

## BOOLE FONKSİYONLARININ SADELEŞTİRİLMESİ

Boole fonksiyonlarını oluşturan sayısal lojik kapıların karmaşıklığı doğrudan doğruya fonksiyonu oluşturan cebirsel ifadenin karmaşıklığına bağlıdır. Her fonksiyonun doğruluk tablosu gösterimi tektir fakat cebirsel olarak birçok farklı yolla gösterilebilir. Boole fonksiyonları daha önce anlatılan cebirsel yollarla sadeleştirilebilir ama bu yöntemin sistematik kuralları olmadığından dolayı kullanışlı değildir. Diyagram metodu, Boole fonksiyonlarının minimizasyonu için kullanılan basit bir yöntemdir. Bu yöntem doğruluk tablosunun şekilleştirilmiş bir biçimi ya da Venn diyagramının gelişmiş bir şekli olarak da düşünülebilir. Bu diyagram metodu Veitch ya da Karnaugh diyagramı olarak da bilinir.

Diyagram karelerden oluşmuştur ve her bir kare minterimi temsil eder. Her Boole fonksiyonu minterimlerin toplamı şeklinde ifade edilebildiği için fonksiyonun içerdiği minterimleri kapsayan karelerden hareketle fonksiyon elde edilebilir. Aslında bu diyagram bir fonksiyonun standart formda ifade edilebileceği tüm şekilleri sunan görsel bir diyagramdır. Bu diyagram yardımıyla alternatif cebirsel ifadeler elde edilerek bunların en basit olanı seçilebilir. Burada, en basit cebirsel ifadenin minimum sayıda değişkenin çarpımlarının toplamı ya da toplamalarının çarpımı şeklinde ifade edileceği varsayılacaktır.

### İki ve Üç Değişkenli Diyagramlar

Aşağıdaki tablo minterimlerin yerleştirilmesi ile oluşturulmuş bir diyagramdır.

$m_0$	$m_1$
$m_2$	$m_3$

Bu minterimler yerleştirilirken satır ve sütunlar aşağıdaki gibi lojik değişkenler ile temsil edilirler.

		$y$	
		$\overbrace{\hspace{1cm}}$	
		$y$	
	$x$	$0$	$1$
$0$		$x'y'$	$x'y$
$1$		$xy'$	$xy$

$x+y$  lojik işlemini göz önüne alalım.  $x+y=x'y+xy'+xy=m_1+m_2+m_3$  ile minterimlerin toplamı şeklinde temsil edilir. Diyagram oluşturulurken fonksiyonun doğruluk tablosunda lojik 1 olan yerlere bu minterimler aşağıdaki gibi yerleştirilir.

		$y$	
		0	1
$x$	$y$		
0			1
1		1	1

Burada bir birine komşu olan ve 1'lerden oluşan ikili ya da dörtlü kareler göz önüne alınmalıdır. Bu komşuluklar aşağıda dikdörtgen içine alınarak gösterilmiştir. Daha sonra bu komşuluklardan yararlanarak fonksiyon sadeleştirilebilir. İkinci satırı düşünelim. Bu satırın değişkenleri arasındaki ilişki şu şekildedir. İkinci satır birinci sütun elemanı  $xy'$  temsil ederken ikinci satır ikinci sütun elemanı da  $xy$  'yi temsil eder. Bu ikisinin toplamı  $xy'+xy=x(y'+y)=x.1=x$  olur. Aynı şekilde, ikinci sütun birinci satır  $x'y$  temsil ederken ikinci sütun ikinci satır ise  $xy$  'yi temsil eder. bu ikisinin toplamı  $x'y+xy=y(x'+x)=y$  olur. Bu iki ifadenin toplamı  $x+y$  lojik ifadenin minimum toplamlar şeklindeki en basit ifadesidir. Genel olarak bir yöntem ortaya konulacak olursa; yatay satır için,  $x$  değişmezken  $y$  değişkeni değişiyor ve toplama kendisi ve değili geldiği için toplamı 1 olur dolayısıyla yatay satırda  $x$  değişkeninin sadece kendisi kalır, değeri de 1 olduğu için doğrudan kendisi alınır. Dikey sütun için ise  $y$ 'nin değeri değişmezken  $x$  ve  $x'$ in değili toplama girdiğinden  $x$  etkisiz kalır ve sadece  $y$  'nin kendisi işleme girer o sütundaki  $y$  değeri de 1 olduğu için direkt olarak  $y$  değeri alınır ve bu iki değer toplanarak  $x+y$  şeklinde lojik ifadenin en sade hali elde edilir.

		$y$	
		0	1
$x$	$y$		
0			1
1		1	1

$x.y$  lojik işlemini göz önüne alalım. Doğruluk tablosundan aşağıdaki diyagram elde edilir.

		$y$	
		0	1
$x$	$y$		
0			
1			1

İkinci sütun ve satır elemanı sadece lojik 1 olduğundan sadece bu eleman 1 olup  $x$  ve  $y$  değişmediğinden ve değerli bir olduğundan bu ikisinin VE 'lenmesi ile fonksiyon sadeleştirilebilir.



		yz		y	
x		0 0	0 1	1 1	1 0
x	0			1	1
	1	1	1		

İlk satırdaki dikdörtgen ile belirtilen 1'ler şu işleme karşılık gelir.  $x'yz+x'yz'=x'y(z+z')=x'y$  'ye karşılık gelir. Başka bir deyişle, ilk satırda değişen eleman z olduğu için göz önüne alınmaz sadece y dikkate alınır, ilk satırda diğer değişmeyen eleman x olduğu için ve x değişkenin bu satırdaki değeri lojik 0 olduğu için değili alınır ve bu iki değişkenin VE 'lenmesi ile bu karelerin fonksiyonu bulunur. İkinci satır için ise değişmeyen eleman y ve değeri lojik 0 olduğu için y' diğer eleman x ve değeri lojik 1 olduğu için kendisi alınarak VE 'lenerek xy' elde edilir. Elde edilen iki fonksiyonun VEYA 'lanması ile yukarıdaki fonksiyonun en sade hali elde edilir.

$$F(x, y, z) = \sum (2,3,4,5) = x'y + xy'$$

**Örnek:** Aşağıdaki Boole fonksiyonunu sadeleştiriniz.

$$F(x, y, z) = \sum (3,4,6,7)$$

Önce fonksiyonu temsil eden her minterime karşılık gelecek şekilde 1 konur. Bunlar,  $m_3$ ,  $m_4$ ,  $m_6$  ve  $m_7$  minterimleridir.

		yz		y	
x		0 0	0 1	1 1	1 0
x	0			1	
	1	1		1	1

İlk sütun ile son sütun arasında da bir komşuluk ilişkisi vardır. Buradaki örnekte olduğu gibi,  $xy'z'+xyz'=xz(y+y')=xz$ . En son sütunla ilk sütunu komşu olarak düşünecek olursak, değişen eleman y olduğundan etkisi göz önüne alınmaz. Değişmeyen eleman z ve değeri lojik 0 olduğundan z', satır elemanı x olduğundan ve değeri lojik 1 olduğundan x bu ikisi VE 'lenirse xz' elde edilir. Diğer kare düşünülecek olursa, y ve z değer değiştirmiyorlar ve değerleri lojik 1 dolayısıyla, yz olarak elde edilir, x değer değiştirdiği için göz önüne alınmaz ve bu karenin fonksiyonu yz olarak elde edilir.  $x'yz+xyz=yz(x+x')yz$ . Yukarıdaki fonksiyonun en sade hali bu iki minterimin VEYA 'lanması ile elde edilir ve  $xz'+yz$  olur.

$$F(x, y, z) = \sum (3,4,6,7) = xz' + yz$$

Gruplandırılan komşu karelerin sayısı daima 1, 2, 4, ve 8 gibi ikinin kuvvetleri şeklinde olmalıdır. Bu komşu karelerin sayısı arttıkça elde edilen çarpım terimindeki değişken sayısı azalır.

- ✿ Her kare bir minterime karşılık düşer ve üç değişken ile temsil edilir.
- ✿ Komşu iki kare iki değişkenli bir terime karşılık düşer.
- ✿ Komşu dört kare ise tek değişkene karşılık düşer.
- ✿ Sekiz komşu kare tüm diyagramı kapsadığı için sürekli olarak 1'e eşit bir fonksiyonu verir.

**Örnek:** Aşağıdaki Boole fonksiyonunu sadeleştiriniz.

$$F(x, y, z) = \sum (0,2,4,5,6)$$

Önce fonksiyonu temsil eden her minterime karşılık gelecek şekilde 1 konur. Bunlar,  $m_0$ ,  $m_2$ ,  $m_4$ ,  $m_5$  ve  $m_6$  minterimleridir.

		$yz$		$y$	
		0 0	0 1	1 1	1 0
$x$	0	1			1
$x$	1	1	1		1
		$z$			

Dörtlü ikili komşuluğunda değişmeyen eleman sadece  $z$  dir ve değeri lojik 0 olduğu için  $z'$  ile temsil edilir. Diğer ikili kare  $y'x$  ile temsil edilir. Bu iki değer toplamı fonksiyonun değerini verir.

$$F(x, y, z) = \sum (0,2,4,5,6) = xy' + z'$$

**Örnek:** Aşağıda verilen Boole fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$F = A'C + A'B + AB'C + BC$$

Eksik terimleri tamamlayacak olursak;

$$F = A'BC + A'B'C + A'BC' + A'BC + AB'C + ABC \text{ elde edilir.}$$

Minterimler şeklinde ifade edecek olursak;

$$F(A, B, C) = m_3 + m_1 + m_5 + m_2 + m_7$$

$$F(A, B, C) = \sum (1,2,3,5,7)$$

		$BC$		$B$	
	$A$	00	01	11	10
$A$	0		1	1	1
	1		1	1	

$C$

Dörtlü birlikler tek bir değişkeni temsil eder. Tek değişmeyen eleman C 'dir. Diğer ikili grup ise iki değişkeni temsil eder. Değişmeyen eleman B ve sütunda değişmeyen eleman A ve değeri lojik 0 olduğundan değili alınarak VE 'lenir ve  $A'B$  elde edilir. Her ikisinin toplamı ile  $A'B+C$  elde edilir.

$$F(A,B,C) = \sum (1,2,3,5,7) = A'B + C$$

### Dört Değişkenli Diyagramlar

Burada, yine sıralı ikililer yerine gray kodları kullanılacaktır. Minterimlerin diyagrama yerleşimleri ve karelerin değişkenlerle olan ilişkisi aşağıdaki gibidir.

		$yz$		$y$	
	$wx$	00	01	11	10
$w$	00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
	01	$w'xy'z'$	$w'xyz$	$w'xyz$	$w'xyz'$
	11	$wxy'z'$	$wxyz$	$wxyz$	$wxyz'$
	10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

$z$

Üç değişkenli diyagramlar için uygulanan yöntemin aynısı uygulanır.

Bir kare dört değişkenli bir minterimi temsil eder.

İki komşu kare üç değişkenli bir minterimi temsil eder.

Dört komşu kare iki değişkenli bir minterimi temsil eder.

Sekiz komşu kare tek değişkenli bir minterimi temsil eder.

On altı komşu kare 1'e eşit bir fonksiyonu temsil eder.

4'lü, 8'lü ve 16'lı karalar için komşuluklar aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

		Y	
		0	1
X	0	0	1
	1	2	3

		Y	
		0	1
X	0	$\overline{X}Y$	$\overline{X}Y$
	1	$X\overline{Y}$	$XY$

		YZ				Y	
		X	00	01	11	10	
	0		0	1	3	2	$\overline{X}Z$
	1		4	5	7	6	$XZ$

		YZ				Y	
		WX	00	01	11	10	
	00		0	1	3	2	
	01		4	5	7	6	
	11		12	13	15	14	
	10		8	9	11	10	

**Örnek:** Aşağıdaki Boole fonksiyonunu basitleştiriniz.

$$F(w, x, y, z) = \sum (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

		yz				y	
		wx	00	01	11	10	
	00		1	1		1	
	01		1	1		1	
	11		1	1			
	10		1	1			

Sekizli komşu birlikler tek bir değişkene karşılık gelir. Satır değişkenleri w ve x ile sütun değişkeni z değiştiği için bu sekizli komşudan sadece y fonksiyona gelir onunda değeri lojik 0

olduğu için  $y'$  olarak değer alır. İlk sütundaki ikili ile son sütundaki ikili dörtlü bir komşuluk oluşturup iki değişken ile ifade edilirler. Geçişlerde  $x$  ve  $y$  değer değiştiği için göz önüne alınmazken  $w$  ve  $z$  değer değişmediklerinden bunların çarpımı ile bir terim gelir.  $w$  değeri ve  $z$  değeri lojik 0 olduğundan değilleri alınarak çarpılır ( $w'z'$ ). Diğer dörtlü de  $y$  ve  $w$  değer değiştirdiklerinden işleme katılmazlar.  $z$  ve  $x$  işleme girerler.  $z$  değişkenin o karelerdeki değeri lojik 0 olduğundan  $z'$  olarak dikkate alınır  $x$  ise değişmeden işleme girer ( $xz'$ ).

$$F(w, x, y, z) = y' + xz' + w'z'$$

**Örnek:** Aşağıdaki Boole fonksiyonunu sadeleştiriniz.

$$F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C'$$

İlk minterim iki elemanlı bir kareyi temsil eder. Bu minterimde bulunmayan eleman D 'dir. Dolayısıyla D 'nin 0'dan 1'e geçtiği satırlarda bu minterim temsil edilir. Aynı mantıkla diğer üç değişkenli terimlerin de bulundukları kareler bulunabilir. Dört değişkenli minterim ise tek bir kare ile temsil edilir. Bu kareler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

		$CD$		$C$	
		00	01	11	10
$AB$	00	1	1		1
	01				1
	11				
	10	1	1		1
				$D$	

$$F = B'C' + A'CD' + B'D'$$

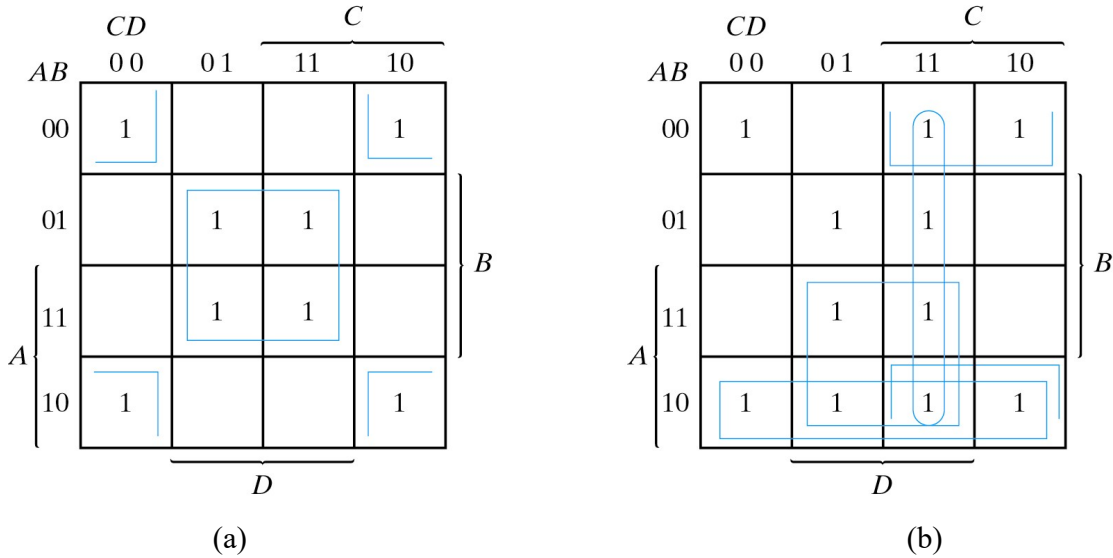
### Asal Çarpanlar

Diyagram üzerinde komşu kareler seçilirken, kareler birleştirildiğinde fonksiyonun tüm minterimleri kapsadığından emin olunmalıdır. Aynı zamanda, ifadedeki terim sayının minimum olmasına ve daha önce kullanılmış terimlerin gerekmiyorsa tekrar kullanılmamasına dikkat edilmelidir. Bazen basitleştirme kriterini sağlayan iki veya daha çok sayıda ifade olabilir. Diyagramdaki kareleri gruplandırma asal çarpan ve temel asal çarpan olarak adlandırılan terimlerin anlaşılması ile daha sistematik olarak yapılabilir. Asal çarpan, diyagramda olası maksimum sayıda komşu karenin birleştirilmesi ile elde edilen bir çarpım terimidir. Bir karedeki minterim sadece bir asal çarpan tarafından kapsanıyorsa buna temel asan çarpan denir. Bu asal



çarpanlar, bir Boole fonksiyonunun diyagram kullanılarak olası basitleştirilmiş ifadelerinin bulunmasında kullanılacak olup ileride detaylı olarak anlatılacaktır.

$F = (A,B,C,D) = \sum(0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$  Boole fonksiyonunu göz önüne alalım.



Yukarıdaki (a) şeklinde gösterilen BD ve B'D' temel asal çarpanlardır. Şekilde (b)'de ise bu temel asal çarpanlar ile örtülebilen mümkün tüm asal çarpanlar görülmektedir. Bu asal çarpanlar CD, B'C, AD ve AB' 'dır. O halde bu F fonksiyonunu farklı dört şekilde ifade etmek mümkündür.

$$\begin{aligned}
 F &= BD + B'D' + CD + AD \\
 &= BD + B'D' + CD + AB' \\
 &= BD + B'D' + B'C + AD \\
 &= BD + B'D' + B'C + AB'
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki örnekten de anlaşılabileceği gibi asal çarpanlar ifadenin sadeleştirilmesi için seçeneklerin belirlenmesinde kullanılır.

### Beş Değişkenli Diyagramlar

Dörtten fazla değişkenli diyagramları kareler ile ifade etmek oldukça zordur. Beş değişkenli bir diyagramda 32, altı değişkenli bir diyagramda 64 kare bulunur. Dolayısıyla, bu kareler arasındaki komşulukları da bulmak zorlaşacaktır. Beş değişkenli bir diyagramda değişkenlerden bir tanesinin değeri sürekli 0 ve 1 alınarak iki tane diyagram oluşturulur. Aşağıdaki diyagramlarda görüldüğü gibi A değişkeni diyagramlardan birinde sürekli olarak 0, diğerinde ise 1 olarak seçilmiştir. Bu diyagramlar hem kendi içlerinde hem de karşılıklı olarak komşuluklar içerirler. Örneğin  $m_4$  minterimi  $m_{20}$  minterimine,  $m_{15}$  minterimi de  $m_{31}$  minterimine

komşudur. Altı veya daha fazla değişkenli diyagramları kullanmak ve çözmek oldukça zordur. Bu nedenle Boole fonksiyonlarının basitleştirilmesi için hazırlanmış özel bilgisayar programları kullanmak gerekecektir.

$A = 0$				
	$DE$		$D$	
$BC$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
	8	9	11	10
$E$				

$B$	$C$				

$A = 1$				
	$DE$		$D$	
$BC$	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
	24	25	27	26
$E$				

$B$	$C$				

**Örnek:** Aşağıdaki Boole fonksiyonunu basitleştiriniz.

$$F(A, B, C, D, E) = \sum (0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$$

$A = 0$

		$DE$		$D$			
		00	01	11	10		
$B$	$BC$	00	01	11	10		
	00	1			1		
	01	1			1		
	11		1				
	10		1				
		$E$					

$A = 1$

		$DE$		$D$			
		00	01	11	10		
$B$	$BC$	00	01	11	10		
	00						
	01		1	1			
	11		1	1			
	10		1				
		$E$					

Diyagramlar yukarıdaki gibi oluşturulur. Soldaki diyagram basitleştirilecek olursa,  $A'B'E' + A'BD'E$  olur, sağdaki diyagram için ise  $ACE + ABD'E$  olur. Noktalı kareler her iki diyagramda komşu olduklarından bir terimden  $A'$ , diğer terimden  $A$  geleceği aşikârdır.  $A + A' = 1$  olduğundan bu tür komşuluklarda  $A$  değişkeni ve terimlerden biri göz önüne alınmaz yani  $ABD'E$  ve  $A'BD'E$  terimlerindeki  $A$  değişkenleri göz önüne alınmamalı ve  $BD'E$  göz önüne alınmalıdır.

$$F = A'B'E' + BD'E + ACE$$