Toplamların Çarpımının Basitleştirilmesi

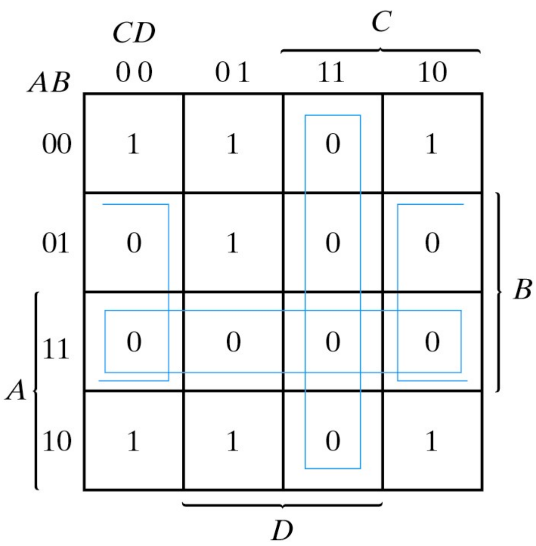
Şimdiye kadar Boole fonksiyonları çarpımların toplamı şeklinde ifade edilmişti. Bu fonksiyonları toplamların çarpımı şeklinde de ifade etmek mümkündür. Bunun için genelleştirilmiş DeMorgan teoremi kullanılır. Fonksiyonun tümleyeninin tümleyeni kendisini verdiği için fonksiyonu basitleştirirken fonksiyonun tümleyeninin basit hali bulunur. Bunun için diyagramlarda boş kalan karelere 0 konarak bu kareler arasındaki komşuluklar kullanılır ki bu da fonksiyonun tümleyenini verir. Bu fonksiyona DeMorgan teoremi uygulanırsa, ifade toplamların çarpımı haline gelmiş olur.

Örnek: Aşağıdaki Boole fonksiyonunu

(a) Çarpımların toplamı

(b) Toplamların çarpımı şeklinde basitleştiriniz.

$$F(A,B,C,D)=\sum(0,\ 1,\ 2,5,\ 8,\ 9,10)$$



1'ler ile temsil edilen karelerden çarpımların toplamı şeklinde aşağıdaki F fonksiyonu elde edilir.

F=B'D'+B'C'+A'C'D

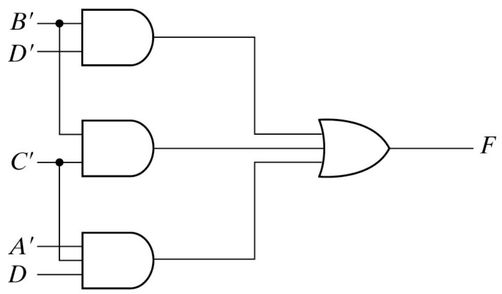
Boş kalan kareler 0'lar ile doldurulur. Bu 0'lar ile temsil edilen karelerden ise çarpımların toplamı şeklinde aşağıdaki F' tümleyen fonksiyonu elde edilir.

F'=AB+CD+BD'

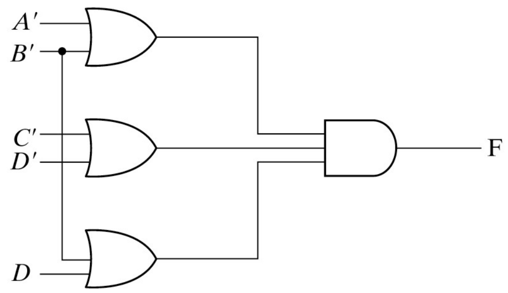
Tümleyenin tümleyenini alırsak F 'in toplamların çarpımı şeklindeki fonksiyonu elde edilir.

F=(A'+B')(C'+D')(B'+D)

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi her iki fonksiyonda kapılarla gerçekleştirilmiştir. Çarpımların toplamında tüm girişler VE 'lendikten sonra bir VEYA kapısı ile sonlandırılır. Diğer gerçekleştirmede ise tüm girişler VEYA ‘landıktan sonra bir VE kapısı ile sonlandırılır. Bu gerçekleştirmelere *iki kademeli* gerçekleştirme denir.



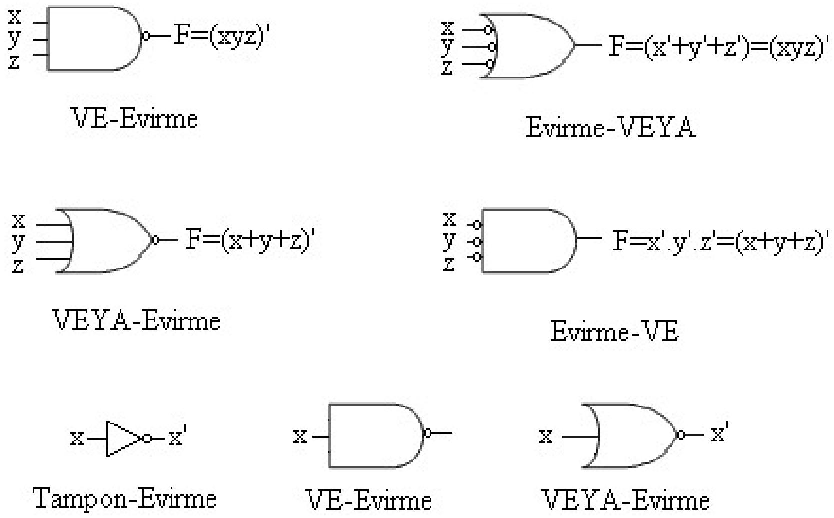
(a) $F = B'D' + B'C' + A'C'D$



(b) $F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$

VEDEĞİL ve VEYADEĞİL Kapılarıyla Gerçekleme

Elektronik devreler gerçekleştirilmeleri kolay olduğu için, sayısal devreler VE, VEYA, DEĞİL kapılarıyla gerçekleştirilmesi yerine VEDEĞİL, VEYADEĞİL kapılarıyla gerçekleştirilir. VEDEĞİL ve VEYADEĞİL kapılarının dönüşümü için aşağıdaki şekilleri incelemek gerekecektir.



Bu gösterimlerdeki giriş çıkış ilişkileri DeMorgan teoremi kullanılarak elde edilmiştir. Küçük daireler değişkenin tümleyeninin alındığı anlamına gelir. Her iki çıkışın da birbirinin aynı olduğu görülmektedir. Bu yapıların elektronik devreler ile gerçekleştirilmesi kolay olduğu için tasarımlarda bu tip yapılar seçilir. Tek girişli gösterilen yapılar ise bir evirici olarak çalışırlar.

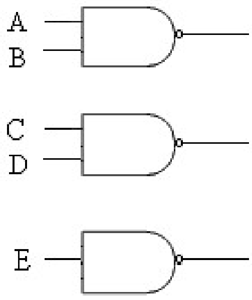
VEDEĞİL Gerçeklemesi

Boole fonksiyonlarını VEDEĞİL gerçeklemesi ile gösterebilmek için fonksiyonu çarpımların toplamı şeklinde ifade etmek gerekecektir.

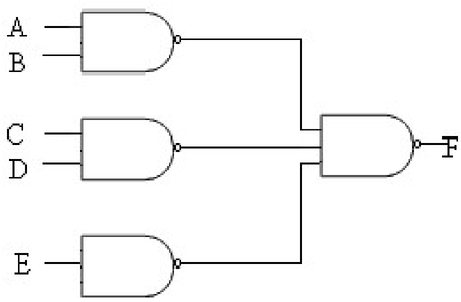
F=AB+CD+E ifadesini göz önüne alalım.

İzlenecek yol aşağıdaki gibidir.

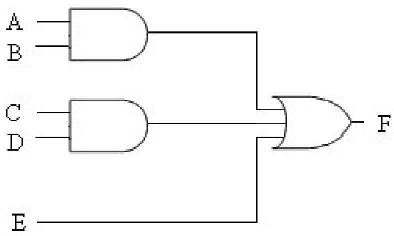
1- Önce fonksiyonu basitleştirip çarpımların toplamı olarak ifade edin.
   F=AB+CD+E
2- En az iki değişkeni olan fonksiyonun her çarpım terimi için bir VEDEĞİL kapısı alarak değişkenleri bu VEDEĞİL kapısının girişi olacak şekilde aşağıdaki gibi bağlayınız.



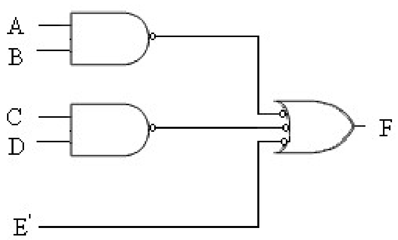
3- VE-Evirme ya da Evirme-VEYA kapılarını kullanarak girişlerine birinci kademedeki kapıların çıkışları gelecek şekilde bir VEDEĞİL kapısının girişine aşağıdaki gibi bağlayınız.



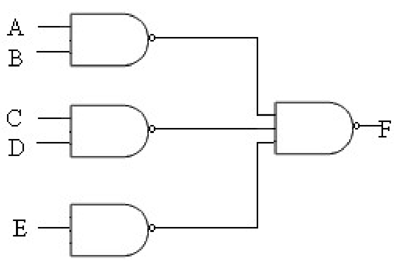
Aşağıdaki bu fonksiyonun farklı şekildeki gerçeklemeleri görülmektedir.



VE-VEYA



VEDEĞİL Evirme-VEYA



VEDEĞİL-VEDEĞİL

4- Tek değişkenli bir terim ise birinci kademede gösterilir ve bir evirici ile gerçeklenir. Ya da tümleyeni alınarak VEDEĞİL kapısının girişine bağlanır.

Diğer bir yolda, basitleştirilmiş fonksiyonu bulmak için 1'ler yerine 0'lar kullanılır. Dolayısıyla fonksiyonun tümleyeni bulunur. Bu fonksiyon gerçekleştirildikten sonra çıkışın tümleyeni alınarak fonksiyonun kendisi elde edilir. Bu gerçekleme iki çıkışlı olur ve bazen tasarımcı fonksiyonun kendisine ya da tümleyenine gerek duyabilir.

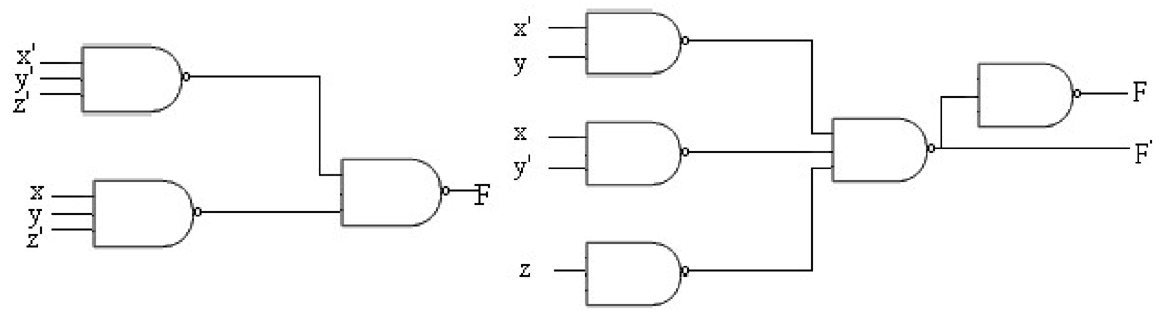
Örnek: Aşağıdaki fonksiyonu VEDEĞİL kapıları ile gerçekleştiniz.

$F(x, y, z) = \sum(0,\ 6)$

x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1

F'=x'y+xy'+z

F=<x'y'z'+xyz'



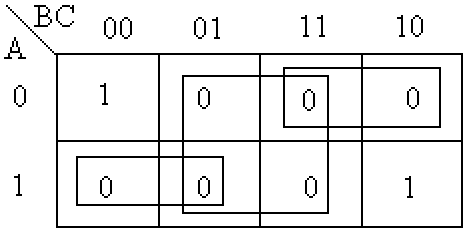
F=x'y'z'+xyz' F'=x'y+xy'+z

VEYADEĞİL Gerçeklemesi

VEYADEĞİL fonksiyonu VEDEĞİL fonksiyonunun dualidir. Bu nedenle, VEDEĞİL fonksiyonundaki kural ve yöntemlerin duali VEYADEĞİL fonksiyonu için de geçerlidir. Gerçekleme için fonksiyonun toplamların çarpımı şeklinde olması gerekmektedir. Bunun için fonksiyondaki 0'lar dikkate alınarak öncelikle fonksiyonun tümleyeni bulunur. Fonksiyonun kendisi için ise elde edilen ifadenin tümleyeni alınarak ifade toplamların çarpımı şekline getirilir.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonu VEYADEĞİL kapıları ile gerçekleştiniz.

$F(A, B, C) = \sum(0,\ 6)$

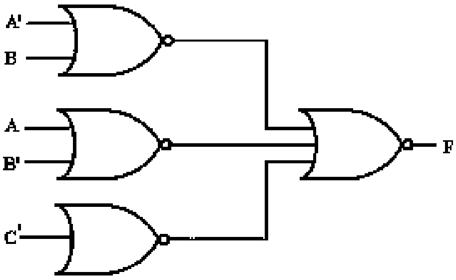


0’lardan faydalanarak

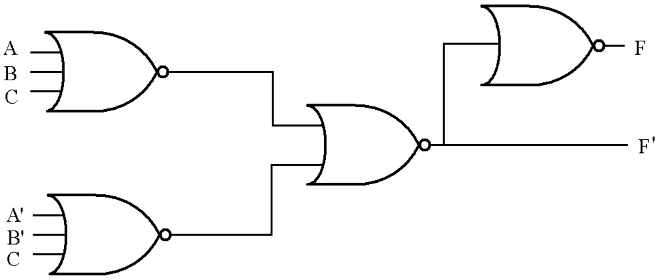
F'=A'B+AB'+C ise DeMorgan teoreminden F=(A+B')(A'+B)C'

1’lerden faydalanarak

F=A'B'C'+ABC' bulunur. DeMorgan teoreminden F'=(A+B+C)(A'+B'+C) olarak bulunur.



F=(A+B')(A'+B)C'



F'=(A+B+C)(A'+B'+C)

Aşağıdaki tabloda şimdiye kadar anlatılanlar özetlenmektedir.

DURUM	BASİTLEŞTİRİLECEK FONKSİYON	KULLANILACAK STANDART FORM	NASIL TÜRETİLECEĞİ	UYGULAMA	F İÇİN SEVİYE SAYISI
a	F	Çarpımların Toplamı	Diyagramdaki 1’lerin toplanması	VEDEĞİL	2
b	F'	Çarpımların Toplamı	Diyagramdaki 0’ların toplanması	VEDEĞİL	3
c	F	Toplamların Çarpımı	b’deki F' ‘nün tümleyeni	VEYADEĞİL	2
d	F'	Toplamların Çarpımı	a’daki F ‘in tümleyeni	VEYADEĞİL	3

Diğer İki Kademeli Gerçeklemeler

VE-VEYA-EVİRME ve VEYA-VE-EVİRME gerçeklemeleri de olup standart formları korurlar.

Etkisiz (Don’t Care) Koşullar

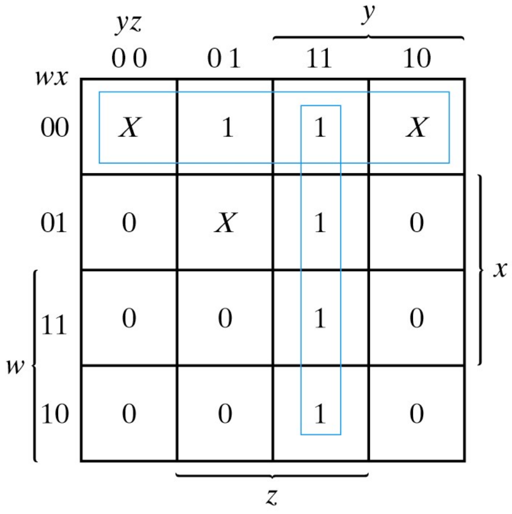
Pratikte bazı şartlarda belirsiz durumlar söz konusu olabilir. Şimdiye kadar incelenen fonksiyonlarda lojik 1 olarak belirtilen durumların dışındaki durumlar 0 olarak alınmıştı. Örneğin, dört bit ile belirlenmiş onlu sayıların belirsiz sayılan altı kombinasyonu söz konusudur. Eğer tanımlanmamış bir durum söz konusu ise bu durumun 1 ya da 0 olmasının herhangi bir önemi yoktur. Bu nedenle, fonksiyonun belirlenmemiş minterimlerine etkisiz koşullar denir. Fakat bu etkisiz koşullar fonksiyonun sadeleştirilmesi için kullanılabilir. Bu etkisiz koşullar diyagrama yerleştirilirken 1 ya da 0 olarak belirlenmez bunların yerine X işareti konulur. Diyagram sadeleştirilirken bu etkisiz elemanlar 1 ya da 0 olarak göz önüne alınabilir. Şöyle ki, eğer X işaretli kare bir sadeleştirme sağlıyorsa 1 eğer herhangi bir sadeleştirme sağlamıyorsa 0 olarak göz önüne alınır.

Örnek: Etkisiz kombinasyonları

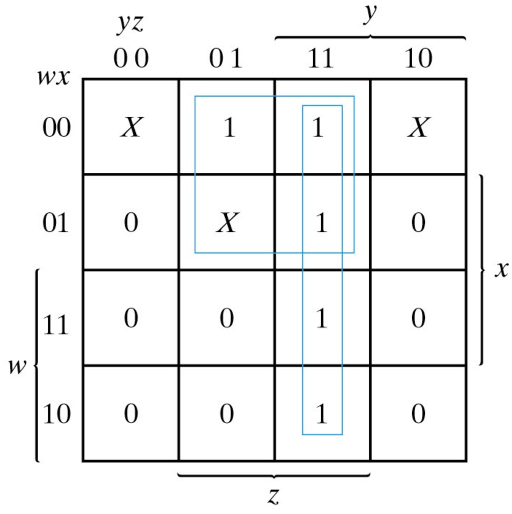
$$d(w, x, y, z) = \sum(0, 2, 5)$$

şeklinde olan

$F(w, x, y, z) = \sum(1, 3, 7, 11, 15)$ Boole fonksiyonunu sadeleştiriniz.



(a) $F = yz + w'x'$



(a) $F = yz + w'z$

İlk ifade de 0 ve 2 etkisiz elemanları 1 olarak düşünülmüştür. İkinci ifadede de ise sadece 5 etkisiz elemanı 1 olarak dikkate alınmıştır.

$$F(w, x, y, z) = yz + w'z = \sum(1, 3, 5, 7, 11, 15)$$

Eğer toplamların çarpımı şeklinde bir ifade elde etmek istiyorsak bu durumda 0'lar göz önüne alınmalıdır.

wx \ yz	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

F'=z'+wy' ise F=z(w'+y)=Σ(1,3,7,11,15)