B) PARAMETRELERİN DEĞİŞTİRİLMESİ METODU

Parametrelerin değiştirilmesi, ilgili $L(y)=0$ homojen denkleminin çözümü bilindiğinde n-yinci mertebeden $L(y)=g(x)$ lineer dif. denkleminin bir özel çözümünü bulmanın bir başka metodudur.

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ 'ler $L(y)=0$ denkleminin lineer bağımsız çözümü ise o zaman $L(y)=0$ denkleminin homojen çözümünün

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

olduğunu biliyoruz.

Metot :

$L(y)=g(x)$ 'in bir özel çözümü

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.16)$$

biçimindedir. Burada $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 'ler bulunması gereken fonksiyonlardır.

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ 'leri bulmak için aşağıdaki lineer denklemler $v_1', v_2', \ldots, v_n'$ türevleri için ortak çözülür.

$$\begin{aligned}
v_1' y_1 + v_2' y_2 + \cdots + v_n' y_n &= 0 \\
v_1' y_1' + v_2' y_2' + \cdots + v_n' y_n' &= 0 \\
&\vdots \\
v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\
v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-1)} &= g(x)
\end{aligned}$$

Sonra herbir integral sabiti gözardı edilerek integral alınıp $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ler bulunur ve (4.16) 'da yerlerine yazılır.

Örneğin, $n=3$ özel durumu için

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + v_3' y_3 = 0$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_3' y_3' = 0$$

$$v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + v_3' y_3'' = g(x)$$

denklemi çözülür.

$n=2$ özel durumu için

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = g(x)$$

denklemi ve $n=1$ özel durumu için

$$v_1' y_1 = g(x)$$

tek denklemi elde edilir.

Metodun Kapsamı

Parametrelerin değiştirilmesi metodu her lineer dif. denkleme uygulanabilir. Bundan dolayı Belirsiz katsayılar metodundan daha güçlüdür. Ancak her iki metodun da uygulanabilir olduğu durumlarda Belirsiz Katsayılar Metodu tercih edilir.

ÖRNEK : $y'' + y = \tan x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Homojen kısmın genel çözümü

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$ dır.

Parametrelerin değiştirilmesi metoduna göre

$$y_p = v_1 \underbrace{\cos x}_{y_1} + v_2 \underbrace{\sin x}_{y_2} \qquad \text{(*)}$$

olur. Böylece

$$\left.\begin{aligned} v_1' \cdot (\cos x) + v_2'(\sin x) &= 0 \\ v_1'(-\sin x) + v_2'(\cos x) &= \tan x \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada v_1' ve v_2' bilinmeyenlerini bulmalıyız. Cramer metoduyla

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = -\tan x \sin x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \cos x - \sec x \quad \text{ve}$$

$$v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \sin x$$

bulunur. v_1 ve v_2 yi bulmak için integral alınırsa

$$v_1 = \int v_1' \, dx = \int (\cos x - \sec x) dx = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

$$v_2 = \int v_2' \, dx = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

fonksiyonları elde edilir. v_1 ve v_2 nin bu değerleri (*) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$y_p = v_1 \cos x + v_2 \sin x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = (\sin x - \ln|\sec x + \tan x|) \cos x + (-\cos x) . \sin x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = -\cos x . \ln|\sec x + \tan x|$$ özel çözümü ve

$$\Rightarrow \quad y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

genel çözümü bulunur.

(23)

ÖRNEK : $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Denklemin homojen çözümü

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

bulunur. Böylece özel çözüm için

$$y_p = v_1 e^x + v_2 x e^x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

kabul edilir. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} v_1'(e^x) + v_2'(xe^x) &= 0 \\ v_1'(e^x) + v_2'(e^x + xe^x) &= \frac{e^x}{x} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemini elde ederiz. Burada v_1' ve v_2' bilinmeyenlerini bulmak için Cramer metodu uygulanırsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -e^{2x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \quad \text{ve} \quad v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \int v_1'\,dx = \int -1 \cdot dx = -x \quad \text{ve}$$

$$v_2 = \int v_2'\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

değerleri $(*)$'da yerlerine yazılırsa özel çözüm

$$y_p = -xe^x + xe^x \ln|x|$$ ve genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x - xe^x + xe^x \ln|x|$$

bulunur.

ÖRNEK: $y''' + y' = \sec x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+1)=0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ homojen çözümü bulunur.

Özel çözüm ise

$$y_p = v_1 + v_2 \cos x + v_3 \sin x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

formundadır. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} v_1' \cdot (1) + v_2'(\cos x) + v_3'(\sin x) &= 0 \\ v_1' \cdot (0) + v_2'(-\sin x) + v_3'(\cos x) &= 0 \\ v_1'(0) + v_2'(-\cos x) + v_3'(-\sin x) &= \sec x \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi yazılabilir. Cramer metoduyla

$$v_1' = \sec x \quad , \quad v_2' = -1 \quad \text{ve} \quad v_3' = -\tan x$$

elde edilir. İntegral alınırsa

$$v_1 = \int v_1' dx = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$v_2 = \int v_2' dx = \int (-1) dx = -x$$

$$v_3 = \int v_3' dx = \int (-\tan x) dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$$

bilinmeyen fonksiyonları bulunur. Bu fonksiyonlar $(*)$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$y_p = \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\cos x|$$

özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\cos x|$$

genel çözümü bulunur.

4.5. CAUCHY – EULER DENKLEMLERİ

Her bir terimi $x^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı şeklinde olan

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = b(x) \quad \dots\dots (4.17)$$

tipindeki n. mertebeden değişken katsayılı diferensiyel denklemlere Cauchy- Euler denklemi denir. Burada $a_n \neq 0$ olmak üzere, $a_0, a_1, \dots, a_n$ 'ler sabitlerdir. Bu tip denklemler bir dönüşüm yardımıyla sabit katsayılı hale indirgenerek çözülür.

Metot : (4.17) ile verilen Cauchy – Euler denklemi $x>0$, $x=e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı bir lineer denkleme dönüşür.
Bu durumda $x=e^t \Rightarrow t=\ln x$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}} ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{I}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{II}\right) = \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}}_{I'}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{II} + \underbrace{\frac{d^2t}{dx^2}}_{II'}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{I}$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2t}{dx^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow \boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}} \quad \text{bulunur.}$$

Benzer şekilde $\boxed{x^3\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}}$

elde edilir. Bu şekilde daha yüksek mert. türevler elde edilebilir. Bu türevler (4.17) denkleminde yerine yazılarak sabit katsayılı hale dönüştürülür.

NOT: Yukarıdaki çözüm $x>0$ için verilmiştir. $x<0$ için çözümü bulabilmek için $-x=e^t$ dönüşümü yapılır.

ÖRNEK : $x^2y''-2xy'+2y=x^3$ Cauchy-Euler denklemini çözünüz. (26)

Çözüm : $x=e^t$, $x>0$ $\Rightarrow$ $t=\ln x$ dönüşümü yapılırsa

$xy'=\dfrac{dy}{dt}$ ve $x^2y''=\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}$ olacağından verilen

denklemde yerlerine yazılırsa

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-2\frac{dy}{dt}+2y=e^{3t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^{3t} \Rightarrow y''-3y'+2y=e^{3t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=+1 \text{ ve } \lambda_2=+2$$

$\Rightarrow y_h=c_1e^t+c_2e^{2t}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p=Ae^{3t}$ kabul edilirse $y_p'=3Ae^{3t}$ ve $y_p''=9Ae^{3t}$ old.

$$9Ae^{3t}-3.3Ae^{3t}+2Ae^{3t}=e^{3t}$$

$$\Rightarrow 2Ae^{3t}=e^{3t} \Rightarrow A=1/2$$

$\Rightarrow y_p=\frac{1}{2}e^{3t}$ olup genel çözüm

$$y=y_h+y_p=c_1e^t+c_2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}$$

ve $e^t=x$ olduğundan

$y=c_1x+c_2x^2+\frac{1}{2}x^3$ bulunur.

ÖRNEK : $x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=4\ln x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $x=e^t \Rightarrow t=\ln x$ dönüşümü yapılırsa ve

$xy'=\dfrac{dy}{dt}$, $x^2y''=\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}$, $x^3y'''=\dfrac{d^3y}{dt^3}-3\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}$

türevleri verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)-4\cdot\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+8\frac{dy}{dt}-8y=4t$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dt^3}-7\frac{d^2y}{dt^2}+14\frac{dy}{dt}-8y=4t$$

(27)

$\Rightarrow \quad y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 4t \quad \ldots\ldots (*)$

$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$ karakteristik denklemini $\lambda_1 = 1$ değeri sağladığı için polinom bölmesiyle

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 & \lambda - 1 \\ \quad \vdots & \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ \quad = 0 & \end{array}$$

olacağından $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = \underbrace{(\lambda - 1)}_{\lambda_1 = 1}\underbrace{(\lambda^2 - 6\lambda + 8)}_{\lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4}$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t}$

homojen çözümü bulunur. Özel çözüm için

$$y_p = At + B$$

kabul edilirse

$$y_p' = A \quad , \quad y_p'' = 0 \quad , \quad y_p''' = 0$$

olacağından bu türevler $(*)$'da yerine yazılırsa

$$0 - 7.0 + 14.A - 8(At + B) = 4t + 0$$

$$\Rightarrow -8At + 14A - 8B = 4t + 0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad B = -\frac{7}{8}$$

$\Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{2}t - \frac{7}{8}$ özel çözümü ve

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} - \frac{1}{2}t - \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \frac{1}{2}\ln x - \frac{7}{8}$$

genel çözümü bulunur.