4. BÖLÜM

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER

3.1. Giriş :

n-yinci mertebeden bir lineer dif. denklem

$$b_n(x)\cdot y^{(n)} + b_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)\cdot y = g(x) \dots (4.1)$$

biçimindedir. Burada $g(x)$ ve $b_j(x)$ $(j=0,1,2,\dots,n)$ katsayıları sadece x değişkenine bağlıdır. Bir başka deyişle y'ye veya y nin herhangi bir türevine bağlı değillerdir.

Eğer $g(x)\equiv 0$ ise o zaman (4.1) denklemi homojendir. Aksi durumda homojen değildir. Eğer (4.1)'deki tüm $b_j(x)$ katsayıları sabitse bir lineer dif. denklem sabit katsayılıdır. Eğer bu katsayılardan biri veya daha fazlası sabit değilse (4.1) denklemi değişken katsayılıdır.

Şimdi (4.1) lineer dif. denklemini ve aşağıdaki n tane başlangıç koşulu ile verilen başlangıç-değer problemini düşünelim:

$$y(x_0) = C_0, \quad y'(x_0) = C_1, \quad y''(x_0) = C_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1} \dots (4.2)$$

Eğer $g(x)$ ve $b_j(x)$ $(j=0,1,2,\dots,n)$ fonksiyonları x_0'ı içeren bir I aralığında sürekli ise ve I'da $b_n(x)\neq 0$ ise o zaman (4.1) ve (4.2) ile verilen başlangıç-değer probleminin I'da tanımlı tek bir çözümü vardır.

$b_n(x)\neq 0$ olmak üzere (4.1) denklemi $b_n(x)$ ile bölünürse

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)\cdot y' + a_0(x)\cdot y = \phi(x) \dots (4.3)$$

bulunur.

$L(y)$ operatörünü, $a_i(x)$ $(i=0,1,2,\dots,n-1)$ fonksiyonu verilen aralıkta sürekli olmak üzere

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y \quad \cdots (4.4)$$

ile tanımlayalım. O zaman (4.3) denklemi

$$L(y) = \phi(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.5)$$

olarak yazılabilir ve özel durumda bir lineer homojen denklem

$$L(y) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.6)$$

halinde ifade edilebilir.

TANIM: (Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık):

Bir $\{ y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \}$ fonksiyon kümesi verilsin. Eğer $x \in [a,b]$ için

$$c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4.7)$$

eşitliğini sağlayan $c_1, c_2, \dots, c_n$'lerin hepsi sıfır değilse $\{ y_1(x), \dots, y_n(x) \}$ fonksiyon kümesi $[a,b]$ aralığı üzerinde lineer bağımlıdır.

ÖRNEK: $\{ x, 5x, 1, \sin x \}$ kümesi $[-1, 1]$ üzerinde lineer bağımlıdır, çünkü

$$c_1 x + c_2 5x + c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot \sin x = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $c_1 = -5$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$ ve $c_4 = 0$ sabitleri vardır. ■

Eğer (4.7) eşitliğinin sağlanması yalnızca $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ olması halinde oluyorsa $\{ y_1(x), \dots, y_n(x) \}$ fonksiyonlar kümesi $[a,b]$ aralığında lineer bağımsızdır.

3.2. LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TEMEL TEOREMİ

TEOREM n-yinci mertebeden lineer homojen $L(y) = 0$ diferensiyel denkleminin birbirinden farklı m tane çözümü $y_1, y_2, \dots, y_m$ olsun. $(m \leq n)$. Bu durumda $c_1, c_2, \dots, c_m$

katsayıları keyfi sabit sayılar olmak üzere,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümü olur.

<u>TANIM</u>: (<u>Lineer kombinasyon</u>): $y_1, y_2, \dots, y_m$ herhangi m tane fonksiyon ve $c_1, c_2, \dots, c_m$ herhangi keyfi sabit sayılar olsun. Bu durumda

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

ifadesine $y_1, y_2, \dots, y_m$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu denir.

Bu tanımdan yararlanarak yukarıdaki teorem şöyle de ifade edilebilir: "Bir lineer homojen dif. denklemin çözümlerinin lineer kombinasyonu da bir çözümdür". Bu teorem, lineer homojen dif. denklemlerin Temel Teoremidir.

<u>TANIM</u> (<u>Wronskian Determinantı</u>): $y_1, y_2, \dots, y_n$ gibi n tane fonksiyon verilsin ve bu fonksiyonlar her $x \in [a,b]$ için $(n-1)$-yinci mertebeden türeve sahip olsun. Bu durumda $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının Wronskian'ı

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantıdır.

Eğer bu determinant sıfıra eşitse $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları lineer bağımlı olur, sıfırdan farklıysa lineer bağımsız olur.

Eğer $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonlarının herbiri

$$b_n(x)\,y^{(n)} + b_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x)\,y' + b_0(x)\,y = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (4.8)$$

denkleminin birer çözümü ise ve bu fonksiyonlar aynı zamanda kendi aralarında lineer bağımsız iseler bunların lineer kombinasyonu olan

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.9)$$

fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümüdür.

(4.9) ile verilen y_h fonksiyonu verilen homojen denklemin genel çözümü veya homojen çözümüdür. Halbuki amacımız sadece (4.8) denkleminin genel çözümünü bulmak değil (4.1) denkleminin genel çözümünü bulmaktır. Bunun için değişik metotlar geliştirilmiş ve böylece (4.1) denkleminin bir özel çözümü olan y_p bulunabilmiştir. Ayrıca ifade edelim ki, y_h çözümü (4.8) denkleminin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit sayı içerdiği halde, y_p çözümü herhangi bir sabit sayı içermez. Sonuç olarak $y = y_h + y_p$ fonksiyonu (4.1) denkleminin genel çözümüdür.

Öyleyse, homojen olmayan bir dif. denklemin genel çözümünü bulmak için önce denklemin homojen kısmının y_h homojen çözümünü bulmak, sonra denklemin y_p özel çözümünü bulmak ve sonunda bunları toplayıp $y = y_h + y_p$ şeklinde yazmak gerekmektedir.

ÖRNEK : $\{\sin 3x, \cos 3x\}$ kümesinin wronskianı bulunuz.

Çözüm :
$$W = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ (\sin 3x)' & (\cos 3x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin 3x \end{vmatrix}$$

$$= -3\sin^2 3x - 3\cos^2 3x = -3(\sin^2 3x + \cos^2 3x) = -3$$

ÖRNEK : $\{x, x^2, x^3\}$ kümesinin wronskianını bulunuz.

Çözüm :
$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x' & (x^2)' & (x^3)' \\ x'' & (x^2)'' & (x^3)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

ÖRNEK : $y'' + 9y = 0$ denkleminin iki çözümünün $y_1 = \sin 3x$ ve $y_2 = \cos 2x$ olduğu biliniyorsa genel çözümünü bulunuz.

Çözüm : y_1 ve y_2 nin wronskianı -3 tür ve sıfırdan farklıdır. O halde lineer bağımsız olduğundan verilen denklemin genel çözümü

$$y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 2x$$

olur.

ÖRNEK : $y'' - 2y' + y = 0$ denkleminin iki çözümü e^{-x} ve $5e^{-x}$ tir. Genel çözüm $y = c_1 e^{-x} + c_2 5e^{-x}$ midir?

Çözüm :
$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & 5e^{-x} \\ (e^{-x})' & (5e^{-x})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 5e^{-x} \\ -e^{-x} & -5e^{-x} \end{vmatrix} = 0$$

hesaplanır. Böylece e^{-x} ve $5e^{-x}$ lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $y = c_1 e^{-x} + c_2 5e^{-x}$ fonksiyonu denklemde yerine yazılınca sağlamaz.

NOT: $W \neq 0$ ise genel çözüm olur.
$W = 0$ ise denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

4.3. SABİT KATSAYILI HOMOJEN LİNEER DİF. DENKLEMLER

Karakteristik Denklem : a, b ve c reel sabitler olmak üzere

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \ldots \ldots \quad (4.10)$$

dif. denklemine

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

şeklinde bir karakteristik denklem karşılık gelir.

ÖRNEK : $y'' + 3y' - 4y = 0$ dif. denkleminin karakteristik denklemi $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ dır.

Genel Çözüm : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

dır. Burada $\Delta = b^2 - 4ac$ diskriminantının alacağı 3 farklı değere göre kökler reel veya kompleks olabilir. Buna göre

I. Durum : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise λ_1 ve λ_2 reel ve farklıdır.
Bu durumda dif. denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \ldots \ldots \quad (4.12)$$

olur. $\lambda_2 = -\lambda_1$ özel durumunda (4.12) çözümü

$$y = k_1 \cosh \lambda_1 x + k_2 \sinh \lambda_2 x$$

olarak yeniden yazdabilir.

II. Durum : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise yani $\lambda_1 = \lambda_2$ ise iki lineer bağımsız çözüm $e^{\lambda_1 x}$ ve $x e^{\lambda_2 x}$ tir. Genel çözüm

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} \qquad \ldots \ldots \quad (4.13)$$

olur.

III. Durum: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise λ_1 ve λ_2 komplekstir. Burada $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olup iki eşlenik kompleks sayı elde edilir.

Burada iki lineer bağımsız çözümü $e^{(\alpha+i\beta)x}$ ve $e^{(\alpha-i\beta)x}$ dır ve böylece dif. denklemin genel çözümü

$$y = k_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

şeklindedir. Ancak dif. denklemin genel çözümünün bu şekilde verilmesi genel olarak pek uygun olmadığından Euler formülü adı verilen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

bağıntısı kullanılarak genel çözüm

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \quad \ldots \quad (4.14)$$

şeklinde verilebilir.

UYARI: Yukarıdaki çözümler, dif. denklem lineer olmadığında veya sabit katsayılı olmadığında geçerli değildir. Örneğin $y'' - x^2 y = 0$ denklemini düşünelim. Karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = x$ ve $\lambda_2 = -x$ dir. Ancak çözüm

$$y = c_1 e^{(x).x} + c_2 e^{(-x).x} = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2}$$

değildir. (Değişken katsayılılar ileride verilecektir)

ÖRNEK: $y'' - y' - 2y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Karakteristik denklem $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ şeklinde olup $(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 2$ bulunur. Kökler reel ve farklı olduğundan I. Duruma göre çözümü

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

olur.

8

ÖRNEK : $y'' - 5y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Karakteristik denklem $\lambda^2 - 5 = 0$ dır. $\lambda_1 = +\sqrt{5}$ ve $\lambda_2 = -\sqrt{5}$ olup çözüm

$$y = c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{-\sqrt{5}x}$$

dır.

ÖRNEK : $y'' - 8y' + 16y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 4.16 = 0$ olup çakışık iki kök vardır. $\left\{ \lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \right\}$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 4$$

Kökler reel ve eşit old. II. Duruma göre çözüm

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

olur.

ÖRNEK : $y'' - 6y' + 25y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.25}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{-64}}{2}$$

$$= 3 \pm \frac{\sqrt{64 i^2}}{2} = 3 \pm 4i$$ old. III. Duruma göre

$$y = c_1 e^{3x} . \cos 4x + c_2 e^{3x} . \sin 4x$$

olur.

ÖRNEK : $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda + 2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$ ve $\lambda_3 = -2$ old. genel çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-2x}$$

dır.

ÖRNEK : $y^{(IV)} - 9y'' + 20y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^4 - 9\lambda^2 + 20 = 0 \Rightarrow m^2 - 9m + 20 = 0 \quad (\lambda^2 = m)$

$\Rightarrow m = 4$ ve $m = 5 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -\sqrt{5},\ \lambda_4 = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{\sqrt{5}x} + c_4 e^{-\sqrt{5}x}$

ÖRNEK : $y^{V} - 2y^{IV} + y''' = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 1$

$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 x^2 e^{0x} + c_4 e^{1x} + c_5 x e^{1.x}$

ÖRNEK : $y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 = 0$ karakteristik denkleminde $\lambda = -2$ yazılırsa denklemi sağlar. Bu nedenle $(\lambda+2)$ terimi bu karakteristik denklemin bir çarpanı olur

$$\begin{array}{l|l}
\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 & \lambda + 2 \\ \cline{2-2}
-\ \lambda^3 + 2\lambda^2 & \lambda^2 - 8\lambda + 18 \\ \cline{1-1}
\quad -8\lambda^2 + 2\lambda & \\
-\ -8\lambda^2 - 16\lambda & \\ \cline{1-1}
\quad\quad +18\lambda + 36 & \\
-\quad\ 18\lambda + 36 & \\ \cline{1-1}
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 = (\lambda+2).(\lambda^2 - 8\lambda + 18)$

$\Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-(-8) \mp \sqrt{64-72}}{2} = 4 \mp i\sqrt{2}$

olup genel çözüm

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}.\cos\sqrt{2}x + c_3 e^{4x}.\sin\sqrt{2}x$$

ÖRNEK : $9y''+6y'+5y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=0$
denklemini çözünüz.

Çözüm : $9\lambda^2+6\lambda+5=0$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-6\mp\sqrt{36-4.9.5}}{18}=\frac{-6\mp\sqrt{-144}}{18}$$

$$=\frac{-6\mp\sqrt{144i^2}}{18}=-\frac{1}{3}\mp\frac{2}{3}i$$

olduğundan genel çözüm

$$y=c_1e^{-\frac{1}{3}x}\cdot\cos\frac{2}{3}x+c_2e^{-\frac{1}{3}x}\sin\frac{2}{3}x$$

bulunur.

$y(0)=6$ olduğundan $x=0$ ve $y=6$ değerleri için

$$6=c_1e^0\underbrace{\cos 0}_{=1}+c_2e^0\underbrace{\sin 0}_{=0} \Rightarrow \boxed{c_1=6}$$

$y'(0)=0$ olduğundan $x=0$ ve $y=0$ değerleri için
önce y' türevini hesaplayalım:

$$y'=-\frac{1}{3}c_1e^{-\frac{1}{3}x}\cdot\cos\frac{2}{3}x+c_1e^{-\frac{1}{3}x}\left(-\frac{2}{3}\sin\frac{2}{3}x\right)$$

$$-\frac{1}{3}c_2e^{-\frac{1}{3}x}\sin\frac{2}{3}x+c_2e^{-\frac{1}{3}x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}x\right)=0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}c_1+c_2\cdot\frac{2}{3}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\cdot 6+c_2\cdot\frac{2}{3}=0 \Rightarrow \boxed{c_2=3}$$

olup çözüm

$$y=6e^{-\frac{1}{3}x}\cos\frac{2}{3}x+3e^{-\frac{1}{3}x}\sin\frac{2}{3}x$$

olur.