SABİT KATSAYILI LİNEER DİF. DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Türevlerin Laplace Dönüşümleri

$L\{y(x)\}$'i $Y(s)$ ile gösterelim. Bu durumda çok genel koşullar altında $y(x)$'in n-yinci türevinin Laplace dönüşümü

$$L\{y^{(n)}\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \cdots - s\, y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \quad \cdots (6.1)$$

(Sadece $x=0$'daki koşullar veriliyor)

dır. Eğer $x=0$'da $y(x)$ üzerindeki başlangıç koşulları

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \quad \ldots \quad (6.2)$$

şeklinde veriliyorsa bu durumda

$$L\{y^{(n)}\} = s^n Y(s) - c_0 s^{n-1} - c_1 s^{n-2} - \cdots - c_{n-2} s - c_{n-1} \quad \ldots \quad (6.3)$$

olarak yazılabilir.

$n=1$ ve $n=2$ özel durumları için

$$L\{y'(x)\} = sY(s) - c_0 \quad \ldots \quad (6.4)$$

$$L\{y''(x)\} = s^2 Y(s) - c_0 s - c_1 \quad \ldots \quad (6.5)$$

eşitlikleri elde edilir. $\{ L\{y(x)\} = Y(s)$ şeklindeydi. $\}$

Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri

Laplace dönüşümleri, başlangıç koşulları belirlenen n-yinci mert. sabit katsayılı lineer dif. denklemi

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + b_1 y' + b_0 y = g(x) \quad \ldots \quad (6.6)$$

ile verilen başlangıç değer problemini çözmek için kullanılır. Öncelikle (6.6) denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınıp $Y(s)$ için bir cebirsel denklem elde edilir. Daha sonra bu denklem $Y(s)$ için çözülür ve son olarak da $y(x) = L^{-1}\{Y(s)\}$ çözümünü elde etmek için ters Laplace dönüşümü alınır.

ÖRNEK : $y' - 5y = 0$, $y(0) = 2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm : $y' - 5y = 0$ denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{y'\} - 5L\{y\} = L\{0\}$$

elde edilir. $c_0 = 2$ olmak üzere (6.4) eşitliği kullanılırsa

$$[sY(s) - 2] - 5Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s-5}$$

bulunur. Son olarak $Y(s)$ nın ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-5}\right\}$$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = 2e^{5x}$$

bulunur.

ÖRNEK : $y' - 5y = e^{5x}$, $y(0) = 0$ başlangıç değer prob. çözünüz.

Çözüm Denklemin her iki tarafının Laplace dön. alınırsa

$$L\{y'\} - 5L\{y\} = L\{e^{5x}\}$$

olur. $C_0 = 0$ için (6.4) eşitliği kullanılırsa

$$[sY(s) - 0] - 5Y(s) = \frac{1}{s-5}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{(s-5)^2} \quad \text{bulunur.}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^2}\right\} = xe^{5x} \quad \text{elde edilir.}$$

ÖRNEK : $y' + y = \sin x$, $y(0) = 1$ problemini çözünüz.

Çözüm :
$$L\{y'\} + L\{y\} = L\{\sin x\}$$

$$\Rightarrow \left[sY(s) - 1\right] + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} + \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) + e^{-x}$$

ÖRNEK : $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$ prob. çözünüz.

Çözüm : $L\{y''\} + 4L\{y\} = L\{0\}$

$c_0 = 2$ ve $c_1 = 2$ için (6.5) eşitliği kullanılırsa

$$\left[s^2 Y(s) - 2s - 2\right] + 4Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2s+2}{s^2+4} = \frac{2s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= 2\cos 2x + \sin 2x$$

bulunur.

ÖRNEK : $y'' - 3y' + 4y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 5$

problemini çözünüz.

Çözüm : $L\{y''\} - 3L\{y'\} + 4L\{y\} = L\{0\}$

$C_0 = 1$ ve $C_1 = 5$ için (6.4) ve (6.5) 'den

$$[s^2 Y(s) - s - 5] - 3[sY(s) - 1] + 4Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+2}{s^2 - 3s + 4}$$

bulunur.

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2-3s+4}\right\}$$

$$= e^{\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + \sqrt{7}\, e^{\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x$$

ÖRNEK : $y'' - y' - 2y = 4x^2 \ , \quad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 4$ problemini

çözünüz.

Çözüm : $L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = 4L\{x^2\}$

$C_0 = 1$ ve $C_1 = 4$ için

$$[s^2 Y(s) - s - 4] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = \frac{8}{s^3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+3}{s^2 - s - 2} + \frac{8}{s^3(s^2 - s - 2)}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2-s-2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\}$$

$$\Rightarrow y(x) = \left(\frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}\right) + \left(-3 + 2x - 2x^2 + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{8}{3}e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = 2e^{2x} + 2e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3$$

çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y''' + y' = e^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm : $L\{y'''\} + L\{y'\} = L\{e^x\}$

(6.4) eşitliği $n=3$ için kullanılırsa

$$[s^3Y(s) - 0.s^2 - 0.s - 0] + [sY(s) - 0] = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^3+s)}$$

elde edilir. Buradan

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad A = -1 , \quad B = \frac{1}{2} , \quad C = \frac{1}{2} , \quad D = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = L^{-1}\left\{-\frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

çözümü bulunur.

(17)

ÖRNEK ! $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM : Başlangıç koşulları verilmemiştir. Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{y''\} - 3L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{e^{-x}\}$$

$$\Rightarrow \left[s^2 Y(s) - s c_0 - c_1\right] - 3\left[sY(s) - c_0\right] + 2\left[Y(s)\right] = \frac{1}{s+1}$$

yazılabilir. Burada c_0 ve c_1 sabitleri $y(0)$ ve $y'(0)$ başlangıç koşullarını temsil ettiğinden keyfi sabit olarak kalırlar.

O halde

$$Y(s) = c_0 \cdot \frac{s-3}{s^2-3s+2} + c_1 \frac{1}{s^2-3s+2} + \frac{1}{(s+1)(s^2-3s+2)}$$

bulunur. Basit kesirlere ayırma metoduyla

$$y(x) = c_0 L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{-1}{s-2}\right\} + c_1 L^{-1}\left\{\frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right\}$$

$$+ L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{6}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{3}}{s-2}\right\}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_0\left(2e^{x} - e^{2x}\right) + c_1\left(-e^{x} + e^{2x}\right) + \left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{3}e^{2x}\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = \left(2c_0 - c_1 - \frac{1}{2}\right)e^{x} + \left(-c_0 + c_1 + \frac{1}{3}\right)e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$$

$$\Rightarrow y(x) = d_0 e^{x} + d_1 e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$$

çözümü bulunur.