3. BÖLÜM

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI

1) Artma ve Azalma Problemleri

k orantı sabitini ve $N(t)$ sürekli fonksiyonu da artan veya azalan madde miktarını göstersin. Madde miktarının değişim hızı $\frac{dN}{dt}$ değerinin eldeki madde miktarına orantılı olduğunu kabul edersek o takdirde

$$\frac{dN}{dt} = kN \quad \text{veya} \quad \frac{dN}{dt} - kN = 0$$

denklemi geçerlidir.

ÖRNEK: Bir ülkenin nüfusunun o anda ülkede yaşayan insanların sayısıyla orantılı bir hızla arttığı biliniyor. Eğer nüfus 2 yıl sonra 2 katına çıkarsa ve 3 yıl sonra 20.000 ise başlangıçta ülkede kaç kişi yaşıyordu?

ÇÖZÜM: N : ülkede herhangi bir t anında yaşayan insan sayısı
N_0 : başlangıçtaki insan sayısı

olsun.

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0 \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int k\,dt$$

$$\Rightarrow \ln N = kt + c_1 \Rightarrow N = e^{kt+c_1} \Rightarrow N = e^{c_1} \cdot e^{kt}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = c\,e^{kt}} \quad \text{bulunur.}$$

$t=0$ anında başlangıçtaki sayı $N = N_0$ olsun.

$$N_0 = c \cdot e^0 \Rightarrow N_0 = c \Rightarrow \boxed{N = N_0 \cdot e^{kt}} \quad \text{bulunur.}$$

$t=2$ için (2 yıl sonra) $N = 2N_0$ dir. (şimdikinin 2 katı old.)

$N = N_0 e^{kt}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$2\cancel{N_0} = \cancel{N_0} e^{k\cdot 2} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{k\cdot 2} \Rightarrow \ln 2 = 2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln 2}{2} \cong \frac{0{,}693}{2} \cong 0{,}347$$

$$\Rightarrow 20000 = N_0\, e^{(0{,}347)\cdot 3} \Rightarrow N_0 = \frac{20000}{e^{(0{,}347)\cdot 3}} = \boxed{7062} \text{ kişi}$$

ÖRNEK: Belirli bir radyoaktif maddenin, miktarı ile orantılı bir hızla yok olduğu bilinmektedir. Eğer başlangıçta 50 mg madde varsa ve 2 saat sonra maddenin başlangıçtaki kütlesinin % 10 'unun yok olduğu gözlenmişse

a) Herhangi bir t anında kalan madde kütlesi için bir ifade

b) 4 saat sonra maddenin kütlesini

c) Maddenin başlangıçtaki kütlesinin yarısına indiği zamanı

bulunuz.

Çözüm: a) N, herhangi bir t anındaki madde miktarı olsun.

$\frac{dN}{dt} - kN = 0$ olduğundan $N = ce^{kt}$ dir.

$t=0$ anında (yani başlangıçta) 50 gr madde olduğundan

$t=0$ ve $N=50$ için $50 = ce^{k.0} \Rightarrow \boxed{c=50}$ dir.

Böylece $N = 50e^{kt}$ bulunur.

$t=2$ anında 50 mg nin % 10 'u yani 5 mg kaybolmuştur.

Yani $t=2$ için $N = 50-5 = 45$ mg 'dir.

$\Rightarrow 45 = 50 \cdot e^{2k} \Rightarrow e^{2k} = \frac{9}{10} \Rightarrow \ln e^{2k} = \ln\frac{9}{10} \Rightarrow 2k = \ln\frac{9}{10}$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}\ln(0,9) = -0,053$ bulunur. O halde

$N = 50e^{kt} \Rightarrow \boxed{N = 50 \cdot e^{-0,053 \cdot t}}$ matematiksel ifadesi bulunur.

b) $t=4 \Rightarrow N = 50 \cdot e^{-0,053 \cdot 4} = 40,5$ mg

c) $N = \frac{50}{2} = 25$

$\Rightarrow 25 = 50 \cdot e^{-0,053t} \Rightarrow e^{-0,053.t} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \ln e^{-0,053t} = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow -0,053t = -0,693$

$\Rightarrow t \cong 13$ saat

ÖRNEK: Bir bakteri kültürünün miktarı ile orantılı bir hızla arttığı biliniyor. 1 saat sonra kültürde 1000 bakteri lifi ve 4 saat sonra 3000 lif gözlenmiştir. Herhangi bir t anındaki kültürdeki yaklaşık lif sayısını gösteren matematiksel ifade ve başlangıçtaki kültür içindeki yaklaşık lif sayısını bulunuz.

Çözüm: N : t anındaki kültürdeki lif sayısı olsun.

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0 \Rightarrow N = ce^{kt}$$

$t = 1 \Rightarrow \quad 1000 = c.e^{k.1}$

$t = 4 \Rightarrow \quad 3000 = ce^{4k}$

Taraf tarafa bölünürse $\frac{1}{3} = e^{-3k} \Rightarrow 3 = e^{3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3}\ln 3$

$\Rightarrow k \cong 0,366$

$1000 = ce^{k} \Rightarrow 1000 = c.e^{0,366} \Rightarrow c = 694$

$\Rightarrow N = ce^{kt} \Rightarrow N = 694\, e^{0,366.0} \Rightarrow N_0 = 694$ bulunur.

$t=0$ anında (Başlangıçtaki)

ÖRNEK: Bir bakteri, miktarı ile orantılı olarak artmaktadır. Başlangıçta 2 doz bakteri vardır. 2 gün sonra ise bu 3 doz olmuştur.

10 gün sonraki miktarı bulunuz.

Çözüm: $N = ce^{kt} \Rightarrow t=0$ için $2 = ce^{k.0} \Rightarrow c = 2$ dir.

2 gün sonra $N = 3$ old.

$3 = 2.e^{2k} \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \cong 0,2025$ bulunur.

10 gün sonraki miktar ise $t = 10$ için

$$N = 2e^{0,2025.10} \cong 15,19 \text{ doz}.$$

ÖRNEK: Bir salgın hastalık teorisine göre hasta nüfusun değişim hızı, hastalığı yakalamış nüfus ile hasta olmayanların sayısının çarpımı ile orantılıdır. Bu teoriyi kontrol etmek için 500 tane farenin 5'ine hastalık bulaştırılmıştır. Teorinin doğru olduğu varsayılırsa farelerin yarısının hasta olması için ne kadar zaman geçer?

ÇÖZÜM: "N : t anındaki hasta fare sayısı" olsun.

$N_0 = 5$ başlangıçtaki hasta fare sayısı

$500 - N$: Hasta olmayan fare sayısı

Hasta nüfusun değişim hızı, hasta ve hasta olmayanların sayısının çarpımı olduğundan

$$\frac{dN}{dt} - k \cdot N \cdot (500 - N) = 0$$

yazılabilir. (Burada değişim hızı sadece hasta sayısı ile orantılı değildir.)

$$\frac{dN}{N \cdot (500-N)} - k\,dt = 0 \Rightarrow \frac{1}{N(500-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{500-N} \Rightarrow A = \frac{1}{500} = B.$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{500}}{N} + \frac{\frac{1}{500}}{500-N} \right) dN - \int k\,dt = c_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{500} \left(\ln N - \ln(500-N) \right) - kt = c_1$$

$$\Rightarrow \frac{N}{500-N} = e^{500(c_1+kt)} \Rightarrow \frac{N}{500-N} = c\,e^{500kt} \text{ bulunur.}$$

$t=0$ için $N=5$ verildiğinden

$$\frac{5}{495} = c\,e^{500 \cdot 0} \Rightarrow c = \frac{1}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{500-N} = \frac{1}{99} \cdot e^{500kt} \Rightarrow N = 250 \text{ için } t = ?$$

$$\Rightarrow \frac{250}{500-250} = \frac{1}{99} e^{500kt} \Rightarrow \ln 99 = 500kt$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 99}{500k}$$

Not: Soruda k'yı bulabilecek kadar veri olmadığı için sonuç k'ya bağlı çıkmıştır.

2) Sıcaklık Problemleri

Newton'un soğuma yasası, bir cismin sıcaklığının zamanla değişim hızının, cisimle onu çevreleyen ortam arasındaki sıcaklık farkına orantılı olduğunu ifade eder. T cismin sıcaklığını, $T_ç$ de çevreleyen ortamın sıcaklığını göstersin. O zaman cismin sıcaklığının zamanla değişim hızı $\frac{dT}{dt}$ olur. Newton'un soğuma yasası

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_ç) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = kT_ç$$

Burada k oranti sabitidir. Newton yasasında, T nin $T_ç$ 'den büyük olduğu bir soğuma sürecinde $\frac{dT}{dt}$ yi negatif yapmak ve T nin $T_ç$ 'den küçük olduğu bir ısınma probleminde ise $\frac{dT}{dt}$ 'yi pozitif yapmak için k'yı negatif seçmek gerekir.

ÖRNEK : $100°F$ sıcaklıktaki bir metal çubuk sabit $0°F$ sıcaklıktaki bir odaya yerleştiriliyor. Eğer 20 dak. sonra sıcaklık $50°F$ ise

a) Çubuk $25°F$ 'ye ne kadar sürede düşer?

b) 10 dak. sonraki sıcaklığı bulunuz.

Çözüm : $T_ç = 0$ verilmiş. Bu nedenle

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{kT}{T}dt$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = -k\,dt \Rightarrow \ln T = -kt + c_1$$

$$\Rightarrow T = e^{-kt + c_1} \Rightarrow T = c \cdot e^{-kt} \text{ bulunur.}$$

$t=0$ anında $T=100$ olduğundan

$$100 = C.e^{-k.0} \Rightarrow C=100$$

bulunur. Böylece $T=100.e^{-kt}$ olur.

$t=20$ anında $T=50$ olduğundan

$$50 = 100e^{-20k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-20k} \Rightarrow k \cong 0{,}035$$

$$\Rightarrow T = 100.e^{-0{,}035.t}$$ matematiksel ifadesi bulunur.

Buna göre

a) $T=25$ ise $25 = 100.e^{-0{,}035.t}$

$$\Rightarrow -0{,}035t = \ln\frac{1}{4} \Rightarrow t = 39{,}6 \text{ dak. bulunur.}$$

b) $t=10$ için $T=?$

$$T = 100.e^{-0{,}035.10} = 70{,}5^\circ F$$

bulunur.

ÖRNEK : $50^\circ F$ sıcaklıktaki bir cisim, sıcaklığı $100^\circ F$ olan bir ortama yerleştirilmiştir. Eğer 5 dak. sonra cismin sıcaklığı $60^\circ F$ ise

a) Cismin $75^\circ F$ sıcaklığa ulaşması için gereken zamanı

b) 20 dak. sonraki sıcaklığı bulunuz.

ÇÖZÜM : a) $T_a = 100$ verilmiş.

$$\frac{dT}{dt} + kT = 100k \Rightarrow T = ce^{-kt} + 100 \text{ olur.}$$

$t=0$ için $T=50$ verildiğinden

$$50 = c e^{-k.0} + 100 \Rightarrow C = -50$$

$$\Rightarrow \boxed{T = -50 \cdot e^{-kt} + 100} \quad \text{bulunur.}$$

$t = 5$ anında $T = 60^\circ F$ olduğundan

$$60 = -50 \cdot e^{-5k} + 100 \Rightarrow e^{-5k} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow -5k = \ln\frac{4}{5} \Rightarrow k \cong 0{,}045 \quad \text{olup}$$

$$\boxed{T = -50 \cdot e^{-0{,}045t} + 100} \quad \text{matematiksel ifadesi bulunur.}$$

a) $T = 75^\circ F \Rightarrow 75 = -50 \cdot e^{-0{,}045t} + 100$

$$\Rightarrow e^{-0{,}045t} = \frac{1}{2} \Rightarrow -0{,}045t = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow t = 15{,}4 \text{ dak.}$$

b) $t = 20$ ise $T = ?$

$$T = -50 \cdot e^{-0{,}045 \cdot 20} + 100 = 79{,}5^\circ F \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK : Suyun $100^\circ C$'de kaynadığı ve soğurken ilk 20 dakikada sıcaklığın $10^\circ C$ düştüğü bilinmektedir.

a) Çevre sıcaklığı $0^\circ C$ olan bir kazandaki suyun sıcaklığının zamanla değişimini veren bağıntıyı bulunuz.

b) Kazandaki su sıcaklığının $90^\circ C$'den $80^\circ C$'ye düşmesi için geçen süreyi bulunuz.

c) 90 dak. sonra kazandaki su sıcaklığının kaç $^\circ C$ olacağını hesaplayınız.

Çözüm:

a) $T_q = 0$ olarak verildiğine göre denklem

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0 \Rightarrow T = 100 e^{-kt} \quad \text{dir.}$$

($t=0$ anında $T=100$ verildiğinden $c=100$ bulunuyor)
(ilk örnekten)

Su ilk 20 dakikada $10^\circ C$ soğuduğundan kazandaki su sıcaklığı $T = 100 - 10 = 90^\circ C$ olur. Bu durumda

$$90 = 100\, e^{-k.20} \Rightarrow k = +0{,}005$$

bulunur. Buradan

$$T = 100\, e^{-0{,}005t}$$

bağıntısı elde edilir.

b) $T = 80$ alırsa, suyun $100^\circ C$'den $80^\circ C$'ye düşmesi için geçen zaman

$$80 = 100\, e^{-0{,}005t} \Rightarrow t = 44{,}6 \text{ dak.}$$

olarak bulunur. Suyun $100^\circ C$'den $90^\circ C$'ye düşmesi için geçen süre 20 dak. olduğuna göre suyun $90^\circ C$'den $80^\circ C$'ye düşmesi için geçen zaman $44{,}6 - 20 = 24{,}6$ dakika olur.

c) $t = 90$ dak. sonra su sıcaklığı

$$T = 100 . e^{-0{,}005 \cdot 90} \Rightarrow T = 63{,}8\ ^\circ C$$

olarak elde edilir.

3) Seyreltme Problemleri

Başlangıçta içinde "a" lb (ağırlık birimi) tuz içeren "V_0" (hacim birimi) galon tuzlu su çözeltisi olan bir tank düşünelim. Galon başına "b" lb tuz içeren bir başka çözelti tanka "e" gal/dak hızla dökülüyor ve aynı zamanda karıştırılmış çözelti tanktan "f" gal/dak hızla boşaltılıyor. Problem, herhangi bir t anında tanktaki tuz miktarını bulmaktır.

Buna göre tuz miktarını veren denklem

Herhangi bir t anında tanktaki çözeltinin hac[mi] $V_0+(e-f)t$ 'dir.

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{f}{V_0+(e-f)t}\cdot Q=b\cdot e$$

şeklindedir. (Q, herhangi bir anda tanktaki tuz miktarıdır) (a: başlangıçta tanktaki tuz miktarıdır.) ($Q_0=a$)

ÖRNEK: Bir tankta başlangıçta 20 lb tuz içeren 100 gal bir çözelti vardır. $t=0$ anında tanka 5 gal/dak hızla saf su dökülmeye başlanıyor, aynı zamanda iyi karıştırılan karışım tanktan aynı hızla boşaltılıyor. Herhangi bir t anında tanktaki tuz miktarını bulunuz.

Çözüm: $a=20$ lb, $V_0=100$ gal, $b=0$ lb (saf su old.)
$e=5$ ve $f=5$ gal/dak

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{5}{100+(5-5).t}\cdot Q=0.5 \Rightarrow \frac{dQ}{dt}+\frac{1}{20}Q=0$$

lineer denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü $Q=ce^{-t/20}$ dir.
$t=0$ anında $Q=a=20$ verilmiş. Bu değerleri yazarsak

$$20=ce^{-0/20} \Rightarrow c=20 \quad \text{bulunur.}$$

Böylece $Q=20.e^{-t/20}$ bulunur.

ÖRNEK : Bir tankta başlangıçta 1 lb tuz içeren 100 gal tuzlu çözelti vardır. $t=0$ anında tanka, galon başına 1 lb tuz içeren bir başka çözelti 3 gal/dak hızla dökülmeye başlanıyor, aynı zamanda iyi karıştırılan karışım tanktan aynı hızla boşaltılıyor.

a) Herhangi bir t anında tanktaki tuz miktarını

b) tanktaki karışımda 2 lb tuz bulunduğu zamanı

bulunuz.

(galon başına 1 lb tuz içeren başka çözelti)

ÇÖZÜM : **a)** $a=1$, $v_0=100$, $b=1$, $e=f=3$ gal/dak.

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{3}{100+(3-3)t}Q = 1.3 \Rightarrow \frac{dQ}{dt}+0{,}03.Q=3$$

$$\Rightarrow Q = c.e^{-0{,}03t}+100$$ ifadesi bulunur.

$t=0$ anında $Q=a=1$ verildiğinden

$$1 = c.e^{-0{,}03.0}+100 \Rightarrow c=-99$$ ve böylece

$$Q = -99.e^{-0{,}03t}+100$$

bulunur.

b) $Q=2$ olduğunda $t=?$

$$2=-99.e^{-0{,}03t}+100 \Rightarrow e^{-0{,}03t}=\frac{98}{99}$$

$$\Rightarrow t=-\frac{1}{0{,}03}\ln\frac{98}{99}$$

$$\Rightarrow t\cong 0{,}34 \text{ dakika bulunur.}$$

ÖRNEK : 50 galonluk bir tankta 10 galon saf su vardır. $t=0$ anında galon başına 1 lb tuz içeren bir çözelti 4 gal/dak hızla tanka dökülmeye başlanıyor, aynı zamanda iyi karıştırılan karışım, tanktan 2 gal/dak hızla boşaltılıyor.

a) Tankın taşacağı zamanı

b) Taşma anında tanktaki tuz miktarını bulunuz.

Çözüm : a) $a=0$ (Tankta başlangıçta sadece saf su olduğundan tuz miktarı sıfırdır.)

$b=1$, $e=4$, $f=2$ ve $v_0=10$ dur.

Herhangi bir t anında tanktaki çözeltinin hacmi

$v_0+et-ft=10+2t$ olarak verilir.

$10+2t=50 \Rightarrow t=20$ dak bulunur.

(t kadar süre sonra tankta 50 gal su olmalı.)

b) $$\frac{dQ}{dt}+\frac{2}{10+2t}Q=1.4$$

denkleminin çözümü

$$Q=e^{-\int\frac{2}{10+2t}dt}\left[\int 4\, e^{\int\frac{2\,dt}{10+2t}}dt+c\right]$$

$$\Rightarrow Q=\frac{40t+4t^2+C}{10+2t}$$

bulunur. $t=0$ 'da $Q=a=0$ verildiğinden

$$0=\frac{40.0+4.0^2+C}{10+2.0} \Rightarrow C=0$$ bulunur.

Taşma olduğunda Q 'yu arıyoruz ki bu an (a) çözümünden $t=20$ 'dir. Böylece

$$Q=\frac{40.20+4.20^2}{10+2.20}=48 \text{ lb.}$$

bulunur.

4) Serbest Düşüş Problemleri

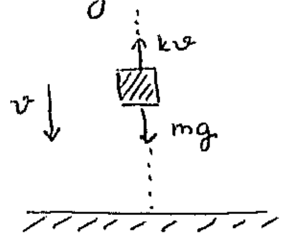
Sadece g yer çekimi ve cismin hızıyla orantılı hava direncinin etkisinde dikey olarak düşen m kütleli bir cismi göz önüne alalım. Burada yer çekimi ve kütlenin sabit kaldığı ve uygunluk için aşağı yön pozitif kabul edilecektir.

"F" cisme t anında etki eden net kuvvet ve "v" cismin t anındaki hızı olmak üzere elimiz deki problemde cisme etkiyen iki kuvvet vardır:

(1) yer çekiminden doğan, cismin "w" ağırlığı ile verilen ve "mg" 'ye eşit olan kuvvet

(2) hava direncinden doğan, $k>0$ bir orantı sabiti olmak üzere, $-kv$ ile verilen kuvvettir. (Bu kuvvet hıza karşı old. negatiftir)

Sonuçta cismin üzerindeki net kuvvet $F=mg-kv$ dir.



$F=m\dfrac{dv}{dt}$ formülünde yerine yazılırsa

$$mg-kv=m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g \qquad \ldots\ldots\ldots (3.1)$$

olarak elde edilir. Eğer hava direnci ihmal edilirse veya yoksa $k=0$ old.

$$\frac{dv}{dt}=g \qquad \ldots\ldots\ldots (3.2)$$

olur. Burada m, cismin kütlesi, g ise yerçekimi kuvvetidir.

Uyarı : (3.1) ve (3.2) denklemleri sadece verilen koşullar sağlandığı zaman geçerlidir. Bu denklemler, örneğin, eğer hava direnci hızla değil, hızın karesi ile orantılı ise veya yukarı yön pozitif seçilmişse geçerli değildir.

Limit Hız : Dikey olarak düşen bir cisme etkiyen hava direnç kuvvetiyle yer çekimi kuvvetinin eşit olduğu anda cismin hızı sabit hale gelir. Bu hıza limit hız denir. Yani cismin ulaşacağı en yüksek hızdır. $\boxed{v_l=\dfrac{mg}{k}}$ $(k>0)$

ÖRNEK: 5 lb kütleli bir cisim, 100 ft yükseklikten sıfır ilk hızla düşürülüyor. Hava direnci olmadığını kabul ederek

a) Herhangi bir t anında cismin hızının ifadesini,

b) Herhangi bir t anında cismin konumunun ifadesini,

c) yere ulaşması için gereken zamanı bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) Hava direnci olmadığından $\frac{dv}{dt} = g$ 'dir. Bu denklem lineerdir ve değişkenlerine ayrılabilirdir. Çözümü ise

$$v = gt + c$$

dir. $t=0$ iken $v=0$ dır. (cismin ilk hızı sıfırdır).

Buradan $0 = g \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$ olur. ve böylece

$$v = gt$$

bulunur. $g = 32 \ ft/sn^2$ kabul edilirse $v = 32t$ bulunur.

$\{1 \ ft \cong 0,30 \ mt. \quad g = 9,8 \ m/sn^2\}$

b) $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 32t$ dir. Bu denklemin çözümü

$$x = 16t^2 + c_1$$

şeklindedir.

Ancak $t=0$ 'da $x=0$ dır. Böylece

$0 = 16 \cdot 0^2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$ olur. Buradan

$x = 16t^2$ elde edilir.

c) $x = 100$ iken $t = ?$

$t = \sqrt{\frac{100}{16}} = 2,5$ sn bulunur. $\left\{ \begin{array}{l} x = 16t^2 \\ \Rightarrow t = \sqrt{\frac{x}{16}} \end{array} \right\}$

ÖRNEK : 2 lb kütleli bir cisim, sıfır ilk hızıyla bırakılıyor ve hızının karesi ile orantılı bir hava direncinin etkisinde kalıyor. Herhangi bir t anında cismin hızının ifadesini bulunuz.

Çözüm : Hava direncinden oluşan $-kv^2$ dir. Bu nedenle

$$mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow 2\frac{dv}{dt} = 64 - kv^2 \text{ dir.}$$

(m=2 , g=32 dir.)

Denklem düzenlenirse

$$\frac{2}{64-kv^2}\,dv - dt = 0 \quad ,$$

denklemi elde edilir. Basit kesirler yardımıyla

$$\frac{2}{64-kv^2} = \frac{2}{(8-\sqrt{k}v)(8+\sqrt{k}v)} = \frac{\frac{1}{8}}{8-\sqrt{k}v} + \frac{\frac{1}{8}}{8+\sqrt{k}v}$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8-\sqrt{k}v} + \frac{1}{8+\sqrt{k}v}\right)dv - dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{8-\sqrt{k}v} + \frac{1}{8+\sqrt{k}v}\right)dv - \int dt = c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{\sqrt{k}}\ln|8-\sqrt{k}v| + \frac{1}{\sqrt{k}}\ln|8+\sqrt{k}v|\right] - t = c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8+\sqrt{k}v}{8-\sqrt{k}v} = c_1 e^{8\sqrt{k}t} \qquad \left(c_1 = \pm e^{8\sqrt{k}c}\right)$$

olarak yazılabilir. $t=0$ 'da $v=0$ verildiğinden $c_1 = 1$ bulunur ve hız

$$\frac{8+\sqrt{k}v}{8-\sqrt{k}v} = e^{8\sqrt{k}t} \Rightarrow v = \frac{8e^{8\sqrt{k}t} - 8}{\sqrt{k} + ve^{8\sqrt{k}t}}$$

şeklindedir.

ÖRNEK : 64 lb ağırlığında bir cisim 10 ft/sn ilk hızla 100 ft yükseklikten atılıyor. Hava direncinin cismin hızı ile orantılı olduğunu kabul edelim. Eğer limit hızın 128 ft/sn olduğu biliniyorsa

a) Herhangi bir t anında cismin hızının ifadesini

b) Herhangi bir t anında cismin konumunun ifadesini

bulunuz. { 1 lb = 0,45 kg , 1 slug = 14,6 kg }

Çözüm :

a) Burada $w = 64$ lb, $w = mg$ olduğundan

$mg = 64 \Rightarrow m.32 = 64 \Rightarrow m = 2$ slug bulunur.

$v_l = 128$ ft/sn verildiğinden $128 = \frac{64}{k} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ çıkar.

Bu değerleri (3.1) formülünde yerine yazarsak

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{4} v = 32$$

lineer dif. denklemi elde edilir. Bunun çözümü ise

$$v = c e^{-\frac{t}{4}} + 128$$

bulunur. $t=0$ 'da $v=10$ verildiğinden

$$10 = c e^{-\frac{0}{4}} + 128 \Rightarrow c = -118 \quad \text{bulunur.}$$

Herhangi bir t anındaki hız

$$v = -118 . e^{-t/4} + 128$$

ile verilir.

b) x yerdeğiştirme olmak üzere $v = \frac{dx}{dt}$ olduğundan $\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -118 . e^{-t/4} + 128$

yazılabilir. Buradan $x = 472 . e^{-t/4} + 128t + c_1$ bulunur. $t=0$ 'da $x=0$ old. $c_1 = -472$ ve böylece $x = 472 . e^{-t/4} + 128t - 472$ dir

ÖRNEK ! m kütleli bir cisim, v_0 ilk hızıyla yukarı doğru dikey olarak fırlatılıyor. Eğer cisim, hızıyla orantılı bir hava direncinin etkisinde ise (16)

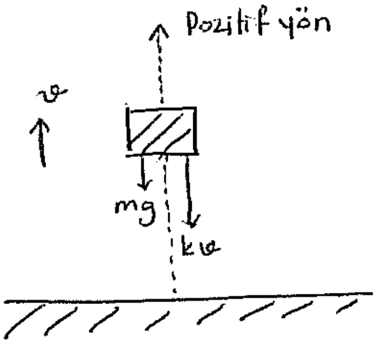
a) Hareketin denklemini

b) Herhangi bir t anındaki hızın ifadesini

c) Cismin maksimum yüksekliğe ulaşması için gereken zamanı bulunuz.

ÇÖZÜM : **a)** Cisim üzerinde iki kuvvet cismin hızına karşı koyacaktır. Bu kuvvetler mg yer çekimi ve kv hava direnci kuvvetidir. Her ikisi de aşağı doğru ve negatif yönde hareket ettiğinden cismin üzerindeki net kuvvet $-mg-kv$ dır. Böylece

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \quad \dots\dots \circledast$$



denklemi bulunur.

b) $\circledast$ denklemi lineerdir ve çözümü

$$v = c\,e^{-(k/m)\cdot t} - mg/k$$

dır. $t=0$ 'da $v=v_0$ dır. Buradan

$$v_0 = e^{-(k/m)t} - (mg/k) \Rightarrow c = v_0 + (mg/k) \quad \text{olur.}$$

Herhangi bir t anında cismin hızı

$$v = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\cdot e^{-(k/m)t} - \frac{mg}{k} \quad \dots\dots \circledast\circledast$$

olarak bulunur.

c) Cisim $v=0$ olduğunda maksimum yüksekliğe çıkar. Böylece $v=0$ iken t'yi arıyoruz. $\circledast\circledast$'da $v=0$ yazılırsa

$$0 = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-(k/m)\cdot t} - \frac{mg}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-(k/m)t} = \frac{1}{1+\frac{v_0 k}{mg}} \Rightarrow -(k/m)\,t = \ln\left(\frac{1}{1+\frac{v_0 k}{mg}}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0 k}{mg}\right)$$

elde edilir.

5) Elektrik Devreleri

Bir R direnci (ohm), bir L indüktörü (henry) ve bir elektromotiv kaynak (emf) E (Volt)'den oluşan basit bir RL devresinde I akım miktarını veren temel denklem

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L} \qquad \text{(Şekil 1)}$$

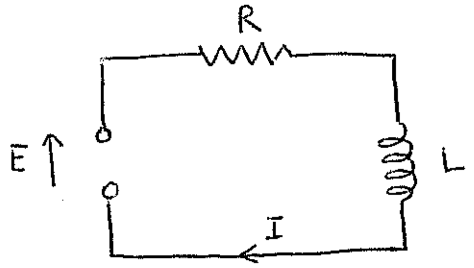
dır. Bir direnç, bir C sığacı (farad) ve bir emf'den oluşan ve İndüktans içermeyen bir RC devresi için sığaç üzerindeki q elektriksel yükünü (coulomb) veren denklem

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R} \qquad \text{(Şekil 2)}$$

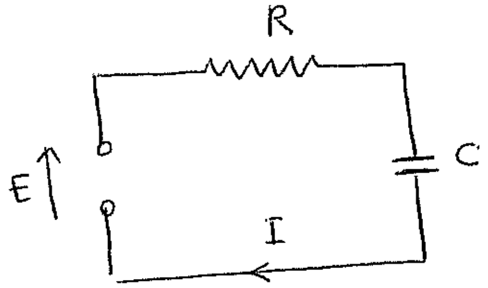
olur. q ve I arasındaki bağıntı ise

$$I = \frac{dq}{dt}$$

ile verilir.



Şekil 1



Şekil 2

ÖRNEK : Bir RL devresinde 5 volt emf, 50 ohm direnç ve 1 henry indüktans vardır. İlk akım sıfır ise herhangi bir t anında devredeki akımı bulunuz.

Çözüm : Burada $E=5$, $R=50$ ve $L=1$ dır. Buradan

$$\frac{dI}{dt} + 50I = 5 \Rightarrow I = ce^{-50t} + \frac{1}{10} \quad \text{bulunur.}$$

$t=0$'da $I=0$ verildiğinden $0 = ce^{-50 \cdot 0} + \frac{1}{10} \Rightarrow c = -\frac{1}{10}$

olup herhangi bir t anındaki akım $I = -\frac{1}{10} e^{-50t} + \frac{1}{10}$ olur.

(18)

ÖRNEK : Bir RC devresinde emf (volt) $400\cos 2t$, direnç 100 ohm ve sığaç 10^{-2} farad olarak veriliyor. Başlangıçta sığaç üzerinde hiç yük yoktur. Herhangi bir t anındaki akımı bulunuz.

Çözüm : Önce q yükünü bulup sonra akımı bulalım. Burada $E = 400\cos 2t$, $R = 100$ ve $C = 10^{-2}$ dır.

Böylece
$$\frac{dq}{dt} + q = 4\cos 2t$$
olur. Bu denklem lineerdir ve çözümü
$$q = ce^{-t} + \frac{8}{5}\sin 2t + \frac{4}{5}\cos 2t$$
biçimindedir. $t=0$ 'da $q=0$ verildiğinden
$$0 = ce^{-0} + \frac{8}{5}\sin 2.0 + \frac{4}{5}\cos 2.0$$
$$\Rightarrow \quad c = -\frac{4}{5}$$
$$\Rightarrow \quad q = -\frac{4}{5}e^{-t} + \frac{8}{5}\sin 2t + \frac{4}{5}\cos 2t$$
bulunur. $I = \dfrac{dq}{dt}$ olduğundan
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{16}{5}\cos 2t - \frac{8}{5}\sin 2t$$
elde edilir.