İşaret ve Sistemler

Ders 7: Konvolüsyon (Evrişim)

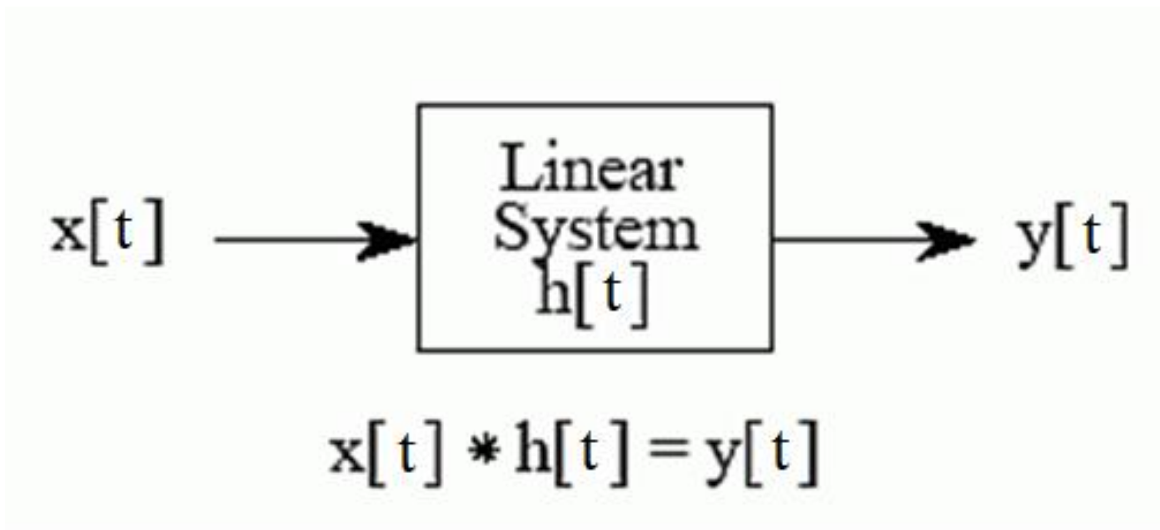
Konvolüsyon (Evrişim)

- Konvolüsyon(convolution) uzun yıllardır bilinen ve uygulanan matematiksel bir işlem olmakla birlikte bu işlemi tanımlamak için matematikte çok çeşitli terimler kullanılmıştır.

- Örneğin; yığışım tümlemesi (superposition integral), tarama (scanning) tümlemesi, Duhamel tümlemesi, yuvarlatma (smoothing) tümlemesi, ağırlıklı ortalama ve katlama (folding) tümlemesi olarak kullanılabilmektedir.

Konvolüsyon nedir?

- Konvolüsyon, birim dürtü yanıtı (h(t)) olarak bilinen bir sistemin, x(t) giriş işaretine karşılık üreteceği y(t) çıkış işaretini zaman domeninde bulmaya yarayan bir işlemdir.



Konvolüsyon nedir?

- Konvolüsyon işlemi * sembolü ile gösterilir ve bir boyutlu sürekli zamanlı konvolüsyon işlemi aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).x(t-\tau)d\tau$$

Konvolüsyon nedir?

- Benzer şekilde ayrık konvolüsyon işlemi;

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).x(n-k)$$

HATIRLATMA

Konvolüsyon işleminin uygulanabilmesi için sistemin lineer ve zamanla değişmeyen olması gerekmektedir.

Sürekli Zaman Fonksiyonlarının Konvolüsyonu

- Zaman sürekli fonksiyonları olan $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ gibi iki fonksiyonun konvolüsyonu matematikte,

$$F^{-1}\left[F_1(f).F_2(f)\right] = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau).\, f_2(t-\tau)d\tau$$

- formülü ile tanımlanır ve konvolüsyon tümlemesi (convolution integral) adı verilir.
- Konvolüsyon (convolved) fonksiyonu da bir zaman fonksiyonudur.

Sürekli Zaman Fonksiyonlarının Konvolüsyonu

- Konvolüsyon simgesel olarak (*) işaretiyle de gösterildiği için f(t) fonksiyonu,

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

biçiminde yazılabilir.

- Konvolüsyona giren $f_1(t)$ fonksiyonunun t=0 zamanından önce tanımlanmamış olması durumunda (causal-nedensel) integralin alt sınırı sıfır değerinden başlar ve aşağıdaki bağıntıyla gösterilir.

$$f(t) = \int_0^{\infty} f_1(\tau).\, f_2(t-\tau)\,d\tau$$

Sürekli Zaman Fonksiyonlarının Konvolüsyonu

- $f_2(t-\tau)$ fonksiyonunun da t=0 zamanından önce tanımlanmamış olması durumunda konvolüsyon integralinin üst sınırı t değerini alacaktır. Dolayısıyla ifade aşağıdaki yeni halini alacaktır.

$$f(t)=\int_0^t f_1(\tau).\, f_2(t-\tau)d\tau$$

Konvolüsyon Özellikleri

1. **Değişme Özelliği:**

$$m_1(t)*m_2(t)=m_2(t)*m_1(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_1(\tau).m_2(t-\tau)d\tau \Rightarrow \int_{\infty}^{-\infty} m_1(t-u).m_2(u)(-du)$$

$$u=t-\tau \Rightarrow \tau=t-u$$

$$du=-d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_1(t-u).m_2(u)du=m_2(t)*m_1(t)$$

Konvolüsyon Özellikleri

2. **Dağılma Özelliği:**

$$m_1(t)*\left[m_2(t)+m_3(t)\right]=m_1(t)*m_2(t)+m_1(t)*m_3(t)$$

3. **Birleşme Özelliği:**

$$m_1(t)*\left[m_2(t)*m_3(t)\right]=\left[m_1(t)*m_2(t)\right]*m_3(t)$$

4. **Lineerlik Özelliği:**

$$a.m_1(t)*m_2(t)=a\left[m_1(t)*m_2(t)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a.m_1(\tau).m_2(t-\tau)d\tau = a\int_{-\infty}^{\infty} m_1(\tau).m_2(t-\tau)d\tau$$

$$=a\left[m_1(t)*m_2(t)\right]$$

Konvolüsyonun Özellikleri

- Konvolüsyonun diğer bir özelliği, birim dürtü işareti ile herhangi bir işaretin konvolüsyonunun işaretin kendisini vermesidir:

$$m_1(t)*\delta(t)=m_1(t)$$

$$m_1(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}m_1(\tau).\delta(t-\tau)d\tau$$

$$\int_{0}^{t}m_1(\tau).\delta(t-\tau)d\tau=m_1(t)$$

Konvolüsyon İntegrali

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

Konvolüsyon işlemi 4 adımdan oluşmaktadır.

1. h(t) dürtü tepkisi zamana göre ters çevrilerek h(-t) elde edilir. Daha sonra t parametreli, τ'nun bir fonksiyonu olan, *h(t-τ)* oluşturmak için t birim kaydırılır.
2. t parametresi sabit tutularak x(τ) ve h(t- τ) sinyalleri, τ'nun tüm değerleri ile çarpılır.
3. y(t) çıkışının tek bir değerini üretmek için x(τ).h(t-τ) çarpımı tüm τ değerleri için hesaplanır.
4. y(t) çıkışının tüm değerlerini üretmek için τ'nun -∞'dan +∞'a kadar olan değerleri ile 1-3 adımları tekrarlanır.

Konvolüsyon Toplamı

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ toplamı konvolüsyon veya süperpozisyon toplamı olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

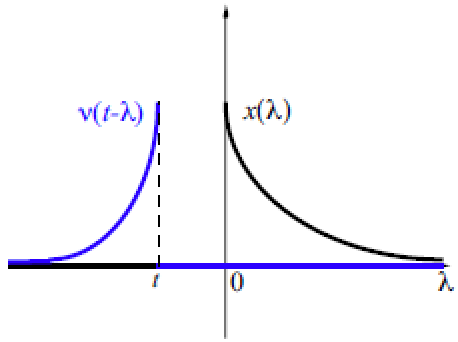
- *Konvolüsyon:* h[k]'yı ters çevirir, n'nin her bir değeri için h[k]'yı öteleyerek x[n] sinyalinden geçirilir.

Ayrık Zamanlı Doğrusal Sistem

Konvolüsyon Örnek 1

$$x(t) = e^{-t}u(t),\ \nu(t) = e^{-2t}u(t).$$

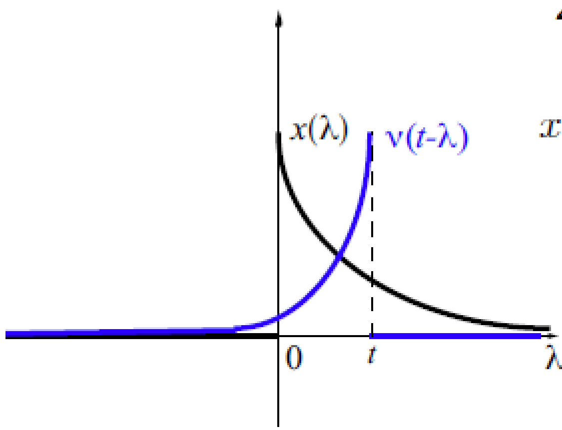
$$\nu(t-\lambda) = e^{2(\lambda - t)}u(t-\lambda).$$



1.Durum: $t < 0$

$$x(\lambda)\nu(t-\lambda) = 0,\ x(t) \star \nu(t) = 0, \qquad t < 0$$

2.Durum: $t \geq 0$

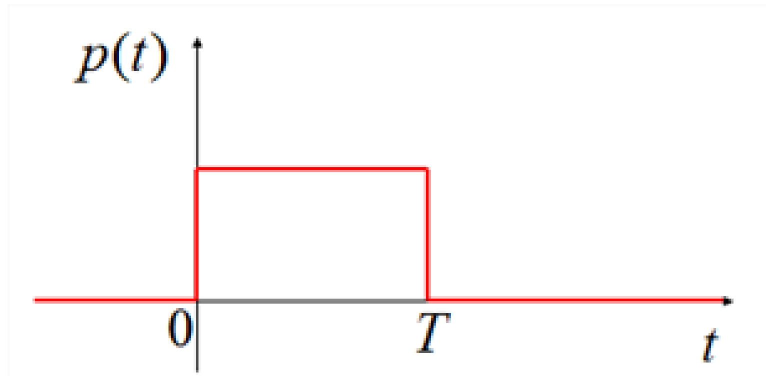


$$\begin{aligned} x(t) \star \nu(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda}u(\lambda)e^{2(\lambda-t)}u(t-\lambda)d\lambda \\ &= \int_0^t e^{-\lambda}e^{2(\lambda-t)}d\lambda \\ &= e^{-2t}\left[e^{\lambda}\right]_0^t \\ &= e^{-t} - e^{-2t}, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

Sonuç Olarak $x(t) \star \nu(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t).$

Konvolüsyon Örnek 2

- Aşağıdaki şekilde gösterilen p(t) birim darbe işareti için x(t)=h(t)= p(t) olduğunu varsayarsak,



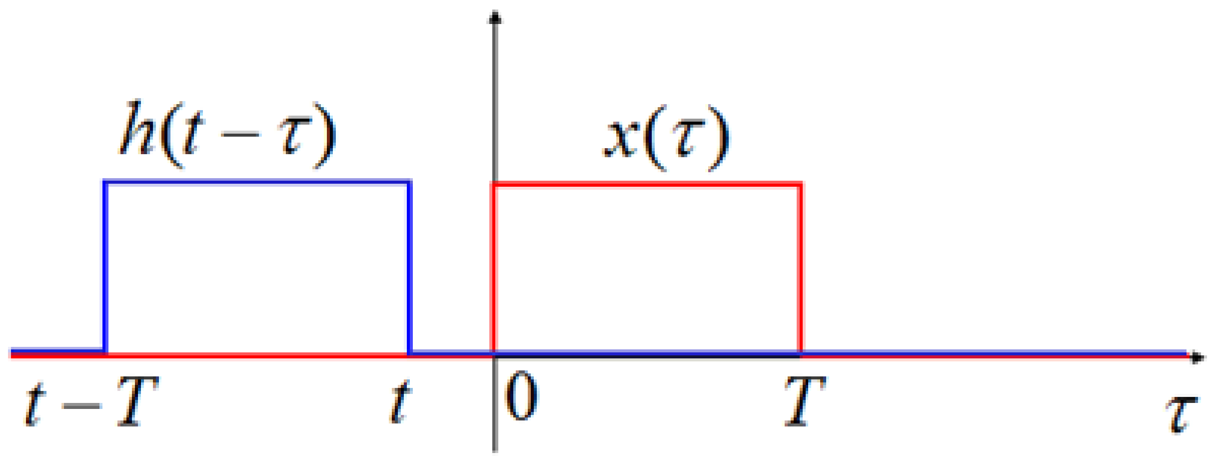
- Konvolüsyon integralinin hesabı dört adımda yapılmaktadır.

$$y(t) = x(t) * h(t) = p(t) * p(t)$$

Konvolüsyon Örnek 2

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

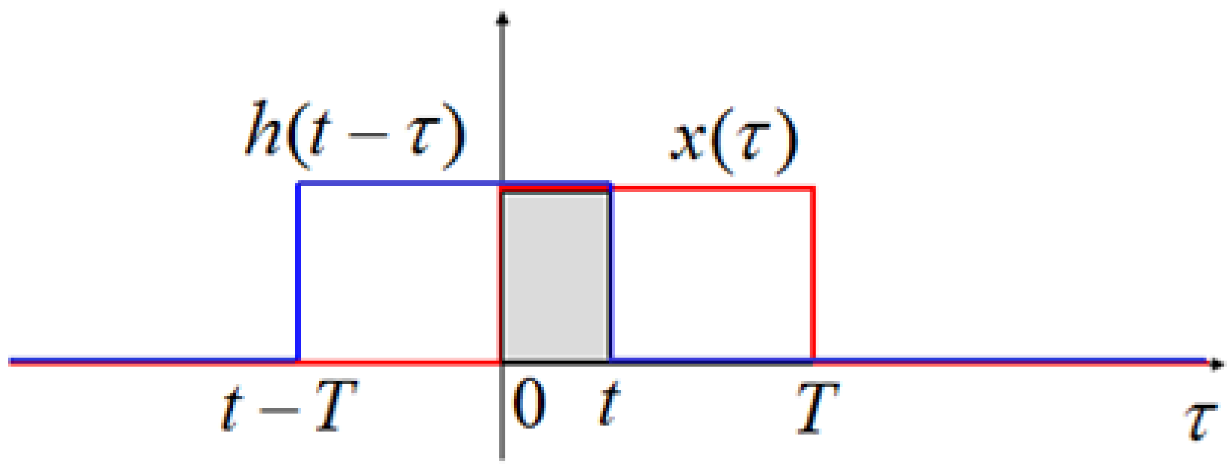
- Case 1: $t \leq 0$



$$y(t) = 0$$

Konvolüsyon Örnek 2

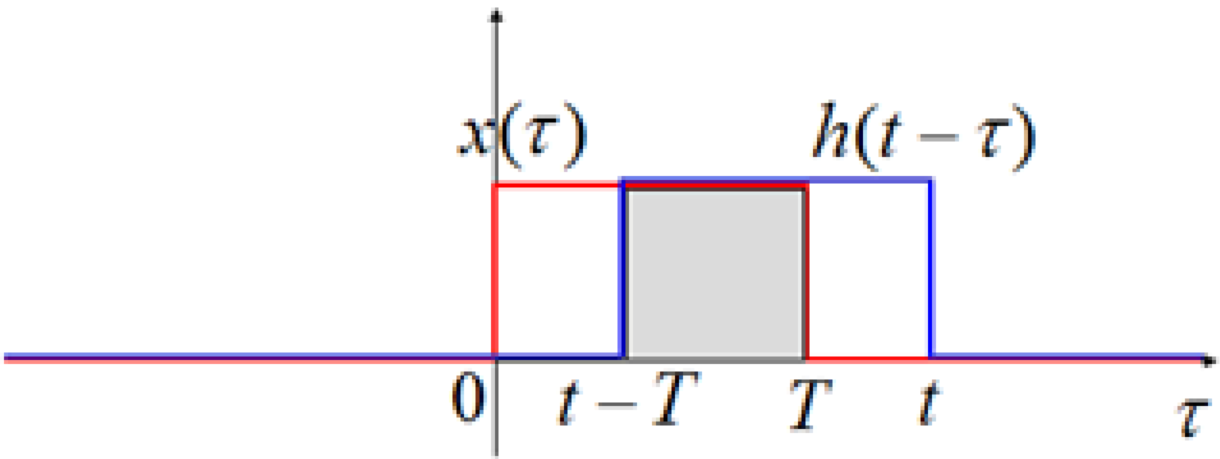
- Case 2: $0 \leq t \leq T$



$$y(t) = \int_0^t d\tau = t$$

Konvolüsyon Örnek 2

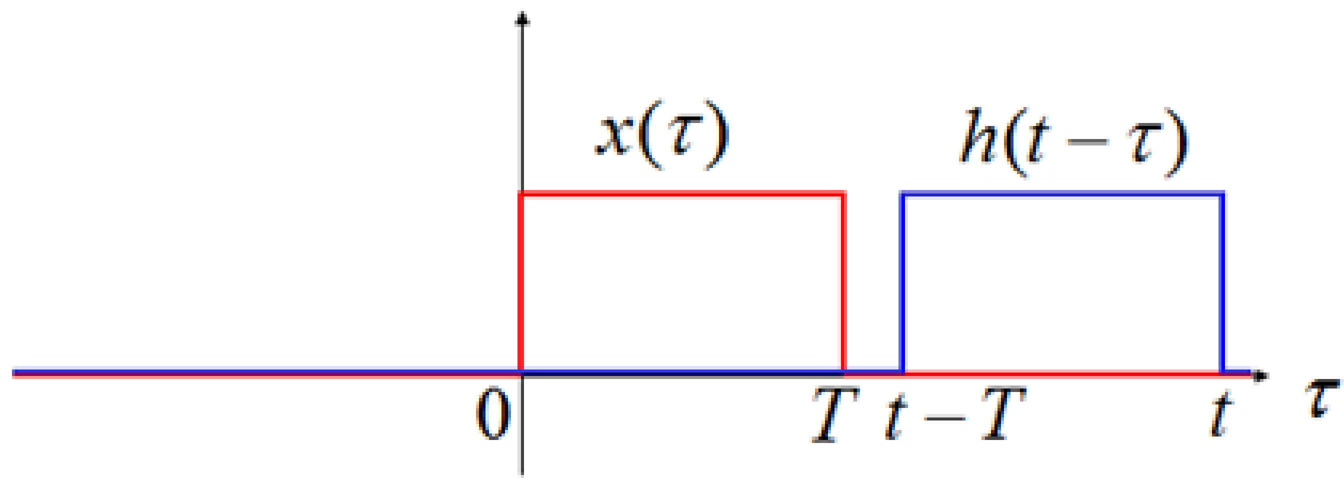
- Case 3: $0 \le t - T \le T \quad \rightarrow \quad T \le t \le 2T$



$$y(t) = \int_{t-T}^{T} d\tau = T - (t - T) = 2T - t$$

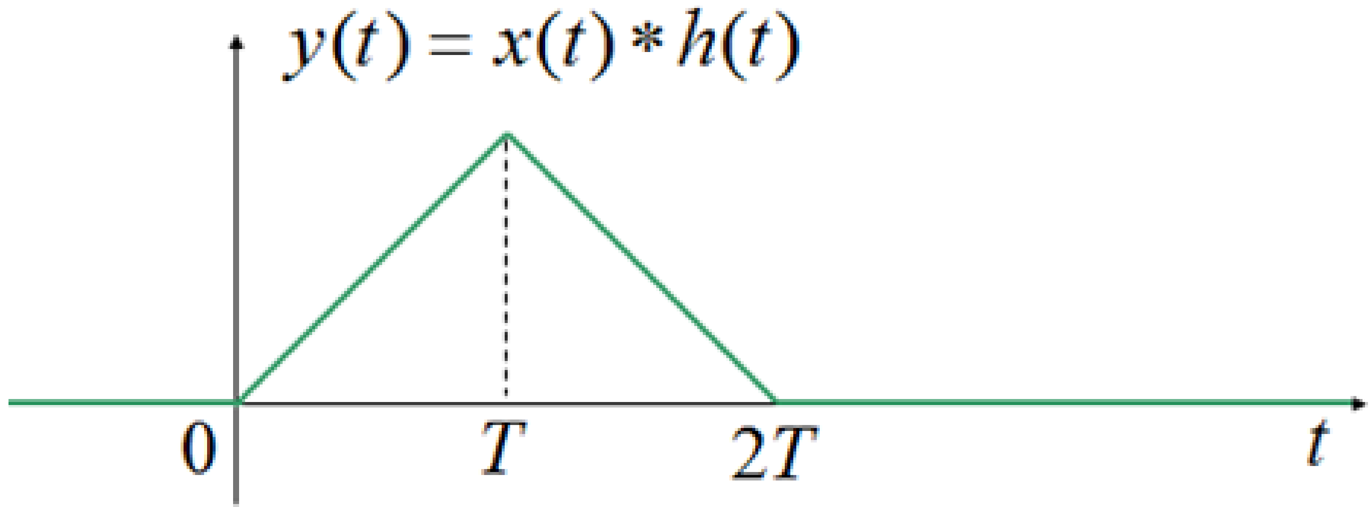
Konvolüsyon Örnek 2

- Case 4: $T \le t - T \quad \rightarrow \quad 2T \le t$



$$y(t) = 0$$

Konvolüsyon Örnek 2

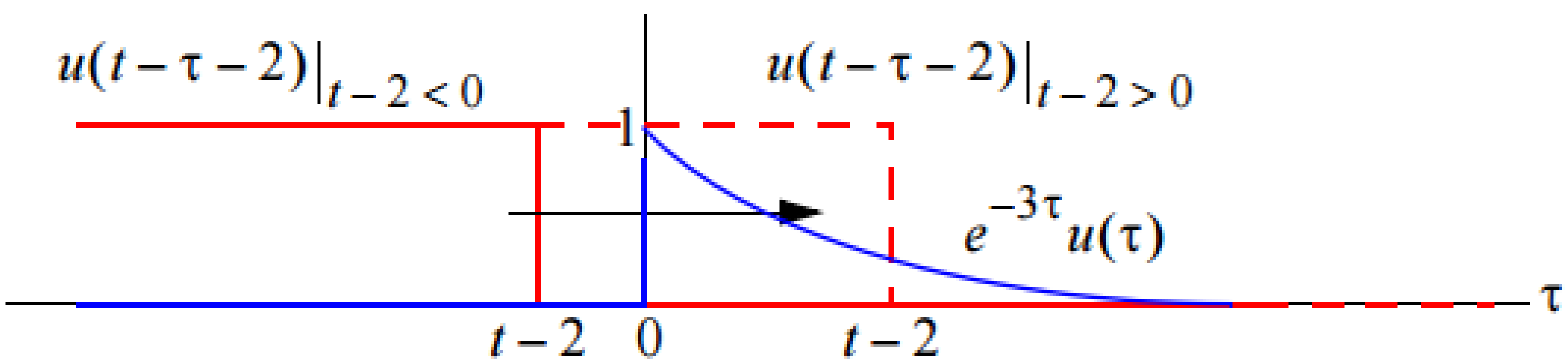


Konvolüsyon Örnek 3

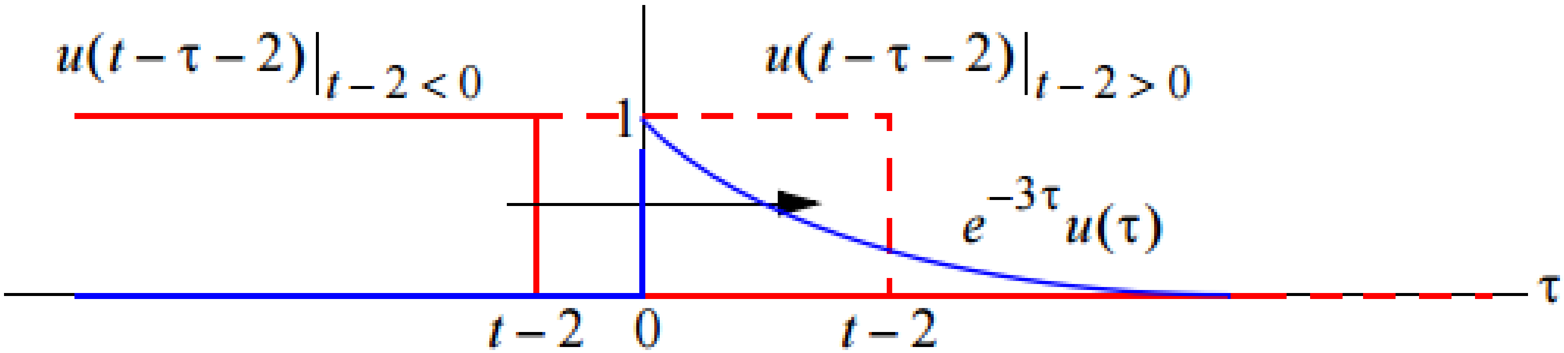
$x(t) = u(t-2) \quad h(t) = e^{-3t}u(t)$

$y(t) = x(t) * h(t)$ hesaplayınız.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau}u(\tau)u(t-\tau-2)d\tau$$



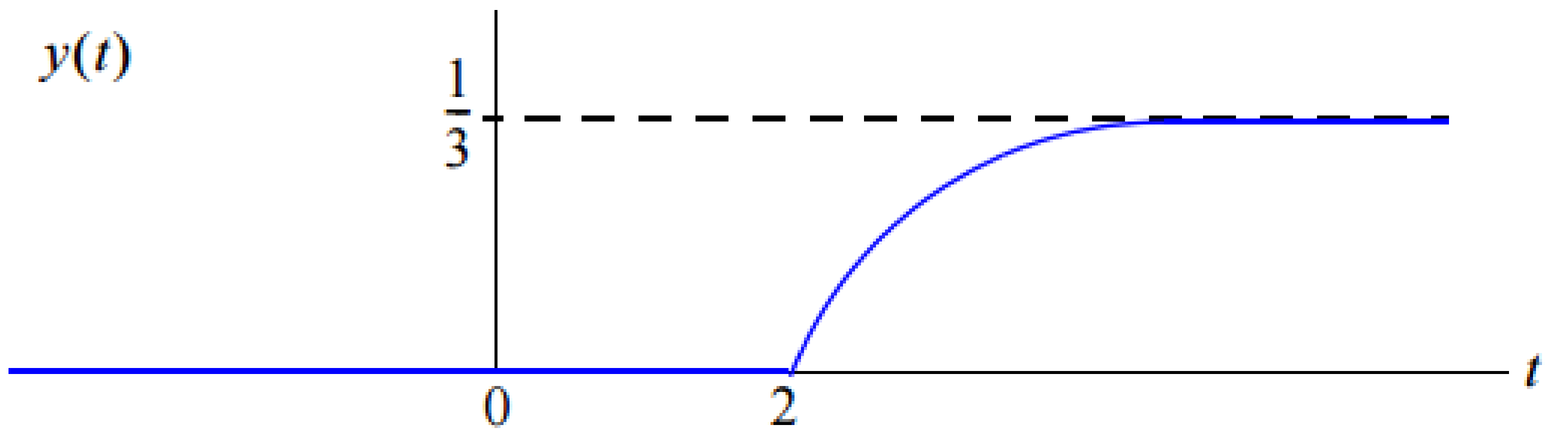
Konvolüsyon Örnek 3



$$y(t) = \int_0^{t-2} e^{-3\tau} d\tau$$

$$= \frac{e^{-3\tau}}{-3}\Bigg|_0^{t-2} \qquad = \frac{1}{3}[1-e^{-3(t-2)}]u(t-2)$$

Konvolüsyon Örnek 3

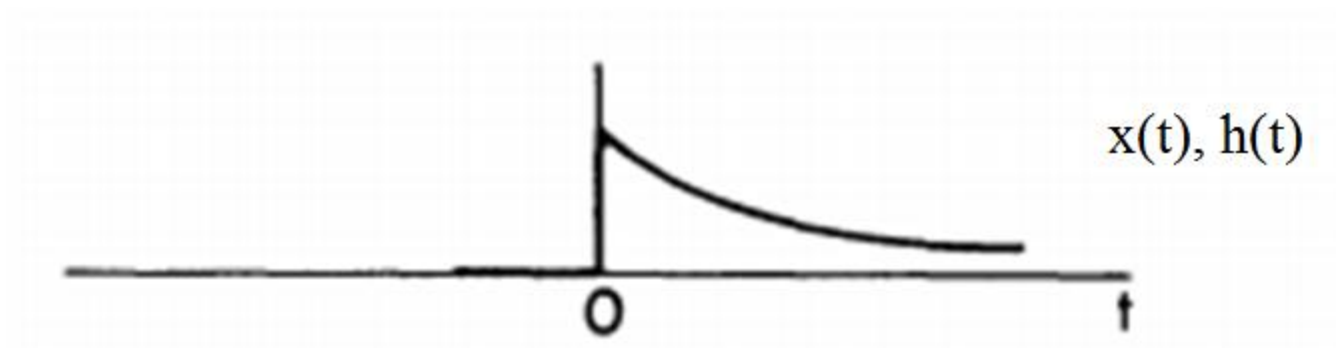


$$y(t) = \int_0^{t-2} e^{-3\tau} d\tau = \frac{1}{3}[1 - e^{-3(t-2)}]u(t-2)$$

Konvolüsyon Örnek 4

$x(t) = e^{-at}u(t) \quad h(t) = e^{-bt}u(t)$

$y(t) = x(t) * h(t)$ hesaplayınız.



Konvolüsyon Örnek 4

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau)e^{-b(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

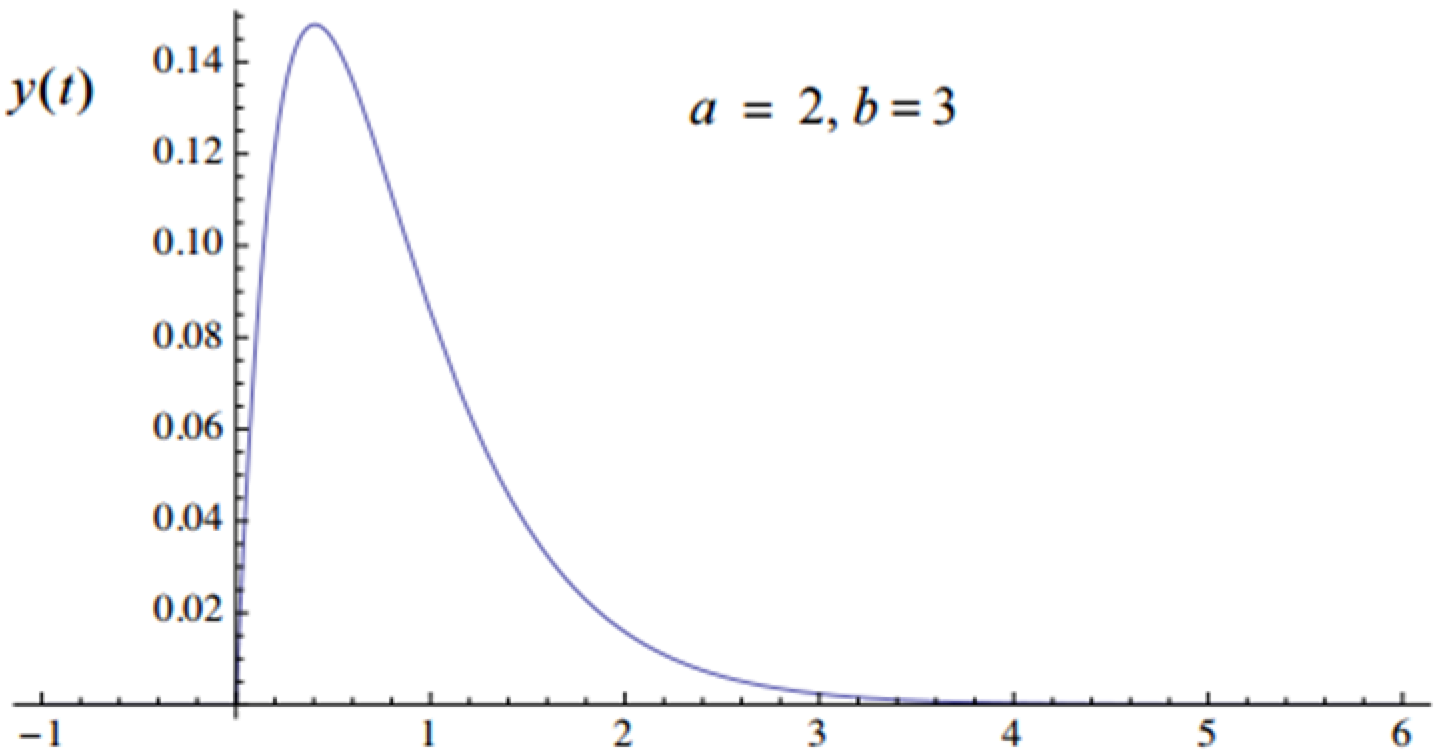
$$= \int_{0}^{t} e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}d\tau$$

$$= e^{-bt}\int_{0}^{t} e^{-(a-b)\tau}d\tau$$

$$= e^{-bt} \cdot \left.\frac{e^{-(a-b)\tau}}{-(a-b)}\right|_{0}^{t} = \frac{e^{-bt}}{a-b}[1-e^{-(a-b)t}]u(t)$$

$$= \frac{1}{a-b}[e^{-bt}-e^{-at}]u(t), a \neq b$$

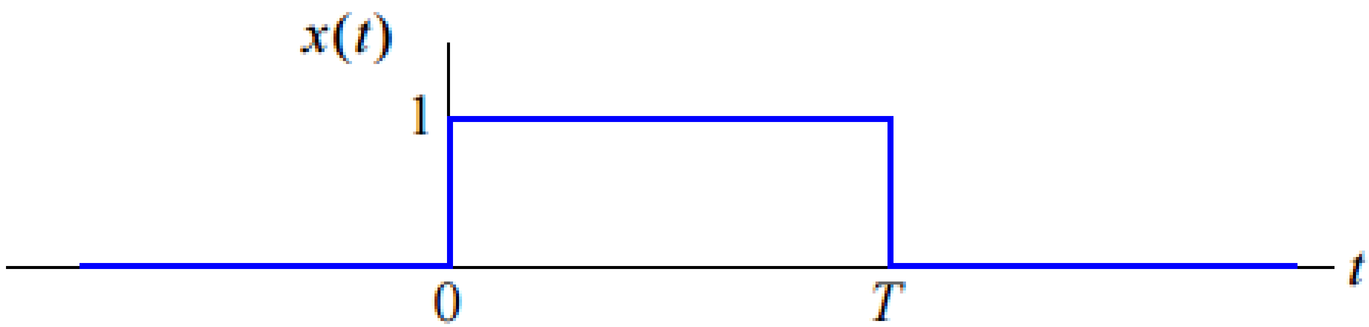
Konvolüsyon Örnek 4



Konvolüsyon Örnek 5

$$x(t) = u(t) - u(t-T) \qquad h(t) = e^{-at}u(t)$$

$y(t) = x(t) * h(t)$ hesaplayınız.



Konvolüsyon Örnek 5

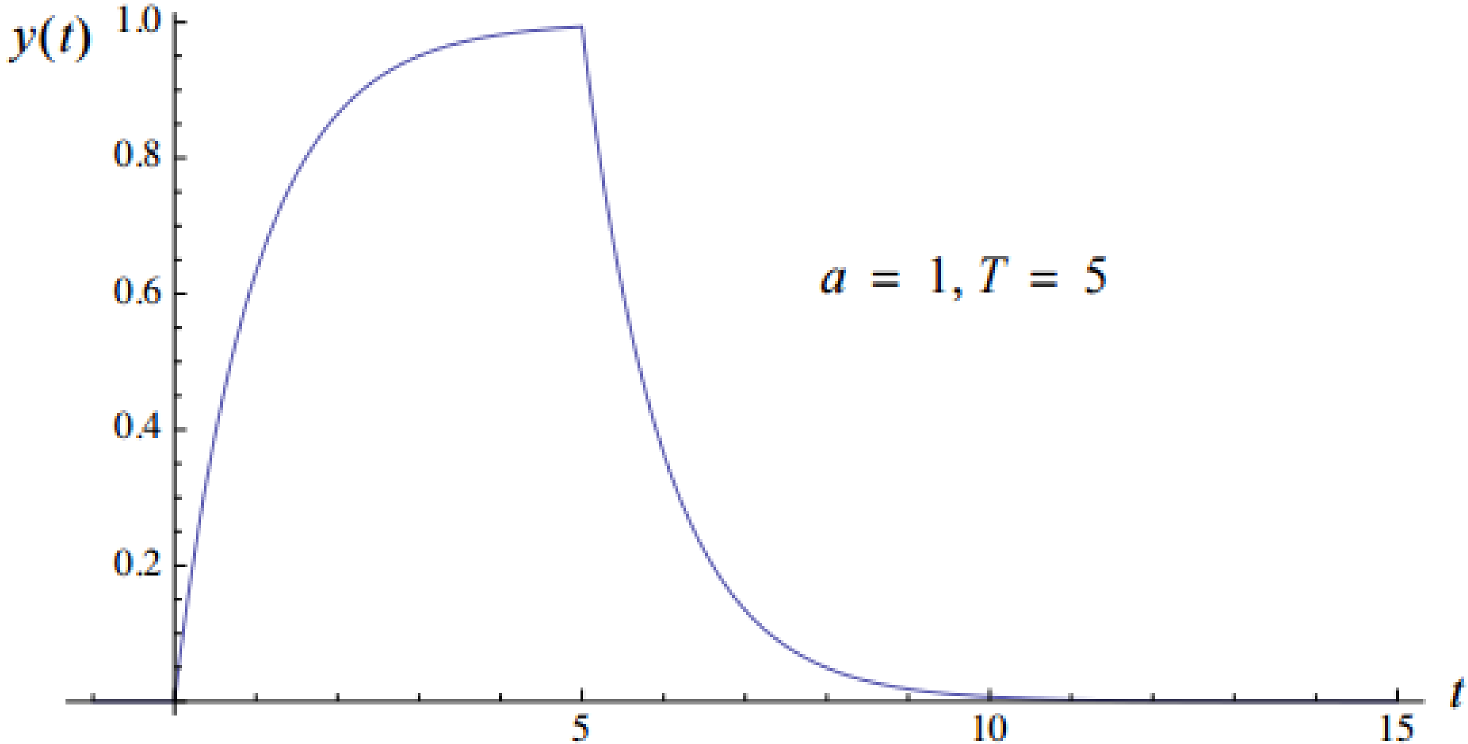
$$y(t) = x(t)*h(t) \qquad x(t) = u(t) - u(t-T)$$

$$y(t) = u(t)*h(t) - u(t-T)*h(t)$$

$$u(t)*h(t) = \frac{1}{a}[1-e^{-at}]u(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a}[1-e^{-at}]u(t) - \frac{1}{a}[1-e^{-a(t-T)}]u(t-T)$$

Konvolüsyon Örnek 5



Frekansta Konvolüsyon

$$M_1(f)*M_2(f)=M_2(f)*M_1(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_1(\lambda).M_2(f-\lambda)d\lambda \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} M_1(f-\lambda).M_2(f)d\lambda$$

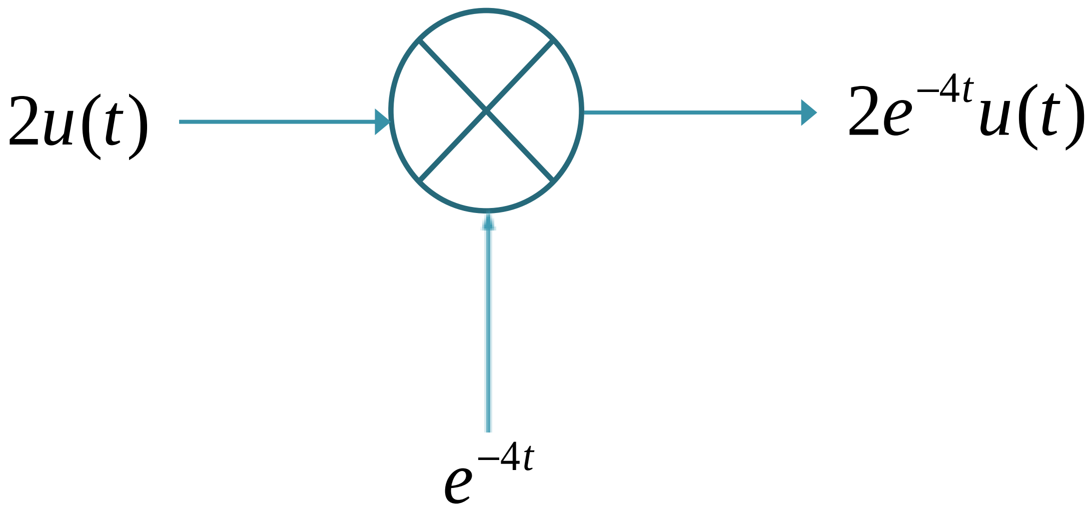
FREKANSTA KONVOLÜSYON ZAMANDA ÇARPIM ZAMANDA KONVOLÜSYON FREKANSTA ÇARPIM İŞLEMİ DEMEKTİR.

$$m_1(t)*m_2(t) \xleftrightarrow{F} M_1(f).M_2(f)$$

$$M_1(f)*M_2(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} m_1(t).m_2(t)$$

Konvolüsyon Örnek 6

$$m(t) = 2e^{-4t}u(t) \Rightarrow M(f) = ?$$



$$M_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}.e^{-jwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f+\frac{2}{j\pi})t}dt = \delta\left(f + \frac{2}{j\pi}\right)$$

Konvolüsyon Örnek 6

$$M_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} 2u(t)e^{-jwt}dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-jwt}dt = \frac{2}{jw}$$

$$m(t) = 2e^{-4t}u(t) \Rightarrow M(f) = M_1(f) * M_2(f)$$

$$M_1(f) * M_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} M_1(\lambda).M_2(f-\lambda)d\lambda$$

$$M_2(f) * M_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j2\pi\lambda}.\delta(f-\lambda+\frac{2}{j\pi})d\lambda$$

Konvolüsyon Örnek 6

$$M(f) = \left(\frac{2}{jw}\right) * \left(\delta\left(f + \frac{2}{j\pi}\right)\right) = \frac{2}{j2\pi\left(f + \frac{2}{j\pi}\right)}$$

$$M(f) = \frac{2}{j2\pi f + 4} = \frac{2}{4 + jw}$$

Hatırlatma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \delta(t) = \delta(-t)$$

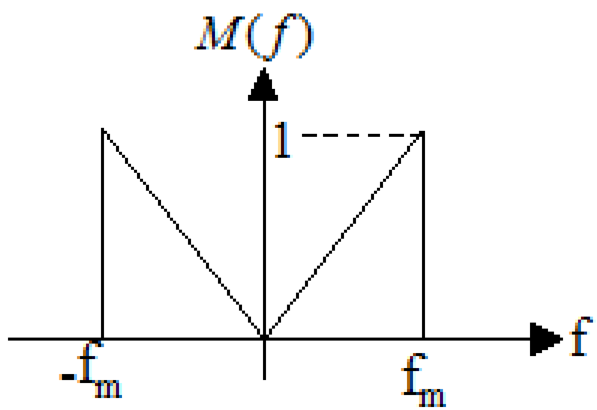
$$M(f).F\left[\delta(t)\right] = M(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp jwt}dt = \delta(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp jwt}df = \delta(t)$$

Konvolüsyon Örnek 7

m(t) işaretinin spektrumu aşağıdaki şekilde verilmiştir.
$v(t) = m(t).Cosw_0t$ 'nin spektrumunu bulunuz.



$$Cosw_0t = \frac{1}{2}(e^{jw_0t} + e^{-jw_0t})$$

Konvolüsyon Örnek 7

$$v(t) = m(t)\cos w_0 t \Rightarrow V(f) = M(f) * F[\cos w_0 t]$$

$$F[\cos w_0 t] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos w_0 t . e^{-jwt} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}\right). e^{-jwt} dt$$

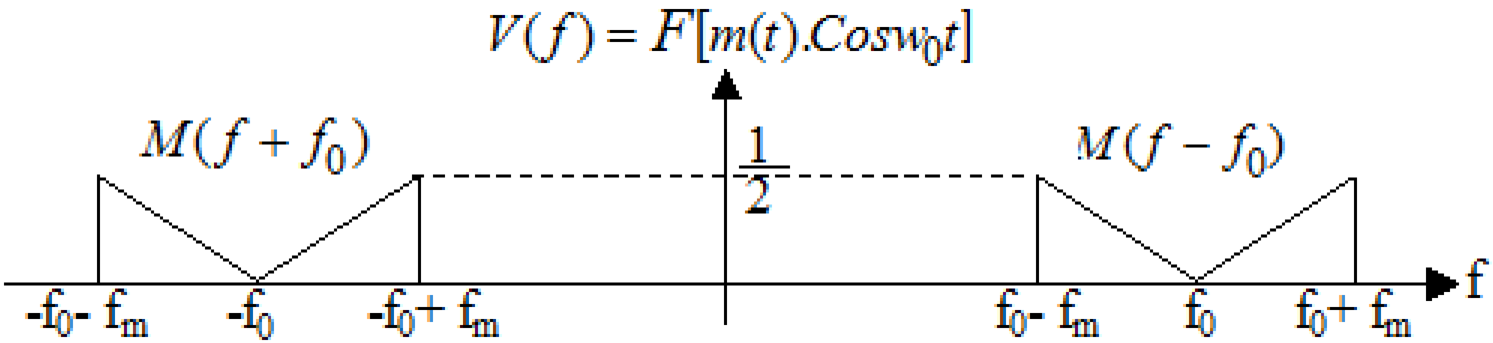
$$F[\cos w_0 t] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-j2\pi(f-f_0)t} + e^{-j2\pi(f+f_0)t}\right) dt$$

$$F[\cos w_0 t] = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$V(f) = M(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$V(f) = \frac{1}{2}[M(f - f_0) + M(f + f_0)]$$

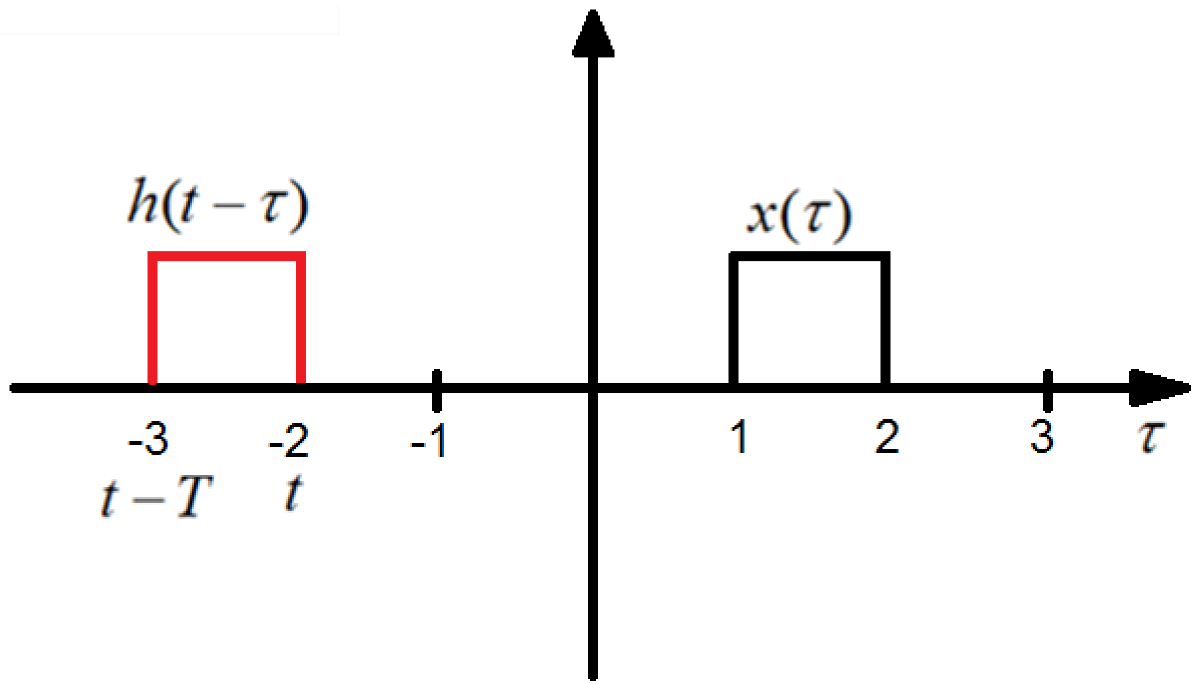
Konvolüsyon Örnek 7



$$V(f) = \frac{1}{2}\left[M(f - f_0) + M(f + f_0)\right]$$

Çalışma Sorusu

$$x(t) = h(t) = \prod(t - 1.5) \Rightarrow x(t) * h(t) = ?$$



$y(t) = 0$