ÇÖZÜMLÜ SORULAR
(Birinci Mert. Adi Dif. Denklemler)

(1) $3x(xy-2)dx + (x^3+2y)dy = 0$ tam dif. denklemini çözünüz.

Çözüm: $M = 3x(xy-2)$ ve $N = (x^3+2y)$ dir.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$ ve $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$ olup $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ old. denklem

Tam dif. denklemdir.

$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 3x^2y - 6x$ eşitliğinde integral alınırsa

$$F(x,y) = \int (3x^2y - 6x)\,dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = x^3y - 3x^2 + \phi(y) \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

bulunur. y'ye göre türev alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + \frac{d\phi}{dy} \quad \ldots\ldots \quad (**)$$

olur. $\frac{\partial F}{\partial y} = N = x^3 + 2y$ eşitliği (**)'da yerine yazılırsa

$$x^3 + 2y = x^3 + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dy} = 2y \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = y^2 + C_0$$

bulunur. $\phi(y)$ nin bu değeri (*) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$F(x,y) = x^3y - 3x^2 + y^2 + C_0 = C_1$$

$$\Rightarrow \quad x^3y - 3x^2 + y^2 = C$$

genel çözümü bulunur.

(2) $(2xy-y)dx+(x^2-x)dy=0$ tam dif. denklemini çözünüz.

Çözüm : $M=2xy-y$ ve $N=x^2-x$ dir.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x-1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2x-1$$ olup $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ old.

denklem TDD'dir.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy-y$$ eşitliğinde integral alınırsa

$$F(x,y)=\int(2xy-y)\,dx+\phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y)=x^2y-yx+\phi(y) \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

y'ye göre türev

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2-x+\frac{d\phi}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots (*)(*)$$

elde edilir. $\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^2-x$ eşitliği $(*)(*)$'da yerine yazılırsa

$$x^2-x=x^2-x+\frac{d\phi}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dy}=0 \quad \Rightarrow \quad \phi(y)=c_0$$ bulunur.

$\phi(y)$ nin bu değeri $(*)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$F(x,y)=x^2y-yx+c_0=c_1$$

$$\Rightarrow \quad x^2y-yx=c$$

genel çözümü bulunur.

(3) $(2x+y\cos(xy))\,dx + x\cos(xy)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $M = 2x+y\cos(xy)$ ve $N = x\cos(xy)$ verilmiş.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 1\cdot\cos(xy) - y\cdot x\cdot\sin(xy)\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 1\cdot\cos(xy) - xy\sin(xy)\end{aligned}\right\}\quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ old. TDD'dir.}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = M = 2x+y\cos(xy)$ ifadesinde integral alınırsa

$$F(x,y) = \int[2x+y\cos(xy)]\,dx + \phi(y)$$

$$f(x,y) = x^2 + y\cdot\frac{1}{y}\cdot\sin(xy) + \phi(y)$$

$$f(x,y) = x^2 + \sin(xy) + \phi(y)$$ bulunur.

Türev

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) + \frac{d\phi}{dy}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = N = x\cos(xy)$ olduğundan

$$x\cos(xy) = x\cos(xy) + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = C_0$$

$$\Rightarrow F(x,y) = x^2 + \sin(xy) + C_0 = C_1$$

$$\Rightarrow x^2 + \sin(xy) = C$$

genel çözümü bulunur.

(4) $(2xy\cos x^2 - 2xy + 1)dx + (\sin x^2 - x^2)dy = 0$
denklemini çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x\cos x^2 - 2x$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos x^2 - 2x$ $\Rightarrow$ denklem TDD'dir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\cos x^2 - 2xy + 1$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \int (2xy\cos x^2 - 2xy + 1)\,dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = 2y\underbrace{\int x\cos x^2 dx}_{I_1} - 2y\int x dx + \int dx + \phi(y)$$

$\Big\{ I_1 = \int x\cos x^2 dx = ?$ $\quad x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow xdx = \frac{du}{2}$

$\Rightarrow \int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u = \frac{1}{2}\sin x^2 \Big\}$

$$\Rightarrow F(x,y) = 2y\cdot\frac{1}{2}\sin x^2 - 2y\frac{x^2}{2} + x + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x^2 - x^2 + \frac{d\phi}{dy}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y} = N = \sin x^2 - x^2$ eşitliğinden faydalanılırsa

$$\sin x^2 - x^2 = \sin x^2 - x^2 + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = C_0$$

$$\Rightarrow F(x,y) = y\sin x^2 - yx^2 + x = C$$

genel çözümü bulunur.

(5) $(x^2+3y^2)dx + 2xy\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 6y$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$ olup TDD değildir.

$$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{2xy}(6y-2y) = \frac{2}{x}$$

fonksiyonu sadece x'e bağlıdır. Bu nedenle

$$\mu = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$\Rightarrow \mu = x^2$ integral çarpanıdır.

Soruda verilen denklemin tüm terimleri x^2 ile çarpılırsa denklem TDD'ye dönüşür.

$$x^2(x^2+3y^2)dx + x^2(2xy)dy = 0$$

$$\Rightarrow (\underbrace{x^4+3x^2y^2}_{M_1})dx + \underbrace{2x^3y}_{N_1}dy = 0$$

denklemi TDD'dir.

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = M_1 = x^4 + 3x^2y^2$. eşitliğinde integral alınırsa

$$F(x,y) = \int (x^4+3x^2y^2)dx + \phi(y) \quad (*)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{x^5}{5} + x^3y^2 + \phi(y)$$ ve türev alınırsa

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^3y + \frac{d\phi}{dy} \; \ldots\ldots \quad (*)(*)$$

bulunur. $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N_1 = 2x^3y$ ifadesi (*)(*)'da yerine yazılırsa

$$2x^3y = 2x^3y + \frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = C_0$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{x^5}{5} + x^3y^2 = C$$

genel çözümü bulunur.

(6) $(y^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklem TDD değildir.

$y^2 dx = \underbrace{y\,dx - x\,dy}$ olarak yazılabildiğinden integral

çarpanı $\frac{1}{y^2}$ alınırsa

$$\frac{y^2 dx}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \Rightarrow dx = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow dx = d\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \int dx = \int d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{x}{y} + c$$

(7) $\cos y \frac{dy}{dx} + 2x - 2x\sin y = 0$ denklemini değişkenlerine ayırarak çözünüz.

Çözüm: $\cos y \frac{dy}{dx} = 2x(\sin y - 1)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x(\sin y - 1)}{\cos y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\cos y}{2x(\sin y - 1)}$$

$$\Rightarrow \int 2x\,dx = \int \frac{\cos y\,dy}{\sin y - 1}$$

$$\Rightarrow x^2 = \ln|\sin y - 1| + c$$

$$\Rightarrow \sin y - 1 = e^{x^2 + c}$$

(8) $\sin x \cos y \, dx + \cos x \sin y \, dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm :
$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} + \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\ln(\cos x) - \ln(\cos y) = -\ln c$$

$$\ln(\cos x) + \ln(\cos y) = \ln c$$

$$\ln(\cos x \cdot \cos y) = \ln c$$

$$\cos x \cdot \cos y = c$$

(9) $(xy + 2x + y + 2)\,dx + (x^2 + x)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm :
$$[y(x+1) + 2(x+1)]dx + [x^2 + x]dy = 0$$

$$(x+1)(y+2)\,dx + (x^2+x)\,dy = 0$$

$$\frac{x+1}{x^2+x} dx + \frac{dy}{y+2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+x} dx + \int \frac{dy}{y+2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left[\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx + \int \frac{dx}{x^2+x} \right] + \int \frac{dy}{y+2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left[\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right. + \int \frac{dy}{y+2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+x) + \ln(x) - \ln(x+1) \right] + \ln(y+2) = \ln c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{(x^2+x) \cdot x \cdot (y+2)}{x+1} = c$$

$$\Rightarrow \quad x^2(y+2) = c$$

10 $(x^2-xy+y^2)\,dx - xy\,dy=0$

homojen dif. denklemini çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{xy} = \dfrac{x}{y} - 1 + \dfrac{y}{x}$ $\left(\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}\right)$

olup denklem homojendir. Dolayısıyla $\boxed{y = vx}$ dönüşümü uygulanırsa, $\left\{ v = \dfrac{y}{x} \right\}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} - 1 + \cancel{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{v\,dv}{1-v}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} - \int\frac{v\,dv}{v-1} = 0$$

$$\int\frac{dx}{x} - \int\frac{v-1+1}{v-1}\,dv = 0$$

$$\int\frac{dx}{x} - \int dv - \int\frac{dv}{v-1} = 0$$

$$\ln x - v - \ln(v-1) = c$$

$$\ln x - \frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y}{x} - 1\right) = c$$

genel çözümü bulunur.

(11) $y\,dx = (x + \sqrt{y^2 - x^2})\,dy$ homojen denk. çözünüz.

Çözüm :
$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{y^2 - x^2}}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{x + \sqrt{y^2 - x^2}}{y}}{\frac{y}{y}} = \frac{\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y^2 - x^2}{y^2}}}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

old. denklem homojendir. $x = uy$ dönüşümü yapılırsa

$\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$ türevi yukarıda yerine yazılırsa

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad u + y\frac{du}{dy} = u + \sqrt{1 - u^2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$\ln y = \arcsin u + \ln c$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = \arcsin\frac{x}{y}$$

$$\frac{y}{c} = e^{\arcsin\frac{x}{y}} \quad \Rightarrow \quad y = c \cdot e^{\arcsin\frac{x}{y}}$$

Not: Bu denklem $y = vx$ dönüşümü yapılarak da çözülebilir. Fakat integral işlemleri uzun süreceği için $x = uy$ dönüşümü tercih edilmiştir.

(12) $y' = \dfrac{2y+x}{x}$ homojen dif. denklemini çözünüz.

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y+x}{x} = 2\dfrac{y}{x}+1$

$y = vx$ dönüşümü yapalım:

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}+1$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = 2v+1$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = v+1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{v+1}$$

$$\Rightarrow \quad \ln x = \ln(v+1) + \ln c_1$$

$$\Rightarrow \quad \ln x = \ln\left(\frac{y}{x}+1\right) + \ln c_1$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\frac{y+x}{x}\right)c_1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = (y+x)\,c_1$$

$$y + x = \frac{x^2}{c_1}$$

$$\Rightarrow \quad y + x = cx^2$$

genel çözümü bulunur.

(13) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2y+6}{2x+y+2}$ homojen dif. denklemini çözünüz.

Çözüm : $\left.\begin{array}{l} a=1, \quad b=-2, \quad c=6 \\ p=2, \quad q=1, \quad r=2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 1.h-2k+6=0 \\ 2h+1.k+2=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} h=-2 \\ k=2 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} x = X'-2 \\ y = Y+2 \end{array}\right\}$ dönüşümü yapalım.

$$\frac{dY}{dX'} = \frac{X'-2-2Y-4+6}{2X'-4+Y+2+2} = \frac{X'-2Y}{2X'+Y} = \frac{1-2\frac{Y}{X'}}{2+\frac{Y}{X'}}$$

$\Rightarrow$ $Y = VX'$ dönüşümü yapılırsa

$$V + X'\frac{dV}{dX'} = \frac{1-2V}{2+V} \Rightarrow X'\frac{dV}{dX'} = \frac{1-4V-V^2}{2+V}$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{dX'}{X'} + \dfrac{2+V}{V^2+4V-1} = 0$ eşitliğinde integral alınırsa

$$\ln X' + \frac{1}{2}\ln\left(V^2+4V-1\right) = \ln c$$

$$\ln X' + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{Y^2}{X'^2} + 4\frac{Y}{X'} - 1\right) = \ln c$$

$$\ln(x+2) + \ln\left(\frac{(y-2)^2}{(x+2)^2} + 4\frac{y-2}{x+2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \ln c$$

$$(x+2)\cdot\sqrt{\frac{(y-2)^2}{(x+2)^2} + 4\frac{y-2}{x+2} - 1} = c$$

genel çözümü bulunur.

(14) $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x-y+1}{3y-x+5}$$ homojen denklemini çözünüz.

Çözüm: $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x-y+1}{-x+3y+5} \Rightarrow \begin{array}{l} a=3, \quad b=-1, \quad c=1 \\ p=-1, \quad q=3, \quad r=5 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3h-k+1=0 \\ -h+3k+5=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} h=-1 \\ k=-2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = X-1 \\ y = Y-2 \end{array}\right\}$$ dönüşümü yapalım:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3X-3-Y+2+1}{3Y-6-X+1+5} = \frac{3X-Y}{3Y-X} = \frac{3-\frac{Y}{X}}{3\frac{Y}{X}-1}$$

$$\Rightarrow V + X\frac{dV}{dX} = \frac{3-V}{3V-1} \Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{(3V-1)\,dV}{3-3V^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dX}{X} + \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{3V-1}{V^2-1}}_{I} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

$$I = \int \frac{3V-1}{V^2-1}\,dV = \int \left(\frac{A}{\underset{(V+1)}{V-1}} + \frac{B}{\underset{(V-1)}{V+1}}\right)dV \Rightarrow A=1, \quad B=2$$ bulunur.

$$\int \frac{dX}{X} + \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{V-1}\,dV + 2\int \frac{dV}{V+1}\right) = \ln C$$

$$\Rightarrow \ln X + \frac{1}{3}\left(\ln(V-1) + 2\ln(V+1)\right) = \ln C$$

$$\Rightarrow \ln\left(X \cdot (V-1)^{\frac{1}{3}} \cdot (V+1)^{2/3}\right) = \ln C$$

$$\Rightarrow \ln\left(X \cdot \left(\frac{Y}{X}-1\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{Y}{X}+1\right)^{2/3}\right) = \ln C$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot\left(\frac{y+2}{x+1}-1\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{y+2}{x+1}+1\right)^{\frac{2}{3}} = C$$

genel çözümü bulunur.

15) $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^3$ denklemini çözünüz (Bernoulli)

Çözüm : Her iki taraf y^{-3} ile çarpılırsa

$$(*) \ldots \boxed{y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x} \Rightarrow \quad v = y^{-2} \text{ dönüşümü yapılırsa}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$ bulunur. Buradan $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dv}{dx}$

olup (*) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} - 2v = -2x$$

lineer denklemine dönüşür. Bunun çözümü ise

$$v = e^{-\int(-2)dx}\left[\int(-2x)\cdot e^{-\int 2dx}\cdot dx + c\right]$$

$$= e^{2x}\left[\int \underbrace{e^{-2x}\cdot(-2x)dx}_{(\text{Kısmi Int.})} + c\right]$$

$$\Rightarrow v = e^{2x}\left(xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c\right)$$

olur. $v = y^{-2}$ olduğuna göre

$$y^{-2} = e^{2x}\left(xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c\right)$$

genel çözümü bulunur.

Not: $\int(-2x)e^{-2x}dx = ?$. $\left\{\begin{array}{ll} u = -2x, & e^{-2x}dx = dv \\ du = -2dx, & -\frac{1}{2}e^{-2x} = v \end{array}\right\}$

$$\int(-2x)e^{-2x}dx = xe^{-2x} - \int e^{-2x}dx = xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

(44)

(16) $dx - 2xy^{-1}dy = x^4 dy$ denkleminı çözünüz. (Bernoulli)

Çözüm: Denklemin her tarafı dy ile bölünürse Bernoulli denklemi elde edilir. Ayrıca denklemin her iki tarafını da x^4 ile bölersek

$$x^{-4}\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x^{-3} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

haline gelir. $v = x^{-3}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dy} = -3x^{-4}\frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad x^{-4}\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{3}\frac{dv}{dy}$$

bulunur. Böylece $(*)$ denklemi

$$-\frac{1}{3}\frac{dv}{dy} - \frac{2}{y}v = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} + \frac{6}{y}v = -3$$

lineer denklemi elde edilir. Buradan

$$v = e^{-\int \frac{6}{y}dy}\cdot\left[\int (-3)\cdot e^{\int \frac{6}{y}dy}\, dy + c\right]$$

$$= e^{-6\ln y}\left[\int -3\, e^{6\ln y}\, dy + c\right]$$

$$= y^{-6}\left[\int y^6(-3)\, dy + c\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^{-3}y^6 = -\frac{3}{7}x^7 + c$$

genel çözümü bulunur.

17) $y' + \frac{2}{x} y = \sqrt{y}$ dif. denklemini çözünüz. (Bernoulli)

Çözüm: Her iki taraf $y^{-\frac{1}{2}}$ ile çarpılırsa

$$(*) \dots \; y^{-\frac{1}{2}} y' + \frac{2}{x} y^{\frac{1}{2}} = 1$$ bulunur. $v = y^{\frac{1}{2}}$ dönüşümü ile

$v' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' \Rightarrow y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' = 2v'$ olacağından (*) denklemde

yerine yazılırsa $2v' + \frac{2}{x} v = 1 \Rightarrow v' + \frac{1}{x} v = \frac{1}{2}$

lineer dif. denklemi elde edilir. Genel çözüm:

$$v = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \frac{1}{2} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right]$$

$$= e^{-\ln x} \left[\int \frac{1}{2} e^{\ln x} dx + c \right] = \frac{1}{x} \left[\int \frac{1}{2} x \, dx + c \right]$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{4} x^2 + c \right] \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{4} x^2 + c \right].$$

18) $xy' (x \sin y + y^{-1}) = 1$ denklemini çözünüz. (Bernoulli)

Çözüm: $x \frac{dy}{dx} (x \sin y + \frac{1}{y}) = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = x^2 \sin y$

denkleminin her iki tarafı da x^{-2} ile çarpılırsa

$x^{-2} \frac{dx}{dy} - \frac{x^{-1}}{y} = \sin y$, $\quad v = x^{-1}$ olsun. $\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$

$\left(\frac{dv}{dy} = -x^{-2} \frac{dx}{dy} \right)$

$$\Rightarrow -\frac{dv}{dy} + \frac{1}{y} v = \sin y$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dy} - \frac{1}{y} v = -\sin y$$ lineer dif. denk. bulunur.

$$\Rightarrow v = e^{-\int -\frac{1}{y} dy} \left[\int -\sin y \, e^{\int -\frac{1}{y} dy} dy + c \right]$$

$$= \frac{1}{y} \left[\int \underbrace{-y \sin y}_{\text{(Kısmi int.)}} dy + c \right] \Rightarrow y x^{-1} = y \cos y - \sin y + c$$

(19) $x^2y' - 2\ln x - e^{2y + \frac{4\ln x}{x}} = 0$ denklemini çözünüz. (Bernoulli)

Çözüm Denklemi $x^2y' - 2\ln x = e^{2y} \cdot e^{\frac{4\ln x}{x}}$ olarak yazalım ve her iki tarafı x^2'ye bölüp daha sonra e^{-2y} ile çarparsak

$$e^{-2y}y' - \frac{2\ln x}{x^2}e^{-2y} = \frac{1}{x^2}e^{\frac{4\ln x}{x}}$$

Bernoulli denklemi elde edilir.

$v = e^{-2y}$ dönüşümü ile $v' = -2e^{-2y} \cdot y'$ olur. Böylece

$$-\frac{v'}{2} - \frac{2\ln x}{x^2}v = \frac{1}{x^2}e^{\frac{4\ln x}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad v' + \frac{4\ln x}{x^2}v = -\frac{2}{x^2}e^{\frac{4\ln x}{x}}$$

lineer dif. denklemi elde edilir. Genel çözüm ile

$$v = e^{-4\int \frac{\ln x}{x^2}dx}\left[\int\left(-\frac{2}{x^2}\right)e^{\frac{4\ln x}{x}} \cdot e^{4\int \frac{\ln x}{x^2}dx}\,dx + c\right]$$

$$= e^{4\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left[\int\left(-\frac{2}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{4\ln x}{x}} \cdot e^{-4\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)}dx + c\right]$$

$$= e^{4\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left[\underbrace{\int\left(-\frac{2}{x^2}\right) \cdot e^{-\frac{4}{x}}dx}\; + c\right]$$

$$\left\{ -\frac{4}{x} = u \Rightarrow \frac{4}{x^2}dx = du \Rightarrow -\frac{2}{x^2}dx = -\frac{du}{2} \right\}$$

$$\left\{ -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^{-4/x} + c \right\}$$

$$= e^{4\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-4/x} + c\right] \quad \text{bulunur.}$$

Not : $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = ?$ Kısmi int. uygularsa $\ln x = u$, $\frac{dx}{x} = du$, $\frac{dx}{x^2} = dv$, $-\frac{1}{x} = v$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = uv - \int v\,du = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{dx}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c = -\left(\frac{\ln x + 1}{x}\right) + c$$

(20) $\frac{dy}{dx}+e^x-3y+e^{-x}\cdot y^2=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=e^x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y=y_1+z=e^x+z$, $\frac{dy}{dx}=e^x+\frac{dz}{dx}$

dönüşümlerini verilen denklemde yerine yazarsak,

$$e^x+\frac{dz}{dx}+e^x-3(e^x+z)+e^{-x}\cdot(e^x+z)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}-z=-e^{-x}\cdot z^2$$

Bernoulli denklemi elde edilir. Bunun için denklemin her iki tarafını z^{-2} ile çarpalım.

$$z^{-2}\frac{dz}{dx}-z^{-1}=-e^{-x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

denklemi elde edilir. Burada $v=z^{-1}$ dönüşümü yapılırsa $\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}=-z^{-2}\frac{dz}{dx}$

ifadesi elde edilir. Buradan

$z^{-2}\frac{dz}{dx}=-\frac{dv}{dx}$ ifadesi ile $v=z^{-1}$

bağıntısı $(*)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-\frac{dv}{dx}-v=-e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}+v=e^{-x}$$ lineer denklemi elde edilir.

Buradan $v=e^{-\int 1dx}\left[\int e^{-x}\cdot e^{\int 1dx}dx+c\right]$

$$\Rightarrow \quad v=e^{-x}(x+c)$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1}=e^{-x}(x+c) \quad \Rightarrow \quad z=e^x/(x+c)$$

$$\Rightarrow \quad y=y_1+z=e^x+\frac{e^x}{x+c}$$ bulunur.

(21) $y' - 2(x-1)y = -y^2 - x^2 + 2x + 1$ Riccati denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x$ ise genel çözümünü bulun. (48)

Çözüm: $y = y_1 + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{u}$, $y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$

dönüşümlerini verilen denklemde yerine yazalım:

$$\left(1 - \frac{u'}{u^2}\right) - (2x-2)\left(x + \frac{1}{u}\right) = -\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{u'}{u^2} + \frac{2}{u} = -\frac{1}{u^2} \quad \Rightarrow \quad u' - 2u = 1$$

lineer denklemi elde edilir. Bunun çözümü

$$u = e^{\int 2dx}\left[\int 1 \cdot e^{-\int 2dx} dx + c\right]$$

$$u = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad y = x + \frac{1}{u} \quad \text{old.} \quad \frac{1}{y-x} = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad y - x = \frac{1}{-\frac{1}{2} + ce^{2x}}$$

$$\Rightarrow \quad y = x + \frac{1}{-\frac{1}{2} + ce^{2x}}$$

genel çözümü bulunur.