Not. Konvolüsyon işleminin değişme, birleşme ve dağılma özellikleri vardır.

Teorem. Verilmiş bir $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $e^{\alpha x}$ tipinde üstel mertebeden fonksiyon ve ikisi de her bir $[a,b]$ aralığında parçalı sürekli iseler $s>\alpha$ için bu fonksiyonların konvolüsyonunun Laplace dönüşümü, her birinin Laplace dönüşümünün çarpımına, yani

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{g\}$$

ye eşittir.

Ters Laplace Dönüşümü.

$f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ yani

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$$

olsun. $f(x)$ fonksiyonuna, $F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü denir ve

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

ile gösterilir.

Örneğin

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos x = f(x)$$

dir.

Ters Laplace Dönüşümünün Özellikleri.

1-) Lineerlik özelliği:

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}+c_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

dir.

2-) Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ ise

$$\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{\alpha}\right)\right\} = f(\alpha x)$$

sağlanır.

3-) Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^x f(t)\,dt$$

olur.

4-) Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ ise
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax}f(x)$$
sağlanır.

5-) Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ ise
$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s\tau}F(s)\} = f(x-\tau)$$
sağlanır.

6-) Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ ise
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\right\} = (-1)^n x^n f(x)$$
sağlanır.

7-) Eğer $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ve $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$ ise
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = \int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$
sağlanır.

Örnek. Verilmiş $F(s) = \dfrac{1}{s^2+2}$
fonksiyonunun ters Laplace dön. bulunuz.
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x$$
bulunur.

Örnek. Verilmiş $F(s) = \dfrac{4}{s^2+2s-3}$
fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü hesaplayınız.
$$\underset{(1)}{\frac{4}{(s-1)(s+3)}} = \underset{(s+3)}{\frac{A}{s-1}} + \underset{(s-1)}{\frac{B}{s+3}} \Rightarrow 4 = As+3A+Bs-B \qquad \begin{array}{r} 3A-B=4 \\ A+B=0 \\ \hline A=1,\ B=-1 \end{array}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+2s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+3}\right\}$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$
$$= e^{x} - e^{-3x}$$
elde edilir.

Örnek. Verilmiş
$$F(s)=\frac{1}{s^2-2s+5}$$
fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü hesaplayın
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}e^{x}\sin 2x$$
bulunur.

Örnek. Verilmiş $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$
fonksiyonunun ters Laplace dön. hesaplayınız.
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right\}$$
yazılır. Buradan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin x$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos x$
olduğundan 7. özellik yardımıyla
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=\int_0^x \sin z\cos(x-z)\,dz$$
$$=\frac{1}{2}x\sin x$$
elde edilir.

Veya, $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\}$$ 6. özellikten
$$=-\frac{1}{2}(-1)^1x^1\sin x$$
$$=\frac{1}{2}x\sin x$$
bulunur.

Örnek. $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=?$

$$\underset{(1)}{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}}=\underset{(s^2+1)}{\frac{A}{s+1}}+\underset{(s+1)}{\frac{Bs+C}{s^2+1}}$$ $A=1/2$, $B=-1/2$, $C=1/2$ olur.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$$
olur.

Örnek. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\cdot(s^2+4)}\right\}$ ü konvolüsyon ile hesaplayınız

$F(s)=\frac{1}{s}$, $G(s)=\frac{1}{s^2+4}$ old. $f(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ dir.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\cdot(s^2+4)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}=g(x)*f(x) \quad \text{(değ. öz. var)}$$

$$=\int_0^x g(z)f(x-z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x(\sin 2z)(1)\,dz$$

$$=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)$$

olur.

Örnek. $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2+4}$ ise $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = ?$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2x$$

ve 5. özellikten $(c=2)$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2\cdot(x-2) \qquad (x>2)$$

elde edilir.

Laplace Dönüşümü Yardımıyla Lineer Dif. Denklemlerin Çözümü

Türevlerin Laplace dön. için verilen

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^n \mathcal{L}\{y\} - s^{n-1}y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \qquad (2)$$

formülü, y nin Laplace dönüşümüne ve $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ fonksiyonlarının $x=0$ daki değerlerine bağlı olduğundan, Laplace dönüşümleri özellikle sabit katsayılı lineer dif. denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılabilir.

İkinci mertebeden

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = Q(x) \qquad (3)$$

$$y(0) = y_0 \;,\; y'(0) = y_0' \qquad (4)$$

başlangıç-değer problemini ele alalım. Burada a_0, a_1, a_2, y_0 ve y_0' sabitler. Denklemin her iki tarafına Lap. dön. uygulanırsak

$$a_0 \mathcal{L}\{y''\} + a_1 \mathcal{L}\{y'\} + a_2 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{Q(x)\}$$

yazılabilir. (2) formülü ve (4) başlangıç şartları yardımıyla

$$a_0[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy_0 - y_0'] + a_1[s\mathcal{L}\{y\} - y_0] + a_2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{Q(x)\}$$

$\mathcal{L}\{y\}$'ye göre ~~lineer dif.~~ cebirsel bir denklem elde edilir ve $\mathcal{L}\{y\}$'ye göre çözülerek ters Laplace dönüşümü yardımıyla $y(x)$ çözümü elde edilir.

Örnek. $y' + y = x \;,\; y(0) = 1$ problemini çözün.

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{x\}$$

$$s\mathcal{L}\{y\} - 1 + \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow (s+1)\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2\cdot(s+1)} + \frac{1}{s+1}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} \Rightarrow 1 = As^2 + As + Bs + B + Cs^2$$
$$(1) \quad (s^2+s) \quad (s+1) \quad (s^2) \qquad B=1, \quad A=-1, \quad C=1$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1}\right\}$$
$$= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$
$$= -1 + x + 2e^{-x}$$

elde edilir.

Örnek: $k \neq 0$, $y'' + k^2 y = x$, $y(0)=1$, $y'(0) = -2$ problemini çözünüz.

$$\mathcal{L}\{y''\} + k^2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{x\}$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + k^2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2}$$
$$s^2\mathcal{L}\{y\} - s + 2 + k^2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2}$$
$$(s^2+k^2)\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2} + s - 2 \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2(s^2+k^2)} + \frac{s}{s^2+k^2} - \frac{2}{s^2+k^2}$$

bulunur. Ters Laplace dön. yardımı ile

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+k^2)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k^2}\right\}$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+k^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+k^2} \Rightarrow 1 = As^3 + Ask^2 + Bs^2 + Bk^2 + Cs^3 + Ds^2$$
$$(1) \quad (s^3+sk^2) \quad (s^2+k^2) \quad (s^2) \qquad B = 1/k^2, \quad D = -1/k^2, \quad A = 0, \quad C = 0$$

$$y(x) = \frac{1}{k^2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{k^3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} - \frac{2}{k}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{k^2}x - \frac{1}{k^3}\sin kx + \cos kx - \frac{2}{k}\sin kx$$

elde edilir.

Not. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+k^2)}\right\}$ yi hesaplamak için konvolüsyon öz. kullanılabilir.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+k^2}\right\} = \frac{1}{k}\int_0^x \tau \sin k(x-\tau)\,d\tau, \quad u = \tau, \; du = d\tau$$
$$dv = \sin k(x-\tau)\,d\tau \Rightarrow v = \frac{1}{k}\cos k(x-\tau)$$
$$= \frac{1}{k}\left[\frac{\tau}{k}\cos k(x-\tau)\Big|_0^x - \frac{1}{k}\int_0^x \cos k(x-\tau)\,d\tau\right]$$
$$= \frac{1}{k}\left[\frac{\tau}{k}\cos k(x-\tau) + \frac{1}{k^2}\sin k(x-\tau)\right]_0^x = \frac{1}{k^2}x - \frac{1}{k^3}\sin kx$$