1. BÖLÜM | Hifsi ALTINOK | (1)

MATRİSLER ve DETERMİNANTLAR

1. MATRİSLER

TANIM 1. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m \times n$ tane reel veya kompleks sayıdan meydana gelen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

tablosuna bir $m \times n$ matris denir. A matrisi kısaca $A = [a_{ij}]$, $(i = 1, 2, \ldots, m \ ; \ j = 1, 2, \ldots, n)$ şeklinde gösterilebilir. a_{ij}'lere matrisin elemanları, $m \times n$ ye de matrisin mertebesi veya tipi denir.

A matrisinde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ gibi elemanların bulunduğu yatay sıralara matrisin satırları, $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ gibi elemanların bulunduğu düşey sıralara da matrisin sütunları denir. Burada i indisi matrisin satır numarasını, j indisi de sütun numarasını gösterir.

Aşağıda bazı matrisler gösterilmiştir:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

birer matristir. Bunlardan A matrisi 2×3, B matrisi 2×2 ve C matrisi de 3×2 tipindedir.

C matrisindeki 2 elemanının yeri, birinci satır, ikinci sütundur. Yani $c_{12} = 2$, $c_{31} = -5$ gibi...

Bir matris yalnız bir satır veya sütundan meydana gelmiş olabilir. Bu durumda matris, sırası ile, satır matrisi veya sütun matrisi adını alır.

Eğer bir matrisin bütün elemanları sıfır ise bu matrise sıfır matrisi denir.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}5\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

matrislerinden A bir satır matrisi, B bir sütun matrisi, C ise bir sıfır matrisidir.

<u>TANIM 2.</u> (İki Matrisin Eşitliği)

$A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrislerinin her ikisi de $m\times n$ tipinde ve karşılıklı elemanları birbirine eşitse A ve B matrisleri birbirine eşittir denir ve $A=B$ şeklinde gösterilir.

<u>ÖRNEK</u> $\quad A=\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}x-1 & z\\y+1 & t\end{bmatrix}$

matrislerinin eşit olması için x, y, z ve t ne olur

<u>Çözüm:</u>

$$x-1=0 \qquad z=2$$
$$y+1=2 \qquad t=1$$

$$\Rightarrow \quad x=1, \quad y=1, \quad z=2, \quad t=1$$

bulunur.

MATRİSLER ARASINDA YAPILAN İŞLEMLER

1.1. Matrislerin Toplamı ve Farkı

TANIM 3. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ aynı tipten iki matris olsun. Bu durumda

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

şeklinde tanımlanan $C = [c_{ij}]$ matrisine A ve B nin toplamı denir ve $C = A + B$ şeklinde gösterilir. İki matrisin farkı da toplamın bir özel hali olup

$$c'_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

şeklinde tanımlanan yeni bir C' matrisidir.

ÖRNEK :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrislerinin toplamını bulunuz.

Çözüm :

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2. Skaler ile bir Matrisin Çarpımı :

TANIM 4. Bir k skaleri ile A matrisinin çarpımı, A nın her elemanının k ile çarpımından elde edilen yeni bir C matrisidir. Yani $A = [a_{ij}]$ olmak üzere

$$k.A = [k.a_{ij}]$$

dir.

ÖRNEK : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ matrisleri verildiğine göre $C = 2A + 3B$ matrisini bulunuz.

Çözüm

$$C = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & -24 \\ 27 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -18 \\ 27 & 14 \end{bmatrix}$$

1.3. Matris toplamı ve Skaler ile Çarpımın Özellikleri

A, B ve C aynı tipten matrisler ve $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $A + 0 = A$ (0 : A ile aynı mertebeden olan sıfır matrisidir)
4) $A + (-A) = 0$
5) $k_1 (A + B) = k_1 A + k_1 B$
6) $(k_1 + k_2) A = k_1 A + k_2 A$
7) $(k_1 . k_2) A = k_1 (k_2 A)$

1.4. Matris Çarpımı

Matris çarpımı her zaman tanımlı değildir. İki matrisin çarpılabilir olması için birincinin sütun sayısı, ikincinin satır sayısına eşit olmalıdır.

TANIM 5. A ve B çarpılabilir iki matris olsun. A matrisi $m \times p$ tipinde, B matrisi ise $p \times n$ tipinde olmak üzere $A = [a_{ik}]$, $B = [b_{kj}]$ için,

$$A \cdot B = [a_{ik}] \cdot [b_{kj}] \quad , \quad A \cdot B = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} \right]$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m) \; , \; (j = 1, 2, \ldots, n)$$

şeklinde tanımlı $m \times n$ tipinde yeni bir C matrisidir. Eğer $C = [c_{ij}]$ ile gösterilirse, C nin bileşenleri

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

ile tanımlanır.

<u>İşlemin Yapılışı:</u> A matrisinin 1. satır elemanları B matrisinin 1. sütun elemanları ile karşılıklı olarak çarpılarak toplanır. Böylece $A.B$ çarpım matrisinin a_{11} (birinci) elemanı bulunur. Bu işlem A matrisinin bütün satırları B matrisinin bütün sütunları ile çarpılıncaya kadar devam ettirilip $A.B$ matrisi elde edilir.

<u>ÖRNEK</u> : $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A \cdot B$ matrisini bulunuz.

<u>Çözüm</u>: A matrisi 3×3, B matrisi 3×2 tipinde olduğu için çarpım yapılabilir. $A \cdot B$ çarpım matrisi ise 3×2 tipinde olur. Yani

$$\underset{3 \times \boxed{3}}{A} \quad \overset{\text{aynı}}{} \quad \underset{\boxed{3} \times 2}{B} \quad = \quad \underset{3 \times 2}{A \cdot B}$$

şeklindedir.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2.3+(-3).0+1.(-1) & 2(-2)+(-3).1+1.2 \\ 4.3+5.0+(-2)(-1) & 4.(-2)+5.1+(-2).2 \\ 3.3+(-1).0+6.(-1) & 3.(-2)+(-1).1+6.2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A.B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 14 & -7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

UYARI : Yukarıda verilen örnekte B matrisinin sütun sayısı A matrisinin satır sayısına eşit olmadığından BA çarpımı mümkün değildir. Çarpmada değişme özelliği yoktur.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ise $A.B = ?$

Çözüm : A , 3x(3) tipinde B , (3)x1 tipinde olduğundan A ile B çarpılabilir ve yeni matris 3x1 tipinde olur.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 3.1+0.2+1.3 \\ 2.1+(-1)2+0.3 \\ 4.1+2.2+5.3 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\Rightarrow \quad A.B = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 23 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

ÖRNEK : $A=\begin{bmatrix}-8 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 3 & 9\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A.B=C$ eşitliğini sağlayan B matrisini bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{bmatrix}-8 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 3 & 9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-8a+4c & -8b+4d\\ 0.a+3c & 0b+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 3 & 9\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}a=0 , & b=2\\ c=1 , & d=3\end{matrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

ÖRNEK. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A.C=B+C$ eşitliğini sağlayan C matrisini bulunuz.

Çözüm : A matrisi 2×2 , B matrisi 2×1 tipinden old. C matrisi de 2×1 tipinden olup

$C=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ diyelim.

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2a+b\\ a+3b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+a\\ 2+b\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}2a+b=3+a\\ a+3b=2+b\end{matrix}$$

$$\Rightarrow a=4 , \quad b=-1 \quad \Rightarrow C=\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

TANIM :

1.5. Karesel Matris : Satır sayısı, sütun sayısına eşit olan bir matrise karesel matris denir. $n \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ karesel matrisinde $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına matrisin esas köşegen elemanları denir.

$n \times n$ tipindeki bir karesel matris yerine kısaca n. mertebeden sözü kullanılır.

TANIM: Esas köşegen dışındaki bütün elemanları sıfır olan bir karesel matrise Diyagonal Matris denir. Özel olarak esas köşegen üzerindeki bütün elemanları birbirine eşit olan bir diyagonal matrise skaler matris denir.

Eğer bir skaler matriste $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ ~~ve bu durumda~~ matrise Birim matris denir. n. mertebeden birim matris genellikle I_n ile gösterilir. Matris çarpımında birim matris, birim eleman rolündedir. Yani bir matrisle çarpıldığında yine o matrisi verir:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

dır.

ÖRNEK : $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ karesel matrislerdir.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. A diyagonal, B skaler, C birim matristir.

A bir n. mertebeden karesel matris ise

$$A^m = \underbrace{A . A \ldots A}_{m \text{ tane}}$$

tanımlıdır.

ÖRNEK : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ise $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$ olduğunu gösteriniz. (Burada I_3, 3×3 tipinde birim matristir.)

Çözüm: $A^2 = A . A$ olduğundan,

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TANIM: Esas köşegenin altındaki bütün elemanları sıfır olan bir kare matrise üst üçgensel, esas köşegenin üzerindeki bütün elemanları sıfır olan kare matrise de alt üçgensel matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerinden A üst üçgensel, B de alt üçgensel matristir.

2. Bir Kare Matrisin Determinantı

Bir kare matrisin determinantı det A veya $|A|$ ile gösterilebilir. Sadece kare matrislerin determinantı hesaplanabilir.

Eğer A, 2. mertebeden

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ şeklinde bir kare matris ise

A'nın determinantının değeri

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

şeklinde bulunur.

ÖRNEK: a) $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-3).8 - 2.5 = -34$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2.6 - (-3).4 = 24$

Sarrus Kuralı: 3. mertebeden bir determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ olsun. Bu determinantın

ilk 2 satırını determinantın altına ilave edersek

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}) - (a_{31} a_{22} a_{13} + a_{11} a_{32} a_{23} + a_{21} a_{12} a_{33})$$

şeklinde determinantın değeri bulunur.

ÖRNEK : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{matrix} = \left(1\cdot(-2)\cdot 2 + 4\cdot 0\cdot 3 + (-3)\cdot 0\cdot 1\right) - \left((-3)(-2)\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 4\right) = -4 - 18 = -22$$

NOT : Determinantın ilk 2 sütunu, determinantın sağına eklenerek de hesaplanabilir

ÖRNEK : $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$|A| = \left(2\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 0 + 5\cdot 3\cdot(-1)\right) - \left(0\cdot 2\cdot 5 + (-1)\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot 3\cdot 1\right) = -13$$

Determinantların Laplace Açılımı

Bu metot en basit şekliyle, yüksek mertebeden bir determinantı alt determinantların toplamı şeklinde ifade etmektir.

Örneğin aşağıda olduğu gibi 3. mertebeden bir determinant, 2. mertebeden alt determinantların toplamı olarak yazılabilir.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Burada yapılan açılım 1. satır elemanlarına göre yapılmıştır. Aynı şekilde $|A|$ determinantını sütunlarına veya başka satırlarına göre de açabiliriz.

Genel halde determinant açılımını verebilmemiz için, alt determinantlara karşılık gelecek olan minör ve eş çarpan (kofaktör) kavramlarını tanımlayacağız.

TANIM n. mertebeden bir determinant Δ olsun. Δ'nın herhangi bir elemanının bulunduğu satır ve sütun atılmak suretiyle elde edilen $(n-1)$. mertebeden alt determinanta o elemanın minörü denir.

i. satır ve j. sütundaki bir a_{ij} elemanının minörünü M_{ij} ile göstereceğiz.

$(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ işaretli minörüne de a_{ij} nin eş çarpanı (kofaktörü) denir ve A_{ij} ile gösterilir. Yani

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

dir.

ÖRNEK: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ determinantının 1. satır elemanlarının minör ve eş çarpanlarını bulalım.

Çözüm: 1, 4 ve -1 elemanlarının minörleri

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

ve eş çarpanları;

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{dir.}$$

TANIM: n. mertebeden bir determinantın değeri, herhangi bir satır veya sütunundaki elemanların kendi eş-çarpanlarıyla çarpımları toplamına eşittir.

Buna determinantların Laplace metoduna göre açılımı denir.

n. mertebeden bir determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

olsun. Bu determinantın birinci satıra göre Laplace açılımı

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

şeklindedir.

ÖRNEK: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(4\cdot7-5\cdot6) - 2\cdot(3\cdot7-5\cdot5) + 3(3\cdot6-4\cdot5)$$

$$= 0$$

bulunur. Diğer satır veya sütunlara göre yapıldığında da yine aynı sonuç bulunacaktır.

ÖRNEK: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm: Determinantı 2. sütuna göre hesaplayalım.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 4.(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 4(-2-3) - 1(2-2) = -20$$

DETERMİNANTLARIN ÖZELLİKLERİ ...

1) Bir determinantın herhangi bir satır veya sütunu bir sabit ile çarpılırsa determinant bu sayı ile çarpılmış olur.

2) Bir determinantın bir satırının veya sütununun bütün elemanları sıfır ise determinantın değeri sıfıra eşittir.

3) Bir determinantın herhangi iki satırı veya sütunu yer değiştirirse determinantın işareti değişir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

4) İki satırı veya sütunu birbirinin aynısı olan determinantın değeri sıfırdır.

5) Bir determinantın herhangi iki satırı veya sütunu birbiriyle orantılı ise determinantın değeri sıfırdır.

6) Bir determinantın herhangi bir satır veya sütununun elemanları iki ya da daha fazla terimin toplamı şeklinde ise bu determinant iki ya da daha fazla determinantın toplamı şeklinde yazılabilir.

Yani
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+z & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13} \\ a_{21} & y & a_{23} \\ a_{31} & z & a_{33} \end{vmatrix}$$

7) Bir determinantta herhangi bir satırın veya sütunun elemanları aynı bir sayı ile çarpılıp başka bir satıra veya sütuna eklenirse determinantın değeri değişmez.

Yani
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8) Bir determinantın herhangi bir satıra veya sütuna ait elemanları başka bir satıra veya sütuna ait elemanların eş çarpanlarıyla çarpılıp toplanırsa, toplam sıfırdır.

ÖRNEK:
$$\Delta = \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$$
determinantının değerini hesaplayınız.

Çözüm: ikinci sütunu birinci sütuna, üçüncü sütunu ikinci sütuna eklediğimizde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 \\ x+2 & x-2 & 1 \\ 0 & x-2 & x+4 \end{vmatrix} = (x+2)\cdot(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

bulunur. Birinci satırın (-1) katını ikinci satıra eklediğimizde

$$\Delta = (x+2)(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

olur. Sağ taraftaki determinant birinci sütuna göre açılırsa

$$\Delta = (x+2)(x-2)\left[1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+4 \end{vmatrix}\right].$$

$$\Delta = (x+2)(x-2)(x+4)$$

bulunur.

3. ÖZEL MATRİSLER.

TANIM: Determinantı sıfıra eşit olan bir karesel matrise singüler matris, determinantı sıfırdan farklı olan bir karesel matrise de regüler matris denir. Yani A, karesel bir matris olmak üzere, $\det A = 0$ ise, A'ya singüler, $\det A \neq 0$ ise A'ya regüler denir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ matrisleri verilsin.

$\det A = 0$, $\det B = 5$ olduğundan A singüler, B de regüler bir matristir.

TANIM: Bir A matrisinin, determinantı sıfırdan farklı alt matrisinin mertebesine

olan en ~~yüksek mertebeden~~ alt matrisinin

A matrisinin rankı denir. Bir karesel matrisin rankı en fazla

n. mertebeden bir karesel matrisin determinantı

n olabilir. Eğer karesel bir matrisin mertebe-

sıfırdan farklıysa rankı, karesel matrisin mertebe- En az 1 olur. Matrisler en az

sine eşittir. (Rank, 0 olamaz. 1×1 old. 1. mert. olabilir.)

ÖRNEK. Yukarıdaki örnekte verilen A matrisin rankı 2'dir. Çünkü $\det A = 0$, fakat A'dan elde edilen 2. mertebeden en az bir

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alt matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır.

$\det B \neq 0$ old. $\operatorname{rank} B = 3$, yani rankı mertebesine eşittir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 6 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisinin rankını hesaplayalım:

Çözüm: Bu matrisin rankı en fazla üç olabilir. Fakat A'dan seçilen bütün 3. mertebeden karesel alt matrislerin determinantı sıfıra eşit olduğundan rank $A < 3$ dür.

A'dan seçilen 2. mertebeden

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

alt matrisin determinantı $\det A_1 = -11 \neq 0$ olduğundan rank $A = 2$ dir.

3.1. Bir Matrisin Transpozu

Tanım: $m \times n$ tipinde bir A matrisinin transpozu aynı numaralı satırlarla, sütunların yer değiştirmesi ile elde edilir. ve A^t şeklinde gösterilir.

$m \times n$ tipinde bir matrisin transpozu $n \times m$ tipinde yeni bir matristir. $A = [a_{ij}]$ ise $A^t = [a_{ji}]$ dir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix} \text{ ise } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 9 \\ -3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ise } B^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2. Transpozun özellikleri

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$
2) $(A^t)^t = A$
3) $(kA)^t = kA^t, \ k \in \mathbb{R}$
4) $(A.B)^t = B^t A^t$

3.3. Adjoint Matris :

$A = [a_{ij}]$ bir kare matris ve bu kare matrisin a_{ij} elemanının eş çarpanı da A_{ij} olsun. A_{ij}'lerden elde edilen $[A_{ij}]$ matrisinin transpozu olan $[A_{ji}]$ matrisine A kare matrisinin adjoint matrisi denir ve adj A veya $\tilde{A}$ sembolüyle gösterilir. Buna göre

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^t$$

ÖRNEK :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin adjoint matrisini bulunuz.

~~Çözüm : Bunun için öncelikle her elemanın eş çarpanını bulalım:~~

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 16, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -43$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

şeklinde eş çarpanlar bulunur. Buna göre

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -8 & -7 & 4 \\ 7 & 16 & -43 \\ 10 & -11 & -5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -8 & 7 & 10 \\ -7 & 16 & -11 \\ 4 & -43 & -5 \end{bmatrix}$$ bulunur.

UYARI : Bir matrisin adjointini bulmak için önce verilen matrisin transpozu alınıp daha sonra her elemanın da eş çarpanı bulunabilir.

3.4. Adjoint Matrisin Özellikleri

A ve B n. mertebeden kare matrisler ve I_n de bir birim matris olmak üzere

1) $A \cdot (\text{adj} A) = |A| \cdot I_n$
2) $\text{adj}(A \cdot B) = \text{adj} B \cdot \text{adj} A$

3.5. Ters Matris ve Bulunması

A, n. mertebeden bir karesel matris ve I_n de birim matris olmak üzere

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

bağıntısını sağlayan B matrisine A'nın tersi (inversi) denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Böylece

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

olduğu görülür. A'nın tersi de n. mertebeden bir karesel matristir.

3.6. ~~ÖRNEK~~ TERS Matrisinin Bulunması

Bir karesel matrisin tersinin bulunmasında iki farklı yol izlenecektir.

1) n. mertebeden bir A matrisinin tersi B matrisi ise

$$A \cdot B = I_n$$

yazılır ve bu işlem yapılarak B ters matrisinin elemanları bulunur.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

ÇÖZÜM: A'nın tersinin $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ olduğunu kabul edelim

$A \cdot B = I_2$ olacağından

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{bmatrix}2x+5z & 2y+5t\\ x+3z & y+3t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}2x+5z=1\\ x+3z=0\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}2y+5t=0\\ y+3t=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}x=3,\ y=-5\\ z=-1,\ t=2\end{matrix}$$

bulunur. Böylece A nın tersi

$$A^{-1}=B=\begin{bmatrix}3&-5\\-1&2\end{bmatrix}$$ matrisidir.

Bulunan matrisin $BA=I_2$ eşitliğini sağladığı da gösterilebilir.

2) $\boxed{A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot \text{adj}\, A}$ formülü kullanılarak da ters matris bulunabilir. ($|A|\neq 0$ olmalıdır)

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\-2&-4&-5\end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm $|A|=1\neq 0$ old. A^{-1} mevcuttur.

$$\text{adj}\, A=\begin{bmatrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}$$ adjoint matrisi bulunur.

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot \text{adj}\, A$ formülünde yerine yazılırsa

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\-2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}$$

ters matrisi bulunur.

3.7. Lineer Denklem Sistemlerinin Matrisler Yardımı ile Çözümü

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

denklem sistemini gözönüne alalım. Bilinmeyenlerin katsayılar matrisini A, bilinmeyenlerin matrisini X ve eşitliğin sağındaki sabit sayıların matrisini de B ile gösterirsek,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

olur. Böylece yukarıdaki denklem sistemi $AX = B$ şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan A^{-1} ters matris ile çarpılırsa $\boxed{X = A^{-1}B}$ elde edilir. Matris eşitliği tanımından $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenleri bulunur.

ÖRNEK:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \end{array}\right\}$$

denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: Katsayılar matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad |A| = 36 \neq 0$$

olduğundan A^{-1} vardır. Şimdi A^{-1} ters matrisi bulalım;

$$\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} 9 & 13 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 9 & -7 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{adj}\,A = \begin{bmatrix} \frac{9}{36} & \frac{13}{36} & \frac{1}{36} \\ 0 & -\frac{4}{36} & \frac{8}{36} \\ \frac{9}{36} & -\frac{7}{36} & \frac{5}{36} \end{bmatrix}$$

olur.

$X = A^{-1}B$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{36} & \frac{13}{36} & \frac{1}{36} \\ 0 & -\frac{4}{36} & \frac{8}{36} \\ \frac{9}{36} & -\frac{7}{36} & \frac{5}{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

ÖRNEK : $\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + 3y + 4z &= -2 \\ x + 5y + 7z &= 4 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{dır.}$$

Gerekli işlemler yapılırsa

$$\text{adj}\, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad |A| = 2$$

olduğu görülür. Böylece A'nın tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}\, A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olur.

$X = A^{-1}B$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad x=-2, \; y=-10, \; z=8 \text{ dir.}$$

3.8. Bir Matrisin Karakteristik Denklemi ve Karakteristik Değerleri

TANIM: A bir kareal matris ve I da A ile derecesi aynı olan bir birim matris olmak üzere,

$$B = A - \lambda I$$

şeklinde tanımlanan B matrisine A'nın karakteristik matrisi denir. Burada λ bir parametre olup A matrisinin karakteristik değerlerine karşılık gelir

$$|B| = |A - \lambda I| = 0$$

denklemine de A matrisinin karakteristik denklemi adı verilir. Bu denklemden bulunacak λ değerleri, A nın karakteristik değerlerini verir.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: A'nın karakteristik matrisi

$$B = A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ denkleminde λ'ya 1, −1, 2, −2 gibi değerler verilir. hangisi sağlarsa ona göre polinom bölmesi yapılır. Örneğin bu denklemde $\lambda = 1$ için denklem sağlanır. Bunun anlamı $(\lambda - 1)$ çarpanı $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ polinomunun bir çarpanı demektir. O halde polinom bölmesiyle $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \,|\, \lambda - 1$, $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ işlemi yapılıp diğer çarpan bulunur. Yani $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

olur. Bunun determinantını

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$ bulunur. Buradan karakteristik değerler $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ bulunur.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik değerlerini bulunuz.

Çözüm: A nın karakteristik matrisi

$$B = A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7-\lambda \end{bmatrix}$$ bulunur. Buradan

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ eşitliğinden $\lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0$ karakteristik denklemi elde edilir. Böylece karakteristik değerler $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 8$ dir.

* **ÖRNEK:** $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik değerlerini bulun.

Çözüm: $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 7 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0$ kar. denk. bulunur.

Bu denklemden $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$ kar. değerleri bulunur.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

① $X - 3\cdot\begin{bmatrix}2&5\\1&6\end{bmatrix} + 4 = 0$ denklemini sağlayan X matrisini bulunuz.

Çözüm : $X = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ olsun.

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}2&5\\1&6\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6&15\\3&18\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a-2&b-15\\c-3&d-14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}a=2, & b=15\\ c=3 & d=14\end{matrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix}2&15\\3&14\end{bmatrix}.$$

② $X = \begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$ ise $X^2 + 4X + 2I_2$ matrisini bulunuz.

Çözüm

$$X^2 = X\cdot X = \begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.2+1.5 & 2.1+1.3\\ 5.2+3.5 & 5.1+3.3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X^2 = \begin{bmatrix}9&5\\25&14\end{bmatrix}$$

$$4X = 4\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8&4\\20&12\end{bmatrix}, \quad 2I_2 = 2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$X^2 + 4X + 2I_2 = \begin{bmatrix}9&5\\25&14\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8&4\\20&12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}19&9\\45&28\end{bmatrix}$$

(3) Aşağıdaki determinantların değerlerini hesaplayınız.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} e^{x} & 1 \\ 1 & e^{-x} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

Çözüm:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2.5-(-1).3 = 13$

b) $\begin{vmatrix} e^{x} & 1 \\ 1 & e^{-x} \end{vmatrix} = e^{x}.e^{-x}-1.1 = e^{0}-1 = 0$

c) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x.\cos x-\sin x.(-\sin x) = 1$

(4) Aşağıdaki determinantların değerlerini hesaplayınız.

a) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

Çözüm:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$
$\begin{matrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{matrix}$

$$= (5.(-1).0+3.2.3+1.4.0)-(3(-1).1+0.2.5+0.4.3)$$
$$= 18-(-3) = 21 \qquad \text{(Sarrus)}$$

b) 2. satıra göre Laplace açılımı ile yapalım:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (-4).10+0-3.(-21) = 23$$

c) 1. sütuna göre Laplace açılımı ile yapalım:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 29$$

(5) $\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$ olduğunu gösteriniz

Çözüm: Bir satırın veya sütunun katını başka satır veya sütuna ekleyerek determinantı hesaplayalım:

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(-1) 1. satırın (-1) katı 2. satıra eklendi

(-1) 1. satırın (-1) katı 3. satıra eklendi

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & 1+x+y & z \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(+1) 1. sütunun (1) katı 2. sütuna eklendi

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1+x+y & z \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1+x+y & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

(6) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = x^2(a+b+c)$ olduğunu gösteriniz.

(7) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix} = xyzt\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$

olduğunu gösteriniz

(8) Aşağıdaki determinantları sıfır yapan x değerlerini bulunuz.

a) $\begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x-2 & 4 & 3 \\ 1 & x+1 & -2 \\ 0 & 0 & x-4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 3x \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & x^2-4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Çözüm

a) $\begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix} \overset{(+1)}{=} \begin{vmatrix} x+2 & 3 & -3 \\ x+2 & x+5 & -3 \\ 0 & 6 & x-4 \end{vmatrix} \overset{(+1)}{=} \begin{vmatrix} x+2 & 0 & -3 \\ x+2 & x+2 & -3 \\ 0 & x+2 & x-4 \end{vmatrix}$

$= (x+2).(x+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & x-4 \end{vmatrix} (-1) = (x+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-4 \end{vmatrix}$

$= (x+2)^2 . (1) . \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} = (x+2)^2 (x-4) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1=-2,\ x_2=-2,\ x_3=4}$

c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 3x \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 0. \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} x & 3x \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow 12 + 0 - 4x = 0$

$\Rightarrow 12 - 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

(9) Aşağıdaki matrislerin ters matrislerini bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Çözüm : $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A$ formülüyle bulabiliriz.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -5$ bulunur. Şimdi A'nın adjoint matrisini hesaplayalım.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$\text{Adj}\, A = \begin{bmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -4 & 4 & -1 \\ -9 & 14 & -6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ 5 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 10 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ 5 & -1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 3 & -\frac{4}{5} & -\frac{14}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

d) Satır veya sütun katları diğerlerine eklenerek determinant hesaplanabilir.

(10) Aşağıdaki matrislerin rankını bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Çözüm: a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinden en fazla 3. mertebeden kare matrisler oluşturulabileceği için rank en fazla 3 olur. Rankın 3 olması için bu matristen seçilecek en az bir 3. mertebeden determinantın sıfırdan farklı olması gerekir. Halbuki buradan seçilecek tüm 3'lük determinantlar 0'dır. Örneğin

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 , \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 , \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 , \ldots$$

O halde Rank 3 olamaz. Şimdi de 2. mertebeden herhangi ~~bir determinanta bakalım.~~

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

old. bir tanesinin sıfırdan farklı olması yeterlidir. O halde Rank A = 2'dir.

b) $B=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ olduğu için Rank B < 3'tür. Yani 3 olamaz. O halde 2'liklerden bir tanesini seçersek

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

olup Rank B = 2 dir.

Not! Eğer B matrisinin determinantı sıfırdan farklı olsaydı, rank B = 3 olurdu.

(11) $\left.\begin{aligned} x+y-z &= 1 \\ x-y+z &= 1 \\ x+y \quad &= 2 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dir.

$AX = B$ eşitliğinden dolayı $X = A^{-1}.B$ yazılabilir. Bu nedenle X'i bulabilmek için A^{-1} ters matrisini bulmamız gerekmektedir.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}\, A$ olduğundan $|A|$ determinantını ve adjoint matrisini bulalım.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ bulunur. Şimdi de adjoint matrisi bulmak için eş çarpanları bulalım:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +1$, $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

$A_{21} = -1$, $A_{22} = +1$, $A_{23} = 0$

$A_{31} = 0$, $A_{32} = -2$, $A_{33} = -2$

$$\text{Adj}\, A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}\, A = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}.B$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x=1$, $y=1$, $z=1$ bulunur.

(12) $\left.\begin{aligned} x-2y+3z&=4\\ 2x+3y-z&=7\\ 3x+y+z&=5\end{aligned}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

(13) Aşağıdaki matrislerin karakteristik değerlerini bulunuz.

a) $\begin{bmatrix}2&2\\12&4\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}4&1&0\\1&1&1\\7&2&2\end{bmatrix}$

Çözüm $A=\begin{bmatrix}2&2\\12&4\end{bmatrix}$ olsun. $|A-\lambda I|=0$ denkleminin kökleri A matrisinin karakteristik değerlerini verir. Bunun için

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix}2&2\\12&4\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\12&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\lambda&2\\12&4-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}2-\lambda&2\\12&4-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (2-\lambda)(4-\lambda)-24=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda-16=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=-2\ ,\quad \lambda_2=8 \text{ karakteristik değerlerdir.}$$

~~d) $A=\begin{bmatrix}4&1&0\\1&1&1\\7&2&2\end{bmatrix}$ alalım.~~

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix}4&1&0\\1&1&1\\7&2&2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&1\\7&2&2-\lambda\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}4-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&1\\7&2&2-\lambda\end{vmatrix}=0$ denkleminden λ değerlerini bulacağız.

Bu determinantı 1. satıra göre Laplace açılımıyla çözelim:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&1\\7&2&2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\2&2-\lambda\end{vmatrix}-(1)\cdot\begin{vmatrix}1&1\\7&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=0$$

$\lambda=1$ için denklem sağlandığı için $(\lambda-1)$ terimi $\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5$ polinomunun bir çarpanıdır. Polinom bölmesi yapılırsa

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5 & \lambda-1\\ \hline -\lambda^3\pm\lambda^2 & \lambda^2-6\lambda+5\\ \quad -6\lambda^2+11\lambda & \\ \quad \pm6\lambda^2\mp6\lambda & \\ \qquad 5\lambda-5 & \\ \qquad 5\lambda-5 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5)=0$$
$$=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-5)$$

2. BÖLÜM

1. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenler, a_{ij} ve b_i ler de sabitler olmak üzere m tane lineer denklemden oluşan

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

sistemine n- bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi denir. a_{ij} 'lere katsayılar, b_i 'lere denklemin ikinci taraf sabitleri denir. a_{ij} katsayılarından oluşan matrise sistemin katsayılar matrisi denir.

Eğer (1.1) sisteminde $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ ise bu sisteme homojen lineer denklem sistemi, b_i 'lerden en az biri sıfırdan farklıysa homojen olmayan lineer denklem sistemi denir.

(1.1) sistemini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenlerinin alacağı değerler kümesine sistemin çözümü veya çözüm takımı denir. Bir sistemin çözümü her zaman bulunmayabilir. $m=n$, $m>n$ ve $m<n$ olması halinde (1.1) sistemi değişik çözüm metotlarına sahip olacaktır.

Şimdi verilen denklem sayısına ve bilinmeyenlere göre, ortaya çıkan durumları ayrı ayrı inceleyeceğiz.

1.1. Cramer Sistemi

$m=n$ olması halinde (1.1) sistemi,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (1.2)$$

şeklinde yazılır. Burada bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşittir. $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenlerinin a_{ij} katsayılarından oluşturulan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.3)$$

determinantına (1.2) denklem sisteminin katsayılar determinantı denir. Eğer $\Delta \neq 0$ ise sisteme özel olarak Cramer sistemi ve bu sistemin çözümünü veren metoda da Cramer metodu denir.
~~Cramer sisteminin çözümü tektir ve aşağıdaki gibi bulunur~~

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

determinantları oluşturulduktan sonra

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

şeklinde $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenleri hesaplanır.

ÖRNEK:
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}\right\}$$
denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: Katsayılar determinantının değeri

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$ dır. $\Delta \neq 0$ old. Cramer sistemidir.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 27$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{27}{9} = 3$$

ÖRNEK:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \end{array}\right\}$$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$$ old. Cramer sistemidir.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -39, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -13, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 13$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-13}{-13} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1$$

ÖRNEK:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ -x + 3y = 1 \end{array}\right\}$$ denklem sistemini çözünüz

Çözüm:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$ old. Cramer Sistemidir.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2 \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1$$

Bilinmeyen sayısı ile denklem sayısının eşit olduğu durumlarda katsayılar determinantı sıfırdan farklı ise buna Cramer sistemi dendiğini gördük. Eğer $\Delta=0$ ise verilen sistemin Cramer metoduyla çözümü yapılamaz.

Şimdi lineer denklem sistemlerinin çözümü için genel bir metod vereceğiz. $m=n$ ve $\Delta=0$ hali de bu metot ile çözülebilecektir.

1.2. <u>Lineer Denklem Sistemlerinin Genel Çözüm Metodu:</u>

(1.1) sisteminin katsayılarından oluşan

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{1(p+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & a_{2(p+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & a_{p(p+1)} & \cdots & a_{pn} \\ \hline a_{(p+1)1} & a_{(p+1)2} & \cdots & a_{(p+1)p} & a_{(p+1)(p+1)} & \cdots & a_{(p+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} & a_{m(p+1)} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

matrisini gözönüne alalım. Bu matrisin elemanlarından değeri sıfırdan farklı determinantlar oluşturabiliriz. Bu determinantlardan mertebesi en yüksek olan;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad (1.4)$$

determinantına (1.1) sisteminin <u>asli determinantı</u> denir ve Δ_a ile gösterilir. Asli determinantı oluşturan denklemler uygun sırada olmayabilirler. Bu durumda katsayılar matrisinde ilk p satır ve p sütun Δ_a asli determinantını verecek şekilde denklemlerin sırasını ve bilinmeyenlerin yerlerini değiştirebiliriz. Asli determinanta katılmayan denklem sayısı $(m-p)$ tanedir. Bu $(m-p)$ tane denklem ilk p denkleme çeşitli işlemler uygulanarak elde edilebilir. Buna göre (1.1) denklem sistemindeki $x_1, x_2, \ldots, x_p$ bilinmeyenlerini ;

$$(1.5)\ldots\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 - (a_{1(p+1)}x_{p+1} + \ldots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 - (a_{2(p+1)}x_{p+1} + \ldots + a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pp}x_p = b_p - (a_{p(p+1)}x_{p+1} + \ldots + a_{pn}x_n) \end{cases}$$

sistemini kullanarak Cramer metodu ile hesaplayabiliriz. Çünkü bu sisteme ait katsayılar determinantı, asli determinant olduğundan değeri sıfırdan farklıdır. (1.5) sisteminde bulunan $x_1, x_2, \ldots, x_p$'lerin (1.1) sisteminin çözümü olabilmesi için geri kalan $(m-p)$ tane denklemi de sağlaması gerekir. Bu ise ilaveli asli determinant diyeceğimiz ;

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} & b_p \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jp} & b_j \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (1.6)$$

$p < j \leq m$

determinantlarının değerlerinin sıfır, yani $\Delta_i = 0$ olması demektir. Bu durumda (1.1) sistemine <u>bağdaşır</u> denir. $(n-p)$ bilinmeyenin her keyfi değerine bir çözüm takımı karşılık geleceğinden çözüm sayısı sonsuzdur, İlaveli asli determinant; asli determinantın son sütununa, homojenliği bozan terimlerin ve son satırın da diğer $(m-p)$ denklemden her defasında, bir tanesinin katsayıları eklenerek elde edilir. Eğer bunlardan yalnız bir tanesi bile sıfırdan farklı ise sistem bağdaşmaz denir ve çözümü yoktur.

Böylece bir denklem sisteminin çözümünde izlenecek sırayı özetlersek,

1) Asli determinant bulunur ve denklemler asli determinant sol üst köşeye gelecek şekilde yeniden dizilenir.

2) İlaveli asli determinantlar yazılıp, bunların sıfır olup olmadıklarına bakılır. Eğer hepsi sıfır ise denklem sisteminin çözümü (1.5) sisteminden diğer bilinmeyenlere bağlı olarak bulunur. İlaveli asli determinantlardan bir tanesi bile sıfırdan farklı ise çözüm yoktur.

1.3. Homojen Denklem Sistemlerinin Çözümü:

(1.1) denklem sisteminde $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ olması halinde

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1.7)$$

sistemine homojen lineer denklem sistemi denir. Eğer

(1.7) 'de $m=n$ ve katsayılar determinantı $\Delta \neq 0$ ise sistemin bir tek çözümü vardır. Buna aşikar çözüm denir ve Cramer metodu ile

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

bulunur.

Diğer hallerde çözüm, lineer denklem sistemlerinin genel çözüm metodundaki sıra izlenerek bulunur. Çözüm sayısı sonsuzdur. Buraya kadar anlatılanları şimdi örnekler üzerinde görelim.

ÖRNEK : $\left.\begin{array}{l} 3x+3y+z=0 \\ 2x-y-z=-5 \\ x+4y+2z=1 \end{array}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

$5x+2y=-5$

$5x+2y=-9$

Çözüm :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ dır. Bu nedenle sıfırdan farklı ikinci derece determinantların varlığını araştıralım. Bu determinantlardan bir tanesini, örneğin sol üst köşedekini alırsak

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

olduğu görülür. Şimdi çözümün olup olmadığını anlamak için Δ_a asli determinantıyla ilgili ilaveli asli determinanta bakalım:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$$

ilaveli asli determinant sıfırdan farklı olduğu için, denklem sistemi bağdaşmaz. Yani ilk iki denklemin çözümü üçüncü denklemi sağlamaz. Bu nedenle çözüm yoktur.

ÖRNEK: $\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ x-y+z=6 \\ 3x+12y-7z=-7 \end{array}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm:
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 12 & -7 \end{vmatrix} = 0$$ olduğundan asli determinantı arayalım.

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$ olduğundan asli determinant olarak alınabilir.

Şimdi ilaveli asli determinanta bakalım.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 12 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan sistem bağdaşır, yani ilk iki denklemden bulunacak çözüm üçüncü denklemi de sağlayacaktır. Buna göre

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ x-y+z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=1+z \\ x-y=6-z \end{array}\right\}$$

sistemini Cramer metoduyla çözeceğiz.

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+z & 2 \\ 6-z & -1 \end{vmatrix} = z-13, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 1 & 6-z \end{vmatrix} = 5-2z$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta_a} = \frac{z-13}{-3}, \quad y = \frac{5-2z}{-3}$$ bulunur.

Burada görüldüğü gibi x ve y nin değerleri z'ye bağlı olarak bulunmuştur. z'ye verilecek her keyfi değer için bir çözüm takımı bulunacağından çözüm sayısı sonsuzdur.

Mesela $z=4$ için $x=3$, $y=1$ bulunacağından $(x,y,z)=(3,1,4)$ bir çözüm takımı oluşturur.

ÖRNEK :
$$\left.\begin{aligned} 5x-y+4z+4t &= 6\\ 3x+2y+3z-t &= 1\\ x-3y-5z-2t &= 0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm : Denklem sayısı bilinmeyen sayısından az olduğuna göre asli determinant en fazla 3x3 tipinde olabilir. Buna göre

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -67 \neq 0$$ dır.

Asli determinanta katılmayan denklem bulunmadığından sistem bağdaşır ve çözüm vardır. Buna göre katsayısı asli determinantta bulunmayan değişken, eşitliğin sağ tarafına atılırsa,

$$\left.\begin{aligned} 5x-y+4z &= 6-4t\\ 3x+2y+3z &= 1+t\\ x-3y-5z &= 2t \end{aligned}\right\}$$

Cramer sistemi elde edilir. Burada

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6-4t & -1 & 4\\ 1+t & 2 & 3\\ 2t & -3 & -5 \end{vmatrix} = -35t-23$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6-4t & 4\\ 3 & 1+t & 3\\ 1 & 2t & -5 \end{vmatrix} = 107t-78$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 6-4t\\ 3 & 2 & 1+t\\ 1 & -3 & 2t \end{vmatrix} = 54t-82$$

ve $\Delta_a = -67$ bulunmuştu. Böylece $x = \frac{\Delta_1}{\Delta_a}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta_a}$, $z = \frac{\Delta_3}{\Delta_a}$ old.

$$x = \frac{-35t-23}{-67}, \quad y = \frac{107t-78}{-67}, \quad z = \frac{54t-82}{-67}$$ bulunur.

t nin alacağı keyfi değerlere göre sonsuz çözüm takımı vardır.

ÖRNEK :
$$\left.\begin{aligned} -x_1+8x_2&=7 \\ 2x_1-x_2&=1 \\ x_1-x_2&=0 \end{aligned}\right\}$$
denklem sistemini çözünüz.

Çözüm : Bilinmeyen sayısı denklem sayısından farklı olduğundan katsayılar determinantı yerine asli determinanta bakılacaktır.

$$\Delta_a=\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

dır. İlaveli asli determinant,

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} -1 & 8 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

old. denklemler bağdaşır, yani ilk iki denklemin çözümü üçüncü denklemi de sağlar.

$$\left.\begin{aligned} -x_1+8x_2&=7 \\ 2x_1-x_2&=1 \end{aligned}\right\}$$

sistemini Cramer metodu ile çözelim :

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-15 \ , \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-15 \ , \quad \Delta_a=-15$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-15}{-15}=1 \ , \qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-15}{-15}=1$$ bulunur.

ÖRNEK :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

homojen denklem sistemini çözünüz.

Çözüm : Katsayılar determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 61 \neq 0$$

şeklinde olup sıfırdan farklı ve denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğundan Cramer metodu ile

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{61} = 0$$

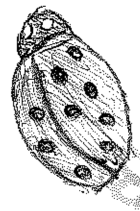
$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{61} = 0$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{61} = 0$$

bulunur. (Aşikar çözüm)

"Ayrı ben" diye tanımlayacağımız insanlar o kadar sade ki,
Ama öyle o kadar kalkık ki, birden bir tane
daha yok sanıyoruz, Karşılaşınca da hemen aşık
oluyoruz. Ayrılıyoruz, ağlıyoruz, sonra tekrar aşık oluyoruz.
Bu böyle sürüp gidiyor...

Harika = Umut Sarıkaya



$x_1 = \frac{x_2 + 4x_3}{3}$

$x_2 = \frac{3x_3 - x_1}{2}$

$x_3 = \frac{3x_1 - x_2}{4}$

$\cancel{25x_1 + 17x_1 + 1x_3 = 0}$

ÖRNEK :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ sistemini çözünüz.

Çözüm :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan aşikar olmayan çözümü vardır. Asli determinanta bakılırsa

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

olur. Bu durumda ilk iki denklemde asli determinanta girmeyen x_3 bilinmeyenini sağ tarafa geçirirsek,

$$x_1 + 3x_2 = -2x_3$$

$$x_1 + 7x_2 = -4x_3$$

Cramer sistemi elde edilir.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_a}$$ olduğundan

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2x_3 & 3 \\ -4x_3 & 7 \end{vmatrix} = -2x_3 \;, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2x_3 \\ 1 & -4x_3 \end{vmatrix} = -2x_3$$

$$x_1 = \frac{-2x_3}{4} = -\frac{x_3}{2} \;, \qquad x_2 = \frac{-2x_3}{4} = \frac{-x_3}{2}$$

çözümü bulunur. x_3'e bağlı olarak sonsuz çözüm takımı vardır.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

(1) Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

a) $\left.\begin{aligned} x+y+2z &= 5 \\ 2x+3y-z &= 2 \\ 4x+5y+z &= 7 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x+z &= 1 \\ 2x+4y-z &= 1 \\ -x+8y+3z &= 2 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x+3y+5z &= 0 \\ 3x+5y+2z &= 0 \\ 5x+2y+3z &= 1 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} 4x-3y+z &= 11 \\ 2x+y-4z &= -1 \\ x+2y-2z &= 1 \end{aligned}\right\}$

Çözüm: a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ old. Cramer sistemidir.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{9}{2}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{2}$$

b) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 60 \neq 0$ old. Cramer sistemidir.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 20, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

bulunur.

(2) Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

a) $2x+3y=7$
$4x+6y=3$
$x+17y=0$

b) $3x_1+3x_2=1$
$2x_1-x_2=-1$
$x_1+4x_2=2$

c) $x_1-8x_2=3$
$2x_1+x_2=1$
$4x_1+7x_2=-4$

d) $x_1-x_2+x_3=2$
$x_1+x_2-x_3=0$
$3x_1-x_2+x_3=3$

e) $2x_1-x_2+x_3=3$
$x_1+2x_2-2x_3=-3$
$x_1-3x_2+3x_3=0$

f) $x+2y+3z-4t=7$
$2x-y+z+t=-3$

Çözüm: a) Bilinmeyen sayısı denklem sayısından farklı old. katsayılar determinantı yerine asli determinanta bakılacaktır.

$\Delta_a=\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}=0$ old. için denklem sırasını değiştirmeliyiz.

$$\left.\begin{aligned}2x+3y&=7\\x+17y&=0\\4x+6y&=3\end{aligned}\right\}$$ şeklinde düzenlenirse $\Delta_a=\begin{vmatrix}2&3\\1&17\end{vmatrix}=31\neq0$

old. asli determinant olarak alınabilir. İlaveli asli determinant

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}2&3&7\\1&17&0\\4&6&3\end{vmatrix}=-341\neq0$$

olduğundan denklem sistemi bağdaşmaz. Yani ilk iki denklemin çözümü üçüncüyü sağlamaz.

b) $\Delta_a=\begin{vmatrix}3&3\\2&-1\end{vmatrix}=-9\neq0$ old. asli determinant olarak alınabilir.

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}3&3&1\\2&-1&-1\\1&4&2\end{vmatrix}=0$$ old. sistem bağdaşır.

$$\left.\begin{aligned}3x_1+3x_2&=1\\2x_1-x_2&=-1\end{aligned}\right\}$$ sistemini cramer ile çözelim: $\Delta=\begin{vmatrix}3&3\\2&-1\end{vmatrix}=-9$

$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&3\\-1&-1\end{vmatrix}=2$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}=-5$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{2}{9}$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{5}{9}$ bulunur.

e) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ dır. Asli determinanta bakalım.

$\Delta_a = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ dır. ilaveli asli determinant

$\Delta_i = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ old. sistem bağdaşır.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 + 2x_3 \end{aligned}\right\}$$ Cramer sistemini çözelim.

$\Delta_a = 5$ idi. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 - x_3 & -1 \\ 3 + 2x_3 & 2 \end{vmatrix} = 9$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 - x_3 \\ 1 & 3 + 2x_3 \end{vmatrix} = 3 + 5x_3$

$\Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{9}{5}, \quad x_2 = \dfrac{3 + 5x_3}{5}$ bulunur.

Böylece çözüm takımı $(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{3 + 5x_3}{5}, x_3\right)$
Örneğin $x_3 = 1$ için $\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{8}{5}, 1\right)$ üçlüsü denklemi sağlar.

3) Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

a) $$\begin{aligned} x + 5y + 2z &= 0 \\ 2x + 11y + 4z &= 0 \\ 3x + 12y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4x - 3y + 2z &= 0 \\ x - 4y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 3x - 4y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ 2x - 5y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Çözüm: a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 4 \\ 3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$

olduğundan aşikar olmayan çözümü vardır. Asli determinanta bakılırsa

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olur. İlk iki denklemde asli determinanta girmeyen z bilinmeyeni sağ tarafa geçirilirse,

$$\left.\begin{aligned} x+5y &= -2z \\ 2x+11y &= -4z \end{aligned}\right\}$$ Cramer sistemi elde edilir.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2z & 5 \\ -4z & 11 \end{vmatrix} = -2z \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2z \\ 2 & -4z \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta_a} = \frac{-2z}{1} = -2z \quad , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta_a} = \frac{0}{1} = 0$$

Buna göre çözüm takımı z'ye bağlı olarak sonsuz tanedir. Yani $(x, y, z) = (-2z, 0, z)$ dir. Örneğin $z=1$ alınırsa $(-2, 0, 1)$ bir çözüm olur ve denklemi sağlar.

b) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

olduğundan Cramer sistemidir.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0 \quad , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0 \quad , \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0 \text{ dır.}$$

(a)
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix},$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(d)
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.2 Bir matrisin eşolon formu

Tanım 1.2.1 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $m \times n$ *tipinde bir matris olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise A ya* ***satırca indirgenmiş eşolon formda*** *bir matris denir:*

1. *A nın sıfır satırları (bütün elemanları sıfır olan satırları) varsa bunlar matrisin en alt satırlarıdır.*

2. *Sıfırdan farklı bir satırın soldan itibaren sıfırdan farklı ilk elemanı* **1** *dir. Bu elemana ilgili satırın ilk* **1** *i denir.*

3. *Sıfırdan farklı her bir satır için, ilk* **1** *bir önceki satırların herhangi ilk* **1** *lerinin sağında ve altında yer alır.*

4. *Bir sütun bir ilk* **1** *içeriyorsa bu sütundaki diğer bütün elemanlar sıfırdır.*

Satırca indirgenmiş eşolon formundaki bir matris, bu matrisin üst sol köşesinden azalan ilk **1** lerin bir merdiven (eşolon) örneği olarak oluşur.

Uyarı 1.2.2 **1**. *Yukarıdaki tanımda 1,2,3 özelliklerini sağlayan $m \times n$ tipindeki bir matrise* ***satırca eşolon formdadır*** *denir.*

2. *Bu tanımlarda hiç sıfır satırı olmayabilir.*

3. *Benzer tanım sütunca indirgenmiş eşolon form ve sütunca eşolon form için de yapılabilir.*

Örnek 1.2.3

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

matrisi satırca indirgenmiş eşolon formdadır.

Örnek 1.2.4

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

matrisi satırca indirgenmiş eşolon formdadır.

Örnek 1.2.5

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi satırca indirgenmiş eşolon formdadır.

Örnek 1.2.6

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 5 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrisin 2. ve 3. sütunun ilk **1** *i dışında sıfırdan farklı elemanları vardır ve dolayısıyla satırca eşolon formdadır. (Yukarıda verilen tanımın 4 numaralı özelliği sağlanmamaktadır.)*

Örnek 1.2.7

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

şeklinde verilen matrisin 5. 6. ve 7. sütunları ilk **1** *dışında sıfırdan farklı elemanlara sahiptir ve dolayısıyla satırca eşolon formdadır. (Yukarıda verilen tanımın 4 numaralı özelliği sağlanmamaktadır.)*

Örnek 1.2.8

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrisin 1. satır 2. sütundaki eleman 5 olduğundan ne satırca indirgenmiş eşolon ne de satırca eşolon formdadır. (Yukarıda verilen tanıma göre 1. satır bir ilk **1** *e sahip değildir.)*

Örnek 1.2.9

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrisin 1. satır 1. sütundaki eleman 3 olduğundan ne satırca indirgenmiş eşolon ne de satırca eşolon formdadır. (Yukarıda verilen tanıma göre 1. satır bir ilk **1** *e sahip değildir.)*

Örnek 1.2.10

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 4 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrisin 3. satır 2. sütunundaki eleman 3 olduğundan ne satırca indirgenmiş eşolon ne de satırca eşolon formdadır. (Yukarıda verilen tanıma göre 3. satır bir ilk **1** *e sahip değildir.)*

1.2.1 Elemanter operasyonlar

Bir $A \in \mathbb{R}_n^m$ matrisinin satırlarını $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ ve sütunlarını $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ...$ ile gösterelim. Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 1.2.11 *Bir $A \in \mathbb{R}_n^m$ matrisi üzerinde tanımlanan aşağıdaki işlemlere matrisler için* ***elemanter satır (sütun) operasyonu*** *denir ve ε ile gösterilir:*

1. *$A \in \mathbb{R}_n^m$ matrisinin herhangi iki satırını (veya sütununu) kendi aralarında yer değiştirmek, $\varepsilon : \alpha_i \leftrightarrow \alpha_j$;*

2. *$A \in \mathbb{R}_n^m$ matrisinin herhangi iki satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak, $\varepsilon : \alpha_i \to c.\alpha_i$;*

3. *$A \in \mathbb{R}_n^m$ matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) bir sayı ile çarpıp diğer bir satırına (veya sütununa) eklemek, $\varepsilon : \alpha_i \to \alpha_i + c.\alpha_j$.*

Tanım 1.2.12 *Bir A matrisine sonlu sayıda satır (sütun) elemanter operasyonu uygulanarak bir B matrisi elde ediliyorsa A ve B matrislerine* ***satırca (sütunca) denk matrisler*** *adı verilir ve $A \approx B$ ile gösterilir.*

Örnek 1.2.13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad ve\ B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

matrisleri satırca denktir. Gerçekten de, sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_1:\alpha_1 \to 2.\alpha_1}{\approx} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_2:\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_3}{\approx} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_3:\alpha_3+3.\alpha_2}{\approx}\begin{bmatrix}2&4&8&6\\1&-1&2&3\\5&-2&9&11\end{bmatrix}$$

elemanter satır operasyonları uygulanmıştır.

Örnek 1.2.14

$$A=\begin{bmatrix}0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\2&2&-5&2&4\\2&0&-6&9&7\end{bmatrix}$$

matrisinin satırca indirgenmiş eşolon formunu elemanter operasyonlar yardımıyla bulalım.

$$\overset{\varepsilon_1:\alpha_3\to\frac{1}{2}\alpha_3}{\approx}\begin{bmatrix}0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\\mathbf{1}&1&\frac{-5}{2}&1&2\\2&0&-6&9&7\end{bmatrix}\overset{\varepsilon_2:\alpha_4\to\alpha_4-2\alpha_3}{\approx}\begin{bmatrix}0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\\mathbf{1}&1&\frac{-5}{2}&1&2\\0&-2&-1&7&3\end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_3:\alpha_1\to\frac{1}{2}\alpha_1}{\approx}\begin{bmatrix}0&\mathbf{1}&\frac{3}{2}&-2&\frac{1}{2}\\0&0&2&3&4\\\mathbf{1}&1&\frac{-5}{2}&1&2\\0&-2&-1&7&3\end{bmatrix}\underset{\varepsilon_5:\alpha_4\to\alpha_4+2\alpha_1}{\overset{\varepsilon_4:\alpha_3\to\alpha_3-\alpha_1}{\approx}}\begin{bmatrix}0&\mathbf{1}&\frac{3}{2}&-2&\frac{1}{2}\\0&0&2&3&4\\\mathbf{1}&0&-4&3&\frac{3}{2}\\0&0&2&3&4\end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_6:\alpha_4\to\alpha_4-\alpha_2}{\approx}\begin{bmatrix}0&\mathbf{1}&\frac{3}{2}&-2&\frac{1}{2}\\0&0&2&3&4\\\mathbf{1}&0&-4&3&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{\varepsilon_7:\alpha_2\to\frac{1}{2}\alpha_2}{\approx}\begin{bmatrix}0&\mathbf{1}&\frac{3}{2}&-2&\frac{1}{2}\\0&0&\mathbf{1}&\frac{3}{2}&2\\\mathbf{1}&0&-4&3&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\varepsilon_9:\alpha_3\to\alpha_3+4\alpha_2}{\overset{\varepsilon_8:\alpha_1\to\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2}{\approx}}\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{-17}{4} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} & 2 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_{11}:\alpha_2\leftrightarrow\alpha_3}{\overset{\varepsilon_{10}:\alpha_1\leftrightarrow\alpha_3}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{-17}{4} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uyarı 1.2.15 **1**. *Her matris kendisine denktir.*

2. *Eğer B, A ya satırca denk ise A da B ye satırca denktir.*

3. *Eğer C, B ye satırca denk; B de A ya satırca denk ise C de A ya satırca denktir.*

Teorem 1.2.16 *Her sıfırdan farklı $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ matrisi, satırca (sütunca) eşolon formdaki bir matrise satırca (sütunca) denktir.*

Teorem 1.2.17 *Her sıfırdan farklı $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ matrisi, satırca (sütunca) indirgenmiş eşolon formdaki bir tek matrise satırca (sütunca) denktir.*

Uyarı 1.2.18 *Bir matrisin satırca eşolon formunun tek olmadığına dikkat ediniz.*

1.2.2 Elemanter operasyonların uygulamaları

Bir matrisin tersinin bulunması

A, $n \times n$ matrisi I_n matirisine satırca denk olsun. Yani

$$\varepsilon_k\left(...\varepsilon_2\left(\varepsilon_1\left(A\right)\right)\right) = I_n$$

olsun. Şimdi $\varepsilon_k, ..., \varepsilon_1$ elemanter operasyonları $[A : I_n]$ matrisine uygulayalım. Bu durumda

$$\varepsilon_k\left(...\varepsilon_2\left(\varepsilon_1\left[A : I_n\right]\right)\right) = \left[\varepsilon_k\left(...\varepsilon_2\left(\varepsilon_1 A\right)\right) : \varepsilon_k\left(...\varepsilon_2\left(\varepsilon_1 I_n\right)\right)\right] \tag{1.2}$$

yazılabilir. (1.2) ve (1.3) eşitliklerinden

$$\left[A \vdots I_n\right] \approx \left[I_n \vdots A^{-1}\right]$$

elde edilir.

Örnek 1.4.19

$$x + 2y + 3z = 2$$
$$2x + 3y + 4z = -2$$
$$x + 5y + 7z = 4$$

lineer denklem sistemini çözelim. Bir önceki örnekte olduğu gibi $AX = B$ *ve*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

dir. $\det A = 2 \neq 0$ *olduğundan* A^{-1} *mevcuttur ve*

$$adj A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$A^{-1} = \frac{adj A}{\det A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

olup

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

elde edilir, yani $x = -2$, $y = -10$, $z = 8$ *dir.*

1.4.3 Gauss ve Gauss-Jordan yoketme metotları

Bir $AX = B$ lineer denklem sistemi ve bu lineer denklem sisteminin ilaveli katsayılar matrisi $\left[A \vdots B\right]$ verilsin. Bahsi edilen metot aşağıdaki adımlar takip edilerek uygulanabilir:

1. $\left[A \vdots B\right]$ matrisine elemanter satır operasyonları uygulamak suretiyle elde edilen matris $\left[C \vdots D\right]$ olsun.

2. $\left[A \vdots B\right]$ ve $\left[C \vdots D\right]$ matrisleri denk olduğundan bunlara karşılık gelen $AX = B$ ve $CX = D$ lineer denklem sistemleri de birbirine denk olur.

3. Bu lineer denklem sistemleri aynı çözüme sahiptir.

Tanım 1.4.20 *$\left[A \vdots B\right]$ matrisinden $\left[C \vdots D\right]$ matrisini satırca eşolon formunda veren metoda* ***Gauss yoketme****; $\left[C \vdots D\right]$ matrisini satırca indirgenmiş eşolon formunda veren metoda ise* ***Gauss-Jordan yoketme metodu*** *denir.*

Örnek 1.4.21

$$x + 2y - z = -6$$

$$3x - y + 2z = 11$$

$$2x + 5y - 4z = -20$$

lineer denklem sistemini Gauss-Jordan yoketme metodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\left[A \vdots B\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & \vdots & -6 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 11 \\ 2 & 5 & -4 & \vdots & -20 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_2:\alpha_3 \to \alpha_3 - 2\alpha_1}{\overset{\varepsilon_1:\alpha_2 \to \alpha_2 - 3\alpha_1}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & \vdots & -6 \\ 0 & -7 & 5 & \vdots & 29 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & \vdots & -8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\varepsilon_4:\alpha_1 \to \alpha_1 - 2\alpha_3}{\overset{\varepsilon_3:\alpha_2 \to \alpha_2 + 7\alpha_3}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & -9 & \vdots & -27 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & \vdots & -8 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_6:\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_2}{\overset{\varepsilon_5:\alpha_2 \to \frac{-1}{9}\alpha_2}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & \vdots & 10 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\varepsilon_8:\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_1 - 3\alpha_3}{\overset{\varepsilon_7:\alpha_2 \to \alpha_2 + 2\alpha_3}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki verilen lineer denklem sisteme denk olan lineer denklem sistemi

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ise sistemin çözümünü temsil eder.

Örnek 1.4.22

$$\begin{aligned} 2x + 5y - z &= 1 \\ x + 3y + 3z &= 0 \\ 4x + 11y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini Gauss yoketme metodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\left[A \vdots B\right] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & \vdots & 1 \\ \mathbf{1} & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 4 & 11 & 5 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_1:\alpha_1 \to \alpha_2}{\approx} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 5 & -1 & \vdots & 1 \\ 4 & 11 & 5 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\varepsilon_3:\alpha_3 \to \alpha_3 - 4\alpha_1}{\overset{\varepsilon_2:\alpha_2 \to \alpha_2 - 2\alpha_1}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & -7 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -7 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_5:\alpha_2 \to -\alpha_2}{\overset{\varepsilon_4:\alpha_3 \to \alpha_3 - \alpha_2}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 7 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

olup verilen lineer denklem sistemine denk olan sistem

$$\begin{aligned} x + 3y + 3z &= 0 \\ 0x + y + 7z &= -1 \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Son sistemde ilk iki denklemin çözümlerinin son denklemi sağladığı açıktır. Ayrıca $z = t$ denirse istenilen çözümler

$$x = 3 + 18t, \; y = -1 - 7t, \; z = t$$

şeklinde olur.

Örnek 1.4.23

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 + 21x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 2 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini Gauss-Jordan yoketme metodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\left[A \vdots B\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & \vdots & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 7 & 1 & 21 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 6 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_1:\alpha_1 \to \alpha_2}{\approx} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & \vdots & 1 \\ 7 & 1 & 21 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 6 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{\varepsilon_3:\alpha_3 \to \alpha_3 - 7\alpha_1 \\ \varepsilon_4:\alpha_4 \to \alpha_4 - 2\alpha_1}}{\overset{\varepsilon_2:\alpha_2 \to \alpha_2 - 2\alpha_1}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_5:\alpha_3 \to \alpha_3 - \alpha_2}{\approx} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_6:\alpha_4 \to \alpha_4 - 3\alpha_2}{\approx} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan verilen denklem sistemi,

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

denklem sistemine denktir. $x_3 = k$, $x_4 = t$ *denirse* x_1 *ve* x_2 *bilinmeyenleri* $x_1 = -3k$ *ve* $x_2 = 1 - 2t$ *olur ki çözümler*

$$x_1 = -3k,\ x_2 = 1 - 2t,\ x_3 = k,\ x_4 = t$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 1.4.24

$$x + y - z = 5$$
$$2x + 3y + 2z = -2$$
$$3x + 4y + z = 2$$

lineer denklem sistemini Gauss yoketme motodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\left[A \vdots B\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & \vdots & 5 \\ 2 & 3 & 2 & \vdots & -2 \\ 3 & 4 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_2:\alpha_3 \to \alpha_3 - 3\alpha_1}{\overset{\varepsilon_1:\alpha_2 \to \alpha_2 - 2\alpha_1}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & \vdots & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & \vdots & -12 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & -13 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\varepsilon_4:\alpha_3 \to \alpha_3 - \alpha_2}{\overset{\varepsilon_3:\alpha_1 \to \alpha_1 - \alpha_2}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -5 & \vdots & 17 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & \vdots & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

olur. O halde verilen lineer denklem sistemine denk olan lineer denklem sistem

$$x - 5z = 17$$
$$x + 4z = -12$$
$$0x + 0y + 0z = -1$$

şeklindedir. $0x + 0y + 0z \neq -1$ *olduğundan bu lineer denklem sistemi tutarsızdır ve çözümü yoktur.*

1.4.4 Homojen lineer denklem sistemi

Tanım 1.4.25 *A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $AX = 0$ şeklinde verilen bir homojen denklem sistemi daima $X = 0$ için sağlanır. $X = 0$ çözümüne sistemin* ***aşikar çözümü*** *ve $X \neq 0$ çözümlerine de sistemin* ***aşikar olmayan çözümü*** *denir.*

Uyarı 1.4.26 *Daima $rankA = rank\left[A \vdots 0\right] = r$ olduğundan homojen lineer denklem sisteminin her zaman çözümü vardır. Eğer $r = n$ ise sistemin tek çözümü (aşikar çözümü) ve $r < n$ ise sistemin $n - r$ parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.*

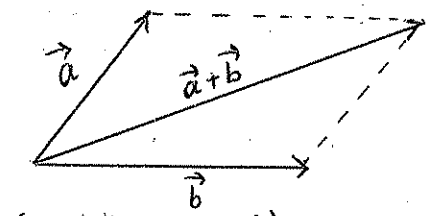
HIFSI ALTINOK

VEKTÖRLER

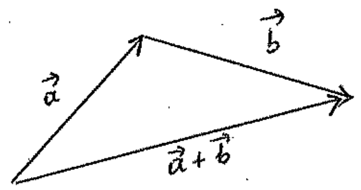
Tanım : Belirli bir yönlü doğru parçasının paralellik bağıntısıyla tanımlı denklik sınıfına vektör denir. Bir vektörün başlangıç noktası, bitim noktası, doğrultusu ve yönü belirlenir.

Vektörlerle Yapılan işlemler

ⓐ Toplama İşlemi



(paralelkenar kuralı)

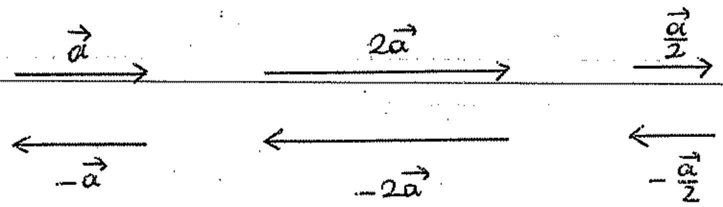


(Üçgen kuralı)

ⓑ Skaler ile Çarpım

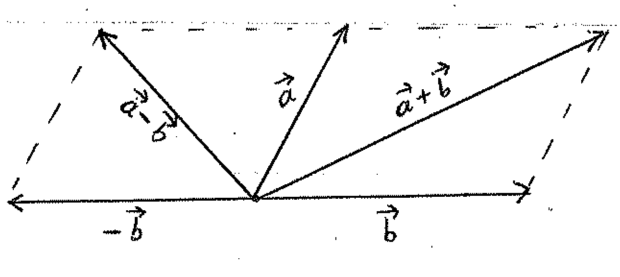
Bir vektörün bir skaler ile çarpılması demek skalerin büyüklük, küçüklük veya negatifliğine göre boyunun uzayıp kısalması veya yönünün değişmesi ile ilgilidir.

Örnek



ⓒ Çıkarma İşlemi

İki vektörün farkı $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$ şeklinde tanımlanır.

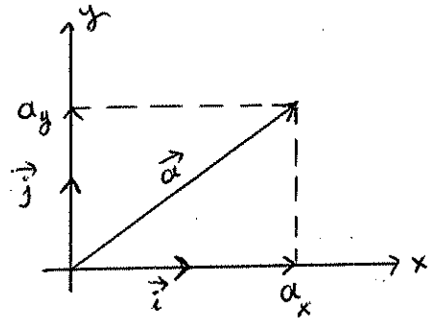


Düzlemde (İki Boyutlu Uzayda) Vektör Gösterimi

İki boyutlu uzayda $\vec{i}=(1,0)$, $\vec{j}=(0,1)$ standart baz vektörleri a_x ve a_y eksenlerinin bileşenleri olmak üzere düzlemde bir vektörü

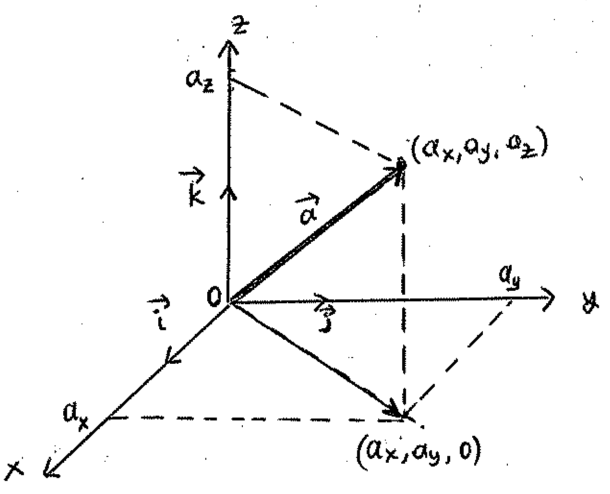
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = (a_x, a_y)$$

şeklinde göstereceğiz.



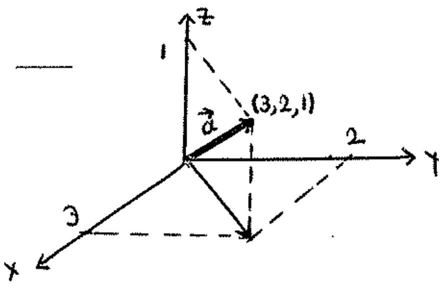
Üç Boyutlu Uzayda Vektör Gösterimi

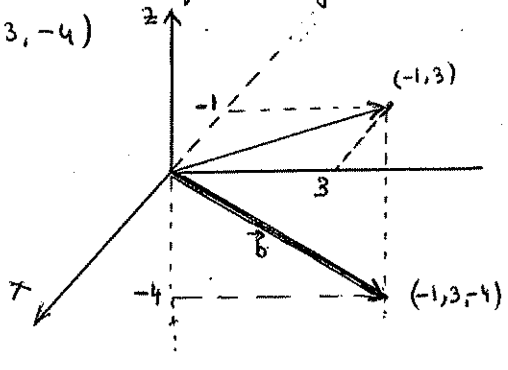
$\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ standart baz vektörleri a_x, a_y, a_z ile verilen vektörün bileşenleri olmak üzere $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$ vektörü aşağıda gösterilmiştir.



ÖRNEK : Üç boyutlu uzayda aşağıdaki vektörleri gösteriniz.

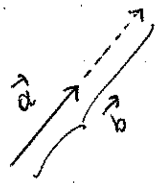
a) $\vec{a} = (3,2,1)$ b) $\vec{b} = (-1,3,-4)$



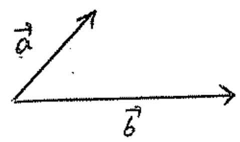


Lineer Bağımlı ve Lineer Bağımsız Vektörler

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ herhangi iki vektör ve bu vektörlerin biri diğerinin katı şeklinde yazılabiliyorsa bu vektörlere lineer bağımlı vektörler denir. Aksi durumda lineer bağımsız vektörler denir.



($\vec{b}=2\vec{a}$ old. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ lineer bağımlı)

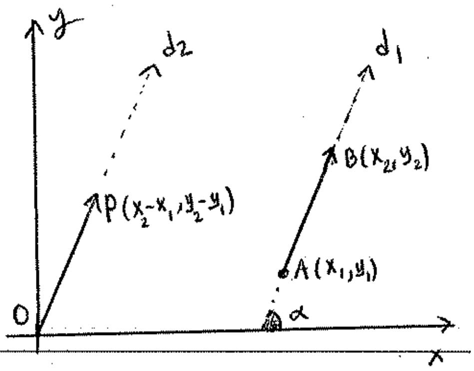


($\vec{a}$ ve $\vec{b}$ lineer bağımsız)

Baz : $\vec{u}, \vec{v} \in V$ olsun. Eğer $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri lineer bağımsız ise $(\vec{u}, \vec{v})$ çiftine V kümesi üzerinde bir baz denir.

Konum (Yer) Vektörü : Başlangıç noktası orjin olan vektörlere konum vektörü denir. Eğer vektör orjinde değilse vektörün uzunluğunu ve yönünü değiştirmemek kaydıyla orjine taşıyabiliriz.

$\vec{AB}$ vektörüne eş ve başlangıç noktası orjin olan $\vec{OP}$ vektörüne $\vec{AB}$ nin konum vek. denir.



$$\vec{P} = \vec{OP} = \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

ÖRNEK : $A(-2,4)$, $B(3,-6)$ ise $\vec{AB}$ nin konum vektörü

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = [3,-6] - [-2,4] = [3-(-2), -6-4] = [5,-10].$$

İki Vektörün Eşitliği

$\vec{A} = (x_1, y_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri için

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \text{ dir.}$$

Vektör Uzayları

$V \neq \emptyset$ vektörlerin bir kümesi ve K bir cisim olsun.

$\oplus : V \times V \to V$ ve $\odot : K \times V \to V$ fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlarsa V'ye K cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

$\forall x, y, z \in V$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için $x \oplus y \in V$ olmak üzere (kapalılık) (çarpmaya göre)

1) $x \oplus y = y \oplus x$ (Değişme)
2) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (Birleşme)
3) $x \oplus e = e + x = x$ (Birim eleman)
4) $x \oplus (-x) = (-x) \oplus x = e$ (Ters eleman)
5) $\varepsilon \odot x = x$ (ε birim eleman)
6) $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$
7) $(\alpha \oplus \beta) \odot x = (\alpha \odot x) + (\beta \odot x)$
8) $(\alpha \odot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$

NOT: $K \neq \emptyset$ bir küme ve üzerinde "+" ve "·" işlemleri tanımlansın. $(K, +, \cdot)$ üçlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa K'ya $\boxed{\text{cisim}}$ denir. $\forall a, b, c \in K$ için

1) $a + b = b + a$ 2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ 3) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
4) $a + 0 = a$ 5) $a + (-a) = 0$ 6) $a \cdot b = b \cdot a$ 7) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ 8) $a \cdot 1 = a$
9) $a \cdot a^{-1} = 1$

Bir vektör uzayı, üzerinde tanımlandığı cisme göre isim alır. Eğer K bir reel sayılar cismi ise V'ye reel vektör uzayı, $K = \mathbb{C}$ yani K kompleks sayılar cismi ise V'ye kompleks vektör uzayı denir.

$\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı:

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ kümesi toplama ve skaler ile çarpım işlemine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzayda toplama ve skaler ile çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ dır.

$\alpha \in \mathbb{R}$ skaler olmak üzere

$\alpha \vec{x} = \alpha (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ dır.

ÖRNEK: $(1, 2, 1, 3)$, $(2, 1, 3, 1) \in \mathbb{R}^n$ verilsin.

$(1,2,1,3) + (2,1,3,1) = (3,3,4,4)$

$5 \cdot (1,2,1,3) = (5,10,5,15)$

Alt Vektör Uzayı V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı, W da V nin bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa W'ya V nin bir alt uzayıdır denir.

i) $\forall x, y \in W$ için $x + y \in W$

ii) $\forall x \in W$ ve $\forall \alpha \in K$ için $\alpha x \in W$

ÖRNEK: $V = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \}$ kümesinin $\mathbb{R}^n$ nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: i) $x, y \in V$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere $x + y \in V$ yani $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in V$ olduğunu göstermeliyiz.

$$x \in V \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$$
$$y \in V \Rightarrow \quad + \; y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$$
$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) = 0$$

old. $x + y \in V$ dir.

ii) $\forall x \in V$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \in V$ olduğunu yani $\alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$x \in V \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \text{ dır.}$$

$$\alpha x = \alpha (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \alpha . 0 = 0$$

old. $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n \in V$ dır.

$x + y \in V$ ve $\alpha x \in V$ old. $V \subset \mathbb{R}^n$ bir alt vektör uzayıdır.

ÖRNEK: $V = \{ x = (x_1, x_2, x_3) : x_i > 0 \} \subset \mathbb{R}^3$ kümesinin alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\forall x, y \in V$ için $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere $x + y \in V$ olduğunu göstermeliyiz:

$$\left. \begin{array}{l} x \in V \Rightarrow x_1 > 0, \; x_2 > 0, \; x_3 > 0 \\ y \in V \Rightarrow y_1 > 0, \; y_2 > 0, \; y_3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x_1 + y_1), (x_2 + y_2), (x_3 + y_3) > 0$$

olup $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in V$ dir.

ii) $\forall x \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $x=(x_1,x_2,x_3)$ olmak üzere $\alpha x \in V$, yani $(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in V$ olduğunu göstermeliyiz. $x=(x_1,x_2,x_3) \in V$ old. $x_1, x_2, x_3 > 0$ dir. α yı pozitif seçersek $\alpha x > 0$ ve $\alpha x \in V$ olur, fakat α skaler old. negatif de olabilir. Bu nedenle $\alpha < 0$ için yani $\alpha = -1$ seçilirse $\alpha x = (-x_1, -x_2, -x_3) < 0$ olup $\alpha x \notin V$ olur. Buna göre V kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayı değildir.

Lineer Kombinasyon (Birleşimi) V vektör uzayı K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ ve $\alpha \in K$ olmak üzere

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

toplamına x 'in lineer kombinasyonu (birleşimi) denir.

Örnek: $x_1=(1,2)$, $x_2=(-1,1)$ vektörleri ve $x=(-1,7)$ vektörleri verilsin. Burada x vektörünü

$$x = 2x_1 + 3x_2 \qquad \{(-1,7) = 2(1,2)+3(-1,1)\}$$

şeklinde yazabiliriz.

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

V bir vektör uzayı ve $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektörünü göz önüne alalım.

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

ise $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesine lineer bağımsız, Eğer $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 'lerden en az biri sıfırdan farklı ise bu vektörlere lineer bağımlıdır denir.

ÖRNEK : $x_1=(1,-1,1)$, $x_2=(1,0,1)$, $x_3=(0,1,1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadıklarını gösteriniz.

Çözüm : $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0$ olsun.

$$c_1\cdot(1,-1,1)+c_2(1,0,1)+c_3(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$(c_1,-c_1,c_1)+(c_2,0,c_2)+(0,c_3,c_3)=(0,0,0)$$

$$(c_1+c_2,-c_1+c_3,c_1+c_2+c_3)=(0,0,0)$$

$c_1+c_2=0$, $-c_1+c_3=0$, $c_1+c_2+c_3=0$

$\Rightarrow$ $c_1=0$, $c_2=0$ ve $c_3=0$ bulunur.

Dolayısıyla tüm c_i sabitleri sıfır olduğundan $\{x_1,x_2,x_3\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

NOT: $\det(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq 0$ ise $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Yukarıdaki örnekte

$$\det(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$ old. lineer bağımsızdır.

Vektörlerin iç çarpımı

V bir reel vektör uzayı olsun. ~~V üzerinde bir iç çarpım~~ aşağıdaki şartları sağlayan bir

$$\langle\,,\,\rangle : V\times V\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x},\vec{y})\longrightarrow\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$$

dönüşümüdür:

Bazı kaynaklarda iç çarpım "$\cdot$" şeklinde skaler çarpım ile de gösterilir. Yani

$$\cdot : V\times V\to\mathbb{R}$$
$$(\vec{x},\vec{y})\to\vec{x}\cdot\vec{y}$$

1) $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in V$ için $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle\vec{y},\vec{x}\rangle$ (Simetri)

2) $\forall\,\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{y}_2,\vec{x},\vec{y}\in V$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için

$$\left.\begin{aligned}\langle\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2,\vec{y}\rangle&=\alpha\langle\vec{x}_1,\vec{y}\rangle+\beta\langle\vec{x}_2,\vec{y}\rangle\\ \langle\vec{x},\alpha\vec{y}_1+\beta\vec{y}_2\rangle&=\alpha\langle\vec{x},\vec{y}_1\rangle+\beta\langle\vec{x},\vec{y}_2\rangle\end{aligned}\right\}\ (\text{Bilineerlik})$$

3) $\forall\,\vec{x}\in V$ için $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\geq 0$ ve $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=0 \iff \vec{x}=0$

Eğer $V = \mathbb{R}^n$ alınırsa $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$ dir.

ÖRNEK: $\vec{x} = (1,0,1)$; $\vec{y} = (2,3,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (1,0,1), (2,3,1) \rangle = 1.2 + 0.3 + 1.1 = 3$$

Norm: Bir $\vec{x} \in V$ vektörünün normu $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ şeklinde tanımlanır. Üç boyutlu uzayda $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

şeklindedir.

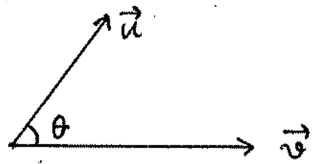
ÖRNEK: $\vec{x} = (1,2,3)$ ise $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\langle (1,2,3), (1,2,3) \rangle} = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

ÖRNEK: $A(-2,-4)$, $B(2,5)$ ise $\vec{AB}$ vektörünün normunu (uzunluğunu) bulunuz.

Çözüm: $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = [2,5] - [-2,-4] = [4,9]$
$\Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{97}$

İki Vektör Arasındaki Açı: $\vec{x}, \vec{y} \in V$ lineer bağımsız iki vektör olmak üzere, bu iki vektör arasındaki açı

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$



formülüyle bulunur.

ÖRNEK: $\vec{x} = (3,1,0)$, $\vec{y} = (0,1,-1)$ ise iki vektör arasındaki açıyı bul.

Çözüm $\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{\langle (3,1,0), (0,1,-1) \rangle}{\sqrt{\langle (3,1,0), (3,1,0) \rangle} \cdot \sqrt{\langle (0,1,-1), (0,1,-1) \rangle}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

$\theta = 77^\circ$

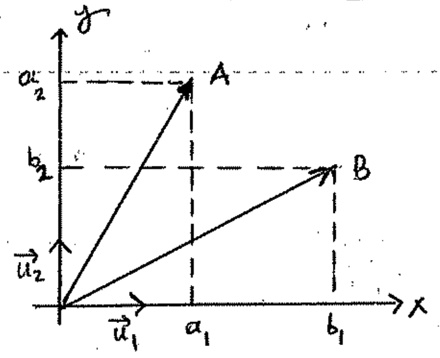
$\cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ old. Kosinüsü $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ olan açıyı hesap mak. ile bulabiliriz.

Birim Vektör: Normu 1 olan vektördür. Bir vektörü birim vektör yapmak için bu vektörün bileşenleri normuna bölünür.

ÖRNEK: $\vec{x} = (-2,3,1) \Rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \neq 1$ old. birim vektör değildir. Bu vektörü birim vektör yapalım:

$$E = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right)$$ olup $\|\vec{E}\| = 1$ 'dir.

İki Nokta Arasındaki Uzaklık:



Şekilde görüldüğü gibi $A(a_1, a_2)$ ve $B(b_1, b_2)$ noktaları arasındaki uzaklık $\vec{u_1}$ ve $\vec{u_2}$ birim vektörler olmak üzere aşağıdaki gibi bulunur.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{BA} = (b_1 - a_1)\vec{u_1} + (b_2 - a_2)\vec{u_2}$$

$$= (b_1 - a_1)(1,0) + (b_2 - a_2)(0,1) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$\Rightarrow \quad d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$$

... Baz V vektör uzayının keyfi bir alt kümesi S olsun. S nin elemanlarının her sonlu kümesi lineer bağımsız ise S kümesine lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlıdır denir.

$S \subset V$ olsun. Aşağıdaki 2 şart sağlanırsa S'ye $\boxed{\text{baz}}$ denir.

i) S lineer bağımsızdır

ii) $V = Sp\{S\}$ dir. Yani her $\vec{x} \in V$ elemanı S'deki sonlu sayıdaki elemanların bir lineer birleşimidir. $(x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)$

ÖRNEK: $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$, $\vec{e_3} = (0,0,1)$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ ün baz vektörleridir. Gerçekten,

i) $c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3} = 0$

$\Rightarrow c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (0,0,0)$

$(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ old.

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

ii) Her $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörü

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$$
$$= x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$$
$$= (x_1,0,0) + (0,x_2,0) + (0,0,x_3)$$
$$= (x_1, x_2, x_3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, $\mathbb{R}^3$ ün bazıdır.

ÖRNEK: $\vec{x}_1=(1,-1,1)$, $\vec{x}_2=(0,1,1)$, $\vec{x}_3=(0,0,1)$ vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ ün bir bazı olduğunu gösteriniz

Çözüm: $c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+c_3\vec{x}_3=(0,0,0)$

$$(c_1, -c_1+c_2, c_1+c_2+c_3)=(0,0,0)$$

Buradan $c_1=c_2=c_3=0$ old. $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ lineer bağımsızdır. Ayrıca $\mathbb{R}^3=Sp\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ old. $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$, $\mathbb{R}^3$ için bir bazdır. (Çünkü $\mathbb{R}^3$'ün her x elemanı $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3$ şeklinde yazılabilir.)

Ortogonal Vektörler

V bir vektör uzayı olsun. Eğer $\vec{x},\vec{y}\in V$ olmak üzere $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0$ ise bu vektörlere $\boxed{\text{ortogonal}}$ veya dik vektörler denir.

Ortogonal ve ortonormal Sistem

Sonlu boyutlu bir V vektör uzayının bir bazı $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}$ olsun. Eğer her i,j; $i,j=1,2,\dots,n$ için $\langle\vec{x}_i,\vec{x}_j\rangle=0$ ise $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}$ sistemine $\boxed{\text{ortogonal sistem}}$ denir.

Eğer $\langle\vec{x}_i,\vec{x}_j\rangle=\begin{cases}0, & i\neq j \text{ ise}\\ 1, & i=j \text{ ise}\end{cases}$

şartı sağlanıyorsa $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\}$ sistemine $\boxed{\text{ortonormal sistem}}$ denir.

ÖRNEK: $\vec{x}_1=\frac{1}{5}(3,4)$, $\vec{x}_2=(\alpha,\beta)$, V nin lineer bağımsız vektörleri olsun. $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ bir ortonormal sistem ise $(\alpha,\beta)=?$

Çözüm: $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ bir ortonormal sistem ise

$\langle x_1,x_1\rangle=1$, $\langle x_2,x_2\rangle=1$, $\langle x_1,x_2\rangle=0$ olmalıdır.

$$\langle x_1,x_2\rangle=0 \Rightarrow \langle\tfrac{1}{5}(3,4),(\alpha,\beta)\rangle=0$$
$$\Rightarrow \boxed{3\alpha+4\beta=0}$$

$\langle x_1,x_1\rangle=1$ eşitliğinde bilinmeyen yoktur. Sadece sabit sayılar old. işlem yapmaya gerek yok.

$$\langle x_2,x_2\rangle=1 \Rightarrow \langle(\alpha,\beta),(\alpha,\beta)\rangle=1$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha^2+\beta^2=1}$$

Buradan $\left.\begin{array}{l} 3\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -\frac{4}{3}\beta$

$\frac{16}{9}\beta^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm\frac{3}{5} \qquad \alpha = \pm\frac{4}{5}$ bulunur.

<u>Gram-Schmidt Metodu</u> (Ortonormalleştirme Metodu)

V bir vektör uzayı, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$, V'nin lineer bağımsız bir kümesi olsun. Bu vektörleri önce bir ortogonal sisteme daha sonra da bir ortonormal sisteme dönüştüren metoda Gram-Schmidt Metodu denir. Metot, aşağıdaki gibidir.

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1$$

$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\cdot \vec{y}_1$$

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle}\cdot \vec{y}_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = \vec{x}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{x}_n, \vec{y}_i \rangle}{\langle \vec{y}_i, \vec{y}_i \rangle}\cdot \vec{y}_i$$

eşitlikleri yardımıyla $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ sistemi $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n\}$ ortogonal sistemine dönüşür.

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \frac{\vec{y}_n}{\|\vec{y}_n\|}$$

eşitlikleri ile de $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n\}$ ortogonal sistemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ ortonormal sistemine dönüşmüş olur.

ÖRNEK : $\vec{x}_1=(1,0)$, $\vec{x}_2=(1,1)$ vektörlerine Gram- Schmidt metodunu uygulayınız.

Çözüm : $c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2=0 \Leftrightarrow (c_1+c_2,0)=0 \Leftrightarrow c_1=c_2=0$ olduğundan $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

$$\vec{y}_1=\vec{x}_1=(1,0)$$

$$\vec{y}_2=\vec{x}_2-\frac{\langle\vec{x}_2,\vec{y}_1\rangle}{\langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\vec{y}_1=(1,1)-\frac{\langle(1,1),(1,0)\rangle}{\langle(1,0),(1,0)\rangle}.(1,0)$$

$$\Rightarrow \vec{y}_2=(1,1)-\frac{1.(1,0)}{1}=(0,1)$$

Böylece $\vec{y}_1=(1,0)$, $\vec{y}_2=(0,1)$ ortogonal sistemi elde edilir.

Buradan $\vec{e}_1=\dfrac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|}=\dfrac{(1,0)}{\sqrt{\langle(1,0),(1,0)\rangle}}=\dfrac{(1,0)}{1}=(1,0)$

ve $\vec{e}_2=\dfrac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}=\dfrac{(0,1)}{1}=(0,1)$ olup

$\{e_1,e_2\}$ ortonormal sistemi elde edilir. (yani $\langle e_1,e_1\rangle=1$, $\langle e_2,e_2\rangle=1$, $\langle e_1,e_2\rangle=0$ bulunur.)

ÖRNEK : $\vec{x}_1=(1,1,0)$, $\vec{x}_2=(0,1,1)$, $\vec{x}_3=(0,0,1)$ sistemini ortonormal sisteme dönüştürünüz.

Çözüm : $c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+c_3\vec{x}_3=0 \Leftrightarrow c_1=c_2=c_3=0$ olup $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ lineer bağımsızdır.

$$\vec{y}_1=\vec{x}_1=(1,1,0)$$

$$\vec{y}_2=\vec{x}_2-\frac{\langle\vec{x}_2,\vec{y}_1\rangle}{\langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\vec{y}_1=(0,1,1)-\frac{\langle(0,1,1),(1,1,0)\rangle}{\langle(1,1,0),(1,1,0)\rangle}.(1,1,0)$$

$$\Rightarrow y_2=(0,1,1)-\frac{1}{2}(1,1,0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2=\left(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2},1\right)$$

$$\vec{y_3} = \vec{x_3} - \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \vec{y_1} - \frac{\langle \vec{x_3}, \vec{y_2} \rangle}{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} \cdot \vec{y_2}$$

$$\vec{y_3} = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1), (1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle} \cdot (1,1,0) - \frac{\langle (0,0,1), (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 1) \rangle}{\langle (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \rangle} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\Rightarrow \vec{y_3} = (0,0,1) - \vec{0} - \frac{1}{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{y_3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

olup $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3}\}$ ortogonal sistemi elde edilir. Buradan

$$\vec{e_1} = \frac{\vec{y_1}}{\|\vec{y_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1,0)$$

$$\vec{e_2} = \frac{\vec{y_2}}{\|\vec{y_2}\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{e_3} = \frac{\vec{y_3}}{\|\vec{y_3}\|} = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad \left\{ \|y_3\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

şeklinde $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ ortonormal sistemi elde edilir.
(yani $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 1$ ve $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 0$ olur)

<u>Vektörel Çarpım</u> $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\vec{x} \times \vec{y}$ şeklinde gösterilir ve normu $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\theta$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere vektörel çarpım

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{x_1} & \vec{x_2} & \vec{x_3} \\ \vec{y_1} & \vec{y_2} & \vec{y_3} \end{vmatrix}$$

şeklindedir.

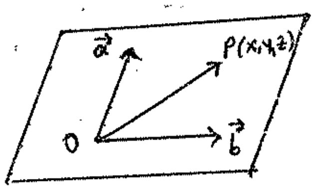
<u>ÖRNEK</u>: $\vec{x} = (0,2,1)$, $\vec{y} = (-1,0,3)$ ise $\vec{x} \times \vec{y} = ?$

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

Vektörlerin Düzleminin Denklemi

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ve $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektörlerinin belirttiği düzlemin denklemi determinant yardımıyla

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$



şeklindedir.

ÖRNEK: $A = (1,3,5)$, $B = (2,4,6)$ vektörlerinin belirttiği düzlemin denklemini yazınız.

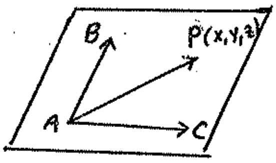
ÇÖZÜM: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+4y-2z=0$

ÖRNEK: $A = (1,-1,0)$, $B = (2,2,4)$, $C = (-1,2,1)$ noktalarını ihtiva eden düzlemin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM: $AP = P - A = (x-1, y+1, z)$

$AB = B - A = (1,3,4)$

$AC = C - A = (-2,3,1)$



$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x-y+z=0$$

ÖRNEK: $A = (3,4,\lambda)$, $B = (1,3,5)$, $C = (0,-1,2)$ vektörlerinin aynı düzlemde olması için λ ne olmalıdır?

Çözüm

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & \lambda \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 45$$

Vektörlerin Paralel Olma Koşulu

$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri paralel ise

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$ dir.

ÖRNEK : $\vec{u} = (2, 8, x)$, $\vec{v} = (1, y, -2)$ ve $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ise $x + y = ?$

Çözüm : $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ 'dır

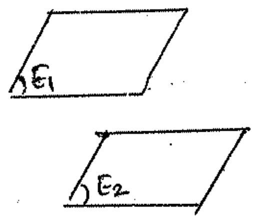
$$\frac{2}{1} = \frac{8}{y} = \frac{x}{-2} \Rightarrow x = -4 \;,\; y = 4 \Rightarrow x + y = 0$$

İki Düzlemin Paralel Olma Koşulu

$E_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ ve $E_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

düzlemlerinin paralel olması için

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



olmalıdır.

ÖRNEK : $x - ny + 4z - 2 = 0$ ile $2x + 5y + 8z - 5 = 0$ düzlemlerinin paralel olması için n ne olmalıdır?

$$\frac{1}{2} = -\frac{n}{5} = \frac{4}{8} \Rightarrow n = -\frac{5}{2}$$

İki Düzlemin Dik Olma Koşulu

$E_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ ve $E_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

düzlemlerinin dik olması için

$$a_1 . a_2 + b_1 . b_2 + c_1 . c_2 = 0$$

olmalıdır.

ÖRNEK : $3x + 4y + mz - 3 = 0$ ve $-2x + 5y + 3z + 1 = 0$ düzlemleri dik ise m ne olmalıdır?

$$3.(-2) + 4.5 + m.3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{14}{3}$$

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1) Aşağıdaki kümelerden hangileri $\mathbb{R}^n$ nin bir alt vektör uzayıdır.

a) $V_1 = \{ \vec{x} = (x_i) \; ; \; x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \}$,

b) $V_2 = \{ \vec{x} = (x_i) \; ; \; x_1 = 0 \}$,

c) $V_3 = \{ \vec{x} = (x_i) \; ; \; \forall x_i \in \mathbb{Q} \}$

Çözüm : a) V_1 kümesi $\mathbb{R}^n$ nin bir alt vektör uzayı değildir. Çünkü $(0, 0, \dots, 0) \notin V_1$ old. V_1 'in birim elemanı yoktur.

b) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_2$ için $\vec{x} = (0, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (0, y_2, \dots, y_n)$

olmak üzere $\vec{x} + \vec{y} = (0, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$\Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V_2$ dir.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{x} \in V_2$ için

$\alpha \vec{x} = (0, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in V_2$ dır.

Dolayısıyla V_2, $\mathbb{R}^n$ nin bir alt vektör uzayıdır.

c) $\vec{x} = (1, 0, 0, \dots) \in V_3$ ve $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ için

$\sqrt{2} \cdot \vec{x} = (\sqrt{2}, 0, \dots, 0)$ olup $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ old. $\sqrt{2}\vec{x} \notin V_3$ dır.

~~Dolayısıyla~~ V_3, $\mathbb{R}^n$ nin alt vektör uzayı değildir.

2) $H = \{ (t+4, -3t) : t \in \mathbb{R} \}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ nin bir alt vektör uzayı mıdır?

Çözüm: H kümesi sıfır vektörünü içermediği için alt vektör uzayı değildir. Çünkü $(t+4, -3t) = (0, 0)$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}$ sayısı yoktur.

(3) $H = \{(t-s,\ -2t+s,\ 3t-2s) : t, s \in \mathbb{R}\}$ olduğuna göre H, $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt vektör uzayı mıdır?

Çözüm: $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in H$ olsun.

$$\vec{x} = (t_1 - s_1,\ -2t_1 + s_1,\ 3t_1 - 2s_1)$$
$$\vec{y} = (t_2 - s_2,\ -2t_2 + s_2,\ 3t_2 - 2s_2) \quad \text{olsun.}$$

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha t_1 - \alpha s_1,\ -2\alpha t_1 + \alpha s_1,\ 3\alpha t_1 - 2\alpha s_1) + (\beta t_2 - \beta s_2,\ -2\beta t_2 + \beta s_2,\ 3\beta t_2 - 2\beta s_2)$$

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \left[(\alpha t_1 + \beta t_2) - (\alpha s_1 + \beta s_2),\ -2(\alpha t_1 + \beta t_2) + (\alpha s_1 + \beta s_2),\ 3(\alpha t_1 + \beta t_2) - 2(\alpha s_1 + \beta s_2)\right]$$

$\alpha t_1 + \beta t_2 = a$ ve $\alpha s_1 + \beta s_2 = b$ diyelim. Buna göre

$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (a-b,\ -2a+b,\ 3a-2b)$ olur. a ve b reel sayı olduğundan $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in H$ dır. Böylece H, $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt vektör uzayıdır.

(4) $H = \{(4t-s,\ -2t+s-1,\ 3t-2s) : t, s \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt vektör uzayı mıdır?

(5) $H = \{(2t,\ -4t,\ t) : t \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt vektör uzayı mıdır?

6) $\mathbb{R}^2$'de $x_1=(3,-1)$, $x_2=(1,3)$ olmak üzere $\{x_1,x_2\}$ kümesi lineer bağımsız mıdır? Gösteriniz.

Çözüm: $c_1x_1+c_2x_2=0$ eşitliği sadece $c_1=c_2=0$ durumunda sağlanırsa $\{x_1,x_2\}$ lineer bağımsız olur.

$$c_1x_1+c_2x_2=(3c_1+c_2,-c_1+3c_2)=(0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3c_1+c_2=0\\ -c_1+3c_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow c_1=c_2=0 \text{ bulunur.}$$

O halde $\{x_1,x_2\}$ lineer bağımsızdır.

7) $\mathbb{R}^2$'de $x_1=(1,-2)$, $x_2=(3,2)$, $x_3=(5,6)$ olmak üzere $\{x_1,x_2,x_3\}$ kümesi lineer bağımsız mıdır?

Çözüm: $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0$

$$\Rightarrow (c_1+3c_2+5c_3,-2c_1+2c_2+6c_3)=(0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}c_1+3c_2+5c_3=0\\ -2c_1+2c_2+6c_3=0\end{array}\right\} \text{ denklem sistemini çözelim:}$$

$$\left.\begin{array}{l}c_1+3c_2=-5c_3\\ -2c_1+2c_2=-6c_3\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}1&3\\-2&2\end{vmatrix}=8,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}-5c_3&3\\-6c_3&2\end{vmatrix}=8c_3$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-5c_3\\-2&-6c_3\end{vmatrix}=-16c_3 \Rightarrow c_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=c_3,\quad c_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-2c_3$$

$\Rightarrow (c_3,-2c_3,c_3)$ çözüm takımı bulunur. Örneğin $c_3=1$ verilirse $(1,-2,1)$ çözümü bulunur. $(1,-2,1)\neq(0,0,0)$ olduğundan $\{x_1,x_2,x_3\}$ lineer bağımlıdır.

8) $\mathbb{R}^2$'de $\{(4,-3), (-8,6)\}$ kümesi lineer bağımsız mıdır?

9) $\mathbb{R}^3$'de $x_1=(3,-2,1)$, $x_2=(-6,4,-2)$ kümesi lineer bağımsız mıdır? ($\{x_1,x_2\}$ nin lineer bağımsızlığı)

10) $\mathbb{R}^3$'de $\{(2,-3,1), (0,4,1), (3,1,2)\}$ kümesi lineer bağımsız mıdır.

Çözüm: Determinant yardımıyla bulalım.

$$\det(x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

olduğundan $\{x_1,x_2,x_3\}$ lineer bağımsızdır.

11) $\mathbb{R}^3$'de $\{(-1,2,0), (3,1,2), (7,0,2)\}$ kümesi lineer bağımsız mıdır?

Çözüm: Determinant yardımıyla bulalım.

$$\det(x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

old. lineer bağımlıdır.

12) $\mathbb{R}^3$ uzayında $\{(1,1,0), (0,0,1), (0,-1,1)\}$ bazı veriliyor. Gram-Schmidt metoduyla ortonormal bir baz elde ediniz.

Çözüm Gram-Schmidt metoduna göre

$$y_1 = x_1 = (1,1,0)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle}\cdot y_1 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,1,0)\rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle}(1,1,0)$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = (0,0,1)$$ bulunur.

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} \cdot y_1 - \frac{\langle x_3, y_2\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle} \cdot y_2$$

$$= (0,-1,1) - \frac{\langle (0,-1,1),(1,1,0)\rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle} \cdot (1,1,0)$$

$$- \frac{\langle (0,-1,1),(0,0,1)\rangle}{\langle (0,0,1),(0,0,1)\rangle} \cdot (0,0,1) -$$

$\Rightarrow \quad y_3 = \frac{1}{2}(1,-1,0)$ bulunur. Böylece $\{y_1, y_2, y_3\}$ ortonormal bazı elde edilmiş olur.

Buradan

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle}} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$$e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{(0,0,1)}{1} = (0,0,1)$$

$$e_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \frac{\frac{1}{2}(1,-1,0)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)$$

şeklinde $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazı elde edilir.

13) $\mathbb{R}^3$ ün $\{(1,1,-1),(0,1,-1),(0,1,0)\}$ bazından Gram-Schmidt metoduyla ortonormal bir baz elde ediniz.