4.4. SABİT KATSAYILI, HOMOJEN OLMAYAN LİNEER DİF. DENKLEMLER

n- yinci mertebeden sabit katsayılı ve homojen olmayan bir lineer dif. denklem

$$b_n(x).\, y^{(n)} + b_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + b_1(x)\, y' + b_0(x)\, y = g(x) \dots (4.15)$$

şeklindeydi. Böyle bir denklemin genel çözümü $y = y_h + y_p$ şeklinde veriliyordu. Eğer $g(x) = 0$ ise denklemin homojen çözümü y_h idi ve bundan önceki kısımda homojen bir dif. denklemin nasıl çözüleceğini gördük. Şimdi ise amacımız $g(x) \neq 0$ iken yani homojen olmayan bu denklemin bir özel çözümü olan ve keyfi sabit sayı içermeyen y_p çözümünü ve sonuç olarak da (4.15) denkleminin genel çözümünü bulmaktır.

y_p nin bulunması ile ilgili olarak birkaç metot geliştirilmiştir. Bu metotlardan "Belirsiz katsayılar Metodu" ve "Parametrelerin değiştirilmesi metodu" nu inceleyeceğiz.

A) BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

Metodun Basit Hali

Belirsiz katsayılar metodu, yalnızca eğer $g(x)$ ve tüm türevleri $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ ile gösterilen aynı sonlu lineer bağımsız fonksiyonlar kümesi cinsinden yazılabiliyorsa uygulanabilir. Metoda $A, B, C, \dots$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y_p = A y_1(x) + B y_2(x) + C y_3(x) + \dots + K y_n(x)$$

biçiminde bir özel çözüm kabul edilerek başlanır. Daha sonra bu çözüm dif. denklemde yerine yazılıp benzer terimlerin katsayıları eşitlenerek $A, B, C, \dots$ sabitleri bulunur.

I. **Durum** : $g(x) = P_n(x)$ ise

(Yani eşitliğin sağ tarafı n-yinci dereceden bir polinom ise)

$$y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + Kx + M$$

biçiminde bir çözüm kabul edilir.

II. **Durum** : $g(x) = ke^{ax}$ ise (a ve k sabit)

$$y_p = Ae^{ax}$$

biçiminde bir çözüm kabul edilir.

III. **Durum** : $g(x) = k_1 \sin \beta x + k_2 \cos \beta x$ ise (k_1, k_2, β sabit)

$$y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x$$

biçiminde bir özel çözüm kabul edilir.

Uyarı : k_1 ve k_2 'den birisi sıfır bile olsa III. durumdaki y_p geçerlidir. Mesela $g(x) = k_1 \sin \beta x$ olsa bile

$$y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x$$

dır.

Genelleştirmeler :

Eğer $g(x)$ terimi, yukarıda verilen 3 farklı fonksiyon türünün herhangi ikisinin veya hepsinin birbiriyle çarpımı ise, y_p bunlara karşılık kabul edilen çözümlerin çarpımı olarak alınır ve bunlar birleştirilir. Örneğin

$g(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$ ise (Üstel ile polinomun çarpımı ise)

$$y_p = e^{ax}(Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Kx + M)$$

kabul edilir. Eğer

$g(x) = P_n(x) \cdot \sin \beta x$ ise

$$y_p = (Ax^n + \dots + Kx + M)\sin \beta x + (Ax^n + \dots + Kx + M)\cos \beta x$$

kabul edilir.

Değişiklikler

Eğer keyfi sabitler göz ardı edildiğinde, kabul edilen y_p çözümünün herhangi bir terimi y_h nın de bir terimi ise, o zaman kabul edilen y_p çözümü x^m ile çarpılarak değiştirilmelidir. Burada m sayısı, terimlerdeki farklılığı sağlayacak en küçük pozitif tam sayıdır.

ÖRNEK : $y'' - y' - 2y = 4x^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Öncelikle denklemin homojen çözümünü bulalım.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ ve } \lambda_2 = 2.$$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ homojen çözümü bulunur.

Şimdi de y_p özel çözümünü bulalım:

$g(x) = 4x^2$ bir polinom old. I. Duruma göre

$y_p = Ax^2 + Bx + C$ kabul edelim. Böylece

$y_p' = 2Ax + B$ ve

$y_p'' = 2A$

olur. y_p, y_p' ve y_p'' ifadeleri verilen dif. denklemde yerine yazılırsa

$$y'' - y' - 2y = 4x^2$$

$$\Rightarrow 2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-2A)}_{=4}x^2 + (\underbrace{-2A-2B}_{=0})x + (\underbrace{2A-B-2C}_{=0}) = 4x^2 + 0x + 0$$

Buradan $A=-2$, $B=2$, $C=-3$ bulunur. Böylece

$y_p = -2x^2 + 2x - 3$ özel çözümü bulunur. Dolayısıyla genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$$

olur.

ÖRNEK : $y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$ denkleminin çözünüz.

Çözüm : önceki sorudan $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ bulunmuştu.

$g(x) = 8e^{3x}$ old. II. Duruma göre

$$y_p = Ae^{3x}$$

kabul edelim. Buradan

$$y_p' = 3Ae^{3x} \quad \text{ve}$$

$$y_p'' = 9Ae^{3x}$$

bulunur. Bu ifadeler verilen dif. denklemde yerine yazılırsa,

$$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 8e^{3x}$$

$$\Rightarrow 4Ae^{3x} = 8e^{3x} \Rightarrow 4A = 8 \Rightarrow A = 2$$

$\Rightarrow \quad y_p = Ae^{3x} = 2e^{3x}$ özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + 2e^{3x}$$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y'' - y' - 2y = 3\sin 2x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ bulunmuştu.

$g(x) = 3\sin 2x$ old. III. duruma göre

$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$ kabul edelim. Buradan

$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$

$$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

ifadeleri verilen denklemde yerine yazılırsa

$$(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) - (2A\cos 2x - 2B\sin 2x) - 2(A\sin 2x + B\cos 2x) = 3\sin 2x$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-6A+2B)}_{=3}\sin 2x + \underbrace{(-6B-2A)}_{=0}\cos 2x = 3\cdot\sin 2x + 0\cdot\cos 2x$$

$\Rightarrow A = \frac{19}{20}, \quad B = -\frac{19}{60} \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{19}{20}\sin 2x - \frac{19}{60}\cos 2x$ olup

genel çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{19}{20}\sin 2x - \frac{19}{60}\cos 2x$$

dır.

ÖRNEK : $y' - 5y = 2e^{5x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 5$ olup $y_h = c_1 e^{5x}$ homojen çözümü bulunur.

$g(x) = 2e^{5x}$ olduğundan y_p nin tahmini II. Duruma göre $y_p = Ae^{5x}$ olur. Fakat y_p ile y_h aynı biçimde olduğundan y_p 'yi değiştirmemiz gerekir. y_p 'yi x ile çarparsak $(m = 1)$

$$y_p = Axe^{5x}$$

elde edilir. Bu ifadenin y_h ile hiçbir ortak terimi olmadığından özel çözüm olarak kabul edilebilir. Türev alınırsa

$$y_p' = Ae^{5x} + 5Axe^{5x}$$

olup verilen dif. denklemde yerine yazılırsa

$$\left(Ae^{5x} + 5Axe^{5x}\right) - 5\left(Axe^{5x}\right) = 2e^{5x}$$

$$\Rightarrow \quad Ae^{5x} = 2e^{5x}$$

$$\Rightarrow \quad A = 2$$

bulunur. Böylece

$$y_p = 2xe^{5x}$$

özel çözümü elde edilir. Dolayısıyla genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{5x} + 2xe^{5x}$$

bulunur.

ÖRNEK : $y'' + 4y = 5\cos 2X$ denkleminin çözünüz.

Çözüm : $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i = 0 \pm 2i$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{0X}\cos 2X + c_2 e^{0X}\sin 2X$$

$$\Rightarrow y_h = c_1\cos 2X + c_2 \sin 2X$$

homojen çözümü elde edilir.

Şimdi de y_p özel çözümünü bulalım. Öncelikle

$$y_p = A\sin 2X + B\cos 2X$$

kabul edelim. Bu kabuldeki $\cos 2X$ ile y_h çözümündeki $\cos 2X$ aynı biçimde old. y_p yi değiştirmeliyiz. Bu nedenle y_p'yi X ile çarparsak

$$y_p = Ax\sin 2X + BX\cos 2X$$

olur. Türev alınırsa

$$y_p' = A\sin 2X + AX\cdot 2\cos 2X + B\cos 2X + BX(-2\sin 2X)$$

$$\Rightarrow y_p'' = 2A\cos 2X + A\cdot 2\cos 2X + AX(-4\sin 2X) + (-2B\sin 2X)$$
$$+ B(-2\sin 2X) + BX(-4\cos 2X)$$

olup bunlar verilen dif. denklemde yerlerine yazılırsa,

$$[4A\cos 2X - 4AX\sin 2X - 4B\sin 2X - 4BX\cos 2X]$$
$$+ 4[AX\sin X + BX\cos 2X] = 5\cos 2X$$

$$\Rightarrow \underbrace{4A}_{=5}\cos 2X - \underbrace{4B}_{=0}\sin 2X = 5\cos 2X + 0.\sin 2X$$

$$\Rightarrow A = \frac{5}{4} \quad \text{ve} \quad B = 0$$

$$\Rightarrow y_p = Ax\sin 2X + BX\cos 2X = \frac{5}{4}X\sin 2X + 0$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = c_1\cos 2X + c_2\sin 2X + \frac{5}{4}X\sin 2X$$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y''' - y' = 3e^{2x} + 4e^{-x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=+1$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1e^{0x} + c_2e^{x} + c_3e^{-x}$ homojen çözümü bulunur.

Şimdi y_p özel çözümünü bulalım :

Eğer $y_p = Ae^{2x} + Be^{-x}$ kabul edilirse y_p'deki Be^{-x} ile y_h'deki c_3e^{-x} aynı biçimden olur. O zaman Be^{-x} terimi x ile çarpılmalıdır. Yani

$$y_p = Ae^{2x} + Bxe^{-x} \quad \text{kabul edilirse}$$

$$y_p' = 2Ae^{2x} + Be^{-x} - Bxe^{-x}$$

$$y_p'' = 4Ae^{2x} - Be^{-x} - (Be^{-x} + Bx(-e^{-x}))$$

$$= 4Ae^{2x} - 2Be^{-x} + Bxe^{-x}$$

$$y_p''' = 8Ae^{2x} + 2Be^{-x} + (Be^{-x} + Bx(-e^{-x}))$$

$$= 8Ae^{2x} + 3Be^{-x} - Bxe^{-x}$$

bulunur. Bu terimler verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$(8Ae^{2x} + 3Be^{-x} - Bxe^{-x}) - (2Ae^{2x} + Be^{-x} - Bxe^{-x}) = 3e^{2x} + 4e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad 6Ae^{2x} + 2Be^{-x} = 3e^{2x} + 4e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad 6A=3 \quad \text{ve} \quad 2B=4 \Rightarrow A=1/2 \quad \text{ve} \quad B=2 \quad \text{olup}$$

$$y_p = \frac{1}{2}e^{2x} + 2xe^{-x} \quad \text{özel çözümü ve böylece}$$

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2xe^{-x}$$

genel çözümü elde edilir.

(18)

ÖRNEK: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$ denk. çözünüz.

Çözüm: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad$ ve $\quad \lambda_3 = 3$ olacağından

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ homojen çözümü bulunur.

Şimdi y_p özel çözümünü araştıralım:

$g(x) = 2xe^{-x}$ ifadesi bir polinom ile üstelin çarpımı old.

$$y_p = (Ax + B) \cdot e^{-x}$$

kabul edelim. Böylece

$$y_p' = -Axe^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x}$$

$$y_p'' = Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + Be^{-x}$$

$$y_p''' = -Axe^{-x} + 3Ae^{-x} - Be^{-x}$$

türevleri, verilen dif. denklemde yerlerine yazılırsa

$$(-Axe^{-x} + 3Ae^{-x} - Be^{-x}) - 6(Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + Be^{-x})$$
$$+ 11(-Axe^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x}) - 6(Axe^{-x} + Be^{-x}) = 2xe^{-x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-24A}_{=2}xe^{-x} + (\underbrace{26A - 24B}_{=0})e^{-x} = 2xe^{-x} + 0 \cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{12}, \quad B = \frac{-13}{144}$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y' - 5y = 3e^{x} - 2x + 1$ denklemini çözünüz. (19)

Çözüm : $\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{5x}$ homojen çözümü elde edilir.

$g(x) = 3e^{x} - 2x + 1$ ifadesi üstel fonk. ile polinomun toplamı olduğundan

$y_p = Ae^{x} + (Bx + C)$ kabul edilirse

$y_p' = Ae^{x} + B$

olup verilen denklemde yerine yazılırsa

$Ae^{x} + B - 5(Ae^{x} + Bx + C) = 3e^{x} - 2x + 1$

$\Rightarrow -4Ae^{x} - 5Bx + (B - 5C) = 3e^{x} - 2x + 1$

$\Rightarrow -4A = 3, \quad -5B = -2, \quad B - 5C = 1$

$\Rightarrow A = -3/4 \quad B = 2/5 \quad C = -3/25$

$\Rightarrow y_p = -\frac{3}{4} e^{x} + \frac{2}{5} x - \frac{3}{25}$

özel çözümü ve böylece

$y = y_h + y_p = c_1 e^{5x} - \frac{3}{4} e^{x} + \frac{2}{5} x - \frac{3}{25}$

genel çözümü elde edilir.