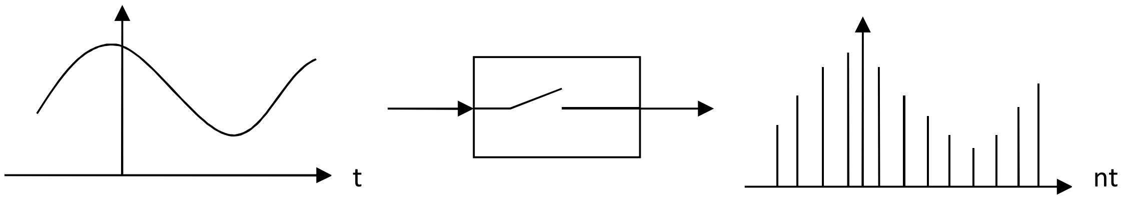
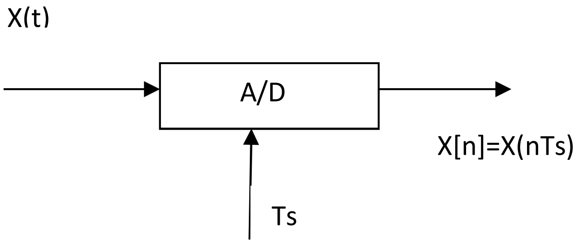
A. Sürekli-ayrık ve ayrık-sürekli işaret çevrimi
1. Örnekleme

Şekil -1 ‘de sürekli zaman işaretinin örneklenişi bir anahtarlama ile gösterilmiştir.

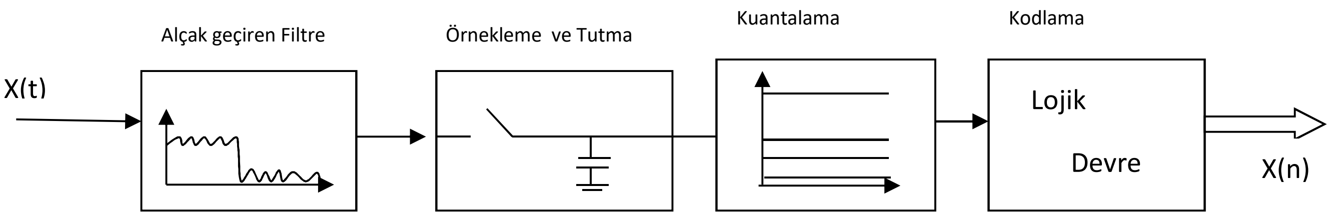


Bir örnekleme devresi x(t) sürekli zaman işaretini, ayrık-zaman dizisine $x[n] = x(nT_s),\ T_s$ zaman birimindeki X(t) işaretinden değerler alarak kaydeder. Eğer Ts saniye cinsinden ise, örnekleme frekansı $f_s = \frac{1}{T_s} hz$ veya $\omega_s = \frac{2\pi}{T} rad/sn$'dir. Bu durum blok diyagram olarak şöyle verilebilir.



Burada asıl soru; işaretin uygun şekilde ayrıklaştırılabilmesi için Ts zamanının en fazla ne kadar alabileceği ya da başka bir değişle Fs frekans en az ne kadar olmalı. Bu sorunun cevabı doğrudan işaretin frekans bileşenleri ile bağlantılıdır. Bir ayrık işaret kuantalama ile sayısal bir işarete çevrilir. Sayısal bir işaret ancak 2^B gibi bir değer olabilir.

Sayısal bir işaret elde edilmesi prensip blok şeması aşağıdaki şekildeki gibidir.



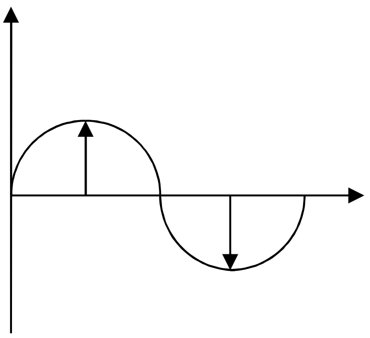
Eğer bir işaretin en yüksek frekans bileşeni Fm ise, işaret en az 2xFm frekansında örneklenmeli ki işaret tamamen tanımlanabilmiş olsun.

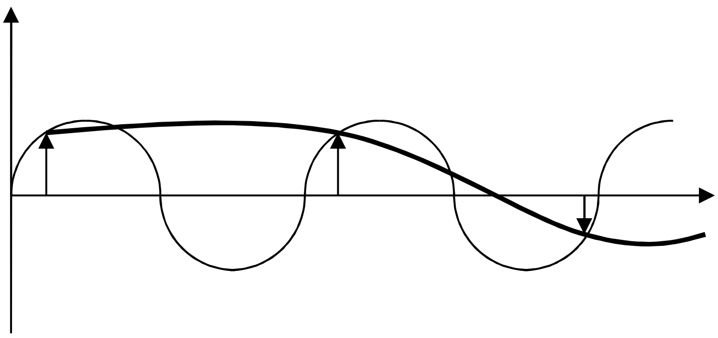
Yani;

Fs $\geq$ 2 Fm olmalıdır.

Bu tanım örnekleme teoremi olarak bilinir.

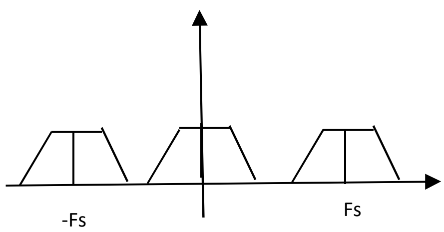
Eğer işaret sinüs gibi temel bir işaret ise bu şöylece açıklanabilir. Her alternansta bir değer olmak üzere bir periyot boyunca en az iki değer alınmalı.

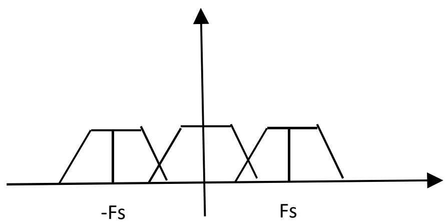




Örtüşme yok örtüşme var

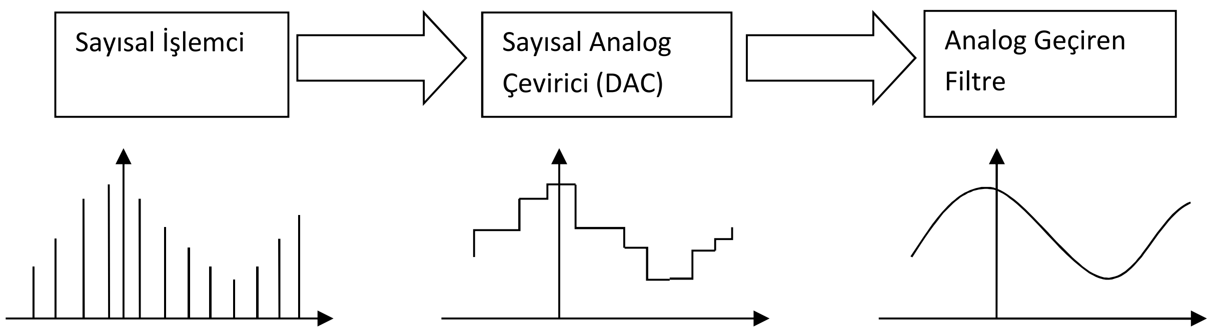
Zaman Bölgesi





2. Analog işaret oluşturma

Sayısal bir işareti, analog sürekli zaman işaretine çevrilmesi blok diagram olarak şöyle verilebilir



3. Ayrık işaretler

Bir ayrık işaret N uzunluklu bir diziye işaret eder.

Sonlu uzunlukta bir dizi sıfır olan değerler ile genişletilebilir. Bir ayrık işaret birim vuruş işareti ve kaydırılmışı ile ifade edilir.

F[n].δ[n-n0]= f[n0].δ[n-n0] = $f(x) = \begin{cases} f[n0], & h = n0 \\ 0 \quad , & n \neq n0 \end{cases}$

Bir ayrık işaret f fonksiyonundan faydalanarak bir toplam olarak;

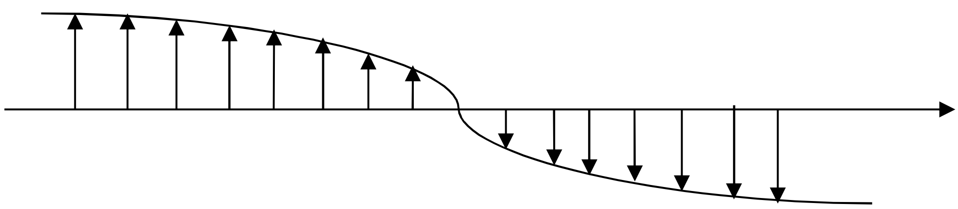
$\sum_{n=a}^{b} f[n]\delta[n-n0]$ = $\sum_{n=a}^{b} f[no]\delta[n-n0] = f[n0]$ a<n0 , b> n0

Δ fonksiyonunun kayma özelliğinden faydalanarak bir ayrık işaret birim vuruşlar cinsinden şöyle yazılabilir.

X[n]= ... + X[-1] δ[n+1] + X[0] δ[n] + X[1] δ[n-1] + ...

= $\sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]\delta[\mathrm{n}-\mathrm{m}]$

Bu özellik bir sistemin birim vuruş cevabını tanımlama için kullanılmaktadır. Birim vuruş olarak bir işaret;



Bir üstsel X[n]= A $\propto^{n}$ ' dizisinde $\propto = e^{(\sigma_0+jW_0)}$ ve A = |A| $e^{J\varphi}$
Olarak alınırsa bu durumda ayrık dizi şöyle ifade edilebilir.
X[n] = |A|$e^{J\varphi}.e^{(\sigma_0+jW_0)n} = X_{re}[n] + JX_{im}[n]$

Olarak verilebilir.

$X_{re}[n] = |A|e^{J_0 n}.\cos(\omega_0 n+\varphi)$

$X_{im}[n] = |A|e^{J_0 n}.\sin(\omega_0 n+\varphi)$ olur.

$J_0 = 0$ için sinüzoidal diziler elde edilir.

İşaret işlemede üstsel işaretin şu özel hali temel işaret olarak kullanılır.

$$X[n] = A.e^{J\omega_0 n} = A\,(\cos[\omega_0 n] + i\sin[\omega_0 n])$$

Bir sinüzoidal A.cos($\omega_0 n+\varphi$) dizisi, eğer

$\omega_0 n = 2\pi r$ şartını sağlayan bir N sayısı varsa periyodiktir.

Şöyle ki;

$X_1[n] = \cos(\omega_0 n+\varphi)$ $X_2[n] = \cos(\omega_0[n+N]+\varphi)$

$$X_2[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)\cos(\omega_0 N) - \sin(\omega_0 + \varphi)\sin(\omega_0 N)$$

$= \cos(\omega_0 n + \varphi) = X_1[n]$ sadece ve sadece $\sin(\omega_0 N) = 0$ ve $\cos(\omega_0 N) = 1$ ise sağlanır.

Bu durum ancak $\omega_0 N = 2\pi r$ veya $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{r}$ oluşur.

Bütün sürekli zaman sinüsleri periyodik iken, bütün ayrık sinüsler periyodik değildir.

$$X[n] = 3\cos\left(5n + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$X[n] = 5\sin\left(3\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$X[n] = 5\sin\left(\sqrt{3}\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$$

Zaman ayrklaştrldığında frekans radyan olarak bütünüyle örnekleme frekansna bağlıdır.

$$Y(t) = A\sin(\Omega t - \varphi)$$

$$Y_s(nT_s) = A\ \sin(\Omega n T_s - \varphi)$$

$$W = \Omega T_s = \frac{2\pi\Omega}{\Omega_s} \quad \rightarrow \quad f = \frac{F}{F_s}$$

B. Ayrık-zaman Sistemleri

Bir ayrık-zaman sistemi girişine verilen işareti yapısının özellikleri ile değiştirerek çıkışa sunar. Böyle bir sistem şu denklem ile gösterilebilir;

$$y = T(u)$$

Çıkışın k'inci değeri;
$y(k) = \big(T(u)\big)(k)$ 'dır.

Eğer x ve y işaret ve a ve b sabit ise bu durumda $ax + by$ şöyle verilebilir;

$$(ax + by)(k) = ax(k) + \ by(k)$$

T sistemi bütün x, y işaretleri ve a,b sabitleri için doğrusal ise;
$T(ax + by) = a\,T(x) + b\,T(y)$ olur.

Eğer sistem doğrusal ise, girişlerin doğrusal kombinasyonu çıkışta yine doğrusal olarak oluşturur. Özel bir durum olarak, girişlerin ayrı ayrı girilmesinde oluşacak çıkış topluca girilmesi durumunda oluşacak durum ile aynı olacak ve bir girişin sabit bir büyüklük ile çarpımı yine çıkışa sabit bir çarpım olarak yansıyacaktır.

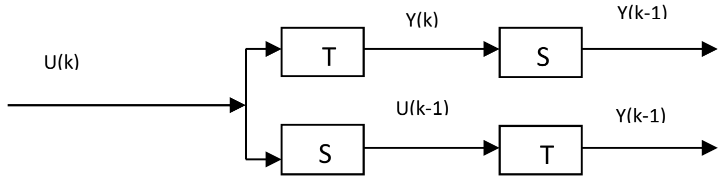
Böylece doğrusal bir sisteme, şu anki ve geçmiş iki giriş girilmesi şöyle ifade edilebilir;

$$y(k) = u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$

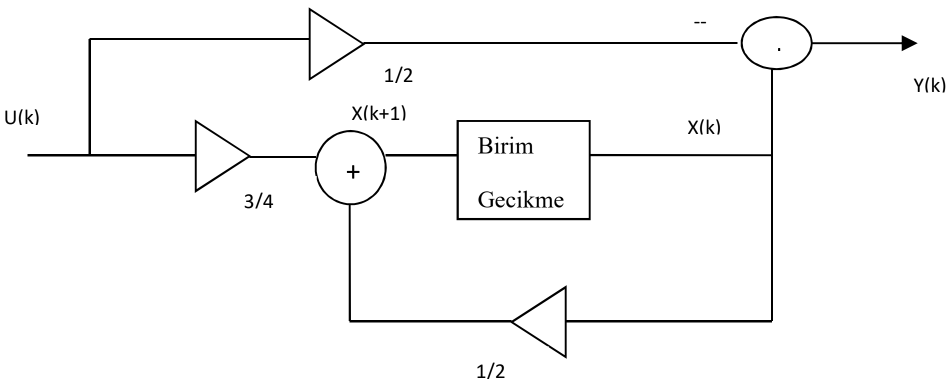
Eğer sistem kayma bağmsız ise; sisteme kaydırılmışın girilmesi ile çıkışın kaydırılması aynı sonucu doğurmalıdır. Yani;

$T(S(u)) = S(T(u))$ veya $T(S^m(u)) = S^m(T(u))$

Bu özellik blok olarak şöyle verilebilir;



Bir doğrusal, kayma-bağımsız ayrık zaman sistemin temel elemanları toplama, çkarma ve saklama (birim-gecikme) elemanlarıdır.sonlu sayıda eleman içeren bir sistem, sonlu dizedir. Bütün pratik sistemler sonlu dizedir. Sayısal bir filtre bu elemanlardan oluşan bir sonlu dizedir. İdeal bir filtre sonsuz sayda eleman içerir. Aşağıdaki şekilde bir sayısal filtrenin üç biçimde tanımlanması verilmiştir.

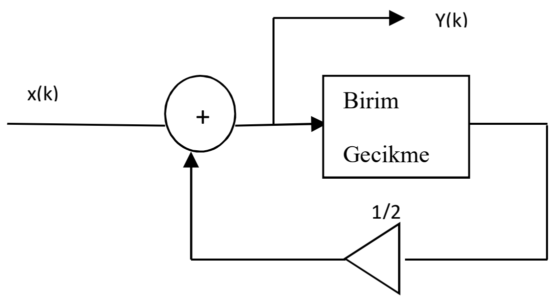


2.Doğrusal Kayma-Bağımsız Sistemler (LSI) lineer Shift Invoriont

2.1 Birim Darbe Cevabı

LSI sistemleri karakterize eden belirgin giriş dizisi birim darbedir. Bir sistemi tamamlayan birim darbe cevabı h, giriş işareti u=δ olduğu zamanki filtre çıkışıdır. Yani ,

h=T(δ) şeklindeki gibi bir sayısal filtremiz olsun;



Çıkış denklemi sağlar;

y(k)=x(k) + (1/y) *y(k-1) k=≥0

Eğer x=δ alınırsa y=h sistemin birim darbe cevabı alınır;

h(k)= δ(k) + ½ h(k-1) ,k≥0

doğrudan hesaplama ile h(k) bulunabilir;

h(0)= δ(0)+ ½ h(-1) =1 başlangıçta birim gecikme bilgi içermiyor

h(1) = δ(1)+ ½ h(0) = ½ h(-1)=0

h(2) = δ(2)+ ½ h(1) = ¼

$$\vdots$$

h(k) = $(\frac{1}{2})^k$

Bu sistemin birim darbe cevabı kapalı formda

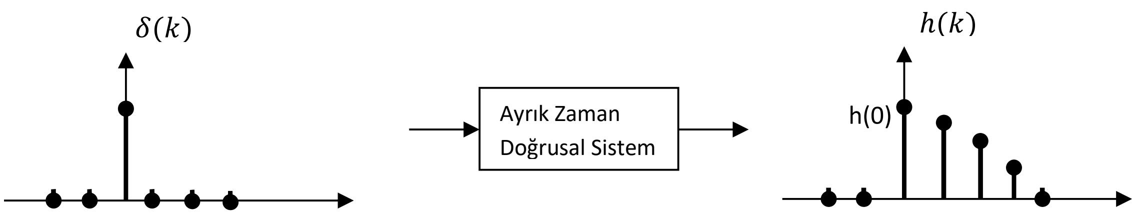
h(k)= $\begin{cases} (\frac{1}{2})^k & ,\mathrm{k} \geq 0 \\ 0 & ,k < 0 \end{cases}$

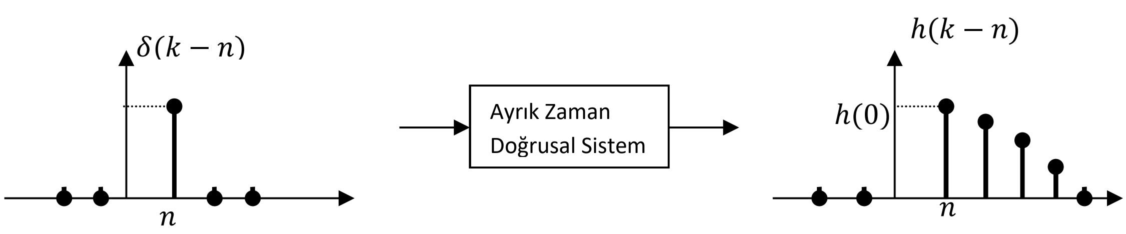
2.2 Katlama ve Birim Darbe Cevabı Dizisi

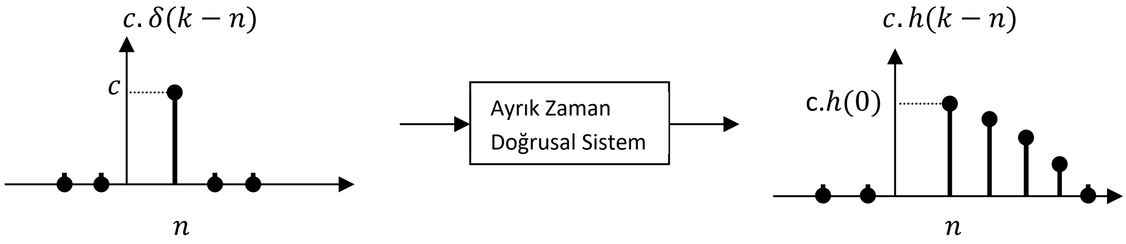
Herhangi bir u ayrık dizisi,birim darbe dizisinin her bir elemanının uygun u değerleri ile çarpımı ve kaydırılmış olarak verebilir. Yani ;

$$u(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \ \delta[k-m]$$

Eğer sistemimiz ,doğrusal ve kaymadan bağımsız ise;sistemin girişi δ birim darbe olması durumunda çıkışta elde edilecek işaret sistemi karakterize eden h dizisi olacaktır.







Herhangi bir U işareti, birim darbe δ cinsinden ifade edebildiğimizden , u işaretinin bir sisteme girilmesi durumunda çıkış işareti U ve h’ nin bir doğrusal konvülasyonu olacaktır.

$$u(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\ \delta[k-m]$$

Bu işlem katlama (convolution) olarak tanımlanır.

Kaymadan bağımsız, ayrık bir sistemin çıkışı, girişine uygulanan işaret (u) ile sistemin birim cevabı (h) nın katlamasıdır.

$$u(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\ h[n-m]$$

$$u(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\ x[n-m]$$

=x[h] *h[n]

Katlamanın yer değiştirme ve değişme özelliği vardır.

u*h=h*u

g*(u*h)=(g*u)*h

2.3 FIR filtre Cevabı ve Katlama

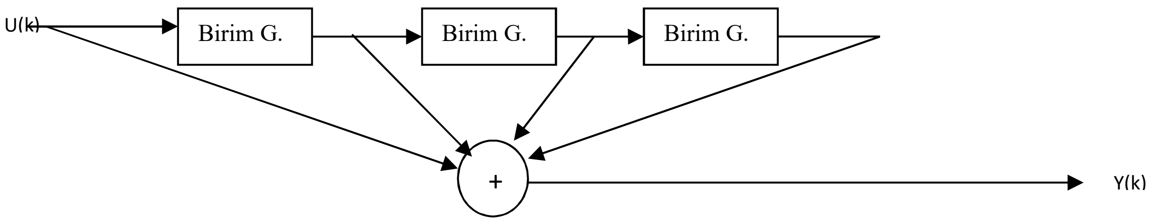
Bir filtrenin birim darbe cevabı dizisi h,sonlu sayıda sıfırdan farklı değer içeriyorsa sonlu birim darbe cevaplı (finite impulse respance, FIR)filtre olarak adlandırılır.

Birim darbe cevabı;

h(k) $\begin{cases} h[1] * h[2] * h[3]\ ; \quad 0 < k < 3 \end{cases}$ olsun

$$\mathrm{y[k]} = \mathrm{u\ [k]} * \mathrm{h[k]} = \sum_{l=k-3}^{k} u[l]\ h[k-1]\ 'dir.$$

Böylesi bir filtrenin blok diyagramı şöyle verilebilir;



Giriş dizisi : …………u[-3]   u[-2] u[-1] ……………u[2]   u[3] …………

İse Birim-darbe cevabı   h[3] h[2] h[1] h[0] → ise

Çıkış   k=1 :   y[1]= h[0] u[1]+ h[1] u[0]+h[2]u[-1] +h[3] u[-2] dir.

Pratik olarak bir katlama işlemi şöyle gerçekleşir.

Y[k]=u[k] *h[k] işleminde h işareti ters çevrilip

1. - ∞ 'den yani en soldan u[k] işaretinin başladığı değere yaklaştırılır.
2. Çakışma başladığın anda değerler oluşmaya başlar.

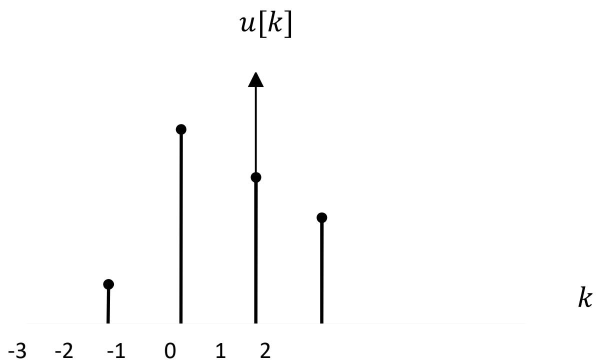
O andaki değer üst üste çakışan u[k] ve h[k] değerlerimin çarpılıp toplanması ile oluşur.

3. 2 'deki işlem t_s işareti, u işaretini geçip terk edinceye kadar devam eder.
4. Bir filtre sınırlı sayıda girişe sınırlı sayıda çıkış veriyorsa filtre BIBO (bounded Input bounded output)   karalı kabul edilir.

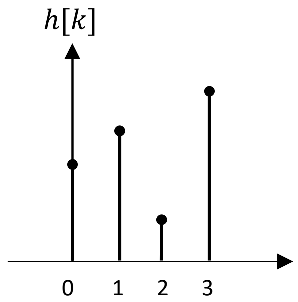
Doğrusal, kayma –bağımsız bir filtre birim darbe cevabı dizisi ile karakterize edildiğinden,BIBO karalılığı tamamen h'ya bağlıdır.

Örnek:

$$u[k] = 1\delta(k+2) + 4\delta(k+1) + 3\delta(k) + 2\delta(k-1)$$



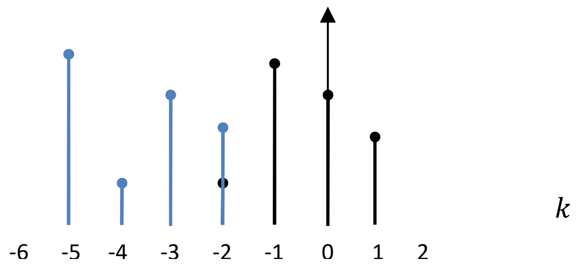
$$h[k] = 2\delta(k) + 3\delta(k-1) + \delta(k-2) + 4\delta(k-3)$$



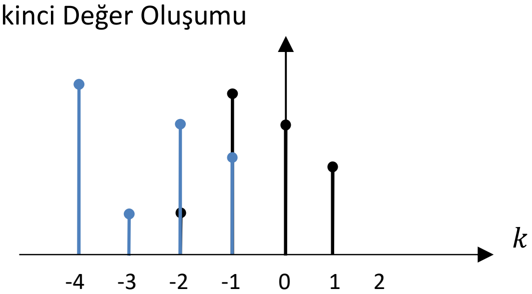
Katlama işlemi:

$$y[k] = u[k] * h[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m].\,h[k-m]$$

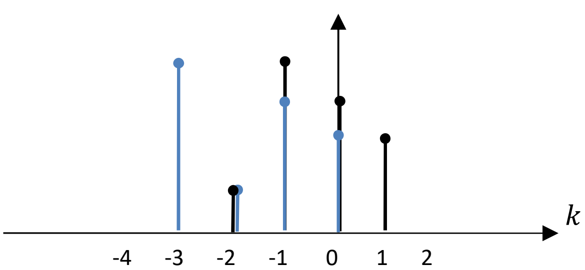
1. İlk Deşer Oluşumu:



2. İkinci Değer Oluşumu



3. Üçüncü Değer Oluşumu



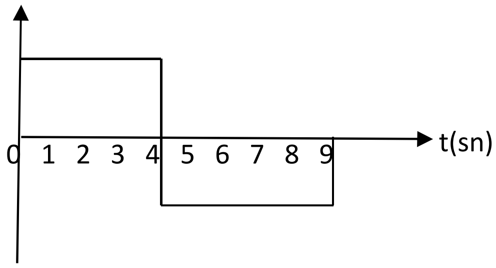
$$y[k] = 2\delta[k+2] + 11\delta[k+1] + 19\delta[k] + 21\delta[k-1] + 25\delta[k-3] + 14\delta[k-4] + 8\delta[k-5]$$

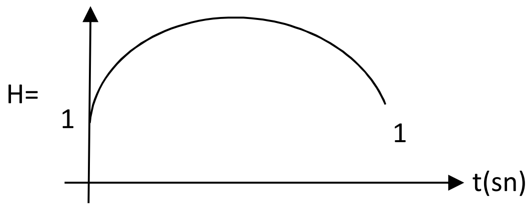
Örn:

Giriş işareti x= [1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1] ;

f_s =100 Hz => t_0 =0.01 h= [1 2.2 2.5 2.2 1]

Y=[1 3.2 5.7 7.9 8.9 6.9 2.5 -2.5 -6.9 -8.9 -7.9 -5.7 -1.0 0 0 0 0 0]





X(k)=δ(0)+δ(k-1)+δ(k-2)+δ(k-3)+δ(k-4)-δ(k-5)-δ(k-6)-δ(k-7)-δ(k-8)- δ(k-9)

$$y(k) = x(k) * h(k) = \sum_{l=0}^{\infty} x(l).h(k-l)$$

$y(1)$ =1*1 = 1

$y(2)$ =1*1+1*2.2 =3.2

$y(3)$ =1*1+1*2.2 +1* 2.5 =5.7

$y(4)$ =1*1+1*2.2 +1* 2.5 + 1*2.2 = 7.9

$y(5)$ =1*1+1*2.2 +1* 2.5 + 1*2.2 +1*1 =8.9

$y(6) = -$1*1+1*2.2 +1* 2.5 + 1*2.2 +1*1 =6.9

$y(7) = -$1*1 -1*2.2 +1* 2.5 + 1*2.2 +1*1 =2.5

$y(8) = -$1*1 -1*2.2 -1* 2.5 + 1*2.2 +1*1 =-2.5

$y(9) = -$1*1 -1*2.2 -1* 2.5 - 1*2.2 +1*1 =-6.9

$y(10) = -$1*1 -1*2.2 -1* 2.5 - 1*2.2 -1*1 =-8.9

$y(11)$ =0*1 -1*2.2 -1* 2.5 - 1*2.2 -1*1 =-7.9

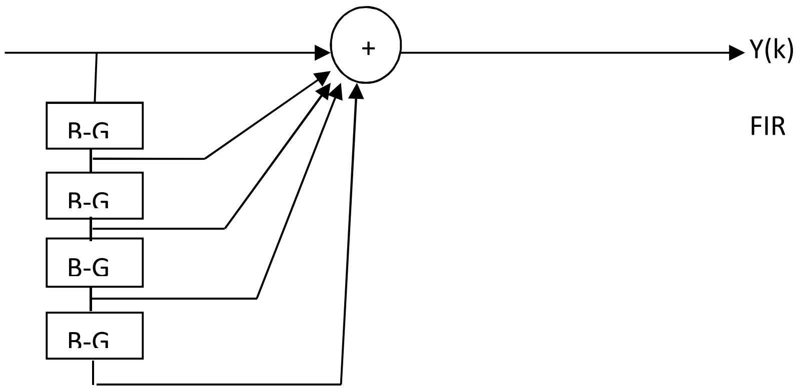
$y(12)$ =0*1 -1*2.2 -1* 2.5 - 1*2.2 -1*1 =-6.7

$y(13)$ =0*1 +0*2.2 + 0*2.5 -1*2.2 - 1*1 =-3.2

$y(14)$ =0*1 +0*2.2 + 0*2.5 -0*2.2 - 1*1 =-1

$y(15)$ =0*1 +0*2.2 + 0*2.5 -0*2.2 - 0*1 =0

Sistemin h(k) donanımsal biçimi şöyledir ;



FIR yapı

Frekans cevap fonksiyonu

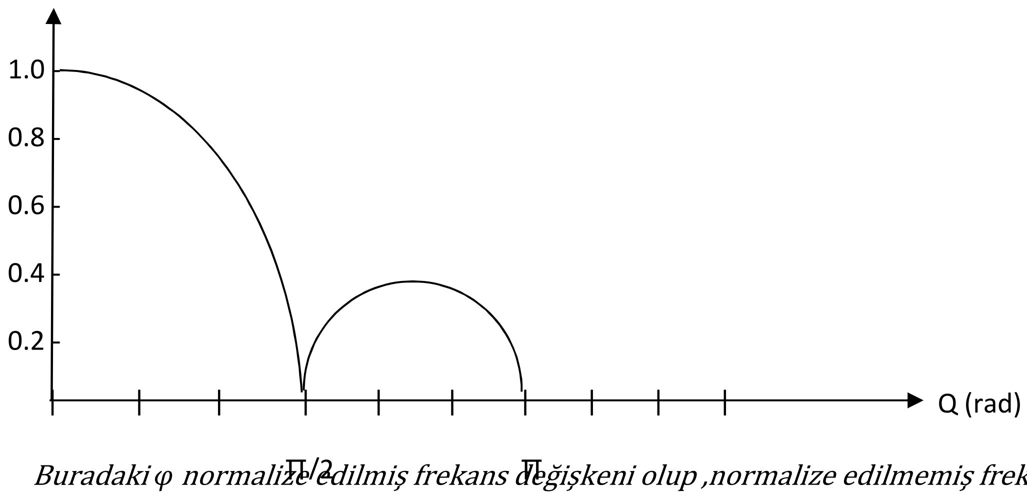
$$H(e^{j\varphi}) = \sum_{k=0}^{3} h(k).\, e^{-jk\varphi}$$

$h(k) \begin{cases} \frac{1}{4} & k = 0, 1{,}23 \\ \textit{diğer durumlar} \end{cases}$ $\quad$ *olduğunu farz edelim*

Bu durumlarda böylesi bir filtrenin frekans cevabı;

$$H(e^{j\varphi}) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{-jk\varphi} = \frac{e^{-j3\varphi/2}}{2}[\cos\frac{\varphi}{2} + (\cos\frac{3}{2}\varphi)]$$

Bu filtrenin genlik cevabı $|H(e^{j\varphi})|$ *şekildeki gibidir.*



Buradaki φ *normalize edilmiş frekans değişkeni olup ,normalize edilmemiş frekans (ω ve f) ile ilişkilidir.*

$$\varphi = \omega.t_{0=2\pi f t_0} \quad ,t_0=\frac{1}{f_s}$$

$$\varphi = \omega.t_{0=2\pi f/f_s}$$

Buradaki örnekleme zamanı t_0*, gerçek frekans* ölç*ekler*.

Normalize ve gerçek frekans aralığı şöyledir.

$-\pi \leq \varphi \leq \pi$ *radyan /örnek*

-$\pi/t_0 \leq \omega \leq \pi/t_0$ *radyan/saniye* $\frac{1}{2t_0} \leq f \leq \frac{1}{2t_0}$ *(hertz) veya* $-\frac{F_s}{2} \leq f \leq \frac{F_s}{2}, F_s = \frac{1}{t_0}$

3. Frekans cevap fonksiyonu

Doğrusal, kayma-bağımsızbir sistemin girişi ve çıkışı arasndaki ilişkiyi katlama toplamı olarak tanımlamada birim-darbe dizisi gibi,karmaşık üstsel dizi $\{ e^{JK\varphi}\}$ 'da giriş-çıkış ilişkisini tanımalamada önemli bir rol oynar. Bir doğrusal, kayma-bağımsız sistemin girişinin $u(k) = e^{JK\varphi}$ olması durumunda sistemin sürekli-durum çıkışını göz önüne alalım;

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l).u(k-l)$$

Eğer $u(k) = e^{JK\varphi}$ ise;

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l).e^{J(k-l)\varphi} = e^{JK\varphi}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m).e^{-Jm\varphi}\right]$$

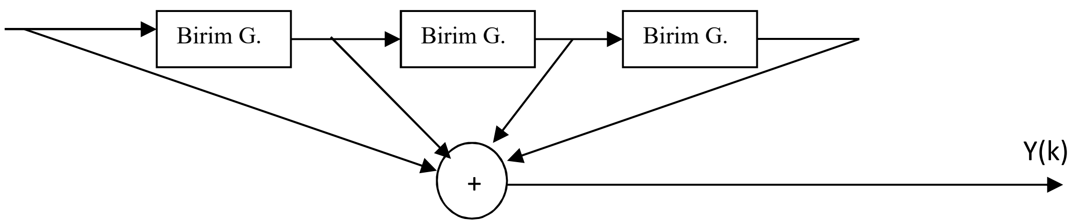
$$y(k) = u(k) * h(k)$$

$$H(e^{J\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k.e^{-JK\varphi})$$

Burada φ bir karmaşık fonksiyon olarak filtrenin frekans cevap fonksiyonudur. $H(e^{J\varphi})$ ise h dizisinin ayrık-zaman fourier dönüşümüdür. (discrete-Time Fourier Transform, DTFT)

Örnek: Bir filtrenin frekans cevap fonksiyonu;

$$y(k) = h(0)u(k) + h(1)u(k-1) + h(2)u(k-2) + h(3)u(k-3)$$



Bir FIR Filtre

Bütün sayısal filtreler periyodik frekans cevabına sahiptir. Eğer bir alçak geçiren filtre tasarlanrsa, filtre $[{}^{-1}/_{2}\, t_0,\ {}^{1}/_{2}\, t_0]$ aralığında filtreler.

$e^{J\varphi}$, karmaşık z değişkeni olarak kabul edilirse, frekans cevabı şöyle olur;

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Z^{-k}$$

H(z), transfer fonksiyonu olarak adlandırılır.

Bu dönüşümün önemli bir özelliği katlama alındığında açığa çıkar;

$$y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(k).Z^{-k}$$

Ve

$y(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m).u(k-m)$ ise;

$$y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m).u(k-m).(Z^{m}.Z^{-k})$$

$$y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m).Z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k-m).(Z^{-(k-m)})$$

$$= H(z).u(z)$$

Bu durumda bir sistemin çıkışının ayrık-zaman fourier dönüşümü (DTFT);

$$y(e^{J\varphi}) = y(z)|_{z=e^{J\varphi}} = H(e^{J\varphi}).u(e^{J\varphi})$$

Örnek: bir saysal filtrenin transfer fonksiyonunun bulunması normalde H(z) veya H($e^{J\varphi}$) ‘nin birim-darbe cevabı kullanılarak bulunması zordur. Daha kolay bir metod olarak, u(k)= Z^{k} olarak hesaplamaktır. Daha önce de görüldüğü gibi doğrusal- kayma-bağmsız bir sistemin çıkışı $Z^{k}H(z)$ ‘dır. ($Z = e^{J\varphi}$ ‘yi işaret edebilir.)

Örneğin sistemin zaman bilgisi denklemi şöyle olsun;

$$X(k+1) = \frac{1}{2}x(k) + \frac{3}{4}u(k)$$

$y(k) = x(k) - \frac{1}{2}u(k)$ ise

$u(k) = Z^{k}$ alınsa $X(k) = Z^{k}.X(z)$ ve $y(k) = Z^{k}H(z)$’dır.

$$X(z)Z^{k+1} = \frac{1}{2}X(z).Z^{k} + \frac{3}{4}Z^{k}$$

$$Y(z) = H(z) = X(z) - \frac{1}{2}Z^{k}$$

Z^{-k} ile payla payda çarpılıp düzenlenirse;

$X(z) = \frac{\frac{3}{4}}{Z-\frac{1}{2}}$ ve $H(z) = \frac{1-\frac{Z}{2}}{Z-\frac{1}{2}}$

Elde edilir. Sistemin genlik cevabı $|H(e^{J\varphi})|$ ve faz cevabı $faz\big(H(e^{J\varphi})\big)$ $, Z = e^{J\varphi}$ alınarak elde edilebilir.

4. Standart Fark Denklemleri:

Birçok uygulamada H(z), Z' e bağlı oransal olarak verilir. İki polinom şeklinde şöyle verilebilir;

$$H(z) = \frac{\hat{b}(z)}{\hat{a}(z)} = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \ \dots \ + \ b_n Z^{-n}}{1 + a_1 Z^{-1} + \ \dots + a_n Z^{-n}}$$

Burada n filtrenin derecesi olarak isimlendirilir. Pay ve paydan derecesinin ayrı olması zorunluluğu yoktur.

Eğer H(z) bir filtrenin çıkışı ise;

$H(z) = \frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{\hat{b}(z)}{\hat{a}(z)}$ yazılabilir.

İçler-dışlar çarpımı yapılırsa;

$y(z)\hat{a}(z) = u(z)\hat{b}(z)$ olur.

Z dönüşümündeki çarpım-zaman bölgesinde katlamaya eşdeğer olduğundan

$$y * \hat{a} = u * \hat{b}$$

Ve

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \ \dots \ + \ a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ \dots + b_n u(k-n)$$

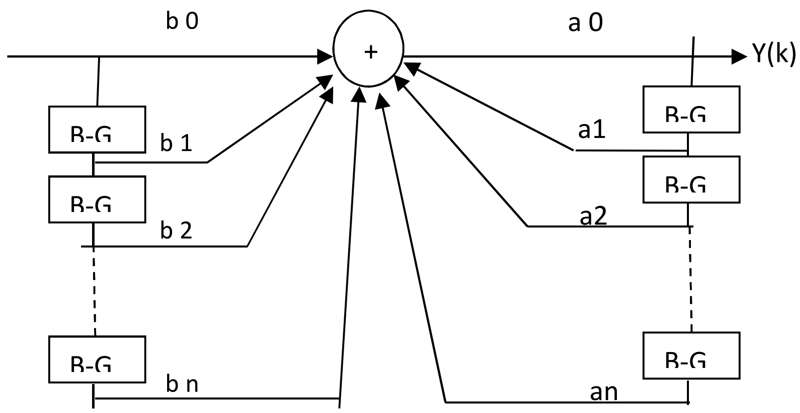
Yazılabilir.

Bu eşitlik standart fark denklemi (SFD) olarak bilinir.

SFD, giriş u ve çıkış y'nın fonksiyonu olup sonlu sayıda terim içerir. $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ katsayıları kullanarak, bu denklem sayesinde doğrudan hesaplama yapılır.(Matlabta FILTER komutu). Toplam olarak;

$$\sum_{n=0}^{n} a; y(k-i) = \sum_{i=0}^{n} b; u(k-i), \qquad a_0 = 1, \ \ k \geq 0$$

SFD yapısındaki bir filtre şöyle verilebilir;



Standart fark denkleminde;

a_0 $hariç$ $diğer$ a_1 katsayıları negatif işaretli olmalıdır.

$$a_i < 0, \quad i > 0$$

4 bölüm

Z - Dönüşümü

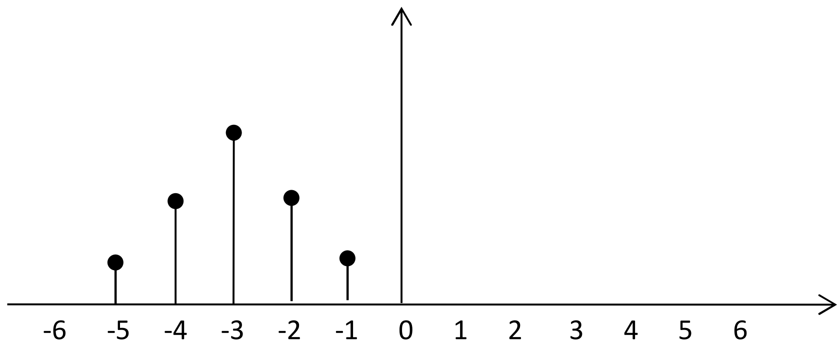
Bir f dizisinin z dönüşümü şöyle tanımlanır;

$$F(z) = z\{f\} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

Sonuçta oluşan f(z) döngüsünde z'li terimlerden oluşan bir kümedir. Eğer sistem donanımsal ise toplam k=0'dan başlayacaktır.

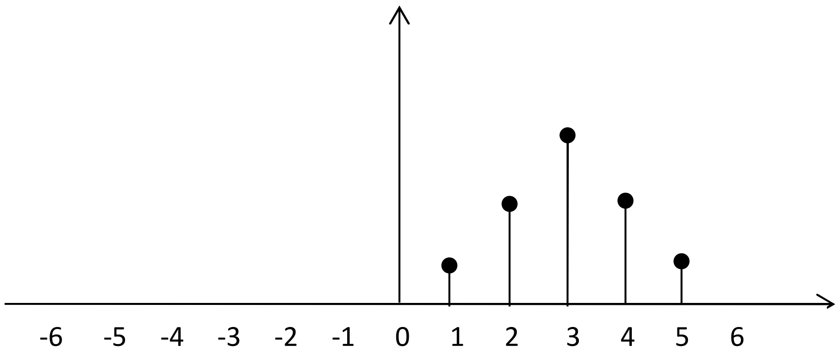
<u>örnek :</u>

Ayrık $x_1(k) = \delta(k+5) + 3\delta(k+4) + 5\delta(k+3) + 2\delta(k+2) + \delta(k+1) + \delta(k)$



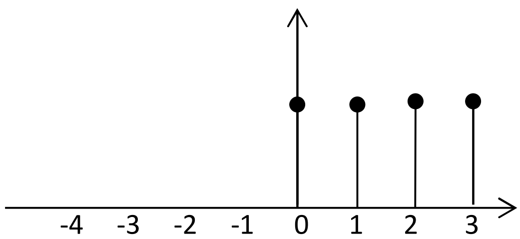
$$x_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = z^5 + 3z^4 + 5z^3 + 3z^2 + z$$

$$x_2(k) = \delta(k-5) + 3\delta(k-4) + 5\delta(k-3) + 2\delta(k-2) + \delta(k-1) + \delta(k)$$



$$x_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 3z^{-4} + z^{-5}$$

$$x_3(k) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2) + \delta(k-3)$$



$$x_3(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \ldots \ldots$$

Z – dönüşümünde z karmaşık değişkendir.(Laplace dönüşümündeki gibi)

DTFT , z dönüşümünde $z = e^{j\omega}$ alınması durumunda oluşan özel durumdur(laplace dönüşümünde s=jΩ alınması gibi)

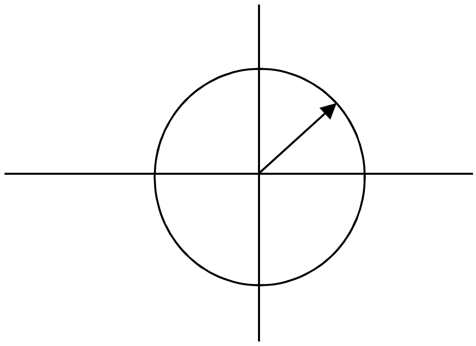
Z dönüşümü karmaşık düzlemde, her yerde yakınsak değildir. Burada yakınsaklıktan kasıt toplamın sonlu olmasıdır. Dönüşüm,bulunurken, yakınsak olduğu bölge ile beraber belirtilmelidir ki tek bir zaman dizisi elde edilebilir.

X[Z]=δ[n] z^{-1} ise

$$1) \qquad x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-1} = 1$$

2) x[n]= birim basamak ise x[z]=$\frac{z}{z-1}$

ROC $|z^{-1}|$< 1 veya |z|> 1 ‘dir.



X ile gösterilen nokta faydanın sıfır, fonksiyonun sonsuz olduğu değerdir. Kutup olarak isimlendirilir.

O ile gösterilen nokta,payın sıfır,fonksiyonunda sıfır olduğu değerdir.

ROC tanımlaması önemlidir. Aksi halde iki farklı zaman dizisi için ayrı z dönüşümü elde edilebilir.

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \propto^k, & k \geq 0 \end{cases} \qquad y(k) = \begin{cases} -\propto^k, & k < 0 \\ 0, & k \geq 0 \end{cases}$$

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \propto^k \; z^{-k} = \frac{1}{1-\propto z^{-1}}, |z| > | \propto |$$

$$x(z) = \sum_{-\infty}^{-1} [-\propto^k \; z^{-k}] = \frac{1}{1-\propto z^{-1}}, |z| < | \propto |$$

Z dönüşüm özellikleri

1) Sonlu uzunluktaki nokta dizisinin z dönüşümü z=0 hariç yakınsaktır.
2) Sonsuz uzunluktaki nedensel dizisinin yakınsaklık bölgesi ,en büyük kutbun belirlendiği çemberin dışındaki her yerdir.
3) Kararlı nedensel bir sistemin ROC’u her zaman için birim radyan dairesi ile sınırlıdır. Bu sistemin bir frekans cevabının olması için önemlidir.

Z dönüşümünün temel diziler için kapalı formda şöyledir.

(Bu özellikler ters Z dönüşüm için kolaylık sağlar.)

Sıra no	Ayrık zaman Dizisi	Z dönüşümü	ROC
1	k $\delta(n)$	k	her yer
2	k	$\frac{kz}{z-1}$	$\lvert Z\rvert>1$
3	kn	$\frac{kz}{(z-1)^2}$	$\lvert Z\rvert>1$
4	kn^2	$\frac{kz(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert Z\rvert>1$
5	$ke^{-\infty n}$	$\frac{kz}{z-e^{-\propto}}$	$\lvert Z\rvert>e^{-\infty}$
6	$kne^{-\infty n}$	$\frac{kze^{-\propto}}{(z-e^{-\propto})^2}$	$\lvert Z\rvert>e^{-\infty}$
7	1-$e^{-\propto n}$	$\frac{z(1-e^{\propto})}{z^2-z(1+e^{-\propto})+e^{-\propto}}$	$\lvert Z\rvert>e^{-\infty}$
8	$\cos \propto n$	$\frac{z(z-\cos\propto)}{e^2-2z.\cos\propto+1}$	$\lvert Z\rvert>1$
9	$\cos \propto n$	$\frac{z\sin\propto}{e^2-2z\cos\propto+1}$	$\lvert Z\rvert>1$
10	$k \propto^n$	$\frac{kz}{(z-\propto)}$	$\lvert Z\rvert>\propto$
11	$kn \propto^n$	$\frac{k\propto z}{(z-\propto)^2}$	$\lvert Z\rvert>\propto$

Ters Z- Dönüşümü

Ters Z dönüşümü, verilen z dönüşüğünden ayrık zaman dizinsini elde edilmesini sağlar. Bu özellik DSP çalışmalarında önemlidir. Örneğin bir sayısal filtrenin birim darbe cevabının bulunmasında kullanılır. Son olarak ters z dönüşümü şöyle tanımlanır;

$$x(n) = Z^{-1}\{x(z)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).Z^{-n} \text{ 'dir.}$$

Eğer dizi nedensel bir dizi ise zdönüşüğü x(z) güç serileri olarak şöyle verilebilir.

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).Z^{-n} = x(0) + x(1)Z^{-1} + x(2)Z^{-2} + x(3)Z^{-3} + \cdots$$

Burada görüleceği gibi x(n) , Z^{-n} (n= 0, 1, 2, …) katsayıları olup doğrudan bulunabilir.

X(z) , pratikte Z^{-1} ‘in iki polinomunun oranı olarak şöyle ifade edilir.

Denklem 3

Bu formdaki x(z) ‘in ters z dönüşümünün doğrudan bulmak mümün değildir. Aşağıdaki üç yöntemden biri kullanılarak hesaplamak mümkündür.

1. Güç serisine açılım yöntemi
2. Kısmi kesirlere açılım yöntemi
3. Rezidü yöntemi

Her yöntemin kendine göre iyi ve kötü tarafları vardır. Matematiksel zorluk açısından beklide en güzeli rezidü yöntemidir. Güç serisine açılım ise bilgisayar uygulamasına en yatkındır.

1 Güç Serisi Yöntemi

Nedensel bir dizimin z dönüşüğü X(z), sonsuz sayıda z^{-1} veya z serisine sentetik bölme ile açılabilir.

$$x(Z) = \frac{a_0 + a_1Z^{-1} + a_2Z^{-2} + \cdots + a_nZ^{-n}}{b_0 + b_1Z^{-1} + b_2Z^{-2} + \cdots + b_mZ^{-m}}$$

$$= x(0) + x(1)Z^{-1} + x(2)Z^{-2} + x(3)Z^{-3} + \cdots$$

Bu yöntemde, pay ve payda z’in azalan veya z^{-1} ‘in artan kuvvetleri olarak düzenlenir ve uzun bir bölme yapılır.

Örnek

Nedensel bir LTI (Lineer Time Inversion) sistemin z dönüşümünü güç serisine açılım bölme ile bulalım;

$$x(z) = \frac{1 + 2\,Z^{-2} + Z^{-2}}{1 - Z^{-1} + 0.3561\,Z^{-2}}$$

$$1 + Z^{-1} + Z^{-2} \qquad \Big| \; 1 - Z^{-1} + 0.3561\, Z^{-2}$$

$$- \quad \ldots \qquad 1 + 3\, Z^{-1} + 3.6439\, Z^{-2} + 2.5756\, Z^{-3} + \cdots$$

$$2.5756\, Z^{-3} - \; 1.2975927\, Z^{-4}$$

Bir alternatif olarak; pay ve payda z' nin pozitif kuvvetleri olarak azalan şekilde düzenlendikten sonra bölme yapılabilir.

$$x(z) = \frac{Z^2 + 2\, Z^1 + 1}{Z^2 - Z^1 + 0.3561}$$

$$\Big| \; Z^2 + 2\, Z^1 + 1 \qquad Z^2 - Z^1 + 0.3561$$

$$- \quad \ldots \qquad 1 + 3\, Z^{-1} + 3.6439\, Z^{-2} + 2.5756\, Z^{-3} + \cdots$$

$$2.5756\, Z^{-3} - \; 1.2975927\, Z^{-4}$$

Bu durumda; $x(Z) = 1 + 3\, Z^{-1} + 3.6439\, Z^{-2} + 2.5756\, Z^{-3} + \cdots$ ve ters Z dönüşümü doğrudan şöyle yazılabilir;

$x(0) = 1\,;\; x(1) = 3\,;\; x(2) = 3.6439\,;\; x(3) = 2.5756\,;\; + \cdots$

Bu uzun bölme, X(n) katsayılarını bulacak şekilde şöyle özyineli formülüze edilebilir;

$$x(0) = a_0/b_0$$

$$x(1) = [a_1 - x(0)b_1]/b_0$$

$$x(2) = [a_2 - x(1)b_1 - \; x(0)b_2]/b_0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Genel formda;

$$x(n) = \left[a_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{x(n-i)}{b_i}\right] \Big/ b_0 \qquad , n = 1, 2, \ldots$$

Özyinelemeli (rekürsif) olarak bir önceki örnek şöyle tekrarlanabilir;

$$x(z) = \frac{1 + 2\, Z^{-2} + Z^{-2}}{1 - Z^{-1} + 0.3561\, Z^{-2}} \quad ise$$

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 2\,, \qquad a_2 = 1\; ve\; b_0 = 1, \;\; b_1 = -1, \;\; b_2 = 0.3561\,; \;\; N = M = 2$$

Verilen denklem kullanılırsa;

$$x(0) = a_0/b_0 = 1$$

$$x(1) = [a_1 - x(0)b_1]/b_0 = [2 - 1\,x\,(-1)] = 3$$

$$x(2) = [a_2 - x(1)b_1 - \,x(0)b_2] = 1 - 3\,x\,(-1) - 1\,x\,0.3561 = 3.6439$$

$$x(3) = [a_3 - x(2)b_1 - x(1)b_2 + x(0)b_3] = \;0 - 3.6439\,x\,(-1) - 3\,x\,0.3561 = 2.575$$

Böylece ilk dört değer:

$x(0) = 1$; $x(1) = 3$; $x(2) = 3.6439$; $x(3) = 2.5756$ olarak bulunur.

Yukarıdaki formülün Ckodlaması şöyle yapılır.

```
{
    X[0]=A[0]/ B[0];
    for(n=1;n<=npt;++n)
    {
        sum=0;
        k=n;
        if(n>k)
        k=m;
        for(i=1;i<=k;k++)
          sum= sum + x[n-i]* B[i];
    }
    x[n] = (A[n]-sum)/ B[0];
}
```

Koddaki m, paydanın derecesi ve npt ters zdönüşümündeki veri noktası sayısıdır. Pay ve Paydanın Z^{-1}'in artan kuvveti olarak düşünülmüştür.

2. Kısmi Kesirler Açılım

Bu yöntemde de, Z dönüşümü ilk önce basit kısmi kesirler toplamı olarak açılır. Sonra her bir kısmi kesir in Z dönüşümü daha önce verilen tablodan bulunur. Toplam z dönüşümünün tamamı denir.

Eğer x(z) kutupları düzenli ve N=m ise X(z) aşağıdaki gibi açılabilir.(N;payın, m;paydanın kuvvetidir.)

$$x(z) = B_0 + \frac{C_1}{1 - p_1 Z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2 Z^{-1}} + \cdots + \frac{C_m}{1 - p_m Z^{-1}}$$

$$= B_0 + \frac{C_1 Z}{Z - p_1} + \frac{C_2 Z}{Z - p_2} + \cdots + \frac{C_m Z}{Z - p_m}$$

$$= B_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k Z}{Z - p_k}$$

Burada p_k, x(z) ‘in ayrık kutupları ve c_k bir ise kısmi kesir katsayıları ve B0 =a_N/b_N dır.

c_k’lar ayrıca x(z) ‘nin rezidüleri olarak bilinir.

Eğer N<m ise B0=0 ve N>m ise x(z) düzenlenmelidir.

Bu düzenleme payın paydaya bölünmesi ile yapılır.

c_k katsayıları, p_k kutupları ile ilişkili olup, bir önceki denklemin her iki tarafının (z-p_k)/z ile çarpıldıktan sonra z=p_k alınarak bulunabilir. Bu nedenle ilk önce kutupların, yani paydayı sıfır yapan değerlerin belirlenmesi gerekir.

Eğer p_k’ lar biliniyorsa C_k’ lar şöyle bulunabilir;

$$C_k = \frac{x(z)}{z}(Z - p_k)\Bigg|_{Z = p_k}$$

Eğer X(z) bir veya birkaç tane eşit kökü var ise ekstra terim gereklidir. Mesela, x(z), z=p_k ‘da m’inci dereceden kutbu varsa, kısmi kesirin açılımı aşağıdaki formda terimler içermelidir.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{D_i}{(z - P_k)^i}$$

D_i, katsayıları şu ilişkiden bulunabilir;

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} \left[(z - P_k)^m \frac{x(z)}{z} \right] \Bigg|_{z = P_k}$$

Kısmi kesirlere ayırım yaptıktan sonra tabloda verilen temel z dönüşümleri kullanılarak ters z dönüşümleri hesaplanır.

Kısmi kesirlere açılım yöntemi örnekler ile daha kolay anlaşılacaktır.

Örnek:

x(z) ‘ in ters z dönüşümünü bulunuz.

$$\frac{x(z)(z+0.5)}{z} = \frac{(z+0.5)}{(z-0.75)(z+0.5)} = \frac{C_1(z+0.5)}{(z-0.75)} + C_2 \;\; x(z) = \frac{z^{-1}}{1-0.25z^{-1}-0.375z^{-2}}$$ (Sıradan basit dereceli kutup)

Kolaylık olması için ilk önce pay ve paydayı z^2 ile çarparak z’nin pozitif kuvvetleri şeklinde yazalım.

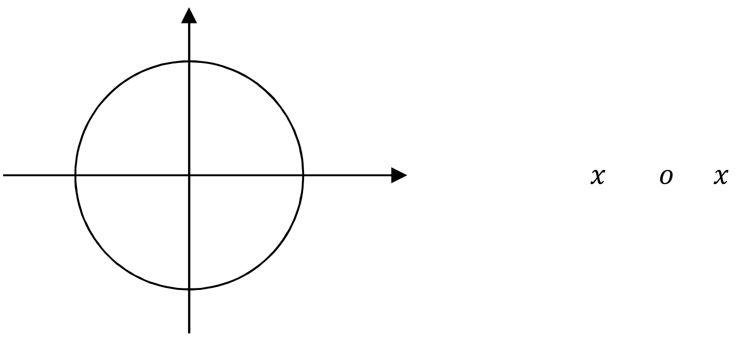
$$x(z) = \frac{z}{1z^2 - 0.25z^1 - 0.375}$$

Kutupları bulmak için payda çarpanlara ayrılırsa;

$$x(z) = \frac{z}{(z-0.75)(z+0.5)}$$

Kutuplar P_1=0.75 ve P_2=-0.5 ‘tir

Bu sistemin sıfır- kutup diyagramı şu şekilde çizilebilir.



Payın derecesi paydanın derecesinden küçük olduğundan(N<m),kısmi kesirlere açılım şöyle yazılabilir.

$$x(z) = \frac{z}{(z-0.75)(z+0.5)} = \frac{C_1 z}{(z-0.75)} + \frac{C_2 z}{(z+0.5)}$$

C_k’ları bulmak için z’ye bölünürse;

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{z}{z(z-0.75)(z+0.5)} = \frac{C_1}{(z-0.75)} + \frac{C_2}{(z+0.5)}$$

C_1'i bulmak için (z - 0.75) ile çarpılır ve sonra z=0.75 alınırsa;

$$\frac{x(z)(z-0.75)}{z} = \frac{z(z-0.75)}{z(z-0.75)(z+0.5)} = C_1 + \frac{C_2(z-0.75)}{(z+0.5)}$$

$$C_1 = \frac{1}{z+0.5}\bigg|_{z=0.75} = \frac{1}{0.75+0.5} = \frac{4}{5}$$

C_2'i bulmak için (z+0.5) ile çarpılır ve sonra z=-0.5 alınırsa;

$$\frac{x(z)(z+0.5)}{z} = \frac{(z+0.5)}{(z-0.75)(z+0.5)} = \frac{C_1(z+0.5)}{(z-0.75)} + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{z-0.75}\bigg|_{z=-0.5} = \frac{1}{-0.5-0.75} = -\frac{4}{5}$$

C_1 ve C_2 yerlerine yazılırsa;

$$x(z) = \frac{\frac{4}{5}z}{z-0.75} - \frac{\frac{4}{5}z}{z+0.5}$$

Dönüşüm tablosu kullanılırsa, her bir terimin ters z dönüşümü:

$$z^{-1}\left[\frac{(4/5)z}{z-0.75}\right] = \frac{4}{5}(0.75)^n$$

$$z^{-1}\left[\frac{-(4/5)z}{z-0.75}\right] = -\frac{4}{5}(-0.5)^n$$

$$x(n) = \frac{4}{5}\left[(0.75)^n - (-0.5)^n\right] \quad , \quad n>0$$

Örnek 2:

x(z) ' in ters z dönüşümünü x(n)'i bulunuz.

$$x(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}+0.3561z^{-2}} \qquad \text{(Karmaşık değerli kutup)}$$

Pozitif kuvvetler şeklinde yazılırsa;

$$x(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z^2+2z+1}{z^2+z+0.3561}$$

Payda D(z)'in kökleri kutuplar olduğundan;

$D(z)=z^2-z+0.3561=0$

$$P_2 = P_1^* = 0.5 - 0.3257j = re^{-j\theta} \quad P_1 = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \quad , \quad P_2 = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}$$

a=1, b=1 ve c=0.3561 olduğundan

$$P_1 = \frac{-1 + (1^2 - 4*0.3561)^{1/2}}{2} = -0.5 + 0.3257j = re^{j\theta}$$

$P_2 = P_1^* = 0.5 - 0.3257j = re^{-j\theta}$ *:eşlenik

R=0.5967 ve $\theta = 33.08^o$ 'dir

Bu durumda x(z) şöyle yazılabilir;

$$x(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(z - P_1)(z - P_1^*)}$$

Pay ve payda aynı dereceden olduğundan kısmi kesirlere açılım formu şöyle olacaktır.

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{B_0}{z} + \frac{C_1}{z - P_1} + \frac{C_2}{z - P_1^*}$$

B_0=1/0.3561=2.8082 ($B_0=a_N/B_N$)

C_1'i bulmak için her iki taraf z-P_1 ile çarpılır ve z=P_1 alınırsa;

$$\frac{(z - P_1)x(z)}{z} = \frac{B_0(z - P_1)}{z} + C_1 + \left.\frac{C_2(z - P_1)}{(z - P_2)}\right|_{z = P_1}$$

Böylece

$$C_1 = \frac{(z - P_1)x(z)}{z} = \left.\frac{(z - P_1)(z + 2z + 1)}{z(z - P_1)(z - P_2)}\right|_{z = P_1 = re^{j\theta}}$$

$$= \frac{(re^{j\theta})^2 + 2re^{j\theta} + 1}{re^{j\theta}(re^{j\theta} - re^{-j\theta})}$$

r=0.5967, $\theta = 33.08^o$ olduğundan

$$C_1 = \frac{2.1439 + 0.97719j}{-0.2122 + 0.3257j}$$

=-0.9040999- 5.992847j=6.06066 $\angle -98.58^o$

$C_2 = C_1^* = -0.9040999 + 5.992847j = 6.06066\angle 98.58^o$

Bu durumda z dönüşümü;

$P_1 = 0.5 + 0.3257j \qquad P_2 = 0.5 - 0.3257j$

$C_1 = -0.9041 - 5.59928j \qquad C_2 = -0.9041 + 5.59928j$

Olmak üzere şöyle yazılabilir;

$$x(z) = 2.8082 + \frac{C_1 z}{z - P_1} + \frac{C_2 z}{z - P_1^*}$$

Bu aşamadan sonra tablo kullanılırsa

$$z^{-1}\{2.8082\} = 2.8082u(n)$$

$$z^{-1}\left\{\frac{C_1 z}{z - P_1} + \frac{C_2 z}{z - P_1^*}\right\} = 2 * 6.06066(0.5967)^n \cos(33.08n - 98.58^o)$$

$$= 12.1213(0.5967)^n \cos(33.08n - 98.58^o)$$

Ayrık sinyal ise şöyle yazılabilir;

$$x(n) = 2.8082u(n) + 12.1213(0.5967)^n \cos(33.08n - 98.58^o), n \geq 0$$
$$x(0) = 2.8082 - 1.80838 \cong 1;$$
$$x(1) = 2.99959;$$
$$x(2) = 3.6436;$$

..

..

Olarak bölme ile elde ettiğimiz sonuçlara ulaşırız.

Örnek x(z)'in ters z dönüşümünü alarak ayrık zaman dizisi x(n)'i bulunuz.

$x(z) = \dfrac{z^2}{(z-0.5)(z-1)^2}$ (İkinci derecede kutup katlı kutup)

x(z),z=0.5'te sıradan bir kutbu ve z=1 de ikinci dereceden bir kutbu vardır.

Bu durumda, kısmi kesir açılımı şu formda olmalıdır;

$$x(z)=\frac{Cz}{z-0.5}+\frac{D_1z}{z-1}+\frac{D_2z}{(z-1)^2}$$

C yi bulmak için daha önce yaptığımız gibi; z'ye bölüp (z- 0.5)ile çarptıktan sonra z=0.5 alacağız;

$$C=\frac{(z-0.5)}{z}\frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)^2}\bigg|_{z=0.5}$$

$$=\frac{z}{(z-1)^2}\bigg|_{z=0.5}=\frac{0.5}{(0.5-1)^2}=2$$

D_1'i bulmak için, daha önce formülsel olarak belirlediğimiz gibi katlı kutup için türev alınmalıdır. Burada i=1 ve m=2'dir.Böylece;(Sayfa 23)

$$D_1=\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2x(z)}{z}\right]\bigg|_{z=1}$$

$$=\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2z^2}{z(z-0.5)(z-1)^2}\right]\bigg|_{z=1}$$

$$=\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-0.5)}\right]\bigg|_{z=1}=\frac{z-0.5-z}{(z-0.5)^2}\bigg|_{z=1}=-2$$

Benzer şekilde, D_2'yi bulmak için, i=2 ve m=2 alınırsa;

$$D_2=\frac{(z-1)^2x(z)}{z}\bigg|_{z=1}=\frac{(z-1)^2z^2}{z(z-0.5)(z-1)^2}\bigg|_{z=1}$$

$$=\frac{z}{(z-0.5)}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{1-0.5}=2$$

Sonuçları birleştirirsek;

$$x(z)=\frac{2z}{z-0.5}-\frac{2z}{z-1}+\frac{2z}{(z-1)^2}$$ 'dir.

Tablo kullanılarak her bir kesrin ters dönüşümü bulunursa;

$$x(n)=2(0.5)^n-2+2n=2\left[(n-1)+(0.5)^n\right],n\geq 0$$

Sonuçlar güç serisine açılım ile birkaç terim için kontrol edilebilir;

Örnek

x(z) in ters dönüşümünü bulunuz.

$$x(z)=\frac{2z^4+4z^3-14.5z^2-44.5z-33.5}{z^3+1.5z^2-8.5z-15},2.6<|z|<2.9$$

Payın derecesi N,paydanın derecesinden büyük olduğundan bölme yapılır;

$$x(z)=2z+1+x_1z=2z+1+\frac{z^2-6z-18.5}{z^3+1.5z^2-8.5z-15}$$

Payın kökleri(kutupları);P_1=-2,P_2=-2.5 ve P_3=3'tür.

Bu durumda $x_1(z)$ şöyle olur.

$$x_1(z)=\frac{z^2-6z-18.5}{(z+2)(z+2.5)(z-3)}$$

$$=C_0+\frac{C_1z}{z+2}+\frac{C_2z}{z+2.5}+\frac{C_3z}{z-3}$$

Paydalar eşitlenir ve payların eşleniği alınırsa;

$$z^2-6z-18.5=C_0(z+2)(z+2.5)(z-3)+C_1z(z+2.5)(z-3)$$
$$+C_2z(z+2)(z-3)+C_3z(z+2)(z+2.5)$$

$$z=0\to C_0=1.233$$
$$z=-2\to C_1=-0.5$$
$$z=-2.5\to C_2=-0.4$$
$$z=3\to C_3=-0.333$$

olarak bulunur.

Böylece

$$F(z)=2z+2.333-\frac{0.5z}{z+2}-\frac{0.4z}{z+2.5}-\frac{0.333z}{z-3}$$

ROC,2.6<$|z|$<2.9 olduğundan;

-2 ve -2.5 teki nedensel diziler üretirler.3'teki kutup ise nedensel olmayan dizi üretir.

$$f(k)=2\delta(k-2)+2.333\delta(k)-\left[\frac{1}{2}(-2)^k+\frac{2}{5}(2.5)^k\right]u(k)+\frac{1}{3}(3)^k u(-k-1)$$

Burada u( ) birim basamak işaretidir.

3-Rezidü Yöntemi

Bu yöntemde, ters z dönüşümü çizgisel integral ile hesaplanır.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{n-1} x(z) dz$$

Burada C,x(z)'in bütün kutuplarını kapsayan integral yoludur. Oransal polinomlar için, bu integral Cauchy rezidü teoremi olarak bilinen karmaşık değişken teorideki temel sonuçlar kullanılarak hesaplanır.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{n-1} x(z) dz$$

=C içerisindeki bütün kutuplardaki $\{z^{n-1} x(z)\}$ 'in rezidülerinin toplamı

Bir önceki yöntemdeki kısmi kesir katsayıları C_k'lar x(z)'in rezidülerine işaret eder. Her bir rezidü C_k, P_k kutupları ile ilişkilidir. Bu yöntemde, $z^{n-1} x(z)$'in, P_k kutbundaki rezidü şöyle verilebilir;

$$\mathrm{Re}\, zid\ddot{u}\left[F(z), P_k\right] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-P_k)F(z)\right] \Big| z = P_k$$

Buradan; $F(z) = z^{n-1} x(z),$

m:P_k! daki kutbun derecesi,

$\mathrm{Re}\, zid\ddot{u}\left[F(z), P_k\right]$: F(z)'in z=$P_k$ daki rezidüsü.

Örneğin basit bir kutup için;

$$\mathrm{Re}\, zid\ddot{u}\left[F(z), P_k\right] = (z-P_k)F(z)$$

$$= (z-P_k) z^{n-1} x(z) \Big|_{z=P_k}$$

Örnek:

Aşağıdaki z dönüşümüne karşılık gelen ayrık –zaman işaretini rezidü yöntemini kullanarak bulunuz.

$$x(z) = \frac{z}{(z-0.75)(z+0.5)}$$

C, $|z|$=1 dairesi olduğunu kabul edelim.

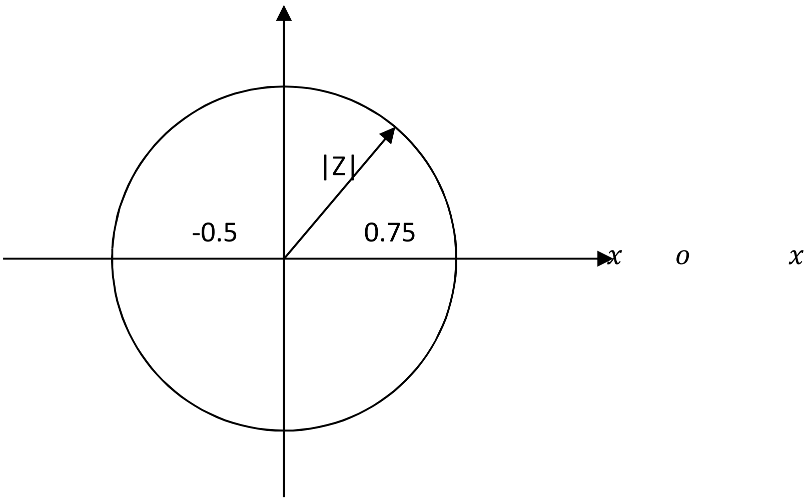
Eğer $F(z) = z^{n-1} x(z)$ olarak kabul edersek;

$$F(z) = \frac{z^{n-1}z}{(z-0.75)(z+0.5)}$$

$$= \frac{z^n}{(z-0.75)(z+0.5)}$$

F(z)'in z=0.5 ve z=-0.5 'te kutbu vardır.

Kutupların yerleri, C'ye göre incelenirse, kutupların kapsandığı görülecektir.



Ters z dönüşümü;

$$x(n) = \operatorname{Re} z\left[F(z), 0.75\right] + \operatorname{Re} z\left[F(z), -0.5\right]$$

Kutuplar birinci dereceden olduğundan

$$\operatorname{Re} z\left[F(z), 0.75\right] = (z-0.75)F(z)\Big|_{z=0.75}$$

$$= \frac{(z-0.75)z^n}{(z-0.75)(z+0.5)}\Bigg| z = 0.75$$

$$= \frac{(0.75)^n}{0.75+0.5} = \frac{4}{5}(0.75)^n$$

$$\operatorname{Re} z\left[F(z), -0.5\right] = (z+0.5)F(z)\Big|_{z=-0.5}$$

$$= \frac{(z+0.5)z^n}{(z-0.75)(z+0.5)}\Bigg| z = -0.5$$

$$= -\frac{4}{5}(-0.5)^n$$

Ters z dönüşümü z=0.75 ve z=-0.5'teki rezidülerin toplamı olarak;

$$x(n) = (4/5)\left[(0.75)^n - (-0.5)^n\right]$$

Kısmi kesirlere ayırma yöntemi ile elde edilen sonuç ile karşılaştırınız.

Örnek

$x(z) = \dfrac{z^2+2z+1}{z^2-z+0.3561}$’in ters z dönüşümü rezidü yöntemi ile bulunuz.

Kutuplar P_1=0.5+0.3557j ve P_2=0.5- 0.3557j $(P_2 = P_1^*)$ olmak üzere x(z) şöyle verilebilir.

$$x(z) = \frac{z^2+2z+1}{(z-P_1)(z-P_2)}$$

Ters z dönüşümünü bulmak için;

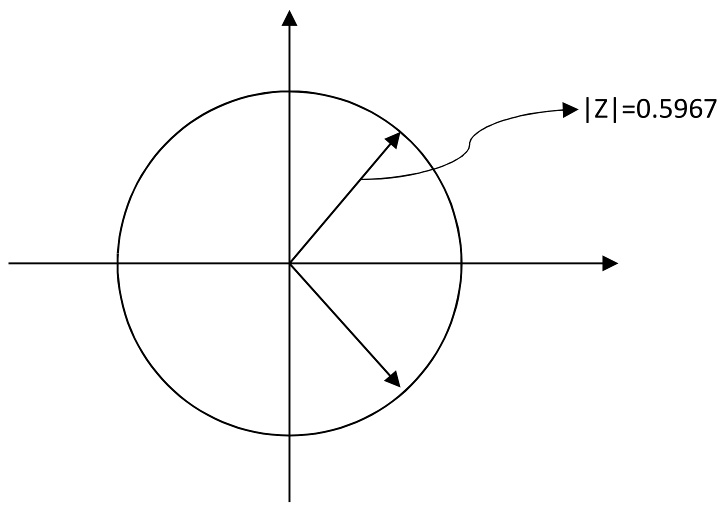
$F(z) = z^{n-1}x(z)$’in rezidülerini bulmak gereklidir.

$$F(z) = z^{n-1}x(z) = \frac{z^{n-1}(z^2+2z+1)}{(z^2-z+0.3561)}$$

$$= \frac{z^n(z^2+2z+1)}{z(z^2-z+0.3561)}$$

F(z),x(z)’in z=P_1 ve z=P_2 köklerine ilave olarak n=0 iken z=0 da bir kutbu daha vardır.

Kutupların konumları incelenirse, dairenin içinde olduğu görülür.



n>0 için z=0’da kutbu olmayacağından 2 durumu ayrı ayrı düşünülmelidir.

n=0 için

$$F(z) = \frac{z^2+2z+1}{z(z^2-z+0.3561)}$$

ve

$$x(0)=\operatorname{Re}z\left[F(z),0\right]+\operatorname{Re}z\left[F(z),P_1\right]+\operatorname{Re}z\left[F(z),P_2\right]$$

$$\operatorname{Re}z\left[F(z),0\right]=zF(z)\Big|_{z=0}=\left.\frac{z(z^2+2z+1)}{z(z^2-z+0.3561)}\right|z=0$$

$$=\frac{1}{0.3561}=2.8082$$

$$\operatorname{Re}z\left[F(z),P_1\right]=(z-P_1)F(z)\Big|_{z=P_1}$$

$$=\left.\frac{(z-P_1)(z^2+2z+1)}{z(z^2-z+0.3561)}\right|z=P_1$$

$$=\frac{(re^{j\theta})^2+2(re^{j\theta})+1}{(re^{j\theta})(re^{j\theta}-re^{-j\theta})}$$

Burada r=0.5967 ve $\theta=33.08^o$ dir. Düzenleme yapılırsa;

$$\operatorname{Re}z\left[F(z),P_1\right]=(-0.9041-5.9928j)$$

P_1 ve P_2 karmaşık eşlenik çift olduğundan;

$$\operatorname{Re}z\left[F(z),P_2\right]=(-0.9041+5.9928j)$$

Böylece

$$x(0)=\operatorname{Re}z\left[F(z),0\right]+\operatorname{Re}z\left[F(z),P_1\right]+\operatorname{Re}z\left[F(z),P_2\right]$$

$$\begin{aligned}&=2.8082-0.9041-5.9928j-0.9041+5.9928j\\&=1\end{aligned}$$

n>0 için; z=0'daki kutup geçersizdir;

$F(z)=\dfrac{z^2+2z+1}{z(z^2-z+0.3561)}$ olmak üzere

$$x(n)=\operatorname{Re}z\left[F(z),P_1\right]+\operatorname{Re}z\left[F(z),P_2\right]$$

$$\operatorname{Re}z\left[F(z),P_1\right]=(z-P_1)F(z)\Big|_{z=P_1}$$

$$= \frac{(z-P_1)z^n(z^2+2z+1)}{z(z-P_1)(z-P_2)}\bigg|_{z=P_1}$$

$$= \frac{(re^{j\theta})^n((re^{j\theta})^2+2(re^{j\theta})+1)}{(re^{j\theta})(re^{j\theta}-re^{-j\theta})}$$

Burada r=0.5967 ve $\theta = 33.08^o$

$$\operatorname{Re} z\left[F(z), P_1\right] = (0.5967e^{j33.08})^n(6.06066e - e^{j98.58})$$

$$= 6.06066(0.5967)^n\left[\cos(33.08n-98.58) + j\sin(33.08n-98.58)\right]$$

P_1 ve P_2 karmaşık eşlenik çift olduğundan;

$$\operatorname{Re} z\left[F(z), P_2\right] = 6.06066(0.5967)^n\left[\cos(33.08n-98.58) - j\sin(33.08n-98.58)\right]$$

Böylece n>0 için

$$x(n) = \operatorname{Re} z\left[F(z), P_1\right] + \operatorname{Re} z\left[F(z), P_2\right]$$

$$= 12.1213(0.5967)^n\cos(33.08n-98.58)$$

Örnek3

İkinci dereceden kökü aşağıdaki sistemin x(n) ayrık-zaman dizisini bulunuz.

$$x(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)^2}$$

Rezidü yöntemine göre;

$$x(n) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Re} z\left[F(z), P_k\right]$$

Burada;

$$F(z) = z^{n-1}x(z) = \frac{z^{n+1}}{(z-0.5)(z-1)^2}$$

F(z),z=0.5’te birinci dereceden basit ve z=1’de ikinci dereceden kutupları vardır.

$$x(n) = \operatorname{Re} z\left[F(z), P_1\right] + \operatorname{Re} z\left[F(z), P_2\right]$$

$$\operatorname{Re} z\left[F(z), 0.5\right] = (z-0.5)F(z)\Big|_{z=0.5}$$

$$= \frac{(z-0.5)z^{n+1}}{(z-0.5)(z-1)^2}\Bigg|z=0.5 = \frac{z^{n+1}}{(z-1)^2}\Bigg|z=0.5$$

$$= 0.5(0.5)^n / (-0.5)^2 = 2(0.5)^n$$

$$\operatorname{Re} z\left[F(z), 1\right] = \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 F(z)\right]\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2 z^{n+1}}{(z-0.5)(z-1)^2}\right]\Bigg|z=1$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{z^{n+1}}{(z-0.5)}\right]\Bigg|z=1$$

$$= \frac{(n+1)z^n(z-0.5) - 1z^{n+1}}{(z-0.5)^2}\Bigg|z=1$$

$$= \frac{\left[(0.5)(n+1)-1\right]}{(0.5)^2} = 2(n-1)$$

Rezidüleri birleştirirsek;

$$x(n) = 2\left[(n-1) + (0.5)^n\right]$$