}_k||_2$ μειώνεται αυστηρά.

2.3 Πολυπλοκότητα

Από το ακόλουθο Λήμμα φράσσουμε τον αριθμό των επαναλήψεων k, του αλγορίθμου ΠροσεγγιστικήΠολύχρωμηΣυλλογή:

***Λήμμα* 2.2**

Έστω $\varepsilon > 0$ *και* $0 \leq \rho \leq 1$ *και έστω* $C_1, \ldots, C_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$ *κανονικοποιημένα σύνολα σημείων, για τα οποία ισχύει* $B(\mathbf{0}, \rho) \subset conv\, C_{i.}$ *Τότε όταν ισχύουν τα ακόλουθα άνω φράγματα για τον αριθμό των επαναλήψεων* (k) *του Αλγορίθμου ΠροσεγγιστικήΠολύχρωμηΣυλλογή για εύρεση πολύχρωμης συλλογής σε απόσταση* ε *από το* $\mathbf{0}$.

$$(2)\ Αν \quad \rho = 0,\ \left\lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rceil = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \qquad αν \quad \rho > 0,\ 1 + \left\lceil \frac{16}{\rho^2} \log \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil = O\left(\frac{1}{\rho^2} \log \frac{2}{\varepsilon}\right)$$

Με το Λήμμα 2.2 είδαμε πως η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ΠροσεγγιστικήΠολύχρωμηΣυλλογή δεν εξαρτάται από την διάσταση d, αλλά μόνο από τις γεωμετρικές παραμέτρους του προβλήματος, τον κύκλο ακτίνας ε > 0 με τον οποίο θέλουμε να έχει τομή το κυρτό περίβλημα της πολύχρωμης συλλογής και τον κύκλο ακτίνας 0 ≤ ρ ≤ 1, ο οποίος περιέχεται στα κυρτά περιβλήματα εισόδου.

3. Λεπτομέρειες Υλοποίησης

Παρά τα πιο αισιόδοξα αποτελέσματα ως προς την πολυπλοκότητα θα πρέπει να προσέξουμε την γραμμή 8 του αλγορίθμου ουσιαστικά εκεί απαιτείται να λύσουμε ένα Πρόβλημα μη Γραμμικού Προγραμματισμού (ΠΜΓΠ), συγκεκριμένα:

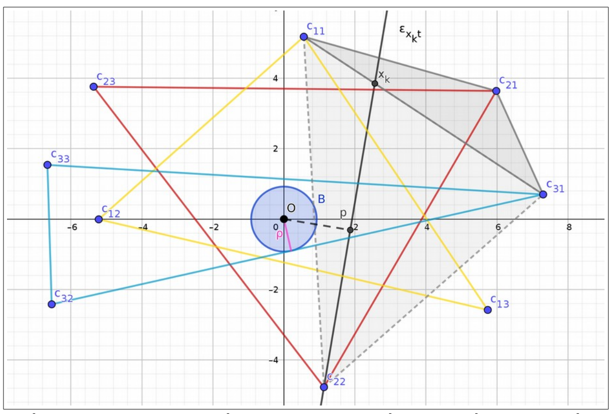
$$\begin{aligned}
&\min \quad z = \|\mathbf{x}\|_2 \\
&\tau.\omega.: \\
&\quad T\,\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{x}, \\
&\quad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \\
&\quad \forall i,\ \ \lambda_i \geq 0
\end{aligned}$$

Όπου με T είναι το μητρώο με τα σημεία της πολύχρωμης συλλογής στις στήλες του. Μια τέτοια εργασία έχει υπολογιστικό βάρος και μπορεί να υλοποιηθεί μόνο προσεγγιστικά (π.χ. με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange). Μπορούμε όμως να βρούμε έναν αλγόριθμο που χρησιμοποιεί μόνο γραμμοπράξεις.

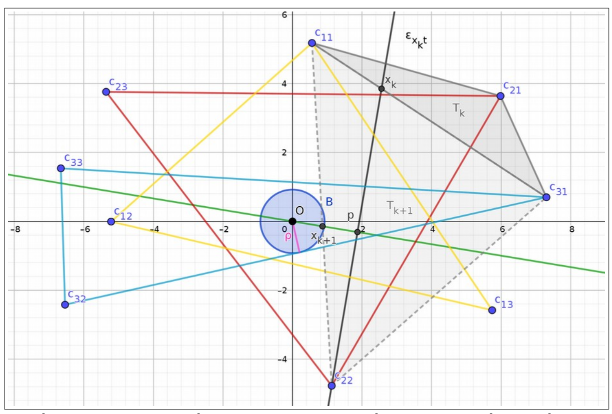
3.1 Αλγόριθμος ΓρήγορηΠολύχρωμηΣυλλογή

Αλγόριθμος ΓρήγορηΠολύχρωμηΣυλλογή $\left(U_c=\{C_i\ :\ i\in[d+1]\},\ \varepsilon\geq 0\right)$
$k \leftarrow 1$
$T_1 \leftarrow$ *ΤυχαίαΠολύχρωμηΣυλλογή* (U_c) // $T_1=\{t_1, t_2, \ldots, t_{d+1}\}$
$\boldsymbol{\lambda}^1 \leftarrow (1, 0, \ldots, 0)$
$\boldsymbol{x}_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \boldsymbol{t}_i$ // $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{t}_1$
Όσο $\lVert \boldsymbol{x}_k \rVert_2 > \varepsilon$:
$i \leftarrow$ *τυχαίο χρώμα τ.ω.* $\lambda_i^k = 0$
$\boldsymbol{t} \leftarrow arg\ min_{\boldsymbol{t}\in C_i}\{\boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{t}\}$
$T_{k+1} \leftarrow (T\cup\{\boldsymbol{t}\})\setminus\{\boldsymbol{t}_i\}$
$\boldsymbol{p} \leftarrow proj_{\overline{\boldsymbol{x}_k \boldsymbol{t}}} \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{\lambda} \leftarrow$ *το διάνυσμα συντελεστών του* $\boldsymbol{p}$ *συναρτήσει των* t_i
Αν ΑφινικώςΕξαρτημένα (T_{k+1}):
Άλλαξε το $\boldsymbol{\lambda}$ *ώστε κάποιο* $\lambda_i = 0$, *ενώ ισχύει* $\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \boldsymbol{t}_i$.
Αν $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0} \wedge \forall i\ \lambda_i \neq 0$
$a \leftarrow$ *πραγματικός αριθμός τ.ω. το* $a\boldsymbol{p}$ *το το σημείο τομής της* $\varepsilon_{\boldsymbol{0p}}$ *με το* $conv(T)$
Αν $\alpha \leq 0$:
$\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{0}$
Αλλιώς:
$\boldsymbol{p} \leftarrow a\boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{\lambda} \leftarrow$ *το διάνυσμα συντελεστών του* $\boldsymbol{p}$ *συναρτήσει των* t_i
$\boldsymbol{\lambda}^{k+1} \leftarrow \boldsymbol{\lambda}$
$\boldsymbol{x}_{k+1} \leftarrow \boldsymbol{p}$
$k \leftarrow k+1$
Επέστρεψε T

Στον παραπάνω αλγόριθμο με **λ** συμβολίζουμε το διάνυσμα των συντελεστών του $\mathbf{x}_k$ στην αναπαράστασή του ως κυρτός συνδιασμός της πολύχρωμης συλλογής. Κρατώντας το **λ** μπορούμε να αντικαταστήσουμε την επίλυση του ΠΜΓΠ από απλούστερους υπολογισμούς, απαλοιφές Gauss και υπολογισμούς οριζουσών. Σε αυτή την εκδοχή του αλγορίθμου αντί να υπολογίζουμε το $\mathbf{x}_{k+1}$ άμεσα σε κάθε επανάληψη υπολογίζουμε αρχικά το σημείο **p**, την προβολή της αρχής των αξόνων **0** στην ευθεία που διέρχεται από το $\mathbf{x}_k$ και το **t**, τη νέα κορυφή που πρόκειται να εισάγουμε στο πολύτοπο T.



Σχήμα 3.1: **p** η προβολή του **0** στην ευθεία που διέρχεται από τα $\mathbf{x}_k$ **t**



Σχήμα 3.2: Το σημείο $\mathbf{x}_{k+1}$ ως το πλησιέστερο σημείο τομής της ευθεία $\varepsilon_{\mathbf{0p}}$ (πράσινη ευθεία στο σχήμα) με το T_{k+1}

Στη γενική περίπτωση **p** ≠ $\mathbf{x}_{k+1}$. Μπορούμε όμως να προσδιορίσουμε το σημείο $\mathbf{x}_{k+1}$, μέσω του **p**, ως το σημείο τομής της ευθείας $\varepsilon_{\mathbf{0p}}$ με το conv(T_{k+1}) που είναι κοντινότερο στο **0**. Διαισθητικά θέλουμε να μετακινήσουμε το σημείο **p** στην διεύθυνση **p0** ώσπου να φτάσει να να γίνει σημείο έδρας του πολυτόπου T_{k+1}. Αλγεβρικά ένα σημείο **x** ανήκει στην έδρα του πολυτόπου, όταν τουλάχιστον ένας όρος $\lambda_i = 0$ στην αναπαράσταση του σημείου ως κυρτό συνδυασμό των κορυφών T_{k+1} του πολυτόπου, περισσότερο διαισθητικά ένα σημείο στην έδρα ενός πολυτόπου “ζει” σε ένα χώρο λιγότερων διαστάσεων των d+1. Ειδικότερα αν το πολύτοπο είναι (d+1)-simplex, οι έδρες του είναι d-simplex. Έτσι για να υπολογίσουμε το σημείο $\mathbf{x}_{k+1}$ αρκεί να δοκιμάσουμε να μηδενίσουμε έναν – έναν του συντελεστές λ_i. Προφανώς εφόσον το σημείο που ψάχνουμε είναι πάνω στην ευθεία $\varepsilon_{\mathbf{0p}}$ υπάρχει πραγματικός αριθμός α, τ.ω. $\mathbf{x}_{k+1} = \alpha\mathbf{p}$.

3.2 Αλγεβρική υπολογισμοί

3.2.1 Υπολογισμός Σημείου **p**

$$proj_{x_k t}\mathbf{0} = \frac{\langle -\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{t}\rangle}{\langle \boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{t}\rangle} + \boldsymbol{t} = \ldots = \frac{\langle \boldsymbol{t_i}-\boldsymbol{x_k},\ \boldsymbol{t_i}\rangle \boldsymbol{x_k} + \langle \boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{t_i},\ \boldsymbol{x_k}\rangle \boldsymbol{t_i}}{\langle \boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{t}\rangle}$$

Με τον παραπάνω τύπο μπορούμε να υπολογίσουμε αλγεβρικά την γραμμή 9 του αλγόριθμου ΓρήγορηΠολύχρωμηΣυλλογή.

3.2.2 Εύρεση των Συντελεστών **λ** του **p**

Παρατηρούμε πως έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές $\boldsymbol{\lambda}^k$ του $\mathbf{x}_k$, με $\lambda_i = 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές του **p**. Έτσι από την προηγούμενη σχέση που συνδέει το **p** με το $\mathbf{x}_k$ και το γεγονός ότι $\lambda_i = 0$ προκύπτει:

$$\lambda_j' = \begin{Bmatrix} \dfrac{\langle \boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x_k}\rangle}{\|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{x_k}\|_2^2}, & j=i \\ \dfrac{\langle \boldsymbol{t}-\boldsymbol{x_k},\ \boldsymbol{t}\rangle}{\|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{x_k}\|_2^2}\lambda_j^k, & j\neq i \end{Bmatrix}$$

όπου με λ_j' είναι ο j-οστός όρος των συντελεστών του **p** και λ_j^k ο j-οστός όρος των συντελεστών του $\mathbf{x}_k$. Έτσι υπολογίζουμε αλγεβρικά την γραμμή 10.

3.2.3 Υπολογισμός του Κατηγορήματος ΑφινικώςΕξαρτημένα(·)

Για την γραμμή 11 του αλγορίθμου, μπορούμε να ελέγξουμε εάν το T_{k+1} είναι αφινικώς εξαρτημένα με χρήση απαλοιφής Gauss.

3.2.4 Υπολογισμός του Σημείου α**p**

Για κάθε i = 1, ..., d+1 η $\varepsilon_{\mathbf{0p}}$ τέμνει το υπερεπίπεδο aff(T_{k+1} \ {$\mathbf{t}_i$}) ανν:

$$\Delta = det\begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \boldsymbol{p} & \boldsymbol{t_1} & & \boldsymbol{t_{i-1}} & \boldsymbol{t_{i+1}} & & t_{d+1} \end{bmatrix} \geq 0$$

σε αυτή την περίπτωση ο αριθμός α_i είναι:

$$a_i = -\frac{1}{\Delta}\, det[\boldsymbol{t_1}\ \cdots\ \boldsymbol{t_{i-1}}\ \boldsymbol{t_{i+1}}\ \cdots\ \boldsymbol{t_{d+1}}]$$

Από τα παραπάνω επιλέγουμε α := max{α_i}. Έτσι υπολογίζουμε την γραμμή 14 του αλγορίθμου.

3.2.5 Ενημέρωση των Συντελεστών **λ**

Για την γραμμή 19 έχουμε:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \boldsymbol{t}_1 & & t_{d+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix}$$

3.3 Πολυπλοκότητα

Για την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ΓρήγορηΠολύχρωμηΣυλλογή πραγματικών πράξεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.1

Δεδομένου $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ *και κανονικοποιημένα σύνολα σημείων* $C_1, \ldots, C_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$, *όπου* $|C_i| \leq n$ *και* $B(0,\rho) \subset conv(C_i)$, *οι πραγματικές πράξεις του Αλγορίθμου ΓρήγορηΠολύχρωμηΣύλλογή για να βρει πολύχρωμη συλλογή* $\varepsilon -$*κοντά στο* $\mathbf{0}$ *είναι:*

$$O\left(\frac{nd + d^4}{\rho^2} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Ενώ για την πολυπλοκότητα σε μηχανές Turing ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2

Δεδομένου $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ *και κανονικοποιημένα σύνολα σημείων* $C_1, \ldots, C_{d+1} \subset \mathbb{Q}^d$, *όπου αναπαρήστανται από συμβολοσειρά* L *δηφίων και* $|C_i| \leq n$ *και* $B(0,\rho) \subset conv(C_i)$, *οι ρητές πράξεις του Αλγορίθμου ΓρήγορηΠολύχρωμηΣύλλογή για να βρει πολύχρωμη συλλογή* $\varepsilon -$*κοντά στο* $\mathbf{0}$ *είναι:*

$$poly\left(L,\ \log \frac{1}{\varepsilon},\ \frac{1}{\rho}\right)$$

Παράρτημα: Ευρετήριο Αλγορίθμων

Άρθρο	Περιγραφή	Πολυπλοκότητα
2	ε-προσεγγιστική πολύχρωμη συλλογή	poly(L, log(1/ε), 1/ρ)
1	max{d – m + 2, ceil[(d+1)/2]}-πολύχρωμη συλλογή	$O(d^5)$
1	ceil[εd]-πολύχρωμη συλλογή	$d^{O(1/e \ln(1/\rho))}$
1	πολύγχρωμης συλλογής με είσοδο δισύνολα	d^3
1	πολύχρωμης συλλογής για $\Theta(d^2 \log d)$ κλάσεις χρωμάτων	$d^{O(\log(d))}$