ÇÖZÜMLÜ SORULAR

(Yüksek Mert. Lineer Dif. Denklemler)

(1) $y'' - 6y' + 25y = 64e^{-x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklemi Belirsiz Katsayılar Metoduyla çözelim:

$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -64 < 0$ olup

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64i^2}}{2} = 3 \pm 4i$$

$$y_h = c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x$$

homojen çözümü bulunur. Özel çözüm için

$y_p = Ae^{-x}$

kabul edilirse $\quad y_p' = -Ae^{-x}$ ve $y_p'' = Ae^{-x}$ olacağından

$$(Ae^{-x}) + 6Ae^{-x} + 25Ae^{-x} = 64e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad 32Ae^{-x} = 64e^{-x} \quad \Rightarrow A = 2$$

$\Rightarrow y_p = 2e^{-x}$ olup genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x$$

bulunur.

(2) $y'' - y' - 2y = \sin 2x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklemi Belirsiz Katsayılar Metoduyla çözelim:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 2$ bulunur.

Buradan $\quad y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ homojen çözümü elde edilir.

$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$ kabul edilirse

$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$ ve

$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$

türevleri denklemde yerine yazılırsa

$(-4A\sin 2X - 4B\cos 2X) - (2A\cos 2X - 2B\sin 2X) - 2(A\sin 2X + B\cos 2X) = \sin 2X$

$\Rightarrow (-6A + 2B)\sin 2X + (-6B - 2A)\cos 2X = 1.\sin 2X + 0.\cos 2X$

$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -6A+2B&=1 \\ -6B-2A&=0 \end{aligned}\right\}$ denklemlerinden $A = -3/20$ $B = 1/20$ bulunur.

Böylece özel çözüm

$$y_p = -\frac{3}{20}\sin 2X + \frac{1}{20}\cos 2X$$

ve genel çözüm

$$y = c_1 e^{-X} + c_2 e^{2X} - \frac{3}{20}\sin 2X + \frac{1}{20}\cos 2X$$

bulunur.

(3) . $y'' - 4y' + 3y = 9X^2 + 4$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 , \lambda_2 = 3$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{X} + c_2 e^{3X}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p = AX^2 + BX + C$ kabul edilirse

$y_p' = 2AX + B$ ve $y_p'' = 2A$ olacağından

$2A - 4(2AX + B) + 3(AX^2 + BX + C) = 9X^2 + 4$

$\Rightarrow 3AX^2 + (-8A + 3B)X + 2A - 4B + 3C = 9X^2 + 4$

$\Rightarrow 3A = 9, \quad -8A + 3B = 0, \quad 2A - 4B + 3C = 4$

$\Rightarrow A = 3, \quad B = 8, \quad C = 10$

$\Rightarrow y_p = 3X^2 + 8X + 10$

$\Rightarrow y = y_h + y_p = c_1 e^{X} + c_2 e^{3X} + 3X^2 + 8X + 10$

genel çözümü bulunur.

4) $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Belirsiz katsayılar metoduyla çözelim:

$\lambda^2-4=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-2$ olup homojen çözüm

$y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$ dir.

$y_p=e^{2x}(A\sin 2x+B\cos 2x)$ kabul edilirse

$$y_p'=2e^{2x}(A\sin 2x+B\cos 2x)+e^{2x}(2A\cos 2x-2B\sin 2x)$$

$$y_p''=4e^{2x}(A\sin 2x+B\cos 2x)+2e^{2x}(2A\cos 2x-2B\sin 2x)$$
$$+2e^{2x}(2A\cos 2x-2B\sin 2x)+e^{2x}(-4A\sin 2x-4B\cos 2x)$$

$$\Rightarrow y_p'=(2Ae^{2x}-2Be^{2x})\sin 2x+(2Be^{2x}+2Ae^{2x})\cos 2x$$

$$\Rightarrow y_p''=(-8Be^{2x})\sin 2x+8Ae^{2x}\cos 2x$$

$\Rightarrow$ $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$ denkleminde yazılırsa

$$(-8Be^{2x}\sin 2x+8Ae^{2x}\cos 2x)-4e^{2x}(A\sin 2x+B\cos 2x)$$
$$=e^{2x}\sin 2x+0\cdot e^{2x}\cos 2x$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-12B-4A)}_{=1}e^{2x}\sin 2x+\underbrace{(12A-4B)}_{=0}\cos 2x=e^{2x}\sin 2x+0$$

$$\left.\begin{array}{l}-8B-4A=1\\ 8A-4B=0\end{array}\right\}\quad A=-\frac{1}{20},\ B=-\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow y_p=e^{2x}\left(-\frac{1}{20}\sin 2x-\frac{1}{10}\cos 2x\right)$$

özel çözümü ve

$$y=y_h+y_p=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+e^{2x}\left(-\frac{1}{20}\sin 2x-\frac{1}{10}\cos 2x\right)$$

genel çözümü bulunur.

(5) $y'' + 9y = 2x\sin 3x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Belirsiz katsayılar metodunu kullanalım:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$\Rightarrow$ $y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ homojen çözümü bulunur.

Eğer özel çözüm olarak

$$y_p = (Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x$$

kabul edilirse y_h ile ortak terimler bulunduğundan dolayı

$$y_p = x[(Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x]$$

ifadesi özel çözüm olarak alınmalıdır.

Buradan türev alınarak y_p' ve daha sonra y_p'' türevi hesaplanıp $y''+9y = 2x\sin 3x$ denkleminde yerine yazılırsa ve düzenlenirse

$$(12Cx+2A+6D)\cos 3x + (-12Ax+2C-6B)\sin 3x \equiv 2x\sin 3x$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$12C = 0, \quad 2A+6D=0, \quad -12A = 2, \quad 2C-6B=0$$

bulunur ki bu eşitliklerden belirsiz katsayılar

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{18}$$

olarak hesaplanır. Böylece özel çözüm

$$y_p = x\left[\left(-\frac{1}{6}x\right)\cdot\cos 3x - \frac{1}{18}\sin 3x\right]$$

ve genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x - x\left(\frac{1}{6}x\cos 3x + \frac{1}{18}\sin 3x\right)$$

bulunur.

(6) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Parametrelerin değiştirilmesi metodunu kullanalım.

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda^2 = i^2 \Rightarrow \lambda = \pm i = 0 \pm i$$

old. homojen çözüm

$$y_h = c_1 e^{0x} \cos x + c_2 e^{0x} \sin x$$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ bulunur. Özel çözüm için

$y_p = v_1 \cos x + v_2 \sin x$ kabul edelim. Böylece

$$\left.\begin{aligned} v_1' (\cos x) + v_2' (\sin x) &= 0 \\ v_1' (-\sin x) + v_2' (\cos x) &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Cramer metodu ile çözülürse

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \quad v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\tan x \quad , \quad v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \int v_1' dx = \int -\tan x dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \int v_2' dx = \int 1 dx = x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \sin x$$

$$\Rightarrow \quad y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \sin x$$

genel çözümü bulunur.

(7) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Parametrelerin değiştirilmesi metoduyla çözelim:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p = v_1 e^{2x} + v_2 e^{x}$ özel çözüm olarak kabul edilirse

$$\left.\begin{aligned} v_1' e^{2x} + v_2' e^{x} &= 0 \\ v_1' 2e^{2x} + v_2' e^{x} &= \frac{1}{1+e^{-x}} \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{x} \\ 2e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix} = -e^{3x}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{x} \\ \frac{1}{1+e^{-x}} & e^{x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{1}{1+e^{-x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}, \qquad v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Rightarrow v_1 = \int v_1' dx = -\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx = -\left[\int \left(e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx\right]$$

$$= -e^{-x} + \ln(1+e^{-x})$$

$$v_2 = \int v_2' dx = -\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -(-\ln(1+e^{-x})) = \ln(1+e^{-x})$$

$$\Rightarrow y_p = \left[-e^{-x} + \ln(1+e^{-x})\right] \cdot e^{2x} + \ln(1+e^{-x}) \cdot e^{x}$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + \left[-e^{-x} + \ln(1+e^{-x})\right] \cdot e^{2x} + \ln(1+e^{-x}) \cdot e^{x}$$

genel çözümü bulunur.

(8) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Parametrelerin değiştirilmesi metoduyla çözelim:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2.$$

$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p = v_1 e^{-2x} + v_2 x e^{-2x}$ kabul edilirse

$$\left.\begin{aligned} v_1' e^{-2x} + v_2' x e^{-2x} &= 0 \\ v_1'(-2e^{-2x}) + v_2'(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) &= \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemini Cramer metoduyla çözelim:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ \dfrac{e^{-2x}}{x^2} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-4x}}{x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \dfrac{e^{-2x}}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{e^{-4x}}{x^2}$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{x}, \qquad v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow v_1 = \int v_1'\,dx = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln x$$

$$\Rightarrow v_2 = \int v_2'\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y_p = (-\ln x)\cdot e^{-2x} - \frac{1}{x}\cdot xe^{-2x}$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x}\ln x - e^{-2x}$$

genel çözümü bulunur.

(9) $x^3 y''' + x y' - y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Bu denklem Cauchy-Euler denklemidir. $x = e^t$ olmak üz

$$x^3 y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} \quad \text{ve}$$

$$x y' = \frac{dy}{dt}$$

türevleri denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad \text{bulunur.}$$

o halde homojen çözüm

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$$

$$y = c_1 x + c_2 (\ln x) \cdot x + c_3 (\ln x)^2 \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad y = x\left(c_1 + c_2 \ln x + c_3 (\ln x)^2\right)$$

şeklinde bulunur.

(10) $x^2 y'' + 3x y' + 5y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -3$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: Cauchy-Euler denklemidir. $x = e^t$ dön. yapalım: $\{x = e^t \Rightarrow t = \ln x\}$

$$x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \quad \text{ve} \quad x y' = \frac{dy}{dt}$$

türevleri denklemde yerlerine yazılırsa

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{-t}\cos 2t + c_2 e^{-t}\sin 2t$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 \frac{1}{x}\cos(2\ln x) + c_2 \frac{1}{x}\sin(2\ln x)$$

homojen çözümü bulunur.

$y(1) = 1$ başlangıç şartına göre $x=1$ ve $y=1$ alınırsa

$$1 = c_1 \cdot \frac{1}{1}\cos(2\ln 1) + c_2 \frac{1}{1}\sin(2\ln 1)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = c_1 + c_2 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = +1}$$ bulunur.

$y'(1) = -3$ başlangıç şartı için y' türevini almalıyız.

$$y' = c_1 \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\cdot\cos(2\ln x) - \frac{2}{x^2}\cdot\sin(2\ln x)\right]$$
$$+ c_2 \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\sin(2\ln x) + \frac{2}{x^2}\cos(2\ln x)\right]$$

$\Rightarrow$ $x=1$ ve $y'=-3$ yazılırsa

$$-3 = c_1 \cdot \left[-\cos(2\ln 1) - 2\cdot\sin(2\ln 1)\right]$$
$$+ c_2\left[-\sin(2\ln 1) + 2\cos(2\ln 1)\right]$$

$$\Rightarrow \quad -3 = -c_1 + 2c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = -1}$$

$c_1 = 0$ ve $c_2 = -1$ değerleri genel çözümde yerlerine yazılırsa

$$y = \frac{1}{x}\left[\cos(2\ln x) - \sin(2\ln x)\right], \quad x>0$$

bulunur.