Cours des Séries chronologiques

7. Modèles GARCH

SACI Oualid

Ecole supérieure en sciences et technologies de l'informatique et du numérique

PROBLEME

Traditionnellement, dans les modèles économétriques, on suppose souvent que la variance des résidus est constante dans le temps. Cependant, dans les données financières, il est fréquent d'observer des périodes de forte volatilité suivies de périodes de faible volatilité.

Les modèles linéaires classiques, fondés sur l'hypothèse que la variance des erreurs est constante, ne peuvent pas gérer cette volatilité instantanée qui caractérise, en particulier, les séries financières (taux de change, taux d'infiation, indices boursiers,...).

ALTERNATIVE

La classe des modèles ARCH (Engle, 1982) s'est alors imposée comme alternative attrayante et fructueuse. Ces modèles supposent que la variance conditionnelle d'une série temporelle dépend des valeurs passées des erreurs, où la dépendance est modélisée par une relation autoregressive. Cela signifie que la volatilité à un moment donné est une fonction linéaire des erreurs passées.L'idée de base, ici, est que les moments (espérence et la variance) à la période t dépend des valeurs réalisées dans les périodes précédentes.

Ainsi, l'amélioration des prévisions issues des modèles *ARCH* provient clairement de l'exploitation de l'information contenue dans l'espérance conditionnelle du processus.

Exemple :
Considérons un modèle $AR(1)$ stationnaire $X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t$, avec $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

- $E(X_t) = 0$ et $E(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \phi X_{t-1}$
- $E(X_t^2) = \frac{\sigma^2}{1-\phi}$ et $E(X_t^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma^2$

Elles sont constantes quelques soit la date de la prévision.

Avec de tels modèles ont est donc incapables de mesurer d'éventuels changements dans les variances des erreurs de prévision même si l'on souhaite que celles-ci soient affectées par l'évolution passée.

Introduction

Principe : Le principe général proposé par Engle (1982) consiste à supposer que la variance dépend de l'ensemble informationnel dont on dispose (évolue dans le temps), où le carré des perturbations suit un processus autorégressif d'ordre p.

Modèle $ARCH(1)$

Définition

On dit qu'une variable X_t suit un processus $ARCH(1)$ si :

$$X_t = \epsilon_t \sqrt{h_t} \tag{1}$$

avec

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 \tag{2}$$

ϵ_t un bruit blanc gaussien centré et réduit. $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$.

h_t désigne une variable déterministe et positive qui est conditionnelle à l'information de la valeur passée de X_t.

Modèle $ARCH(1)$

Propriété 1 :

Soit X_t un modèle $ARCH(1)$, alors

- $E(X_t \mid X_{t-1}) = 0$
- $E(X_t) = 0$
- $Var(X_t \mid F_{t-1}) = h_t \ \forall t$
- $Var(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \ \forall t$

avec $F_{t-1} = X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots$

Modèle $ARCH(1)$

Preuve

- $$\begin{aligned} E(X_t \mid F_{t-1}) &= E(\epsilon_t \sqrt{h_t} \mid F_{t-1}) \\ &= \sqrt{h_t} E(\epsilon_t \mid F_{t-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} E(X_t) &= E(E(X_t \mid F_{t-1})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Modèle $ARCH(1)$

Preuve

- $$\begin{aligned} Var(X_t \mid F_{t-1}) &= Var(\epsilon_t \sqrt{h_t} \mid F_{t-1}) \\ &= h_t Var(\epsilon_t \mid F_{t-1}) \\ &= h_t Var(\epsilon_t) \\ &= h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} Var(X_t) &= E((X_t - E(X_t))^2) \\ &= E(X_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(X_t^2) \end{aligned}$$

avec $E(X_t^2) = Var(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ sous l'hypothèse de stationnarité.

Modèle $ARCH(1)$

Propriété 2 :

Soit X_t un modèle $ARCH(1)$, alors les auto-covariances conditionnelles du processus X_t sont nulles. c'est à dire :

$$Cov(X_t, X_{t+k} \mid F_{t-h}) = 0, \; \forall k > 0, \forall h > 0.$$

avec $F_{t-h} = X_{t-h}, X_{t-h-1}, X_{t-h-2}, \ldots$

Preuve:

Cette propriété s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_{t+k} \mid F_{t-1}) &= E(X_t X_{t+k} \mid F_{t-1}) - E(X_t \mid F_{t-1}) E(X_{t+k} \mid F_{t-1}) \\
&= E(X_t X_{t+k} \mid F_{t-1}) \\
&= E[E(X_t X_{t+k} \mid F_{t+k-1}) \mid F_{t-h}] \\
&= E[X_t E(X_{t+k} \mid F_{t+k-1}) \mid X_{t-h}] \\
&= E(X_t \times 0 \mid F_{t-h}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Modèle $ARCH(1)$

Remarque

L'absence de corrélations entre les valeurs d'un processus *ARCH* est une caractéristique très importante de cette famille de modèle, qui les rend utiles pour modéliser certaines séries financières.

Modèle $ARCH(1)$

Théorème

Si un processus X_t satisfait une représentation $ARCH(1)$, alors X_t^2 satisfait une représentation $AR(1)$ telle que :

$$X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2 + v_t$$

où $v_t = X_t^2 - h_t$ vérifiant $E[v_t/F_{t-1}] = 0$.

Modèle $ARCH(p)$

Définition

On dit qu'une variable X_t suit un processus $ARCH(p)$ si :

$$X_t = \epsilon_t \sqrt{h_t} \tag{3}$$

avec

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 \tag{4}$$

ϵ_t désigne un bruit blanc gaussien centré et réduit. $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$

h_t désigne une variable déterministe et positive qui est conditionnelle à l'information des valeurs passées de X_t.

Modèle $ARCH(p)$

L'équation (3) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$X_t^2 = \epsilon_t^2 \left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 \right]. \tag{5}$$

Modèle $ARCH(p)$

Propriété 3 :

Soit X_t un modèle $ARCH(p)$, alors

- $E(X_t \mid F_{t-1}) = 0$
- $E(X_t) = 0$
- $Var(X_t \mid F_{t-1}) = h_t \ \forall t$
- $Var(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^{p} \alpha_i} \ \forall t$

Comme nous l'avons déjà souligné, l'idée de base du processus $ARCH$ est que la variance conditionnelle varie dans le temps.

Modèle $ARCH(p)$

Remarque

Il conviendrait d'imposer certaines restrictions sur les coefficients α_0 et $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots$ pour que les variances soient définies positives. Cela nécessite que $\alpha_0 > 0$ et $0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p < 1$.

Comme nous l'avons déjà souligné, l'idée de base du processus *ARCH* est que la variance conditionnelle varie dans le temps.

Modèle $ARCH(p)$

Propriété 4 :

Soit X_t un modèle $ARCH(p)$, alors les auto-covariances conditionnelles du processus X_t sont nulles. c'est à dire :

$$Cov(X_t, X_{t+k} \mid F_{t-h}) = 0, \, \forall k > 0, \forall h > 0.$$

avec $F_{t-h} = X_{t-h}, X_{t-h-1}, X_{t-h-2}, \dots$

Cela signifie que conditionnellement à F_{t-h}, le processus X_t est sans mémoire.

Modèle avec erreur *ARCH*

Exemple d'un modèle linéaire auto-régressif $AR(1) - ARCH(1)$
On pose

$$X_t = \phi X_{t-1} + c + e_t, \epsilon_t = \epsilon_t \sqrt{h_t}$$

avec $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$ et $-1 < \phi < 1$.

Les résidus e_t satisfont les propriétés des processus *ARCH* ; variance conditionnelle dépendante du temps, auto-covariance conditionnelles nulles,...

Modèle avec erreur *ARCH*

Propriété

La variance conditionnelle de X_t issu d'un processus $AR(1)$ avec erreur $ARCH(1)$ s'écrit

$$Var(X_t \mid F_{t-h}) = \frac{c}{1-\alpha_1}\left[\left(\frac{1-\phi^{2h}}{1-\phi^2}\right) - \alpha_1\left(\frac{\alpha_1^h - \phi^{2h}}{\alpha_1 - \phi^2}\right)\right]$$
$$+ \alpha_1\left(\frac{\alpha_1^h - \phi^{2h}}{\alpha_1 - \phi^2}\right)\epsilon_{t-h}^2$$

Modèle avec erreur *ARCH*

En conclusion, si l'on désire prévoir le processus X_t dans le cas d'erreur $ARCH(1)$, l'erreur de prévision a un horizon d'une période admet une variance $Var(X_t \mid F_{t-h})$ qui varie dans le temps en fonction de la valeur de ϵ_{t-h}^2.

Modèle *GARCH*

Le processus *GARCH* (Generalised Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity) a été introduit en 1986 par Bollerslev.

Le processus *GARCH* est une extension du processus *ARCH*, il présente les mêmes propriétés et les mêmes fondements que le processus *ARCH*.

Disons que la seule différence se situe au niveau de la définition. Le modèle *GARCH* a deux dimensions (p, q) alors que le modèle *ARCH* en a une p

Modèle $GARCH(p, q)$

Définition

On dit qu'une variable X_t suit un processus $GARCH(p, q)$ si :

$$X_t = \epsilon_t \sqrt{h_t} \tag{6}$$

avec

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j} \tag{7}$$

ϵ_t désigne un bruit blanc gaussien centré et réduit.
$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$

h_t désigne une variable déterministe et positive qui est conditionnelle à l'information des valeurs passées de X_t.

Modèle $GARCH(p, q)$

Propriété 5 :

La modèle $GARCH(p, q)$ est stationnaire si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$$

Modèle $GARCH(p, q)$

Propriété 6 :

Soit X_t un modèle $GARCH(p, q)$, alors

- $E(X_t \mid X_{t-1}) = 0$
- $E(X_t) = 0$
- $Var(X_t \mid X_{t-1}) = h_t \ \forall t$
- $Var(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{max(p,q)} \alpha_i + \beta_i} \ \forall t$

Estimation par MLE

i) On suppose l'existance d'une distribution conditionnelle de X_t.

ii) On déduit la log-vraisemblance associée à l'échantillon $L(X_t, \theta)$, avec θ le vecteur des paramètres.

iii) On cherche les estimateurs du MV, $\hat{\theta}_{MV}$ qui maximisent la fonction de vraisemblance L.