$$V - \frac{2V^2}{(1+V)^2} + X' \frac{dV}{dX'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+V)^2}{V(1+V^2)} dV + \frac{dX'}{X'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{V} + \frac{2}{1+V^2}\right) dV + \frac{dX'}{X'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln V + 2 \arctan V + \ln X' = c$$

$$\Rightarrow \quad \ln \frac{Y}{X'} + 2 \arctan \frac{Y}{X'} + \ln X' = c$$

$$\Rightarrow \quad \ln Y + 2 \arctan \frac{Y}{X'} = c$$

$$\Rightarrow \quad \ln (y+2) + 2 \arctan \frac{y+2}{x-1} = c$$ bulunur.

2.5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİF. DENKLEMLER

Bu tip denklemler içinde

$$a(x) \cdot \frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x)$$

şeklindeki lineer dif. denklemler önemli bir yer tutar. Bir I aralığında eğer $a(x) \neq 0$ ise bu denklemin bütün terimleri $a(x)$ ile bölünürse

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \ldots \ldots (2.10)$$

denklemi elde edilir. Burada $P(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ ve $Q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$ dir.

Eğer $Q(x) = 0$ ise $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad \ldots \ldots (2.11)$

olur ve bu denkleme (2.10) denkleminin homojen kısmı denir ve çözümü

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \Rightarrow y = c e^{-\int P(x)dx}$$

olur.

Eğer $Q(x) \neq 0$ ise (2.10) dif. denkleminin genel çözümü

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + c \right] \quad \ldots \quad (2.12)$$

şeklinde olur.

ÖRNEK : $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $P(x) = -2x$ ve $Q(x) = x$ dir.

$$y = e^{\int 2x dx} \cdot \left[\int x \cdot e^{-\int 2x dx} dx + c \right]$$

elde edilir. Buradan

$$y = e^{x^2} \left[\int x e^{-x^2} dx + c \right]$$

$$y = e^{x^2} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \right] = -\frac{1}{2} + c e^{x^2}$$

$\left\{ \text{Not: } \int x e^{-x^2} dx \Rightarrow -x^2 = u \Rightarrow -2x dx = du \Rightarrow x dx = -\frac{du}{2} \right.$

$\left. -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right\}$

ÖRNEK : $y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = \sin x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $P(x) = \frac{1}{x}$ ve $Q(x) = \sin x$ dir.

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \cdot \left[\int \sin x \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} dx + c \right] \qquad e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$y = e^{-\ln x} \left[\int \sin x \cdot e^{\ln x} dx + c \right]$$

$$y = \frac{1}{x} \left[\int x \sin x dx + c \right]$$

$$y = \frac{1}{x} \left(-x\cos x + \sin x + c \right)$$

Not: $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x\, dx}_{dv} = ?$ $\left(\begin{matrix} x = u \\ dx = du \end{matrix}, \begin{matrix} \sin x dx = dv \\ -\cos x = v \end{matrix} \right)$ i $\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$ Kısmi integrasyon

$\int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx$
$= -x\cos x + \sin x$

ÖRNEK : $e^x\left[y-3(e^x+1)^2\right]dx+(e^x+1)\,dy=0$

denklemini çözünüz.

Çözüm : $(e^x+1)\dfrac{dy}{dx}+e^x y-3e^x(e^x+1)^2=0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{e^x}{e^x+1}y=3e^x(e^x+1)$$

denklemine dönüşür. Burada $P(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $Q(x)=3e^x(e^x+1)$.

$$y=e^{-\int\frac{e^x dx}{e^x+1}}\cdot\left[\int 3e^x\cdot(e^x+1)\cdot e^{\int\frac{e^x dx}{e^x+1}}dx+c\right]$$

$$\Rightarrow y=e^{-\ln(e^x+1)}\cdot\left[\int 3e^x(e^x+1)\cdot e^{\ln(e^x+1)}dx+c\right]$$

$$=\frac{1}{e^x+1}\left[3\int e^x(e^x+1)^2dx+c\right]\quad\left\{\begin{array}{l} e^x+1=u\\ e^x dx=du\\ \int e^x(e^x+1)^2dx=\int u^2du\\ \quad=\frac{u^3}{3}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{e^x+1}\cdot\left[(e^x+1)^3+c\right]$$

ÖRNEK : $\dfrac{du}{dx}+2x^2u=2x^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $P(x)=2x^2$, $Q(x)=2x^2$ dır.

$$u=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+c\right]$$

$$\Rightarrow u=e^{-\frac{2}{3}x^3}\left[\int 2x^2\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}dx+c\right]$$

$$\Rightarrow u=e^{-\frac{2}{3}x^3}\left(e^{\frac{2}{3}x^3}+c\right)$$

bulunur.

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{\text{Not}}:\ \int 2x^2e^{\frac{2x^3}{3}}dx=?\qquad \frac{2x^3}{3}=u\Rightarrow 2x^2dx=du\Rightarrow\\ \Rightarrow \int e^u du=e^u+c=e^{\frac{2x^3}{3}}+c.\end{array}\right\}$$

2.6. BERNOULLI DENKLEMİ

Birinci mertebeden bir adi diferensiyel denklem,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^n \cdot Q(x) \quad \ldots \ldots \quad (2.13)$$

şeklinde ise bu dif. denkleme Bernoulli denklemi denir. Bu denklemi çözmek için önce denklemin bütün terimleri y^{-n} ile çarpılırsa

$$y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} + P(x)\, y^{1-n} = Q(x) \quad \ldots \ldots \quad (2.14)$$

elde edilir. $v = y^{1-n}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

bulunur. Bu bağıntı (2.14) 'de yerine yazılırsa

$$\frac{dv}{dx} + A(x) \cdot v = B(x) \quad \ldots \ldots \quad (2.15)$$

denklemi elde edilir. $\{ A(x) = (1-n)P(x)$ ve $B(x) = (1-n)Q(x) \}$

ÖRNEK : $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$ denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM : Verilen denklem Bernoulli dif. denklemidir. $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = -\frac{1}{x}$ ve $n = 2$ dır. Denklem y^{-2} ile çarpılırsa

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y^{-1} = -\frac{1}{x} \quad \ldots \ldots \quad \circledast$$

olur. Burada $\boxed{v = y^{-1}}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

olacağından bu eşitlikten

$$-\frac{dv}{dx} = y^{-2} \frac{dy}{dx}$$

bulunur ki bulunan bu değer $\circledast$ 'da yerine yazılırsa

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = \frac{1}{x}$$

elde edilir.

$$v = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot dx + c \right]$$

$$v = \frac{1}{x} \left[\int dx + c \right] = \frac{1}{x} [x + c]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x} [x + c] \Rightarrow y = \frac{1}{1 + \frac{c}{x}}$$

ÖRNEK : $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = y^3 x^{-2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Denklemi y^{-3} ile çarpalım:

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y^{-2} = x^{-2} \quad \circledast$$

olur. $v = y^{-2}$ dönüşümü yapılırsa $\frac{dv}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$ olacağından

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dv}{dx}$$

ifadesi $\circledast$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} v = x^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} - \frac{4}{x} v = -2x^{-2}$$

$$\Rightarrow v = e^{\int \frac{4}{x} dx} \cdot \left[\int -2x^{-2} e^{-\int \frac{4}{x} dx} dx + c \right]$$

$$= x^4 \left[\int -2x^{-2} \cdot x^{-4} dx + c \right] = x^4 \left[\frac{2}{5} x^{-5} + c \right]$$

$$\Rightarrow v = \frac{2}{5x} + cx^4 \Rightarrow y^{-2} = \left(\frac{2}{5x} + cx^4 \right)$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{2}{5x} + cx^4 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

bulunur.

ÖRNEK : $x\dfrac{dy}{dx}+y=-2x^6y^4$ denklemini çözünüz. (26)

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=-2x^5y^4$ denklemi y^{-4} ile çarpılırsa

$$y^{-4}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-3}=-2x^5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

olur. $v=y^{-3}$ dönüşümü yapılarak $\dfrac{dv}{dx}=-3y^{-4}\dfrac{dy}{dx}$ ifadesi bulunur ve $(*)$ eşitliğinde de bu ifadeler yerine yazılırsa

$$-\frac{1}{3}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=-2x^5$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}-\frac{3}{x}v=6x^5$$

$$\Rightarrow v=e^{\int\frac{3}{x}dx}\left[\int 6x^5 e^{-\int\frac{3}{x}dx}dx+c\right]$$

$$v=x^3\left[\int 6x^5.x^{-3}.dx+c\right]$$

$$v=x^3(2x^3+c)$$

$$y^{-3}=x^3(2x^3+c) \Rightarrow y=\frac{1}{x}(2x^3+c)^{-\frac{1}{3}} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{2x}=xy^{-3}$, $y(1)=2$ başlangıç değer problemini çözünüz

Çözüm $y^3\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{2x}y^4=x$, $v=y^4$, $\dfrac{dv}{dx}=4y^3\dfrac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{2x}v=x \Rightarrow \frac{dv}{dx}+\frac{2}{x}v=4x$$

$$\Rightarrow y^4=x^2+cx^{-2} \text{ bulunur.}$$

$y(1)=2$ olduğundan $x=1$ ve $y=2$ için

$$2^4=1^2+c \Rightarrow c=15 \text{ olup}$$

$$y^4=x^2+15x^{-2}$$

bulunur.

2.7. RICCATI DİFERENSİYEL DENKLEMİ

Tanım : $$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)\cdot y^2 \quad \ldots \qquad (2.16)$$

şeklindeki dif. denkleme Riccati diferansiyel denklemi denir. Bu tür denklemleri analitik olarak çözmek mümkün değildir. Eğer y_1 özel çözümü biliniyorsa genel çözüm

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \quad \ldots \qquad (2.17)$$

bağıntısı yardımıyla çözülür. y_1, (2.16) ile verilen denklemin bir çözümü olduğuna göre

$$y_1' = q_1 + q_2 y_1 + q_3 y_1^2$$

olur. (2.17)'den

$$y' = y_1' - \frac{v'}{v^2} \quad \ldots \qquad (2.18)$$

elde edilir. (2.16) denkleminde (2.17) ve (2.18) bağıntıları yerlerine yazılırsa

$$y_1' - \frac{v'}{v^2} = q_1 + q_2\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + q_3\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\frac{dv}{dx} = -(q_2 + 2q_3 y_1)v - q_3$$

elde edilir ki bu denklem v'ye göre birinci mertebeden lineer dif. denklemdir. Bu denklem ise daha önceki metotlarla çözülebilir.

NOT: Riccati denklemlerinde $y = y_1 + \frac{1}{v}$ dönüşümü yerine bazen $y = y_1 + z$ dönüşümü de yapılabilir.

NOT: Riccati denklemlerindeki y_1 özel çözümü analitik olarak bulunamadığı için genelde deneme-yanılma yöntemiyle tespit edilir.

ÖRNEK : $y' = 1+x^2-2xy+y^2$ denkleminin özel bir çözümü $y_1 = x$ olduğuna göre denklemin genel çözümü nedir? (28)

Çözüm : Bu denklem $q_1 = 1+x^2$, $q_2 = -2x$ ve $q_3 = 1$ şeklinde verilen bir Riccati denklemidir.

$y = y_1 + \frac{1}{v} = x + \frac{1}{v}$ dönüşümü yapılırsa $y' = 1 - \frac{v'}{v^2}$

olur. y ve y' ifadelerini verilen denklemde yerlerine yazarsak

$$1 - \frac{v'}{v^2} = 1 + x^2 - 2x\left(x+\frac{1}{v}\right) + \left(x+\frac{1}{v}\right)^2$$

yazılabilir. Gerekli işlemler ve sadeleşmelerden sonra

$$v' = -1 \Rightarrow v = -x + c \qquad \left\{ y = x+\frac{1}{v} \Rightarrow v = \frac{1}{y-x} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-x} = -x+c$$

$$\Rightarrow y = x + \frac{1}{c-x}$$

bulunur.

ÖRNEK : $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x$ denkleminin özel bir çözümü $y_1 = \sec x$ olduğuna göre denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm : $y = y_1 + \frac{1}{v} = \sec x + \frac{1}{v}$ dönüşümü yapalım. $\left\{ \begin{array}{l} (\sec x)' = \tan x \cdot \sec x \\ (\operatorname{cosec} x)' = -\cot x \cdot \operatorname{cosec} x \end{array} \right\}$

$y' = \tan x \cdot \sec x - \frac{v'}{v^2}$ old. y ve y' ifadeleri denklemde yazılırsa

$$\tan x \cdot \sec x - \frac{v'}{v^2} = 2\tan x \cdot \sec x - \left(\sec x + \frac{1}{v}\right)^2 \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow v' - (2\tan x)v - \sin x = 0$$

lineer dif. denklemi elde edilir.

$$v = e^{\int 2\tan x\,dx} \cdot \left[\int \sin x \cdot e^{-\int 2\tan x\,dx} dx + c \right]$$

$$= e^{-2\ln\cos x} \cdot \left[\sin x \cdot e^{2\ln\cos x} dx + c \right]$$

$$v = \frac{1}{\cos^2 x}\left[\int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx + c\right]$$

$$v = \frac{1}{\cos^2 x}\left[-\frac{\cos^3 x}{3} + c\right] = \frac{c_1 - \cos^3 x}{3\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad y = \sec x + \frac{3\cos^2 x}{c_1 - \cos^3 x}$$

ÖRNEK : $y' + y^2 + \frac{1}{x} y - \frac{4}{x^2} = 0$ denkleminin özel bir çözümü $y_1 = \frac{2}{x}$ ile verilmiştir. Denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm : $y = y_1 + \frac{1}{v} = \frac{2}{x} + \frac{1}{v}$ dön. yapılırsa $y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{v'}{v^2}$ olur.

Bu ifadeler verilen denklemde yerine yazılırsa

$$\left(-\frac{2}{x^2} - \frac{v'}{v^2}\right) + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{v}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{v}\right) - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v' - \frac{5}{x} v = -1 \quad \text{lineer dif. denklemi bulunur.}$$

$$\Rightarrow \quad v = e^{\int \frac{5}{x} dx}\left[\int (-1) \cdot e^{-\int \frac{5}{x} dx} dx + C\right]$$

$$= e^{5\ln x}\left[\int - e^{-5\ln x} dx + c\right]$$

$$= x^5 \left[\int - x^{-5} dx + c\right]$$

$$= x^5 \left[-\frac{x^{-4}}{-4} + c\right]$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{x}{4} + c x^5$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 4cx^5}$$

genel çözümü bulunur.

NOT : Bazen $y = y_1 + \frac{1}{v}$ dönüşümü yerine $y = y_1 + z$ dönüşümü de yapılabilir.

ÖRNEK : $y' + xy^2 - y = \frac{1}{x^2}$ denkleminin özel bir çözümü $y_1 = \frac{1}{x}$ olduğuna göre denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm : $y = y_1 + z = \frac{1}{x} + z$ dön. yapılırsa $y' = -\frac{1}{x^2} + z'$ olur.

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{x^2} + z'\right) + x\left(\frac{1}{x} + z\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + z\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow z' + z = -xz^2$$ Bernoulli denklemi bulunur.

Her iki taraf z^{-2} ile çarpılırsa

$$z^{-2}.z' + z^{-1} = -x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

olur. $v = z^{-1}$ dönüşümü yapılırsa $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx} = -1.z^{-2}.\frac{dz}{dx}$ olur ki (*) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{dv}{dx} - v = x$$ lineer denklemi bulunur.

$$\Rightarrow v = e^{\int 1.dx}\left[\int x e^{-\int dx} dx + c\right]$$

$$= e^x\left[\int x e^{-x} dx + c\right]$$

$$= e^x\left[-xe^{-x} - e^{-x} + c\right]$$

$$\Rightarrow v = -x - 1 + ce^x$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{v} = \frac{1}{-x-1+ce^x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x} + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{-x-1+ce^x}$$

genel çözümü bulunur.