BOOLE CEBRİ VE LOJİK KAPILAR

Boole cebri, sonuç çıkarma prensibine dayalı diğer matematiksel sistemler gibi bir eleman kümesi, bir işlem kümesi ve belirli sayıda kanıtlanmamış aksiyomdan (postulat) oluşur. Bir S kümesinin elemanları S={a,b,c,d} olsun. $a \in S$, $b \in S$ iken * şeklinde tanımlı bir ikili işlem a*b=e olsun. $e \notin S$ olduğu için bu * işlemi bir ikili işlem değildir.

Matematiksel bir sisteme ait en genel cebirsel postulatlar şunlar.

1. Kapalılık Özelliği: İkili bir işlem, S'deki her eleman çiftine yine S'de bir elemana düşecek şekilde tanımlı ise S kümesi bu işleme göre kapalıdır denir. Örneğin N={1,2,3,…}doğal sayı kümesi (+) işlemine göre kapalıdır. 2+5=7 yine N kümesinin bir elemanıdır. Ancak, (-) işlemine göre kapalı değildir. ($2–3=-1 \notin N$)
2. Birleşme Özelliği: x, y, $z \in S$ için ,
   (x*y)*z=x*(y*z) yazılabiliyorsa bu ikili işlemin birleşme özelliği vardır denir.
3. Değişme Özelliği: x, $y \in S$ için,
   x*y=y*x yazılabiliyorsa bu ikili işlemin değişme özelliği vardır denir.
4. Birim Eleman: $x \in S$ için,
   x*e=e*x=x $e \in S$ olan ve * ikili işlemine göre birim eleman e'dir denir.
5. Ters (Inverse): * işlemine göre birim elemanı e olan bir S kümesinin $\forall\ x \in S$ için x*y=e olmasını sağlayan $y \in S$ elemanı mevcut ise x'in tersi vardır denir.
6. Dağılma Özelliği: * ve . S kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun.
   x*(y.z)=(x*y).(x*z) özelliğine * ikili işleminin, . ikili işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır denir.

Yukarıdaki maddeler özetlenecek olursa;

+ işlemi toplamayı tanımlar.
Toplamanın birim elemanı 0'dır.
Toplamanın tersi çıkarmadır.
. ikili işlemi çarpmayı temsil eder.
Çarpmanın birim elemanı 1'dir.
a'nın çarpmaya göre tersi bölmeyi tanımlar. (a).(1/a)=1
Sadece çarpmanın toplama üzerinde dağılma özelliği vardır.
a.(b+c)=(a.b)+(a.c)

Boole Cebrinin Özellikleri(Huntington Postulatları)

1.a. + işlemine göre kapalılık

b. . işlemine göre kapalılık

2.a. + işlemine göre 0 birim elemandır. x+0=0+x=x

b. . işlemine göre 1 birim elemandır. x.1=1.x=x

3.a. + işlemine göre değişme özelliği vardır. x+y=y+x

b. . işlemine göre değişme özelliği vardır. x.y=y.x

4.a. . işleminin + işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır. x.(y+z)=(x.y)+(x.z)

b. + işleminin **.** işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır. x+(y.z)=(x+y).(x+z)

5. $\forall$ x$\in$B için bir x'$\in$B elemanı (x'in tümleyeni) vardır.

a. x+x'=1

b. x.x'=0

6. x$\neq$y olacak şekilde en az iki tane x,y$\in$B vardır.

Boole Cebri ile Sıradan Cebir Arasındaki Farklar

1. + işleminin . işlemi üzerindeki dağılma kuralı yani x+(y.z)=(x+y).(x+z) sıradan cebirde geçerli değildir.
2. Boole cebrinde toplama ve çarpmaya göre elemanın tersi olmadığından çıkarma ve bölme yoktur.
3. Postulat 4 sıradan cebirde olmayan bir işlemi tanımlar.
4. Sıradan cebir sonsuz elemanlı bir küme üzerinde çalışırken Boole cebri iki elemanlı B={0,1} kümesi üzerinde çalışır.

Boole cebri bazı işlemlerde sıradan cebire benzediği için + ve . işaretleri seçilmiştir. Burada incelenecek olan Boole cebrini kapı tipi devre uygulamasıdır.

İki Değerli Boole Cebri

İkili + ve . işlemlerine ait tablolar aşağıda gösterilmiştir. Görüldüğü üzere, bu tablolar daha önce anlatılan VE ve VEYA işlemleri ile aynıdır.

x	y	x.y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	x'
0	1
1	0

Bu durumda, Huntington postulatlarının B={0,1} kümesi ve daha önce anlatılan ikili işlem için geçerli olduğu gösterilmelidir.

1. Kapalılık: Tablodan da görüldüğü üzere her bir işlemin sonucu 0 veya 1 olup 0,1∈B'dir
2. **a.** 0+0=0 0+1=1+0=1

   b. 1.1=1 1.0=0.1=0

   Postulat 2'de tanımlandığı gibi 0 toplam, 1 de çarpım için birim elemandır.
3. Değişme Kuralı: Tablodaki simetriden de görülebileceği gibi her iki işlemin de değişme özelliği vardır.
4. **a.** x.(y+z)=(x.y)+(x.z) dağılma kuralı bir doğruluk tablosu ile kolaylıkla görülebilir.

x	y	z	y+z	x.(y+z)	x.y	x.z	(x.y)+(x.z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

b. x+(y.z)=(x+y).(x+z) dağılma kuralı bir doğruluk tablosu ile kolaylıkla görülebilir.

x	y	z	(y.z)	x+(y.z)	(x+y)	(x+z)	(x+y).(x+z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

5. Tümleyen tablosu kullanılarak

a. 0+0'=0+1=1 ve 1+1'=1+0=1 olduğundan x+x'=1 olduğu

b. 1.1'=1.0=0 ve 0.0'=0.1=0 olduğundan x.x'=0 olduğu gösterilebilir.

6. iki değerli Boole cebrinin 0 ve 1 gibi iki değeri olduğu ve 0≠1 olduğundan dolayı postulat 6 sağlanır.

Görüldüğü üzere iki değerli Boole cebri daha önce anlatılmış olan VE ve VEYA işlemlerine, tümleyen işleminin ise DEĞİL işlemine eşdeğer olduğu görülür.

BOOLE CEBRİNE İLİŞKİN TEMEL TEOREM VE ÖZELLİKLER

Dualite

Huntington postulatları (a) ve (b) şıkları halinde bir çift olarak verilmişti. İkili işlemler ve birim elemanları kendi aralarında değiştirilerek bir şıktan diğeri elde edilebilir. Buna Boole cebrinin dualite prensibi denir. Cebirsel bir ifadenin duali istendiğinde VEYA ve VE işlemleri değiştirilir, 1'ler yerine 0, 0'lar yerine 1 konur.

Temel Teoremler

Aşağıda Boole cebrine ilişkin tabloda, altı teorem ve dört postulat yer almaktadır. Bu teorem ve postulatlar Boole cebrinin öğrenilmesi gereken en temel bağıntılardır. Teoremlerde postulatlar gibi çiftler halinde verilmiştir. Sağdaki ifadeler soldaki ifadenin dualidir. Postulatlar, cebirsel yapıların temel aksiyomları olup kanıtlanmasına gerek yoktur. Teoremler, postulatlar kullanılarak ispatlanır.

Tablo. Boole Cebrine ilişkin postulatlar ve teoremler

Teorem 1	**(a)** x+x=x	**(b)** x.x=x
Teorem 2	**(a)** x+1=1	**(b)** x.0=0
Teorem 3, ters alma	$(x')' = x$	
Teorem 4, birleşme	**(a)** x+(y+z)=(x+y)+z	**(b)** x.(y.z)=(x.y).z
Teorem 5, DeMorgan	**(a)** (x+y)'=x'.y'	**(b)** (x.y)'=x'+y'
Teorem 6, yutma	**(a)** x+x.y=x	**(b)** x.(x+y)=x
Postulat 2	**(a)** x+0=x	**(b)** x.1=x
Postulat 3, değişme	**(a)** x+y=y+x	**(b)** x.y=y.x
Postulat 4, dağılma	**(a)** x.(y+z)=(x.y)+(x.z)	**(b)** x+(y.z)=(x+y).(x+z)
Postulat 5	**(a)** x+x'=1	**(b)** x.x'=0

Teorem 1.(a) x+x=x olduğunu ispat edelim.

x+x= (x+x).1	**Postulat 2.b**
= (x+x).(x+x')	**Postulat 5.a**
= x+(x.x')	**Postulat 4.b**
= x+0	**Postulat 5.b**
= x	**Postulat 2.a**

Teorem 1.(b) x.x=x olduğunu ispat edelim.

x.x= x.x+0	**Postulat 2.a**
= x.x+x.x'	**Postulat 5.b**
= x.(x+x')	**Postulat 4.a**
= x.1	**Postulat 5.a**
= x	**Postulat 2.b**

Teorem 2.(a) $x+1=1$ olduğunu ispat edelim.

$x+1=(x+1).1$ **Postulat 2.b**

$=(x+1).(x+x')$ **Postulat 5.a**

$=x+(x'.1)$ **Postulat 4.b**

$=x+x'$ **Postulat 2.b**

$=1$ **Postulat 5.a**

Teorem 2.(b) $x.0=0$ Dualiteden açıkça görülür. İspatlanacak olursa da;

$x.0=x.0+0$ **Postulat 2.a**

$=x.0+x.x'$ **Postulat 5.b**

$=x.(x'+0)$ **Postulat 4.a**

$=x.x'$ **Postulat 2.a**

$=0$ **Postulat 5.b**

Teorem 3 $(x')'=x$, x'in tek bir tümleyeni vardır. $x+x'=1$ ve $x.x'=0$ olup hem x'in hem de x' 'nün tümleyenini göstermektedir. Dolayısıyla x' 'nün tümleyeni hem x hem de $(x')'$ olarak gösterilebilir.

Teorem 6.a $x+xy=x$ olduğunu ispat edelim.

$x+xy=x.1+xy$ **Postulat 2.b**

$=x(y+1)$ **Postulat 4.a**

$=x.1$ **Teorem 2.a**

$=x$ **Postulat 2.b**

Teorem 6.b $x(x+y)=x$ olduğunu dualite kullanmadan gösteriniz.

$x(x+y)=(x+0)(x+y)$ **Postulat 2.a**

$=x+(y.0)$ **Postulat 4.b**

$=x+0$ **Teorem 2.b**

$=x$ **Postulat 2.a**

Boole cebrine ait teoremler doğruluk tabloları yardımı ile de doğrulanabilir. Doğruluk tablolarında değişkenlerin olası kombinasyonları aranarak aralarındaki ilişkilere bakılır. Yukarıda verilmiş olan Teorem 6.a'nın doğruluk tabloları kullanılarak ispatı aşağıda verilmiştir.

x	y	xy	x+xy
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Birleşme kuralı ve DeMorgan teoreminin ispatı oldukça uzun olup burada sadece doğruluk tabloları ile gösterilecektir.

(x+y)'=x'y' 1. DeMorgan teoremine ilişkin doğruluk tablosu

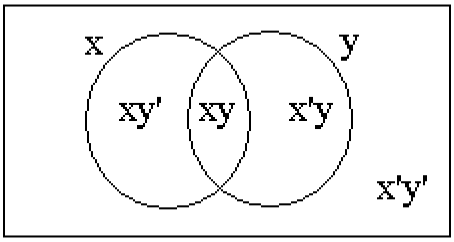
x	y	x+y	(x+y)'	x'	y'	x'.y'
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

İşlem Önceliği

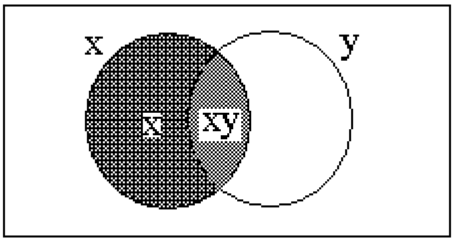
Boole cebrinde işlem önceliği sırası, Parantez (1), DEĞİL (2), VE (3), VEYA (4) şeklindedir. Bir Boolen işlemi sadeleştirileceği ya da sonucu hesaplanacağı zaman önce parantez içindeki ifadeler hesaplanmalı sonra diğer Boole işlemleri yapılmalıdır.

Venn Diaygramları

Boole aritmetiğindeki değişkenler arasındaki ilişkilerin daha kolay kavranması için kullanılan yöntemlerden bir tanesi de Venn diyagramlarıdır. Aşağıdaki şekilde x kümesine dâhil olan bölgeler x=1, dışındaki bölgelerde ise x=0 olarak kabul edilir. x'e ait olup y'ye ait olmayan bölgeler xy', y'ye ait olup x'e ait olmayan bölgeler x'y, hem x hem de y'ye ait olmayan bölgeler x'y', hem x hem de y'ye ait olan bölge ise xy ile gösterilir.



Örneğin, F=x+yx=x ifadesini göz önüne alalım. Postulatlar kullanılarak bu ifade x olarak sadeleştirilebiliyordu. Bunu, Venn diyagramları kullanarak göstermeye çalışalım.



xy bölgesi hem x hem de y'ye ait olan kesişim bölgesidir. x ile bu bölgenin toplamı (birleşimi) yine x'i vereceği diyagramdan kolaylıkla görülmektedir.

Aşağıdaki tabloda Boole cebrinin diğer gösterime türlerindeki karşılıkları görülmektedir.

Boole Cebri Gösterimi	**Venn Diyagramı Gösterimi**	**Önerme Lojiği Gösterimi**	**Anahtarlama Devresi Karşılığı**
x+y	$x \cup y$	VEYA (OR)	Paralel Devre
xy	$x \cap y$	VE (AND)	Seri Devre
x'	x' ya da x^0	DEĞİL (NOT)	Ters
0	$\varnothing$	Yanlış (FALSE)	Açık
1	$\cup$	Doğru (TRUE)	Kapalı
=	=	Lojik eşit(Logical equal)	Eşdeğer Devre

Boole Fonksiyonları

Aşağıdaki üç değişkenli Boole fonksiyonları göz önüne alalım.

F_1=xyz'

F_2=x+y'z

F_3=x'y'z+x'yz+xy'

F_4=xy'+x'z

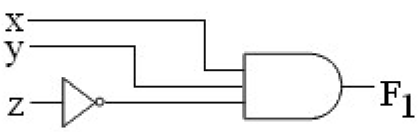
Bu verilen fonksiyonların giriş ve çıkışları arasındaki ilişkiler doğruluk tabloları yardımı ile yazılabilir.

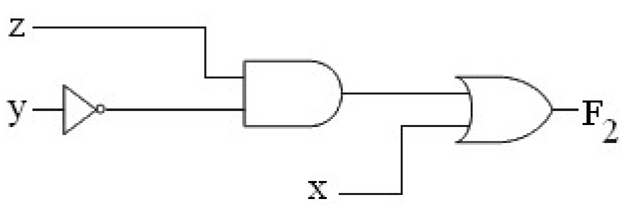
x	y	y	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

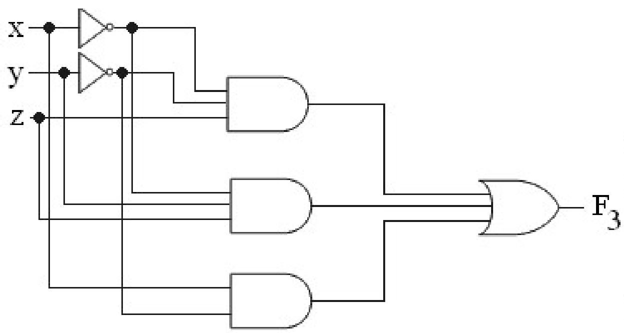
Boole cebri işlemleri verilen bir Boole fonksiyonunu sadeleştirmek ya da daha az elemanla temsil etmek için kullanılır. F_3 ve F_4'ün doğruluk tablosundaki değerlerine bakılacak olursa her ikisinin de aynı çıkışları verdiği görülür. Eğer F_3 sadeleştirilecek olursa F_4 elde edilir.

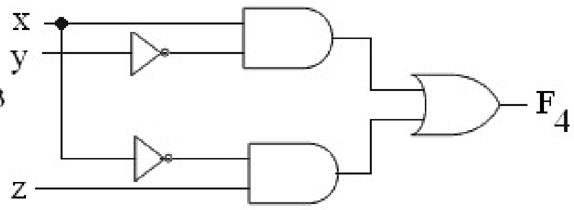
F_3=x'y'z+x'yz+xy'= x'z(y'+y)+xy'= x'z.1+xy'= x'z+xy'

Şimdi bu Boole fonksiyonlarının lojik kapılar ile gerçekleştirilmesini görelim.









Boole fonksiyonlarının minimuma indirgenmesi üzerine bazı örnekler.

Örnek: F=x+x'y Boole fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek sadeleştiriniz.

F=x+x'y=(x'+x)(x+y)

=1.(x+y)

= x+y

Örnek: F=x(x'+y) Boole fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek sadeleştiriniz.

F=x(x'+y)= x.x'+x.y

= 0+x.y

= xy

Örnek: F=x'y'z+x'yz+xy' Boole fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek sadeleştiriniz.

F=x'y'z+x'yz+xy'= x'z(y'+y)+xy'

= x'z+xy'

Örnek: F=xy+x'z+yz Boole fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek sadeleştiriniz.

F=xy+x'z+yz= xy+x'z+yz(x'+x)

= xy+x'z+x'yz+xyz

= xy(z+1)+x'z(y+1)

= xy+x'z

Örnek: F=(x+y)(x'+z)(y+z) Boole fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek sadeleştiriniz.

Bir önceki örneğin duali olup yukarıdaki sonucun dualinin alınması ile bulunabilir.

F=(x+y)(x'+z)(y+z)= (x+y)(x'+z)

Fonksiyonun Tümleyeni

Bir F fonksiyonunun tümleyeni F' olup doğruluk tablosunda 1'lerin yerine 0, 0'ların yerine 1 konulması ile elde edilir. Bir fonksiyonunun tümleyeni DeMorgan teoremi kullanılarak cebirsel olarak da elde edilebilir. İki değişkenli Boole cebri için DeMorgan teoremi daha önce verilmişti. Bu teorem ikiden fazla değişkenli cebirsel ifadeler için de kullanılabilir.

$$
\begin{aligned}
(A+B+C)' &= (A+X)' \\
&= A'.X' \qquad X=B+C \\
&= A'.(B+C)' \\
&= A'.B'.C'
\end{aligned}
$$

Daha çok değişkenli fonksiyonlar için de aynı mantık uygulanacak olursa,

$(A+B+C+D+E+F)'=A'.B'.C'.D'.E'.F'$

$(A.B.C.D.E.F)'= A'+B'+C'+D'+E'+F'$

DeMorgan teoreminin genelleştirilmiş haline göre önce VE ve VEYA işlemleri kendi aralarında yer değiştirir, sonra her bir ifadenin tümleyeni alınır.

Örnek: $F_1=x'yz'+x'y'z$ ve $F_2=x(y'z'+yz)$

$$F_1' = x'yz'+x'y'z=(x'yz')+(x'y'z)=(x+y'+z)(x+y+z')$$

$$F_2' = x(y'z'+yz)=(x)+(y'z'+yz)=x'+[(y+z).(y'+z')]$$

Duallerini alıp elemanların tümleyenlerini alacak olursak;

$$F_1' = (x'yz')+(x'y'z) \Rightarrow (x'+y+z')(x'+y'+z) \Rightarrow (x+y'+z)(x+y+z')$$

$$F_2' = x(y'z'+yz)=(x)+(y'+z')(y+z) \Rightarrow x'+[(y+z)(y'+z')]$$

KANONİK VE STANDART BİÇİMLER

Minterim ve Maksterim

İkili değişkenler normal (x) ya da tümleyen (x') formunda bulunurlar. VE işlemi ile birleştirilmiş x ve y ikili değişkenleri xy, x'y, xy' ve x'y' kombinasyonlarından birini alırlar. Bu terimlere minterim ya da standart çarpım denir. n adet değişken birleştirilerek 2^n adet minterim elde edilebilir. Yöntem 1'li açılım olarak da bilinir. Önce, doğruluk tablosu oluşturulur doğruluk tablosunda sonucu 1 olan satırlardaki değişkenler eğer 0 ise tümleyenleri (değilleri), 1 ise kendisi alınarak değişkenler birbiri ile çarpılır (VE'lenir) sonra bu çarpımların tümü toplanır (VEYA'lanır).

Maksterimler bulunurken, sonucu 0 olan satırlardaki değişkenlerin değeri 0 ise değiştirilmeden, değeri 1 ise tümleyenleri alınarak toplanır ve her satır toplamı bir biri ile çarpılır. Bu yöntem maksterimler, standart toplam ya da 0'lı açılım olarak da bilinir. Her bir maksterimin kendisine karşı düşen minterimin tümleyeni olup, aynı şekilde bunun tersi de doğrudur.

Üç değişkenli maksterim ve minterim tablosu

			Minterimler		Maksterimler	
x	y	z	Terim	Sembol	Terim	Sembol
0	0	0	x'y'z'	m_0	x+y+z	M_0
0	0	1	x'y'z	m_1	x+y+z'	M_1
0	1	0	x'yz'	m_2	x+y'+z	M_2
0	1	1	x'yz	m_3	x+y'+z'	M_3
1	0	0	xy'z'	m_4	x'+y+z	M_4
1	0	1	xy'z	m_5	x'+y+z'	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	x'+y'+z	M_6
1	1	1	xyz	m_7	x'+y'+z'	M_7

Üç değişkenli iki fonksiyon

x	y	z	f_1	f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Üç değişkenli f_1 ve f_2 fonksiyonlarının doğruluk tablolarını göz önüne alalım. f_1 fonksiyonunu 1 yapan satırlar x'y'z, xy'z', xyz 'dir. Bu minterimlerden her biri 1 sonucunu verir. Dolayısıyla, f_1= x'y'z + xy'z' + xyz =$m_1+m_4+m_7$ ayrıca $f_1=M_0.M_2.M_3.M_5.M_6$ şeklinde de yazılır.

Benzer şekilde f_2 fonksiyonu için;

f_2=x'yz+xy'z+xyz'+xyz=$m_3+m_5+m_6+m_7$ ve ayrıca $f_2=M_0.M_1.M_2.M_4$ şeklinde de ifade edilebilir.

Her Boole fonksiyonu minterimlerin toplamı olarak ifade edilebilir.

Bu f_1 ve f_2 fonksiyonlarının tümleyenlerini bulmak için değeri 0 olan satırlara göre minterimler oluşturulur ve bunlar VEYA'lanır.

$f_1' = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' = m_0+m_2+m_3+m_5+m_6$

DeMorgan teormine göre tümleyenin tümleyeni yine kendisi olduğuna göre

$f_1 =(x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')\ (x'+y+z)\ (x'+y'+z)=M_0.M_2.M_3.M_5.M_6$

Benzer şekilde f_2 fonksiyonun tümleyeni,

$f_2' = m_0+m_1+m_2+m_4$

DeMorgan teormine göre tümleyenin tümleyeni yine kendisi olduğuna göre

$f_2=M_0.M_1.M_2.M_4$

Bu örneklerden de görüldüğü üzere her fonksiyon maksterimlerin çarpımı ile gösterilebilir. Bu gösterimlere kanonik gösterim adı verilir. Herhangi bir fonksiyonu minterimlerin toplamı şeklinde ifade etmek için, eksik olan terimin x olduğu varsayılırsa ifade (x+x') ile çarpılarak eksik terimler giderilir ve fonksiyon minterimlerin toplamı şeklinde ifade edilir. Aşağıdaki örnekte bu durum daha iyi bir şekilde açıklanmıştır.

Örnek:

F=A+B'.C fonksiyonunu minterimlerin toplamı şeklinde yazınız.

A değişkeninde eksik olan değişkenler B ve C 'dir.

A=A.(B+B')=AB+AB'

A=A.B.(C+C')+AB'(C+C')=ABC+ABC'+AB'C+AB'C'

B'.C=B'.C(A+A')=AB'C+A'B'C

$F=A+B'C= ABC+ABC'+AB'C+AB'C'+ \cancel{AB'C}+A'B'C$

AB'C terimi iki kere tekrarlandığı için (x+x=x olduğundan dolayı) bunu bir kere yazmak gerekir. Tekrar düzenlenecek olunursa,

$F=A+B'C= A'B'C + AB'C' +AB'C+ABC'+ ABC =m_1+m_4+m_5+m_6+m_7$

Boole fonksiyonu minterimlerin toplamı şeklinde verilmiş ise aşağıdaki şekilde daha kısa bir biçimde gösterilebilir.

$$F(A,B,C) = \sum(1,4,5,6,7)$$

$\sum$ sembolü terimlerin VEYA'landığı anlamına gelir, izleyen sayılar ise fonksiyonların minterimleridir. Parantez içindeki değişkenler ise sıra ile verilmiş olup minterimin VE işlemine dönüştürülmesi sırasında kullanılacak olan sırayı verir.

Boole fonksiyonlarının minterimlerini elde etmenin bir yolu da doğrudan fonksiyonda değerleri yerine koymaktır. F=A+B'C fonksiyonunu göz önüne alalım. B'C ifadesi ancak B=0 ve C=1 iken 1 olur F ifadesi A=1 olduğu sürece 1 ‘dir. Bunları göz önüne alarak doğruluk tablosu kolaylıkla oluşturulabilir.

Verilen bir fonksiyonu maksterimlerin çarpımı şeklinde yazabilmek için fonksiyon, önce VEYA’lı terimlerin çarpımı haline getirilmelidir. Bunun için x+yz=(x+y)(x+z) dağılma kuralı uygulanır. Daha sonra eksik terimler yerine de x.x' terimi konur.

Örnek:

F=x.y+x'.z fonksiyonunu maksterimlerin çarpımı şeklinde ifade ediniz.

Önce dağılma kuralı uygulanarak fonksiyonu VEYA’lı terimlere dönüştürelim.

F= x.y+x'.z= (xy+x')(xy+z) (dağılma kuralı)

= (x'+xy)(z+xy) (yer değiştirme kuralı)

= (x'+x)(x'+y)(z+x)(z+y) (dağılma kuralı)

= (x'+y)(z+x)(z+y) (x+x'=1)

Her bir terimde eksik olan değişkenler eklenirse,

(x'+y)=(x'+y)+z.z'=(x'+y+z)(x'+y+z')

(x+z)= (x+z)+y.y'=(x+y+z)(x+y'+z)

(y+z)= (y+z)+x.x'=(x+y+z)(x'+y+z)

Aynı olan terimler x.x=x olduğunda dolayı tekrarlanan terimlerden sadece bir tanesi alınır.

F= x.y+x'.z= (x+y+z) (x+y'+z) (x'+y+z) (x'+y+z')=$M_0.M_2.M_4.M_5$

Bu fonksiyonu daha kısa bir şekilde aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$F(x,y,z)=\prod(0,2,4,5)$

Kanonik Yapılar Arasında Dönüşüm

Minterimlerin toplamı şeklinde ifade edilen bir fonksiyonun tümleyeni, orijinal fonksiyonda olmayan minterimlerin toplamına eşittir.

$F(A,B,C)=\sum(1,4,5,6,7)$ fonksiyonunun tümleyeni $F'(A,B,C)=\sum(0,2,3)$ ’tür. F' ‘nün tümleyeni F, DeMorgan teoremi kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$F=(m_0+m_2+m_3)'=m_0'.m_2'.m_3'=M_0M_2M_3=\prod(0,2,3)$

Buradan $m_j'=M_j$ olduğu görülür.

$\sum(1,4,5,6,7)=\prod(0,2,3)$

Diğer Lojik İşlemler

n=2 için VE ve VEYA lojik işlemlerinden başka 14 tane daha lojik işlem vardır. İki değişkene göre bu lojik işlemler arasındaki bağıntılar tablodaki gibi verilir.

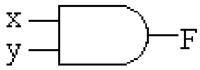
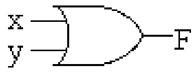
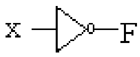
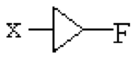
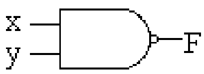
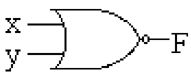
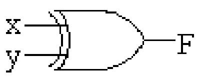
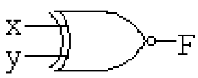
İki değişkene ait 16 fonksiyonun Boole ifadeleri

Boole Fonksiyonları	**İşlem Sembolü**	**İsim**	**Açıklama**
$F_0=0$		SIFIR	İkili sabit sıfır
$F_1=xy$	$x.y$	VE	x ve y
$F_2=xy'$	x/y	Yasaklama	x fakat y değil
$F_3=x$		İletim	x
$F_4=x'y$	y/x	Yasaklama	y fakat x değil
$F_5=y$		İletim	y
$F_6=xy'+x'y$	$x \oplus y$	Özel VEYA	x veya y fakat ikisi de değil
$F_7=x+y$	$x + y$	VEYA	x veya y
$F_8=(x+y)'$	$x \downarrow y$	VEYA DEĞİL	VEYA- değil
$F_9=xy+x'y'$	$x \odot y$	Eşdeğer	x eşit y
$F_{10}=y'$	y'	Tümleyen	y değil
$F_{11}=x+y'$	$x \subset y$	İçerme	y, x'ten sonra ise
$F_{12}=x'$	x'	Tümleyen	x değil
$F_{13}=x'+y$	$x \supset y$	İçerme	x, y'den sonra ise
$F_{14}=(xy)'$	$x \uparrow y$	VE DEĞİL	VE- değil
$F_{15}=1$		Bir	ikili sabit bir

İki değişkenli bu 16 fonksiyona ait doğruluk tablosu aşağıdaki gibi verilir.

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
İşlem Sembolü			.	/		/		$\oplus$	+	$\downarrow$	$\odot$	'	$\subset$	'	$\supset$	$\uparrow$	

Yasaklama ve içerme fonksiyonları bilgisayar lojiğinde çok nadiren kullanılır, sadece mantık bilimi ile uğraşanlar tarafından kullanılır. Ayrıca bu iki fonksiyonun yapısı dağılma ve birleşme kuralına uymadıklarından dolayı lojik kapılar ile gerçekleştirilmeye uygun değildirler. Aşağıdaki şekilde elektronik devre elemanları ile gerçekleştirilebilen 8 tane lojik kapı ve doğruluk tabloları görülmektedir. Tampon devresi olarak adlandırılan eleman sinyalin iletimi sırasında zayıflamaması için kullanılır. İki tane eviricinin peş peşe bağlanması ile elde edilir. VEDEĞİL ve VEYADEĞİL kapılarının VE ve VEYA kapılarından daha fazla kullanılır. Bunun nedeni, bu kapıların transistör ile kolayca gerçekleştirilmeleridir.

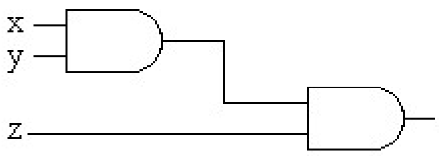
İsim	Grafik Sembol	Cebirsel Fonksiyon	Doğruluk Tablosu
VE (AND)		F=xy	x y F 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
VEYA (OR)		F=x+y	x y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
DEĞİL (NOT)		F=x'	x F 0 1 1 0
TAMPON (BUFFER)		F=x	x F 0 0 1 1
VE DEĞİL (NAND)		F=(xy)'	x y F 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
VEYA DEĞİL (NOR)		F=(x+y)'	x y F 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
ÖZEL VEYA (XOR- EOR)		F=xy'+x'y $=x\oplus y$	x y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
ÖZEL VEYA DEĞİL (XNOR)		F=xy+x'y' $=x\odot y$	x y F 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

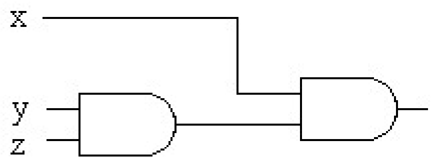
Kullanılan bu kapıların girişleri birden fazla olabilir. Örneğin üç girişli bir VE kapısı düşünelim.

$x.(y.z)=(x.y).z$ birleşme özelliği

$x.y=y.z$ değişme özelliği

VE işlemi bu iki özelliği de gösterdiği için bağlantı sırasındaki herhangi bir değişikliğin önemi yoktur.

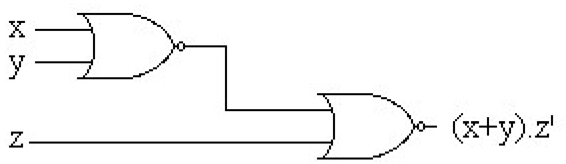


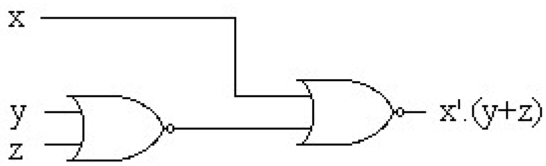


Fakat VEDEĞİL ve VEYADEĞİL kapıları dikkate alınacak olursa VEYADEĞİL için, $x\downarrow$ $(x\downarrow y)\downarrow z\neq x\downarrow(y\downarrow z)$ özelliğini sağlamaz.

$(x\downarrow y)\downarrow z=[(x+y)'+z]'=(x+y).z'$

$x\downarrow(y\downarrow z)=[x+(y+z)']'=x'(y+z)$





Dolayısıyla parantezlerin yerleri oldukça önemlidir ve dikkat edilmelidir.

$x\downarrow y\downarrow z=(x+y+z)'$

aynı şekilde

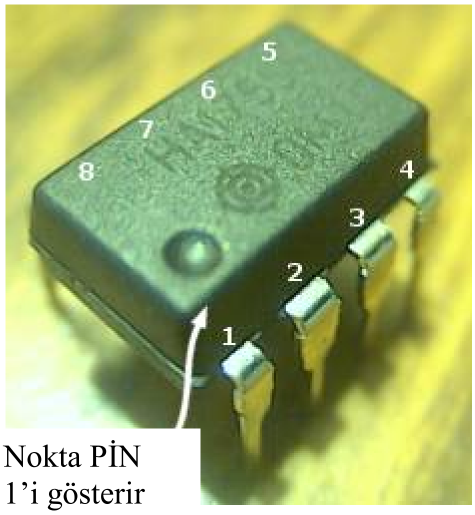
$x\uparrow y\uparrow z=(xyz)'$

DeMorgan teoreminden de görüldüğü üzere çarpımların toplamı şeklindeki ifadeler VEDEĞİL kapıları ile gerçekleştirilebilmektedir.

$F=[(ABC)'(DE)']'=ABC+DE$

ÖZELVEYA fonksiyonu tek bir fonksiyondur. Girişlerinde tek sayıda 1 varsa çıkışı 1 seviyesindedir. Çok girişli ÖZELVEYA kapılarının kullanımı pek yaygın değildir. Hatta iki girişli yapılar bile diğer kapılarla oluşturulur.

Sayısal devreler tümdevreler ile oluşturulur. Tümdevreler(IC), yonga (chip) adı verilen ve silisyumdan yapılmış küçük yarıiletken kristallerdir. Değişik tipte kapılar istenilen devreyi oluşturmak üzere bir araya getirilerek seramik ya da plastik bir kılıfa monte edilir ve devrelerin giriş çıkışı uçları olarak adlandırılan bacakları da (pin) bu kılıftan dışarıya çıkartılır. Aşağıdaki şekilde bir tümdevre ve bunun pinlerinin nasıl numaralandırıldığı görülmektedir.



Nokta PİN 1'i gösterir

Sayısal tümdevreler dört tümleşiklik seviyesine ayrılırlar. Bu tümleşiklik seviyelerine yongada kullanılan kapı sayılarına göre karar verilir.

Küçük Ölçekte Tümleşiklik (*Small Scale Integration*, SSI) SSI tümdevreleri bir elemanda birden fazla bağımsız kapı içerir. Kapıların giriş ve çıkışları pinler yardımı ile doğrudan dışarıya çıkartılmıştır. Kapı sayısı genellikle 10'dan az olduğu için bacak sayıları sınırlıdır.
Orta Ölçekte Tümleşiklik (*Medium Scale Integration*, MSI) MSI tümdevreleri bir elemanda 10 ila 100 arasıda kapı içerirler. Genellikle kod çözücü, toplama elemanı, veya veri seçici (multiplexer) gibi belli temel işlevleri yerine getirirler.
Yüksek Ölçekte Tümleşiklik (*Large Scale Integration*, LSI) LSI tümdevreleri 100 ile birkaç bin kapı içerirler. Bu elemanlar genellikle, işlemci, bellek ve programlanabilir lojik elemanları gibi sayısal elemanlar içerirler.
Çok Yüksek Ölçekte Tümleşiklik (*Very Large Scale Integration*, VLSI) VLSI tümdevreleri ise tek bir elemanda binlerce kapı içerirler. Bu elemanlara örnek olarak karmaşık mikrobilgisayarlar gösterilebilir.
Sayısal tümdevreler sadece karmaşıklıklarına göre değil ayrıca yapıldıkları teknolojiye göre de sınıflandırılırlar. Bu devre teknolojisi sayısal lojik aile olarak adlandırılır. Her lojik ailenin kendine özgü bir temel elektronik devresi vardı ve daha karmaşık aileler buradan hareketle gerçekleştirilir. Her teknolojide temel devre VEDEĞİL, VEYADEĞİL ve TAMPON

kapısıdır. Temel devrenin yapısında kullanılan elektronik elemanlar genellikle söz konusu sayısal aileye de adını verir.

TTL- Transistör - Transistör Lojik

ECL- Emetör Kuplajlı Lojik

MOS- Metal Oksit Yarıiletken

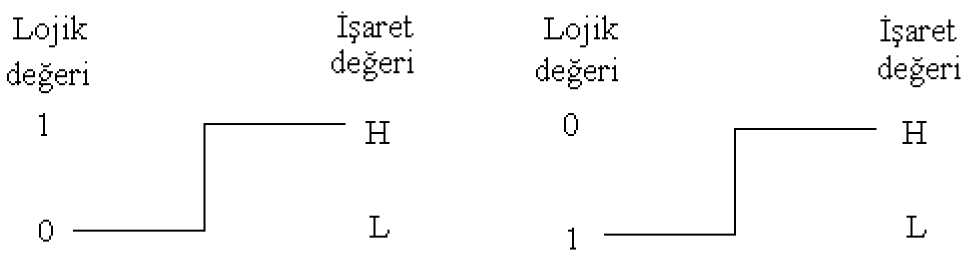
CMOS Tamamlayıcı Metal Oksit Yarıiletken

Transistör-transistör lojik ailesi VEDEĞİL kapısını transistör ve diyottan oluşan bir teknolojiden geliştirilmiş olan bir türdür. Devre ilk önceleri DTL olarak adlandırılırken devredeki diyotlar, devrenin çalışmasını iyileştirmek için transistörlerle değiştirilmiş ve aile TTL olarak adlandırılmıştır.

Emetör kuplajlı lojik (ECL), tümdevre halindeki sayısal lojik aileler içindeki en hızlı olanlardır. ECL, yüksek hızın gerekli olduğu süper bilgisayarlar ve gerçek zamanlı sayısal işaret işleyicilerde kullanılırlar. ECL teknolojisinde kullanılan transistörler doymaya sokulmazlar. Dolayısıyla 1 ya da 2 Ns zaman gecikmeleri sağlanır.

Metal oksit yarıiletkenler sadece bir tip taşıyıcı hareketine dayalı transistörlerdir. Bu taşıyıcılar elektron (n-kanallı) ya da delik (p-kanallı) olabilir. Bunlar NMOS ve PMOS olarak adlandırılırlar. Tümleyici MOS da, bir tane NMOS ve bir tane PMOS kullanılarak elde edilir. MOS'ların bipolar transistörlere göre en büyük avantajları, üretim sırasında daha az teknik gerektirmesi, az güç kayıplarının olması ve yüksek yoğunluk kapasiteleri göstermeleridir.

Lojik işaretler pozitif ve negatif lojik olmak üzere ikiye ayrılırlar. Aşağıdaki şekilde pozitif ve negatif lojik işaretler görülmektedir.



Pozitif Lojik Negatif Lojik

Negatif lojik bir işaret VEYA kapısının girişine uygulandığında VE kapısına pozitif lojik bir işaret uygulanmış gibi olur. Bir başka değişle, birbirlerine göre tümleyenlerdir.