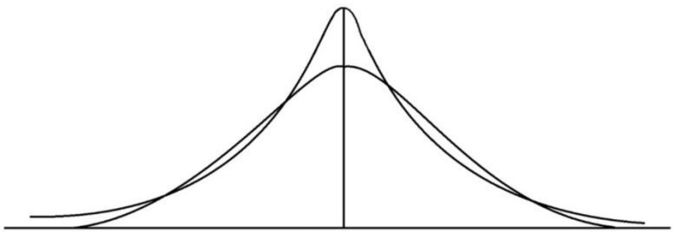
ÇARPIKLIK VE BASIKLIK

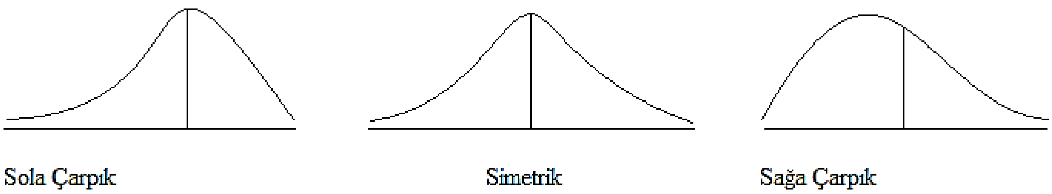
DAĞILIM BİÇİMLERİ

Serinin betimlenmesinde ortalama ve değişkenlik ölçüleri yeterli olmayabilir. Örneğin aşağıdaki şekilde verilen iki frekans dağılımı, aynı ortalama ve aynı standart sapma ölçülerine sahiptir. Ancak serilerden biri basık diğeri diktir. Bununla birlikte her iki seride simetrik olma özelliğine sahiptir.

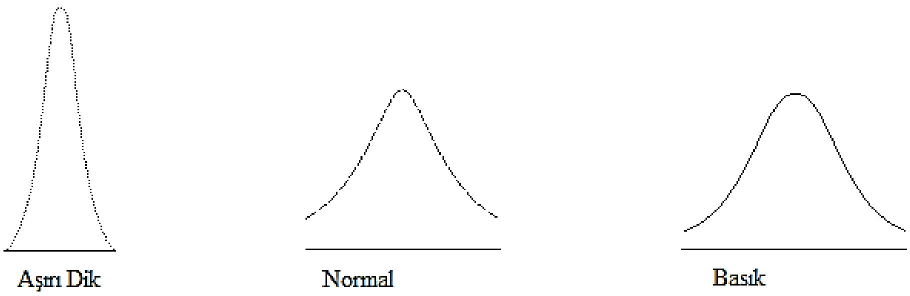


Şekil 5.1.
Basık ve Dik Seriler

Bir frekans serisinde frekansların dağılımlarının simetrik olup olmaması ve frekans dağılımının dik veya basık olması sırasıyla çarpıklık ve basıklık ölçüleriyle ölçülebilir. Çarpıklık açısından bir seri de şu üç durum ortaya çıkabilir. Sola çarpıklık (negatif asimetri), simetrik, sağa çarpık (pozitif asimetri). Aşağıdaki bu üç duruma ilişkin şekiller görülmektedir.



Şekil 5.2.
Çarpıklık Açısından Üç Ayrı Durum



Şekil 5.3.
Basıklık Açısından Üç Ayrı Durum

Basıklık açısından ise yine üç durumdan söz edilebilir. Dik durum, Normal durum, Basık durum. Yukarıda bu üç duruma ilişkin şekiller görülmektedir.

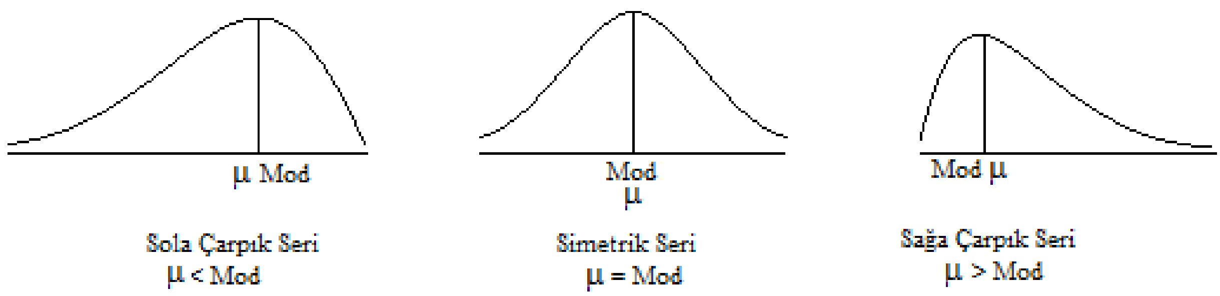
Frekans genişliğinin varyans ile doğru orantılı olduğu sezilebilir. Frekans eğrisi genişledikçe varyans artar. Frekans eğrisi daraldığı ölçüde varyans küçülür. Çarpıklık ve basıklık için yukarıda sayılan üç durum uç(aşırı) halleri belirtilmek içindir. Elbette bu uç hallerin arasında sayısız ara haller mevcuttur. Bu sayısız hallerin biriyle mukayese edilebilmesi için çarpıklık ve baskınlığın sayısal ölçülerini bulmak gerekir.

ÇARPIKLIK ÖLÇÜLERİ

Çarpıklığın sayısal olarak ölçülmesini sağlayan, biri Pearson tarafından geliştirilmiş ortalamalara dayanan ve diğerleri Bowley tarafından geliştirilmiş kartillere dayanan ölçü olmak üzere, iki ölçüye yer verilmiştir.

PEARSON ÇARPIKLIK ÖLÇÜSÜ

Simetrik bir frekans dağılımında aritmetik ortalama ile mod çakışır. Sola çarpık bir seride frekansların çoğunluğu modun solunda yer aldığından serideki değerlerin çoğu moddan küçük demektir ve aritmetik ortalama moddan daha küçük olur. Bunun tersine olarak, sağa çarpık bir seride ise aritmetik ortalama moddan büyük çıkar.



Şekil 5.4.
Çarpıklığın Ortalamalarla Yorumu

Şu halde (*µ-Mod*) farkı çarpıklık için bir ölçüdür. Fakat bunun standart sapma ile ölçeklendirilmesi gerekir. Böylece Pearson asimetri ölçüsü,

$$As = \frac{\mu - Mod}{\sigma}$$

biçiminde elde edilir. Bu ölçünün, simetrik serilerde sıfır, sola çarpık serilerde negatif, sağa çarpık serilerde ise pozitif çıkacağı tabiidir. Bir frekans serisinde medyan daima mod ile aritmetik ortalama arasında, fakat aritmetik ortalamaya daha yakın, yer alır. Aşırı asimetrik olmayan serilerde ($\bar{X}$ - Mod) farkı ($\bar{X}$ - Me) farkının yaklaşık üç katıdır. Bu bilgiden hareketle, bir seride mod hesabının zor olduğu durumlarda Pearson asimetri ölçüsü medyan yardımıyla,

$$\text{As} = \frac{3(\mu - Me)}{\sigma}$$

Formül ile yaklaşık olarak hesaplanabilir. Pearson asimetri ölçüsünün değişim aralığı teorik olarak artı-eksi 3 ise de uygulamalarda çoğu kez artı-eksi 1 aralığında değişmektedir.1'e yakın değerler serinin daha fazla asimetrik olduğunu gösterir.

ÖRNEK 1:

Bir önceki bölümde verilen X, Y ve Z frekans serilerinin bu kez çarpıklığını inceleyelim.

X	f_1
50-60	5
60-70	8
70-80	12
80-90	20
90-100	5

Y	f_2
50-60	5
60-70	10
70-80	20
80-90	10
90-100	5

Z	f_3
50-60	5
60-70	20
70-80	12
80-90	8
90-100	5

X serisi: frekansların çoğu mod grubundan önce yani mod grubunun solunda yer aldığından, sola çarpık, negatif asimetrik bir seridir.

Y serisi : frekanslar mod grubuna göre simetrik olduğundan çarpık olmayan, yani simetrik bir seridir.

Z serisi: frekansların çoğu mod grubundan sonra yani mod grubunun sağında yer aldığından sağa çarpık, pozitif asimetrik bir seridir.

Bu üç seri için ara sonuçlar ve asimetri ölçüleri şöyledir.

Ölçüler	X serisi	Yserisi	Z serisi
μ	77.4	75.0	72.6
Mod	82.9	75.0	67.1
Me	80.0	75.0	70.0
σ	11.4	10.9	11.4
As = $\frac{\mu - Mod}{\sigma}$	-0.48	0.0	0.48
As= $\frac{3(\mu - Me)}{\sigma}$	-0.68	0.0	0.68

Bu verilere göre X serisi 0.48 şiddetinde negatif asimetrik, Yserisi simetrik, Z serisinin de 0.48 şiddetinde pozitif asimetriktir. Ters yönde olmakla birlikte X ve Y serilerinin aynı oranda çarpıktırlar.

5.3. MOMENTLER

Momentler bazen tek başına istatistiksel bir anlamı olan, bazen de başka istatistiksel ölçüler içerisinde ara değer olarak kullanılan, bir seriye ilişkin analitik formüllerdir. Basit, sınıflandırılmış ve gruplandırılmış bir seri için genel moment formüllü sırasıyla,

$$\mu_r = \frac{\Sigma(X-\theta)^r}{N} \qquad \mu_r = \frac{\Sigma f_j (X_j-\theta)^r}{\Sigma f_j} \qquad \mu_r = \frac{\Sigma f_j (\bar{X}_j-\theta)^r}{\Sigma f_j}$$

şeklinde yazılır ve X serisinin θ ya göre r inci mertebeden momenti adı verilir. Teorik olarak θ yerine herhangi bir rakam yazılabilirse de uygulamada $\theta = 0$ veya $\theta = \mu$ olarak alınır ki,

sıfır alındığında sıfıra göre moment, μ alındığında ortalamaya göre moment adı verilir. Sıfıra göre momentler M_r ortalamaya göre momentler ise μ_r ile gösterilir.

SIFIRA GÖRE MOMENTLER

Sıfıra göre moment alınırken tabiatiyle parantez içerisinde sıfırı göstermeye gerek kalmaz. Böylece m_r ile gösterilen r inci mertebeden sıfıra göre moment formülü basit, sınıflanmış ve gruplanmış seriler için sırasıyla

$$M_r = \frac{\Sigma X^r}{N} \qquad M_r = \frac{\Sigma f_j X_j^r}{\Sigma f_j} \qquad M_r = \frac{\Sigma f_j m_j^r}{\Sigma f_j}$$

Sıfıra göre momentler r=1,2,3,4 mertebeleri için aşağıda gösterilmiştir.

Tablo incelendiğinde görülür ki, birinci mertebeden moment, aritmetik ortalamaya, ikinci mertebeden moment, karesel ortalamanın karesine eşittir.

Mertebe	Basit seri	Sıfırlanmış Seri	Gruplanmış Seri
r = 1	$M_1 = \frac{\Sigma X}{N}$	$M_r = \frac{\Sigma f_j X_j}{\Sigma f_j}$	$M_1 = \frac{\Sigma f_j m_j}{\Sigma f_j}$
r = 2	$M_2 = \frac{\Sigma X^2}{N}$	$M_2 = \frac{\Sigma f_j X_j^2}{\Sigma f_j}$	$M_2 = \frac{\Sigma f_j m_j^2}{\Sigma f_j}$
r = 3	$M_3 = \frac{\Sigma X^3}{N}$	$M_3 = \frac{\Sigma f_j X_j^3}{\Sigma f_j}$	$M_3 = \frac{\Sigma f_j m_j^3}{\Sigma f_j}$
r = 4	$M_4 = \frac{\Sigma X^4}{N}$	$M_4 = \frac{\Sigma f_j X_j^4}{\Sigma f_j}$	$M_4 = \frac{\Sigma f_j m_j^4}{\Sigma f_j}$

ORTALAMAYA GÖRE MOMENTLER

Aritmetik ortalamayı μ ile simgelersek aritmetik ortalamaya göre momentlerin genel formülü basit, sınıflandırılmış ve gruplandırılmış seriler için sırasıyla şöyledir.

$$\mu_r = \frac{\Sigma(X-\mu)^r}{N} \qquad \mu_r = \frac{\Sigma f_j (X_j-\mu)^r}{\Sigma f_j} \qquad \mu_r = \frac{\Sigma f_j (m_j-\mu)^r}{\Sigma f_j}$$

r=1, 2, 3, 4 mertebeleri için ortalamaya göre momentler şöyledir:

Basit Seri	Sınıflanmış Seri	Gruplanmış Seri
$\mu_1 = \frac{\Sigma(X-\mu)}{N}$	$\mu_1 = \frac{\Sigma f_j(X_j-\mu)}{\Sigma f_j}$	$\mu_1 = \frac{\Sigma f_j(m_j-\mu)}{\Sigma f_j}$
$\mu_2 = \frac{\Sigma(X-\mu)^2}{N}$	$\mu_2 = \frac{\Sigma f_j(X_j-\mu)^2}{\Sigma f_j}$	$\mu_2 = \frac{\Sigma f_j(m_j-\mu)^2}{\Sigma f_j}$
$\mu_3 = \frac{\Sigma(X-\mu)^3}{N}$	$\mu_3 = \frac{\Sigma f_j(X_j-\mu)^3}{\Sigma f_j}$	$\mu_3 = \frac{\Sigma f_j(m_j-\mu)^3}{\Sigma f_j}$
$\mu_4 = \frac{\Sigma(X-\mu)^4}{N}$	$\mu_4 = \frac{\Sigma f_j(X_j-\mu)^4}{\Sigma f_j}$	$\mu_4 = \frac{\Sigma f_j(m_j-\mu)^4}{\Sigma f_j}$

Aritmetik ortalamadan sapmaların sıfır olmasından dolayı birinci mertebeden momentlerin sıfır olduğu, ayrıca ortalamaya göre ikinci mertebeden momentlerin varyansa eşit olduğu açıktır.

STANDART MOMENT

Ortalamaya göre ikinci mertebeden momentin Varyans ($\mu_2 = \sigma^2$) pozitif karekökünün Standart Sapma (σ) olduğunu Bölüm 4 den hatırlayınız. Yukarıda görülen momentlerden, sıfıra göre momentler genellikle birer ortalamaya göre momentler de genellikle birer değişkenlik ölçüsü niteliğindedir. Her iki tür ölçü de kullanılan ölçme birimlerinden etkilenirler. Bu yetersizliği gidermek üzere, ortalamaya göre momentler elde edilir. Standart momentler $\propto$ ile gösterilir. σ standart sapma, σ^r de standart sapmanın r inci kuvveti olmak üzere bir r inci mertebeden standart momentin genel formülü,

$$\propto_r = \frac{\mu_r}{\sigma^r}$$

ile verilir. r = 1,2,3,4 mertebeleri için standart momentler sırasıyla:

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{\sigma} \qquad \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} \qquad \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

1.mertebenden standart moment, payının sıfır oluşundan dolayı daima sıfır çıkar. 2. Mertebeden moment ise paya ve paydada aynı terimler yer aldığından daima 1 çıkar.

ÖRNEK 3:

Aşağıdaki ara değerleri işe birlikte verilen frekans seri için sıfıra göre, ortalamaya göre ve standart momentleri hesaplayalım. Sıfıra göre moment için ara değerler tablosu

X	**f**	**f X**	**X^2**	**f X^2**	**X^3**	**f X^3**	**X^4**	**f X^4**
10	2	20	100	200	1000	2000	10000	20000
20	5	100	400	2000	8000	40000	160000	800000
30	2	60	900	1800	27000	54000	810000	1620000
40	1	40	1600	1600	64000	64000	2560000	2560000
--	10	220	--	5600	--	160000	--	5000000

Ortalamaya göre momentler için ara değerler tablosu

X	**f**	**(X- μ)**	**f(X- μ)**	**$(X-\mu)^2$**	**$f(X-\mu)^2$**	**$(X-\mu)^3$**	**$f(X-\mu)^3$**	**$(X\ \mu)^4$**	**$f\ (X-\mu)^4$**
10	2	-12	-24	144	288	-1728	-3456	20736	41472
20	5	-2	-10	4	20	-8	-40	16	80
30	2	8	16	64	128	512	1024	4096	8192
40	1	18	18	324	324	5832	5832	104976	104976
--	10	--	0	--	760	--	3360	--	154720

Sıfıra göre momentler

$$M_1 = \frac{\Sigma f_j X_j}{\Sigma f_j} = \frac{220}{10} = 2$$

$$M_2 = \frac{\Sigma f_j X_j}{\Sigma f_j} = \frac{5600}{10} = 560$$

$$M_3 = \frac{\Sigma f_j X_j}{\Sigma f_j} = \frac{160000}{10} = 16000$$

$$M_4 = \frac{\Sigma f_j X_j}{\Sigma f_j} = \frac{5000000}{10} = 500000$$

Ortalamaya göre momentler

$$\mu_1 = \frac{\Sigma f_j (X_j - \mu)}{\Sigma f_j} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma f_j (X_j - \mu)^2}{\Sigma f_j} = \frac{760}{10} = 76$$

$$\mu_3 = \frac{\Sigma f_j (X_j - \mu)^3}{\Sigma f_j} = \frac{3360}{10} = 336$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma f_j (X_j - \mu)^4}{\Sigma f_j} = \frac{154720}{10} = 15472$$

Standart sapmanın ilk dört kuvveti:

σ = 8.7 σ^2 = 76 σ^3 = 662.6 σ^4 = 5776

Buna göre standart momentler:

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{\sigma} = \frac{0}{8.7} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} = \frac{76}{76} = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{336}{662.6} = 0.51$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{15472}{5776} = 2.8$$

Sonuçları tablo ile gösterelim:

Sıfıra Göre Momentler	**Ortalamaya Göre Momentler**	**Standart Momentler**
M_1 = 22	μ_1= 0	α_1 = 0
M_2 = 560	μ_2 = 76	α_2 = 1
M_3 = 16000	μ_3 = 336	α_3 = 0.51
M_4 = 500000	μ_4 = 15472	α_4 = 2.8

Tablodan görüleceği gibi, mertebe arttıkça momentlerin sayısal değeri büyümektedir. Bu büyüme sıfıra göre momentlerde çok hızlıdır. Diğer momentlerin büyüme hızı azalmaktadır.

5.4. MOMENTLER ARASI BAĞINTILAR

Ortalamaya göre moment formüllerinin sağ tarafı açılarak gerekli sadeleştirmeler yapıldığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$\mu_2 = M_2 - M_1^2$

$\mu_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3$

$\mu_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4$

Bu bağıntılar yardımıyla, bir serinin sıfıra göre momentleri bilindiğinde ortalamaya göre momentleri de hesaplanabilir.

ÖRNEK 4:

Yukarıda 3. örnekte son tablo ile verilen moment değerlerini kullanarak momentler arası bağıntıları gerçekleştirelim.

$\mu_2 = M_2 - M_1^2$ = 560 - $(22)^2$

$\mu_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3$= 16000 – 3.22.560 + $2(22)^3$ = 336

$\mu_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4$

= 50000 – 4.22.16000 + 6.$(22)^2$.560 - $3(22)^4$ = 15472

Görüldüğü gibi her üç değer de daha önce bulduğumuz değerlerle uyuşuyor.

5.5. ÇARPIKLIĞIN MOMENTLERLE ÖLÇÜMÜ

Standart momentler çarpıklığın ölçüsü olarak kullanılabilirler. Alfa-3 adı verilen üçüncü mertebeden standart moment serinin simetriğine göre,

Sola çarpık serilerde $\alpha_3 < 0$

Simetrik serilerde $\alpha_3 = 0$

Sağa çarpık serilerde $\alpha_3 > 0$

değerini almaktadır. FORMÜL >0.5 ise, asimetrinin kuvvetli olduğu söylenebilir.

ÖRNEK5:

Yukarıda örnek 3'deki verilerle söz konusu frekans serisi için Alfa-3 standart momenti α_3 = 0.51 > 0 olduğundan sağa doğru (pozitif) çarpıklık olduğu sonucuna varıyoruz

5.5. BASIKLIĞIN MOMENTLERLE ÖLÇÜMÜ

Standart momentler basıklığım ölçüsü olarak da kullanılmaktadır. Alfa-4 adı verilen dördüncü mertebeden standart moment, serinin basıklığına göre,

Basık serilerde $\alpha_4 < 3$

Normal serilerde $\alpha_4 = 3$

Dik serilerde $\alpha_4 > 3$

değerini almaktadır. Örneğin, 3 nolu örnekte yer alan frekans serisi için basıklık ölçüsü olarak Alfa-4, $\alpha_4 = 2.8 < 3$ olarak bulunmuştu. Bu da söz konusu serinin hafif basık olduğunu göstermektedir.

Herhangi bir seride özel olarak, çarpıklık ölçüsü $\alpha_3 = 0$ ve basıklık ölçüsü $\alpha_4 = 3$ çıkarsa böyle serilere *Normal dağılımlı seri* adı verilir. Buna göre, çarpıklık ve basıklık ölçülerinin yukarıda verilen değerlere uyup uymadığına göre bir serinin normal dağılım sahip olup olmadığında kara verilebilir ki, bu işleme *Normallik Testi* adı verilir.