Cours des Séries chronologiques

Modèles ARMA

SACI Oualid

Ecole supérieure en sciences et technologies de l'informatique et du numérique

Opérateur de retard

Definition

L'opérateur de retard B est défini comme agissant sur la série en décalant le processus d'une unité de temps vers le passé, c'est à dire à l'instant t, on fait correspondre la valeur de la série à l'instant $t-1$, l'opérateur est défini comme suit :

$$B(X_t) = X_{t-1}$$

Opérateur de retard

Remarque

On peut appliquer plusieurs fois cet opérateur, on définit ainsi de nouvelles séries :

$$B^2X_t = B(BX_t) = BX_{t-1} = X_{t-2}$$

et

$$B^m X_t = X_{t-m}$$

et

Opérateur de retard

Définition

L'opérateur ∇ ('nabla') est définit par:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}.$$

Cet opérateur peut s'écrire comme suit :

$$\nabla X_t = (1 - B)X_t, \text{écriture formelle.}$$

En effet, $\nabla X_t = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$.
On peut écrire ∇ sous la forme $\nabla = 1 - B$.

Opérateur de déssaisonalité ∇_s

Définition

L'opérateur de déssaisonalité ∇_s est définit par :

$$\nabla_s X_t = X_t - X_{t-s}.$$

En d'autre terme

$$\nabla_s X_t = (1 - B^s),$$

avec s représente la période de saisonnière.

Les effets des oprérateurs

- L'opérateur ∇ permet d'éliminer la tendance de la série en calculant la différence entre les observations successives. Cette différence peut être calculée à différents ordres selon la complexité de la tendance présente dans la série temporelle. Si la tendance présente dans la série n'est pas entièrement éliminée par la première différence, des différences d'ordre supérieur peuvent être calculées.
- L'opérateur ∇_s permet d'éliminer la sésonalité.

Les processus aléatoires ARMA

Les économètres ont mis au point tout un ensemble de modèles théoriques de processus temporelle qui permettent de modéliser une gamme étendue de séries chronologiques. Les processus MA, AR ou ARMA.

Un modèle autorégressif AR est un modèle expliquant une variable par son passé.

Les processus aléatoires ARMA

Processus autorégressif AR(1)

Définition

On dit que la série $(X_t)_{t \in T}$ suit un processus autorégressif d'ordre 1, noté $AR(1)$, s'il peut s'écrire sous la forme .

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \epsilon_t$$

avec μ la moyenne du procéssus, ϕ un paramètre du modèle non nul et $(\epsilon_t)_{t \in T}$ est un terme d'erreur aléatoir (BB).

Remarque

Le processus peut s'écrire comme suit:

$$(1 - \phi B)X_t = \mu + \epsilon_t.$$

En effet

$$X_t - \phi X_{t-1} = \mu + \epsilon_t \Leftrightarrow X_t - \phi B X_t = \mu + \epsilon_t,$$

d'où le résultat.

Un modèle autorégressif d'ordre 1 est dit à mémoire courte, car il prend une seule valeur du passé.

Propriétés

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus stationnaire autorégressif d'ordre 1, alors :

- Espérance

$$E(X_t) = \frac{\mu}{1-\phi},$$

- Variance

$$Var(X_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}$$

- Autocovariance

$$\gamma_h = \frac{\phi^h \sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}$$

- Autocorrélation

$$\rho_h = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0, \\ \phi^h & \text{si } h > 0. \end{cases}$$

Stationnarité

Un processus $AR(1)$ est stationnaire si et seulement si $|\phi| < 1$

Définition

On appelle processus autorégressif d'ordre p, noté $AR(p)$, un processus $(X_t)_{t\in T}$ vérifiant la relation du type :

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \epsilon_t$$

Les processus aléatoires ARMA

Processus autorégressif AR(p)

Remarque

Le processus peut s'écrire comme suit :

$$\varphi(B)X_t = \mu + \epsilon_t$$

avec φ un polynôme de degré p à coefficients $(1, \phi_1, \phi_2, ..., \phi_p)$. En effet, on a

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - ... - \phi_p X_{t-p} = \mu + \epsilon_t \Leftrightarrow$$
$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p)X_t = \mu + \epsilon_t,$$

d'où le résultat.

Propriétés

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus stationnaire autorégressif d'ordre p, alors :

- Espérance

$$E(X_t) = \frac{\mu}{1-\phi_1-\ldots-\phi_p}$$

- Variance

$$Var(X_t) = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \ldots + \phi_p\gamma_p + \sigma_\epsilon^2$$

- Autocovariance

$$\gamma_h = \phi_1\gamma_{h-1} + \phi_2\gamma_{h-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{h-p} \text{ et } \gamma(0) = var(X_t) = \frac{\sigma^2}{p}$$

- Autocorrélation

$$\rho_h = \phi_1\rho_{h-1} + \ldots + \phi_p\rho_{h-p} \text{ et } \rho_h = \frac{\sigma_h}{\sigma_0}$$

Le processus Moyenne mobile (Moving Average) s'écrit comme combinaison linéaire des erreurs ϵ_t.

Définition

On dit que la série $(X_r)_{t \in T}$ suit un processus de moyenne mobile d'ordre 1, noté MA(1), si elle est générée par un bruit blanc ϵ_t sous la forme :

$$X_t = \mu + \theta\epsilon_{t-1} + \epsilon_t = (1 + \theta B)\epsilon_t,$$

avec θ un coefficient réel non nul et $|\theta| < 1$.

Propriétés

- Espérance

$$E(X_t) = \mu.$$

- Variance

$$Var(X_t) = (1+\theta^2)\sigma_\epsilon^2.$$

- Autocovariance On a

$$\gamma_0 = \sigma_\epsilon^2(1+\theta^2)$$

et

$$\gamma_h = \begin{cases} -\theta\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 1, \\ 0 & \text{si } h > 1. \end{cases}$$

Les processus aléatoires ARMA

Processus MA d'ordre 1

Propriétés (suite)

- Autocorrélation

$$
{}_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0, \\ \frac{-\theta}{1+\theta^2} & \text{si } h = 1, \\ 0 & \text{si } h > 1. \end{cases}
$$

Définition

On appelle processus moyenne mobile d'ordre q, noté $MA(q)$, un processus $(X_t)_{t\in T}$ vérifiant la relation du type :

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t$$

Propriétés

- Espérance

$$E(X_t) = \mu.$$

- Variance

$$Var(X_t) = (1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2)\sigma_\epsilon^2.$$

- Autocovariance On a

$$\gamma_h = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2)\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0, \\ (\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + ... + \theta_q\theta_{q-h})\sigma_\epsilon^2 & \text{si } 0 < h \leq q, \\ 0 & \text{si } h > q. \end{cases}$$

Propriétés (suite)

- Autocorrélation

$$\rho_h = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0, \\ \frac{(\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \ldots + \theta_q\theta_{q-h})\sigma_\epsilon^2}{(1+\theta_1^2+\ldots+\theta_q^2)} & \text{si } 0 < h \leq q, \\ 0 & \text{si } h > q. \end{cases}$$

Remarque

Les processus MA(q) sont stationnaires.

Les modèles ARMA consistent à avoir une partie AR et une partie MA. Ces modèles présentent l'avantage d'être plus souples d'utilisation et de fournir généralement de bonnes approximations des séries chronologiques.

Définition

On appelle processus autorégressif moyenne mobile d'ordre (p,q) tout processus $(X_t)_{t \in T}$ stationnaire tel que :

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t$$