28.09.22

AYRIK MATEMATİK

Ayrık Mat ve Onun Uygulamaları (Palme Yayıncılık)

... Roshen

Önerme : Doğruluğu ya da yanlışlığı kesin olarak bilinir.
Emir ifadeleri de önerme değil.
Soru içeren cümleler önerme değil

Her bir önermenin 2^n farklı durum olur.

→ p ve q birer önerme olsun p ve q'nun kesişimi (ve) şeklinde gösterilir ($p \wedge q$). Önermelerin her ikisinin doğru olması olması durumunda sonuç doğrudur aksi durumda sonuç yanlıştır.

şart bağlı, xor, xnor, paralel bağlı

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \oplus q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1

→ p ve q birer önerme olsun p ve q'nun birleşimi ($p \vee q$) şeklinde gösterilir. Önermelerin her ikisinin yanlış olması durumunda sonuç yanlıştır. Aksi durumda doğrudur.

→ p ve q iki önerme olsun p ise q şartlı ifadesi ($p \to q$) şeklinde yazılır. p'nin doğru $q \equiv 0$ olması durumunda sonuç yanlış iken aksi durumda doğrudur.

→ p ve q iki önerme olsun ya da $p \oplus q$ şartlı ifadesi şeklinde yazılır. Önermelerin her ikisinin doğru veya yanlış olması durumunda sonuç yanlıştır. Aksi durumda doğrudur.

→ Ancak ve ancak şartlı ifadesi $p \Leftrightarrow q$ şeklinde yazılır. Önermelerin her ikisinin doğru veya yanlış olması durumunda sonuç doğru. Aksi durumda sonuç yanlıştır.

sahtekar, şövalye

sahtekar ← A: ikimiz şövalyeyiz
B: A sahtekardır. → şövalye

→ sahtekar
A = B şövalye
B = ikimiz farklı tür
→ sahtekar

p	q	
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Bir bileşik önermenin tüm değerleri doğruysa "totoloji" yanlışsa "çelişkidir."

p	q'	$p \vee q'$	$p \wedge q'$
0	1	1	0
1	0	1	0

→ çelişki
→ totoloji

$\boxed{0 \vee 0 = 0}$

$(p \wedge p) \vee (p \wedge q) = p \quad p = 1$

$q = 0$

$p \to q$
$0 \quad 0 \equiv 1$

$\boxed{1 \vee 0 = 1}$

$p \to q \equiv p' \vee q$ esdeğer olup olmadığını gösteriniz.

p	q	$p \to q$	p'	$p' \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

$p' \vee q$

Raymond Smullyan

$+\ p \vee p' \equiv T$

$+\ p \wedge p' \equiv F$

$+\ p \wedge T \equiv p$

$+\ p \vee F \equiv p$

$+\ p \vee T \equiv F$?

$+\ p \wedge F \equiv p$?

$+\ p \vee p \equiv p$

$+\ p \wedge p \equiv p$

$(p')' \equiv p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$(p \wedge q)' \equiv p' \boxed{\vee} q'$

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ } Demorgan

$+\ p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$+\ p \wedge (p \wedge q) \equiv p$

$+\ p \to q \equiv p' \vee q$

$+\ p \to q \equiv q' \to p'$

$+\ p \vee q \equiv p' \to q$

$+\ p \wedge q \equiv (p \to q')'$

$+\ (\boxed{p \to} q) \wedge (\boxed{p \to} r) \equiv p \to (q \wedge r)$

$(p \boxed{\to r}) \wedge (q \boxed{\to r}) \equiv (p \vee q) \to r$ (?)

$+\ (\boxed{p \to} q) \vee (\boxed{p \to} r) \equiv p \to (q \vee r)$

$(p \boxed{\to r}) \vee (q \boxed{\to r}) \equiv (p \wedge q) \to r$ (?)

$+\ (p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

? $(p \leftrightarrow q) \equiv p' \leftrightarrow q'$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (p' \wedge q')$

$(p \leftrightarrow q)' \equiv p \leftrightarrow q'$

} Denk olup olmadığını ispatla

$(p \wedge q) \to (p \vee q)$ totoloji mi çelişki mi old. yazınız.

$p \to q$

$(p \wedge q)' \vee (p \vee q)$

$p' \vee q' \vee p \vee q \equiv T$

} Totolojidir.

? $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv \boxed{p \to (q \wedge r)}$ denk olup olmadığını bul

$(p \to q) \wedge (p \to r)$

soru ① $\boxed{(p \to q) \to r \equiv p \to (q \to r)}$

$(p' \vee q) \to r$

$(p' \vee q)' \vee r$

$r \vee (p \wedge q') \equiv (r \vee p) \wedge (r \vee q')$ devamını gelir

$(p \to r) \to (q \to r) \equiv (p \to q) \to (p \to r)$

soru (4)

p	q	r	$p\to r$	$q\to r$	$(p\to r)\to(q\to r)$	$(p\to q)$	$(p\to q)\to(p\to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

denk değiller

ÖDEVLER:

(1) $(p\leftrightarrow q) \equiv p'\leftrightarrow q'$

$(p\vee q)'$

Ma

p	q	$p\leftrightarrow q$	p'	q'	$p'\leftrightarrow q'$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

denktirler

(2) $p\leftrightarrow q \equiv (p\wedge q)\vee(p'\wedge q')$

p	q	$p\leftrightarrow q$	$p\wedge q$	p'	q'	$p'\wedge q'$	$(p\wedge q)\vee(p'\wedge q')$
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1

denktirler

(3) $(p\leftrightarrow q)' \equiv p\leftrightarrow q'$

$\longrightarrow \boxed{p\oplus q} \equiv p\leftrightarrow q'$ ↳ diyebiliriz. Çünkü ispatladığımızda birbirlerine denk çıkarlar

p	q	$p\oplus q$	q'	$p\leftrightarrow q'$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

denk değillerdir.

Mantık Soruları:

A: En az birimiz sahtekarız
B: Hiçbir şey söylemiyor.

A: Her ikimiz şövalyeyiz.
B: A şövalyedir.

Bir adada 3 tür insan var şöv., sah., casus

A: C sahtekardır.
B: A şövalyedir.
C: Ben casusum

$P(x)$, $x>3$ ifadesini belirtsin $P(2)$ ve $P(4)$ bir önerme değildir. Mantıksal olarak yetersizdir.

$R(x,y,z)$, $x+y=z$, $R(1,2,3)$ bu ifade doğrudur.

Niceleyiciler: Evrensel Niceleyici:

$\forall x P(x)$ tüm x $P(x)$ için veya her x $P(x)$ için şeklinde okunur.

Var olus Niceleyicisi: Bazı x $P(x)$ olarak okunur. $(\exists x P(x))$ Tanım bölgesi tanımlanmalı. Tanım bölgesi tanımlanmazsa bazı x $P(x)$ in anlamı yoktur.

ifade	doğru olduğunda	yanlış olduğunda
$\forall x P(x)$	$P(x)$ herbir x için geçerli	$P(x)$'in yanlış old. bir x vardır.
$\exists x P(x)$	$P(x)$'in doğru old. bir x vardır.	$P(x)$ her x için yanlıştır.

Örnek: $P(x)$, $x+1>x$ ifadesi olsun $\forall x P(x)$ doğru ya da yanlış mıdır?
D ✓ Y
x tüm gerçel sayılar kümesidir.

Örnek: $Q(x)$, $x>2$ ifadesi olsun. Tanım bölgesi tüm gerçek sayılar için $\forall x P(x)$ için doğru ya da yanlış mıdır?

$$\underbrace{P(1)}_{0} \wedge \underbrace{P(2)}_{0} \wedge \underbrace{P(3)}_{1} \equiv 0 \text{ (yanlıştır.)}$$

($\wedge$) ifadesi kullanılarak sonuç elde edilir.

"Bazı" ifadesi kullanılırsa veya işlemi uygularmış gibi davranmalıyız.

Örnek: Q(x), $x^2 < 10$ dd. $x = 1, 2, 3$ ve 4 durumları için $\exists x P(x)$ durumlarında doğru mudur?
(veya)

$$\underbrace{Q(1)}_{1} \vee \underbrace{Q(2)}_{1} \vee \underbrace{Q(3)}_{1} \vee \underbrace{Q(4)}_{0} \equiv 1 \text{ (doğrudur)}$$

- $\forall x < 0$ için $x^2 > 0$ doğru mudur? Doğrudur.

NOT: $\forall x\, P(x)$, $\neg \forall x\, P(x)$ in tersi $= \exists x \neg P(x)$

$\exists x P(x)$, $\neg \exists x P(x) = \forall x \neg P(x)$
Tersi:

Örnek: Dürüst bir politikacı vardır.

H(x) : Dürüsttür. $\exists x H(x)$

Tersi: $\forall x \neg P(x)$ (Politikacı dürüst değildir)

Örnek: $\forall x\, (x^2 > x)$

$\neg \forall x\, (x^2 > x)$

$\exists x\, (x^2 \leq x)$ Tersi

Örnek: $\exists x\, (x^2 = 2)$ 0

$\forall x\, (x^2 \neq 2)$ 1 Tersi

değil	eşdeğer ifade	değil ne zaman doğru	ne zaman yanlış
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Her x için P(x) yanlış	P(x) doğru olacak şekilde bir x vardır.
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x P(x)$	P(x) yanlış olacak şekilde bir x vardır.	Her x için P(x) doğrudur.

$\forall x\, P(x)$ → Lahmacun yer → Türk → Her

$\exists x \neg P(x)$ → Lahmacun yemez. → Türkler → Bazı

İç içe Niceleyiciler

- $\forall x \forall y\,(x+y=y+x)$ ifadesi tüm reel x ve y sayıları için doğrudur. Bu da reel sayıların değişim özelliğini gösterir.
- $\forall x \exists y\,(x+y=0)$ ifadesi tüm reel sayılar için $x+y=0$ ifadesini sağlayan bir y reel sayısı vardır. Bu da reel sayının toplamaya göre tersini ifade eder.

Çıkarım kuralları

$\underbrace{\text{Geçerli şifreniz}}_{p}\ \underbrace{\text{varsa}}_{\longrightarrow}\ \underbrace{\text{iletişim ağına bağlanabilirsiniz.}}_{q}$

Şifrem var.
iletişim ağına bağlanabilirsiniz.
$(\therefore)$

	Çıkarım Kuralı	Totoloji	isim
1	p, $p\to q$ / $\therefore q$	$(p\wedge(p\to q))\to q$	modus ponens (olumlu sonuç çıkarma)
2	$p\to q$, $\neg q$ (bağlanamadı) / $\therefore \neg p$	$(\neg q\wedge(p\to q))\to \neg p$	modus tollens (olumsuz sonuç çıkarma)
3	$\boxed{p}\to q$, $q\to \boxed{r}$ / $\therefore p\to r$	$((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$	varsayıma dayalı kıyas (şifrem varsa ağına erişirim)
4	$p\vee q$, $\neg p$ / $\therefore q$	$((p\vee q)\wedge\neg p)\to q$	Ayırıcı kıyas
5	p / $\therefore p\vee q$	$p\to(p\vee q)$	toplama
6	$p\wedge q$ / $\therefore p$	$(p\wedge q)\to p$	sadeleştirme
7	p, q / $\therefore p\wedge q$	$((p)\wedge(q))\to(p\wedge q)$	Birleşme
8	$p\vee q$, $\neg p\vee r$ / $\therefore q\vee r$	$(p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)\to(q\vee r)$	karar

Örnek:
1. Bu öğleden sonra hava güneşli değil ve dünden daha soğuk
2. Sadece hava güneşliyse yüzmeye gideceğiz. (yüzmeye gideceksek hava güneşli)
3. Yüzmeye gitmezsek o zaman kano gezintisi yapacağız
4. Kano gezintisi yaparsak o zaman güneş batımına kadar evde olacağız

p: Bu öğleden sonra güneşli
q: Dünden daha soğuk
r: Yüzmeye gideceğiz
s: kano gezintisi yapacağız
t: Güneş batana kadar evde olacağız.

1. önerme için : $p' \wedge q$ — 6. kuralı uygularsak : p' (sadeleştirme) ⑤
2. önerme için : $r \to p$ — 2. ve 5. den tollens r' ⑥
3. " " : $r' \to s$ — 6. ve 3. modus pon. s ⑦
4. " " : $s \to t$ — 7. ve 4. den modus pon. t ⑧
$\therefore t$

Buradan ve çıkan sonuçları sıralıyla yapmana gerek yok hangisinde ne kuralı görüyorsan onu uygula

Örnek:
① $p \to q \equiv p' \vee q$ ④
② $r \to q \equiv r' \vee q$ ⑥
③ $p \vee r$
$\therefore q$

4 ve 3 ten $r \vee q$ ⑤
5 ve 6 dan $r' \vee q$
$\therefore q \vee q$

Örnek:
① $p \to q \equiv p' \vee q$ ④
② $r \to s \equiv r' \vee s$ ⑥
③ $p \vee r$
$\therefore q \vee s$

4 ve 3 ten $r \vee q$ ⑤
5 ve 6 dan $r' \vee s$
$q \vee s$

Örnek:
① $(p \to q) \wedge (r \to s)$
② $p \vee r$
$\therefore q \vee r$

1'e 6. kuralı uygularsak : $p \to q$ ③
3'ün eşdeğeri : $p' \vee q$ ④
2 ve 4'ten $q \vee r$ olur

asıl sonuç: $q \vee s$

$(r \to s) \wedge (p \to q)$
$r \vee p$
$\therefore p \vee s$

p

Doğrudan İspat:

$p \to q$ koşullu ifadenin doğrudan ispatının ilk adımı p'nin doğru olduğunu kabul etmek. Takip eden adımlarda çıkarım kuralları kullanarak q'nun da doğru olduğunu göstermektir.

Örnek: Eğer $\underbrace{\text{n tek tamsayı}}_{p\equiv 1}$ ise $\underbrace{n^2 \text{ tektir}}_{q}$. İspatını yapınız.

$$n=2k+1 \rightsquigarrow (2k+1)^2 = \underbrace{4k^2}_{Ç}+\underbrace{4k}_{Ç}+\underbrace{1}_{T} \equiv T$$

Devrimli İspat:

$p \to q$ koşullu önermesinin eşdeğeri $q' \to p'$ (q') ön koşul olarak alınır. Çıkarım kuralları ile beraber p'nin doğruluğu gösterilir.

Örnek: Eğer n bir tamsayı, $3n+2$ tek ise n tektir. (Cümlenin tersi ifadenin eşdeğerini alırız.)

n çift

$n=2k$ $\quad 3.2k+2$

$\quad 6k+2$ $\quad$ yanlış çifttir

İçi Boş ve Aşikar İspatlar:

P nin yanlış olduğu durumlarda $p \to q$ doğrudur. Sonuç olarak p nin yanlış oldunu göstersek $p \to q$ önermesi içi boş ispat olarak adlandırılır.

Çelişkili İspat:

r bir önerme olduğunda r ve r değili bir çelişki olduğu için her r önermesi için $p' \to (r \wedge r')$ önermesinin doğru olduğunu gösterebilirsek p nin doğru olduğunu gösterebiliriz.

$$\underbrace{\boxed{p'}}_{0} \to \underbrace{(r \wedge r')}_{0}$$

$p \equiv 1$ olmalı

Örnek: Herhangi 22 günün en azından 4 gününün haftanın aynı gününe denk gelmek zorunda olduğunu gösteriniz.

p: 22 seçilen günün haftanın aynı 4 günü olur.

p': 22 günün en fazla 3 gününün aynı olacağı anlamına gelir.

İspatlardaki Hatalar :

a ve b aynı poz. tamsayılar olsun.

$$a = b$$
$$a.a = a.b$$
$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
$$\cancel{(a-b)}.(a+b) = b\cancel{(a-b)}$$ Burada sadeleştirme yapamayız. İspatta hata yapmış oluruz.

$$a+b = b$$
$$2\cancel{b} = \cancel{b}$$
$$2 = 1$$

Ayrıntılı ispat

$(p_1 \vee p_2 \vee \dots p_n) \to q$ formundaki şarta bağlı bir ifadeyi ispatlamak için

$[(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \to q] \longleftrightarrow [(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \dots (p_n \to q)]$ totoloji bir gösterme kuralı olarak bilinir. Buradaki ifadelerin ayrı ayrı kanıtlanması durumlar ile ispat anlamına gelir.

Örnek: $n \leq 4$ bir poz. tamsayı ise $(n+1)^3 \geq 3^n$ olduğunu gösteriniz.

$P(1)$	$8 \geq 3$
$P(2)$	$27 \geq 27$
$P(3)$	$64 \geq 27$
$P(4)$	$125 \geq 81$

Temel Yapılar, Kümeler, Fonk., Diziler, Toplamlar ve Matrisler

Kümeler → Sıralı olmayan nesneler topluluğudur.

Küme: $a \in A$ elemanıdır.

$a \notin A$ elemanı değildir.

Liste şeklinde gösterimi ⇒ $A = \{a, e, ı, i, ö, o\}$

⇒ $A = \{x \mid x$ 'ondan küçük tek poz tamsayılar$\}$

$Q^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{p}{q}$, p ve q poz. tamsayılar$\}$

(C: karmaşık sayılar kümesi)

$N = \{0, 1, 2, \dots\}$

$Z = \{\dots -1, 0, 1, \dots\}$

$Z^+ = \{1, 2, \dots\}$

$Q = \{p/q \mid p \in Z, q \in Z, q \neq 0\}$

$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

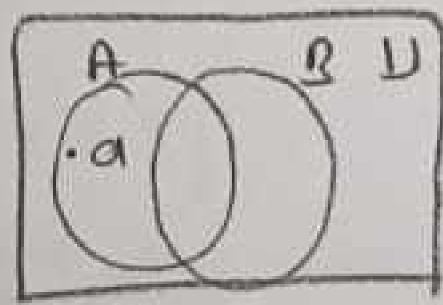
iki küme sadece ve sadece aynı elemanlardan oluşuyorsa denktir. Eğer A ve B küme ise ancak ve ancak $\forall x \, (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$ ise A ve B kümeleri denktir

$A=B$ ile de gösterilir

$$\{1,1,2,3,3\} = \{1,2,3\}$$

Evrensel Küme:

Venn şeması gösterimi :



A kümesi, sadece ve sadece A'nın tüm elemanları aynı zamanda B'nin elemanı ise B kümesinin alt kümesidir. $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir.

Ancak ve ancak $\forall x \, (x \in A \longrightarrow x \in B)$ doğruysa $A \subseteq B$'dir.

$A \nsubseteq B$ iki küme birbirinin alt kümesi değildir.

iki kümenin eşit olduğunu göstermek için olduğunu göstermek yeterlidir.

Bir kümenin büyüklüğü : S bir küme olsun S içinde n adet birbirinden farklı eleman varsa S bir sonlu kümedir.
S'nin niceliği $|S|$ şeklinde gösterilir.

Örnek: $S = \{1,3,5,7,9\}$ için $|S| = 5$'tir.

- Bir küme sonlu değilse sonsuz kümedir.
- S'nin kuvvet kümesi $P(S)$ ile gösterilir. Kuvvet kümesi S'nin tüm alt küme elemanlarından oluşur.

$$P(S) = \{\{0\}, \emptyset, \{1,2,3\}, 6, 7\, \{1,2\}\}$$

Kartezyen Çarpımı

A ve B kümeler olsun A ve B'nin kartezyen çarpımı $A \times B$ şeklinde yazılır. (a,b) ikililerinden oluşur.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Aynı kümenin kartezyeni $A^2, A^3, \ldots$ şeklinde gösterilir.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$

$A_1 \times A_2 \times \ldots, A_n$

$(a_1, a_2, \ldots a_n)$

$\exists_{x \in Z} \, (x^2 = 1) \}$ kümenin elemanlarını gösterme şekli

Küme işlemleri

A ve B kümelerinin birleşimi $A \cup B$ şeklinde gösterilir. Nesne ya A'nın ya B'nin ya da her ikisinin elemanıdır.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

A ve B nin kesişimi $A \cap B$ şeklinde gösterilir. Nesne her iki kümenin elemanıdır.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

İki kümenin kesişimi boş küme ise bu iki küme ayrık kümedir.

A fark B : $A - B$ şeklinde gösterilir. Nesne A'nın elemanı iken B'nin değildir.

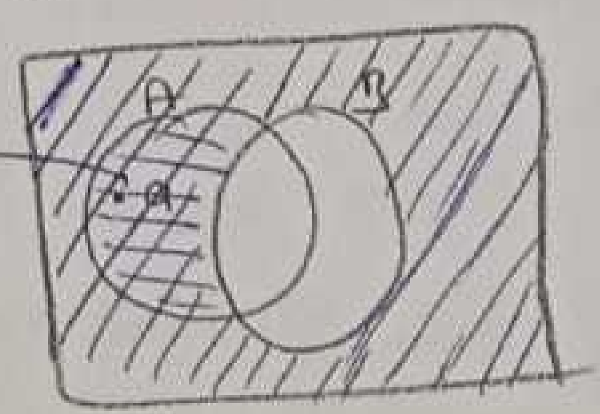
$$A - B = \{x \mid x \in A \bigcirc x \in B\}$$

U → Evrensel küme

A'nın tümleyeni : $\bar{A}$ ve $U - A$ şeklinde gösterilir.

$A - B = A \cap \bar{B}$ 'ye eşit midir?

A−B



Küme Özdeslikleri

- $A \cap U = A$, $A \cup \emptyset = A$ } özdeslik kanunları
- $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ } Baskınlık
- $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ } değişmezlik
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ } dağılma
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ } Demorgan
- $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ } yutma
- $A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ } Tümleyen
- $(\bar{\bar{A}}) = A$ } katlı olumsuzluk
- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ } sıra değişme
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ } Birleşme

Örnek: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$= \{x \mid x \in \overline{A \cap B}\}$$
$$= \{x \mid \neg(x \in A \cap B)\}$$
$$= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$$
$$= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\}$$
$$= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\}$$
$$= \{x \mid x \in \bar{A} \cup \bar{B}\}$$
$$= \bar{A} \cup \bar{B}$$

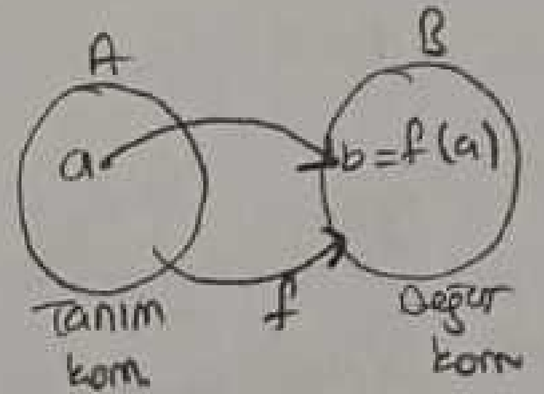
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots A_i$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots A_i$$

Fonksiyonlar

A ve B boş olmayan kümeler olsun A'dan B'ye bir f fonk. u A'nın her elemanının B'nin tam olarak bir elemanına atandığı bir atamadır. ve $f: A \rightarrow B$ ye şeklinde de fonk. gösterilir.

$f(a) = b$ a elemanı b'ye atanmıştır.




```
int floor (float x) {
    ≡
    return
}
```

f_1 ve f_2 A'dan R'ye fonk. lar olsun. f_1+f_2 ve $f_1 . f_2$ A'dan R'ye her $x \in A$ için

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(f_1 . f_2)(x) = f_1(x) . f_2(x)$$

şeklinde tanımlanır.

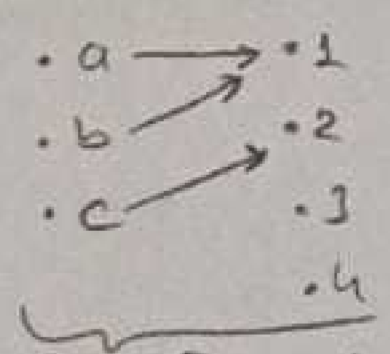
Birebir

Birebir ve Örten Fonksiyonlar

Bir f fonk. uno ancak ve ancak her a ve b f'nin tanım kümesi elemanı için $f(a)=f(b)$ eşitliği $a=b$ olmasını gerektiriyorsa birebirdir.

$f(x)=x^2$ birebir midir? Poz. tamsayılarda birebirdir.

A'dan B'ye bir f fonk. uno ancak ve ancak her $b \in B$ için $f(a)=b$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa örten[redacted] (üzerine) fonk. denir.



Fonk. değildir

Tanım: f A kümesinden B kümesine birebir eşleme olsun. f'nin ters fonk.u B'nin bir b elemanını A'nın $f(a)=b$ olacak şekilde tek a elemanına götüren f^{-1} ile gösterilir. $f(a)=b$ olduğunda $f^{-1}(b)=a$ olur.

Tanım: g A kümesinden B kümesine bir fonk. ve f B kümesinden C kümesine bir fonk. olsun. f ve g nin bileşkesi $f \circ g(a) = f(g(a))$ şeklinde tanımlanır.

Diziler ve Toplamlar

Bir dizi tamsayılar kümesinin genellikle $\{0,1,2,\ldots\}$ ya da $\{1,2,\ldots\}$ kümesinin bir alt kümesinden bir S kümesine bir fonk. dur.

Örnek: $a_n = \frac{1}{n}$ ise $n \geq 1$ için $a_1 = 1$
$a_2 = 1/2$
$a_3 = 1/3$
$\vdots$

Geometrik Dizi: İlk terimi a ve ortak oranı r gerçel sayılar olan $a, ar, ar^2 \ldots ar^n \ldots$ şeklinde bir dizidir.

Örnek: $b_n = (-1)^n \Rightarrow a=1 \quad r=-1$
$c_n = 2.5^n$

Aritmetik Dizi: İlk terimi a ve ortak farkı d gerçel sayılar olan $a, a+d, a+2d, a+3d \cdots, a+dn \cdots$ şeklinde gösterilir.

Örnek: $2+4d = b_n$
$3+5d = c_n$

Öz Yineleme İlişkileri: Öz yineleme ilişkisi a_n terimini dizinin önceki terimini bir ya da daha fazlası cinsinden negatif olmayan bir tamsayı olm. üzere n_0 için $n \geq n_0$ için $a_0, a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$ cinsinden ifade eden bir denklemdir.

Örnek: $a_n = a_{n-1} + 3$
$\boxed{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}}$ → Fibonacci

Örnek: Bir kişi bir bankadaki yıllık bileşik faizi %11 olan mevduat hesabına 10 bin TL para yatırır. 30 yıl sonra parası ne kadar olur?

10.000

$P_n = P_{n-1} + 0.11 P_{n-1}$

$P_n = (1.11)^n * P_0 = 228922,97$ TL

$P_1 = P_0 * 1.11$

$P_2 = P_1 * 1.11$

Toplamlar:

a_n dizisinin terimlerinin toplanması için $\sum_{j=1}^{n} a_j$ a_j formunu kullanımını gösteririz.

$\sum_{j=1}^{5}$ ya da $\sum_{j=0}^{4}$ olur.

$\sum_{i=1}^{5} \underbrace{\sum_{j=1}^{3} ij}_{\text{önce burası hesaplanır}}$ birden fazla toplama gerekirse $\sum_{i=1}^{5} \overbrace{i + 2i + 3i}^{6i}$

Teorem: Eğer a ve r reel sayılar ve $r \neq 0$ ise bu durumda !

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - 1}{r-1} & \text{eğer } r \neq 1 \\ (n+1)\,a & \text{eğer } r = 1 \end{cases}$$

Örnek: $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$

$a = 1 \quad r = 2$

$$\frac{2^{4+1} - 1}{2-1} = 31$$

Çok Sık Kullanılan Toplam Formülleri

1) $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n.(n+1)}{2}$

2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

→ Varsitoturmalı sıralı alsın

Matrisler :

Tanım: $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ iki matris olsun $m \times n$ olsun Bu matrislerin toplamı

$c = a_{ij} + b_{ij} = [c_{ij}]$

A $m \times k$'lık B $k \times n$'lik iki matris olsun A ve B'nin $A \cdot B = [c_{ij}]$, $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} \dots a_{ik} b_{kj}$

ALGORITMALAR

Ör: Sonlu bir serideki en büyük elemanı bulma

procedure max $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$: tamsayı$)$

max: $= a_1$

for i: $= 2$ to n

if max $< a_2$ then max: $= a_i$

return max (geri dönüşü varsa)

Arama Algoritmaları

1) Linear Arama

procedure Linear (x: tamsayı, $a_1 a_2 \dots a_n$: farklı tamsayı)

i: = 1

while ($i \leq n$ ve $x \neq a_i$)

i: = i+1

if $i \leq n$ then konum: = i

else konum: = 0

return konum

7, 6, 9, 18, 3, 7

elle çalıştır

i	n	x	a_i
1	6	9	7
2	6	9	6
3	6	9	9

→ döndürecek dizinin aktığı yer

2) Binary Search ; uygulanabilmesi için dizinin sıralı olması lazım

procedure Binary (x: tamsayı, $a_1 a_2 \dots a_n$: artan sayı)

i: = 1

j: = n

while $i < j$

m: $\lfloor (i+j)/2 \rfloor$

if $x > a_m$ then i: = m+1

else j: = m

if $x = a_i$ then konum: = i

else konum: = 0

return konum

1 7 11 46 81 92

elle çalıştır

x	n	i	j	m	a_m
11	6	1	6	3	11
11	6	1	3	2	7
11	6	3	3		11

Her zaman dizinin uzunluğunu arttıyoruz. Böyle algoritmalarda

→ Karşılaştırmalı sıralı algoritmalara bakabilirsin

Sıralama

① Bubble Sort Sıralaması: (kötü en kötü algoritma)

Procedure Bubble ($a_1, a_2 \dots a_n$: reel sayılar ve $n \geq 2$)

```
for i := 1 to n-1
    for j := 1 to n-1
        if aj > aj+1 then aj ve aj+1 'yi değiştir
```

{ $a_1', a_2', \dots, a_n'$: artan sıralı }

② Yerleştirmeli Sıralama (Insertion Sort):

procedure Insertion ($a_1, a_2, \dots a_n$: reel sayılar ve $n \geq 2$)

3	1	2	4	5

dizisi için elle çalıştır.

```
for j := 2 to n
i := 1
while aj > ai
    i := i+1
m := aj
for k := 0 to j-i-1
    aj-k := aj-k-1
ai := m
```

{ $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$: sıralı }

③ Açgözlü Algoritmalar: Optimizasyon problemlerine uygundur. O an için en iyi seçenek elde edilerek problemin çözümü elde edilir.

Açgözlü Para Bozdurma Algoritması:

procedure paraBozma ($c_1, c_2, \dots c_r$: bozuk para değerleri $c_1 > c_2 > \dots > c_r$, n: poz. tamsayı)

197'yi bankamatik nasıl verir?

100 50 20 10 1

```
for i := 1 to r
    di := 0 // Yazdıklar
    while n ≥ ci
        di := di+1
        n := n-ci
```

hane gösterir.

{ d_i, i: 1, 2, 3, … r gerekti }

④ Hashing Algoritması) bak) Sıralama, durakama, durma problemi

Big-O Gösterimi

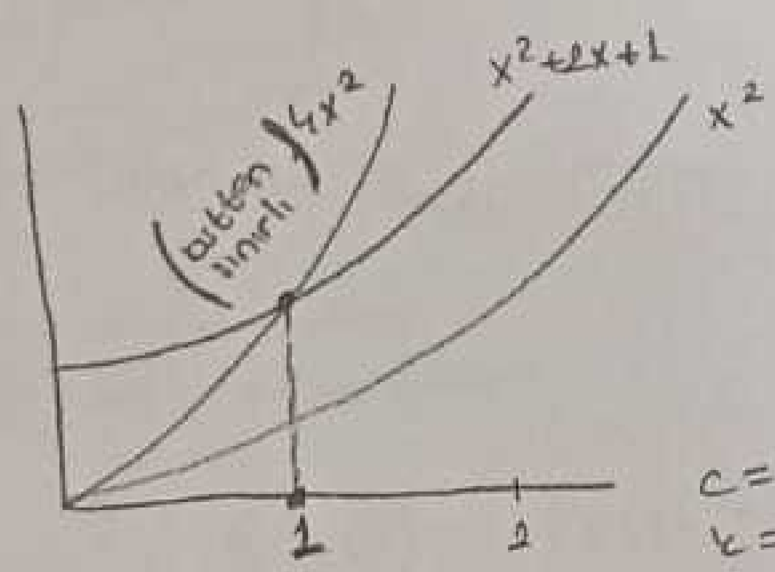
f ve g tamsayı kümesinden veya reel sayılar kümesinden reel sayılara tanımlanmış olan fonk.lar olsun. Eğer $x > k$ olduğunda $|f(x)| \leq c|g(x)|$ oluyorsa ve bu eşitsizliği sağlayan c ve k gibi sabit sayılar varsa bu durumda $f(x) = O(g(x))$ olmaktadır. c ve k'ye şahitler denir.

Örnek: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ olsun bunun $O(x^2)$ olduğunu gösteriniz

$x > 1$ olduğundan $x < x^2$ (daima) ve $x^2 > 1$ (daima)

$f(x) = x^2 + 2x^2 + x^2$

$0 \leq x^2 + 2x + 1 \leq \overbrace{x^2 + 2x^2 + x^2}^{4x^2}$ olmaktadır. Bu durum şekilde gösterilmektedir.



$c = 4 \rightarrow$ bulduk
$k = 1 \rightarrow$ seçtik

Algoritmanın etkinliği için zaman ve hafıza az kullanılmalı.

$\Omega(1) \rightarrow$ en iyi durum
$\Theta(n) \rightarrow$ ortalama durum
$O(n) \rightarrow$ kötü durum

Binary search'ta $\Omega(1) \rightarrow$ en iyi durum

$O(\log n) \rightarrow$ en kötü durum

$\text{for}(\overbrace{i=1}^{1\text{ kere}};\ \overbrace{i<=n}^{n\text{ kere}};\ \overbrace{i++}^{n\text{ kere}})$ } n kere tekrar eder   fak.ın karması

$1 + n + n + n = 3n + 1$

$T(n-2) + 1 + 1 + 1$

$T(n) = T(n-1) + 1$

$= \underbrace{T(n-2) + 1 + 1}$ } n

$= \underbrace{T(n-1) + 1}$

$T(n) = T(n)$ ✓

iki türlü de çözüm olmaktadır.

0, 1 ya da 2 olması da önemli

$\underbrace{i=1}_{1};\ \overbrace{\underbrace{i<n}_{n-1},\ \underbrace{i++}_{n-1}}^{\text{olsaydı}}$ } olurdu.

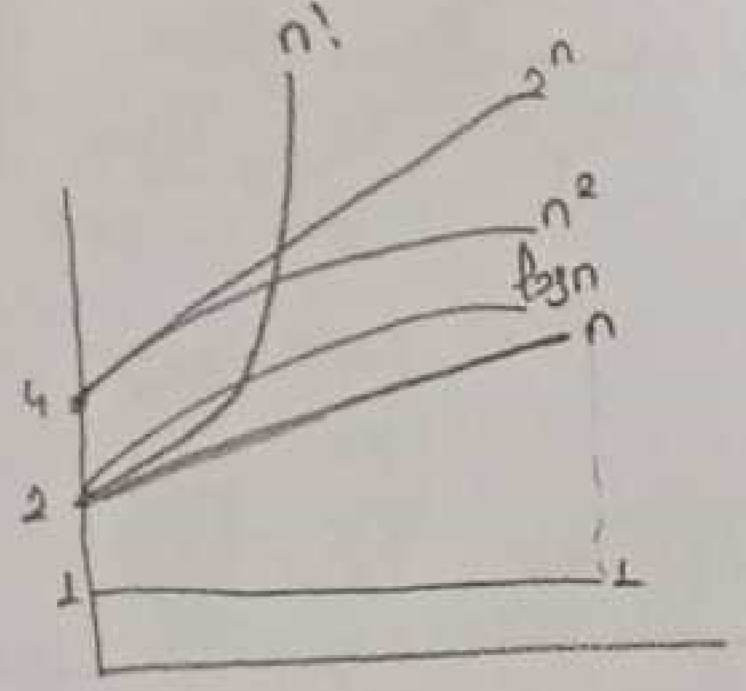
Big-O Sınırları

Teorem:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$ olsun

$a_n, a_{n-1} \dots a_1, a_0$ reel sayılardır. Bu durumda $f(x)$'in $O(x^n)$'dir.

Big-O Tahminleri için Çizilen Grafikler



Teorem: $f_1(x)$'in $O(g_1(x))$ $f_2(x)$'in $O(g_2(x))$ olsun söylerse $(f_1+f_2)(x)$ in big O'su

$O(\max(|g_1(x)|, |g_2(x)|))$'dir.

$\text{for}(\underbrace{i=0}_{1}; \underbrace{i<=n}_{n+1}; \underbrace{i++}_{n})$ $\Big\}$ $3n+2$ kez çalışır.

$x = 1;$ } n kez

yazdığımız kodun big-O'su n kezdir.

$3n+2$ ile $3n^2+7n+31$'i karşılaştırdığımızda karmaşıklığını büyük olana bakarak karmaşıklığı bulunur. Yani karmaşıklığı $\underline{n^2}$ dir.

Teorem: $f_1(x)$, $O(g_1(x))$

$f_2(x)$, $O(g_2(x))$ olsun

$(f_1 \cdot f_2)(x)$ big-O'su $O(g_1(x) \cdot g_2(x))$'tir.

Big-O → kötü durum

büyük-Ω → iyi durum

büyük-Θ → ortalama durum

Büyük Omega : f ve g tamsayı kümesinden veya reel sayı kümesinden reel sayılara tanımlanmış fonk. olsun. Eğer $x > k$ olduğunda $|f(x)| \geq c\,|g(x)|$ oluyorsa bu eşitsizliği sağlayan c ve k gibi sabit sayılar varsa $f(x) = \Omega\, g(x)$'tir.

Büyük Θ : f ve g tamsayı kümesinden veya reel sayı kümesinden reel sayılara tanımlanmış fonk. olsun. Eğer $f(x) = O\, g(x)$, $f(x) = \Omega\, g(x)$ ise $f(x) = \Theta\, g(x)$ tir deriz.

Örnek : $3x^2 + 8x\log x$ in $\Theta(x^2)$ old. göre $0 \leq 8x\log x \leq 8x^2$ $x > 1$ olduğunda $3x^2 + 8x\log x \leq 11x^2$ olur. Böylece $3x^2 + 8x\log x$ için $O(x^2)$ dir. Bunun sonucu olarak x^2 $O(3x^2 + 8x\log x)$ dir. Böylece $3x^2 + 8x\log x$ $\Theta(x^2)$ dir.

lineer arama için

$O(n)$, $\Theta(n)$, $\Omega(1)$

1, 2, 3, … $\boxed{n}$ $\quad \dfrac{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}{n}$ ortalamasını bulmak için

1 → en iyi durum

n → en kötü durum

Örnek :

Matrislerin çarpımını yapan sözde kod :

```
n kez çalışacak
for i := 1 to m
    for j := 1 to n
        cij := 0
        for q := 1 to k
            cij = cij + Aiq * Bqj
return c
```

Kaba kuvvet Algoritması

Böl ve Yönet Tekniği ($\log n$) karmaşıklığı gelebilir. (Arızi hızlandırma da kullanılır)

Dinamik Programlama (Arızi paradigması)

Geri iz sürme problemi

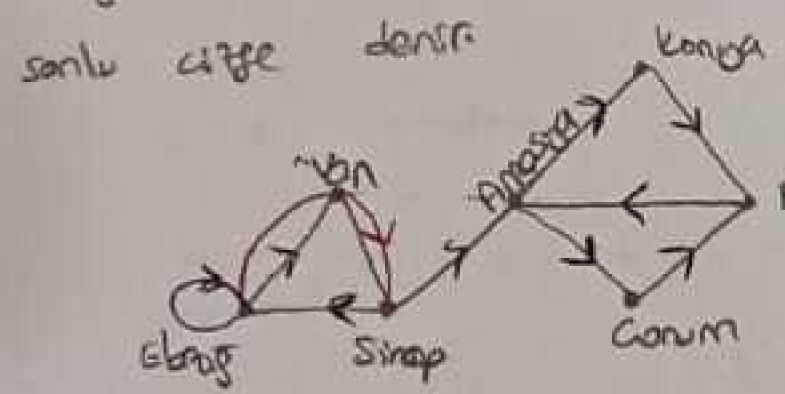
• Literatürde sıkça karşılaşabileceğimiz karmaşıklıklar

$\Theta(1)$
$\Theta(\log n)$
$\Theta(n)$
$\Theta(n\log n)$
$\Theta(n^2)$
$\Theta(n^3)$
$\Theta(n^k)$
$\Theta(n!) \equiv \Theta(n^n) \Rightarrow$ en kötü durum

durum kötüleşir

Graflar (Çizgeler - Graphs):

$G=(V,E)$ çizgesi boş olmayan düğümler kümesi olan V, E ve kenarlar kümesi E olan kümelerden oluşur. Her kenarın iki düğümü vardır. Bu düğümlere uç noktalar denir. Kenar, uç noktaları birleştirir. Düğümler veya ayrıtlar kümesi sonsuz çok çizgeye sonsuz çizge, düğüm ve ayrıt sayısı sonlu olan çizgeye sonlu çizge denir.



- Sosyal ağ modeli,
- şehirler arası tren yolu,
- " " otobüs yolu, gibi yerlerde kullanılabilir.

Yönsüz, basit çizge

Katlı çizge

Sözde çizge

Yönlü çizge, Yönlü katlı çizge

Yönlü V,E çizgesi boş olmayan V E kümesinin ve yönlü kenarların kümesini içerir. Her yönlü kenar köşelerin sıralı bir ikilisine karşılık gelir. U başlangıç, V bitiştir. (U,V) $U \longrightarrow V$

Geşit	Kenarlar	Çoklu kenar izin var mı	Döngülere izin var mı
Basit çizge	Yönsüz	Hayır	Hayır
Çoklu "	"	Evet	"
Sözde "	"	"	Evet
Yönlü Basit "	Yönlü	Hayır	Hayır
Yönlü Çoklu "	"	Evet	Evet
Karışık "	Yönlü / Yönsüz	"	"

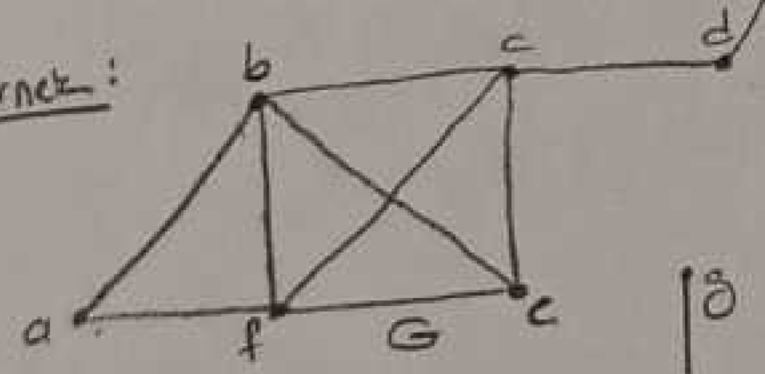
Grafların özel hali ağaçlardır. Ağaçlarda döngü olmaz.

Çizge Terminolojisi

Tanım 1: Yönsüz G çizgesinin u ve v köşeleri eğer u ve v G'nin e kenarının bitiş noktalarıysa bu köşeler komşu köşelerdir. e kenarı u ve v'ye bağlıdır denilir.

Tanım 2: $G=(V,E)$ çizgesinin V köşesine komşu olan bütün köşelerin kümesine V'nin komşuluğu denir $N(v)$ ile gösterilir. Yönsüz bir çizgedeki köşe derecesi o köşeye bağlı kenarların sayısıdır. $\deg(v)$ ile gösterilir.

Örnek:



→ sallantılı düğüm

$N(f)=\{a,b,c,e\}$

$\deg(a)=2$

$\deg(e)=3$

$\deg(g)=0$

→ terk edilmiş düğüm veya köşe

El Sıkışma Teoremi:

$G=(V,E)$ çizgesi m kenarlı yönsüz bir çizge olsun. Bu durumda

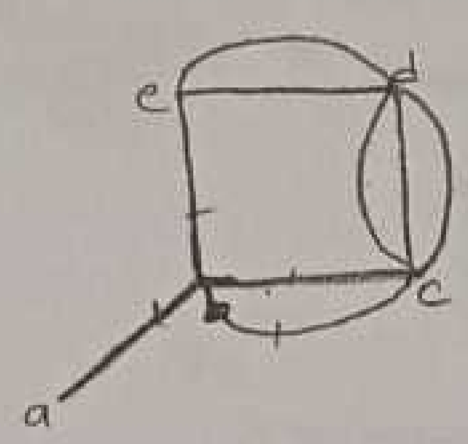
$$2m = \sum_{v \in V} deg(v)$$ bu eşitliğin katlı veya sözde graph'larda da doğrudur.

→ el sıkışma (ayrıt)

↝ düğüm

der = 1 + 1 = 2
↳ der

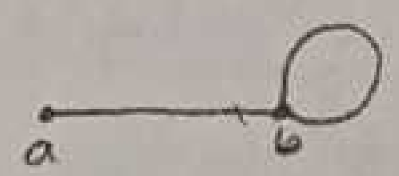
$2.1 = 1+1$ 'dir.



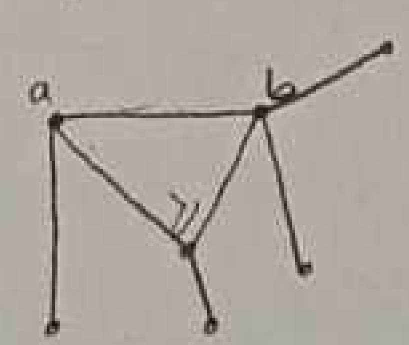
ayrıt sayısı

$2.9 = deg(a) + deg(b) + \dots + deg(e)$

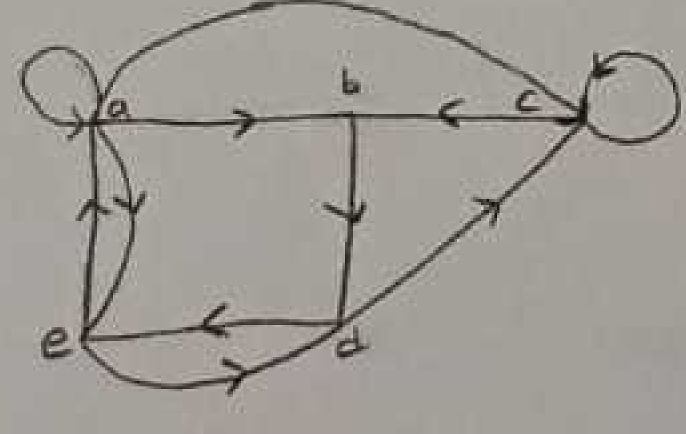
$18 = 1+4+5+5+3 = 18 \Rightarrow 18 = 18$



Teorem: Yönsüz bir çizgede derecesi tek olan köşelerin sayısı çifttir.



Tanım: Yönlü kenarlı G çizgesinin bir kenarı (u,v) ise u v'nin komşudur. v'nin komşusu u'dur. u, başlangıç köşesi. v, bitiş düğümü olarak adlandırılır. Yönlü kenarlı çizgelerde v köşesinin iç derecesi v'yi bitiş köşesi olarak alan kenarların sayısıdır. $deg^-(v)$ olarak gösterilir. v'nin dış derecesi v'yi başlangıç köşesi olarak alan kenar sayısıdır. $deg^+(v)$ olarak gösterilir.



$deg^-(e) = 2$

$deg^+(a) = 4$

$deg^-(a) = 2$

$G = (V,E)$ olsun. Bu durumda

Yönlü katlı bir çizge

$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = |E|$$

↳ (ayrıt sayısı)

$E = 1$

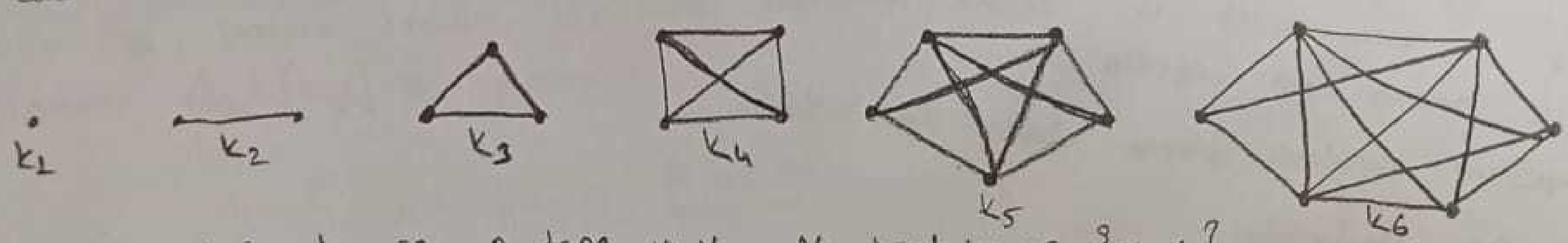
$\sum deg^-(v) = 0 + 1 = 1$

$\sum deg^+(v) = 1 + 0 = 1$

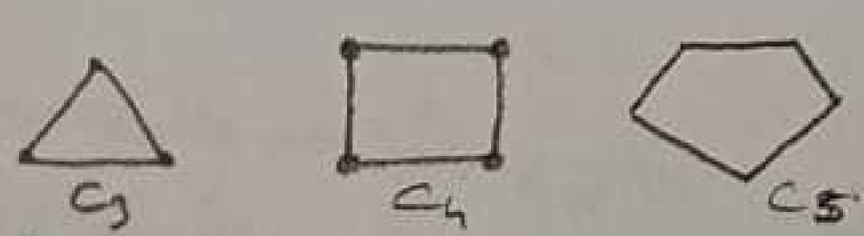
$$2m = \sum deg^-(v) + \sum deg^+(v)$$

Bazı Özel Çizgeler :

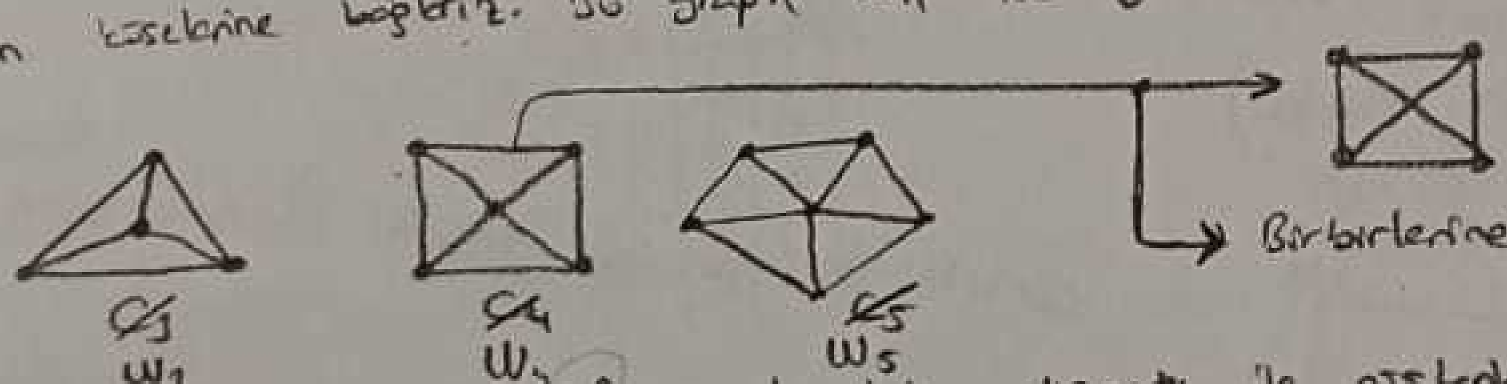
Tam Çizge : En köşeli tam bir çizge her farklı köşe çifti arasında tam olarak bir tane kenar bulunan çizgedir. K_n ile gösterilir.



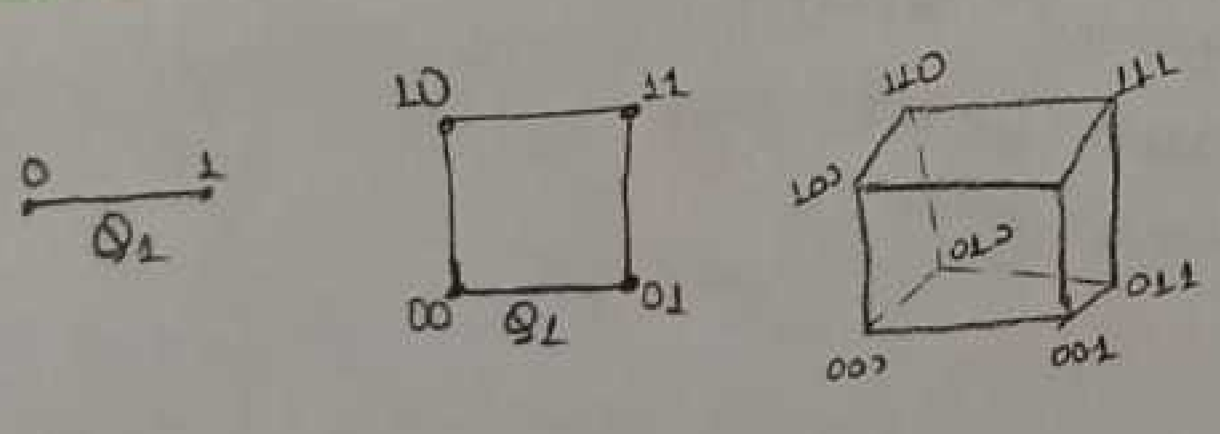
Çevrim : $n \geq 3$ olm. üz. n tane $v_1, v_2, \ldots v_n$ köşelerini ve $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}, \ldots \{v_n, v_1\}$ kenarlarını göstermektedir. C_n ile gösterilir.



Tekerler : $n \geq 3$ olm. koşulu ile C_n döngüsüne ek olarak bir köşe ekleyip bu yeni köşeyi C_n'in köşelerine bağlarız. Bu graph W_n ile gösterilir.

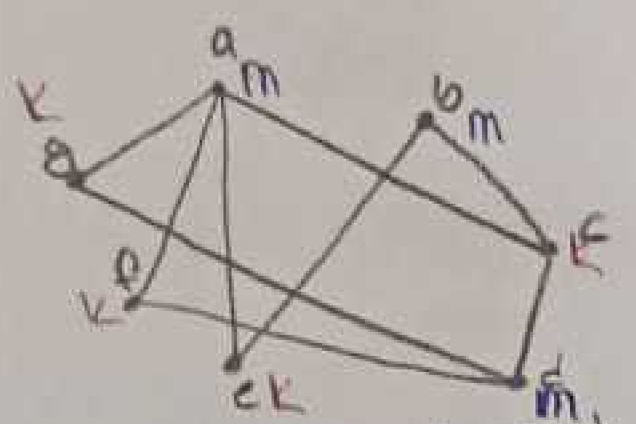


n-küpler : köşeleri n uzunluklu 2^n sayıda bit dizgisi ile gösterilen basit çizgedir.



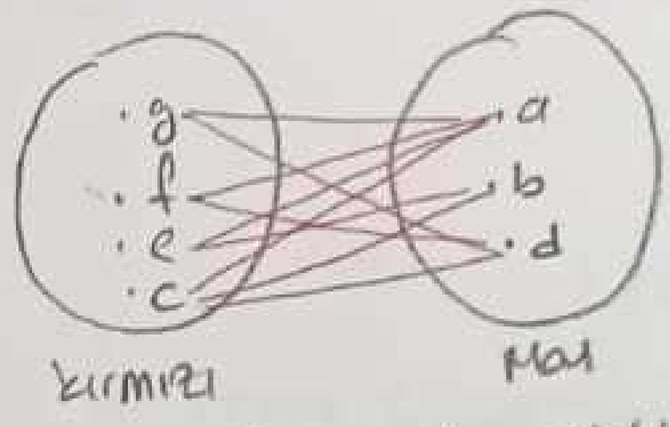
İki kümeli Çizgeler ; Basit bir G çizgesi köşelerden oluşan V kümesi iki ayrık V_1 ve V_2 kümelerine her kenar V_1 deki bir köşeyi V_2 deki bir köşeye bağlayacak şekilde ayrılabiliyorsa iki kümeli olarak adlandırılır.

NOT : V_1 ve V_2 kümelerindeki köşeler birbirine bağlı olmayacak



$V = \{a,b,c,d,e,f,g\}$

≈



Teorem: Basit bir çizge ancak ve ancak hiçbir komşu köşe aynı renge atanmayacak şekilde G'nin köşelerinden her birinin iki renkten birine atanması mümkün ise iki kümeli olur.

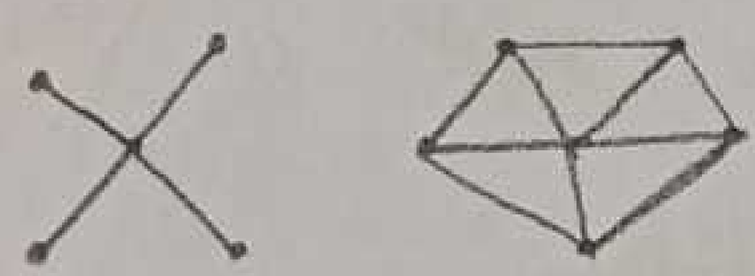
Tam İki Kümeli Çizgeler :

$K_{m,n}$ bir tam iki kümeli çizge ise köşe kümesi sırasıyla n ve m olan iki alt kümeye ayrılan ve iki köşe arasında bir kenarın bulunması ancak ve ancak bu köşeler farklı alt kümelerde ise mümkün olan çizgedir.

→ Görev atamalarını optimize etmek için kullanılır.

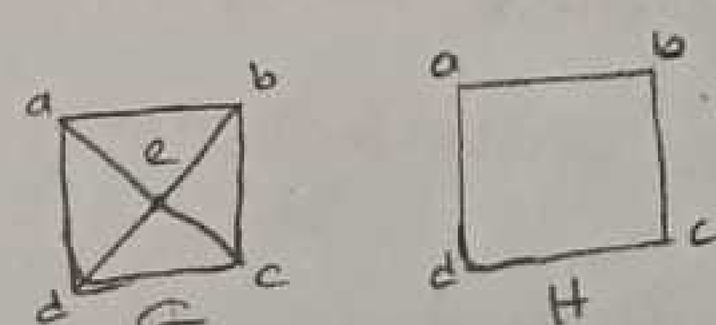
Çizgelerin Bazı Uygulamaları :

Yerel Ağlar :



paralel hesaplamada kullanılabilir.

Yeni Çizge Oluşturma ; $G = (V,E)$ çizgesinin alt çizgesi $W \subseteq V$ kümesinin alt kümesi $F \subseteq E$ kümesinin sağlanacak şekilde $H = (W,F)$ çizgesidir. $H \neq G$ ise öz alt çizge olarak adlandırılır. → (Ayrıtlar kümesi)



G∪H ile yeni bir graph oluşturulabilir.

Graph'ları kodlamak istersek

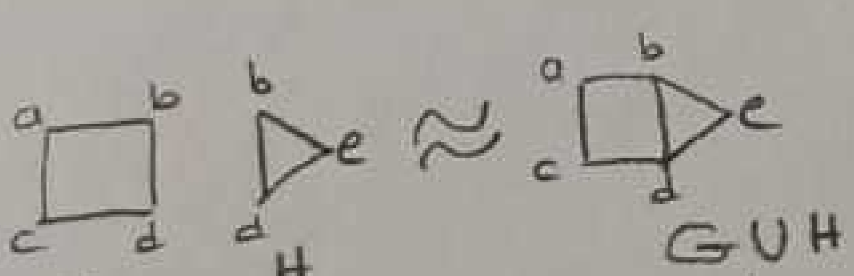
→ yazılımın karmaşıklığı asıl çizer

Akıllı yazılım

Empl problemler

$G - e = (V, E - \{e\})$

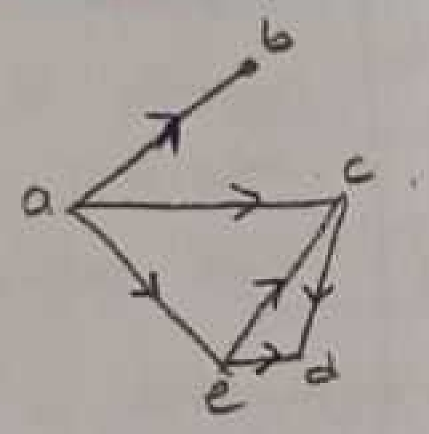
$G + e = (V, E \cup \{e\})$



$V_1 \cup V_2$ (düğümler kümesi)

$E_1 \cup E_2$ (ayrıtlar ")

Çizge Gösterimi (Komşuluk Listesi): Her bir köşeye karşı komşular listelenir.



köşe	komşu
a	b,e,c
b	a
c	a,d,e
d	c,e
e	a,c,d

Linked list şeklinde veri yapılarına uygulanabilir.

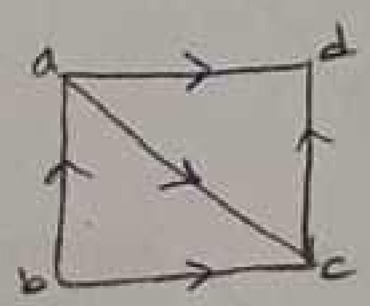
Yönlü olsaydı:

köşe	komşu
a	b,c,e
b	—
c	d
d	—
e	c,d

Komşuluk Matrisi: $G=(V,E)$ nin ve $|V|=n$ old. yerlerden basit bir çizge olsun. Komşuluk matrisi A_G, köşelerin komşuluk listesindeki düğümlere bağlılığı 1, değilse 0'dır. $n\times n$'lik bir matristir. $A_G=[a_{ij}]$ ile gösterilir.

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \{v_i,v_j\}\ G\text{'nin bir kenarı ise}\\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

→ Satırlar veya sütunlar toplamı derecelerinin kaç old.nu gösterir.



$$A_G=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d\\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1\\ b & 1 & 0 & 1 & 0\\ c & 1 & 1 & 0 & 1\\ d & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}$$

Yönlü olsaydı

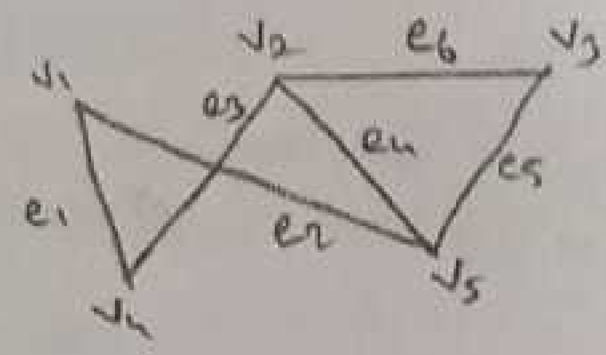
$$A_G=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d\\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1\\ b & 1 & 0 & 1 & 0\\ c & 1 & 1 & 0 & 1\\ d & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}$$

Başlangıç sır

satır veya sütunların ~~sayısı~~ toplamının ayrıtlarının kaç adet old.nu gösterir.

Bağlılık Matrisi: $G=(V,E)$ yönsüz bir çizge olsun. $v_1,v_2,\dots v_n$ düğümler $E_1,E_2,\dots E_n$ ayrıtlar, $n\times m$ boyutunda ... matrisidir. $M=[m_{ij}]$ gösterir. Bağlılık matrisi,

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & e_j \text{ kenarı } v_i \text{ köşesine bağlıysa}\\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

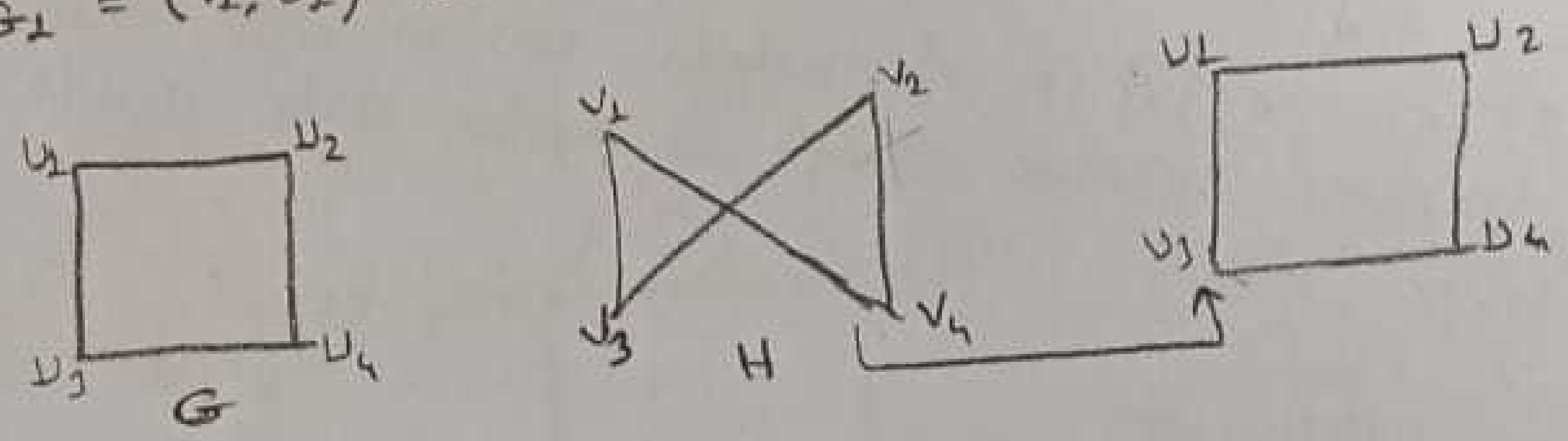


	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	1
v_3	0	0	0	0	1	1
v_4	1	0	1	0	0	0
v_5	0	1				

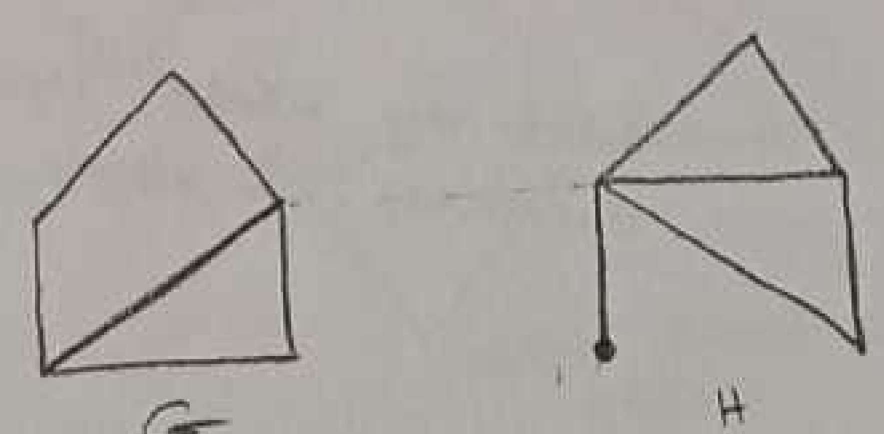
Çizge Eşyapılılığı (izomorfizm):

V_1'deki tüm a ve b'ler için sadece ve sadece G_2'de f(a) ve f(b) komşu ise a ve b'nin G_1 de komşu old. özelliği ile V_1'den V_2'ye bire-bir ve örten bir f fonk.u varsa

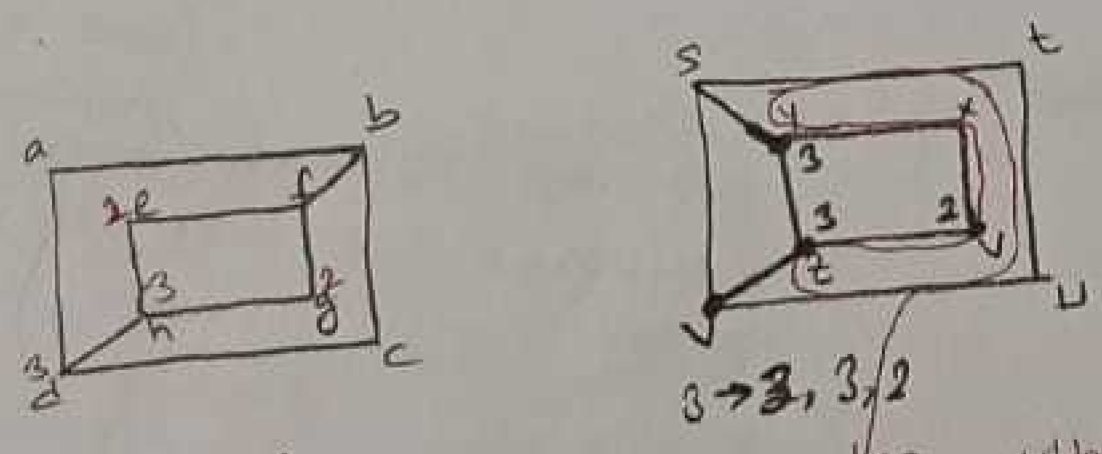
$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ çizgeleri eş yapılıdır.



$f(u_1) = v_1$
$f(u_2) = v_4$
$f(u_3) = v_3$
$f(u_4) = v_2$



Derecesi: H'de 1 olan var fakat G de derecesi 1 olan yok bu yüzden G H'ye denk değildir.



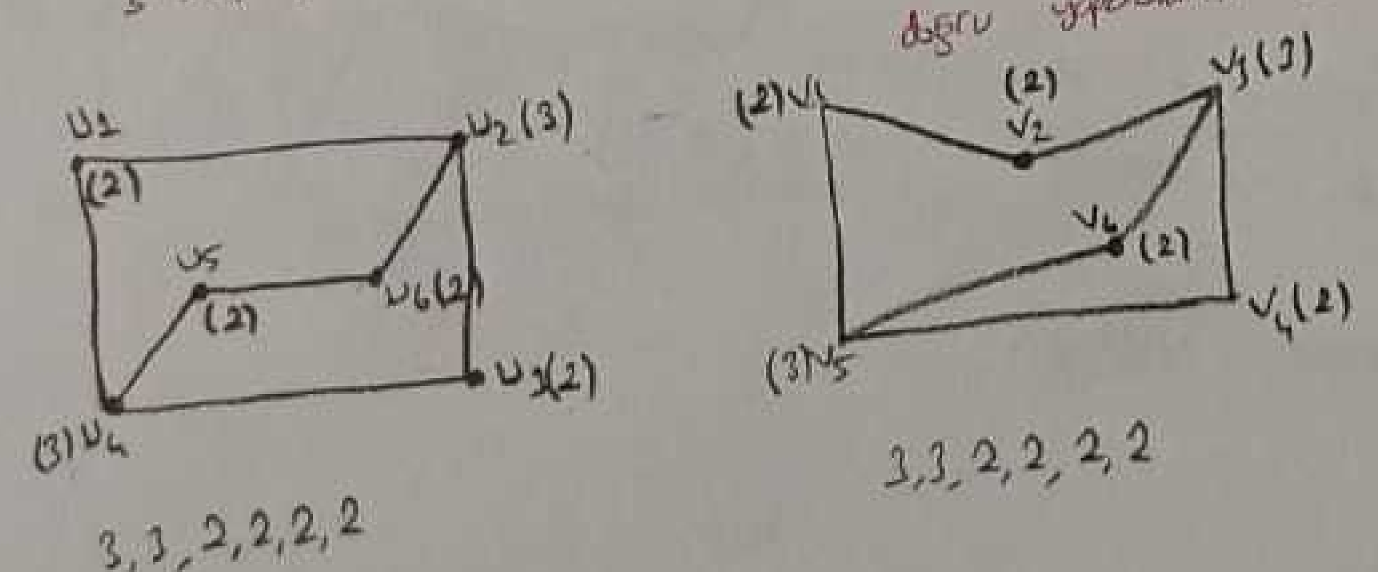
3 → 3, 2, 2

3 → 3, 3, 2

Birebir f fonk.na göre $\boxed{\text{Ayırt}}$ sayıtı aynı ise ~~ve~~ düğümlerin derece sayısı aynı ise düğümlerin o zaman izomorfizmini elde etmiş oluruz.

Burada ayrıtlar ve düğüm dereceleri eşit fakat birbirinin eşdeğeri değildir.

Bu şekilde bir olmadığı için doğru yapabilirim fakat diğer şekilde bu çizilde bir doğru çizemem.



3, 3, 2, 2, 2, 2

3, 3, 2, 2, 2, 2

Birbirinin izomorfamidir

O zaman komşuluk matrisleri aynı olm. zorunda.

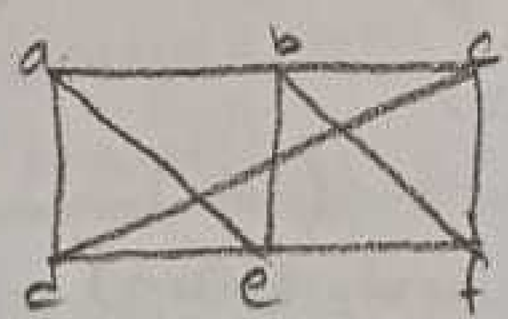
Yollar ve Devre :

Yol :

n negatif olmayan bir tamsayı, G yönsüz bir çizge olsun. n uzunluklu bir yol G çizgesindeki u köşesinden v köşesine n tane $e_1, e_2, \dots e_n$ 'in dizilisidir. (ayrıt)

Köşelerin dizilisi: $x_0 = u, x_1, x_2, \dots, x_n = v$

Başlangıç ve bitişi aynı olan yol da devre derir.

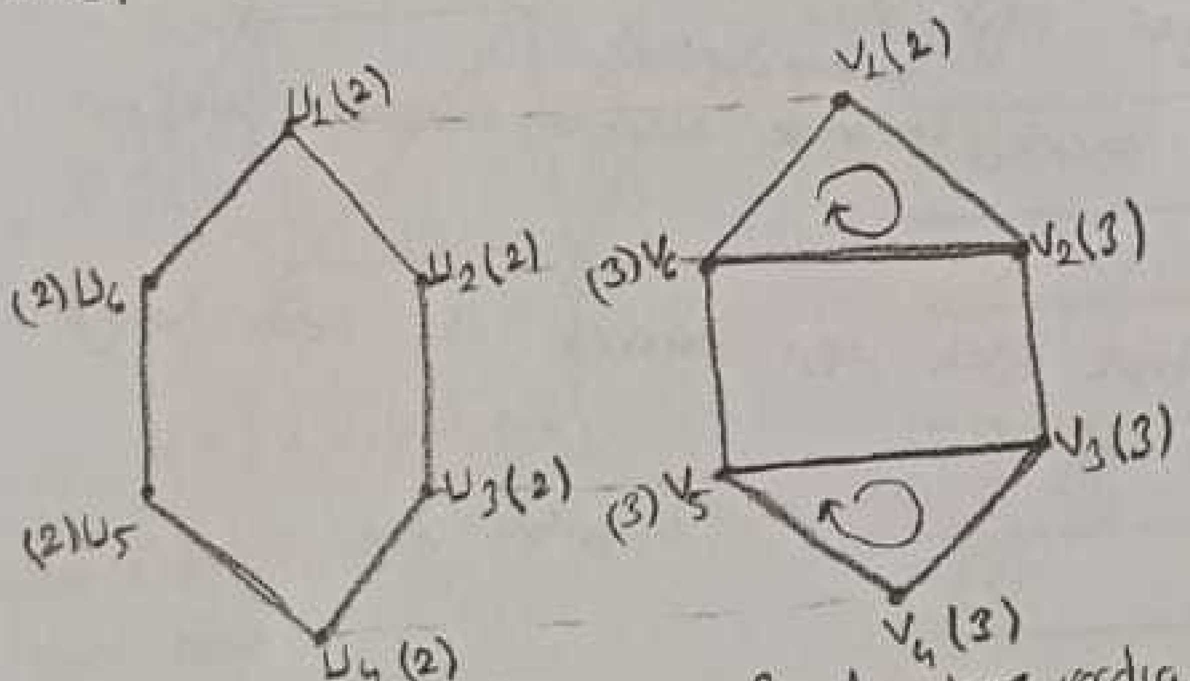


devre : a, b, e, d, a

yol : a, d, c, f, e yol

d, e, c, a yol değil

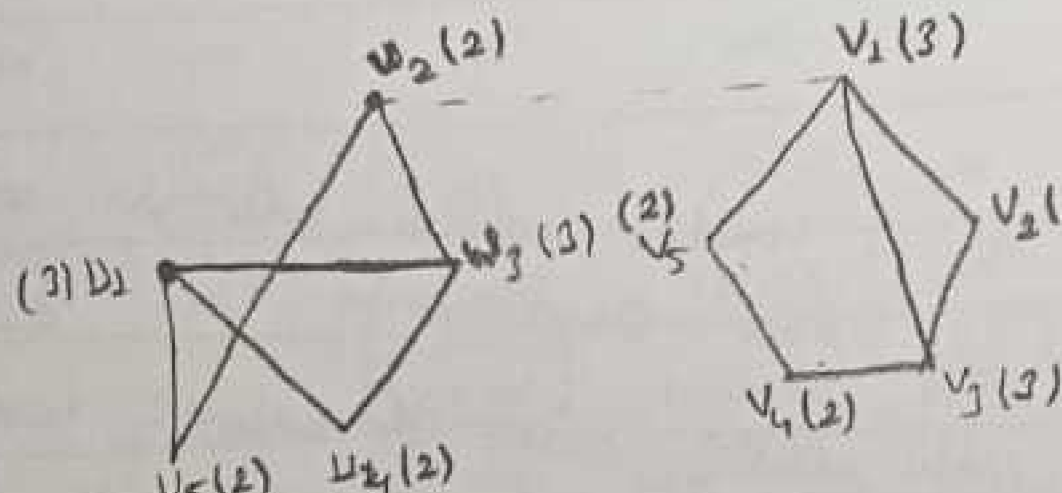
Eşyapılılığa geri dönersek



Burada devre yoktur

Burada devre vardır

Birbirinin izomorfizmi değildir

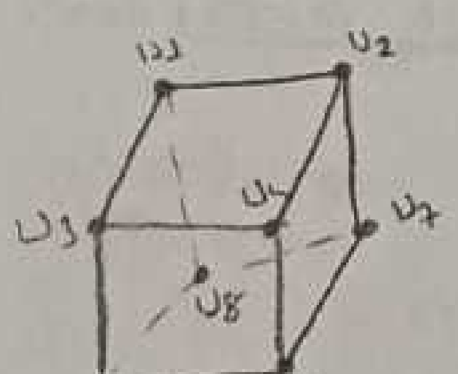


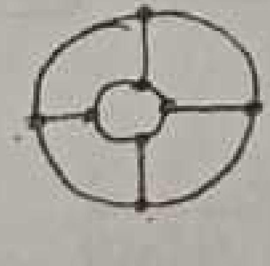
Birbirinin izomorfizm:

Doğum sayısı

Ayrıt "

Devrelere bakarak izomorfizm olup olmadığını anlarız.

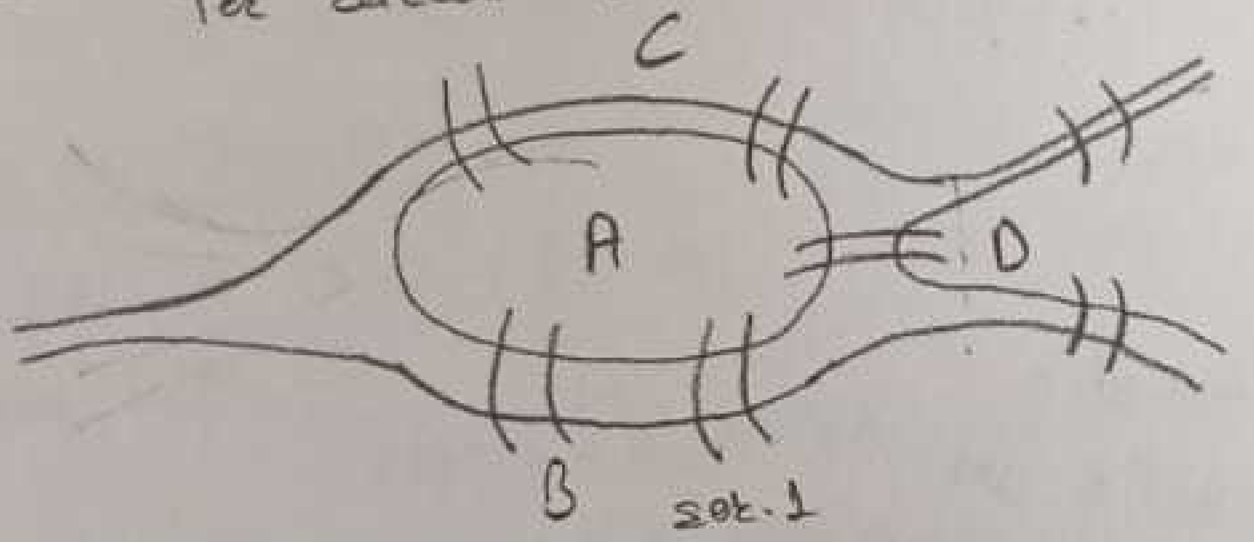




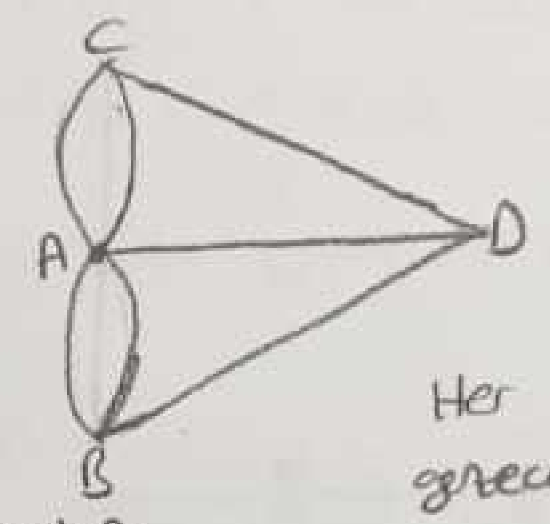
Birbirinin izomorfizmidir

Euler ve Hamilton Yolları:

Euler: Hepsi 2 dereceli olursa Euler Devresi vardır. Euler Yolu vardır. Devresi yoktur. Euler Graph'ı
Tek dereceli düğüm varsa



Şek. 1



Şek. 2

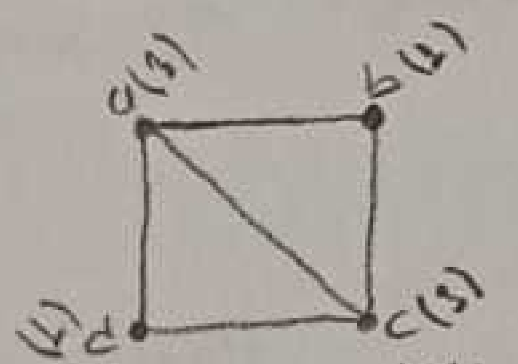
Her ayrıtı 1 kez gezeceğiz.

Tüm düğümlerin derecesi çiftse başladığım noktaya geri dönerim. (Euler)

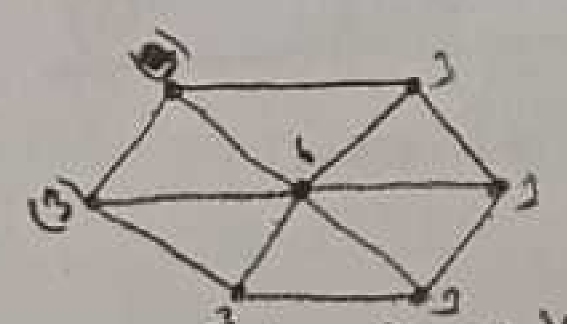
" ayrıtları geçebilmem için düğüm derece tek dan 2 düğüm olmalı. (Şek. 2)
→ Bir tanesi başlangıç düğümü olur.
Diğeri bitiş düğümü olur.

Teorem: En az iki köşeli bağlantılı, katlı bir çizge ancak ve ancak köşelerin herbirinin derecesi çift ise Euler Devresi vardır.

Bir bağlantılı çoklu çizge ancak ve ancak tam olarak tek sayı dereceli iki adet köşeye sahipse Euler Yolu'na sahip ama Euler Devresi'ne sahip değildir.



Euler Devresi Yok
" Yolu var



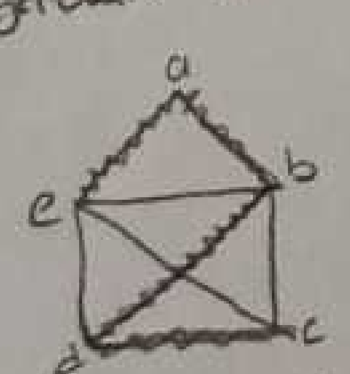
Euler Devresi Yok
" Yolu " (Hepsi tek değil)

Moleküler biyolojide sıkça kullanılır.

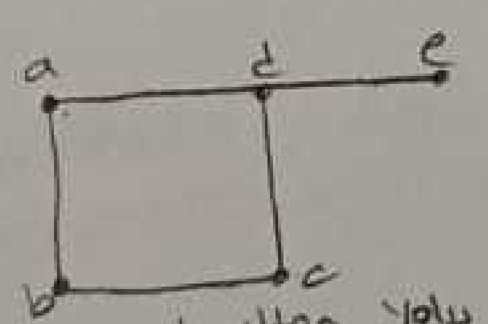
Hamilton Yolu ve Devresi:

G çizgesinde her köşeden tam olarak 1 kez geçilmesiyle oluşan basit yola Hamilton Yolu,
tam olarak 1 kez geçilmesiyle oluşan basit devreye Hamilton Devresi denir.
her ayrıttan tam olarak

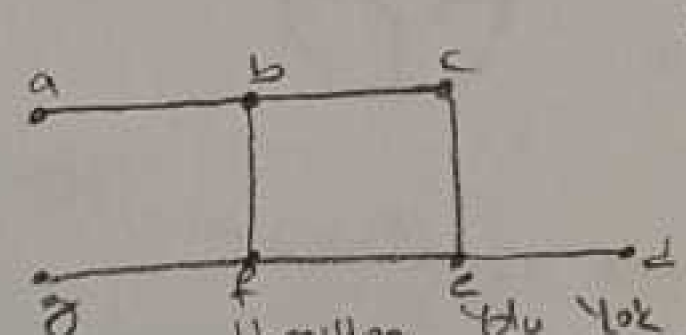
→ Yaklaşım Algoritmaları



Hamilton Yolu Var
" Devresi Yok



Hamilton Yolu Var
" Devresi Yok



Hamilton Yolu Yok
" Devresi Yok

Dirac'ın Teoremi :

Eğer G $n \geq 3$ olm. öz. n köşeli basit bir çizge ve G'deki her köşenin derecesi en az $n/2$ ise G Hamilton Devresi'ne sahiptir. "hediye sepeti"

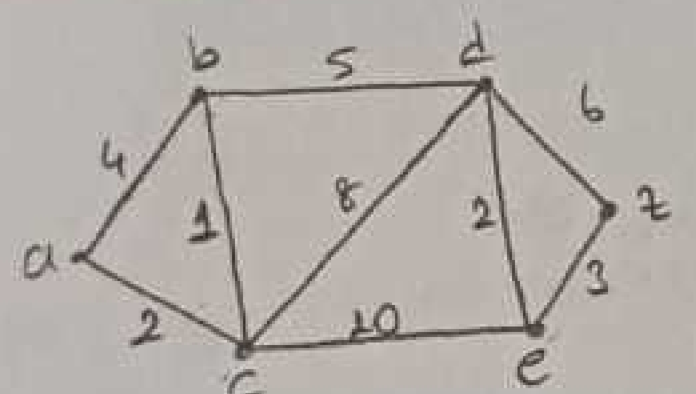
Ore'nin Teoremi

Eğer G $n \geq 3$ olm. öz. n köşeli basit bir çizge ve G'deki komşu olmayan her u ve v köşe çifti için

$\deg(u) + \deg(v) \geq n$ ise Hamilton Devresi vardır.

En kısa Yol Problemleri :

Edsger Wybe Dijkstra



$S = \{a, c, b, d, e, z\}$

- Her seferinde min maliyetli olanı seç.

a	b	c	d	e	z
0	∞	∞	∞	∞	∞
0	4ab	$\boxed{2ac}$	∞	∞	∞
0	$\boxed{3acb}$	2ac	10acd	12ace	∞
0	3acb	2ac	$\boxed{8acbd}$	10acbde	∞
0	3acb	2ac	8acbd	$\boxed{10acbde}$	14acbdz
0	3acb	2ac	8acbd	10acbde	$\boxed{13acbdez}$

— En kısa Yol Tabloru —

a'dan z'ye giderken kullanılan en kısa yol.

Karmaşıklığı : $O(n^2)$

procedure dijkstra (G: tüm ağırlıklar pozitif ağırlıklı basit çizge)

G'de $a = v_0, v_1, v_2, \dots v_n = z$ köşeleri vardır.

$[v_i, v_j]$ kenarı G'de yoksa $w(v_i, v_j) = \infty$ dur.

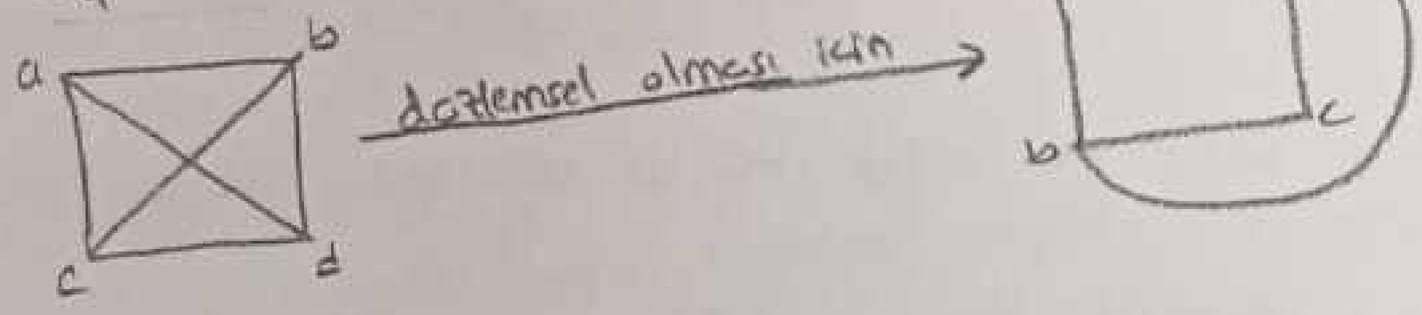
```
for i := 1 to n
    L(v_i) := ∞
L(a) := 0
S := Ø
while z S'nin elemanı değilse (z ∉ S)
    u := S'de olmayan ve L(u) değeri minimum olan köşe
    S := S ∪ {u}
    for (S'de olmayan tüm v köşeleri için)
        if (L(u) + w(u,v) < L(v)) then L(v) := L(u) + w(u,v)
return L(z) {a'dan z'ye minimum uzunluk}
```

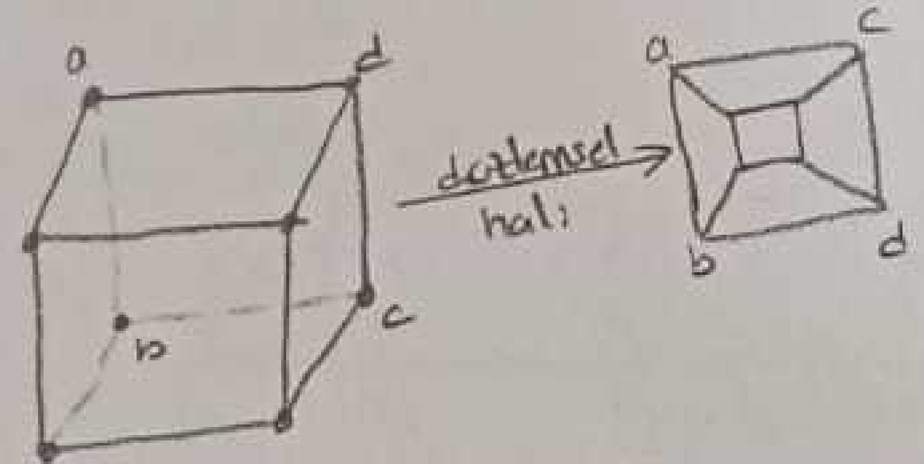
Çizge Renklendirme ..

Düzlemsel Çizgiler :

Kenarları kesişmeksizin düzlemde çizilebilen çizgeye düzlemsel çizge denir.

K_4 çizgesi

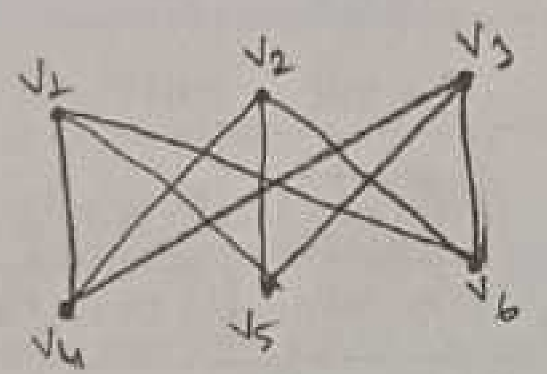




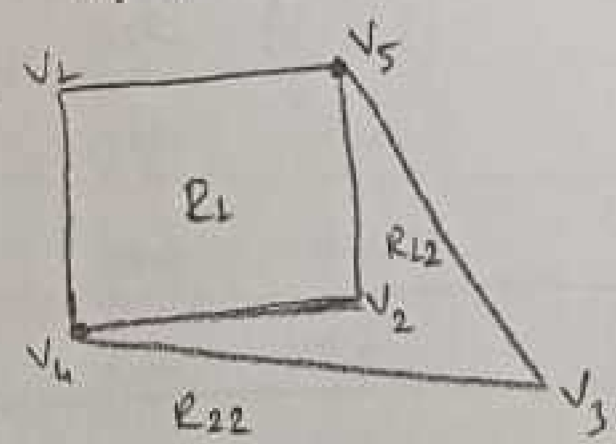
$K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel midir?

R_1 ve R_2 iki farklı düzlem olm. üz.

2 renk ile kalır.



şekil 1



V_6'yı yerleştiremiyoruz. V_1, V_2, V_3'e çizik yapmadan gidemediği için düzlemsel olmayan bir graf'tır. (şek 1)

Euler formülü:

G v tane köşeye ve e ayrıta sahip bağlantılı düzlemsel basit bir çizge olsun. r ise G'nin bir düzlemsel gösterimindeki bölge sayısı olsun. O halde

$r = e - v + 2$ dir. (Bu kadar bölge oluşur)

Örnek: Her birinin derecesi 3 olan 20 köşeli basit bağlantılı düzlemsel çizge düzlemi kaç bölgeye ayırır?

$3.20 = 60 \rightarrow 60/2 = 30$ adet ayrıt (el sıkışma teoremi)

$30 - 20 + 2 = 12$ adet bölge oluşur.

Eğer G, $v \geq 3$ olm. üz. v köşeli e kenarlı bağlantılı, düzlemsel, basit bir çizge ise bu durumda $e \leq 3v - 6$'dır.

G; bağlantılı, düzlemsel, basit bir çizge ise 5'i aşmayan bir köşe derecesine sahiptir.

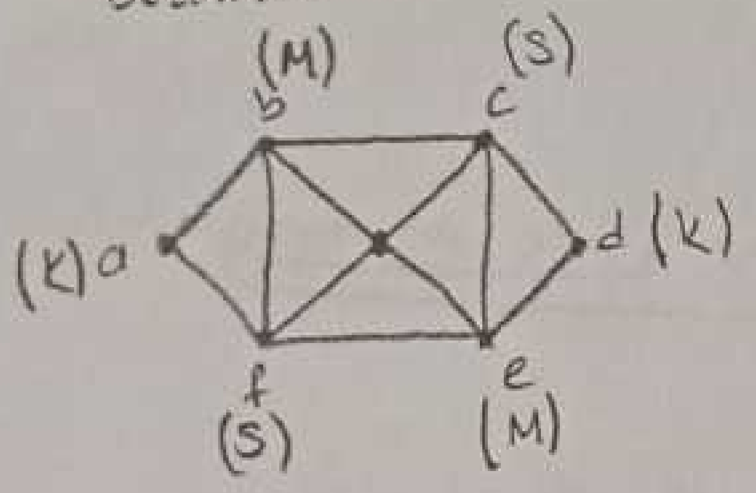
Çizge Renklendirme :

Herhangi iki komşu köşeye aynı renk atanmayacak şekilde çizgenin her bir köşesine bir rengin atanmasına çizgenin renklendirilmesi denir.

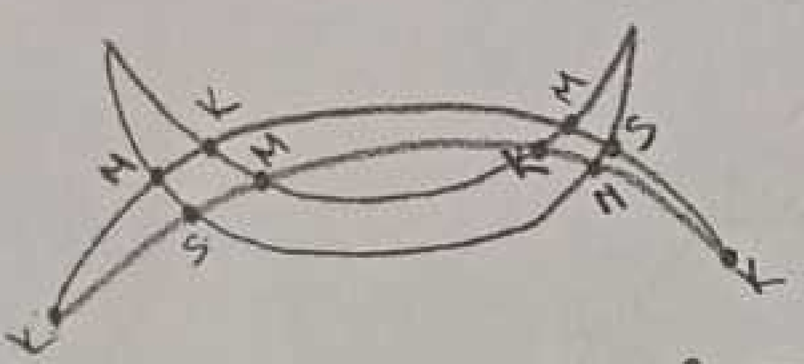
Renk sayısı = Kromatik Sayı $(\chi)(G)$

Dört Renk Teoremi :

Düzlemsel bir çizgenin renk (kromatik) sayısı 4'ten büyük değildir.



Renk sayısı 4'ten büyükse kesinlikle düzlemsel değildir.

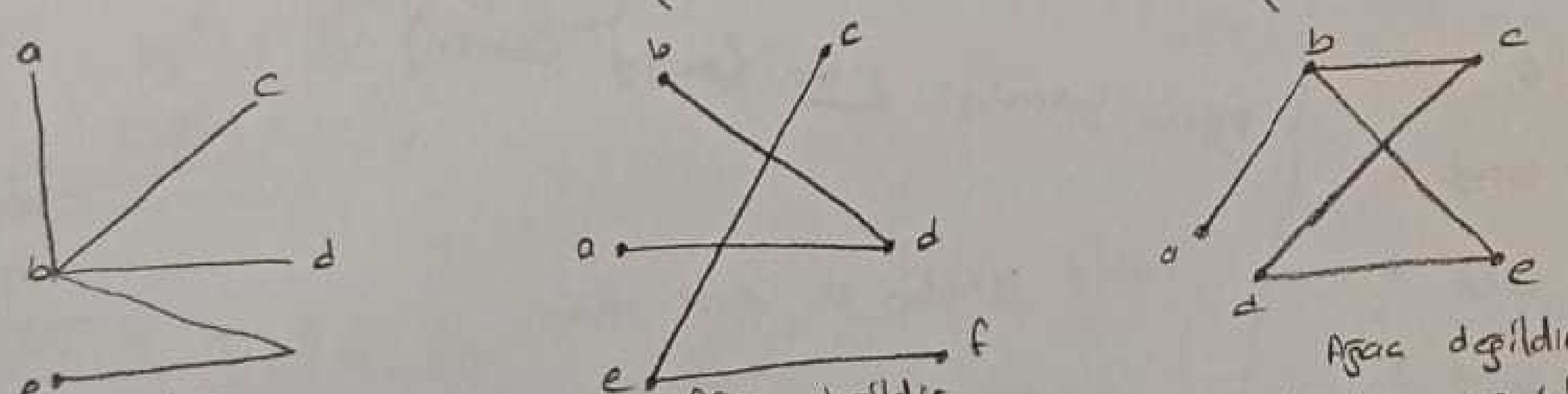


C'lerin çift köşelilerinde 2 renk kullanılır. (Çıkarım)

AĞAÇLAR

Teorem: Bir ağaç hiç basit devre içermeyen yönsüz bir çizgedir. Döngü içermez.

(bağlı değil) (döngü var)

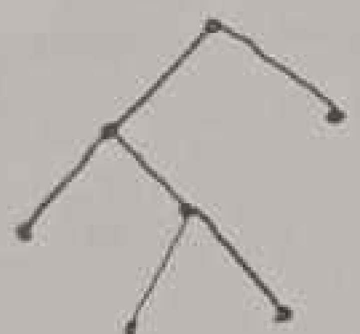


Ağaçtır. Ağaç değildir. Ağaç değildir.

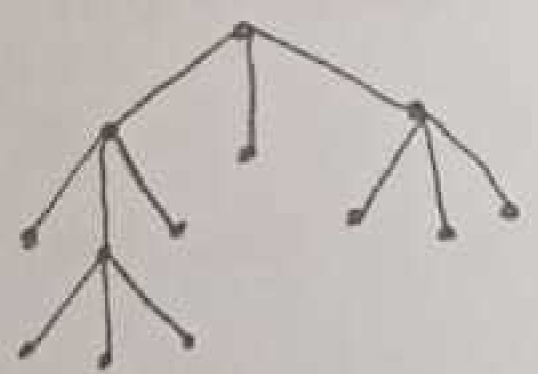
Köklü Ağaç: Bir düğümü kök olarak belirlenen ve her kenarı kökten uzaklaşacak şekilde yönlendirilmiş bir ağaçtır. (Döngü içerir)

Tanım: Bir köklü ağacın her iç düğümünün m'den fazla çocuğu yoksa bu ağaca m'li ağaç denir. Eğer her iç düğümün m tane çocuğu varsa buna da tam m'li ağaç denir.

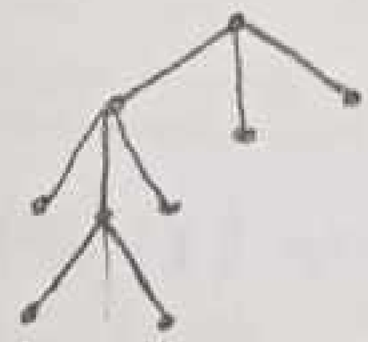
m=2 ise bu ağaca binary tree olarak adlandırılır.



Binary Tree



tam üçlü



Tam değil

Ağaçların Özellikleri

Teorem: n düğümlü bir ağacın $(n-1)$ kenarı vardır. i tane iç düğümü olan tam m'li ağacın $n = m.i+1$ tane düğümü vardır.

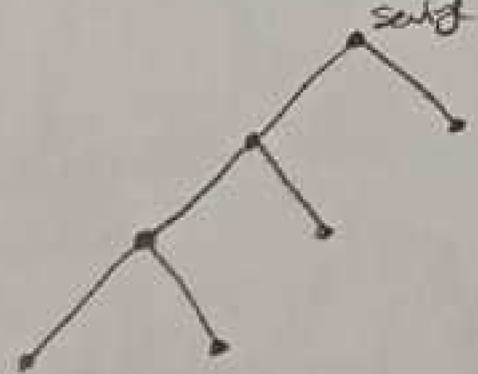
Tam m'li ağaçta;

① n düğüm varsa $i = (n-1)/m$ iç düğüm,
" " " $l = [(m-1)n+1]/m$ yaprak, vardır.
(yaprak sayısı)

② i tane iç düğüm $n = m.i+1$ düğüm,
$l = (m-1).i+1$ yaprak, vardır.

③ l tane yaprak $n = (ml-1)/(m-1)$ düğüm,
$i = (l-1)/(m-1)$ düğüm, vardır.

Tanım: Bir köklü ağaçtaki bir v düğümünün seviyesi, kökten bu düğüme giden tek yolun uzunluğudur. Kökün seviyesi 0'dır.



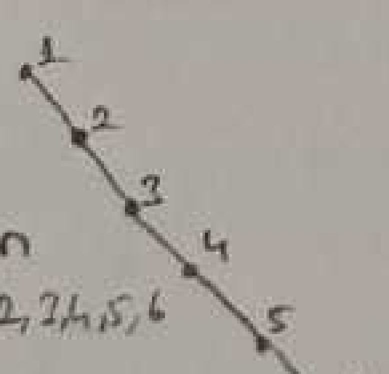
seviye 0
seviye 1
seviye 2
seviye 3

Ağacın yüksekliği 3'tür. (seviyeye bakılır)

Tanım: Bir ağacın yüksekliği tüm düğümlerin seviyelerinin en büyüğüdür.

Tanım: Yüksekliği h olan bir köklü m'li ağacın tüm yapraklarının seviyesi h ve h-1 ise dengelidir. (-1, 0, 1) yapraklar arasındaki fark!/

AVL Tree
Red-Black Tree



Sıra verilen sayılar 1,2,3,4,5,6

Tanım: Yüksekliği h olan bir m'li ağaçta en fazla m^h tane yaprak vardır.

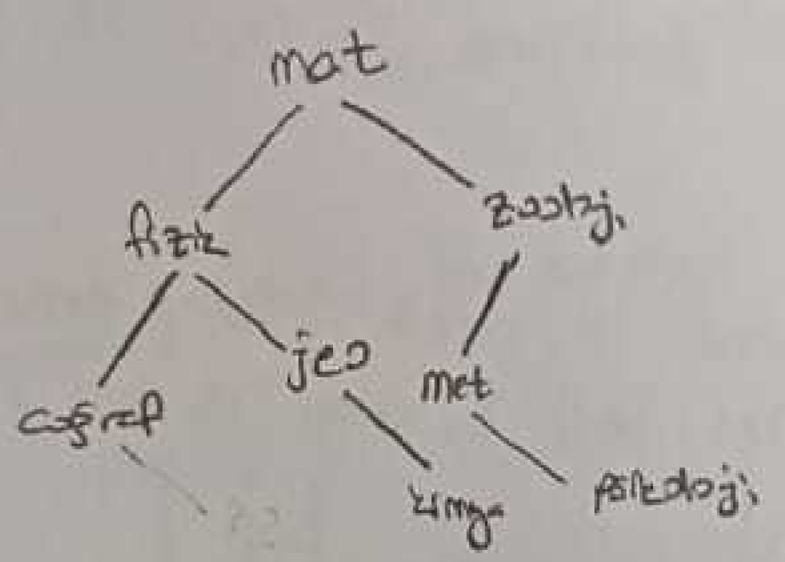
İkili Arama Ağaçları:

En fazla 2 çocuğu olur.

mat, fizik, coğrafya, zooloji, meteoroloji., jeoloji., psikoloji, kimya

"İkili ağaçtır fakat tam m'li değildir"

sözde kodu yazmadı, ama son bak!

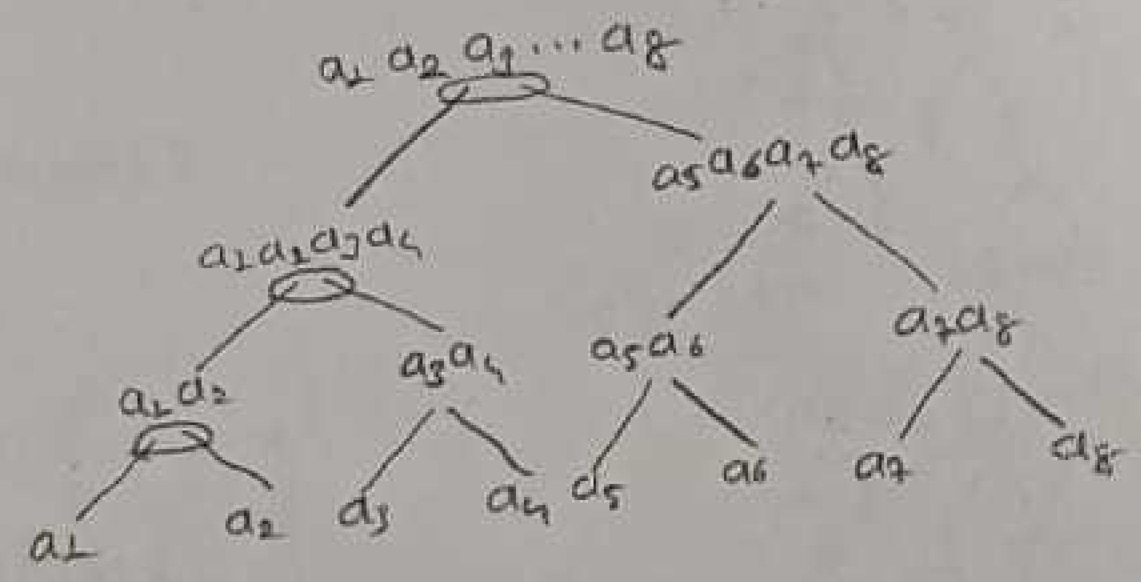


Karar Ağaçları:

Her k dağılımı bir karara karşılık gelen, bu dağılımlardaki alt ağaç olası kararın sonuçları olan köklü ağaca denir.

Sahte parayı bul 8 para arasından

$\log 8 = \log 2^3 = 3$



IS, RS, algoritmalarına bak!

Tanım: İkili karşılaştırmalara dayalı bir sıralama algoritması en az $\log_2 n!$ karşılaştırma gerektirir.

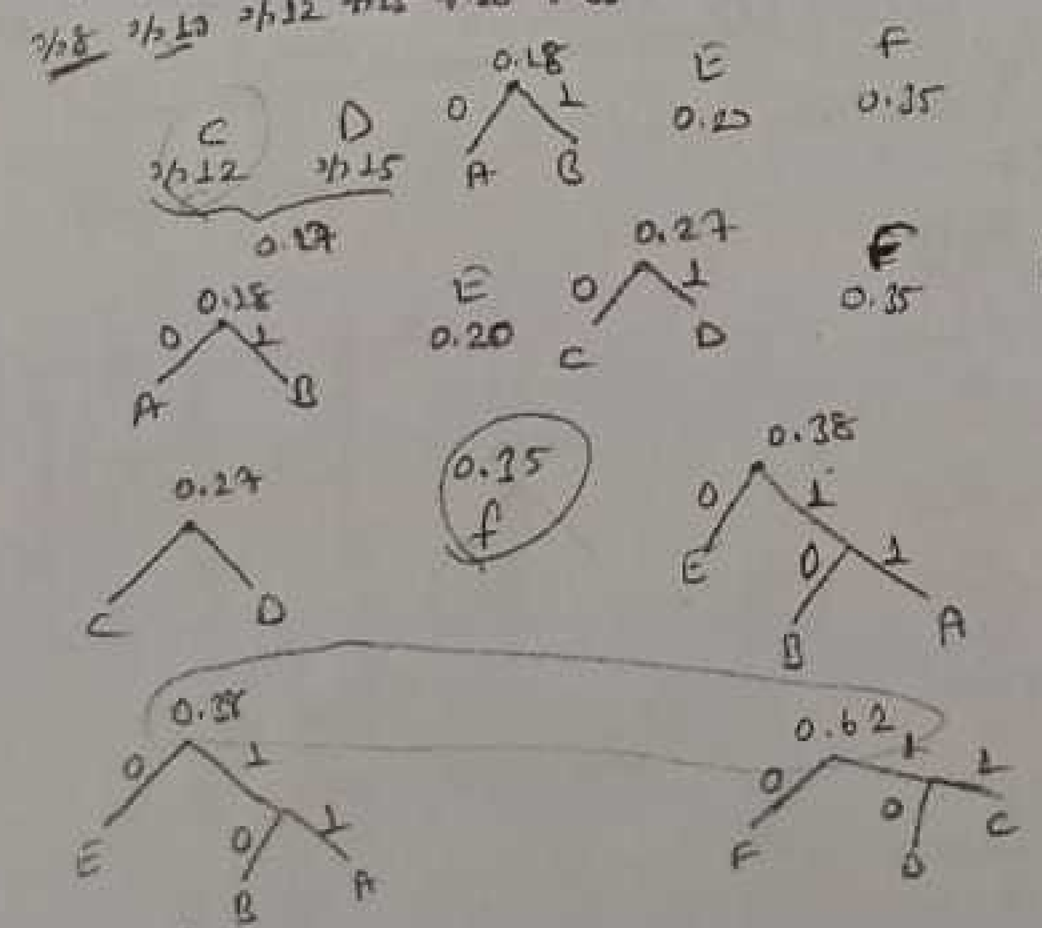
$\log n! = \log n^n = \underbrace{n \cdot \log n}$ (!)

Ön Ek Kodları:

Huffman

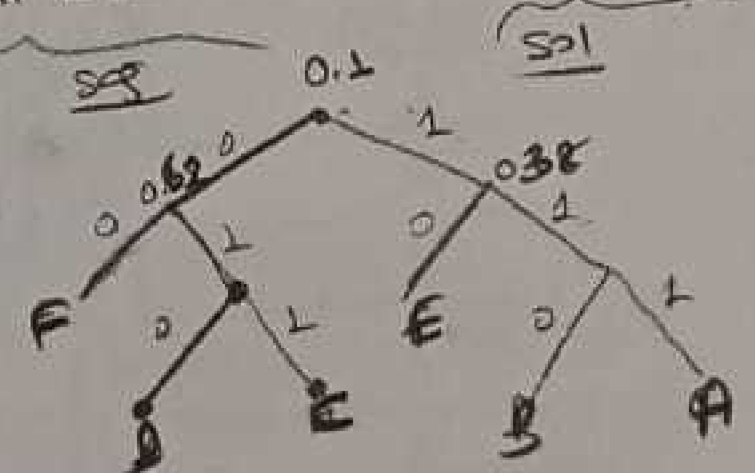
A B C D E F → en küçük iki özelliği toplanır.

%8 %10 %12 %15 %20 %35



kökten küçük olanlar sağ

kökten büyük olanlar sol



F: 00	2.0,35
D: 010	3.0,15
C: 011	3.0,12
E: 10	2.0,20
A: 111	3.0,08
B: 110	3.0,10
	2,45

Gezinti Algoritmaları :

T, kökü r olan sıralı bir ağaç olsun.

T, sadece r'den oluşuyorsa r, T'nin önden sıralı gezintisidir. $T_1, T_2, \dots T_n$ r'nin alt ağaçları önce r sonra $T_1, T_2, \dots$ ziyaret edilir.

sondan Sıralı

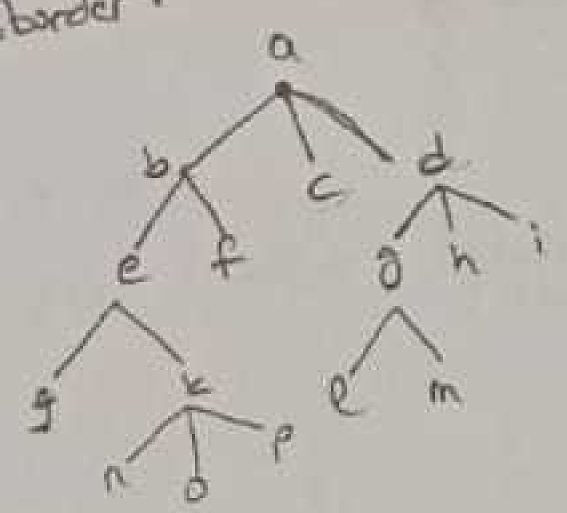
T, kökü r olan sıralı bir ağaç olsun

T, sadece r'den oluşursa r T'nin sondan gezintisidir. $T_1, T_2, \dots T_n$ r'nin alt ağaçları önce $T_1, \dots T_n$ gezilir. En son r gezilir.

Sıralı Gezinti :

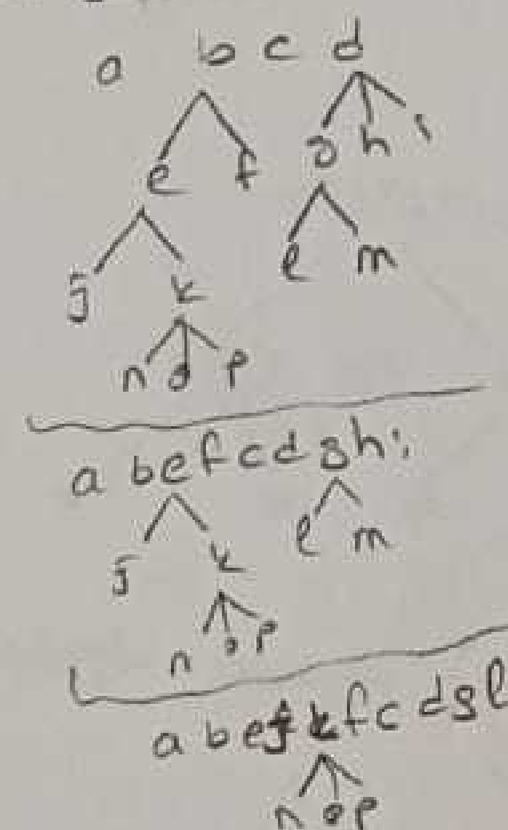
Sıralı T kökü r olan sıralı bir ağaç olsun T, sadece r'den oluşuyorsa r, T'nin
" gezintisidir. $T_1, T_2, \dots T_n$ r'nin alt ağaçları, önce T_1 sonra r, daha sonra $T_2, \dots T_n$ ziyaret edilir. (Sıralı)

preorder : kök - sol sağ
inorder : sol - kök - sağ
postorder : sol - sağ - kök



inorder

Preorder'a göre



abejnopkfcdslmi

ÖN Ekler :

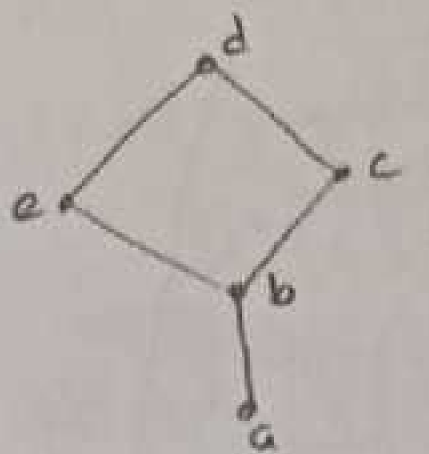
infix, prefix, postfix
a+b +ab ab+

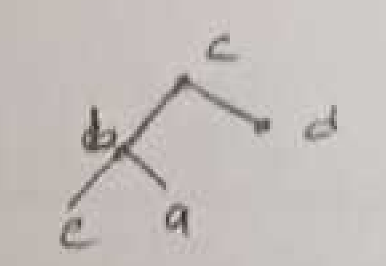
$+ - * 2\ 3\ 5 / \uparrow 2\ 3\ 4$ (prefix) (polish)
$+ - * 2\ 3\ 5\ / 2^3 4$
$+ - * 2\ 3\ 5\ 2$
$+ -6\ 5\ 2$
$+ 1\ 2$
3

$7\ 2\ 3\ * - 4 \uparrow 9\ 3 / +$ (postfix) (ters polish not)
$7\ 6 - 4 \uparrow 9\ 3 / +$
$1\ 4 \uparrow 9\ 3 / +$
$1\ 9\ 3 / +$
$1\ 3 +$
4

Kapsayan Ağaçlar: G basit bir çizge olsun.

G nin bir alt çizgesi olan ve G nin her düğümünü kapsayan bir ağaçtır.
→ kapsayan ağacı
→ G nin bir

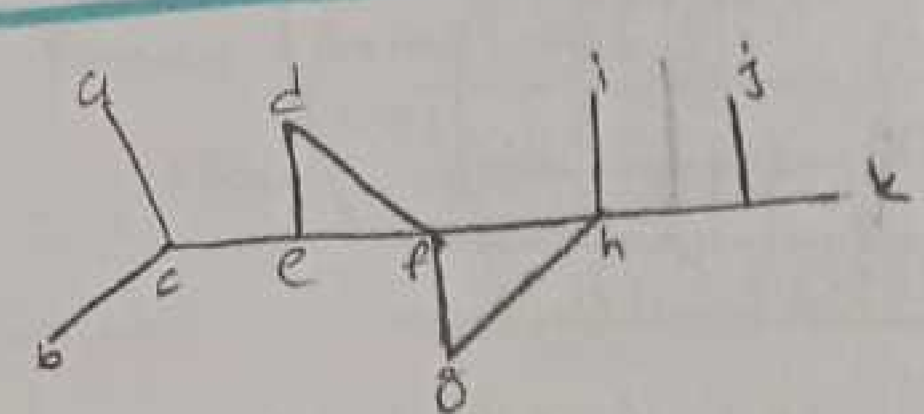


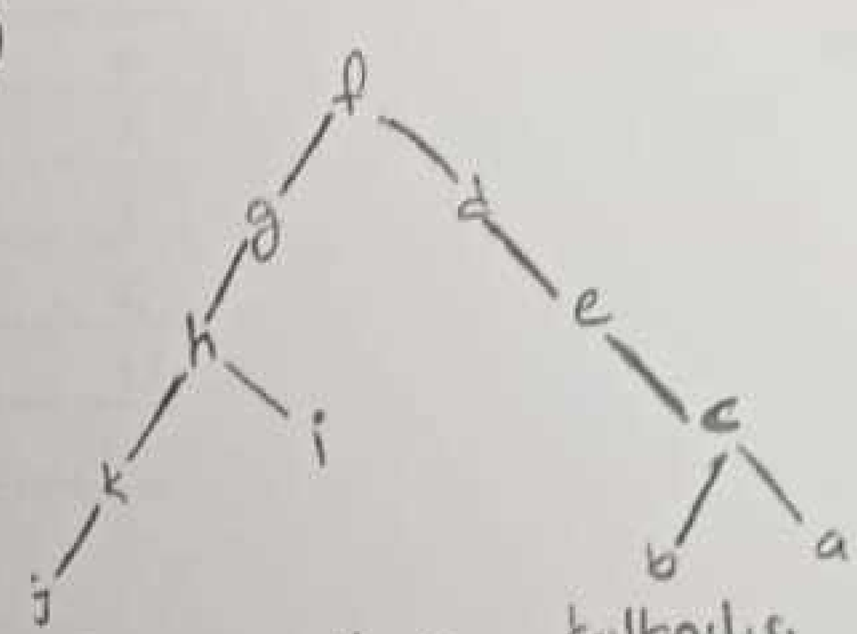


Network'te kullanılır.

Dahil değil sonrası

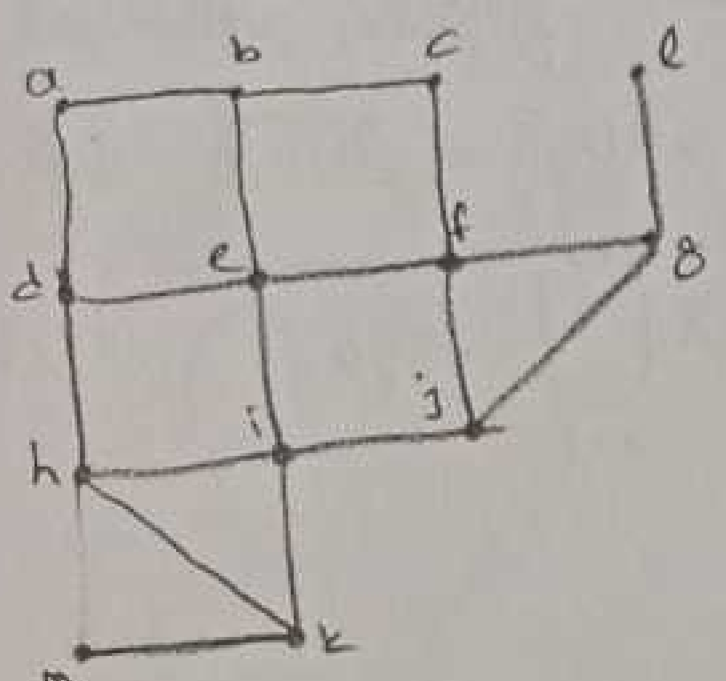
Derinlik Öncelikli Arama: (Geri iz Sürme)



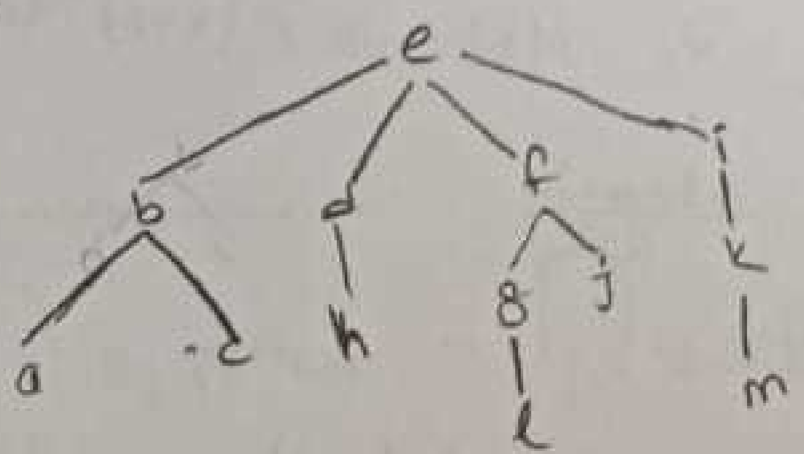


↳ Labirentlerde kullanılır.

Genişlik Öncelikli Arama:



e'yi kök kabul edersek,

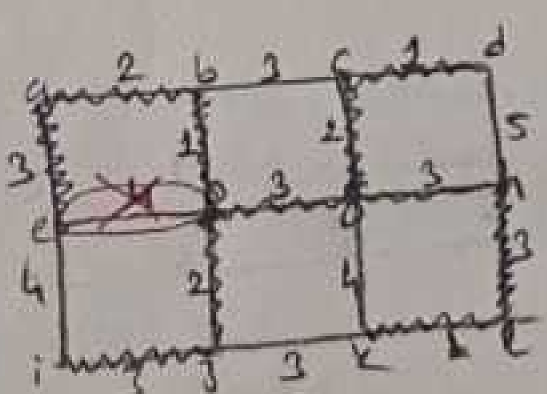


- Çizge renklendirme kullanılır. (satranç)
- Vezir dizmede
↳ (vezir problemi)

Minimum Kapsayan Ağaçlar: Bir bağlantılı ağırlıklı çizgede bir min kapsayan ağaç olabilecek en küçük kenarların ağırlıkları toplamına sahip bir kapsayan ağaçtır. (Min. Spanning Tree)

Prim Algoritması (sınavda kadar vermedi.)

Ör:



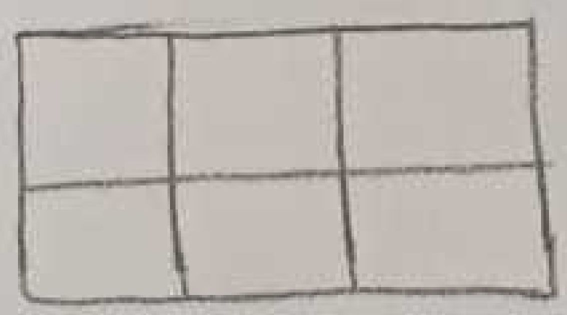
şek. 1

ef eklemem, döngü olur.

Tercih	Kenar	Ağırlık
1	bf	1
2	ab	2
3	fj	2
4	ae	3
5	ij	3
6	fg	3
7	gc	2
8	cd	1
9	gh	3
10	hl	3
11	kl	1

Kruskal Algoritması :

↳ (Ağırlık olarak ağırlıkları ekleriz, en sonda ağaç olmalı ve tüm durumları kapsamalı)



Şekil 1'in aynısı çizilecek

Tercih	Kenar	Ağırlık		
1	bf	1		
2	cd	1	3	
3	kl	1		
4	ab	2		
5	fj	2	6	24
6	cg	2		
7	ae	3		
8	fg	3		
9	gh	3	15	
11	ij	3		
12	hl	3		

TÜMEVARIM :

P(n) ifadesinin tüm pozitif n tamsayıları için doğru olduğunu göstermek için P(n) önerme fonksiyonun 2 basamağını tanımlamamız gerekir.

(TB) Temel Basamak : P(1)'in doğru old.nu göstermek

Tümevarım Basamağı : $\forall k$, $P(k) \longrightarrow P(k+1)$ tüm k poz. → Galerimizde insan gruplama, yaşlara göre

Ör: $1+2+3+\dots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$

T.B, P(1) $\frac{1.(1+1)}{2} = 1$

$P(k)$, $1+2+3+\dots+k = \frac{k.(k+1)}{2}$

$P(k+1)$, $1+2+3+\dots+k+k+1 = \frac{(k+1).(k+1+1)}{2}$

$$\frac{k.(k+1).2k+2}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2} \Rightarrow 1 = 1$$

Ör: $1+2+2^2+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$ old.nu gösteriniz.

TB → $P(0)$, $2^{0+1}-1 = 1$

Tümevarım Basamağı, → $P(k)$, $1+2+2^2+\dots+2^k = 2^{k+1}-1$

$P(k+1)$, $1+2+2^2+\dots 2^k+2^{k+1} = 2^{k+1+1}-1$

$$2^{k+1}-1+2^{k+1} = 2^{k+2}-1$$

$$2.2^{k+1}-1 = 2^{k+2}-1$$

$$2^{k+2}-1 = 2^{k+2}-1$$

Örnek: $a_0 = 2$ $a_1 = 7$ için $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ tekrarlı ilişkinin ...

Örn: Tüm poz. n sayıları için $n < 2^n$

$P(1)$ $1 < 2^1$

$P(k)$ $k < 2^k$

$P(k+1) = k+1 < 2^{k+1} \longrightarrow k+1 < 2^k + 1$

$2^k + 1 < 2^{k+1}$

Örn: $n \geq 4$ eşitsizliğini sağlayan n sayıları için tümevarımda gösteriniz. $2^n < n!$

$TB \longrightarrow P(4)$ $2^4 < 4! = 16 < 24$

Tümevarım Basamağı $\longrightarrow P(k) \cdot 2^k < k!$

$P(k+1)$ $2^{k+1} < (k+1)!$

$2^{k+1} < (k+1)\, k!$

$2 \cdot 2^k < (k+1) \cdot k!$

Örn:

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

$A_1, A_2, A_3, \ldots$ evrensel kümenin altkümeleri

$P(2)$ $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ de'Morgan

$$P(k) \quad \overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j} \Longrightarrow \overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j \cap A_{k+1}} = \overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} \cup \overline{A_{k+1}}$$

$$= \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j} \cup \overline{A_{k+1}} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j}$$

Kuvvetli Tümevarım:

$P(n)$ ifadesinin tüm poz. n tamsayılar için doğru olduğunu göstermek için $P(n)$ bir önerme fonk. u olm. üz. iki basamağı tanımlamamız gerekir. Temel basamak $P(1)$ doğruluğunu, tümevarım basamağı $[P(1) \land P(2) \land P(3) \land \ldots P(k)] \longrightarrow P(k+1)$ poz. tamsayıları için doğru olduğunu gösterir.

Özyineli:

Temel basamakta fonksiyonun 0 daki değerini belirtiniz. Özyineleme basamağında bir tamsayıdaki değeri daha küçük tamsayılardaki değerlerden hesap etmek için bir kural belirleyiniz.

Örn: $f(0) = 3$

$f(n+1) = f(n) + 3$

$f(1) = f(0) + 3 = 6$

$\vdots$

Örn: $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0$

① $\sum_{k=0}^{a} a_0$ ② $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{k+1}$

Özyineli Algoritmalar ;

* Faktoriyel Hesabı

```
procedure fak (n negatif olmayan tamsayı)
    if n==0 then return 1
    else return n*fak(n-1)
```

* a^n hesabı

```
procedure us (a: 0'dan farklı reel sayı, n: negatif olmayan tamsayı)
    if n==0 then return 1
    else return a*us(a,n-1)
```

* ebob hesabı

```
procedure ebob (a, b: negatif olmayan a<b)
    if ==0 then return b
    else return ebob (b mod a, a)
```

* linear arama

```
procedure linear (i, j, x: 1≤i≤j≤n koşulunu sağlayan tamsayı)
    if a:== x then return
    else if i==j then return 0
    else return linear (i+1, j, x)
```

* binary arama

```
procedure binary (i, j, x: 1≤i≤j≤n koşulu sağlayan tamsayı)
    m:=[i+j]/2
    if am == x than return i
    else if x<am ve i<m then
                return binary (i, m-1, x)

    else
        return binary (m+1, j, x)
```

* Fibonacci dizisi

procedure Fib (n: sıfırdan farklı tamsayı)

if $n==0$ then return 0

else if $n==1$ then return 1

else return Fib $(n-2)$ + Fib $(n-1)$

⇒ Birleştirme Algoritması :

8 2 4 6 9 7 1 0 1

8 2 4 6 | 9 7 1 0 1

8 2 | 4 6 | 9 7 | 1 0 1

2 8 | 4 6 | 7 9 | 1 1 0

2, 4, 6, 8 | 1, 7, 9, 10

1 2 4 6 7 8 9 10

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

procedure birleştir sıralama $(L = a_1, a_2, \dots a_n)$

if $n > 1$ then

$m := [n/2]$

$L_1 = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$

İleri Sayma Teknikleri :

$T(n) = 5! \to 5\,T(4)$ rekursive olarak çözelim

$5 \cdot 4 \cdot T(3)$

$$T(n) = T(n-1) + 1$$
$$= T(n-2) + 1 + 1$$
$$= \underbrace{T(n-k)}_{1} + \underbrace{1+1+\dots}_{k}$$
$$\boxed{= 1+n}$$

(sağlıklı bir çözüm değil)

$H_n = 2H_{n-1} + 1$ rekursive şekilde çözelim.

$$H_n = 2.(2H_{n-2} + 1) + 1$$
$$= 2^2 H_{n-2} + 2 + 1$$
$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1$$
$$= 2^n - 1$$

sağlıklı bir çözüm değil.

Doğrusal Özyinel İlişkilerin Çözümü:

Sabit katsayılı k. dereceden doğrusal bir homojen özyineleme ilişkisi:

$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_k \cdot a_{n-k}$ formundadır.

$c_1, c_2, \dots c_k$ reel sayılar. $c_k \neq 0$

Bu ilişki doğrusaldır, çünkü eşitliğin sağ tarafı önceki terimlerin toplamı şeklindedir. Homojendir. Çünkü her terim aj terimleriyle çarpılmamaktadır. Her terimin katsayısı sabittir ve k. derecedendir.

Örnek:

① $P_n = 1.11 P_{n-1}$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

doğrusaldır ve hom. dir.

② $a_n = a_{n-1} + a^2_{n-2}$ doğrusal değildir

③ $H_n = 2H_{n-1} + 1$ doğrusal değil

④ $B_n = n \cdot B_{n-1}$ sabit katsayılı değil

Doğrusal Homojen Özyinel. İlişkilerin Sabit katsayılı ile Çözümü:

r sabit olm. üz.

$a_n = r^n$ formunda çözüm arıyoruz.

$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_k \cdot a_{n-k}$

$r^n = c_1 \cdot r^{n-1} + c_2 \cdot r^{n-2} + \dots + c_k \cdot r^{n-k}$ her iki tarafı r^{n-k} ye bölelim.

$$\frac{r^n}{r^{n-k}} = \frac{c_1 \cdot r^{n-1} + c_2 \cdot r^{n-2} + \dots + c_k \cdot r^{n-k}}{r^{n-k}}$$

$$\boxed{r^k - c_1 \cdot r^{k-1} + c_2 \cdot r^{k-2} - \dots c_k}$$ → karakteristik denklem

Teorem:

c_1 ve c_2 gerçek sayılar

$r^2 - c_1 \cdot r - c_2 = 0$ bu durumda

α_1, α_2 sabitler olm. üz. $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$a_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n$ eşitliği sağlanırsa

$\{a_n\}$ dizisi $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ karakteristik denklemin çözümüdür.

Örnek: $a_0 = 2 \quad a_1 = 7$ için $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ tekrarlı ilişkinin çözümünü bulunuz

$a_2 = 11$

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{r^{n-1} + 2 \cdot r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

$r^2 = r + 2 \rightarrow \boxed{r^2 - r - 2 = 0} \rightarrow$ karakteristik denklem

$r^2 - r - 2 = 0$

$\left.\begin{matrix} r & -2 \\ r & +1 \end{matrix}\right\} r_1 = 2,\ r_2 = -1$

$\boxed{a_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n} \leftarrow$ çözümü $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$

$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot (-1)^n$

$\left.\begin{matrix} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ a_1 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 = 7 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \alpha_1 + \cancel{\alpha_2} = 2 \\ 2\alpha_1 + \cancel{\alpha_2} = 7 \\ \hline 3\alpha_1 = 9 \end{matrix} \rightarrow \boxed{\alpha_1 = 3} \quad \boxed{\alpha_2 = -1}$

$\boxed{a_n = 3 \cdot 2^n - 1 \cdot (-1)^n} \leftarrow$ çözüm kümesidir.

Fibonacci için;

$f_0 = 0,\ f_1 = 1 \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ tekrarlı ilişkinin çözümünü bulunuz.

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{r^{n-1} + r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

$r^2 = r + 1 \rightarrow \boxed{r^2 - r - 1 = 0}$ karakteristik denklem

$r^2 - r - 1 = 0$

Kökleri: $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$f_n = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$n=0$ için

$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$

$f_1 = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 1$

$= \alpha_2 \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \alpha_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{4\sqrt{5}}} + \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} + \cancel{\frac{5}{4\sqrt{5}}} - \cancel{\frac{1}{4\sqrt{5}}} + \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} - \cancel{\frac{5}{4\sqrt{5}}}$$

$$2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1$$

Teorem :

c_1 ve c_2 gerçel sayılar olsun, $c_2 \neq 0$ olsun

karakteristik denklemi : $r^2 - c_1 \cdot r - c_2 = 0$ bir tek r_0 köküne sahip olsun.

$\{a_n\}$ dizisi, $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ özyineli ilişkisi ancak ve ancak α_1 ve α_2 sabitler olm.

öz. $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$a_n = \alpha_1 \cdot r_0^n + \alpha_2 \cdot n \cdot r_0^n$ bir çözümdür. (çakışık kök varsa)

Örnek: $a_0 = 1$, $a_1 = 6$ başlangıç koşulu için $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ çözümünü bulunuz.

karakteristik denklemi :

$r^2 - 6r + 9 = 0$

$r \quad -3$

$r \quad -3$ $\Big\}$ $\boxed{r_0 = 3 \text{ çakışık kökler}}$

$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n$

$a_0 = \alpha_1 = 1$

$a_1 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$

$= 3 + 3\alpha_2 = 6 \rightarrow \boxed{\alpha_2 = 1}$

çözüm kümesi

$a_n = \alpha_1 \cdot r_0^n + \alpha_2 \cdot n \cdot r_0^n \longrightarrow \boxed{a_n = 3^n + n \cdot 3^n}$

Teorem :

$c_1, c_2, \dots c_k$ reel sayılar olsun. $r^k - c_1 \cdot r^{k-1} - c_2 \cdot r^{k-2} - \dots - c_k = 0$ karakteristik denklemi olsun.

k tane ayrık $r_1, r_2, r_3, \dots r_k$ köküne sahip olsun.

Bu durumda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sabitler ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$a_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n + \dots + \alpha_k \cdot r_k^n$ sağlanırsa $\{a_n\}$ dizisi:

$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_k \cdot a_{n-k}$

Örnek: $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$ $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ çözümünü bulunuz.

karakteristik denklemi :

$r^3 - 6r^2 - 11r - 6 = 0$

$(r-1) \cdot (r-2) \cdot (r-3) = 0 \rightarrow r_1 = 1, \; r_2 = 2, \; r_3 = 3$ olur.

$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$

$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$

$a_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5$

$a_2 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 15$

Cramer ile çözülen

$\alpha_1 = 1, \; \alpha_2 = -1, \; \alpha_3 = 2$

çözüm kümesi

$\boxed{a_n = 1^n - 2^n + 2 \cdot 3^n}$

Teorem :

$c_1, c_2, \dots c_k$ gerçel sayıları karakteristik denklemi : $r^k - c_1 \cdot r^{k-1} - c_2 \cdot r^{k-2} - \dots - c_k = 0$

$m_1, m_2, \dots, m_t$ kez tekrar eden $r_1, r_2, \dots, r_t$ kökene sahip olsun.

$i = 1, 2, \dots, t$ ve $\boxed{m_1 + m_2 + \dots + m_t = k}$ olm. üz. → karakteristik denk. k. dereceden

→ çakışık kök sayısı

bu durumda $\{a_n\}$ dizisi:

$m_i \geq 1$

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} \cdot n + \alpha_{1,2} \cdot n^2 + \dots + \alpha_{1,m-1} \cdot n^{m_1-1}) r_1^n$$

$$+ (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} \cdot n + \alpha_{2,2} \cdot n^2 + \dots + \alpha_{2,m-1} \cdot n^{m_2-1}) r_2^n + \dots$$

$$+ (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} \cdot n + \alpha_{t,2} \cdot n^2 + \dots + \alpha_{t,m-1} \cdot n^{m_t-1}) r_t^n$$ koşulu sağlanıyorsa

• çakışık old. zaman kökler

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_k \cdot a_{n-k}$$

Örnek : Doğrusal hom. özyineli karakteristik dizinin kökleri şunlardır : 2,2,2, 5,5, 9

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} \cdot n + \alpha_{1,2} \cdot n^2) 2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} \cdot n) 5^n + \alpha_{3,0} \cdot 9^n$$

$\boxed{3,3,2,2,7,7,1}$

↳ sen yap.

Örnek : $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -1$ başlangıç koşulu için

$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ çözümünü bulunuz.

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \longrightarrow (r+1)^3 = 0 \rightarrow r_{1,2,3} = -1$$

$$a_n = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 n (-1)^n + \alpha_3 \cdot n^2 (-1)^n$$

$a_0 = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1$

$\left.\begin{array}{l} a_1 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ a_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \end{array}\right\}$ $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = -2$

$$a_n = (-1)^n - 2 \cdot n(-1)^n + 3n^2(-1)^n$$
$$= (-1)^n (1 - 2n + 3n^2)$$

Sabit Katsayılı Doğrusal Homojen Olmayan Özyineli İlişkiler :

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_k \cdot a_{n-k} + f(n) \quad \} \rightarrow \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$$

Örj: $a_n = a_{n-1} + 2^n$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n!$

$a_n = 3a_{n-1} + n \cdot 3^n$ gibi denklemlerdir.

Teorem: Eğer $\{a_n^{(p)}\}$ aşağıdaki gibi sabit katsayılı hom. olmayan doğrusal özyinelemeli ilişkinin bir özel çözümü ise,

$$a_n = c_1 . a_{n-1} + c_2 . a_{n-2} + \dots + c_k . a_{n-k} + f(n)$$

tüm çözümler $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ formundadır.

Örnek: $a_n = \underbrace{3a_{n-1}}+2n$ ilişkisinin $a_1 = 3$ için çözüm kümesini bulunuz.

$$r-3=0 \rightarrow r=3$$

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n$$ buraya uygulayacak

$$f(n) = 2n, \quad cn+d$$

birinci derecedenler

$$cn+d = 3.\left(c.(n-1)+d\right) + 2n$$

$$cn+d = 3cn - 3c + 3d + 2n \longrightarrow \left.\begin{matrix} c = 3c+2 \\ d = -3c+3d \end{matrix}\right\} \begin{matrix} c = -1 \\ d = -\frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$\left\{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\right\} = \alpha_1 \cdot 3^n - n - \frac{3}{2}$$

$$a_1 = 3 \longrightarrow 3 = 3\alpha_1 - 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{11}{6}$$

$$\boxed{\text{Çözüm kümesi: } \frac{11}{6} \cdot 3^n - n - \frac{3}{2}}$$

Örnek: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ tüm çözümlerini bulunuz.

$a_n^{(h)}$ için karakteristik denklem: $r^2 - 5r + 6 = 0$

$r_1 = 3, \quad r_2 = 2$ $\qquad a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n$

$$f(n) = 7^n, \quad c.7^n$$

$a_n^{(p)}$ için

$$\left.\begin{matrix} c7^n = 5.c.7^{n-1} - 6.c.7^{n-2} + 7^n \\ c\cancel{7^n} = 5.c.\frac{\cancel{7^n}}{7} - 6c.\frac{\cancel{7^n}}{49} + \cancel{7^n} \end{matrix}\right\} c = \frac{49}{20} \text{ dır.}$$

$$\left\{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\right\} = \alpha_1 . 3^n + \alpha_2 . 2^n + \frac{49}{20} . 7^n$$

Teorem: Varsayalım ki $\{a_n\}$ aşağıdaki gibi

$$a_n = c_1 . a_{n-1} + c_2 . a_{n-2} + \dots + c_k . a_{n-k} + f(n)$$

doğrusal hom. olmayan özyineleme ilişkisi olsun.

Burada, $c_1, c_2, \dots, c_k$ gerçel sayılar

$$f(n) = \left(b_t . n^t + b_{t-1} . n^{t-1} + \dots + b_1 n + b_0\right) . s^n$$

s ilgili doğrusal hom. özyineli ilişkinin karakteristik eşitliğine ait bir kök olmadığında

$(P_t \cdot n^t + P_{t+1} \cdot n^{t+1} + \dots + P_1 n + P_0)\, s^n$

eğer bir kök ise $n^m \cdot (P_t \cdot n^t + P_{t+1} \cdot n^{t+1} + \dots + P_1 n + P_0) \cdot s^n$ burada n tekrar eden kök sayısıdır.

Örnek: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + f(n)$

a.) $f(n) = 3^n$

b.) $f(n) = n \cdot 3^n$

c.) $f(n) = n^2 \cdot 2^n$

d.) $f(n) = n^2+1 \cdot 3^n$ için özel çözüm formlarını yazınız.

Karakteristik denk: $r^2 - 6r + 9 = 0$

$r \quad -3$

$r \quad -3$

$\boxed{r_1 = r_2 = 3}$

$a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n$

a şıkkı için: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 3^n$

çakışık 2 kök vardır.

$a_n^{(p)} = P_0 \cdot n^2 \cdot 3^n \Rightarrow \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n + P_0 \cdot n^2 \cdot 3^n$

b şıkkı için: 3 ile çakışma olur

$(P_1 \cdot n + P_0)\, n^2 \cdot 3^n + \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n$

c şıkkı için:

$(P_2 \cdot n^2 + P_1 \cdot n + P_0)\, 2^n + \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n$

d şıkkı için: 3 ile çakışma olur

$(P_2 n^2 + P_1 \cdot n + P_0)\, 3^n \cdot n^2 + \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n$

Örnek: $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$ için $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\} = ?$

Örnek: $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + f(n)$

a.) $f(n) = n^3$

b.) $n \cdot 2^n$

c.) $n^2 \cdot 4^n$

$\left.\right\} a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$

SAYMA:

Çarpma Kuralı: Bir iş birbirini takip eden iki işlemden oluşsun. Eğer ilk işlem n_1 yolla ve bunun herbir yolu için takip eden ikinci işlem n_2 yolla yapılabiliyor ise bu iş $n_1 \cdot n_2$ farklı yolla yapılır.

Örnek: Uzunluğu 7 bit olan kaç farklı bit dizgisi vardır?

2^7 farklı dizgi oluşturur.

n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye kaç farklı fonk. tanımlanabilir?

m^n farklı fonk. tanımlanabilir.

Toplama Kuralı: Bir iş n_1 farklı yolu olan bir işlemin bir yoluyla veya n_2 farklı yolu olan başka bir işlemin bir yoluyla yapılabilsin. Bu işlemler arasında hiçbir ortak yol yoksa bu işi yapmanın $n_1 + n_2$ yolu vardır.

```
k = 0
for n1 k+=1
  for n2 k+=1
    for n3 k+=1
      ...
        for nm
```

$n_1 + n_2 + \dots + n_m$

Örnek: Bir bilgisayar sis.inde her kullanıcının 6 ile 8 karakter uzunluğunda ve her bir karakteri büyük harften ya da rakamdan oluştuğu bir şifresi vardır. Her şifre en az bir rakam içermek zorundadır. Bu durumda kaç farklı şifre tanımlanabilir. (İngiliz Alfabesinde 26 tane harf var.)

$P_6 + P_7 + P_8 \longrightarrow$ Top. uzayımı verir.

$26 + 10$ (Alfabe, Rakam)

$$\left.\begin{aligned} \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ \quad & 36^6 - 26^6 = \\ \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ \quad & 36^7 - 26^7 = \\ \_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ \quad & 36^8 - 26^8 = \end{aligned}\right\}$$

2.684.483.063.360 tane şifre oluşur.

Çıkarma Kuralı: Bir iş n_1 adet yolu olan bir işlemle ya da n_2 adet yolu olan başka bir işlemle yapılsın. İki işlem arasında bazı ortak yollar varsa bu işin yapılabileceği toplam yol sayısı $n_1 + n_2$ den iki işlemdeki ortak olan yol sayısının çıkarılmasıyla bulunur.

Örnek: Uzunluğu 8 bit olan dizgilerin kaç tanesi bir ile başlar veya sonu sıfır ile biter?

$\underline{1}$ _ _ _ _ _ _ _ $= 2^7$ tane dizgi oluşur.

_ _ _ _ _ _ $\underline{0}$ $\underline{0}$ $= 2^6$ tane dizgi oluşur.

192 adet dizgi.

$\underline{1}$ _ _ _ _ _ $\underline{0}$ $\underline{0}$ $= 2^5$ tane dizgi oluşur.

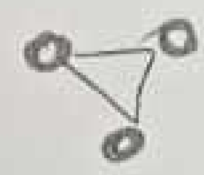
160 farklı bit dizgisi oluşturulabilir.

Bölme Kuralı: Bir iş n yolla gerçekleştirilebilir. Her bir w yolu için n yoldan tam d tanesi w yoluna benzer gelirse bu işi yapmak için $\frac{n}{d}$ yol vardır.

Güvercin Yuvası İlkesi: k bir poz. tamsayı olm. üz. Eğer k+1 tane ya da daha fazla nesne k tane kutu içine yerleştirilirse 2 veya daha fazla nesne içeren en az bir kutu vardır.

Örnek: 367 kişilik bir grup arasında en fazla 366 doğum günü olursa, O zaman en az iki kişinin doğum günü aynıdır. (Artık yıl için uygun bir cümledir.)

Genelleştirilmiş Güvercin Yuvası İlkesi: Eğer k tane kutu içine n tane nesne yerleştirilirse en az bir kutu $\lceil N/k \rceil$ tane nesne içerir.



$\lceil\ \rceil$ üste tamamla (yukarı yuvarla) demektir.

Örnek 100 kişi arasında en az aynı ayda doğan kaç kişi vardır? $\lceil 100/12 \rceil = 9$ olur.

Permütasyon ve Kombinasyon: Farklı nesnelerin oluşturduğu bir kümenin nesnelerinin her bir sıralanışına permütasyon denir. Kümenin r elemanın her bir sıralanışına r'li permütasyon denir.

Teorem: $1 \leq r \leq n$ olm. üz. n poz. tamsayı, r tamsayı ise n farklı elemanlı bir kümenin r'li permütasyonu $P(n,r) = n.(n-1).(n-2).\dots(n-r+1)$ olur.

Bunun sonucu olarak $0 \leq r \leq n$ olm. üz. n, r tamsayılar ise $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ olur.

Örnek: Bir yarışmaya katılan 100 kişiden 1. 2. 3.yü seçmenin kaç farklı yolu vardır.

$$p(100,3) = 100.99.98 = 970.200.$$

Kombinasyon: n ve r negatif olmayan iki tamsayı ve $0 \leq r \leq n$ ise n elemanlı bir kümenin r'li kombinasyonlarının sayısı $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Bunun sonucu olarak n ve r negatif olmayan ve $r \leq n$ şartını sağlayan tamsayılar olsun. Bu durumda $C(n,r) = C(n,n-r)$ eşit olur.

Örnek: 52 kartlı bir iskambil destesinde 5 adet (...)

$$C\binom{52}{5} = \frac{52.51.50.49.48}{5!.(52-5)!} = (\dots) \qquad C\binom{52}{5} = C\binom{52}{47}$$

Binom Teoremi: x ve y birer değişken n ise negatif olmayan bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1}x\,y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Örnek $(2x-3y)^{25}$ ifadesinin açılımında $x^{12}x^{13}$ ün katsayısı nedir?

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j} (-3y)^j}_{\text{Tüm genel katsayı}} \qquad \underbrace{-\binom{25}{13} 2^{12}.x^{12}.3^{13}.y^{13}}$$

Hesaplanırsa: $\frac{25!}{13!.12!}.2^{12}.3^{13}$ elde edilir.