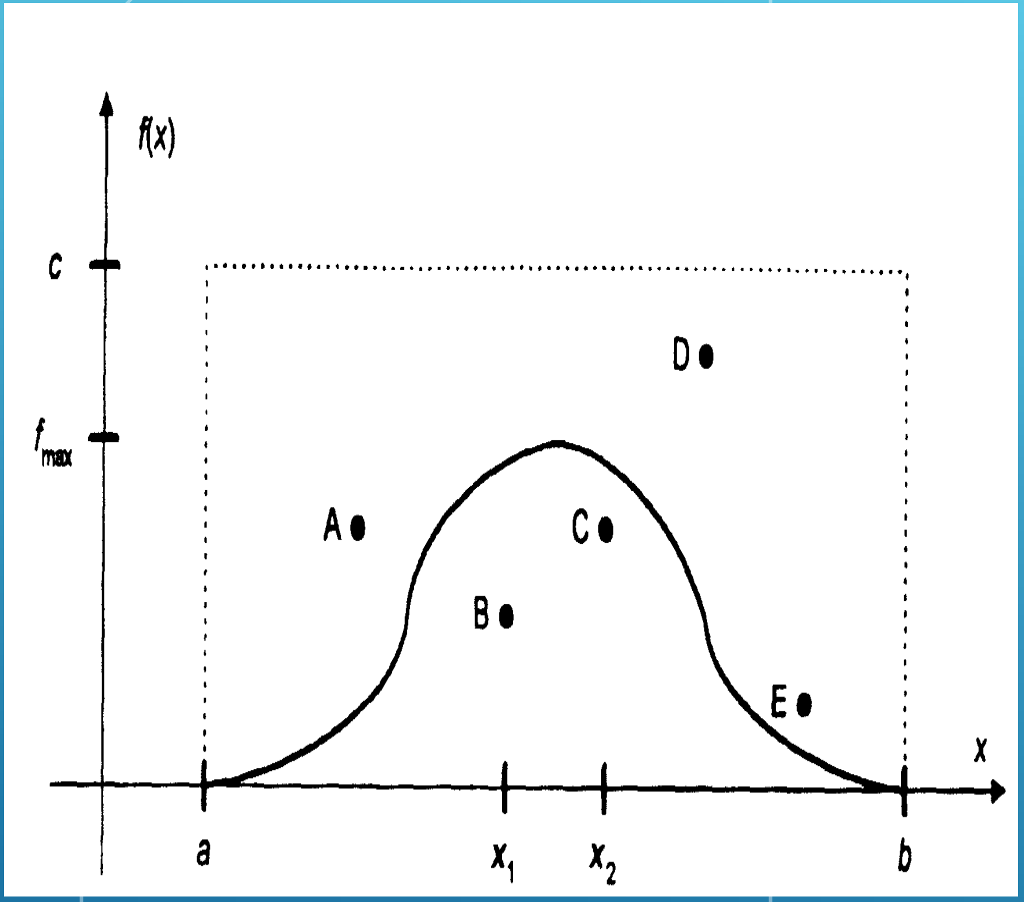
REJECTİON (KABUL-RED) METODU

- Dağılım fonksiyonun her zaman tersini bulabilmek mümkün değildir.
- Bu gibi durumlar için Rejection (Red) Metodu kullanılır.

RED METODU



- $a \leq x < b$ ve $0 \leq y \leq c$
- $f(x)$ yoğunluk fonksiyonudur.
- Kare kutuya hedef denir.
- Algoritma, hedef alanına rastgele düşen noktalar dizisini seçer.
- (x, y) koordinatları için;

$$x = a + (b - a)RND$$
$$y = c * RND$$

RED METODU ALGORİTMA

$$[1] \qquad x = a + (b - a) * RND$$

$$y = c * RND$$

$$if\ y > f(x) \quad then\ goto\ [1]$$

$$print\ x$$

- **A,D,E noktaları, hedefin içinde olmasına rağmen eğrinin dışında olduğundan önemsenmez.**
- **B ve C 'nin $x_1\ ve\ x_2$ noktaları iki rastgele değişkendir.**

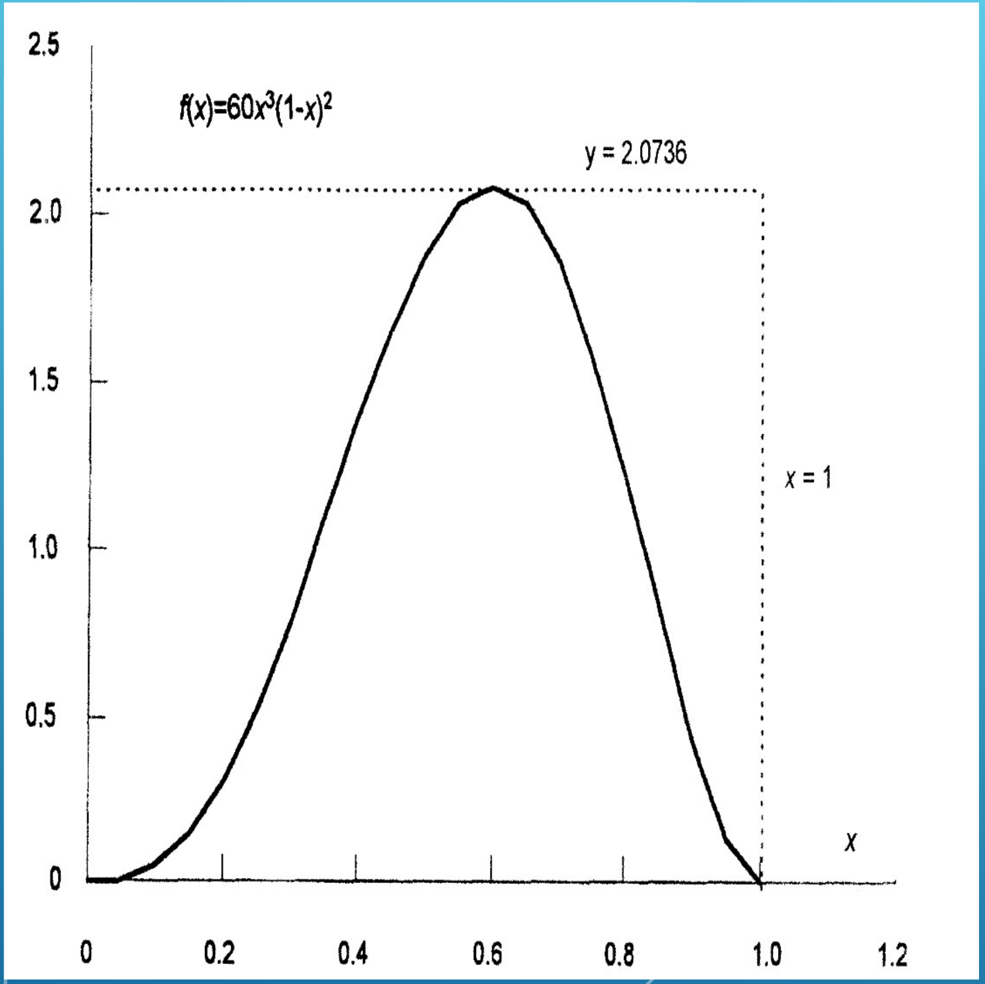
ÖRNEK

- $alfa = 4, beta = 3$ ile Beta dağılımı için 100 rastgele değişken oluşturan red metodunu uygulayalım.

- Gerekli Beta fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(4)\Gamma(3)} x^3 (1-x)^2 = 60x^3(1-x)^2, \quad 0 \le x \le 1$$

ÇERÇEVELERİ BULMA



- $f(x)$ 'in alanı [0,1] olduğundan en iyi dikdörtgen $x = 0$ ve $x = 1$ kenarlarına sahiptir.

- Tüm yoğunluk fonksiyonları non-negatif olduğundan en iyi dikdörtgen $y = 0$ tabanına sahiptir.

- $f(x)$ 'in maksimum değeri yüksekliktir.

- Optimum y aralığını bulabilmek için maksimum $f(x)$ bulunmalıdır.

RED YÖNTEMİ ÖRNEĞİ

- Maksimum $f(x)$ için;

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -120x^3(1-x) + 180x^2(1-x)^2$$

$$= 60x^2(1-x)(3-5x) = 0$$

Çözüm Kümesi: $x = 0, x = 1, x = 0.6$

RED YÖNTEMİ ÖRNEĞİ

- $x = 0 \; ve \; x = 1$ uç noktalardır.
- $f(0.6) = 60 * (0.6)^3 * (1 - 0.6)^2$
  $= 2.0736$
- Hedefin üst kenarı 2.0736'dır.

RED YÖNTEMİ ÖRNEĞİ

- Algoritma;

$$for\ \ i = 1\ \ to\ 100$$
$$[1] x = RND$$
$$y = 2.1\ * RND$$
$$if\ \ y > 60x^3\ (1 - x)^2\ then\ goto\ [1]$$
$$print\ x$$
$$next\ i$$

RED YÖNTEMİ ÖRNEĞİ

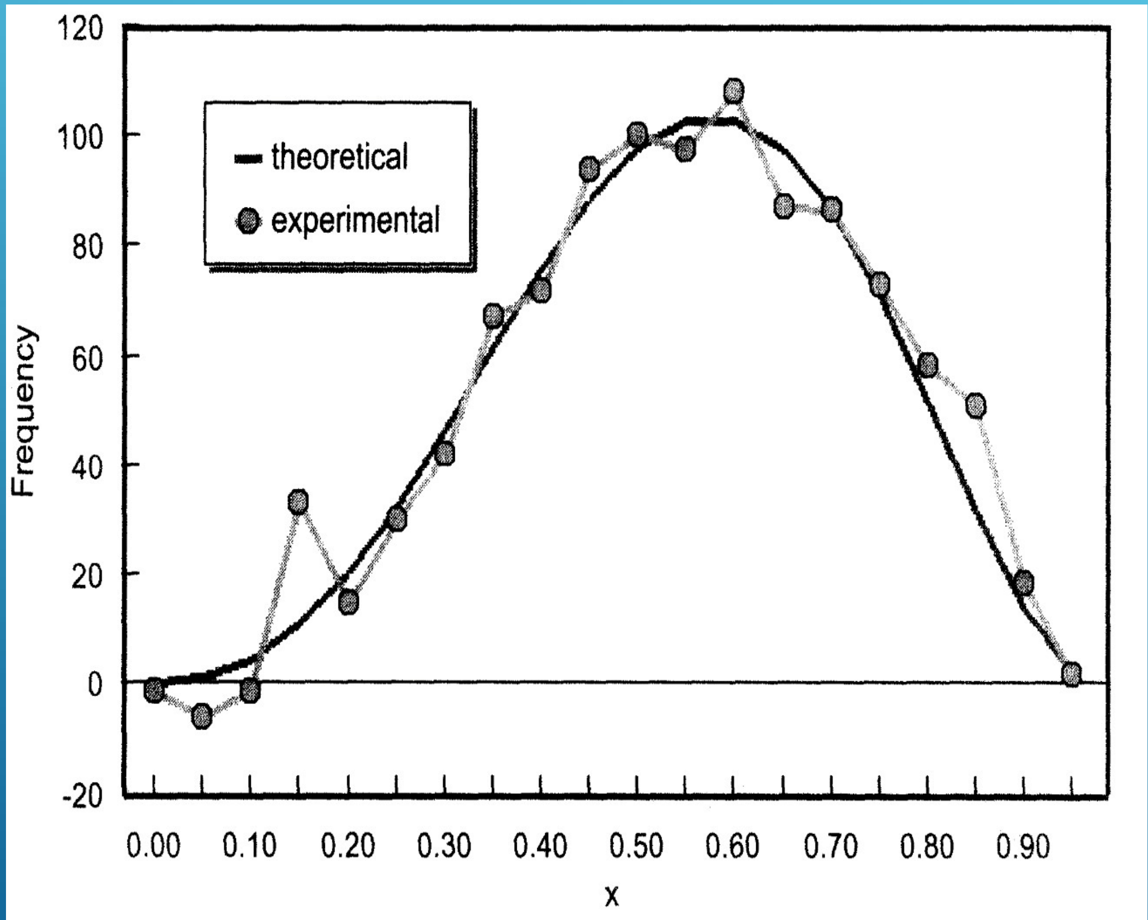
- Algoritmanın geçerliliği Frekans Dağıtım Tablosu ile sınanabilir.

- $\Delta x = 0.05$ ve $n = 1000$ için değerler şu şekildedir.

FREKANS DAĞITIM TABLOSU

Frekans Dağıtım Tablosu		
Aralık	Deneysel frekans	Beklenilen frekans
[0.00, 0.05]	4	0.09
[0.05, 0.10]	5	1.15
[0.10, 0.15]	2	4.62
[0.15, 0.20]	5	11.07
[0.20 0.25]	23	20.64
[0.25 0.30]	38	32.87
[0.30 0.35]	46	46.95
[0.35 0.40]	64	61.78
[0.40 0.45]	69	76.06
[0.45 0.50]	86	88.49
[0.50 0.55]	110	97.77
[0.55 0.60]	111	102.81
[0.60 0.65]	94	102.77
[0.65 0.70]	81	97.22
[0.70 0.75]	78	86.26
[0.75 0.80]	85	70.55
[0.80 0.85]	44	51.54
[0.85 0.90]	52	31.49
[0.90 0.95]	5	13.62
[0.95 1.00]	6	2.23

RED YÖNTEMİ ÖRNEĞİ



RED YÖNTEMİ - NOTLAR

- **Hedef bölgesinin dikdörtgen olmasına ihtiyaç yoktur. Amaç yoğunluk fonksiyonunu çevrelemektir.**
- **İterasyon sayısı arttıkça uygulama yavaşlayacaktır.**
- **Yoğunluk fonksiyonu karmaşıklaştıkça çevrelemek zorlaşır. Bu yüzden uç noktalar ihmal edilebilir.**

CONVOLUTİON (KONVOLÜSYON) METODU

- Bağımsız ve özdeş dağıtılan (independent andidentically disributed - IID) $X_1, X_2, \ldots X_n$ rasgele değişkenlerinin toplamı olan X değişkenidir.
- Eğer X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ için aynı yoğunluk fonksiyonu $f_i(x)$'e sahip ise X'in yoğunluk fonksiyonu $f(x)$, n tabanlı yoğunluk fonksiyonlarının her biri için konvolüsyondur.

KONVOLÜSYON METODU

- Yani;

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k \ \ ise, f(x) = f_1(x) \otimes f_2(x) \otimes \ldots \otimes f_n(x)$$

$f_i(x), X'$in yoğunluk fonksiyonu

$\otimes$, konvolüsyon ifadesidir.

KONVOLÜSYON METODU

$$f_1(x)\otimes f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)f_2(x-\lambda)d\lambda$$

- Rasgele değişken kendini, $X=\sum_{k=1}^{n} X_k$ n tane IID değişkenine ekleyerek bulur.

- Konvolüsyon metodu için özel bir durum, m –Erlang dağıtımıdır.

m –ERLANG DAĞILIMI

- m adet IID exponansiyel rasgele değişkenin toplamı olarak tanımlanır.
- Bu dağılımın ortalaması;

$$\mu = E\left[\sum_{k=1}^{m} X_k\right] = \sum_{k=1}^{m} E[X_k] = \frac{m}{\lambda}.$$

λ , exponansiyel dağılımın ortalamasının matematiksel karşıtıdır.

$$f(x, k, lambda) = \frac{lambda^k * x^{k-1} * e^{-lambda*x}}{(k-1)!}$$

$$F(x, k, lambda) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n!} * e^{-lambda*x} * (lambda * x)^n$$

m –ERLANG DAĞILIMI

- Rasgele bir m –Erlang değişkeni oluşturma algoritması;

$$x = 0$$

$$for\ k = 1\ \ to\ m$$

$$x = x - \mu \ln(RND)/m$$

$$next\ k$$

$$print\ x$$

ÖRNEK

- Ortalaması 5 olan 1000 elemanlı 2 −Erlang dizisi oluşturalım ve Ki-Kare testi ile kıyaslama yapalım.

- Çözüm:

2 −Erlang dağılımı $\alpha = 2$ ile Gama dağılımının özel bir durumudur.

2-ERLANG DAĞILIM ÖRNEĞİ

- Ortalama 5 ise,

$\frac{2}{\lambda} = 5, \qquad \lambda = 0.4$ olur.

2 –Erlang dağıtımı için yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{4}{25} x e^{-2x/5} \quad , \quad x \geq 0 \text{ olur.}$$

2-ERLANG ÖRNEĞİ

- Konvolüsyon metoduna göre, bir Erlang rasgele değişkeni $-2.5\ln(RND)$ ve $-2.5\ln(RND)$'nin toplamıdır.
- Cebirsel karşılığı $-2.5\ln(RND * RND)$
- Sonuçların doğrulanması için gerekli $n = 1000$ rasgele değişken frekans dağıtım tablosunda özetlemiştir.

2-ERLANG ÖRNEĞİ

- Her bir aralıktaki beklenilen frekans;

$$E_{[a,b]} = n\int_a^b f(x)dx = \frac{4n}{25}\int_a^b xe^{-2x/5}dx$$

$$= n[e^{-2x/5}(1-\frac{2x}{5})]_a^b$$

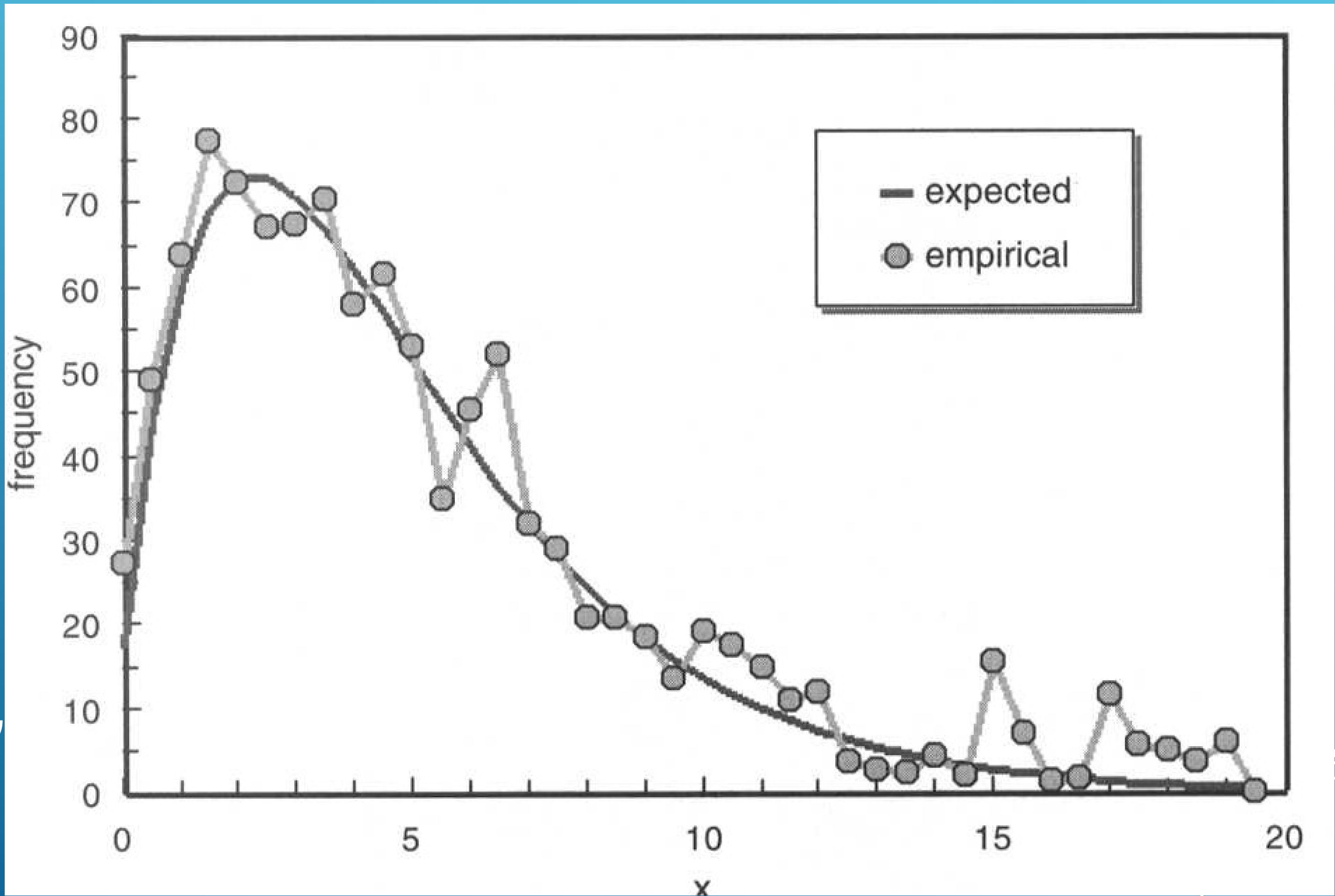
$$= n\left[\left(e^{-2b/5} - e^{-2\ \ /5}\right) + \frac{2}{5}(ae^{-2a/5} - be^{-2\ \ /5})\right].$$

FREKANS DAĞITIM TABLOSU

Frekans Dağıtım Tablosu

Aralık	Deneysel frekans	Beklenilen frekans
[0.0, 0.5]	8	17.52
[0.5, 1.0]	37	44.03
[1.0, 1.5]	56	60.35
[1.5, 2.0]	64	69.31
[2.0, 2.5]	76	73.03
[2.5, 3.0]	64	73.13
[3.0, 3.5]	77	70.79
[3.5, 4.0]	78	66.90
[4.0, 4.5]	64	62.09
[4.5, 5.0]	49	56.83
[5.0, 5.5]	53	51.44
[5.5, 6.0]	46	46.13
[6.0, 6.5]	50	41.06
[6.5, 7.0]	35	36.31
[7.0, 7.5]	27	31.93
[7.5, 8.0]	29	27.95
[8.0, 8.5]	21	24.36
[8.5, 9.0]	22	21.15
[9.0, 9.5]	9	18.31
[9.5, 10.0]	25	15.80
[10.0, 10.5]	21	13.60
[10.5, 11.0]	9	11.68
[11.0, 11.5]	4	10.01
[11.5, 12.0]	6	8.56
[12.0, 12.5]	3	7.30
[12.5, 13.0]	5	6.22
[13.0, 13.5]	10	5.30
[13.5, 14.0]	10	4.50
[14.0, 14.5]	5	3.82
[14.5, 15.0]	5	3.24

G



90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
frequency
0
5
10
15
20
x
expected
empirical

GENERATION OF ARBITRARY RANDOM VARIATES

KEYFİ RASGELE DEĞİŞKENLERİN ÜRETİMİ

KEYFİ RASGELE DEĞİŞKENLERİN ÜRETİMİ

- Net bir yoğunluk fonksiyonunun bulunamadığı durumlar için kullanılır.
- Bunun yerine deneysel değişkenler kümesi kullanılır.
- Sistem için, tarihsel kayıtlar tespit edilir ve bu değerle ile aynı istatistiklere sahip rasgele değişkenler oluşturulur.

KEYFİ RASGELE DEĞİŞKENLERİN ÜRETİMİ

- Süreç iki aşamalıdır.
- Artan şekilde sıralanmış $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ veri kümesini ele alalım.
- Birinci adım, parçalı-lineer ve sürekli yoğunluk fonksiyonunu elde etmektir.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \dfrac{i-1}{n-1} + \dfrac{x - x_i}{(n-1)(x_{i+1} - x_i)}, & x_i \leq x < x_{i+1}, i = 1, \dots n-1 \text{ için} \\ 1, & x \geq x_n \end{cases}$$

KEYFİ RASGELE DEĞİŞKENLERİN ÜRETİMİ

- **İkinci adım, $F^{-1}(x)$'i bulmaktır.**

$F(x)$ lineer olduğundan;

$$X = F^{-1}(x)$$

ÖRNEK

- Bilinmeyen bir süreçten alınan sıralı rasgele değişkenler kümesi:

$\{1,2,4,5,7,7,9\}$ olsun.

Dağılım fonksiyonunu ve tersini inceleyelim.

ÇÖZÜM

- Problem 7 adet veri noktasına sahiptir.

$x < 1$ için f$(x) = 0$,

$1 \leq x < 2$ için $i = 1$,

$f(x) = \frac{1-1}{7-1} + \frac{(x-1)}{(7-1)(2-1)} = \frac{1}{6}(x-1)$

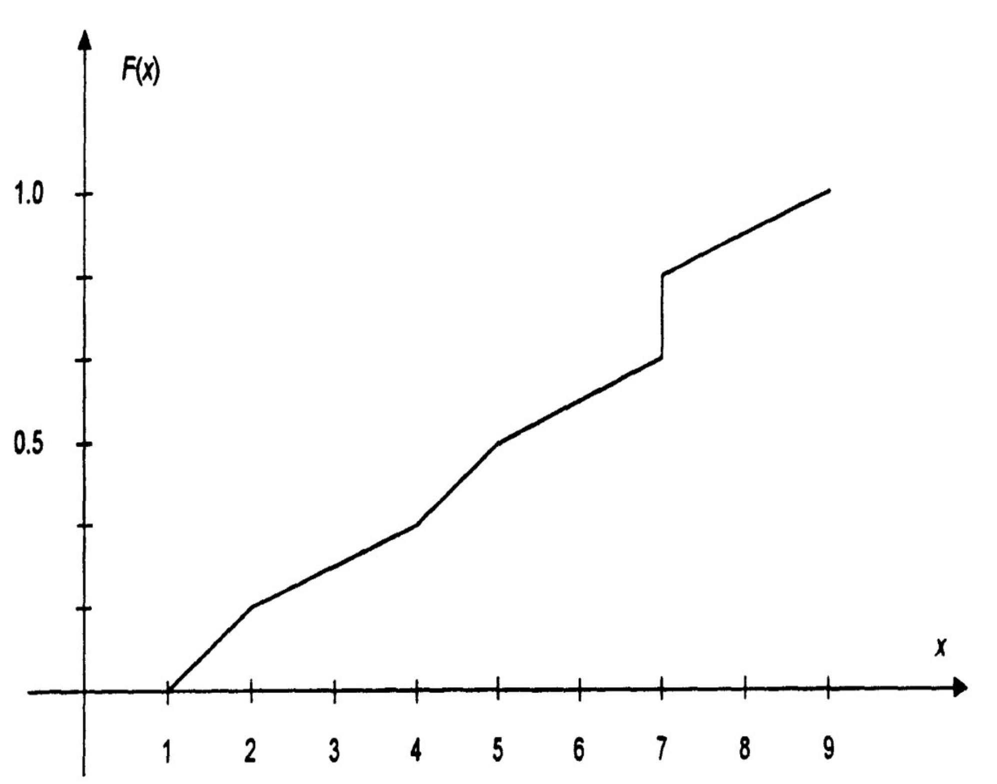
$2 \leq x < 4$ için $i = 2$,

$$f(x) = \frac{2-1}{7-1} + \frac{(x-2)}{(7-1)(4-2)} = \frac{1}{12}x$$

ÖRNEK - ÇÖZÜMÜ

- Benzer şekilde diğer değerler için,

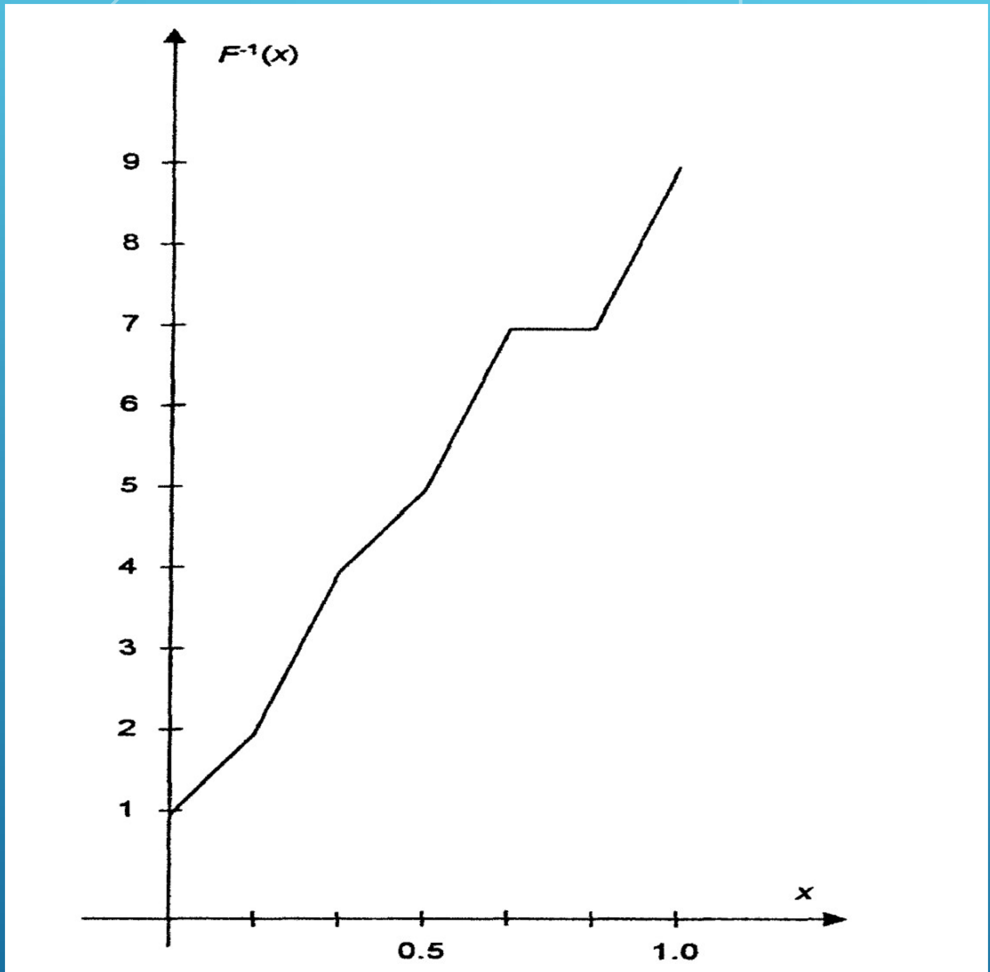
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{6}(x-1), & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{12}x, & 2 \leq x < 4, \\ \frac{1}{6}(x-2), & 4 \leq x < 5 \\ \frac{1}{12}(x+1), & 5 \leq x < 7 \\ \frac{1}{12}(x+3), & 7 \leq x < 9 \\ 1, & x \geq 9 \end{cases}$$



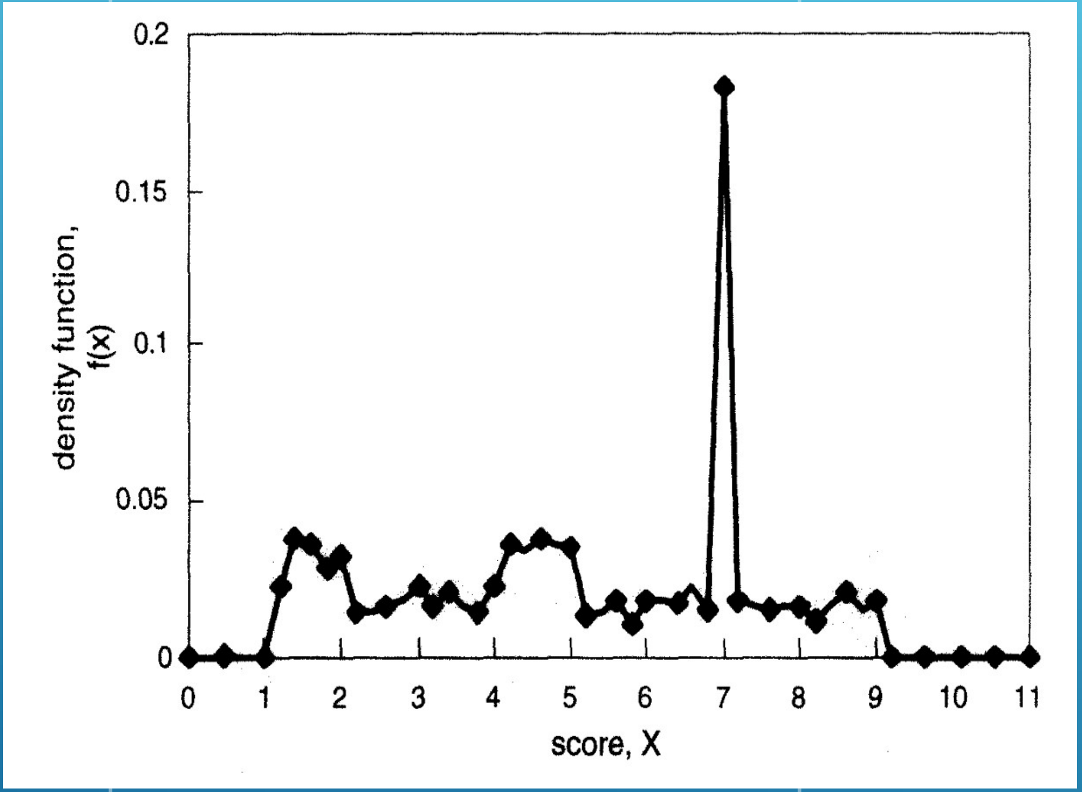
f(x) deneysel dağılım fonksiyonu

F^{-1} FONKSİYONLARI

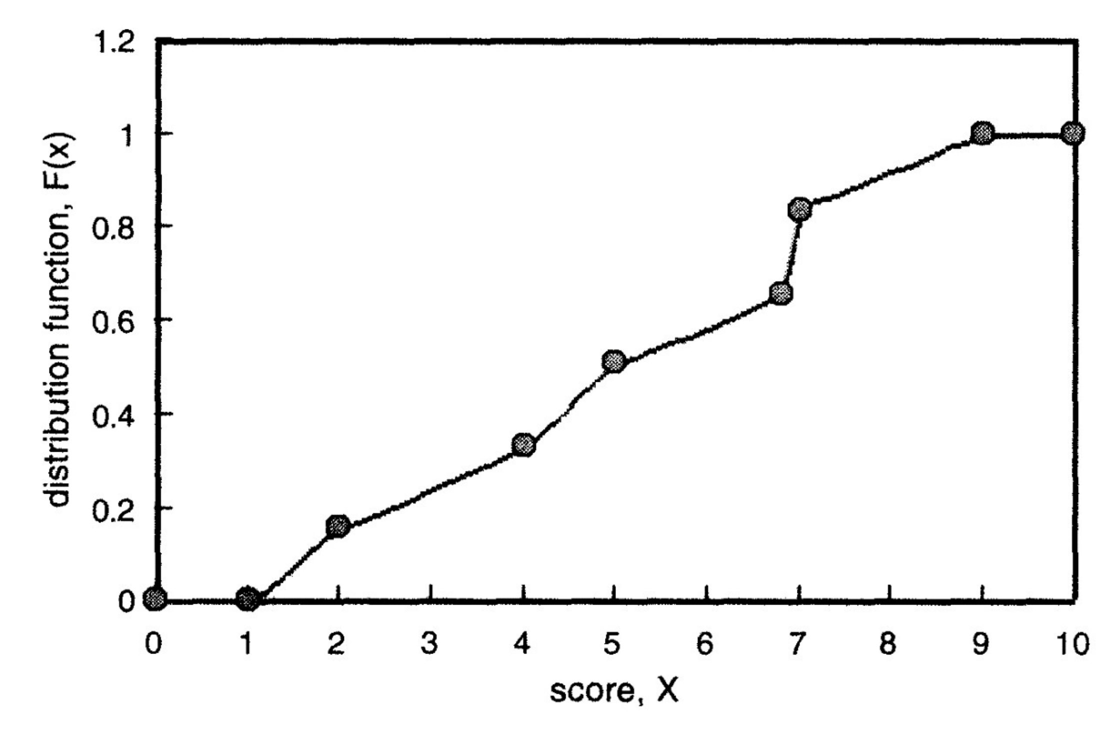
$$F^{-1}(x) = \begin{cases} tanımsız, & x < 1, \\ 6x+1, & 0 \leq x < \frac{1}{6}, \\ 12x, & \frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{3}, \\ 6x+2, & \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 12x+1, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3} \\ 7, & \frac{2}{3} \leq x < \frac{5}{6} \\ 12x-3\,, & \frac{5}{6} \leq x < 9 \\ tanımsız, & x > 1 \end{cases}$$



$F^{-1}(x)$ deneysel dağıtım fonksiyonu



1000 veri için oluşturulmuş dağılım fonksiyonu



1000 rasgele değişken ve $\Delta x = 0.2$ için dağıtım fonksiyonu