Dif. Denklemin Teşkili (Keyfi Sabitlerin Elimine Edilmesi).

n. mertebeden bir adi dif. denklem

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

şeklinde olup genel çözümü

$$y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \qquad (2)$$

biçimindedir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ ler keyfi sabitler olup, (2)'nin x'e göre n-defa türevi alınarak elde edilen (n+1)-bağıntıdan n-tane sabitin yok edilmesiyle verilen fonksiyonu çözüm kabul eden dif. denklem bulunur.

__Örnek.__ $y \cdot (\ln|x^2-1| + c) = 1$ fonksiyonunun sağladığı dif. denklemi bulu.

$$y' \cdot \underbrace{(\ln|x^2-1| + c)}_{1/y} + \frac{2x}{x^2-1} y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} + \frac{2x}{x^2-1} y = 0 \text{ veya } \frac{y'}{y^2} + \frac{2x}{x^2-1} = 0$$

dif. denklemi elde edilir.

__Örnek.__ Merkezi ox-ekseni üzerinde bulunan r yarıçaplı dairelerin denklemi hangi dif. denklemi sağlar.

$$(x-c)^2 + y^2 = r^2 \qquad (3)$$

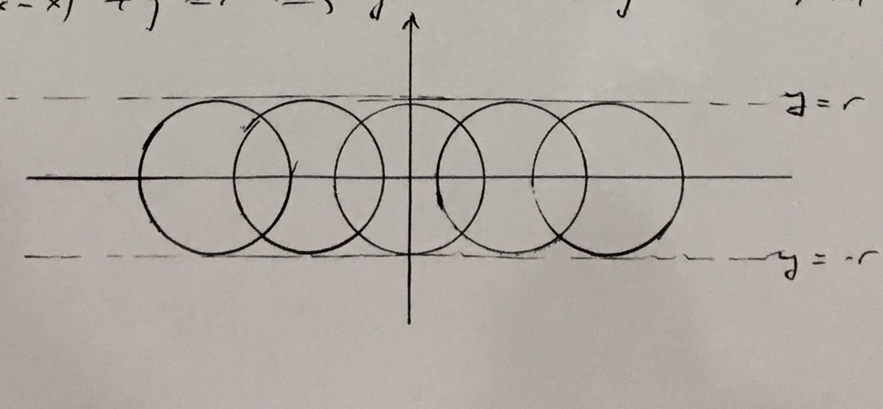
$2(x-c) + 2yy' = 0 \Rightarrow (x-c) = -yy'$ olur. (3)'de yerine yazılırsa

$(-yy')^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2y'^2 + y^2 = r^2$ dif. denklemi elde edilir.

Tekil çöz. bulmak için parametreye göre türev alınır.

$(x-c)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow -2(x-c) = 0 \Rightarrow c = x$

$(x-x)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm r$ tekil çözümdür (zarf eğriler



Örnek. Yarıçapı 1 ve merkezi $y=x$ doğrusu üzerinde bulunan tüm çemberlerin dif. denklemini yazın.

$$(x-c)^2+(y-c)^2=1 \qquad (4)$$

$$2(x-c)+2(y-c)\cdot y'=0 \Rightarrow x+yy'=c(1+y')$$

$$\Rightarrow c=\frac{x+yy'}{1+y'}$$

olur. (4)'te yerine yazarsak

$$\left[x-\left(\frac{x+yy'}{1+y'}\right)\right]^2+\left[y-\left(\frac{x+yy'}{1+y'}\right)\right]^2=1$$

$$[y'(x-y)]^2+(y-x)^2=(1+y')^2 \Rightarrow (y-x)^2(1+y'^2)=(1+y')^2$$

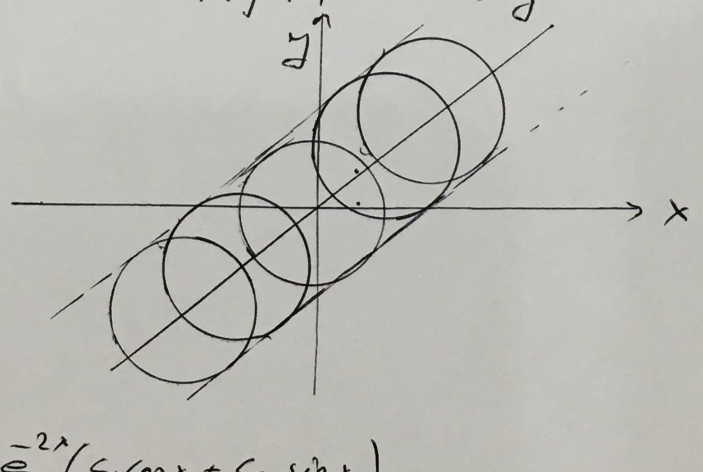
elde edilir.

Tekil çözümü bulmak için

$$(x-c)^2+(y-c)^2=1 \Rightarrow -2(x-c)-2(y-c)=0 \Rightarrow c=\frac{x+y}{2} \text{ yerine yaz}$$

$$\left[x-\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2=1 \Rightarrow (x-y)^2+(y-x)^2=4$$

$$\Rightarrow (y-x)^2=2 \Rightarrow y=x\pm\sqrt{2} \text{ tek. çöz. (zarf eğrileri)}$$



Örnek. $y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

fonksiyonunda c_1, c_2 sabitlerini elimine ederek verilen fonksiyonu çözüm kabul eden dif. denklemi bulun.

$$y'=-2\underbrace{e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)}_{y}+e^{-2x}(-c_1\sin x+c_2\cos x)$$

$$y''=-2y'-2\underbrace{e^{-2x}(-c_1\sin x+c_2\cos x)}_{y'+2y}+\underbrace{e^{-2x}(-c_1\cos x-c_2\sin x)}_{-y}$$

$y''+4y'+5y=0$ dif. denklemi elde edilir.

Örnek. $y = c_1 x + c_2(x^2-1) + x^2$

fonksiyonunda c_1, c_2 sabitlerini elimine ederek verilen fonksiyonu çözüm kabul eden dif. denklemi bulun.

$$y' = c_1 + 2xc_2 + 2x$$

$$y'' = 2c_2 + 2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}y'' - 1$$

$$y' = c_1 + 2x\left(\frac{1}{2}y'' - 1\right) + 2x$$

$$y' = c_1 + xy'' \Rightarrow c_1 = -xy'' + y'$$, yerine yazarak

$$y = -x^2 y'' + xy' + \frac{x^2}{2}y'' - x^2 - \frac{1}{2}y'' + 1 + x^2$$

$$y = -\frac{x^2}{2}y'' - \frac{1}{2}y'' + xy' + 1$$

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 2$$ elde edilir.

Örnek. $y = \sin x - 1 + c.e^{-\sin x}$

fonksiyonunda c sabitini elimine ederek verilen fonksiyonu çözüm kabul eden dif. denklemi bulun.

$$y' = \cos x - c.\cos x\, e^{-\sin x}$$

$$\cos x / \; y = \sin x - 1 + c.e^{-\sin x}$$

$$y' + y\cos x = \cos x . \sin x$$

$$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$ elde edilir.

Örnek. $y = c_1 \sin\alpha x + c_2\cos\alpha x$

fonksiyonunun çözüm kabul eden dif. denklemi bulunuz.

$$y' = \alpha c_1 \cos\alpha x - \alpha c_2 \sin\alpha x \Rightarrow y'' = -\alpha^2 c_1 \sin\alpha x - \alpha^2 c_2 \cos\alpha x$$

$$\alpha^2 / \; y = c_1 \sin\alpha x + c_2 \cos\alpha x$$

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

dif. denklemi elde edilir.