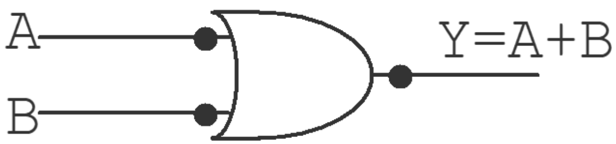
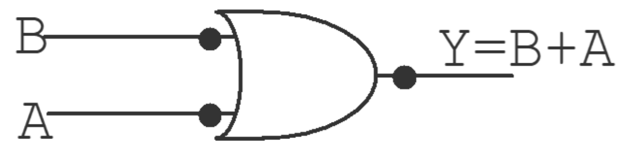
BOOLEAN CEBİR VE SADELEŞTİRME

Bollean Cebir Kuralları:

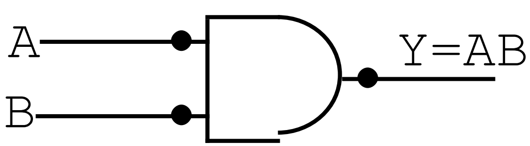
1. Momutatif Kural (Commutative Law):

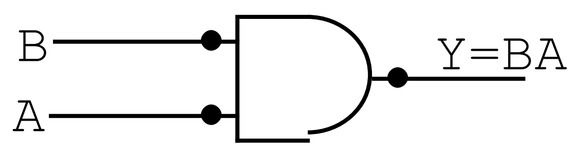
a) A + B = B + A





b) AB = BA



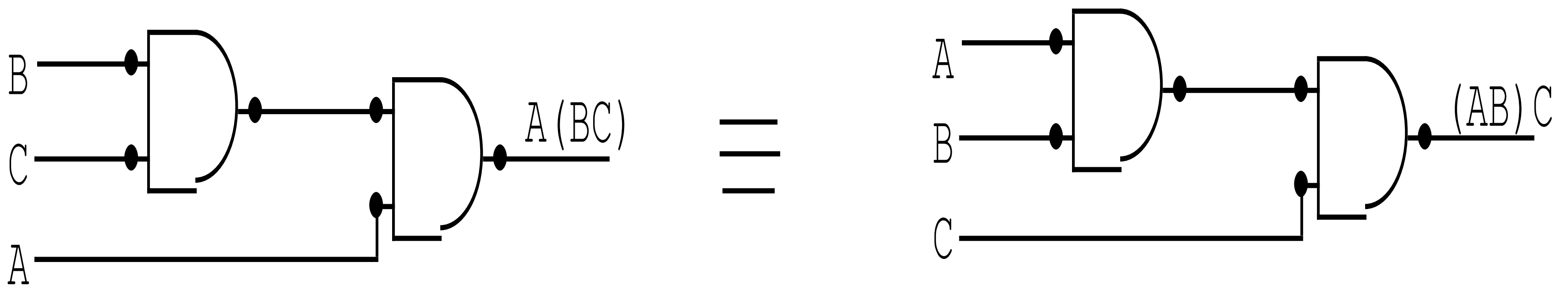


NOT: Kapı girişlerindeki sıra ne olursa olsun işlem aynıdır.

2. Birleşme Kuralı (Associative Law):

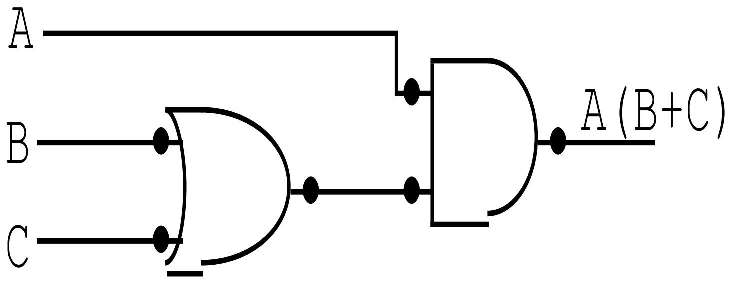
a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

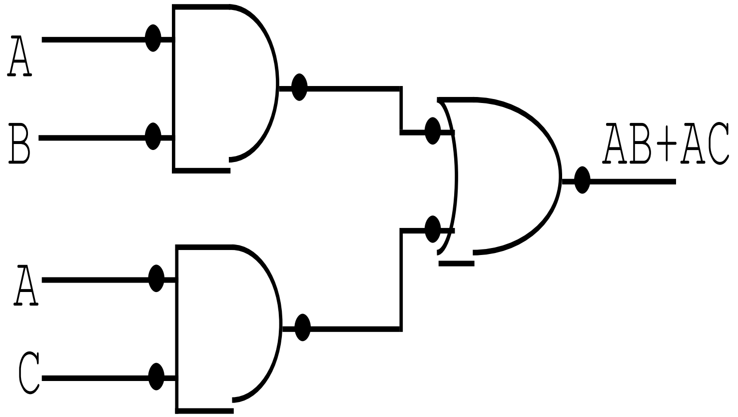
b) $A(BC) = (AB)C$



3. Dağılım Kuralı (Distribute Law):

A(B + C) = AB + AC





Temel Cebir Kuralları:

1. $A + 0 = A$

Sıfır ile OR yapmak 0 değişken kendisini verir.

2. $A + 1 = 1 \Rightarrow A = 0 \rightarrow 0 + 1 = 1$

$$A = 1 \rightarrow 1 + 1 = 1$$

Bir sayıyı 1 ile OR yapmak her zaman 1'i verir.

3. $A \,.\, 0 = 0$

Sıfır ve AND yapmak her zaman sıfır verir.

4. A . 1 = A eğer A = 0 $\rightarrow$ 0 . 1 = 0

A = 1 $\rightarrow$ 1 . 1 = 1

5. A + A = A eğer A = 0 $\rightarrow$ 0 + 0 = 0

A = 1 $\rightarrow$ 1 + 1 = 1

Kendisi ile OR yapmak yine kendisini verir.

6. $A + \overline{A} = 1$ $$A = 0 \Rightarrow \overline{A} = 1 \Rightarrow 0 + 1 = 1$$

$$A = 1 \Rightarrow \overline{A} = 0 \Rightarrow 1 + 0 = 1$$

Değerli ile OR yapmak her zaman 1 verir.

7. A . A = A A = 1 $\rightarrow$ 1 . 1 =1

A = 0 $\rightarrow$ 0 . 0 = 0

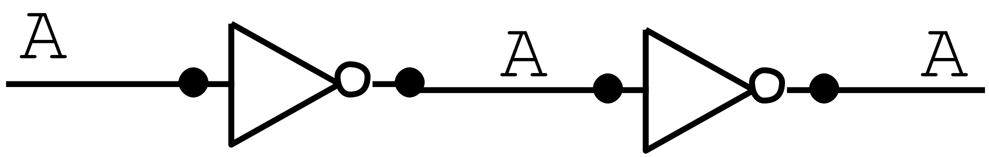
8. $A \, . \, \overline{A} = 0$

$$A = 1 \Rightarrow \overline{A} = 0 \Rightarrow 1 \, . \, 0 = 0$$

$$A = 0 \Rightarrow \overline{A} = 1 \Rightarrow 0 \, . \, 1 = 0$$

Değili ile AND yapmak her zaman “0” verir.

9. $\overline{\overline{A}} = A$



İki defa değil yapmak kendisini verir.

10. A + A . B = A

Isbat:

A parantezine alınırsa,

A (1 + B) = A . 1 = A

11. $A + \overline{A} \, . \, B = A + B$

İsbat:

A yerine A + AB koyunuz.

$(A + AB) + \overline{A}B$

A yerine A . A ve fazladan bir $A\overline{A}$ terimi yazınız.

AA = 0 olduğundan ve 0 + A fonksiyonu değiştirmediğinden

$A\overline{A}$ 'I ilave etmek fonksiyonu değiştirmez.

$AA + A\overline{A} + AB + \overline{A}B$

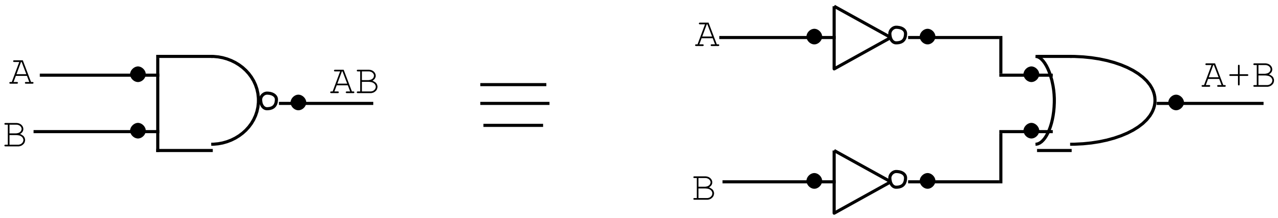
$= (A + \overline{A})\,(A + B)$

= 1 . (A + B) =A + B

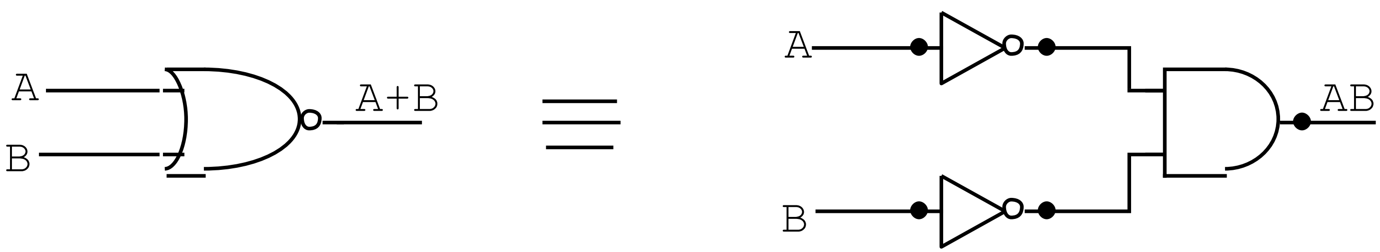
12. **(A + B) . (A + C) = A + BC**

De Morgan Kuralları:

1. AB = A + B



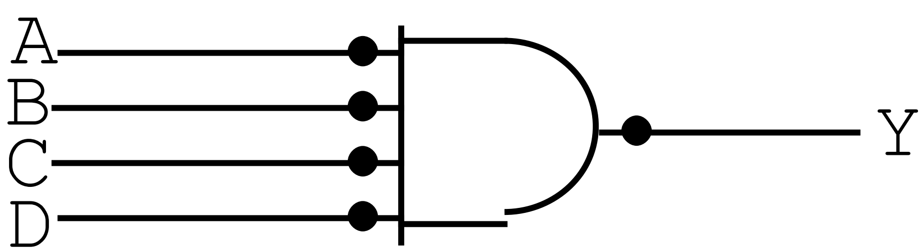
2. A + B = A . B



Örnek:

De Morgan kurallarını uygulayınız.

1) $Y = \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{D}} = ABCD$



2) $$\overline{(\underbrace{\overline{A + B\overline{C}}}_{K}) + (D(\underbrace{\overline{E + \overline{F}}}_{L}))}$$

$$\overline{K} \,.\, \overline{L} = (\overline{\overline{A + B\overline{C}}})\,(\overline{D(\overline{\overline{E + \overline{F}}})})$$

$$= (A + B\overline{C})\,(\overline{D}(E + \overline{F}))$$

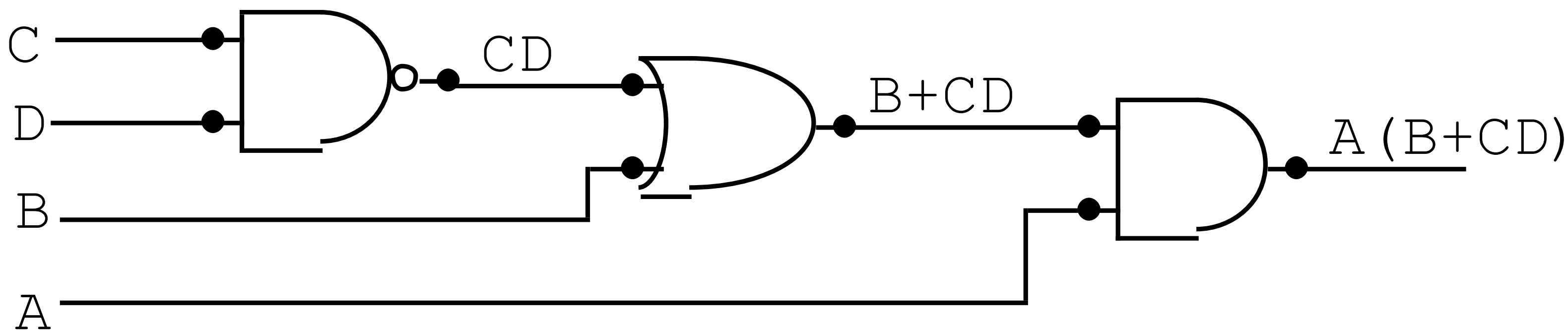
$$= (A + B\overline{C})\,(\overline{D} + E + \overline{F})$$

$$= A\overline{D} + AE + A\overline{F} + B\overline{C}\overline{D} + B\overline{C}\overline{F} + B\overline{C}\overline{F}$$

3) $$\overline{(A + B) + \overline{C}} = \overline{(A + B)}\;\overline{\overline{C}}$$

$$= \overline{A} \,.\, \overline{B} \,.\, C$$

Boolean Cebir Kurallarına Göre Mantık Devrelerinin Analizi:



Doğruluk Tablosu:

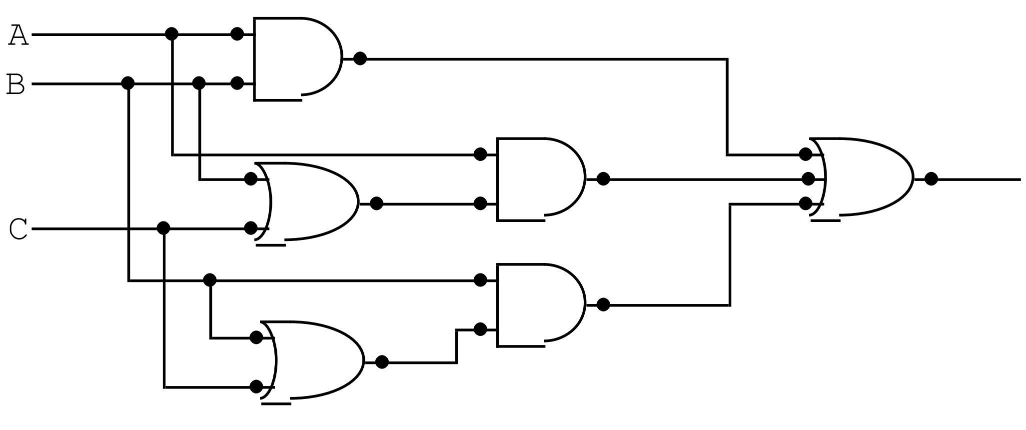
A	**B**	**C**	**D**	**A(B + CD)**
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

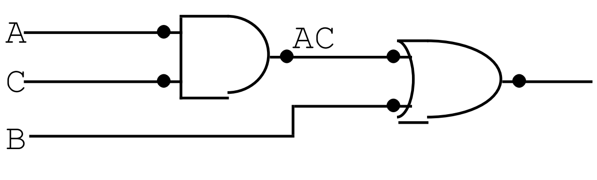
Boolean Cebir’i Kullanarak Basitleme:

Örnek1:

AB + A(B + C) + B(B + C)

= AB + AB + AC + BB + BC
= AB + AC + B + BC
= AB + AC + B + BC
= AB + AC + B $\Rightarrow$ AC + B





Örnek2:

$$\overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + ABC + ABC$$

$$= BC(\overline{A} + \overline{A}) + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

$$= BC + A\overline{B}\,(\overline{C} + C) + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

$$= BC + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

$$= BC + \overline{B}(A + \overline{A}\,\overline{C})$$

$$= BC + \overline{B}(A + \overline{C})$$

$$= BC + \overline{B}A + \overline{B}\,\overline{C}$$

İlk devre, sadeleştirilmiş devreye göre;

- Daha az karmaşıktır.
- Daha az malzeme kullanılır.
- Daha kolay kurulur.
- Daha ucuzdur.
- Daha hızlıdır.

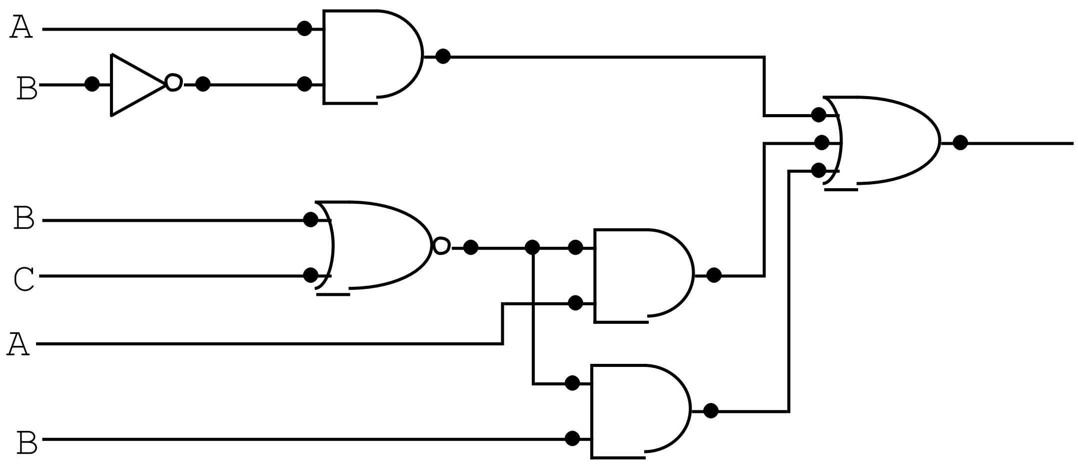
Örnek3:

$$A\overline{B} + A(\overline{B + C}) + B(\overline{B + C})$$

AND *NOR* *NOR*

AND AND

OR



1INVERTER
1 2 girisli NOR
3 2 girisli AND
1 3 girisli OR

6 gate

$$A\overline{B} + A(\overline{B + C}) + B(\overline{B + C})$$

$$= A\overline{B} + A\overline{B}\,\overline{C} + B\overline{B}\,\overline{C}$$

$$= A\overline{B}(1 + \overline{C}) + 0$$

$$= A\overline{B}$$

Fonksiyonlar, toplamların çarpımı (product of sums (POS)) veya çarpımların toplamı (sum of products(SOP)) şeklinde bulunabilir.

1. Toplamların Çarpımı (Product of Sums, POS) Formu:

$$Y = (A + B + \overline{C})\,(A + \overline{B})\,(A + C) \Longrightarrow POS$$

2. Çarpımların Toplamı (Sum of Products, SOP) Formu:

$$Y = ABC + A\overline{B} + \overline{A}C \Longrightarrow SOP$$

FONKSİYONLARIN STANDART FORMLARI

Herhangi bir fonksiyonun, standart formunda tüm değişkenler, her terimde kendisi veya değili olarak bulunmalıdır.

Örnek: $Y = AB + ABC$

A, B, C $\rightarrow$ fonksiyon değişkenleri

1) Terimlerdeki eksik değişkenler ile (kendisi + değili) ilgili terimler çarpılmalıdır.

2) Daha sonra parantezlerde ortadan kaldırılmalıdır.

Terim1:

AB $\rightarrow$ “C” eksik

$$AB\,(C + \overline{C}) = (AB\,.\,1 = AB)$$

Terim2:

$A\overline{B}\overline{C}$ $\rightarrow$ üç değişkende mevcuttur

$$Y_s = AB(C + \overline{C}) + A\overline{B}\overline{C}$$

$$Y_s = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} = Y$$

Örnek:

$$Y = (A + \overline{B} + C)\,(\overline{B} + C + \overline{D})\,(A + \overline{B} + \overline{C} + D)\;;$$

standart POS şeklinde ifade ediniz.

Çözüm: A, B, C, D $\rightarrow$ değişkenler

$$T1 \quad (A + \overline{B} + C) \quad \text{"D" eksik}$$

$$T2 \quad (B + C + \overline{D}) \quad \text{"A" eksik}$$

$$T1 = A + \overline{B} + C \;\rightarrow\; (A + \overline{B} + C + D) \,.\, (A + \overline{B} + \overline{C} + D)$$

$$T2 = \overline{B} + C + \overline{D} \;\rightarrow\; (\overline{B} + C + \overline{D} + A) \,.\, (\overline{B} + C + \overline{D} + \overline{A})$$

$$T3 = A + \overline{B} + \overline{C} + D \quad \text{standarttır.}$$

$$Y_s = (A + \overline{B} + C + D) \,.\, (A + \overline{B} + C + \overline{D}) \,.\, (A + \overline{B} + C + \overline{D})$$

$$= (\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D}) \,.\, (A + \overline{B} + \overline{C} + D)$$

Örnek:

Y = AB + C , SOP formundaki Y'yi satndart forumda yazınız.

Çözüm:

T1 = AB C eksiktir.

$$AB\,(C + \overline{C})$$

T2 = C AB eksiktir.

$$C\,(A + \overline{A})\,(B + \overline{B})$$

$$Y_s = AB\,(C + \overline{C}) + C\,(A + \overline{A})\,(B + \overline{B})$$

$$Y_s = ABC + AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C$$

POS – SOP Dönüşümü:

$(A + B)\,(A + B + C) \rightarrow$ POS

❖Parantezler direk olarak çarpılır.

POS $\rightarrow$ SOP $\Rightarrow$ paranteleri direk olarak çarpıp açınız.

$$(A + B)\,(\overline{A} + \overline{B} + C) = A\overline{A} + A\overline{B} + AC + \overline{A}B + B\overline{B} + BC$$

$$= A\overline{B} + AC + \overline{A}B + BC$$

SOP – POS Dönüşümü:

Örnek:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$$

A, B, C $\rightarrow$ n = 3 = 2^3 = 8 kombinezonu vardır. (değiline 0, kendisine 1 yaz)

A	B	C	
0	0	0	
0	**0**	**1**	$\rightarrow$ABC $\rightarrow$ (A + B + C)
0	1	0	
0	1	1	
1	**0**	**0**	$\rightarrow$ABC $\rightarrow$ (A + B + C)
1	0	1	
1	**1**	**0**	$\rightarrow$ ABC $\rightarrow$ (A + B + C)
1	1	1	

$$Y = (A + B + \overline{C}) \,.\, (\overline{A} + B + C) \,.\, (\overline{A} + \overline{B} + C)$$

KARNAUGH HARİTALARI KULLANARAK SADELEŞTİRME

KARNAUGH Haritaları:

❖2 Değişkenli Fonksiyonların Haritaları:

$n = 2 \Rightarrow 2^2 = 4$ değişik kombinezon $\Rightarrow$ haritada 4 değişik yer vardır.

A \ B	0	1
0	00 AB	01 AB
1	10 AB	11 AB

Örnek:

$$Y = AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

fonksiyonunu K-MAP (Karnaugh Mapping) haritalarına yerleştiriniz.

Çözüm:

Değişkenler $\rightarrow$ A, B $\Rightarrow$ 2 değişken $\Rightarrow$ 4 değişik durumu vardır.

A \ B	0	1
0	1	
1		1

Örnek:

$Y = \overline{A}B + \overline{B}A$ K-MAP üzerinde gösteriniz

Çözüm:

Y standart forumdadır.

A \ B	0	1
0		1
1	1	

Örnek:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{B} + \overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{A}}$$

Y’yi satndart hale getiriniz.

Çözüm:

$$\mathrm{Y_s} = \mathrm{B}\,(\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}}) + \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}$$

$$= \mathrm{BA} + \mathrm{B}\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}} \Leftrightarrow AB + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}$$

A \ B	0	1
0	1	1
1	1	

2 değişkenli bir fonksiyon haritalandırılırken;

- 2 değişkenli terimler $\Rightarrow$ haritada bir bölgede olur.
- 1 değişkenli terimler $\Rightarrow$ haritede iki bölgede olur.
- Verilen fonksiyon olarak haritalandırılabileceği gibi önce standart hale getirerek de haritalandırılabilir.

❖3 Değişkenli Fonksiyonların Haritaları:

3 değişken $\rightarrow 2^3 = 8$ değişik kombinezon $\Rightarrow$ haritada 8 değişik bölge vardır.

A \ BC	00	01	11	10
0	000 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	001 $\bar{A}\bar{B}C$	011 $\bar{A}BC$	010 $\bar{A}B\bar{C}$
1	100 $A\bar{B}\bar{C}$	101 $A\bar{B}C$	111 ABC	110 $AB\bar{C}$

Örnek:

$$Y = ABC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$ 3 değişkenli $\rightarrow$ A, B, C standarttır.

Çözüm:

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1			1	

Örnek:

$$Y = A + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$ K-MAP üzerinde gösteriniz.

Çözüm:

1.yol: $$Y_s = A(B + \overline{B})\,.\,(C + \overline{C}) + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

$$= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1			
1	1	1	1	1

$$2.\text{yol}: Y = A + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1			
1	1	1	1	1

Örnek: $Y = \overline{B}$ K-MAP üzerinde gösteriniz.

Çözüm: Değili olduğunda “0” olan yerlerdir.

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

❖4 Değişkenli Fonksiyonların Haritaları:

n = 4 $\Rightarrow$ 2^4 = 16 değişik kombinezon $\Rightarrow$ 16 değişik bölge vardır.

AB \ CD	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

Y = Σ (1, 3, 5, 7) = ?

$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD$$

Örnek:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD$$ Y standarttır.

Çözüm:

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	
01				
11		1		
10				

NOT: 3 değişkenli bir fonksiyonu;

3 değişkenli terimler → 1 bölge

2 değişkenli terimler → 2 bölge

1 değişkenli terimler → 4 bölge

Örnek:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D} + A\overline{B}CD$$ standarttır.

Çözüm:

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			
01				
11				1
10			1	

Örnek:

$$Y = AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}D$$

Standart degil Standart

Çözüm: $Y_s\,(A, B, C, D) = AB\overline{C}\,(D + \overline{D}) + A\overline{B}\,\overline{C}D$

$$= AB\overline{C}D + AB\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D$$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1		
10		1		

1.yol:

Önce Y standart hale getirilir sonra tek tek terimler haritaya işlenir.

2.yol: Direk olarak haritaya işlenir.

$$Y = AB\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}D$$

A = 1
B = 1 "D" dikkate alınmaz.
C = 0

1100 1101 yerlerine istenen şartlar sağlanır. Bu iki yerin ikisine birden "1" yerleştirilir.

Örnek:

$$Y\,(A, B, C, D) = A\overline{B} + (A\overline{B}CD)$$

Çözüm:

1.yol: $Y_s\,(A, B, C, D) = A\overline{B} + (C + \overline{C})\,.\,(D + \overline{D}) + A\overline{B}CD$

$$= A\overline{B}\,(CD + C\overline{D} + \overline{C}D + \overline{C}\,\overline{D}) + A\overline{B}CD$$

$$= A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

2.yol: $Y\,(A, B, C, D) = A\overline{B} + (A\overline{B}CD)$

A = 1 olan yerler, C & D dikkate alınmaz.
B = 0

Sonuç:

4 değişkenli fonksiyonda üç değişken terimler, haritada iki yer tutar.

1000

1001 yerlerinde A = 1 B = 0 şartı sağlanır. 4 yere birden yazılır.

1011

1010

Örnek:

$$Y\,(A, B, C, D) = \overline{A} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

Çözüm:

A = 0 yerlerine 1 yazınız.

$$(1)\quad Y_s\,(A, B, C, D) = \overline{A}\,(B + \overline{B})\,(C + \overline{C})\,(D + \overline{D}) + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= \overline{A}\,(BCD + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}CD + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D})\,A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$(2)\qquad Y\,(A, B, C, D) = \overline{A} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

A = 0 olan tüm yerler. B, C, D dikkate alnmaz.

NOT: 4 değişkenli bir fonksiyonda 1 değişkenli terimler haritada 8 yer alır.

Örnek:

$$Y\,(A, B, C, D) = \overline{B} + ABC + \overline{A}\,\overline{C} + ABC\overline{D} \quad ,$$

K-MAP üzerinde gösteriniz.

Çözüm:

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1		
11			1	1
10	1	1	1	1

1. Terim: $\overline{B} \rightarrow B = 0$ olan tüm yerler.

0000
0001
0011 yerlerine B = 0
0010 tümüne “1” yazılır.
1000 (8 yer)
1001
1011
1010

2. Terim: ABC A = 1, B = 1, C = 1 yerleri

1111 yerlerinde tümüne “1” yazılır.
1110

3. Terim: $\overline{A}\,\overline{C}$ A = 0, C = 0 yerleri

0000 yerlerinde
0001 A = 0 şartı sağlanır. Tümüne "1" yazılır.
0100 C = 0
0101

4 yer, ancak ikisi daha önce kullanıldığı için geri kalan ikisine "1" yazılır.

4. Terim: $ABC\overline{D}$ Standarttır.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & \overline{D} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

1 yer; daha önce 1110 yeri kullanıldığı için yine aynı yere "1" koymaya gerek yoktur.

K – MAP SADELEŞTİRME

K – MAP kullanarak sadeleştirmede dikkat edilecek kurallar.

1. 2^n kadar 1 aynı gruba dahil edilebilir.
   2^n = 2, 4, 8, 16,…
2. Maximum sayıda 1'in aynı gruba dahil edilmesine dikkat edilmelidir.
3. Yatay ve dikey komşu olan "1" ler aynı grupta yer alabilir.
4. Ortak elemanlı gruplar olabilir.
5. K – MAP bükülüp döndürülerek komşuluklar yaratılır.
6. Bir grubun ismi; o grupta DEĞİŞMEYEN değişkenlerden oluşur.
7. Tüm "1" ler herhangi bir grupta yer almalıdır.

2 Değişkenli K – MAP Sadeleştirme:

Örnek: $Y\,(A, B) = \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + AB$

Y fonksiyonunu K – MAP kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm:

A \ B	0	1
0	$\overline{A}\,\overline{B}$ 1	$\overline{A}B$
1	$A\overline{B}$ 1	AB 1

$\rightarrow$ grup1 = A

$\downarrow$ Grup2 = $\overline{B}$

Grup yaptıktan sonra; grup ismlerini yazarken "AB" diye yazılır ve gruplara bakarız, harfleri aynı olan değişkenleri alırız ve ismi onun adı olur.

3 Değişkenli K – MAP Sadeleştirme:

Örnek: $Y\ (A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}BC$

Y’yi K – MAP kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm:

A \ B	00	01	11	10
0	ABC 1		ABC 1	
1	ABC 1			ABC 1

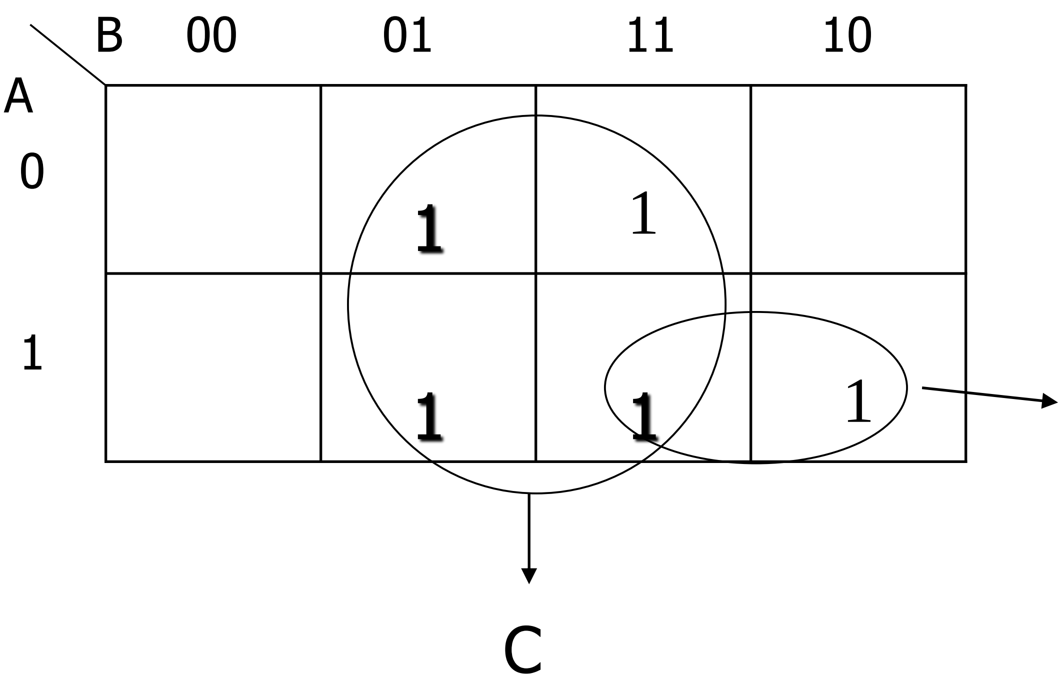
3D→3D haritada

Ys (A, B, C) = BC + AC + ABC

Örnek:

Y (A, B, C) = AB + C , Y’yi K – MAP kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm:



Verilen Y sadeleştirilmiş durumdadır.
Ys (A, B, C) = C + AB

AB

Örnek:

$$Y\,(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$

Çözüm:

A \ B	00	01	11	10
0	1			1
1	1			1

Ys = C

4 Değişkenli K – MAP Sadeleştirme:

Örnek:

Y(A,B,C,D) = Σ(1,3,5,8,9,11,15) , Y'yi K – MAP kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm:

	1	1	
		1	
1	1	1	

$$Y(ABCD) = \Sigma(1,3,5,8,9,11,15) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD + ABCD$$

$$Ys(A,B,C,D) = ACD + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}D$$

Örnek:

$$Y\ (A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + ABD + BC + D$$

, Y’yi sadeleştiriniz.

Çözüm:

1	1	1	
	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	

$$Ys\ (A,B,C,D) = D + BC + AB + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$