Nichtlineare Gleichungssysteme

Funktionen mit mehreren Variablen

auch multivariat gennant, hier nur skalarwertige Funktionen (keine Komplexen Zahlen). Definition:

Explizite Darstellung Funktionsgleichung ist nach einer variablen aufgelöst.

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Implizite Darstellung nicht nach einer Variablen aufgelöst(nur n-1 unabhängige Variablen)

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

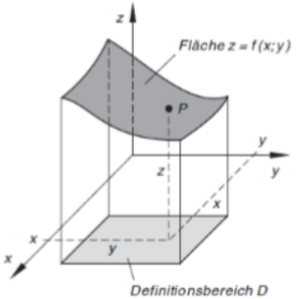
für vektorwertige funktionen

$$\vec{f}(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} y_1 = f_1(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ y_m = f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

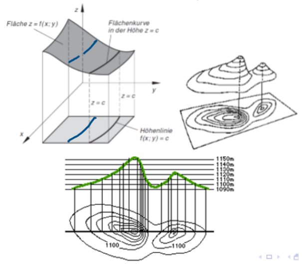
Graphische Darstellungsformen

Funktionen mit 2 Variablen können 3D dargestellt werden.
Interpretieren als $z = f(x, y)$

Fläche Punkte $(x, y, f(x, y))$



Schnittkurve bei konstanter Höhe z, auch Höhen-/Contour-Plot



Partielle Ableitungen

Nur eine der Variablen wird abgeleitet, der Rest als Konstante behandelt. Visuell entspricht dies der Steigung an einer Flächentangente.

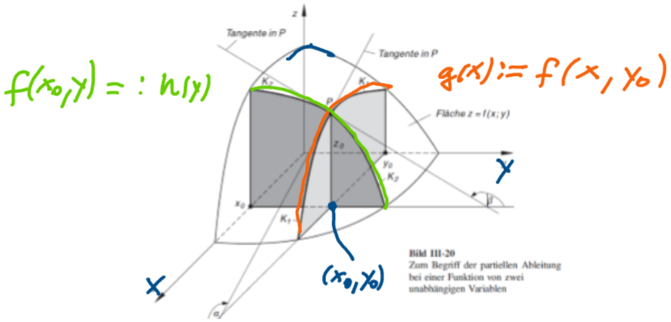
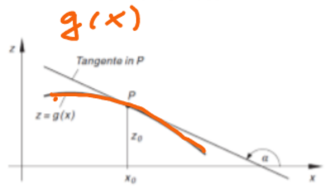
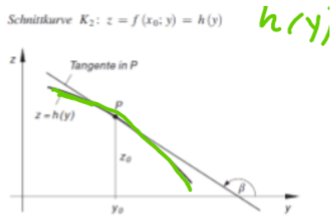


Bild III-20
Zum Begriff der partiellen Ableitung bei einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen

Schnittkurve K_1: $z = f(x; y_0) = g(x)$



Schnittkurve K_2: $z = f(x_0; y) = h(y)$



Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Beispiel nach x abgeleitet(normale Ableitungsregeln, andere Variablen als Konstanten betrachten):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f(x, y) = 3xy^3 + 10x^2y + 5y + 3y * sin(5xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 * 1 * y^3 + 10 * 2x + 0 + 3y * cos(5xy) * 5 * 1 * y$$

Linearisierung

Repetition Tangentengleichung

Dient als Annäherung für $f(x)$ in der Nähe von x_0 (Linearisierung):
$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Jacobi-Matrix

Sozusagen wie Tangentengleichung aber für mehrere Variablen

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 = f_1(x_1, ..., x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix enthält sämtliche Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $\vec{f}$.
Auf jeder Spalte bleibt die funktion f_j die gleiche und in den Zeilen $x_i \rightarrow \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

$$\vec{D}f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \vdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \vdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \vdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$