Δυναμική Πολύπλοκων Δικτύων

Κεφάλαιο 6: Θεωρία Παιγνίων

Διάλεξη 2: Σημείο Ισορροπίας Nash σε Καθαρές & Μικτές Στρατηγικές

Μερκούρης Παπαμιχαήλ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στην Προηγούμενη Διάλεξη..

- Είδαμε την Θεωρία Παιγνίων μέσα από παραδείγματα.
- Μελετήσαμε την συμπεριφορά των παικτών όταν έχουν *αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές*.
- Αναλύσαμε το διάσημο Δίλημμα του Φυλακισμένου.
- Ορίσαμε την έννοια της *βέλτιστης απόκρισης*.
- Επεκτείναμε την ανάλυσή μας σε παίγνια όπου μόνο ένας παίκτης έχει αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική.

Υπενθυμίζουμε: Βέλτιστες Αποκρίσεις

- Μια στρατηγική S^*, του παίκτη 1 είναι *αυστηρά* βέλτιστη απόκριση σε μια στρατηγική T του παίκτη 2, όταν

$$P_1(S^*, T) > P_1(S, T) \tag{2}$$

για κάθε άλλη στρατηγική $S \neq S^*$ του παίκτη 1.

- Με $SBR_1(T)$ συμβολίζουμε το *σύνολο βέλτιστων αποκρίσεων* του παίκτη 1, στη στρατηγική T του παίκτη 2. Συμμετρικά για $SBR_2(T)$.
- *Αν υπάρχει* κάποια αυστηρά βέλτιστη απόκριση, τότε αυτή θα είναι *μοναδική*, για την στρατηγική T του παίκτη 2.

Σημείο Ισορροπίας Nash

Παίγνιο 3 Πελατών

Θεωρούμε 2 εταιρείες (συμ. Ετ. 1, Ετ. 2) οι οποίες θέλουν να προσεγγίσουν 3 πελάτες, τους A, B, C.

- Οι παίκτες Ετ. 1, Ετ. 2 έχουν 3 στρατηγικές, δ.δ. A, B, C.
- Μπορούν να προσεγγίσουν *μόνο* έναν από αυτούς τους πελάτες.
- Αν και οι δύο εταιρείες προσεγγίσουν τον *ίδιο πελάτη*, τότε πελάτης *θα μοιράσει την δουλειά και στους δύο παίκτες (κατά το ήμισυ)*.
- Η Ετ. 1 είναι *πολύ μικρή*, οπότε αν προσεγγίσει μόνη της έναν πελάτη δεν θα αναλάβει την δουλειά του. Πληρωμή 0.
- Αν η Ετ. 2 προσεγγίσει τους πελάτες B ή C θα πάρει το σύνολο της δουλειάς τους. Αντίθετα, μπορεί να προσεγγίσει τον πελάτη A, μόνο από κοινού με την Ετ. 1.
- Η αξία εργασιών του *πελάτη A αξίζει 8*. Αντίθετα, η αξία εργασιών των πελατών *B, C αξίζει 4*.

Παίγνιο 3 Πελατών: Παρατηρήσεις

- *Κανένας* από τους παίκτες δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.

	A	B	C
A	(4, 4)	(0, 2)	(0, 2)
B	(0, 0)	(1, 1)	(0, 2)
C	(0, 0)	(0, 2)	(1, 1)

Παίγνιο 3 Πελατών:
Παρατηρήσεις

- *Κανένας* από τους παίκτες δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Πως περιμένουμε να συμπεριφερθούν οι παίκτες σε αυτή την περίπτωση;

	A	B	C
A	(4, 4)	(0, 2)	(0, 2)
B	(0, 0)	(1, 1)	(0, 2)
C	(0, 0)	(0, 2)	(1, 1)

Παίγνιο 3 Πελατών:
Παρατηρήσεις

- *Κανένας* από τους παίκτες δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Πως περιμένουμε να συμπεριφερθούν οι παίκτες σε αυτή την περίπτωση;
- Το 1950 ο Nash υποστήριξε ότι οι θα κινηθούν προς την *ισορροπία*.

	A	B	C
A	(4, 4)	(0, 2)	(0, 2)
B	(0, 0)	(1, 1)	(0, 2)
C	(0, 0)	(0, 2)	(1, 1)

Παίγνιο 3 Πελατών:
Παρατηρήσεις

- *Κανένας* από τους παίκτες δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Πως περιμένουμε να συμπεριφερθούν οι παίκτες σε αυτή την περίπτωση;
- Το 1950 ο Nash υποστήριξε ότι οι θα κινηθούν προς την *ισορροπία*.
- Παρατηρίστε την στρατηγική κατάσταση (A, A).

	A	B	C
A	(4, 4)	(0, 2)	(0, 2)
B	(0, 0)	(1, 1)	(0, 2)
C	(0, 0)	(0, 2)	(1, 1)

Παίγνιο 3 Πελατών: Παρατηρήσεις

- *Κανένας* από τους παίκτες δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Πως περιμένουμε να συμπεριφερθούν οι παίκτες σε αυτή την περίπτωση;
- Το 1950 ο Nash υποστήριξε ότι οι θα κινηθούν προς την *ισορροπία*.
- Παρατηρίστε την στρατηγική κατάσταση (A, A).
- Η Ετ. 1 *δεν* έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική

	A	B	C
A	(4, 4)	(0, 2)	(0, 2)
B	(0, 0)	(1, 1)	(0, 2)
C	(0, 0)	(0, 2)	(1, 1)

Παίγνιο 3 Πελατών: Παρατηρήσεις

- *Κανένας* από τους παίκτες δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Πως περιμένουμε να συμπεριφερθούν οι παίκτες σε αυτή την περίπτωση;
- Το 1950 ο Nash υποστήριξε ότι οι θα κινηθούν προς την *ισορροπία*.
- Παρατηρίστε την στρατηγική κατάσταση (A, A).
- Η Ετ. 1 *δεν* έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική.
- *Ομοίως*, και η Ετ. 2.

	A	B	C
A	(4, 4)	(0, 2)	(0, 2)
B	(0, 0)	(1, 1)	(0, 2)
C	(0, 0)	(0, 2)	(1, 1)

Ορισμός: Σημείο Ισορροπίας Nash (για 2-παίκτες)

Έστω ότι ο πίνακας πληρωμών P. Έστω η στρατηγική κατάσταση (ή *προφίλ στρατηγικών*) (S^*, T^*). Το (S^*, T^*) είναι *σημείο ισορροπίας Nash* όταν ισχύουν αμφότερα:

$$P_1(S^*, T^*) \geq P_1(S, T^*) \tag{1}$$

για κάθε άλλη στρατηγική S του παίκτη 1. Και,

$$P_2(S^*, T^*) \geq P_2(S^*, T) \tag{2}$$

για κάθε άλλη στρατηγική T του παίκτη 2.

Ορισμός: Σημείο Ισορροπίας Nash (για 2-παίκτες)

Έστω ότι ο πίνακας πληρωμών P. Έστω η στρατηγική κατάσταση (ή *προφίλ στρατηγικών*) (S^*, T^*). Το (S^*, T^*) είναι *σημείο ισορροπίας Nash* όταν ισχύουν αμφότερα:

$$P_1(S^*, T^*) \geq P_1(S, T^*) \tag{1}$$

για κάθε άλλη στρατηγική S του παίκτη 1. Και,

$$P_2(S^*, T^*) \geq P_2(S^*, T) \tag{2}$$

για κάθε άλλη στρατηγική T του παίκτη 2.

❖ *Ο κάθε παίκτης, δεν μπορεί να "πάει καλύτερα", δεδομένου ότι ο άλλος μείνει στην στρατηγική του.*

Παίγνιο 3 Πελατών: Παρατηρήσεις

- *Κανένας* από τους παίκτες δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Πως περιμένουμε να συμπεριφερθούν οι παίκτες σε αυτή την περίπτωση;
- Το 1950 ο Nash υποστήριξε ότι οι θα κινηθούν προς την *ισορροπία*.
- Παρατηρίστε την στρατηγική κατάσταση (A, A).
- Η Ετ. 1 *δεν* έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική.
- *Ομοίως*, και η Ετ. 2.
- Το (A, A) είναι *σημείο ισορροπίας Nash*!

	A	B	C
A	(4, 4)	(0, 2)	(0, 2)
B	(0, 0)	(1, 1)	(0, 2)
C	(0, 0)	(0, 2)	(1, 1)

Πολλαπλά Σημεία Ισορροπίας Nash

Παράδειγμα: Παίγνια Συνεννόησης

- Όταν υπάρχουν πολλαπλά σημεία ισορροπίας δεν μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε ως προς την κατάληξη του παινίου.

Δίνουμε το εξής παράδειγμα:

- Πρέπει να συνεννοηθείτε με τον συμφοιτητή σας ποιο πρόγραμμα θα γράψετε την παρουσίαση.
- Αν επιλέξετε το ίδιο πρόγραμμα θα είναι πολύ εύκολο να συγχωνεύσετε τις διαφάνειές σας.
- Επιλέγετε πρόγραμμα *χωρίς* εκ των προτέρων συνεννόηση και *ταυτόχρονα*.

Παίγνιο Συνεννόησης 1: Παρατηρήσεις

- Αν καταφέρετε να *συνεννοηθείτε*, τότε αμφότεροι παίρνετε 1 μον. ωφέλειας.
- Διαφορετικά παίρνετε 0 μον. ωφέλειας.
- Εδώ έχουμε *δύο* σημεία Nash.
- Το (PP, PP) και το (LO, LO).
- Παρατηρούμε ότι τα σημεία Nash είναι *ισοδύναμα*.

	PowerPoint	LibreOffice
PowerPoint	(1, 1)	(0, 0)
LibreOffice	(0, 0)	(1, 1)

Παίγνιο Συνεννόησης 2: Η Μάχη των Φύλων

- Μπορεί όμως να μην ισχύει αυτό.
- Το παίγνιο αριστερά είναι γνωστό και σαν *Battle of Sexes*.
- Με τον σύντροφό σας θέλτε να βγείτε Σάββατο βράδυ.
- Εσείς θέλετε cinema, αλλά εκείνος γήπεδο.
- Ποια απόφαση θα πάρετε τελικά;

	Cinema	Γήπεδο
Cinema	(1, 2)	(0, 0)
Γήπεδο	(0, 0)	(2, 1)

Παίγνιο Συνεννόησης 2: Η Μάχη των Φύλων

- Μπορεί όμως να μην ισχύει αυτό.
- Το παίγνιο αριστερά είναι γνωστό και σαν *Battle of Sexes*.
- Με τον σύντροφό σας θέλετε να βγείτε Σάββατο βράδυ.
- Εσείς θέλετε cinema, αλλά εκείνος γήπεδο.
- Ποια απόφαση θα πάρετε τελικά;

❖ *Σε επόμενη διάλεξη θα δούμε επιπλέον κριτήρια για να μπορέσουμε να διακρίνουμε (σε ορισμένες περιπτώσεις) μεταξύ σημείων Nash.*

	Cinema	Γήπεδο
Cinema	(1, 2)	(0, 0)
Γήπεδο	(0, 0)	(2, 1)

Όταν δεν υπάρχουν Σημεία Ισορροπίας Nash

Όταν δεν υπάρχουν σημεία Nash

- Στο προηγούμενο παράδειγμα γενικεύσαμε *αυστηρά* την ανάλυσή μας.
- Τα στρατηγικά προφίλ στα οποία καταλήξαμε με την ανάλυση *κυριαρχούμενων στρατηγικών* είναι και αυτά σημεία ισορροπίας Nash.
- Φυσικά το αντίθετο δεν ισχύει!
- Παρ' όλα αυτά και πάλι η μέθοδός μας *δεν* είναι γενική!

Παίγνιο χωρίς σημεία Nash: Μονα-Ζυγά

- Εσείς και ένας φίλος σας κρατάει έναν αριθμό πίσω από την πλάτη του.
- Αποκαλύπτετε *ταυτόχρονα* τους αριθμούς.
- Αν το άθροισμα βγει *ζυγό* δίνετε 1€ στο φίλο σας.
- Αν το άθροισμα βγει *μονό*, ο φίλος σας σας δίνει 1€.
- Αυτό είναι ένα παίγνιο *0-αθροίσματος*, αφού το δικό σας κέρδος είναι η απώλεια του φίλου σας, και το ανάποδο.
- Στην κατάσταση (1, 1), αποκλίνει ο π. 1 στην (2, 1). Εκεί αποκλίνει ο π. 2 στη (2, 2), κτλ..

	1	2
1	(-1, +1)	(+1, -1)
2	(+1, -1)	(-1, +1)

Παρατηρήσεις

- Στο παιχνίδι “μονά-ζυγά” *δεν* υπάρχει σημείο ισορροπίας.
- *Δεν* μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε για την έκβαση του παιγνίου.
- Παρ’ όλα αυτά ας φανταστούμε ποια στρατηγική θα ακολουθούσαν δύο φίλοι παίζοντας το παίγνιο;

Παρατηρήσεις

- Στο παιχνίδι “μονά-ζυγά” *δεν* υπάρχει σημείο ισορροπίας.
- *Δεν* μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε για την έκβαση του παιγνίου.
- Παρ’ όλα αυτά ας φανταστούμε ποια στρατηγική θα ακολουθούσαν δύο φίλοι παίζοντας το παίγνιο;

❖ Πιθανότατα θα διάλεγαν *τυχαία*.

Επεκτείνοντας τον Χώρο των Στρατηγικών

Επεκτείνοντας τον χώρο στρατηγικών

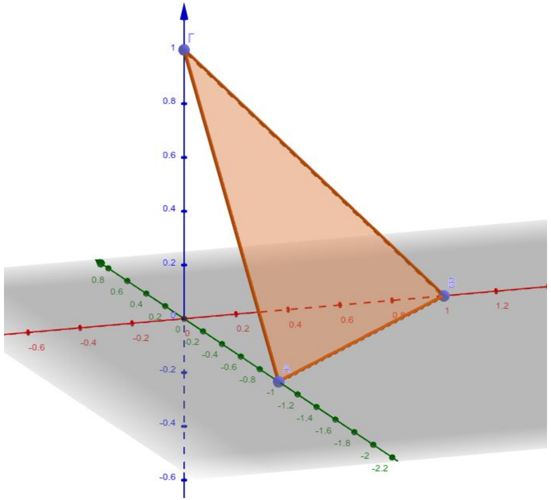
- Μέχρι τώρα ο χώρος στρατηγικών που έχουμε ορίσει για τους παίκτες είναι *ισόμορφος* με το {1, 2, ..., n}, για κάποιο. *Καθαρές στρατηγικές*.
- Δεν επιτρέπουμε στους παίκτες να χρησιμοποιήσουν κάποιον τυχαίο μηχανισμό.
- Θα επεκτείνουμε τον χώρο στρατηγικών, ώστε να μπορούν να επιλέξουν μια *κατανομή πιθανότητας* πάνω στο χώρο στρατηγικών.
- Για n στρατηγικές, θεωρούμε τους αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ έτσι ώστε,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

- *Μικτές στρατηγικές*.

Γεωμετρική Ερμηνεία του Χώρου Στρατηγικών

- Δίνουμε ένα παράδειγμα σε παίγνια 3 στρατηγικών.
- Ο χώρος *καθαρών* στρατηγικών αποτελείται από τα μοναδιαία διανύσματα (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0).
- Ο χώρος *μικτών* στρατηγικών αποτελείται από το δισδιάστατο simplex πιθανοτήτων Δ_3.



Επιλύοντας 2x2 Παίγνια σε Μικτές Στρατηγικές

Παίγνιο χωρίς σημεία Nash: Μονα-Ζυγά σε Μικτές Στρατηγικές

- Παρατηρήσαμε ότι το παιχνίδι αυτό *δεν* έχει σημείο Nash σε *καθαρές* στρατηγικές.
- Υποθέτουμε ότι οι παίκτες παίζουν σε *μικτές* στρατηγικές.
- Έστω ότι ο π. 2 παίζει "1" με πιθανότητα q και "2" με πιθανότητα (1-q).
- Ομοίως, ο π. 1 παίζει "1" με πιθανότητα p και "2" με πιθανότητα (1-p).
- Η ωφέλεια του π. 1 δίνεται από την αναμενόμενη τιμή,

$-1pq + 1p(1-q) + (1-p)q - 1(1-p)(1-q)$

	1	2
1	(-1, +1)	(+1, -1)
2	(+1, -1)	(-1, +1)

Θεώρημα Υποστηρίγματος (Support Theorem)

- Θεωρούμε ότι οι παίκτες παίζουν την κατανομή πιθανότητα p, 1-p και q, 1-q αντίστοιχα.
- Εξετάζουμε τον π. 1.
- Παρατηρούμε ότι αν p = 1, τότε θα έπαιρνε ωφέλεια,

$$-1q + 1(1-q) \tag{3}$$

- Αντίστοιχα, αν p = 0, τότε θα έπαιρνε,

$$1q - 1(1-q) \tag{4}$$

- Για να παίξει ο π. 1 *αυστηρά* μικτή στρατηγική, θα πρέπει (3) = (4).
- Θα είναι *αδιάφορος (indifferent)* ως προς τις καθαρές στρατηγικές του.
- Διαφορετικά, ο π. 1 θα είχε κίνητρο να παίξει μία από τις καθαρές στρατηγικές σου.

Θεώρημα Υποστηρίγματος (Support Theorem) (1/2)

- Αν $p = 1$, τότε θα έπαιρνε ωφέλεια,

$$-1q + 1(1-q) \tag{3}$$

- Αν $p = 0$, τότε θα έπαιρνε,

$$1q - 1(1-q) \tag{4}$$

- Εξισώνοντας (3) = (4).
- Παίρνουμε, $q = ½$.
- Εντελώς συμμετρικά παίρνουμε $p = ½$.
- Η αναμενόμενη ωφέλεια και για τους δύο παίκτες είναι (0, 0).
- Άρα καταλήγουμε *ακριβώς* εκεί που είχαμε επιχειρηματολογήσει διαισθητικά.

Θεώρημα Υποστηρίγματος (Support Theorem) (2/2)

- Το Θεώρημα Υποστηρίγματος *γενικεύεται* για παίγνια nxm 2-παικτών.
- Επιλέγουμε ένα υποστήριγμα (support) για κάθε παίκτη.
- Σε αυτές τις στρατηγικές υποθέτουμε ότι οι παίκτες θα παίξουν με *μη-μηδενικές πιθανότητες*.
- Όπως προηγουμένως σηματίζουμε n’ + m’ εξισώσεις με n’ + m’ αγνώστους. Όπου n’, m’ το μήκος των υποστηριγμάτων των παικτών 1, 2 *αντίστοιχα*.
- Αν το σύστημα λύνεται, τότε οι αντίστοιχες κατανομές μας δίνουν ένα σημείο Nash.
- Αυτός ο απλός αλγόριθμος είναι γνωστός σαν *απαρίθμηση υποστηριγμάτων (support enumeration)*.
- Παρατηρήστε ότι είναι *εκθετικός* (γιατί;)

Θεώρημα Nash

Θεώρημα Nash [1950]

❖ *Κάθε παίγνιο κανονικής μορφής (normal form game) έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας Nash, ίσως σε μικτές στρατηγικές.*

- Το Θ. Nash βασίζεται πάνω στο *Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer*.
- Μια συνάρτηση f(x) έχει *σταθερό σημείο* x^*, αν $f(x^*) = x^*$.
- Παρατηρήστε ότι ένα προφίλ στρατηγικών (S^*, T^*) είναι σημείο Nash, όταν

$$(S^*, T^*) \in BR(S^*, T^*)$$

- Είναι *υπαρξιακό θεώρημα*, μας λέει πως υπάρχει πάντα σημείο ισορροπίας, *αλλά δεν μας δίνει έναν αλγόριθμο για την εύρεσή του*.

Υπολογιστικές Πτυχές του Θεωρήματος του Nash

- Η εύρεση σημείου Nash είναι ένα *υπολογιστικά δύσκολο* πρόβλημα.
- Για τεχνικούς λόγους *δεν* μπορεί να είναι NP-πλήρες, αφού η απάντηση οποιουδήποτε αλγορίθμου θα είναι πάντα «ΝΑΙ».
- Όταν παρακάμπτεται το Θ. Nash, όλα τα σχετικά ερωτήματα είναι NP-πλήρη, π.χ. *«υπάρχει 2ο σημείο Nash;»*.
- *Δεν* υπάρχει γνωστός πολυωνυμικός αλγόριθμος για την εύρεση σημείων Nash σε μικτές στρατηγικές.
- Το 2009 αποδείχτηκε ότι η εύρεση σημείου Nash είναι πλήρες πρόβλημα για την κλάση PPAD, από τους Δασκαλάκη, Goldberg, Παπαδημητρίου.
- Πιστεύεται ότι το πρόβλημα *δεν* λύνεται πολυωνυμικά.

Κριτική για το Σημείο Ισορροπίας Nash

Κριτική για το Σημείο Ισορροπίας Nash

Έχει διατυπωθεί κριτική για το σημείο ισορροπίας Nash σαν *έννοια λύσης (solution concept)* ενός παιχνιδιού:

- Όπως είδαμε μπορεί να υπάρχουν πολλαπλά σημεία ισορροπίας.
- Οι ωφέλειες για τους παίκτες *δεν* είναι ισοδύναμες.
- Υπάρχει αναντιστοιχία μια την έννοια λύσης ενός μαθηματικού προβλήματος, π.χ. ενός προβλήματος βελτιστοποίησης.
- Εκεί είτε έχουμε μοναδικές λύσεις, είτε πολλαπλές αλλά ισοδύναμες, λ.χ. μια εξίσωση μπορεί να έχει πολλαπλές λύσεις, αλλά όλες δίνουν την ίδια τιμή.
- Παρ’ όλα αυτά τυγχάνει μεγάλης αποδοχής σε εφαρμοσμένες επιστήμες, λ.χ. οικονομικά, βιολογία κ.ά.
- Αναγνωρίζοντας την συνεισφορά της έννοιας στα οικονομικά, ο John Nash μοιράστηκε το *βραβείο Νόμπελ το 1994*, μαζί με τους John Harsanyi and Reinhard Selten.

Ανασκόπηση

Σε αυτή την διάλεξη..

- Εισαγάγαμε έναν νέο τρόπο ανάλυσης ενός παιγνίου πάνω στο σημείο ισορροπίας Nash.
- Επεκτείναμε τον χώρο στρατηγικών, ώστε να επιτρέπουμε την χρήση τυχαιοκρατικών μηχανισμών στους παίκτες. *Μικτές στρατηγικές*.
- Είδαμε την επίλυση απλών παιγνίων σε μικτές στρατηγικές.
- Είδαμε το Θεώρημα του Nash.
- Εξετάσαμε τις υπολογιστικές του πλευρές.

Στην επόμενη διάλεξη..

- Θα δούμε τρόπους να διακρίνουμε τα σημεία ισορροπίας:
  - Βελτιστοποίηση κατά Pareto (Pareto Optimality)
  - Βελτιστοποίηση Κοινωνικής Ωφέλειας (Social Wellfare Optimality)
- Ανάλυση *κυριαρχούμενων (dominated)* στρατηγικών.
- Θα εξετάσουμε παιχνίδια σε γύρους ή *δυναμικά παιχνίδια (dynamic games)*.
- Θα δούμε τα παίγνια σε *εκτεταμένη μορφή (extended form games)*.
- Θα δούμε την σχέση τους με τα παίγνια κανονικής μορφής.

Ευχαριστώ για τον χρόνο σας :)