Başlangıç – Değer ve Sınır Değer Problemleri :

Bir diferensiyel denklem ve bilinmeyen fonk. ve türevleri üzerinde tümü bağımsız değişkenin aynı değerinde verilen koşullar, birlikte bir başlangıç değer problemi oluşturur. Eğer yardımcı koşullar bağımsız değişkenin birden fazla değerinde verilirse problem bir sınır- değer problemi olur.

örneğin, $y'' + 2y' = e^x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 2$ bir başlangıç değer problemidir.

$y'' + 2y' = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 1$ bir sınır- değer problemidir.

2. BÖLÜM

BIRINCI MERTEBEDEN ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

2.1. TAM DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Birinci mertebeden bir adi lineer dif. denklem,

$$G(x,y,y') = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

şeklinde yazıldığı gibi

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (2.1)$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer varsa, bu dif. denklemin çözümünün

$$f(x,y) = c$$

şeklinde bir kapalı fonksiyon olması gerekir.

Tamlık Testi : Eğer $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ sürekli fonksiyonlarsa ve $x o y$ - düzleminde bir dikdörtgen bölge üzerinde sürekli birinci kısmī türevleri varsa, ayrıca

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

eşitliği sağlanıyorsa (2.1) dif. denklemi tam dif. denklemdir.

<u>Çözüm Metodu</u> : Bir $F(x,y)=c$ fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

şeklinde yazıldığından

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{ve} \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

olur. $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ eşitliğinde her iki tarafın x'e göre kısmī integrali alınırsa

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.2)$$

elde edilir. Burada $\phi(y)$ integrasyon sabitidir.

Şimdi de y'ye göre kısmī türev alınırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + \frac{d\phi}{dy}$$

bulunur. Diğer taraftan $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ olduğundan bu değer son denklemde yerine yazılırsa

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + \frac{d\phi}{dy}$$

bulunur. Gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\frac{d\phi}{dy} = \varphi(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.3)$$

olur. (2.3) eşitliğinde y'ye göre integral alınırsa $\phi(y)$ fonksiyonu bulunur. $\phi(y)$ nin bulunan değeri

(2.2) denkleminde yerine yazılırsa verilen dif. denklemin $F(x,y)=c$ genel çözümü bulunmuş olur.

ÖRNEK : $(\underbrace{2x+e^y}_{M})dx + \underbrace{xe^y}_{N}dy = 0$ dif. denklemini çözünüz.

Çözüm : Öncelikle denklemin Tam dif. denklem (TDD) olup olmadığına bakalım.

$$M(x,y) = 2x+e^y \quad , \quad N(x,y) = xe^y \quad \text{dir.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x+e^y) = e^y \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xe^y) = e^y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ olduğundan verilen denklem TDD'dir.}$$

Bu nedenle $F(x,y)=c$ şeklinde bir genel çözümü vardır. Şimdi amacımız bu $F(x,y)$ fonksiyonunu bulmaktır.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 2x+e^y$$ eşitliğinde x'e göre integral alınırsa,

$$F(x,y) = \int (2x+e^y)\,dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = x^2 + xe^y + \phi(y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

olur. Burada $\phi(y)$ integrasyon sabitinin değerini bulmamız gerekir. $(*)$ eşitliğinde y'ye göre kısmi türev alınırsa

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + \frac{d\phi}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (**)$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = xe^y$$

olduğundan, bu değer $(**)$'da yerine yazılırsa

$$\cancel{x}e^y = \cancel{x}e^y + \frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = c_0$$

bulunur. $\phi(y)$ nin bu değeri (*) denkleminde yerine yazılırsa

$$F(x,y) = x^2 + xe^y + c_0 = c_1$$

elde edilir. $c = c_1 - c_0$ alınırsa soruda verilen dif. denklemin çözüm ailesi

$$\boxed{x^2 + xe^y = c}$$

olur. Burada c nin her değeri için dif. denklemin bir özel çözümü bulunur.

ÖRNEK: $\underbrace{3x(xy-2)}_{M}\,dx + (\underbrace{x^3+2y}_{N})\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $M = 3x(xy-2)$ ve $N = x^3+2y$ verilmiştir.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \quad \text{olup} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem bir TDD'dir.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 3x(xy-2)$$

eşitliğinde her iki tarafın x'e göre integrali alınırsa

$$F(x,y) = \int 3x(xy-2)\,dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = x^3y - 3x^2 + \phi(y) \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

olur. Şimdi de her iki tarafın y'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + \frac{d\phi}{dy} \quad \ldots\ldots \quad (**)$$

olur. Diğer taraftan $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ olduğundan bu değer (**)'da yerine yazılırsa

$$\cancel{x^3}+2y = \cancel{x^3}+\frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy}=2y \Rightarrow \phi(y)=y^2+c_0$$

bulunur. $\phi(y)$ nin bu degeri ⊛ 'da yerine yazılırsa

$$F(x,y)= x^3y-3x^2+y^2+c_0=c_1 \qquad (c=c_1-c_0)$$

$$\Rightarrow \quad x^3y-3x^2+y^2=c$$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK: $(y\cos x+2xe^y)\,dx+(\sin x+x^2e^y+2)\,dy=0$

denklemini çözünüz.

Çözüm: $M=y\cos x+2xe^y$ ve $N=\sin x+x^2e^y+2$ dir.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos x+2xe^y \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\cos x+2xe^y$$

old. $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ dir. O halde denklem TDD'dir.

x'e göre integral

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M=y\cos x+2xe^y$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y)=\int (y\cos x+2xe^y)\,dx+\phi(y)$$

$$F(x,y)=y\sin x+x^2e^y+\phi(y) \quad \dots\dots \quad ⊛$$

y'ye göre türev

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\sin x+x^2e^y+\frac{d\phi}{dy} \quad \dots\dots\dots \quad ⊛⊛$$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=N$ · degeri ⊛⊛ 'da yerine yazılırsa

$$\cancel{\sin x+x^2e^y}+2=\cancel{\sin x+x^2e^y}+\frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy}=2 \Rightarrow \phi=2y+c_0$$

$\phi(y)$ nin degeri ⊛ 'da yerine yazılırsa

$$F(x,y)=y\sin x+x^2e^y+2y+c_0=c_1$$

$$\Rightarrow \quad y\sin x+x^2e^y+2y=c$$

genel çözümü bulunur.

2.2. İNTEGRASYON ÇARPANI :

Eğer (2.1) denklemi Tam dif. denklem değilse başka metotlar kullanılır. Bunlardan biri, eğer varsa, dif. denklemin integrasyon çarpanını bulmaktır. Buna göre eğer (2.1) denklemi bir $\mu(x,y)$ fonksiyonu ile çarpıldığında tam dif. denklem olursa $\mu(x,y)$'ye integrasyon çarpanı denir.

Tam dif. denklem olmayan bir dif. denklem

$$M dx + N dy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.4)$$

olsun. Bu denklemin bir integrasyon çarpanı μ ise

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2.5)$$

denklemi bir TDD olur. Bu durumda (2.4) ile (2.5)'in genel çözümleri aynı olur.

Eğer

$$f(x) \equiv \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

sadece x'e bağlı bir fonksiyon ise o zaman

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

elde edilir.

Eğer

$$g(y) \equiv \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

sadece y'ye bağlı bir fonksiyon ise o zaman

$$\mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}$$

bulunur.

ÖRNEK: $(x-y)dx - dy = 0$ denklemini çözünüz. (9)

Çözüm: Burada $M = x-y$ ve $N=-1$ 'dir.

$\frac{\partial M}{\partial y} = -1$ ve $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$ olup $-1 \neq 0$ old. TDD değildir.

μ integrasyon çarpanını bulmaya çalışalım:

$$f(x) \equiv \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{-1}(-1-0) = 1$$

bulunur. Buradan $f(x)$'in sadece x'e bağlı olduğu söylenebilir.

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int 1 \cdot dx} = e^{x}$$

old. integrasyon çarpanı $\mu = e^{x}$ dir. Verilen dif. denklemin bütün terimleri e^{x} ile çarpılırsa

$$e^{x}(x-y)dx - e^{x}dy = 0$$

elde edilir. Bu ise bir TDD 'dir. Şimdi bu denklemi önceden bildiğimiz yolla çözelim. Yani $F(x,y)$ görünümünü bulalım.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M' = e^{x}(x-y)$$

int.

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = \int e^{x}(x-y)dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = xe^{x} - e^{x} - ye^{x} + \phi(y) \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

türev

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x} + \frac{d\phi}{dy}$$

bulunur. Diğer taraftan $\frac{\partial f}{\partial y} = N' = -e^{x}$ olduğundan

$$-e^{x} = -e^{x} + \frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = c_0$$

olup $(*)$ 'da yerine yazılırsa

$$F(x,y) = xe^{x} - e^{x} - ye^{x} + c_0 = c_1$$

$$\boxed{xe^{x} - e^{x} - ye^{x} = c}$$

bulunur.

ÖRNEK : $y\,dx + (3+3x-y)\,dy = 0$ denklemini çözünüz. (10)

Çözüm : Denklem TDD değildir. İntegrasyon çarpanı bulalım:

$$f(x) \equiv \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{3+3x-y}(1-3)$$

fonksiyonu sadece x'e bağlı olmayıp y'ye de bağlıdır. Şimdi de sadece y'ye bağlı olup olmadığını kontrol edelim.

$$g(y) \equiv \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}(3-1) = \frac{2}{y}$$

fonksiyonu sadece y'ye bağlı olduğundan int. çarpanı

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

bulunur. Soruda verilen denklemin tüm terimleri y^2 ile çarpılırsa,

$$y^3 dx + y^2(3+3x-y)dy = 0$$

olur. Bu denklem TDD'dir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M' = y^3$$

int.

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = \int y^3 dx + \phi(y)$$

$$f(x,y) = xy^3 + \phi(y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

türev

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N' = y^2(3+3x-y)$$ olduğundan

$$y^2(3+3x-y) = 3xy^2 + \frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 3y^2 - y^3$$

$$\Rightarrow \phi(y) = y^3 - \frac{y^4}{4} + c_0$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} + c_0 = c_1$$

$$\boxed{xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} = c}$$

genel çözümü bulunur.

NOT: Yaygın integrasyon çarpanları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Terimler	İntegrasyon	Çarpanları		
$y\,dx - x\,dy$	$-\dfrac{1}{x^2}$,	$\dfrac{1}{y^2}$,	$-\dfrac{1}{xy}$,	$-\dfrac{1}{x^2+y^2}$
$y\,dx + x\,dy$	$\dfrac{1}{xy}$,	$\dfrac{1}{x^2+y^2}$,	$\dfrac{1}{(xy)^n}$,	$n>1$, $n \in \mathbb{N}$

ÖRNEK: $x\,dy - y\,dx = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Bu denklem bir TDD değildir. Tablodaki 1. denkleme uygun olduğu için $\mu = \dfrac{1}{x^2}$ bir integrasyon çarpanı olarak alınabilir. Verilen denklem $\dfrac{1}{x^2}$ ile çarpılırsa

$\frac{y}{x}$ 'nin türevi

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$\frac{y}{x}$ 'nin türevi

$$\xRightarrow{\text{int.}} \frac{y}{x} = c \Rightarrow \boxed{y = cx}$$

Yukarıda verilen dif. denklem için $-\dfrac{1}{y^2}$ ve $\dfrac{1}{xy}$ fonksiyonları da birer integrasyon çarpanlarıdır. Bu durumda

$$-\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Rightarrow \dots \boxed{y = cx}$$

olur, diğer taraftan $\dfrac{1}{xy}$ int. çarpanı ile

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{xy} = \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ln y - \ln x = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y}{x} = \ln c \Rightarrow \frac{y}{x} = c \Rightarrow \boxed{y = cx}.$$

ÖRNEK : $(3x^2-y)dx + x\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Verilen denklemi yeniden yazalım :

$$3x^2dx + \underbrace{x\,dy - y\,dx} = 0$$

denklemi tablodaki 1. denklemin eksiliği olduğundan $\frac{1}{x^2}$ ile çarparsak

$$3\,dx + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3dx + d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \xrightarrow{\text{integral}} 3x + \frac{y}{x} = C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK : $(y - xy^2)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : TDD değildir. Ayrıca $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ ve $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ ifadeleri sadece x'e ve y'ye bağlı değildir. O halde verilen dif. denklem yeniden düzenlenirse

$$\left(\underbrace{y\,dx + x\,dy}\right) + \left(-xy^2dx + x^2y^2dy\right) = 0$$

olur. Bu denklemin soldaki parçası tablodaki 2. denklemle aynı olduğundan integrasyon çarpanı $\mu = \frac{1}{(xy)^2}$ alınır ve bu denklemin tüm terimleri $\frac{1}{(xy)^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} + \frac{-xy^2dx + x^2y^2dy}{(xy)^2} = 0$$

$\mu = \frac{1}{(xy)^2}$ seçilirse dx'in önündeki y^2, dy nin 〃 x^2 gideceği için integral alınabilecektir.

$$\Rightarrow \int \frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} = \int \frac{1}{x}\,dx - \int dy$$

$$\left(\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{xy} = \ln|x| - y + C$$

kapalı çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y\,dx + (x - yx^2)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\underbrace{y\,dx + x\,dy} - x^2y\,dy = 0$

denkleminin her iki tarafı $\frac{1}{(xy)^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \frac{d(xy)}{(xy)^2} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{xy} - \ln y = c$$

Not: 1 $d(xy)$ ifadesi (xy) nin diferensiyeli demektir.

$$d(xy) \equiv 1.dx.y + 1.dy.x = y\,dx + x\,dy$$

Not: 2 Eğer $\frac{1}{xy}$ ile çarpılırsa dy nin önündeki x gitmiyor.
Amaç dx 'in önündeki fonksiyon sadece x'e, dy nin önündeki de sadece y'ye bağlı olmasıdır ve böylece integral alınabilsin.

2.3. DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Eğer bir dif. denklem,

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

şeklinde yazılabilirse bu denkleme değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklem denir. Bu şekilde yazılabilen denklemler çözülebilirdir.

ÖRNEK : $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $x\,dx + y\,dy = 0 \Rightarrow \int x\,dx + \int y\,dy = c_1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = c}$$