Δυναμική Πολύπλοκων Δικτύων

Κεφάλαιο 6: Θεωρία Παιγνίων

Διάλεξη 3: Pareto Βελτιστότητα, Βελτιστότητα Κοινής Ωφέλειας, Ανάλυση Κυριαρχούμενων Στρατηγικών, Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή

Μερκούρης Παπαμιχαήλ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στην προηγούμενη διάλεξη..

- Εισαγάγαμε έναν νέο τρόπο ανάλυσης ενός παιγνίου πάνω στο σημείο ισορροπίας Nash.
- Επεκτείναμε τον χώρο στρατηγικών, ώστε να επιτρέπουμε την χρήση τυχαιοκρατικών μηχανισμών στους παίκτες. *Μικτές στρατηγικές*.
- Είδαμε την επίλυση απλών παιγνίων σε μικτές στρατηγικές.
- Είδαμε το Θεώρημα του Nash.
- Εξετάσαμε τις υπολογιστικές του πλευρές.

Σε αυτή τη διάλεξη..

- Κριτήρια Κοινωνικής Βελτισότητας
  - Βελτιστοποίηση κατά Pareto (Pareto Optimality)
  - Βελτιστοποίηση Κοινωνικής Ωφέλειας (Social Wellfare Optimality)
- Ανάλυση *κυριαρχούμενων (dominated)* στρατηγικών.
- Θα εξετάσουμε παιχνίδια σε γύρους ή *δυναμικά παιχνίδια (dynamic games)*.
- Θα δούμε τα παίγνια σε *εκτεταμένη μορφή (extended form games)*.
- Θα δούμε την σχέση τους με τα παίγνια κανονικής μορφής.

Σημείο Ισορροπίας Nash

Ορισμός: Σημείο Ισορροπίας Nash (για 2-παίκτες)

Έστω ότι ο πίνακας πληρωμών P. Έστω η στρατηγική κατάσταση (ή *προφίλ στρατηγικών*) (S^*, T^*). Το (S^*, T^*) είναι *σημείο ισορροπίας Nash* όταν ισχύουν αμφότερα:

$$P_1(S^*, T^*) \geq P_1(S, T^*) \qquad (1)$$

για κάθε άλλη στρατηγική S του παίκτη 1. Και,

$$P_2(S^*, T^*) \geq P_2(S^*, T) \qquad (2)$$

για κάθε άλλη στρατηγική T του παίκτη 2.

- *Ο κάθε παίκτης, δεν μπορεί να "πάει καλύτερα", δεδομένου ότι ο άλλος μείνει στην στρατηγική του.*

Επεκτείνοντας τον χώρο στρατηγικών

- Μέχρι τώρα ο χώρος στρατηγικών που έχουμε ορίσει για τους παίκτες είναι *ισόμορφος* με το {1, 2, ..., n}, για κάποιο. *Καθαρές στρατηγικές*.
- Δεν επιτρέπουμε στους παίκτες να χρησιμοποιήσουν κάποιον τυχαίο μηχανισμό.
- Θα επεκτείνουμε τον χώρο στρατηγικών, ώστε να μπορούν να επιλέξουν μια *κατανομή πιθανότητας* πάνω στο χώρο στρατηγικών.
- Για n στρατηγικές, θεωρούμε τους αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ έτσι ώστε,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

- *Μικτές στρατηγικές*.

Θεώρημα Nash [1950]

- *Κάθε παίγνιο κανονικής μορφής (normal form game) έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας Nash, ίσως σε μικτές στρατηγικές.*

Κριτήρια Βελτιστότητας

Κριτήρια Βελτιστότητας

- Στην προηγούμενη διάλεξη επιχειρηματολογήσαμε ότι το παιχνίδι θα καταλήξει σε ισορροπία Nash.
- Σε μια τέτοια κατάσταση οι παίκτες *δεν* έχουν κίνητρο να αποκλίνουν *μονομερώς* από αυτή τη στρατηγική κατάσταση.
- Η κατάληξη σε ισορροπία *δεν* ικανοποιεί απαραίτητα κάποια έννοια *κοινωνικής βελτιστότητας*.
- Θα δούμε δύο κριτήρια κοινωνικής βελτιστότητας:
    - Pareto Βελτιστότητα
    - Κοινωνική Βελτιστότητα

Κριτήρια Βελτιστότητας: Pareto Βελτιστότητα

Μια επιλογή στρατηγικών (S^*, T^*) είναι *βέλτιστη κατά Pareto (Pareto-optimal)*, αν:

1. δεν υπάρχει καμία άλλη επιλογή στρατηγικών (S’, T’) όπου όλοι οι παίκτες θα παίρνουν τουλάχιστον τις *ίδιες πληρωμές*,
2. και τουλάχιστον ένας παίρνει *αυστηρά καλύτερη πληρωμή*.

Κριτήρια Βελτιστότητας: Pareto Βελτιστότητα

Μια επιλογή στρατηγικών (S^*, T^*) είναι *βέλτιστη κατά Pareto (Pareto-optimal)*, αν:

1. δεν υπάρχει καμία άλλη επιλογή στρατηγικών (S’, T’) όπου όλοι οι παίκτες θα παίρνουν τουλάχιστον τις *ίδιες πληρωμές*,
2. και τουλάχιστον ένας παίρνει *αυστηρά καλύτερη πληρωμή*.

Με άλλα λόγια θέλουμε να *μην* ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

1. $P_1(S^*, T^*) \leq P_1(S', T')$ *και* $P_2(S^*, T^*) < P_2(S', T')$ ή
2. $P_2(S^*, T^*) \leq P_2(S', T')$ *και* $P_1(S^*, T^*) < P_1(S', T')$

Κριτήρια Βελτιστότητας: Pareto Βελτιστότητα

Μια επιλογή στρατηγικών (S^*, T^*) είναι *βέλτιστη κατά Pareto (Pareto-optimal)*, αν:

1. δεν υπάρχει καμία άλλη επιλογή στρατηγικών (S’, T’) όπου όλοι οι παίκτες θα παίρνουν τουλάχιστον τις *ίδιες πληρωμές*,
2. και τουλάχιστον ένας παίρνει *αυστηρά καλύτερη πληρωμή*.

Με άλλα λόγια θέλουμε να *μην* ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

1. $P_1(S^*, T^*) \leq P_1(S', T')$ *και* $P_2(S^*, T^*) < P_2(S', T')$ ή
2. $P_2(S^*, T^*) \leq P_2(S', T')$ *και* $P_1(S^*, T^*) < P_1(S', T')$

❖ Μια επιλογή στρατηγικών *δεν* είναι Pareto βέλτιστη όταν τουλάχιστον ένας παίκτης μπορεί να αποκτήσει καλύτερες πληρωμές, *χωρίς* να επηρεάσει τους άλλους.

Κριτήρια Βελτιστότητας:
Pareto Βελτιστότητα

- Στο παίγνιο “εξέταση-παρουσίαση” υπάρχει μοναδικό σημείο ισορροπίας σε καθαρές στρατηγικές το (ε, ε).
- Παρ’ όλα αυτά *δεν* είναι Pareto βέλτιστο!

	εξέταση	παρουσίαση
εξέταση	(88, 88)	(92, 86)
παρουσίαση	(86, 92)	(90, 90)

Κριτήρια Βελτιστότητας:
Pareto Βελτιστότητα

- Στο παίγνιο "εξέταση-παρουσίαση" υπάρχει μοναδικό σημείο ισορροπίας σε καθαρές στρατηγικές το (ε, ε).
- Παρ' όλα αυτά *δεν* είναι Pareto βέλτιστο!
- Οι συνθήκες (1) ή (2) ικανοποιούνται για τα προφίλ στρατηγικών (ε, π), (π, ε), (π, π).

	εξέταση	παρουσίαση
εξέταση	(88, 88)	(92, 86)
παρουσίαση	(86, 92)	(90, 90)

Κριτήρια Βελτιστότητας:
Pareto Βελτιστότητα

- Στο παίγνιο “εξέταση-παρουσίαση” υπάρχει μοναδικό σημείο ισορροπίας σε καθαρές στρατηγικές το (ε, ε).
- Παρ’ όλα αυτά *δεν* είναι Pareto βέλτιστο!
- Οι συνθήκες (1) ή (2) ικανοποιούνται για τα προφίλ στρατηγικών (ε, π), (π, ε), (π, π).
- Αντίθετα, αυτά τα στρατηγικά προφίλ είναι Pareto βέλτιστα.

	εξέταση	παρουσίαση
εξέταση	(88, 88)	(92, 86)
παρουσίαση	(86, 92)	(90, 90)

Κριτήρια Βελτιστότητας:
Pareto Βελτιστότητα

- Στο παίγνιο “εξέταση-παρουσίαση” υπάρχει μοναδικό σημείο ισορροπίας σε καθαρές στρατηγικές το (ε, ε).
- Παρ’ όλα αυτά *δεν* είναι Pareto βέλτιστο!
- Οι συνθήκες (1) ή (2) ικανοποιούνται για τα προφίλ στρατηγικών (ε, π), (π, ε), (π, π).
- Αντίθετα, αυτά τα στρατηγικά προφίλ είναι Pareto βέλτιστα.
- Αν οι παίκτες μπορούν να συντάξουν ένα *συμβόλαιο* τότε θα προτιμήσουν μια Pareto βέλτιστη στρατηγική, από τις υπόλοιπες.
- Διαφορετικά θα *αποτολμήσουν* σε κάποιο σημείο Nash.

	εξέταση	παρουσίαση
εξέταση	(88, 88)	(92, 86)
παρουσίαση	(86, 92)	(90, 90)

Κριτήρια Βελτιστότητας: Κοινωνική Βελτιστότητα

Μια επιλογή στρατηγικών (S^*, T^*) είναι *κοινωνικά βέλτιστη (social optimal)*, ή *μεγιστοποιητής κοινωνικής ωφέλειας* όταν μεγιστοποιεί το *άθροισμα* ωφελειών των παικτών:

$$SW(S, T) = P_1(S, T) + P_2(S, T)$$

$$(S^*, T^*) = \arg\max_{(S,T)} SW(S, T)$$

Κριτήρια Βελτιστότητας: Κοινωνική Βελτιστότητα

Μια επιλογή στρατηγικών (S^*, T^*) είναι *κοινωνικά βέλτιστη (social optimal)*, ή *μεγιστοποιητής κοινωνικής ωφέλειας* όταν μεγιστοποιεί το *άθροισμα* ωφελειών των παικτών:

$$SW(S, T) = P_1(S, T) + P_2(S, T)$$

$$(S^*, T^*) = \arg\max_{(S,T)} SW(S, T)$$

- ❏ Προφίλ στρατηγικών που είναι κοινωνικά βέλτιστα *είναι και* Pareto βέλτιστα.
- ❏ Το αντίθετο *δεν* ισχύει.

Κριτήρια Βελτιστότητας: Κοινωνική Βελτιστότητα

- Μόνο ένα από τα στρατηγικά προφίλ που είναι Pareto βέλτιστα είναι και μεγιστοποιητές κοινωνικής ωφέλειας.

- Σημείο Nash: (ε, ε)
- Pareto Βέλτιστα: (ε, π), (π, ε), (π, π)
- Κοινωνικά Βέλτιστα: (π, π)

	εξέταση	παρουσίαση
εξέταση	(88, 88)	(92, 86)
παρουσίαση	(86, 92)	(90, 90)

Κριτήρια Βελτιστότητας: Το Τίμημα της Αναρχίας

Το *"Τίμημα της Αναρχίας" (Price of Anarchy)* είναι ο *λόγος* μεταξύ του στρατηγικού προφίλ με τη μεγαλύτερη κοινωνική ωφέλεια. και του *χειρότερου* σημείου ισορροπίας Nash.

$$PoA = \frac{\max_{(S,T)} SW(S,T)}{\min_{(S^\star,T^\star)\in NE} SW(S,T)}$$

Κριτήρια Βελτιστότητας:
Το Τίμημα της Αναρχίας

$$PoA = \frac{\max_{(S,\,T)} SW(S,\,T)}{\min_{(S^{\star},\,T^{\star}) \in NE} SW(S,\,T)}$$

- Το προφίλ με την καλύτερη κοινωνική ωφέλεια είναι το (π, π).
- SW(π, π) = 180.

	εξέταση	παρουσίαση
εξέταση	(88, 88)	(92, 86)
παρουσίαση	(86, 92)	(90, 90)

Κριτήρια Βελτιστότητας:
Το Τίμημα της Αναρχίας

$$PoA = \frac{\max_{(S,\,T)} SW(S,\,T)}{\min_{(S^\star,\,T^\star) \in NE} SW(S,\,T)}$$

- Το προφίλ με την καλύτερη κοινωνική ωφέλεια είναι το (π, π).
- SW(π, π) = 180.
- Το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το (ε, ε).
- SW(ε, ε) = 176.
- PoA = 180/176 = 1.02

	εξέταση	παρουσίαση
εξέταση	(88, 88)	(92, 86)
παρουσίαση	(86, 92)	(90, 90)

Ανάλυση Κυριαρχούμενων Στρατηγικών

Ανάλυση Κυριαρχούμενων Στρατηγικών

- Στην 1η διάλεξη μιλήσαμε για τις *κυρίαρχες* στρατηγικές.
- Οι κυρίαρχες στρατηγικές είναι αυτές που αποδίδουν την καλύτερη ωφέλεια σε έναν παίκτη *ανεξαρτήτως* των στρατηγικών των άλλων παικτών.

Ανάλυση Κυριαρχούμενων Στρατηγικών

- Στην 1η διάλεξη μιλήσαμε για τις *κυρίαρχες* στρατηγικές.
- Οι κυρίαρχες στρατηγικές είναι αυτές που αποδίδουν την καλύτερη ωφέλεια σε έναν παίκτη *ανεξαρτήτως* των στρατηγικών των άλλων παικτών.
- *Κυριαρχούμενη* είναι μια στρατηγική S για την οποία υπάρχει μια άλλη στρατηγική S’ η οποία αποφέρει *αυστηρά* καλύτερες πληρωμές στον παίκτη *ανεξαρτήτως* των στρατηγικών των αντιπάλων. Δ.δ.:

$$P_1(S', T) > P_1(S, T),$$

για κάθε επιλογή T του αντιπάλου.

Ανάλυση Κυριαρχούμενων Στρατηγικών

- Στην 1η διάλεξη μιλήσαμε για τις *κυρίαρχες* στρατηγικές.
- Οι κυρίαρχες στρατηγικές είναι αυτές που αποδίδουν την καλύτερη ωφέλεια σε έναν παίκτη *ανεξαρτήτως* των στρατηγικών των άλλων παικτών.
- *Κυριαρχούμενη* είναι μια στρατηγική S για την οποία υπάρχει μια άλλη στρατηγική S' η οποία αποφέρει *αυστηρά* καλύτερες πληρωμές στον παίκτη *ανεξαρτήτως* των στρατηγικών των αντιπάλων. Δ.δ.:

$$P_1(S', T) > P_1(S, T),$$

για κάθε επιλογή T του αντιπάλου.

❖ Ο π. 1 δεν θα παίξει *ποτέ* την στρατηγική S, αφού πάντα έχει κάποια καλύτερη επιλογή.

Ανάλυση Κυριαρχούμενων Στρατηγικών

- *Κυριαρχούμενη* είναι μια στρατηγική S για την οποία υπάρχει μια άλλη στρατηγική S’ η οποία αποφέρει *αυστηρά* καλύτερες πληρωμές στον παίκτη *ανεξαρτήτως* των στρατηγικών των αντιπάλων. Δ.δ.:

$$P_1(S', T) > P_1(S, T),$$

για κάθε επιλογή T του αντιπάλου.

- Ο π. 1 δεν θα παίξει *ποτέ* την στρατηγική S, αφού πάντα έχει κάποια καλύτερη επιλογή.

Βάσει του παραπάνω μπορούμε να απαλείξουμε την στρατηγική S, *χωρίς βλάβη της γενικότητας.*

Παράδειγμα: Τοποθέτηση Εγκαταστάσεων

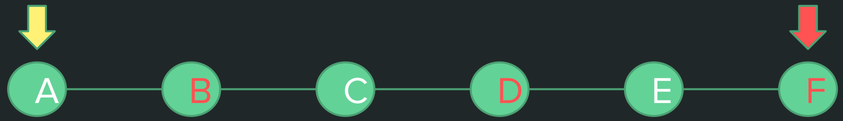
Παράδειγμα: Τοποθέτηση Καταστημάτων

- Δύο εταιρείες (ετ. 1, ετ. 2) θέλουν να τοποθετήσουν καταστήματα κατα μήκος ενός δρόμου.
- Η ετ. 1 έχει επιλογές να τοποθετήσει στα τετράγωνα A, C, E.
- Η ετ. 2 έχει επιλογές να τοποθετήσει στα τετράγωνα B, D, F.
- Υποθέτουμε ότι σε κάθε τετράγωνο κατοικεί ίσος αριθμός κατοίκων.
- Ο κάθε κάτοικος θα πάει στο *κοντινότερο* κατάστημα.

Παράδειγμα: Τοποθέτηση Καταστημάτων

- Αν η ετ. 1 τοποθετήσει κατάστημα στο τετράγωνο A και η ετ. 2 στο τετράγωνο F, τότε μοιράζονται οι πελάτες στα δύο καταστήματα.

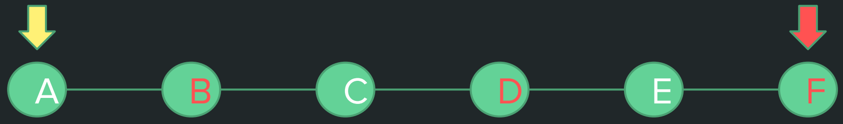
	B	D	F
A	(1, 5)	(2, 4)	(3, 3)
C	(4, 2)	(3, 3)	(4, 2)
E	(3, 3)	(2, 4)	(5, 1)



Παράδειγμα: Τοποθέτηση Καταστημάτων

- Αν η ετ. 1 τοποθετήσει κατάστημα στο τετράγωνο A και η ετ. 2 στο τετράγωνο F, τότε μοιράζονται οι πελάτες στα δύο καταστήματα.
- Παρατηρούμε τη στρατηγική A της ετ. 1

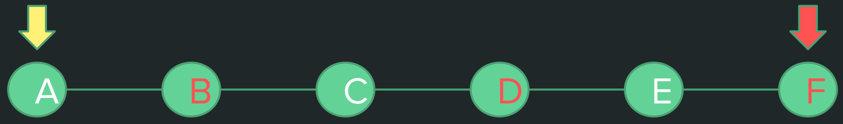
	B	D	F
A	(1, 5)	(2, 4)	(3, 3)
C	(4, 2)	(3, 3)	(4, 2)
E	(3, 3)	(2, 4)	(5, 1)



Παράδειγμα: Τοποθέτηση Καταστημάτων

- Αν η ετ. 1 τοποθετήσει κατάστημα στο τετράγωνο A και η ετ. 2 στο τετράγωνο F, τότε μοιράζονται οι πελάτες στα δύο καταστήματα.
- Παρατηρούμε τη στρατηγική A της ετ. 1.
- Η A *κυριαρχείται* από την C.
- Ποτέ δεν “συμφέρει” την ετ. 1 να τοποθετήσει το κατάστημά της σο A.

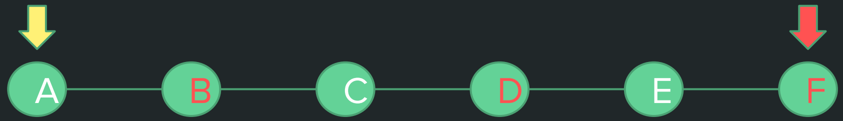
	B	D	F
A	(1, 5)	(2, 4)	(3, 3)
C	(4, 2)	(3, 3)	(4, 2)
E	(3, 3)	(2, 4)	(5, 1)



Παράδειγμα: Τοποθέτηση Καταστημάτων

- Αν η ετ. 1 τοποθετήσει κατάστημα στο τετράγωνο A και η ετ. 2 στο τετράγωνο F, τότε μοιράζονται οι πελάτες στα δύο καταστήματα.
- Παρατηρούμε τη στρατηγική A της ετ. 1.
- Η A *κυριαρχείται* από την C.
- Ποτέ δεν “συμφέρει” την ετ. 1 να τοποθετήσει το κατάστημά της σο A.
- Ομοίως, για τη στρατηγική F, της ετ. 2.

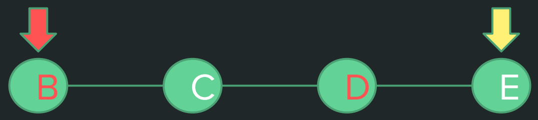
	B	D	F
A	(1, 5)	(2, 4)	(3, 3)
C	(4, 2)	(3, 3)	(4, 2)
E	(3, 3)	(2, 4)	(5, 1)



Παράδειγμα: Τοποθέτηση Καταστημάτων

- Αν η ετ. 1 τοποθετήσει κατάστημα στο τετράγωνο A και η ετ. 2 στο τετράγωνο F, τότε μοιράζονται οι πελάτες στα δύο καταστήματα.
- Παρατηρούμε τη στρατηγική A της ετ. 1.
- Η A *κυριαρχείται* από την C.
- Ποτέ δεν “συμφέρει” την ετ. 1 να τοποθετήσει το κατάστημά της σο A.
- Ομοίως, για τη στρατηγική F, της ετ. 2.
- Οπότε μπορούμε να *ξεχάσουμε* αυτές τις στρατηγικές!

	B	D
C	(4, 2)	(3, 3)
E	(3, 3)	(2, 4)

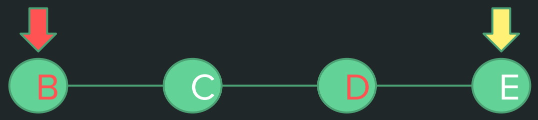


Παράδειγμα: Τοποθέτηση Καταστημάτων

Συνεχίζουμε με το ίδιο σκεπτικό:

- Για την ετ. 1 η E κυριαρχείται από την C.

	B	D
C	(4, 2)	(3, 3)
E	(3, 3)	(2, 4)

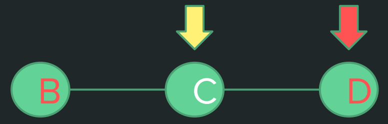


Παράδειγμα: Τοποθέτηση Καταστημάτων

Συνεχίζουμε με το ίδιο σκεπτικό:

- Για την ετ. 1 η E κυριαρχείται από την C.
- Για την ετ. 2 η B κυριαρχείται από την D.

	B	D
C	(4, 2)	(3, 3)

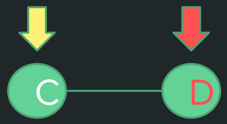


Παράδειγμα: Τοποθέτηση Καταστημάτων

Συνεχίζουμε με το ίδιο σκεπτικό:

- ❑ Για την ετ. 1 η E κυριαρχείται από την C.
- ❑ Για την ετ. 2 η B κυριαρχείται από την D.
- ❑ Άρα το προφίλ (C, D) είναι σημείο ισορροπίας Nash.

	D
C	(3, 3)



Επαναληπτική Απαλοιφή Κυριαρχούμενων Στρατηγικών

- Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε παίγνια n παικτών.
- Η απαλοιφή δεν θα μας οδηγεί πάντα σε *μοναδικό* στρατηγικό προφίλ.
- Υπάρχουν στιγμιότυπα, βλ. “Μάχη των Φύλων” ή “Μονά-Ζυγά”, όπου *δεν* μπορεί να εφαρμοστεί.

- Αποδεικνύεται ότι:
  - Η απολοιφή *δεν* επηρεάζει τα σημεία ισορροπίας, *όλα τα σημεία ισορροπίας θα “επιβιώσουν” μετά τις απαλοιφές*.
  - *Δεν* έχει σημασία η σειρά με την οποία απαλοίφονται οι κυριαρχούμενες στρατηγικές.
  - *Η απαλοιφή δεν δημιουργεί “νέα” σημεία ισορροπίας*.

Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή

Παιγνια σε Εκτεταμένη Μορφή

Μέχρι τώρα είδαμε παίγνια όπου:

- Οι παίκτες αποφασίζουν *ταυτόχρονα* τις στρατηγικές τους.
- Το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε *έναν* γύρο.
- Οι παίκτες δεν λαμβάνουν πληροφόρηση για τις αποφάσεις των άλλων.

Παιγνια σε Εκτεταμένη Μορφή

Μέχρι τώρα είδαμε παίγνια όπου:

- Οι παίκτες αποφασίζουν *ταυτόχρονα* τις στρατηγικές τους.
- Το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε *έναν* γύρο.
- Οι παίκτες δεν λαμβάνουν πληροφόρηση για τις αποφάσεις των άλλων.

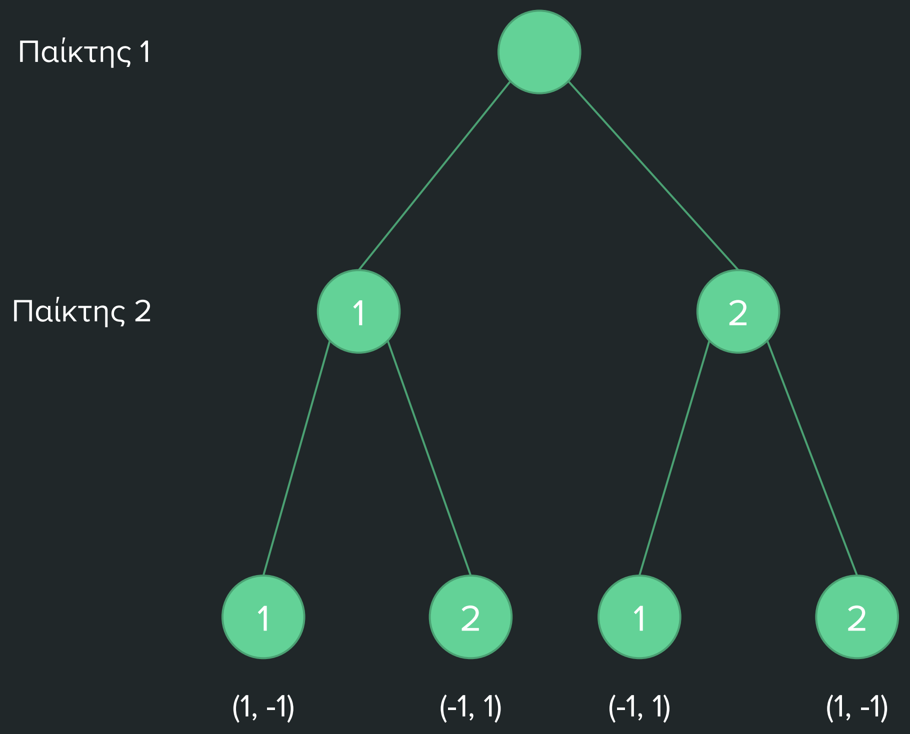
Στα παίγνια εκτεταμένης μορφής:

- Οι παίκτες παίζουν σε γύρους.
- Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε καταστάσεις όπου οι παίκτες λαμβάνουν υπόψη τις κινήσεις που έχουν προηγηθεί.

Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Μονά-Ζυγά

Σχεδιάζουμε σε εκτεταμένη μορφή το παίγνιο "Μονά-Ζυγά".

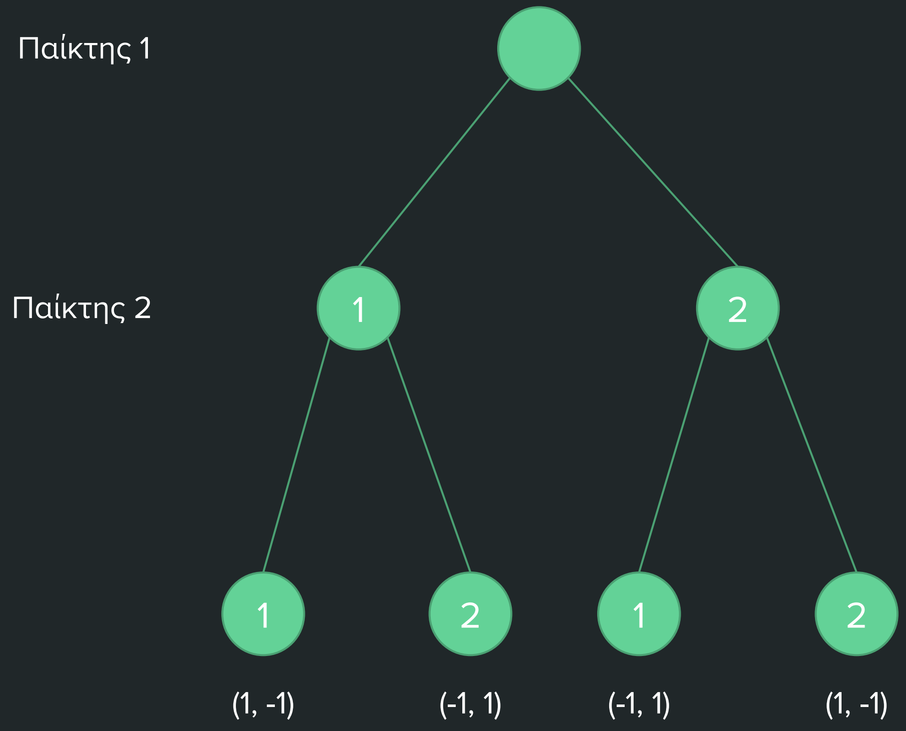
- Οργανώνουμε το παίγνιο σε ένα *δέντρο*.
- Σε κάθε επίπεδο παίζει *ένας* παίκτης.
- Θεωρούμε ότι παίζει πρώτα ο παίκτης 1.
- Ο παίκτης 2 βλέπει την κίνησή του και αποφασίζει πως θα παίξει.



Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Μονά-Ζυγά

Σχεδιάζουμε σε εκτεταμένη μορφή το παίγνιο “Μονά-Ζυγά”.

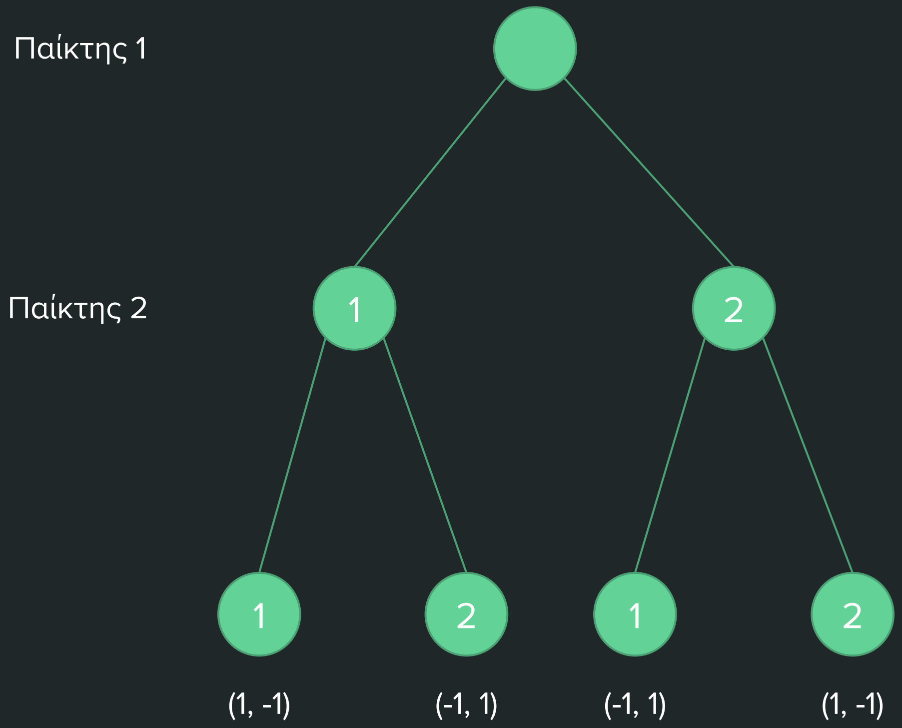
- Οργανώνουμε το παίγνιο σε ένα *δέντρο*.
- Σε κάθε επίπεδο παίζει *ένας* παίκτης.
- Θεωρούμε ότι παίζει πρώτα ο παίκτης 1.
- Ο παίκτης 2 βλέπει την κίνησή του και αποφασίζει πως θα παίξει.
- Επειδή ο παίκτης 2 έχει *πληροφόρηση*, αλλάζει η κατάληξη του παιγνίου.
- Θα κερδίζει πάντα ο παίκτης 2, αφού θα βλέπει την στρατηγική του αντιπάλου και θα προσαρμόζει τη στρατηγική του



Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Μονά-Ζυγά

Σχεδιάζουμε σε εκτεταμένη μορφή το παίγνιο “Μονά-Ζυγά”.

- Τώρα η μορφή παιγνίου έχει αλλάξει *δραστικά* από εκείνη που συζητήσαμε.

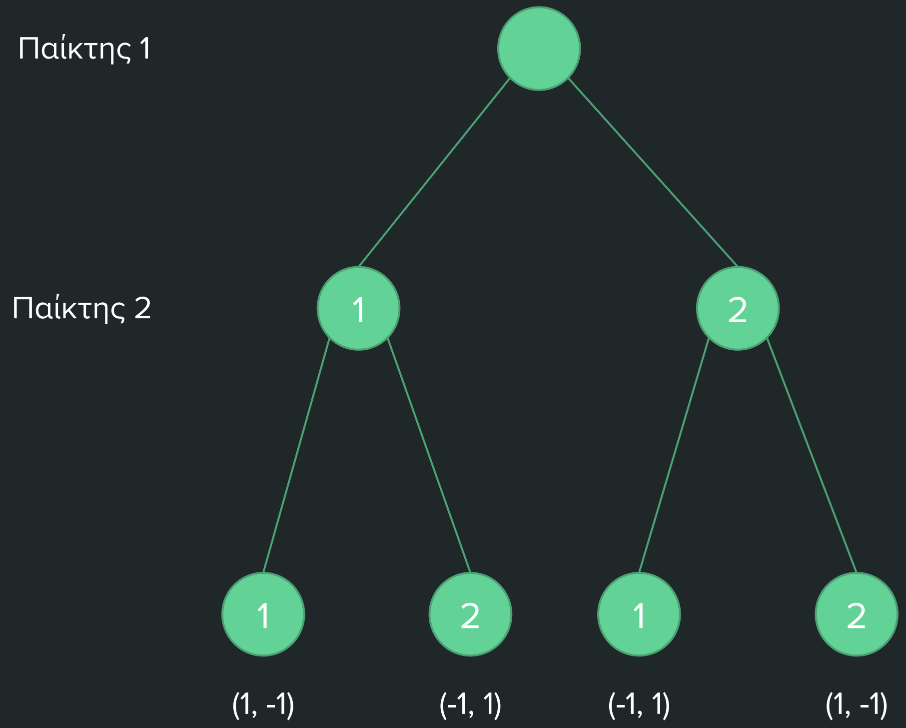


Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Μονά-Ζυγά

Σχεδιάζουμε σε εκτεταμένη μορφή το παίγνιο "Μονά-Ζυγά".

- Τώρα η μορφή παιγνίου έχει αλλάξει *δραστικά* από εκείνη που συζητήσαμε.
- Μια στρατηγική θα πρέπει να περιγράφει τις επιλογές ενός παίκτη *σε κάθε σενάριο*.
- Ο π.1 θα έχει στρατηγικές 1, 2.
- Ο π.2 θα έχει στρατηγικές:

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2).



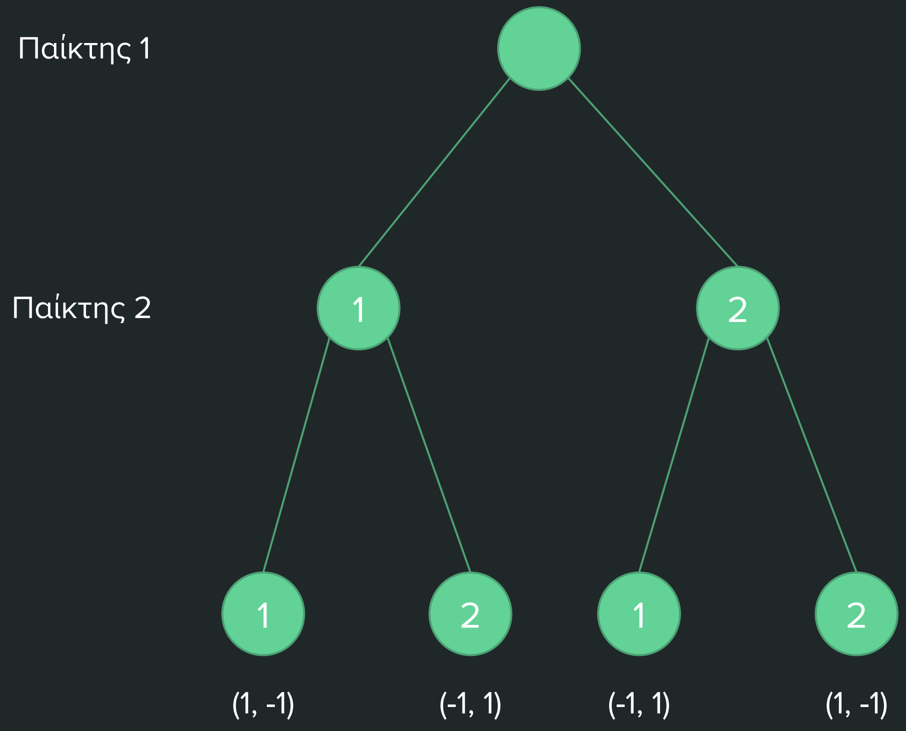
Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Μονά-Ζυγά

- Μια στρατηγική θα πρέπει να περιγράφει τις επιλογές ενός παίκτη *σε κάθε σενάριο*.
- Ο π.1 θα έχει στρατηγικές 1, 2.
- Ο π.2 θα έχει στρατηγικές:

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2).

- Σε κανονική μορφή το παίγνιο γράφεται:

	1	2
(1,1)	(1, -1)	(-1, 1)
(1, 2)	(1, -1)	(1, -1)
(2, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)
(2, 2)	(-1, 1)	(1, -1)

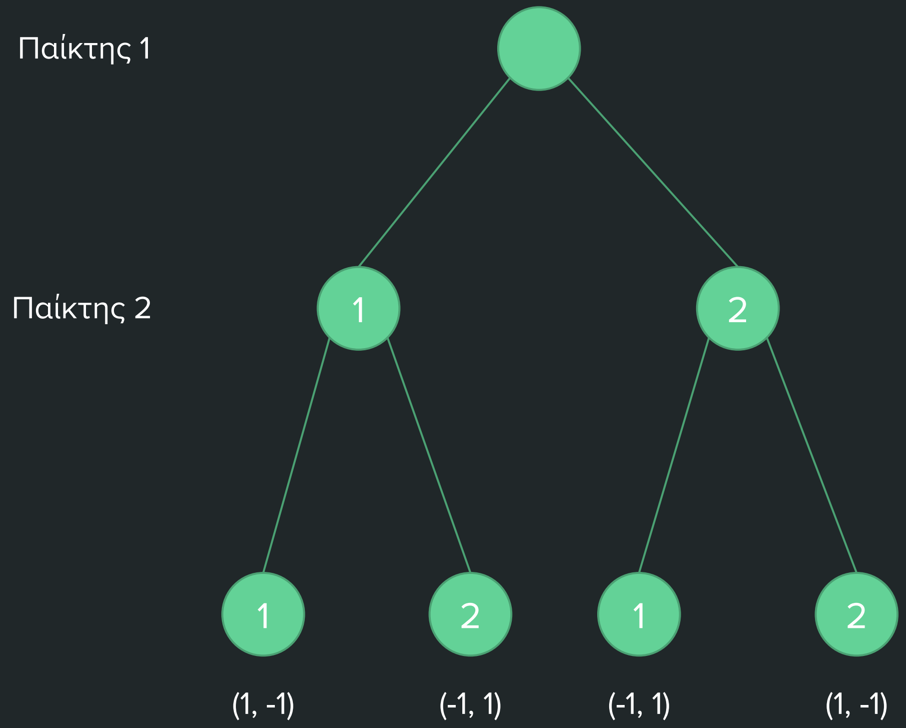


Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Μονά-Ζυγά

- Σε κανονική μορφή το παίγνιο γράφεται:

	1	2
(1,1)	(1, -1)	(-1, 1)
(1, 2)	(1, -1)	(1, -1)
(2, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)
(2, 2)	(-1, 1)	(1, -1)

- Ο π.2 έχει κυρίαρχη στρατηγική την (1, 2), όπου παίζει 1 όταν ο π. 1 παίξει 1 και 2 διαφορετικά.



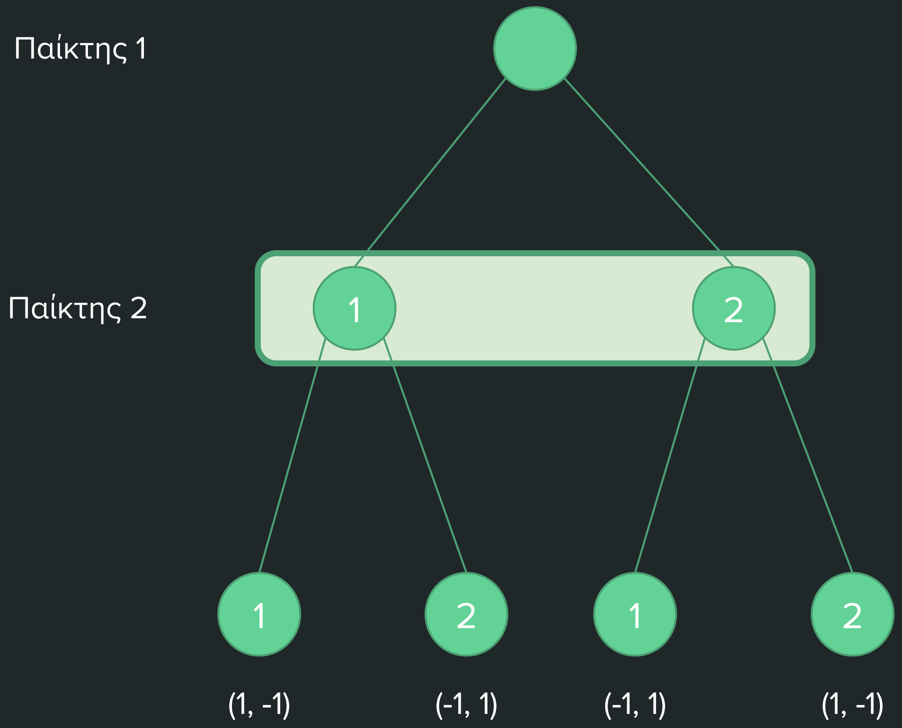
Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Μονά-Ζυγά

Για να προσομοιώσουμε την συμπεριφορά, όπου οι παίκτες παίζουν *ταυτόχρονα*:

- Χρειαζόμαστε την έννοια του *συνόλου πληροφόρησης*.
- Οι κόμβοι που βρίσκονται στο ίδιο σύνολο πληροφόρησης, *δεν* διακρίνονται από τον αντίστοιχο παίκτη.
- *Τώρα η συμπεριφορά των παικτών θα είναι η ίδια με το παίγνιο κανονικής μορφής.*
- Έτσι οι στρατηγικές του π.2:

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)

- Εκφυλίζονται στις: (1, 1) και (2, 2).



Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Μονά-Ζυγά

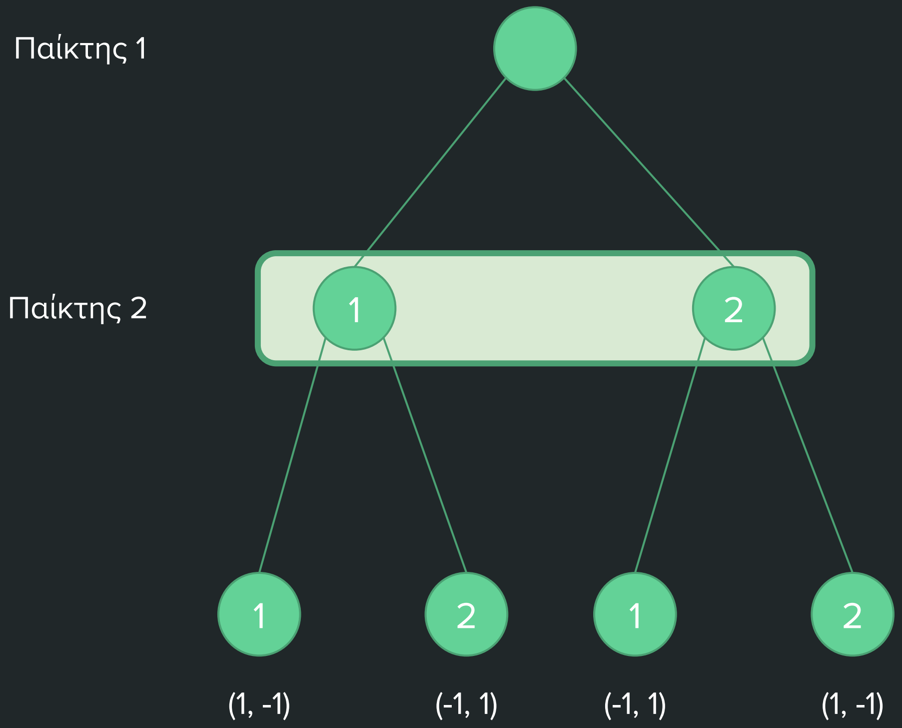
- Έτσι οι στρατηγικές του π.2:

  (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)

- Εκφυλίζονται στις: (1, 1) και (2, 2).
- Το παίγνιο γράφεται σε κανονική μορφή:

	1	2
(1,1)	(1, -1)	(-1, 1)
(2, 2)	(-1, 1)	(1, -1)

- Το οποίο είναι ουσιαστικά *πανομοιότυπο* το παιχνίδι "Μονά-Ζυγά" που είδαμε.



Ανασκόπηση

Σε αυτή τη σειρά διαλέξεων είδαμε..

- Παίγνια σε *κανονική μορφή*
- Ανάλυση *κυρίαρχων στρατηγικών*
- *Σημείο ισορροπίας Nash*
- Επέκταση του χώρου στρατηγικών σε *μικτές στρατηγικές (τυχαιοκρατικοί μηχανισμοί)*.
- Εύρεση σημείων ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές για “μικρά παίγνια”.
- *Θεώρημα υποστηρίγματος*.
- Ανάλυση *κυριαρχούμενων στρατηγικών*.
- Κριτήρια βελτιστότητας: Pareto βελτιστότητα, κοινωνική βελτιστότητα.
- Το *τίμημα της αναρχίας (price of anarchy)*.
- Παίγνια σε *εκτεταμένη μορφή (extended form games)*.

Πράγματα που δεν εξετάσαμε..

- *Παίγνια συμφόρισης*, όπου οι επιλογές των παικτών μοντελοποιούνται σαν μονοπάτια πάνω σε ένα γράφημα. Εκεί μελετάμε την πορεία όπου θα ακολουθήσουν οι παίκτες όταν, λ.χ. ο χρόνος άφιξης τους εξαρτάται από τις επιλογές των υπολοίπων παικτών.
- *Δημοπρασίες*, όπου η τιμή ενός αγαθού εξαρτάται από το πόσο το “θέλουν” οι παίκτες. Εκεί μας ενδιαφέρουν μηχανισμοί δημοπρασιών, έτσι ώστε οι παίκτες να δηλώνουν την *πραγματική τιμή* ωφέλειας την οποία αναθέτουν στο προϊόν.
- *Δυναμικές βέλτιστης απόκρισης*, όπου οι παίκτες πλοηγούνται στο χώρο των στρατηγικών αποκρινόμενοι βέλτιστα στις στρατηγικές επιλογές των αντιπάλων.
- *Παίγνια συνεργασίας*, όπου εξετάζουμε πότε συμφέρει ένα σύνολο παικτών να σχηματίσουν συμμαχίες συμπεριφερόμενοι ελεύθερα.
- *και άλλα πολλά..*

Βιβλιογραφία

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

Το βιβλίο του μαθήματος *“Networks, Crowds and Markets: Reasoning about a Highly Connected World”* - Easley, Kleinberg (2010) περιέχει πλήθος υλικού πάνω σε Θεωρία Παιγνίων.

1. *“Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματικά μοντέλα σύγκρουσης και συνεργασίας”* - Κωστής Μηλολιδάκης, εκδ. Σοφία (2016). Ένα πλήρες αυστηρό και θεωρητικό σύγγραμμα για μια μαθηματική προσέγγιση στην Θεωρία Παιγνίων.
2. *“Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory”* - Tim Roughgarden (2016). Ένα σύγχρονο σύγγραμμα για την *αλγοριθμική θεωρία παιγνίων.* (Διατίθεται δωρεάν από τη σελίδα του συγγραφέα.)
3. *“Algorithmic Game Theory”* - Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani (2007). Ένα προχωρημένο, πλήρες, σύγγραμμα για την αλγοριθμική θεωρία παιγνίων.

Ευχαριστώ για τον χρόνο σας :)