Nichtlineare Gleichungssysteme

Funktionen mit mehreren Variablen

auch multivariat gennant, hier nur skalarwertige Funktionen (keine Komplexen Zahlen).
Definition:

Explizite Darstellung Funktionsgleichung ist nach einer variablen aufgelöst.

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Implizite Darstellung nicht nach einer Variablen aufgelöst(nur n-1 unabhängige Variablen)

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

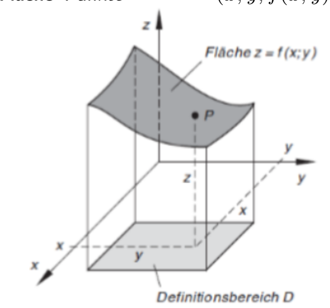
für vektorwertige funktionen

$$\vec{f}(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} y_1 = f_1(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ y_m = f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

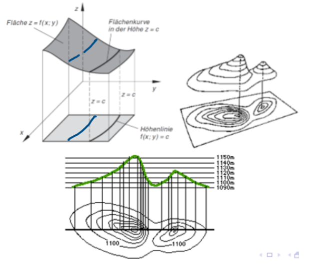
Graphische Darstellungsformen

Funktionen mit 2 Variablen können 3D dargestellt werden.
Interpretieren als $z = f(x, y)$

Fläche Punkte $(x, y, f(x, y))$



Schnittkurve bei konstanter Höhe z, auch Höhen-/Contour-Plot



Partielle Ableitungen

Nur eine der Variablen wird abgeleitet, der Rest als Konstante behandelt. Visuell entspricht dies der Steigung an einer Flächentangente.

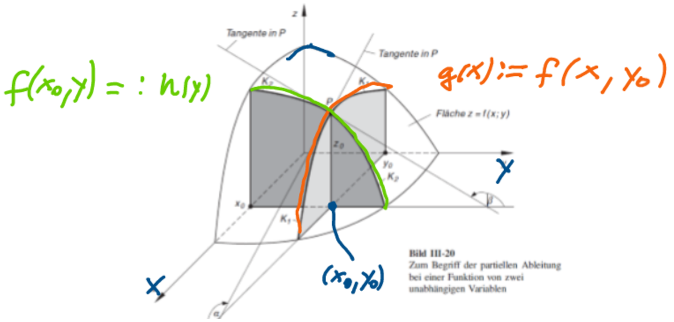
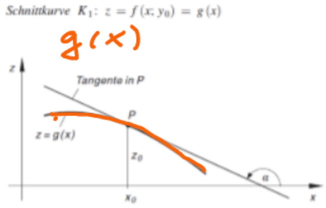
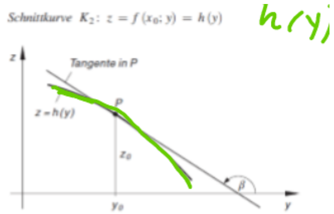


Bild III-20
Zum Begriff der partiellen Ableitung bei einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen





Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Beispiel nach x abgeleitet(normale Ableitungsregeln, andere Variablen als Konstanten betrachten):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f(x, y) = 3xy^3 + 10x^2y + 5y + 3y * sin(5xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 * 1 * y^3 + 10 * 2x + 0 + 3y * cos(5xy) * 5 * 1 * y$$

Linearisierung

Repetition Tangentengleichung

Dient als Annäherung für eindimensionale $f(x)$ in der Nähe von x_0 (Linearisierung): $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Jacobi-Matrix

Sozusagen wie Tangentengleichung aber für mehrere Variablen

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 = f_1(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ y_m = f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix enthält sämtliche Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $\vec{f}$.
Auf jeder Spalte bleibt die funktion f_j die gleiche und in den Zeilen $x_i \rightarrow \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

$$D\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

verallgemeinerte Tangentengleichung

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}^{(0)}) + D\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) * (\vec{x} - \vec{x}^{(0)})$$

ist eine lineare Funktion und für $\vec{x}$ in der Umgebung von $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ gilt $\vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{g}(\vec{x})$

Df entspricht der obigen Funktion zur Erzeugung einer Jacobi-Matrix.

Hochgestellte Zahlen in Klammern $(x^{(n)})$ stehen wie zuvor für eine Variable nach n Iterationsschritten.

Tangentialebene

- Für den speziellen Fall $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $y = f(x_1, x_2)$ und $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T \in \mathbb{R}^2$ ist die Jacobi-Matrix nur ein Zeilenvektor mit zwei Elementen, nämlich

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{pmatrix}.$$

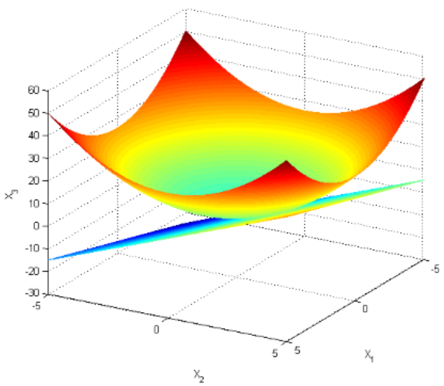
Dann liefert die Linearisierung

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ x_2 - x_2^{(0)} \end{pmatrix} \\ &= f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \end{pmatrix} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_2^{(0)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Gleichung der **Tangentialebene**.

- Sie enthält sämtliche im Flächenpunkt $P = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}))$ an die Bildfläche von $y = f(x_1, x_2)$ angelegten Tangenten.

Graphische Darstellung der Fläche $x_3 = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ sowie Tangentialebene durch den Flächenpunkt $(x_1^{(0)} = 1, x_2^{(0)} = 2, f(x^{(0)}) = 5)$



Nullstellenbestimmung für nichtlineare Systeme

- Gegeben: $n \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- Gesucht: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \vec{f}(\vec{x}) = 0$

$$\vec{f}(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Newton-Verfahren für Systeme

Herleitung

Repetition 1-Dimensional: (nur für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

Aus der Linearisierung der Funktion f mittels der Tangente g an der Selle x_n

$$f(x) \approx g(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

folgte die Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Mit der Jacobi-Matrix $Df(x)$ kann das analog für Vektor-wertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ angewendet werden.

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - (Df(\vec{x}^{(n)}))^{-1} * \vec{f}(\vec{x}^{(n)})$$

Das Inverse der Jacobi-Matrix wird aber nie berechnet sondern die obige Gleichung via Substitution als lineares Gleichungsystem aufgefasst.

$$\delta^{(n)} := -\left(\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(n)})\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(n)})$$

als lineares Gleichungssystem auffasst gemäss

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(n)})\delta^{(n)} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(n)})$$

und so δ^n bestimmen und anschliessend

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} := \boldsymbol{x}^{(n)} + \delta^{(n)}$$

Quadratisch-konvergentes Newton-Verfahren

Gesucht: Nullstellen von $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Startvektor $\vec{x}^{(0)}$ Nahe der Nullstelle.

für $n = 0, 1, ...$:

1. Berechne $\delta^{(n)}$ als Lösung des linearen Gleichungsystems

$$D\vec{f}(\vec{x}^{(n)})\delta^{(n)} = -\vec{f}(\vec{x}^{(n)})$$

2. Setze

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} + \delta^{(n)}$$

mögliche Abbruchkriterien

- $n \geq n_{max}, \; n_{max} \in \mathbb{N}$
- $||x^{(n+1)} - x^{(n)}|| \leq \epsilon \quad \leftrightarrow \quad ||\delta^{(n)}|| \leq \epsilon$
- $||x^{(n+1)} - x^{(n)}|| \leq \epsilon * ||x^{(n+1)}||$
- $||\vec{f}(x^{(n+1)})|| \leq \epsilon$