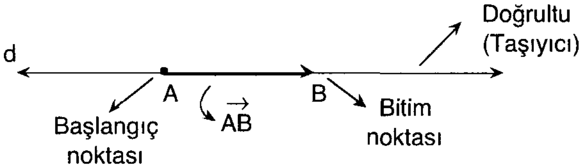
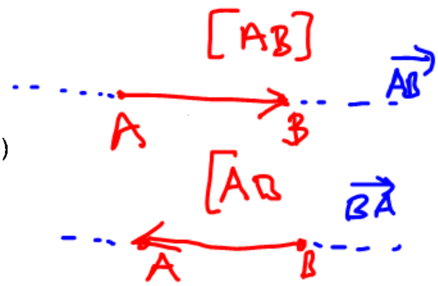
VEKTÖRLER

BÖLÜM 3

YÖNLÜ DOĞRU PARÇALARI

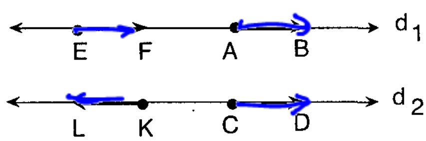




Bir d doğrusu ve bu doğru üzerinde [AB] doğru parçası alalım. Başlangıç noktası A ve bitim noktası B olan [AB] doğru parçasına yönlü doğru parçası denir ve $\overrightarrow{AB}$ ile gösterilir. $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının üzerinde bulunduğu d doğrusuna ise $\overrightarrow{AB}$ nin doğrultusu yada taşıyıcısı denilir.

$\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğru parçalarının taşıyıcıları olan AB ve CD doğruları paralelse $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğru parçaları aynı doğrultuludur denir. ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$) Aynı doğrultulu iki yönlü doğru parçası, aynı yönlü yada zıt yönlü olabilirler.

$d_1 \parallel d_2$



$\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ aynı doğrultulu aynı yönlü
$\overrightarrow{EF}$ ile $\overrightarrow{KL}$ aynı doğrultulu zıt yönlü
$\overrightarrow{CD}$ ile $\overrightarrow{KL}$ aynı doğrultulu zıt yönlü
doğru parçalarıdır.

$|\overrightarrow{AB}|$

A ve B noktaları arasındaki uzaklığa $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının uzunluğu denir. $|\overrightarrow{AB}|$ yazımıyla gösterilir.

$\overrightarrow{AA}$ yönlü doğru parçasının taşıyıcısı ~~ile~~ ise yönü belirsiz, uzunluğu ise sıfırdır.

$\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{BA}$ yönlü doğru parçalarının ters yönlü olduklarına dikkat edilmelidir.

SONUÇ

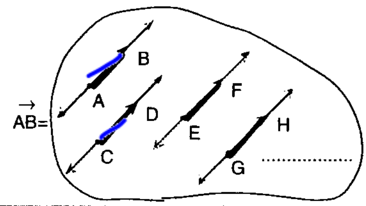
① Bir yönlü doğru parçası;

i) Doğrultusu
ii) Yönü
iii) Büyüklüğü ile belirlenir.

② $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ aynı düzlemde yönlü doğru parçaları olsunlar. Bunların doğrultuları aynı, yönleri aynı, büyüklükleri eşitse ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$), $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ eşittir denir ve $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ biçiminde gösterilir.

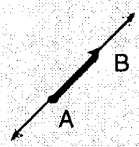
VEKTÖR

Yanda, birbirine eş (aynı doğrultulu, aynı yönlü ve uzunlukları eşit) yönlü doğru parçaları görülmektedir. Bunların kümesine vektör denir ve bu vektör, kümenin herhangi bir elemanı ile gösterilir. Yani $\vec{AB}$ yönlü doğru parçası verilmekle $\vec{AB}$ vektörü verilmiş olur.



SONUÇ

Birbirine denk yönlü doğru parçalarının denklik sınıflarından herbirine **vektör** adı verilir. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan vektöre ($\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \vec{DD} = \dots$) sıfır vektörü denir ve $\vec{O}$ ile gösterilir.

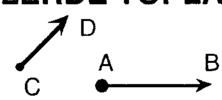


$\|\vec{AB}\|$

$\vec{AB}$ vektörü $|\vec{AB}| = \|\vec{AB}\|$, $\vec{AB}$ vektörünün uzunluğu - normu - modülü

VEKTÖRLERDE TOPLAMA VE ÇIKARMA

TOPLAMA :



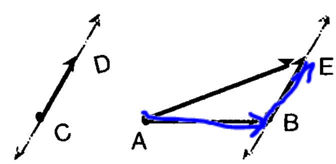
Düzlemde iki vektör $\vec{AB}$ ile $\vec{CD}$ olsun. Bu iki vektörün toplamını bulalım.

1. YOL : ÇOKGEN KURALI : (uc uca ekleme)

$\vec{BE} = \vec{CD}$ olacak şekilde $\vec{BE}$ vektörünü çizelim. $\vec{AE}$ vektörüne, $\vec{AB}$ ile $\vec{CD}$ vektörlerinin toplamı denir.

$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$ yazılır.

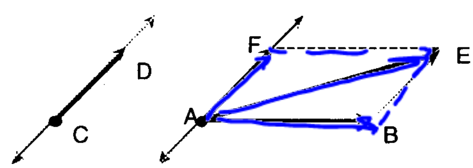
Yani ilk vektörün başlangıcı ile ikinci vektörün bitim noktası birleştirildiğinde toplam vektörü elde edilir.



2. YOL : PARALELKENAR KURALI :

$\vec{AF} = \vec{CD}$ olacak şekilde $\vec{AF}$ vektörünü çizelim. $\vec{AF}$ ve $\vec{AB}$ üzerine kurulan paralelkenarın uzun köşegeni olan $\vec{AE}$ bu vektörlerin toplamıdır.

$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$ dir.

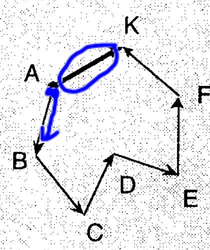


UYARI :

i) A, B, C noktaları doğrusal ise;

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ dir.

ii)

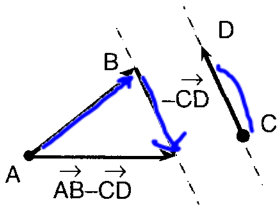


Bir vektörün bitiş noktası, başka bir vektörün başlangıç noktası olacak biçimde uç uca eklenmiş vektörlerin toplamı, ilk vektörün başlangıç noktası ile son vektörün bitiş noktasının birleştirilmesiyle oluşur.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FK} = \vec{AK} \text{ dır.}$$

iii) $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$ dır. Yani $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$ ise $\vec{AB} = -\vec{BA}$ dır.

ÇIKARMA :



$\vec{AB}$ vektöründen $\vec{CD}$ vektörünü çıkarmak için $\vec{AB}$ nin bitim noktasına $\vec{CD}$ nin tersi olan $-\vec{CD}$ eklenir.

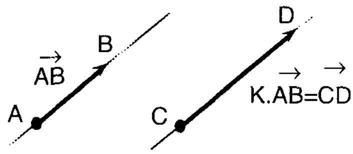
$$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} + (-\vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{DC} \text{ dir.}$$

BİR VEKTÖRÜN BİR GERÇEL SAYI İLE ÇARPIMI :

$k \in \mathbb{R}$ ile $\vec{AB}$ vektörünü ele alalım.

i) $k > 0$ ise :

$k . \vec{AB}$, $\vec{AB}$ ile aynı doğrultuda, uzunluğu $\vec{AB}$ nin k katı olan bir vektördür. Bu vektör $\vec{CD}$ olsun.
$\vec{CD} = k . \vec{AB}$ yada $|\vec{CD}| = k . |\vec{AB}|$ dir.

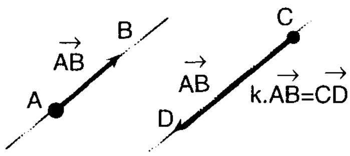


k>1 için boy uzar
0<k<1 " " kısalır

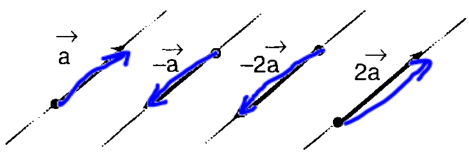
ii) $k < 0$ ise :

$k . \vec{AB}$, $\vec{AB}$ ile aynı doğrultuda ters yönlü bir vektördür.

$\vec{CD} = k . \vec{AB} \Rightarrow |\vec{CD}| = k . |\vec{AB}|$ dir.



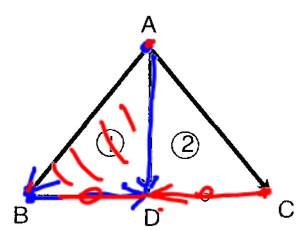
iii)



iv) $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere $\boxed{\vec{AB} = k . \vec{CD}}$ ise $\vec{AB} \,//\, \vec{CD}$ dir.

ÖRNEK

$|BD| = |CD|$ olduğuna göre $\vec{AD}$ yi $\vec{AB}$ ve $\vec{AC}$ türünden bulunuz.



ÇÖZÜM

① de : $\boxed{\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}}$

② de : $\boxed{\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}}$

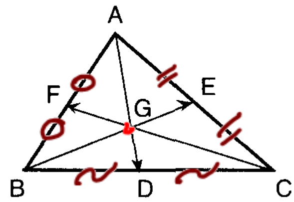
$$\frac{+\qquad\qquad\qquad\qquad}{2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} + \underbrace{\vec{BD} + \vec{CD}}_{\vec{0}}}$$

$$\vec{AD} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK

ABC üçgeninde G, ağırlık merkezi olduğuna göre,

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ toplamını bulunuz.



ÇÖZÜM

Bir önceki örnekten yararlanarak ;

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$$

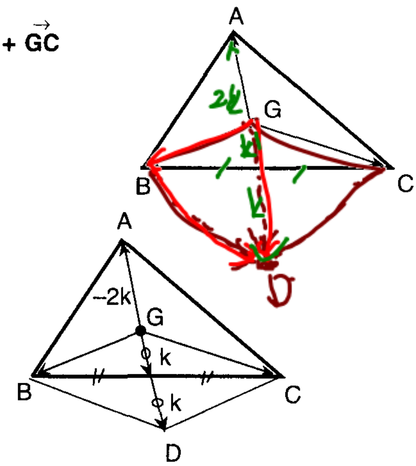
$$+\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}}_{\vec{0}})$$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ elde edilir.

ÖRNEK

ABC üçgeninin ağırlık merkezi G dir. **$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ toplamı nedir?**



ÇÖZÜM

BDCG paralelkenarından

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{GD}$ dir.

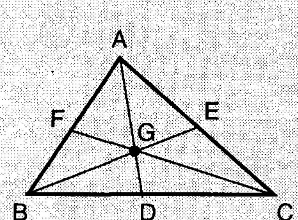
$\boxed{\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}}$ olup

$\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GA}$ dır. Yerine konursa

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ bulunur.

UYARI :



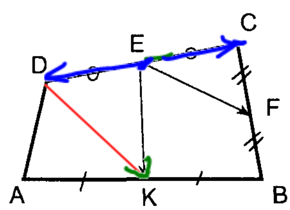
ABC üçgeninde [AD], [BE], [CF], kenar ortaylar vede G ağırlık merkezi olmak üzere :

i) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ **ii)** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ **iii)** $\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ dir.

ÖRNEK

Şekildeki ABCD dörtgeninde E, F ve K noktaları kenarların orta noktalarıdır.

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EK}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DK}$ B) $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BK}$ C) $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DK}$

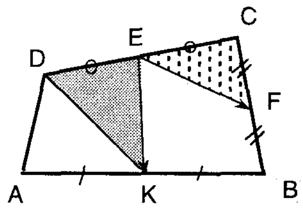
D) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}$ E) $\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EK}=\underbrace{\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}}_{0}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DK}$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}$

$+\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DK}$

ÇÖZÜM



$$\vec{EF} = \vec{EC} + \vec{CF}$$

$$\vec{EK} = \vec{ED} + \vec{DK}$$

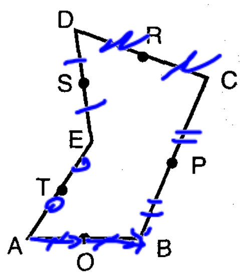
$+$

$$\vec{EF} + \vec{EK} = \underbrace{\vec{EC} + \vec{ED}}_{\vec{0}} + \vec{CF} + \vec{DK}$$

$\vec{EF} + \vec{EK} = \vec{CF} + \vec{DK}$ elde edilir.

YANIT "A"

ÖRNEK



Şekildeki ABCDE çokgeninde O, P, R, S, T noktaları kenarların orta noktalarıdır.

$\vec{PC} + \vec{RD} + \vec{SE} + \vec{TA}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\vec{OA}$ B) $\vec{OB}$ C) $\vec{OC}$ D) $\vec{OD}$ E) $\vec{OE}$

ÇÖZÜM

$$\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EA} + \vec{AB} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EA} + \vec{AB}) = \vec{0}$$

$$\frac{\vec{BC}}{2} + \frac{\vec{CD}}{2} + \frac{\vec{DE}}{2} + \frac{\vec{EA}}{2} + \frac{\vec{AB}}{2} = \vec{0}$$

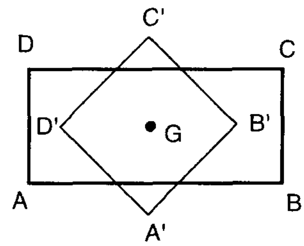
$$\vec{PC} + \vec{RD} + \vec{SE} + \vec{TA} + \vec{OB} = \vec{0}$$

$$\vec{PC} + \vec{RD} + \vec{SE} + \vec{TA} + \vec{AO} = \vec{0}$$

$\vec{PC} + \vec{RD} + \vec{SE} + \vec{TA} = -\vec{AO} = \vec{OA}$ olur.

YANIT "A"

ÖRNEK



Şekildeki G noktası ABCD dikdörtgeni ile A′B′C′D′ karesinin ağırlık merkezidir.

$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\vec{GA'}$ B) $\vec{GB}$ C) $2\vec{GC}$ D) $4\vec{CC'}$ D) $\vec{0}$

ÇÖZÜM

$\vec{AA'} = \vec{AG} + \vec{GA'}$ (G noktası dikdörtgen ve karenin köşegenlerinin kesim noktasıdır.)

$$\vec{BB'} = \vec{BG} + \vec{GB'}$$

$$\vec{CC'} = \vec{CG} + \vec{GC'}$$

$$\vec{DD'} = \vec{DG} + \vec{GD'}$$

$+$

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'} = \underbrace{\vec{AG} + \vec{CG}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{BG} + \vec{DG}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{GA'} + \vec{GC'}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{GB'} + \vec{GD'}}_{\vec{0}}$$

$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'} = \vec{0}$ bulunur.

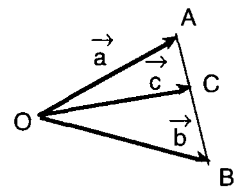
YANIT "E"

ÖRNEK

Şekilde $\vec{OA} = \vec{a}$

$\vec{OB} = \vec{b}$ ve

$\vec{OC} = \vec{c}$ dir.



$3|AC| = 5|CB|$ ve $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ ise **n–m değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$3|AC| = 5|CB| \Rightarrow \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{5k}{3k}$

olup $|AC| = 5k$, $|CB| = 3k$ ve $|AB| = 8k$ dır.

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{AC}$ $\qquad$ $\vec{c} = \vec{b} + \vec{BC}$

$\vec{c} = \vec{a} + \frac{5}{8}\vec{AB}$ ① $\qquad$ $\vec{c} = \vec{b} + \frac{3}{8}\vec{BA}$ ② elde edilir.

Buradan

$$5/ \quad \vec{c} = \vec{b} + \frac{3}{8}\vec{BA}$$

$$3/ \quad \vec{c} = \vec{a} + \frac{5}{8}\vec{AB}$$

$$5\vec{c} = 5\vec{b} + \frac{15}{8}\vec{BA}$$

$$3\vec{c} = 3\vec{a} + \frac{15}{8}\vec{AB}$$

$$8\vec{c} = 3\vec{a} + 5\vec{b} + \underbrace{\frac{15}{8}\vec{BA} + \frac{15}{8}\vec{AB}}_{\vec{0}}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{c} &= \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b} \\ \vec{c} &= m\vec{a} + n\vec{b} \end{aligned}\right\} \text{den} \qquad n = \frac{5}{8}, \quad m = \frac{3}{8}$$

$$n - m = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

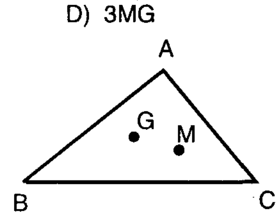
ÖRNEK

ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi M, ağırlık merkezi G dir.

$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\vec{GM}$ B) $\vec{MG}$ C) $2\vec{MG}$ D) $3\vec{MG}$ E) $\vec{0}$

ÇÖZÜM



$\vec{MA} = \vec{MG} + \vec{GA}$

$\vec{MB} = \vec{MG} + \vec{GB}$

$\vec{MC} = \vec{MG} + \vec{GC}$

+

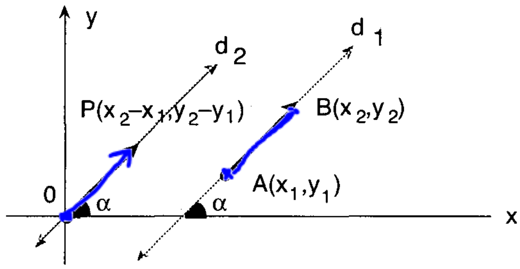
$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG} + \underbrace{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}}_{\vec{0}}$$

$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ bulunur.

YANIT "D"

KONUM (YER) VEKTÖRÜ

Başlangıç noktası orijin olan vektörlere konum (yer) vektörü denir. Eğer vektör orijinde değilse vektörün uzunluğunu ve yönünü değiştirmemek kaydıyla orijine taşıyabiliriz.



$\vec{AB}$ vektörüne eş ve başlangıç noktası orijin olan $\vec{OP}$ yada $\vec{P}$ vektörüne $\vec{AB}$ nin konum vektörü denir.

$\vec{P} = \vec{OP} = \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (x_2-x_1 , y_2-y_1) = [x_2-x_1, y_2-y_1]$

$$= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$\vec{AB}$ vektörünün konum vektörünü göstermek için bitiminden başlangıcının çıkartıldığına dikkat edilmelidir.

i) Bundan sonra bir $\vec{A}$ vektörü

$\vec{A} = (x_1, y_1) = [x_1, y_1] = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ şeklinde verilirse başlangıç noktası orijin olan konum vektörü anlaşılmalıdır.

$\vec{A} = \vec{OA} = (x_1 - 0, y_1 - 0)$

$= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

ii) $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ ise

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$

$\vec{BA} = \vec{A} - \vec{B} = (x_1-x_2, y_1-y_2)$

$\vec{AB} + \vec{BA} = (0, 0) = \vec{AA}$ dır.

ÖRNEK $A(-3, 5)$, $B(4, -7)$ ise $\vec{AB}$ **nün yer vektörünü bulunuz.**

ÇÖZÜM $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = [4, -7] - [-3, 5]$

$= [4+3, -7-5]$

$= [7, -12]$ dir.

İKİ VEKTÖRÜN EŞİTLİĞİ

$\vec{A} = [x_1, y_1]$ ve $\vec{B} = [x_2, y_2]$ vektörleri için

$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow [x_1, y_1] = [x_2, y_2] \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$ dir.

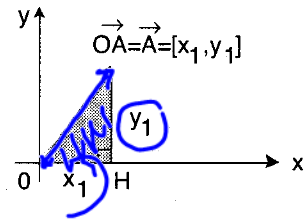
ÖRNEK $\vec{A} = (p+3, 5)$, $\vec{B} = (6, q-1)$ ve $\vec{A} = \vec{B}$ ise **p+q nedir?**

ÇÖZÜM $\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow (p+3, 5) = (6, q-1)$

$\Rightarrow p+3 = 6 \wedge q-1 = 5$

$\Rightarrow p = 3 \wedge q = 6$ olur ki buradan $p + q = 9$ elde edilir.

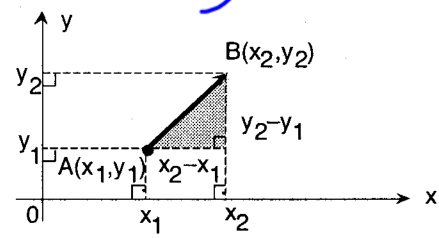
BİR VEKTÖRÜN UZUNLUĞU (NORMU VEYA MODÜLÜ)



$|\vec{OA}|^2 = |\vec{A}|^2 = x_1^2 + y_1^2$

$|\vec{OA}| = |\vec{A}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ dir.

(Vektörün uzunluğu yada boyu başlangıç ve bitim noktaları arasındaki uzaklıktır.)



$|\vec{AB}|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$

$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ dir.

(A ve B noktaları arasındaki uzaklık formülü olduğunu görünüz.)

ÖRNEK $\vec{A} = [8, 15]$ **vektörünün uzunluğunu bulunuz.**

ÇÖZÜM $|\vec{A}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$ dir.

ÖRNEK A(–3, –5) , B(1, 3) ise $\vec{AB}$ **nün uzunluğunu bulunuz.**

ÇÖZÜM **1. yol :** $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(1+3)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$

$|\vec{AB}| = 4\sqrt{5}$ dir.

2. yol : $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = [1, 3] - [-3, -5] = [4, 8]$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ olur.

VEKTÖRLERDE TOPLAMA – ÇIKARMA VE BİR SKALERLE ÇARPMA

$\vec{A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ise

$\vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

$\vec{A} - \vec{B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$

$k \in R$ olmak üzere $k \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix}$ dir.

B = (x, y)

x+7=4
y-1=-5

ÖRNEK $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ vektörü için A(–7, 1) dir. **B noktasının koordinatları nedir?**

ÇÖZÜM A(–7, 1) ve B(x, y) olsun. $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ dır.

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x+7 \\ y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ den

$\left.\begin{matrix} x+7 = 4 \Rightarrow x = -3 \\ y-1 = -5 \Rightarrow y = -4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B(-3, -4)$ elde edilir.

ÖRNEK

$A(x+y-1,\ 2x+y)$ ve $B(-3,\ -2)$ olan noktaları için $\vec{AB}$ konum vektörü $\vec{AB} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ise **x ve y değerleri nedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = [-3-x-y+1\ ,\ -2-2x-y]$

$= [-x-y-2\ ,\ -2x-y-2]$

$\vec{AB} = [-3, 4]$ ise

$[-x-y-2\ ,\ -2x-y-2] = [-3, 4]$ den

$-x-y-2 = -3$

$-2x-y-2 = 4$

$-x-y = -1$

$-2x-y = 6$

$x+y = 1$

$-2x-y = 6$

$+$

$-x = 7$

$x = -7$

$x = -7 \Rightarrow x+y = 1$ den

$y = 1-x$

$y = 1+7$

$y = 8$ elde edilir.

ÖRNEK

$A(2a, 3)$, $B(1, -a)$, $C(4, -1)$ olup $\vec{AB} + \vec{BC}$ toplam vektörünün uzunluğu 5 ise **a kaçtır?**

ÇÖZÜM

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ dir.

Yani $|\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = 5$ olur.

$|\vec{AC}| = 5$

$\sqrt{(2a-4)^2 + (3+1)^2} = 5$ de her iki yanın karesi alınırsa

$(2a-4)^2 + 16 = 25$

$(2a-4)^2 = 9 \Rightarrow 2a-4 = 3 \vee 2a-4 = -3$

$2a = 7 \vee 2a = 1$

$a = \frac{7}{2} \vee a = \frac{1}{2}$ bulunur.

ÖRNEK

$\vec{A} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ olup $\mathbf{2\vec{A} - \vec{C} = 4\vec{B}}$ **eşitliğini sağlayan $\vec{C}$ vektörü nedir?**

ÇÖZÜM

$2\vec{A} - \vec{C} = 4\vec{B} \Rightarrow \vec{C} = 2\vec{A} - 4\vec{B}$ dir.

$\vec{C} = 2 . \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} - 4 . \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\vec{C} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\vec{C} = \begin{bmatrix} -6-20 \\ 8+4 \end{bmatrix}$

$\vec{C} = \begin{bmatrix} -26 \\ 12 \end{bmatrix}$ elde edilir.

ÖRNEK

$\vec{A} = [-5, 1]$, $\vec{B} = [1, -1]$ ve $\vec{C} = [4, -2]$ vektörleri veriliyor. **$\vec{C}$ vektörünü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörü türünden ifade ediniz.**

ÇÖZÜM

$\vec{C} = x \cdot \vec{A} + y \cdot \vec{B}$

$\vec{C}$, $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ nin lineer birleşimi

$\vec{C} = a_1 . \vec{A} + a_2 . \vec{B}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = x.\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + y.\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x + y \\ x - y \end{bmatrix}$$

$-5x+y = 4$

$x-y = -2$

$-4x = 2$

$x = -\frac{1}{2}$

$x-y = -2$

$y = x+2$

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ olur ki

buradan $\vec{C} = -\frac{1}{2}\vec{A} + \frac{3}{2}\vec{B}$ yada

$\vec{C} = \frac{3\vec{B} - \vec{A}}{2}$ bulunur.

İKİ VEKTÖRÜN PARALELLİĞİ

$\vec{A}$ vektörü, $\vec{B}$ vektörüne paralel, $k \in R - \{0\}$, $\vec{A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ ve $\vec{B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ise

i) $\vec{A} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \boxed{\vec{A} = k \cdot \vec{B}}$ dir.

ii) $\vec{A} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$ dır.

$\frac{m+2}{3} = \frac{3}{-4}$

ÖRNEK

$\vec{A} = \begin{bmatrix} m+2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\vec{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ vektörleri veriliyor.

$\vec{B} = k \cdot \vec{A}$ ise **m değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{B} = k \cdot \vec{A} \Rightarrow \vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \frac{m+2}{3} = \frac{-3}{4}$

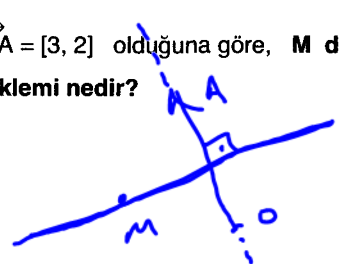
$4m+8 = -9$

$4m = -17$

$m = -\frac{17}{4}$ dür.

ÖRNEK

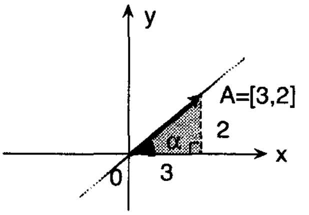
$M(2, -1)$ ve $\vec{OA} = [3, 2]$ olduğuna göre, **M den geçen ve OA doğrusuna dik olan doğrunun denklemi nedir?**



ÇÖZÜM $\tan\alpha = \frac{2}{3}$ olup OA doğrusunun eğimi $\frac{2}{3}$ dür. Doğruların diklik koşulu ;

$m_1 \cdot m_2 = -1$ den

OA doğrusuna dik doğrunun eğimi $-\frac{3}{2}$ bulunur.



Eğimi , $-\frac{3}{2}$ ve M(2, –1) den geçen doğru istenmektedir.

$y+1 = -\frac{3}{2}(x-2)$ den → $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

$3x+2y-4 = 0$ elde edilir.

ÖRNEK $\vec{A} = [k+2,\ -6]$ ve $\vec{B} = [-1,\ k-3]$ olmak üzere $\vec{A}$ vektörü $\vec{B}$ vektörüne paralel ise **k nın pozitif değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \frac{k+2}{-1} = \frac{-6}{k-3}$

$(k+2)(k-3) = 6$

$k^2 - k - 6 - 6 = 0$

$k^2 - k - 12 = 0$

Çarpanlar : –4, 3

Kökler : 4 , –3 olup, pozitif kök 4 dür.

ÖRNEK $\vec{A} = (4^{x+1},\ 9^{y-1})$, $\vec{B} = (8^{x-1},\ 3^{y+1})$ vektörleri eşit olduğuna göre **x + y toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM $\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow (4^{x+1},\ 9^{y-1}) = (8^{x-1},\ 3^{y+1})$

$\Rightarrow 4^{x+1} = 8^{x-1} \wedge 9^{y-1} = 3^{y+1}$

$\Rightarrow 2^{2x+2} = 2^{3x-3} \wedge 3^{2y-2} = 3^{y+1}$

$\Rightarrow 3x-3 = 2x+2 \wedge 2y-2 = y+1$

$\Rightarrow x = 5 \wedge y = 3$ den $x+y = 8$ bulunur.

ÖRNEK $\vec{A} = (3, -1)$, $\vec{B} = (k+1, 1)$, $\vec{C} = (2, -3)$ vektörleri veriliyor. $\vec{AB} \parallel \vec{C}$ ise **k nedir?**

ÇÖZÜM $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (k+1-3,\ 1+1) = (k-2,\ 2)$

$\vec{C} = (2, -3)$

$\vec{AB} \parallel \vec{C} \Rightarrow \frac{k-2}{2} = \frac{-2}{3}$

$3k-6 = -4$

$3k = 2$

$k = \frac{2}{3}$ olur.

ÖRNEK $\vec{A} = (a-1, a+2)$ vektörünün uzunluğu $\sqrt{17}$ birimdir. **a sayısı ne olabilir?**

ÇÖZÜM $|\vec{A}| = \sqrt{17}$

$$\sqrt{(a-1)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{17}$$
$$(a-1)^2 + (a+2)^2 = 17$$
$$a^2-2a+1+a^2+4a+4 = 17$$
$$2a^2+2a-12 = 0$$
$$a^2+a-6 = 0 \text{ dan } -3 \text{ ve } 2 \text{ bulunur.}$$

Çarpanlar : 3 −2

BİRİM VEKTÖR

Uzunluğu 1 birim olan vektörlere birim vektör denir.

$\vec{A} = [x_1, y_1]$ BİRİM VEKTÖR $\Rightarrow |\vec{A}| = 1 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1$ dir.

ÖRNEK $\vec{A} = [-1, 1]$ **vektörü birim vektör müdür?**

ÇÖZÜM $\vec{A}$ vektörü birim vektör değildir. Çünkü

$|\vec{A}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$ dir.

ÖRNEK $\vec{A} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ **vektörü birim vektör müdür?**

ÇÖZÜM $|\vec{A}| = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$ olduğundan $\vec{A}$ vektörü birim vektördür.

TEMEL BİRİM VEKTÖRLER

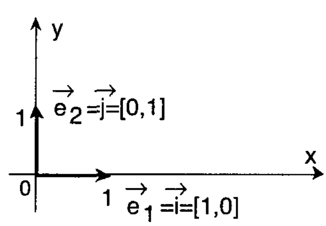
Düzlemde x ve y eksenleri üzerindeki temel birim vektörler sırasıyla,

$\vec{e}_1 = \vec{i} = [1, 0] \wedge \vec{e}_2 = \vec{j} = [0, 1]$ dir.

R^2 nin bazları

Düzlemdeki her $\vec{A} = [x_1, y_1]$ vektörü

$$\vec{A} = [x_1, y_1]$$
$$\vec{A} = [x_1, 0] + [0, y_1]$$
$$\vec{A} = x_1 [1, 0] + y_1 [0, 1]$$
$$\vec{A} = x_1 . \vec{e}_1 + y_1 . \vec{e}_2$$



$\vec{A} = x_1 . \vec{i} + y_1 . \vec{j}$ biçiminde temel birim vektörler türünden yazılabilir.

ÖRNEK $\vec{A} = [4, -7]$ **vektörünü** $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ **vektörleri türünden yazınız.**

ÇÖZÜM $\vec{A} = [4, -7] = [4, 0] + [0, -7] = 4 . [1, 0] - 7 [0, 1]$

$\vec{A} = 4\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2$ bulunur.

$4\vec{i} - 7\vec{j}$

BİR VEKTÖRÜN BİRİM VEKTÖRLERİ

$\vec{A} = [x, y]$ vektörü ile

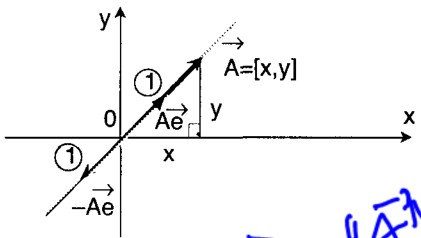
i) Aynı yönlü olan birim vektör;

$$\vec{A}_e = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{[x, y]}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

ii) Ters yönlü olan birim vektör ;

$$-\vec{A}_e = -\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = -\frac{[x, y]}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left[-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

iii) $|\vec{A}_e| = |-\vec{A}_e| = 1$ dir.



$\vec{A}_e = \frac{A}{|A|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$|\vec{A}_e| = 1$

$|\vec{A}| = 5$

ÖRNEK $\vec{A} = (3, 4)$ **vektörünün birim vektörlerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

i) $\vec{A}$ ü ile aynı yönlü birim vektörü :

$|\vec{A}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$$\vec{A}_e = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{[3, 4]}{5} = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$$

ii) $\vec{A}$ ü ile zıt yönlü birim vektörü :

$$-\vec{A}_e = -\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = -\frac{[3, 4]}{5} = \left[-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right] \text{ olur.}$$

ÖRNEK A = (6, 1) ve B = (3, 5) olduğuna göre $\vec{AB}$ **vektörü ile zıt yönlü birim vektör nedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = [3, 5] - [6, 1] = [3–6, 5–1] = [-3, 4]$ $\quad \vec{BA} = [3, -4]$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{AB}$ ü ile zıt yönlü birim vektör;

$$-\vec{AB}_e = -\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = -\frac{[-3, 4]}{5} = \left[\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right] \text{ elde edilir.}$$

DOĞRUSAL (LİNEER) BİLEŞİM

$x, y \in R$ olmak üzere $x.\vec{A} + y.\vec{B}$ vektör toplamına $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin lineer bileşimi denir.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ bir düzlemde sıfır vektöründen farklı ve birbirine paralel olmayan iki vektör iseler, aynı düzlemdeki her vektör $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ nin doğrusal (lineer) bileşimi olarak yazılabilir. $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ kümesine düzlemin **tabanı** denir.

Germe

Düzlemdeki her vektör tabanı, vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak yazılabilir.

$\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ vektörlerinden oluşan $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ kümesine temel taban denir.

$\boxed{\vec{A} = (x, y) = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2}$ yazıldığı unutulmamalıdır.

ÖRNEK

★) $\vec{A} = (3, -5) = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$

★) $\vec{B} = (0, 2) = 0\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = 2\vec{e}_2$

★) $\vec{C} = (-1, 0) = -\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 = -\vec{e}_1$

★) $\vec{D} = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = (5, 2)$

★) $\vec{E} = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (4, -1)$

★) $\vec{F} = 3\vec{e}_1 = (3, 0)$

★) $\vec{G} = -6\vec{e}_2 = (0, -6)$ olarak yazılabilir.

ÖRNEK

$\vec{A} = (-2, 4)$, $\vec{B} = (0, 2)$, $\vec{C} = (2, 6)$ ise **$\vec{A}$ nü, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazınız.**

ÇÖZÜM

$\vec{A}$ vektörü, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörlerinin lineer bileşimi ise, $\vec{A} = x\vec{B} + y\vec{C}$ olarak yazılabilmelidir. $(x, y \in R)$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = x.\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y.\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ 6y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ 2x + 6y \end{bmatrix} \Rightarrow 2y = -2 \quad \wedge \quad 2x+6y = 4$$

$y = -1$ $\quad$ $2x = 4-6y$

$2x = 4+6$

$x = 5$ bulunur.

$\vec{A} = x\vec{B} + y\vec{C} = \boxed{5\vec{B} - \vec{C}}$ olur.

ÖRNEK

$\vec{\vartheta}_1 = (a-2, 1)$, $\vec{\vartheta}_2 = (-1, a)$ ise **$\{\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2\}$ kümesinin R^2 de bir taban olması için a ne olamaz?**

ÇÖZÜM

$\vec{\vartheta}_1 \,//\, \vec{\vartheta}_2 \Rightarrow R^2$ de taban olamazlar.

$\vec{\vartheta}_1 \not\parallel \vec{\vartheta}_2 \Rightarrow R^2$ de taban olurlar.

$$\frac{a-2}{-1} = \frac{1}{a}$$

$a^2 - 2a = -1$

$a^2 - 2a + 1 = 0$

$(a-1)^2 = 0$

$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$ için R^2 de taban olamazlar.

$(V, \langle , \rangle) \rightarrow$ iç çarpım uzayı

İKİ VEKTÖRÜN SKALER (İÇ) ÇARPIMI

$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

1. $\langle , \rangle \geq 0$
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
3. $\langle k.u, v \rangle = k \langle u, v \rangle$

$\langle u, k.v \rangle = k \langle u, v \rangle$

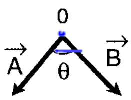
Sıfırdan farklı $\vec{A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ ve $\vec{B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ vektörleri arasındaki açı θ ise ;

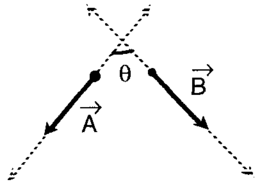
A) BİLEŞENLER TÜRÜNDEN :

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ nin iç çarpımı : $\boxed{\vec{A} \,.\, \vec{B} = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2}$ dır.

B) ARALARINDAKİ AÇI TÜRÜNDEN :

Vektörlerin başlangıç noktası orijin değilse; bir O noktasından bu iki vektöre eşit vektörler çizelim :





Bu durumda $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ nin iç çarpımı :

$$\vec{A} \,.\, \vec{B} = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = |\vec{A}| \,.\, |\vec{B}| \,.\, \cos\theta$$
$$\vec{A} \,.\, \vec{B} = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \| \vec{A} \| \,.\, \| \vec{B} \| \,.\, \cos\theta$$
dır.

$\vec{A} \,.\, \vec{B} = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$

Bu eşitlikten iki vektör arasındaki açıya ;

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \,.\, \vec{B}}{|\vec{A}| \,.\, |\vec{B}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \,.\, \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$
eşitliği ile ulaşılır.

Örnek : $\vec{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\cos\theta = \dfrac{2.5 + 3.2}{\sqrt{13} . \sqrt{29}}$

$= \dfrac{16}{\sqrt{13.29}}$

İÇ ÇARPIMIN ÖZELLİKLERİ :

1) $\vec{A} \,.\, \vec{A} = |\vec{A}|^2$

2) $\vec{A} \,.\, \vec{B} = \vec{B} \,.\, \vec{A}$

3) $\vec{A} \,.\, (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \,.\, \vec{B} + \vec{A} \,.\, \vec{C}$

4) $\vec{A} \,.\, \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$

5) $(\vec{A} \,.\, \vec{B})^2 \leq |\vec{A}|^2 \,.\, |\vec{B}|^2$

6) $\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \,.\, \vec{B} = 0$ (İki vektör dik ise skaler çarpımları 0 dır.)

$\vec{A} = [x_1, y_1] \wedge \vec{B} = [x_2, y_2]$ ise

$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \,.\, \vec{B} = 0 \Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ dır.

$\vec{A} \,.\, \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}| \cos\theta$

$\vec{A} \,.\, \vec{B} = 0$ ise $\vec{A} \perp \vec{B}$ veya $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ den enaz biri $\vec{0}$ dür.

7)
- **i.** $\vec{A} \,//\, \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \,.\, \vec{B} = |\vec{A}| \,.\, |\vec{B}|$
- **ii.** $\vec{A} \,//\, \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = k \,.\, \vec{B}$
- **iii.** $\vec{A} \,//\, \vec{B} \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ dır.

İki vektör paralel ise skaler çarpımları, uzunlukları çarpımına eşittir.

ÖRNEK $\vec{A} . \vec{A} = |\vec{A}|^2$ **olduğunu ispatlayınız.**

ÇÖZÜM $\vec{A} = [x, y]$ olsun.

$\vec{A} . \vec{A} = [x, y] . [x, y] = x.x + y.y = x^2 + y^2$ dir. Öte yandan

$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ olup buradan,

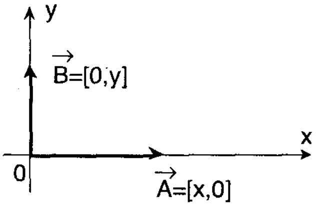
$|\vec{A}|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$ dir. Öyleyse

$\vec{A} . \vec{A} = x^2 + y^2 = |\vec{A}|^2$ elde edilir.

ÖRNEK $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} . \vec{B} = 0$ **olduğunu ispatlayınız.**

ÇÖZÜM

1. yol :



$\vec{A} . \vec{B} = [x, 0] . [0, y]$

$\vec{A} . \vec{B} = x.0 + 0.y = 0$ yada

$\vec{A} . \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \cos\theta$ dan

$\vec{A} . \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \underbrace{\cos 90°}_{0}$

$\vec{A} . \vec{B} = 0$ bulunur.

2. yol :

$\vec{A} = [x_1, y_1] \Rightarrow m_{\vec{A}} = \dfrac{y_1}{x_1}$

$\vec{B} = [x_2, y_2] \Rightarrow m_{\vec{B}} = \dfrac{y_2}{x_2}$ dir.

$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow m_{\vec{A}} . m_{\vec{B}} = -1$ den

$\dfrac{y_1}{x_1} . \dfrac{y_2}{x_2} = -1$

$x_1x_2 = -y_1y_2$

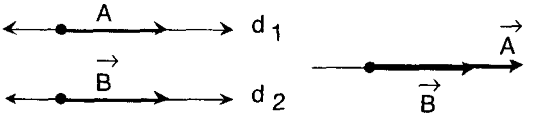
$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

$\vec{A} . \vec{B} = 0$ bulunur.

ÖRNEK $\vec{A} // \vec{B} \Rightarrow \vec{A} . \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}|$ **olduğunu ispatlayınız.**

ÇÖZÜM

1. yol :



$\vec{A} . \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \cos\theta$

$\vec{A} . \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \underbrace{\cos 0°}_{1}$

$\vec{A} . \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}|$ dır.

2. yol :

$\vec{A} = [x_1, y_1] \Rightarrow m_{\vec{A}} = \dfrac{y_1}{x_1}$

$\vec{B} = [x_2, y_2] \Rightarrow m_{\vec{B}} = \dfrac{y_2}{x_2}$

$\vec{A} \,//\, \vec{B} \Rightarrow m_{\vec{A}} = m_{\vec{B}} \Rightarrow \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$ yada

$\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ bulunur.

UYARI : $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ ve $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ zıt yönlü vektörler ise :

$\vec{A} \,.\, \vec{B} = -|\vec{A}| \,.\, |\vec{B}|$ olur.

ÖRNEK

A(–3, 4), B(1, –5), C(4, 3), D(–1, 6) noktaları veriliyor. **$\vec{AB} \,.\, \vec{CD}$ iç çarpımının değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ -5-4 \end{bmatrix} = (4, -9)$

$\vec{CD} = \vec{D} - \vec{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-4 \\ 6-3 \end{bmatrix} = (-5, 3)$

$\vec{AB} \,.\, \vec{CD} = (4, -9) \,.\, (-5, 3) = 4 \,.\, (-5) + (-9) \,.\, 3$

$= -20 - 27 = -47$ bulunur.

ÖRNEK

$\vec{A} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ $\quad -3.(a+1) + 4.(-1) = 4$

$\vec{B} = (a+1)\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ dir. $\vec{A} \,.\, \vec{B} = 4$ ise **a değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$\vec{A} = (-3, 4)$

$\vec{B} = (a+1, -1)$

$\vec{A} \,.\, \vec{B} = 4$

$(-3, 4) \,.\, (a+1, -1) = 4$

$-3(a+1) + 4.(-1) = 4$

$-3a - 3 - 4 = 4$

$-3a = 11 \Rightarrow a = -\dfrac{11}{3}$ bulunur.

ÖRNEK

$\vec{A} = (-2, 1)$, $\vec{B} = (2, 2)$ **vektörleri arasındaki açının kosinüsü nedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{A} = (-2, 1) \Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{5}$

$\vec{B} = (2, 2) \Rightarrow |\vec{B}| = 2\sqrt{2}$

$\vec{A} \,.\, \vec{B} = (-2, 1) \,.\, (2, 2) = -4 + 2 = -2$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \,.\, \vec{B}}{|\vec{A}| \,.\, |\vec{B}|} = \dfrac{-2}{\sqrt{5} \,.\, 2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ olur.

ÖRNEK $\vec{A} = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{B} = \vec{e}_1 - (2-m)\,\vec{e}_2$ vektörleri dik olduğuna göre **m nedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{A} = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (4, -1)$

$\vec{B} = \vec{e}_1 - (2-m)\,\vec{e}_2 = (1, -2+m)$

$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ dır.

$(4, -1) \cdot (1, -2+m) = 0$

$4+2-m = 0 \Rightarrow m = 6$ bulunur.

ÖRNEK $\vec{A} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$, $\vec{B} = (2\cos\alpha, \sin\alpha)$ **vektörlerinin iç çarpımı nedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sin\alpha \cdot 2\cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 3\underbrace{\sin\alpha\ \cos\alpha}_{1/2\,\sin 2\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= \frac{3}{2}\sin 2\alpha$ bulunur.

ÖRNEK $\vec{a} = -6\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ve $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + (\log_4 x)\,\vec{e}_2$ olmak üzere $\vec{a}$ vektörü $\vec{b}$ vektörüne paralel ise **x değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= [-6, 1]\\ \vec{b} &= [3, \log_4 x]\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{-6}{3} = \frac{1}{\log_4 x}$$

$\frac{1}{\log_4 x} = -2$

$\log_4 x = -\frac{1}{2}$

$x = (4)^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1}$

$x = \frac{1}{2}$ dir.

ÖRNEK $\vec{A} = [\log_3 x^{-1}, \cot\theta]$, $\vec{B} = [2, 3\tan\theta]$ ve $\vec{A} \cdot \vec{B} = 1$ ise **x nedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 1$

$2 \cdot \log_3 \frac{1}{x} + 3\underbrace{\tan\theta \cdot \cot\theta}_{1} = 1$

$2\log_3 \frac{1}{x} = -2$

$\log_3 \frac{1}{x} = -1$

$\frac{1}{x} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3$ dür.

$G = \left(\frac{-1+2+5}{3}, \frac{3-1+1}{3}\right)$

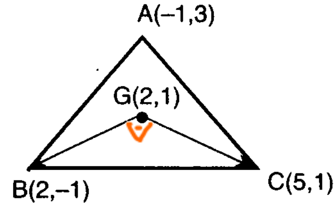
ÖRNEK A(–1, 3), B(2, –1) ve C(5, 1) olmak üzere ABC üçgeninin ağırlık merkezi G ise

$\vec{GB} \cdot \vec{GC}$ **skaler çarpımı nedir?**

$\vec{GB} = (0, -2)$, $\vec{GC} = (3, 0)$ $G = (2, 1)$

$\vec{GB} \cdot \vec{GC} = 0$

ÇÖZÜM



$G\left(\dfrac{-1+2+5}{3}, \dfrac{3-1+1}{3}\right)$

$G(2, 1)$

$\vec{GB} = \vec{B} - \vec{G} = [2, -1] - [2, 1]$

$\vec{GB} = [0, -2]$

$\vec{GC} = \vec{C} - \vec{G} = [5, 1] - [2, 1]$

$\vec{GC} = [3, 0]$

$\vec{GB} \cdot \vec{GC} = [0, -2] \cdot [3, 0]$

$= 0.3 + (-2).0$

$= 0$ bulunur.

ÖRNEK $\vec{A} = [\ln(x+1), e^x]$ ve $\vec{B} = [-1, e^{-x}]$ olmak üzere $\vec{A}$ vektörü $\vec{B}$ vektörüne dik ise **x nedir?**

ÇÖZÜM $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ dır.

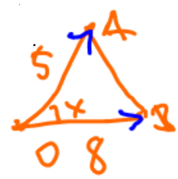
$-\ln(x+1) + e^x \cdot e^{-x} = 0$

$-\ln(x+1) + 1 = 0$

$\ln(x+1) = 1$

$\ln(x+1) = \ln e$

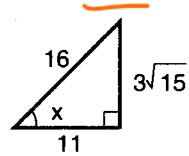
$x+1 = e \Rightarrow x = e-1$ dir.



ÖRNEK $|\vec{OA}| = 5$

$|\vec{OB}| = 8$ ve $s(A\hat{O}B) = x°$ dir. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ve $\sin x = \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$ ise **$|\vec{A} + \vec{B}|$ nedir?**

ÇÖZÜM



$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos x$

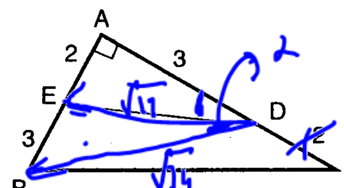
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 5 \cdot 8 \cdot \dfrac{11}{16} = \dfrac{55}{2}$ dir.

$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$

$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = 25 + 64 + 55 = 144 \Rightarrow |\vec{A} + \vec{B}| = 12$ bulunur.

ÖRNEK Şekilde $\hat{A}$ açısı dik olan ABC ikizkenar dik üçgeni verilmiştir. $|AE| = |DC| = 2$ birim ve $|EB| = 3$ birimdir.

$\vec{DE} \cdot \vec{DB}$ iç çarpımının değeri kaçtır?



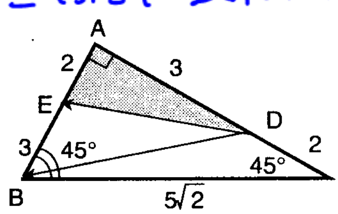
$9 = 13 + 34 - 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{34} \cdot \cos\alpha$

ÇÖZÜM

$\underset{\downarrow}{\vec{DE}} \cdot \underset{\downarrow}{\vec{DB}}$

$= (\vec{DA} + \vec{AE}) \cdot (\vec{DC} + \vec{CB})$

$= \vec{DA} \cdot \vec{DC} + \vec{DA} \cdot \vec{CB} + \underbrace{\vec{AE} \cdot \vec{DC}}_{0} + \vec{AE} \cdot \vec{CB}$



$= 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= -6 + 15 + 10 = 19$ bulunur.

$|\vec{DE}| \cdot |\vec{DB}| \cdot \cos\alpha : \cancel{\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}} \cdot \dfrac{19}{\cancel{\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}}} = 19$ $\cos\alpha = \dfrac{19}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}}$

ÖRNEK

$\vec{A} + \vec{B} = 3\vec{e}_1 - \sqrt{3}\,\vec{e}_2$

$|\vec{A}| = \sqrt{3}$ ve $|\vec{B}| = 3$ ise $\vec{A} \cdot \vec{B}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{A} + \vec{B} = [3, -\sqrt{3}\,]$

$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$

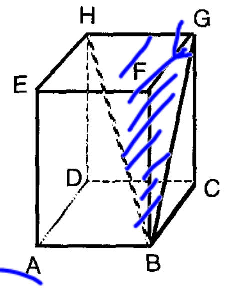
$12 = 3 + 9 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$

$2\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ dır.

ÖRNEK

Şekildeki küpün bir ayrıtı a birimdir. $\vec{BH} \cdot \vec{BG} = 4$ ise **a değeri kaçtır?**



ÇÖZÜM

$\vec{BH} \cdot \vec{BG} = 4$ → yüzey köşegeni : $\sqrt{2}\,a$

↓

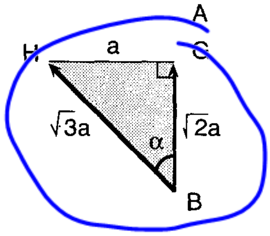
cisim köşegeni : $\sqrt{3}\,a$

$|\vec{BH}| \cdot |\vec{BG}| \cdot \cos\alpha = 4$

$\cancel{\sqrt{3}a} \cdot \sqrt{2}a \cdot \dfrac{\sqrt{2}a}{\cancel{\sqrt{3}a}} = 4$

$2a^2 = 4$

$a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ dir.



ÖRNEK

ABCD bir paralelkenar, A = (m, n), B = (0, –1), C = (5, –3) ve D = (2, 1) ise

$\tan(\vec{AB}, \widehat{\ } \vec{AC})$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

ABCD paralelkenar ise ;

$m+5 = 2 \quad \wedge \quad n-3 = 0$

$m = -3 \quad \wedge \quad n = 3$ Yani

A(–3, 3) olur.

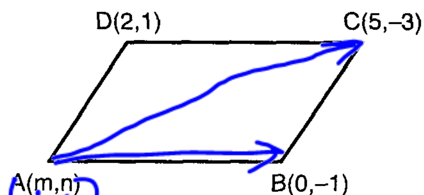
$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = [0, -1] - [-3, 3] = [3, -4]$

$|\vec{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = [5, -3] - [-3, 3] = [8, -6]$

$|\vec{AC}| = \sqrt{64 + 36} = 10$

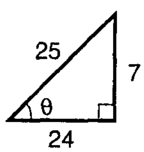
$\underbrace{\cos(\vec{AB}, \widehat{\ } \vec{AC})}_{\theta} = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \dfrac{24 + 24}{5 \cdot 10} = \dfrac{48}{50} = \dfrac{24}{25}$



(-3,3)

2+0 = m+5 => m = -3

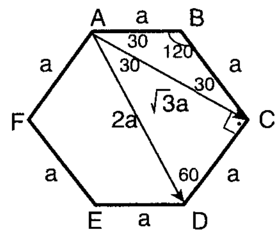
1+(-1) = n-3 => n = 3



$\text{tg}(\vec{AB}, \widehat{\ } \vec{AC}) = \text{tg}\theta = \dfrac{7}{24}$ bulunur.

ÖRNEK

ABCDEF düzgün altıgen, $|AB| = a$ birimdir. **$\vec{AD} \cdot \vec{AC}$ iç çarpımının değeri kaçtır?**



ÇÖZÜM

$m\hat{A}' = \frac{360}{6} = 60°$

$m\hat{A} = 120°$ olup tüm iç açıları $120°$ dir.

$\vec{AD} \cdot \vec{AC} = |\vec{AD}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos\theta$

$= 2a \cdot \sqrt{3}\,a \cdot \cos 30$

$= 2a \cdot \sqrt{3}\,a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 3a^2$ bulunur.

ÖRNEK

ABC ikizkenar üçgen, $|CA| = |CB| = 2$ birim ve $s(\hat{A}) = 30°$ ise **$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} - \vec{BC})$ değeri kaçtır?**

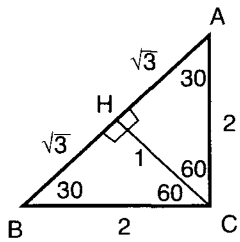
ÇÖZÜM

$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} - \vec{BC})$

$= \vec{AB} \cdot \underbrace{(\vec{AC} + \vec{CB})}_{\vec{AB}}$

$= \vec{AB} \cdot \vec{AB}$

$= |\vec{AB}|^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$ elde edilir.



ÖRNEK

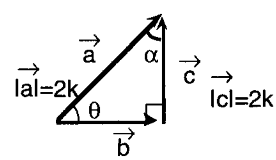
$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, $|\vec{a}| = 2|\vec{c}|$ koşullarını sağlayan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ leri için **$\vec{a}$ ve $\vec{c}$ leri arasındaki açının kosinüsü nedir?**

ÇÖZÜM

$|\vec{c}| = k$ ise $|\vec{a}| = 2k$ dır.

$(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \alpha$ olduğundan

$\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \cos\alpha = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$ dir.

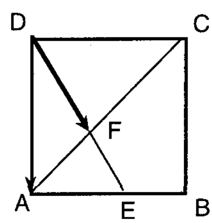


ÖRNEK

ABCD karesinde

$|AE| = |EB|$, $|AD| = 4$ cm olup

$\vec{DA} \cdot (\vec{DF} + \vec{DC})$ skaler çarpımı kaçtır?



ÇÖZÜM

$\vec{DA} \cdot (\vec{DF} + \vec{DC})$

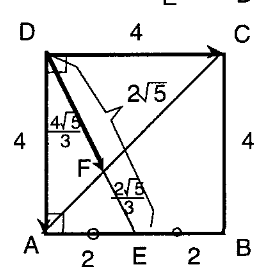
$= \vec{DA} \cdot \vec{DF} + \vec{DA} \cdot \vec{DC}$

$= |\vec{DA}| \cdot |\vec{DF}| \cdot \cos\alpha + |\vec{DA}| \cdot |\vec{DC}| \cdot \cos 90°$

$= 4 \cdot \frac{\cancel{4\sqrt{5}}}{3} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\sqrt{\cancel{5}}} + \cancel{4 \cdot 4} \cdot 0$

$= \frac{32}{3}$ bulunur.

$\overset{\Delta}{AFE} \sim \overset{\Delta}{CFD}$



$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{|EF|}{|FD|} \Rightarrow |FD| = 2|EF|$

ÖRNEK $\vec{A} = \sin 25° \cdot \vec{e}_1 + \cos 25° \cdot \vec{e}_2$

$\vec{B} = \cos 35° \, \vec{e}_1 + \sin 35° \cdot \vec{e}_2$ **vektörlerinin iç çarpımı nedir?**

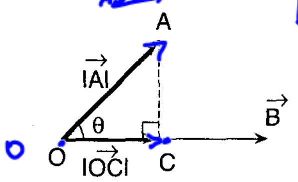
ÇÖZÜM $\vec{A} = [\sin 25°, \cos 25°]$

$\vec{B} = [\cos 35°, \sin 35°]$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sin 25° . \cos 35° + \cos 25° \cdot \sin 35° = \sin(25° + 35°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dir.

projection gölge

İZDÜŞÜM VEKTÖRÜ



i) $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açı θ olsun.
$\vec{A}$ nün $\vec{B}$ ü üzerindeki dik izdüşümü $\vec{OC}$ ü dür.

AOC dik üçgeninden : $\cos\theta = \frac{|\vec{OC}|}{|\vec{A}|}$

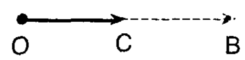
$|\vec{OC}| = |\vec{A}| \cdot \cos\theta$ bulunur. ①

Öte yandan $\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$ idi. ① eşitliğinde yerine konursa $|\vec{OC}| = \cancel{|\vec{A}|} \cdot \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\cancel{|\vec{A}|} \cdot |\vec{B}|}$

$$\boxed{\text{Dikizdüşüm vektörünün uzunluğu : } |\vec{OC}| = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}}$$

elde edilir.

ii) $\vec{B}$ nün kendisi ile aynı yönlü ve k birim uzunluğundaki vektörü $= k \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ dir.



$\vec{OC}$ nün uzunluğu $= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}$ idi. Öyleyse $\vec{A}$ nın $\vec{B}$ ü üzerindeki dik izdüşüm vektörü,

Yani $\vec{OC} = |\vec{OC}| \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$

$$\boxed{\vec{OC} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \cdot \vec{B}}$$

elde edilir.

$\sqrt{36+64} = 10$

ÖRNEK **[–6, 8] vektörünün [0, 2] vektörü üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğu kaç birimdir?**

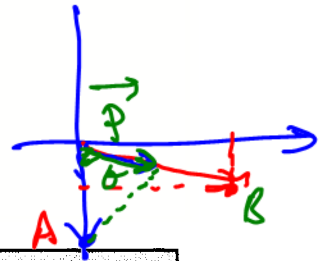
ÇÖZÜM

$|\vec{OC}| = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{0 + 16}{10 . 2} = \frac{8}{5}$

ÖRNEK $\vec{A} = [0, -5]$ ve $\vec{B} = [4, -3]$ olduğuna göre **$\vec{A}$ nün $\vec{B}$ ü üzerindeki dik izdüşüm vektörü olan $\vec{P}$ vektörünü bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\vec{P} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\vec{B} = \frac{15}{25}\cdot[4,-3] = \left[\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right]$$



UYARI :

1) $ax + by + c = 0$ doğrusunun doğrultman vektörleri (doğruya paralel vektörleri) :

$ax + by + c = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b}$ dir. Paralellik koşulu eğimlerinin eşit olmasıdır. Yani vektörlerin eğimi de $-\frac{a}{b}$ olmalıdır. $[x, y]$ vektörünün eğimi $\frac{y}{x}$ olduğundan istenilen vektörler :

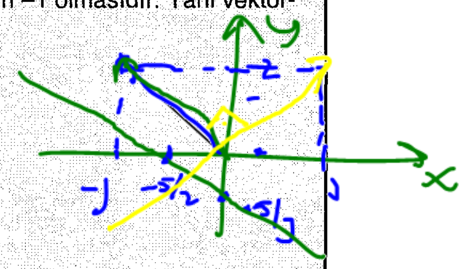
$\vec{A} = (-b, a) \vee \vec{B} = (b, -a)$
$\vec{A} = (-kb, ka) \vee \vec{B} = (kb, -ka)$ dır.

$ax+by+c=0$
$2x+3y+5=0$
$\vec{A}=(-3,2)$
$\vec{B}=(3,-2)$

2) $ax + by + c = 0$ doğrusuna dik vektörler :

$ax + by + c = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b}$ dir. Diklik koşulu eğimleri çarpımının -1 olmasıdır. Yani vektörlerin eğimi $\frac{b}{a}$ olmalıdır. Öyleyse istenilen vektörler :

$\vec{C} = (a, b) \vee \vec{D} = (-a, -b)$
$\vec{C} = (ka, kb) \vee \vec{D} = (-ka, -kb)$ dır.



3) $R \times R = R^2$ de (düzlemde) :

$\vec{A} = (x_1, y_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2)$ iken vektör bileşenlerinin oluşturduğu determinantta ;

i) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \Rightarrow$ Vektörler;
- Lineer (Doğrusal) bağımlıdırlar.
- Geometrik olarak aynı düzlemde bulunmaktadırlar.
- Bulundukları uzayı germezler.
- R^2 de taban oluşturmazlar.

ii) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0 \Rightarrow$ Vektörler;
- Lineer (Doğrusal) bağımsızdırlar.
- Bulundukları uzayı gererler.
- R^2 de taban oluştururlar.

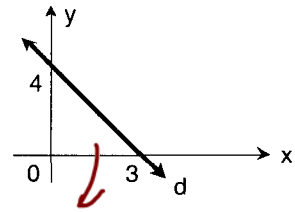
ÖRNEK $[-3, 6]$ ve $[2, m]$ vektörleri lineer bağımsız ise **m in <u>alamayacağı</u> değer nedir?**

ÇÖZÜM

$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3m - 12 = 0$

$m = -4$ olur

ÖRNEK **Şekildeki d doğrusunun denklemini yazarak doğruya paralel ve dik olan vektörleri yazınız.**



ÇÖZÜM $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + 3y = 12$

$4x + 3y - 12 = 0$ bulunur.

$4x + 3y - 12 = 0$ doğrusunun :

Doğrultman vektörleri : $(-b, a) \vee (b, -a)$

$(-3, 4) \vee (3, -4)$

Dik vektörleri : $(a, b) \vee (-a, -b)$

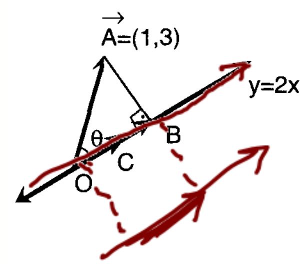
$(4, 3) \vee (-4, -3)$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

$\boxed{4x + 3y - 12 = 0}$

ÖRNEK $\vec{A} = (1, 3)$ **ün $y = 2x–3$ doğrusu üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğu kaç birimdir?**

ÇÖZÜM



$|\vec{OB}| = |\vec{A}| \cdot \cos\theta \qquad |\vec{A}| = \sqrt{10}$

$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$

$C(1, 2)$ noktasını alalım. $\quad |\vec{OC}| = \sqrt{5}$

$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OC}| \cdot \cos\theta$

$7 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cos\theta \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{7}{\sqrt{50}}$

$|\vec{OB}| = \sqrt{10} \cdot \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$

ÖRNEK Dik koordinat sisteminde $\vec{u} = [\cos\alpha, \cos 2\alpha]$ vektörü veriliyor. α **değiştikçe** $\vec{u}$ **vektörünün bitim (uç) noktasının geometrik yeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{u} = [\underbrace{\cos\alpha}_{x}, \underbrace{\cos 2\alpha}_{y}]$

$y = \cos 2\alpha$ (Yarım açı uygulanırsa)

$y = 2\cos^2\alpha - 1$

$y = 2\underbrace{(\cos\alpha)}_{x}^2 - 1$

$y = 2x^2 - 1$ bulunur.

$\left.\begin{array}{r} -1 \le \cos\alpha \le 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{array}\right\}$ x için sınırlı bir aralık olacağından y için de sınırlı bir aralık olur.

Yani aranılan geometrik yer bir parabol parçasıdır.

ÖRNEK

R^2 uzayında aşağıda verilen vektör ikililerinden hangisi bu uzayı gerer (taban vektörleridir)?

A) (–2, 6), (1, –3) B) (1, 2), (0, 0) C) (0, 1), (0, 2)

D) (6, –4), (–3, 2) E) (1, 2), (2, 3)

ÇÖZÜM

Vektörlerin bulundukları uzayı germesi için (taban oluşturması için) determinant sıfırdan farklı olmalıdır. Yada paralel olmamalıdırlar.

A) $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$, germezler.

B) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, germezler.

C) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, germezler.

D) $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$, germezler.

E) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$, gererler.

YANIT "E"

ÜÇ BOYUTLU VEKTÖR UZAYINDA İŞLEMLER

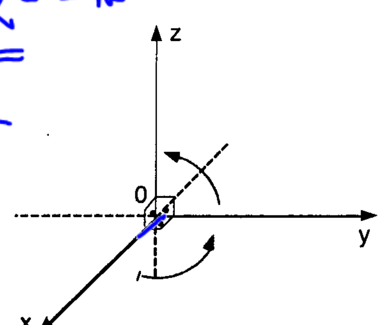
$R^3 = R \times R \times R$

UZAYDA KOORDİNAT SİSTEMİ

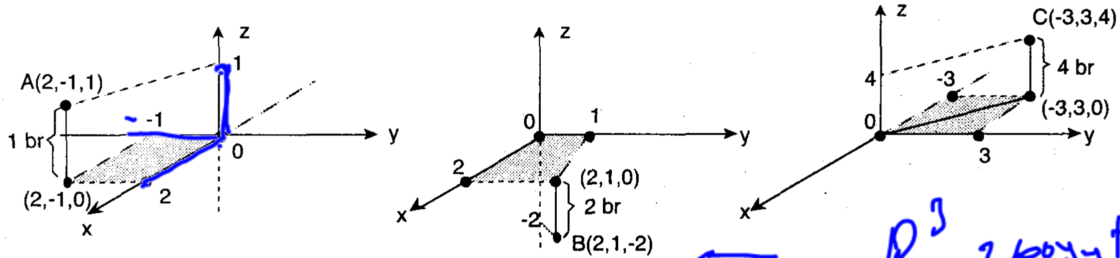
Uzaydaki her bir noktaya bir sıralı (a, b, c) üçlüsü, her (a, b, c) sıralı üçlüsüne de uzayda bir nokta karşı gelir.

P(a, b, c)

apsis ordinat kod



ÖRNEK **A(2, –1, 1), B(2, 1, –2) ve C(–3, 3, 4) noktalarını uzayda gösteriniz.**



$\mathbb{R}^3$ 3 boyutlu

İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK :

Uzayda verilen $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık :

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK **A(2, –1, 1) ve B(1, –2, 3) noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?**

ÇÖZÜM

$|AB| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

ÖRNEK P(4, 2, 4), Q(t, –2, 1) noktaları arasındaki uzaklık 13 birim ise **t nedir?**

ÇÖZÜM

$|PQ| = \sqrt{(4-t)^2 + 16 + 9} = 13$

$(4-t)^2 = 144 \Rightarrow |4-t| = 12$

$4-t = 12 \quad 4-t = -12$

$t = -8 \quad t = 16$

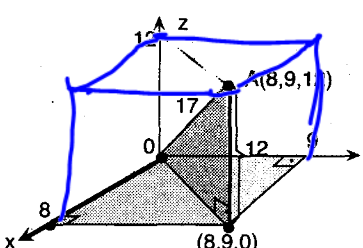
$O(0,0,0)$

Not : $P(a, b, c)$ noktasının orijine olan uzaklığı $|OP| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dir.

ÖRNEK **A(8, 9, 12) noktasının orijine olan uzaklığı nedir?**

ÇÖZÜM

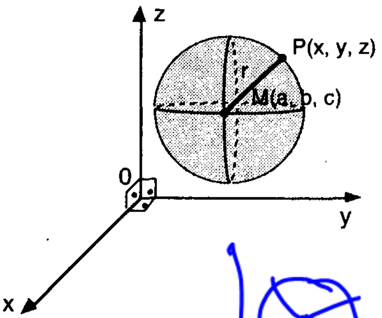
$\sqrt{8^2 + 9^2 + 12^2}$



$[OA] \rightarrow$ cisim köşegeni

KÜRE

Uzayda bir M(a, b, c) noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine **küre** denir.



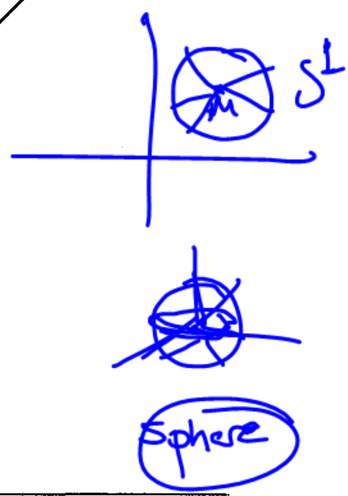
Kürenin merkezi : M(a, b, c)

Kürenin yarıçapı : |MP| = r

Küreye ait bir nokta : P(x, y, z) ise |PM| = r olmalıdır.

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r$ de her iki yanın karesi alınırsa

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$ olur.



$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$ de gerekli açılımlar yapılır ve düzenlemeye gidilirse

$$x^2+y^2+z^2 \underbrace{-2a}_{D}\,x \underbrace{-2b}_{E}\,y \underbrace{-2c}_{F}\,z + \underbrace{a^2+b^2+c^2-r^2}_{G} = 0$$

$$x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

$$M(a, b, c) = M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{F}{2}\right)$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2+E^2+F^2-4G}}{2}$$ elde edilir.

$S^2(r)$

UYARI : **i)** M(0, 0,0) ise $\boxed{x^2+y^2+z^2=r^2}$ olur. (Standart yapıdaki küre ya da merkezil küre)

ii) M(0, 0, 0) ve r = 1 ise $\boxed{x^2+y^2+z^2=1}$ olur. (Merkezil birim küre)

$\hookrightarrow S^2(1)$

ÖRNEK **Merkezi (3, 0, 0) olan ve orijinden geçen kürenin denklemi ve alanı nedir?**

ÇÖZÜM

M(3, 0, 0) P(0, 0, 0)

$r = |\vec{MP}| = \sqrt{9} = 3$

$\boxed{(x-3)^2+y^2+z^2=9}$

$A = 4\pi r^2 = 36\pi$

ÖRNEK **Merkezi M(4, –1, 2) ve yarıçapı 5 olan kürenin denklemi nedir?**

ÇÖZÜM $(x-4)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 = 25$ yada

$x^2+y^2+z^2-8x+2y-4z-4=0$ bulunur.

ı kürenin merkezinin koordinatları ve

ÇÖZÜM $a = -\frac{\ }{2} = \frac{\ }{2} = 3$, $b = -\frac{\ }{2} = -\frac{\ }{2} = -2$, $c = -\frac{\ }{2} = 0$

M(3, –2, 0)

$$r = \frac{\sqrt{D^2+E^2+F^2-4G}}{2} = \frac{\sqrt{36+16-36}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ olur.}$$

UZAYDA VEKTÖRLER

u, v, w

1) $\vec{\vartheta} = (a, b, c)$ vektörünün uzunluğu – boyu – normu:

$\|\vec{\vartheta}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dir.

2) $\|\vec{\vartheta}\| = 1$ ise $\vec{\vartheta} = (a, b, c)$ vektörüne **birim vektör** denir.

3) Başlangıç noktası $A(x_1, y_1, z_1)$ ve bitim noktası $B(x_2, y_2, z_2)$ olan $\vec{AB}$ vektörünün konum (yer) vektörü $\vec{OP}$ ise:

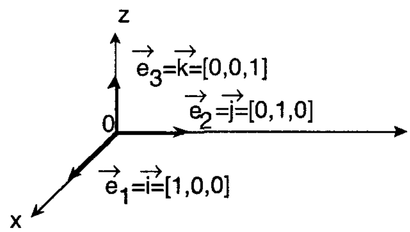
$\vec{OP} = \vec{B} - \vec{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ dir.

4) Standart birim vektörler:

$\vec{e_1} = \vec{i} = [1, 0, 0] = (1, 0, 0)$

$\vec{e_2} = \vec{j} = [0, 1, 0] = (0, 1, 0)$

$\vec{e_3} = \vec{k} = [0, 0, 1] = (0, 0, 1)$



$\vec{A} = [x, y, z]$

$\vec{A} = [x, 0, 0] + [0, y, 0] + [0, 0, z]$

$\vec{A} = x.[1,0,0] + y.[0,1,0] + z.[0,0,1]$

$\begin{cases} \vec{A} = x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2} + z.\vec{e_3} \\ \vec{A} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \end{cases}$

biçiminde yazılabilir.

5) Vektörlerde toplama – çıkarma – bir skaler ile çarpma

$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ ise;

$\vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$\vec{A} - \vec{B} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$

$k.\vec{A} = (kx_1, ky_1, kz_1)$ $(k \in R)$

6) $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ **ve** $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ **vektörlerinin paralel olma koşulu:**

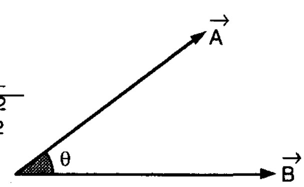
$\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$ ~~dir.~~ $= k$

7) $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ **ve** $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ **vektörlerinin skaler (iç) çarpımı:**

a) $\vec{A}.\vec{B} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ (Bileşenler türünden)

b) $\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\cos\theta$ (Aralarındaki açı türünden)

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,.\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



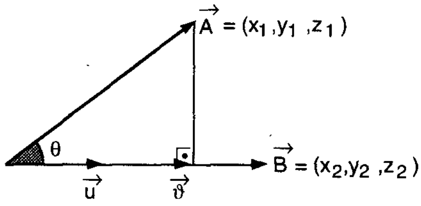
c) $\vec{A} \neq \vec{O}$ ve $\vec{B} \neq \vec{O}$ olmak üzere,

$\vec{A}.\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$ dir. (İki vektörün diklik koşulu)

$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$ dan

$\boxed{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0}$ bulunur.

8) Bir vektörün diğer bir vektör üzerindeki dik izdüşüm vektörü:



a) $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{B}\|} \cdot \vec{B}$ ($\vec{u}$ vektörü $\vec{B}$ ile aynı yönlü birim vektördür .)

b) $\|\vec{\vartheta}\| = \|\vec{A}\|.\cos\theta$

$$\|\vec{\vartheta}\| = \|\vec{A}\| \cdot \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|} \Rightarrow \|\vec{\vartheta}\| = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$$

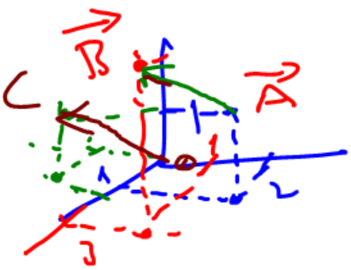
c) $$\vec{\vartheta} = \|\vec{\vartheta}\|.\vec{u} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{B}\|} \cdot \left(\frac{1}{\|\vec{B}\|} \cdot \vec{B}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{\vartheta} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} \cdot \vec{B}}$$

9) R^3 de: $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{C} = (x_3, y_3, z_3)$ vektörlerinin lineer bağımlı (geometrik olarak düzlemsel) olma koşulu:

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ dır.}$$

10) R^3 de $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{C} = (x_3, y_3, z_3)$ vektörlerinin lineer bağımsız olma koşulu:

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ dır.}$$



11) Lineer (doğrusal) bileşim :

$a_1, a_2, \ldots a_n \in R$ olmak üzere

$\vec{u} = a_1 . \vec{V}_1 + a_2 . \vec{V}_2 + a_3\vec{V}_3 + \ldots a_n . \vec{V}_n$ ise

$\vec{u}$ vektörüne $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 \ldots \vec{V}_n$ vektörlerinin lineer bileşimi denir.

$\vec{OC} = \vec{AB}$

ÖRNEK $\vec{A} = (1, 2, 1)$, $\vec{B} = (3, 1, 2)$ vektörleri veriliyor. $\vec{AB}$ **vektörünü bularak uzunluğunu hesaplayınız.** $\vec{AB}$ **vektörünü uzayda gösteriniz.**

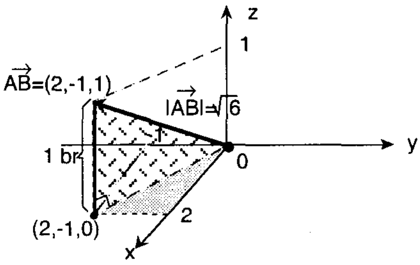
$\vec{AB} = (2, -1, 1)$ $\quad |\vec{AB}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

ÇÖZÜM

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (3, 1, 2) - (1, 2, 1)$

$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 1)$ dir.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ br olur.



ÖRNEK

$\overrightarrow{A} = (1, a, -a)$, $\overrightarrow{B} = (a, 1, -1)$ *vektörleri veriliyor.*

$|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{3}$ ise **a nın alabileceği değerler çarpımı nedir?**

ÇÖZÜM

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

$\overrightarrow{AB} = [a, 1, -1] - [1, a, -a]$

$\overrightarrow{AB} = [a-1, 1-a, -1+a]$ olur.

$$|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{(a-1)^2 + (1-a)^2 + (a-1)^2} = 2\sqrt{3}$$

$(1-a)^2 = (a-1)^2$ olduğundan

$$\sqrt{3(a-1)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\,.\,|a-1| = 2\sqrt{3}$$

$$|a-1| = 2$$

$a-1 = 2 \quad \vee \quad a-1 = -2$

$a = 3 \quad \vee \quad a = -1$ den

a nın alabileceği değerler çarpımı –3 dür.

ÖRNEK

$\overrightarrow{A} = (5, -4, 2)$

$\overrightarrow{B} = (2, -2, 6)$ vektörleri veriliyor.

a) $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ **b)** $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ **c)** $2\overrightarrow{A} - 4\overrightarrow{B}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

a) $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (5, -4, 2) + (2, -2, 6) = (7, -6, 8)$

b) $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = (5, -4, 2) - (2, -2, 6) = (3, -2, -4)$

c) $2\overrightarrow{A} = 2(5, -4, 2) = (10, -8, 4)$

$4\overrightarrow{B} = 4(2, -2, 6) = (8, -8, 24)$

$2\overrightarrow{A} - 4\overrightarrow{B} = (10, -8, 4) - (8, -8, 24) = (2, 0, -20)$ bulunur.

ÖRNEK $\vec{u} = (3, 6, x)$, $\vec{\vartheta} = (1, y, -2)$ ve $\vec{u} \,//\, \vec{\vartheta}$ ise **x+y nedir?**

$\frac{3}{1} = \frac{6}{y} = \frac{-x}{2}$

ÇÖZÜM $\vec{u} \,//\, \vec{\vartheta} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ den

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{y} = \frac{x}{-2} = 3$$

$$x = -6 \quad \wedge \quad 3y = 6$$

$$y = 2$$

$x+y = -6 + 2 = -4$ elde edilir.

ÖRNEK $\vec{m} = (5, 1, a)$ ve $\vec{n} = (1, 3, 4)$ vektörleri dik ise **a nedir?**

ÇÖZÜM $\vec{m} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{m} \,.\, \vec{n} = 0$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

$$5 + 3 + 4a = 0$$

$$4a = -8$$

$a = -2$ dir.

ÖRNEK A(2, –1, 1) , B(1, –2, 3) noktaları veriliyor. $\vec{A}$ **ile** $\vec{AB}$ **vektörlerinin** $\vec{A} \,.\, \vec{AB}$ **iç çarpımı kaçtır?**

$(-1, -1, 2)$

$-2+1+2=1$

ÇÖZÜM

$\vec{A} = (2, -1, 1)$

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (1, -2, 3) - (2, -1, 1)$

$\vec{AB} = (-1, -1, 2)$

$\vec{A} \,.\, \vec{AB} = (2, -1, 1) \,.\, (-1\; -1, 2)$

$= -2 + 1 + 2 = 1$ dir.

$\cos\theta = \frac{\vec{A} \,.\, \vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}$

ÖRNEK $\vec{A} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (1, 2, 1)$

$\vec{B} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ **vektörleri arasındaki açı kaç derecedir?**

ÇÖZÜM

$\vec{A} = (1, 2, 1) \quad \wedge \quad |\vec{A}| = \sqrt{6}$

$\vec{B} = (2, 1, -1) \quad \wedge \quad |\vec{B}| = \sqrt{6}$ olup

$\cos\theta = \frac{\vec{A} \,.\, \vec{B}}{|\vec{A}| \,.\, |\vec{B}|} = \frac{2 + 2 - 1}{\sqrt{6} \,.\, \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ den $\theta = 60°$ bulunur.

ÖRNEK $\vec{A} = (2, -2, 1)$ **vektörü ile aynı yönlü birim vektör nedir?**

ÇÖZÜM $\vec{A}_e = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$, $|\vec{A}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\vec{A}_e = \dfrac{(2,-2,1)}{3} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ olur.

ÖRNEK **$\vec{A} = (1, -1, 1)$ vektörünün $\vec{B} = (4, -4, 2)$ vektörü üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğu nedir?**

ÇÖZÜM İstenilen vektör : $\vec{\vartheta}$ ise

$\vec{\vartheta} = \boxed{\dfrac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{|\vec{B}|^2}} \,.\, \vec{B} = \dfrac{4+4+2}{16+16+4} \,.\, (4,-4,2) = \dfrac{10}{36} \,.\, (4,-4,2)$

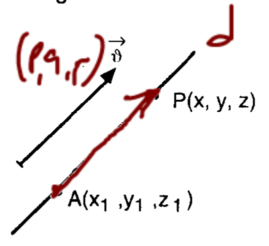
$\vec{\vartheta} = \dfrac{5}{18} \,.\, (4,-4,2) = \dfrac{5}{18} \,.\, 2 \,.\, (2,-2,1) = \dfrac{5}{9} \,.\, (2,-2,1)$

$\vec{\vartheta} = \left(\dfrac{10}{9}, -\dfrac{10}{9}, \dfrac{5}{9}\right)$ bulunur.

UZAYDA DOĞRU DENKLEMİ

1. Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir vektöre paralel olan doğrunun denklemi :

R^3 deki $A(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve $\vec{\vartheta} = (p, q, r)$ vektörüne paralel (çakışık) olan doğrunun denklemi:



Doğru üzerinde herhangi bir nokta $P(x, y, z)$ ise $\vec{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ olur ki

$\vec{AP} \,//\, \vec{\vartheta}$ istenmektedir. Öyleyse aranılan denklem:

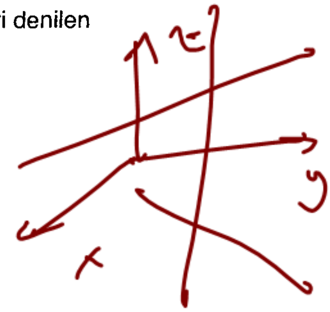
$$\left.\begin{array}{l} \vec{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \\ \vec{\vartheta} = (p, q, r) \end{array}\right\} \vec{AP} \,//\, \vec{\vartheta} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x - x_1}{p} = \dfrac{y - y_1}{q} = \dfrac{z - z_1}{r}}$$ bulunur.

Buradaki $\vec{\vartheta} = (p, q, r)$ vektörüne **doğrunun doğrultman vektörü,** p, q, r sayılarına da **doğrultman parametreleri** denir.

Doğru denklemindeki oranları k'ya eşitlersek doğrunun parametrik denklemleri denilen

$\dfrac{x - x_1}{p} = \dfrac{y - y_1}{q} = \dfrac{z - z_1}{r} = k$ dan

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + pk \\ y = y_1 + qk \\ z = z_1 + rk \end{array}\right\}$$ denklemleri elde edilir.



ÖRNEK $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-1}$ **olan doğrunun doğrultman vektörünü ve bu doğru üzerinde herhangi iki nokta bulunuz.**

ÇÖZÜM

Doğrultman vektörü $\vec{\vartheta}=(3, 2, -1)$ dir. Şimdi bu doğru üzerinde iki nokta bulalım.

$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-1}=k$ olsun.

$\boxed{2x+y=5}$

$x=k$

$y=5-2k$

$(k, 5-2k)$

$x = 3k + 2$

$y = 2k - 1$

$z = -k + 4$ elde edilir.

Doğru üzerindeki tüm noktalar $\boxed{(3k+2, 2k-1, -k+4)}$ biçimindedir.

$k = 0 \Rightarrow A(2, -1, 4)$

$k = 1 \Rightarrow B(5, 1, 3)$ bulunur.

$\frac{x-0}{-3}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-0}{4}$

ÖRNEK **Orijinden geçen ve $\vec{u}=(-3, 3, 4)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi nedir?**

ÇÖZÜM

$O(0, 0, 0)$ dan geçecek ve $\vec{u}=(-3, 3, 4)$ vektörüne paralel olacağından

$\frac{x-0}{-3}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-0}{4}$ den $\frac{x}{-3}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ bulunur.

2. İki noktası bilinen doğru denklemi:

$A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi:

$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$ dir.

ÖRNEK **A(2, 3, 1) ve B(1, 0, –2) noktalarından geçen doğru denklemi nedir?**

ÇÖZÜM

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

$u=(1-2, 0-3, -2-1)$

$=(-1, -3, -3)$

$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-3}{0-3}=\frac{z-1}{-2-1}$

$\boxed{\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{-3}}$ bulunur.

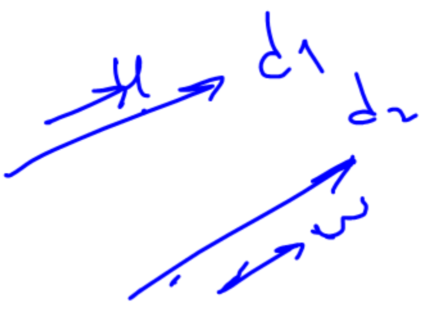
3. İki doğrunun paralel olma koşulu:

$$\left.\begin{aligned} d&: \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r} \\ d_1&: \frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1} \end{aligned}\right\}$$ doğrularının paralel olması demek doğrultman vektörlerinin paralel olması

demektir.

$\vec{d}=(p, q, r)$ ve $\vec{d_1}=(p_1, q_1, r_1)$ dir.

$\vec{d} \,//\, \vec{d_1} \Rightarrow \boxed{\frac{p}{p_1}=\frac{q}{q_1}=\frac{r}{r_1}}$ elde edilir.



ÖRNEK

$d_1: \frac{x+1}{m} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{-2}$

$d_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{n}$ doğrularının paralel olması için **m + n toplamı ne olmalıdır?**

ÇÖZÜM

$d_1: \frac{x+1}{m} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{-2} \Rightarrow \vec{d_1} = (m, 3, -2)$

$d_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{n} \Rightarrow \vec{d_2} = (2, 6, n)$ bulunur.

$d_1 // d_2 \Rightarrow \vec{d_1} // \vec{d_2} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{3}{6} = -\frac{2}{n}$

$\frac{m}{2} = \frac{1}{2} = -\frac{2}{n}$

$m = 1 \wedge n = -4$ olur ki aranılan toplam $m + n = 1 - 4 = -3$ bulunur.

4. İki doğrunun dik olma koşulu:

İki doğrunun dik olması demek doğrultman vektörlerinin dik olması demektir.

$d: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$

$d_1: \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$ doğrularının doğrultman vektörleri: $\vec{d} = (p, q, r)$ ve $\vec{d_1} = (p_1, q_1, r_1)$ dir.

$d \perp d_1 \Rightarrow \vec{d} \perp \vec{d_1} \Rightarrow \vec{d} \cdot \vec{d_1} = 0$ olmalıdır. Yani $\boxed{pp_1 + qq_1 + rr_1 = 0}$ bulunur.

ÖRNEK

$d_1: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-1}$

$d_2: \frac{x}{a} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-4}$ doğrularının dik durumlu olması için **a ne olmalıdır?**

ÇÖZÜM

$d_1: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-1} \Rightarrow \vec{d_1} = (-2, 3, -1)$

$d_2: \frac{x}{a} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-4} \Rightarrow \vec{d_2} = (a, 2, -4)$ bulunur.

$d_1 \perp d_2 \Rightarrow \vec{d_1} \perp \vec{d_2} \Rightarrow \vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = 0$ olmalıdır.

$-2 \cdot a + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) = 0$

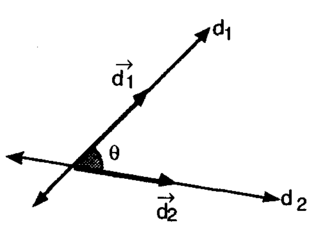
$-2a + 6 + 4 = 0$

$2a = 10 \Rightarrow a = 5$ elde edilir.

5. İki doğru arasındaki açı:

İki doğru arasındaki açı doğrultman vektörleri arasındaki açıdır.

$\cos\theta = \frac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{\|\vec{d_1}\| \cdot \|\vec{d_2}\|}$ dir.



ÖRNEK

$d_1: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-5}{\sqrt{2}}$

$d_2: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+3}{-\sqrt{2}}$ doğruları arasındaki açı **kaç derecedir?**

ÇÖZÜM

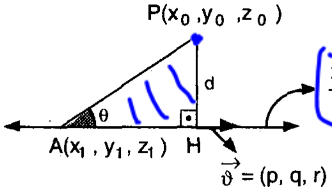
$\vec{d_1} = (1, 1, \sqrt{2})$ ve $\vec{d_2} = (-1, 1, -\sqrt{2})$ olur.

$$\cos\theta = \frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{\|\vec{d_1}\|\cdot\|\vec{d_2}\|} = \frac{-1+1-2}{\sqrt{1+1+2}\cdot\sqrt{1+1+2}} = -\frac{2}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$$ den $\theta = 120°$ bulunur.

$\|AP\|.\cos\theta = |AH|$

$\|AP\| \sin\theta = d$

6. Bir noktanın bir doğruya uzaklığı:



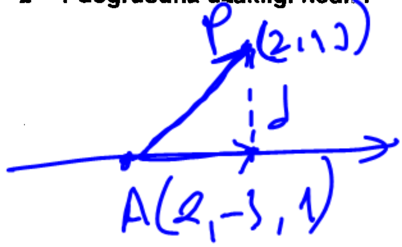
$\dfrac{x-x_1}{p} = \dfrac{y-y_1}{q} = \dfrac{z-z_1}{r}$

Önce $\vec{AP}$ ü bulunur. $\vec{AP}$ ve $\vec{\vartheta}$ vektörlerinin skaler çarpımından Cosθ elde edilir. Cosθ yardımıyla sinθ hesaplanır. PAH dik üçgeninden $\boxed{d = \|\vec{AP}\| . \sin\theta}$ ile noktanın doğruya olan uzaklığı hesaplanmış olur.

ÖRNEK

P(2, 1, 3) noktasının $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z-1$ doğrusuna uzaklığı nedir?

ÇÖZÜM



$\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z-1$

$\Rightarrow A(-2, 3, 1)$

$\vec{\vartheta} = (2, -2, 1)$ olur.

P(2, 1, 3) verilmişti.

$\vartheta = (2, -2, 1)$

i) $\vec{AP} = \vec{P} - \vec{A} = (4, -2, 2)$

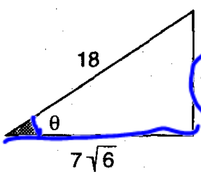
$\|\vec{AP}\| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\vec{\vartheta} = (2, -2, 1)$

$\|\vec{\vartheta}\| = \sqrt{4+4+1} = 3$

ii) $\cos\theta = \dfrac{\vec{AP}\,.\,\vec{\vartheta}}{\|\vec{AP}\|.\|\vec{\vartheta}\|} = \dfrac{8+4+2}{3\,.\,2\sqrt{6}} = \dfrac{14}{6\sqrt{6}} = \dfrac{7}{3\sqrt{6}} = \dfrac{7\sqrt{6}}{18}$

iii)



olur. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{30}}{18}$ dir.

iv) $d = \|\vec{AP}\|.\ \sin\theta = 2\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{30}}{18} = \dfrac{2\sqrt{6}.\sqrt{6}.\sqrt{5}}{3.\ 6} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ br. elde edilir.

UYARI: $\dfrac{x-x_1}{p}=\dfrac{y-y_1}{q}=\dfrac{z-z_1}{r}$ doğru denkleminde:

i) Doğrultman parametrelerinden biri sıfır ise, örneğin p=0 ise, doğrultman vektörü x eksenine dik olur. Bu durumda doğru yoz düzlemine paraleldir ve denklemi

$\boxed{x-x_1=0,\ \dfrac{y-y_1}{q}=\dfrac{z-z_1}{r}}$ dir.

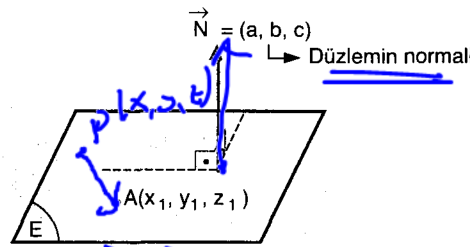
ii) Doğrultman parametrelerinden ikisi sıfır ise örneğin p=q=0 ise doğrultman vektörü x ve y eksenlerine yani xOy düzlemine dik olur. Bu durumda doğru z eksenine paraleldir ve denklemi $x-x_1=0$, $y-y_1=0$ olur.

UZAYDA DÜZLEM DENKLEMİ

1. $A(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve $\vec{N}=(a, b, c)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi:

$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ denklemi düzenlenirse

E: $\boxed{ax+by+cz+d=0}$ biçimini alır.



$\langle \vec{PA}, \vec{N} \rangle = 0$

ÖRNEK

$2x-3y+4z+7=0$ **düzleminin normali nedir?**

ÇÖZÜM

E: $ax+by+cz+d=0$ düzleminin normali $\vec{N}=(a, b, c)$ dir. Öyleyse $2x-3y+4z+7=0$ düzleminin normali $\vec{N}=(2, -3, 4)$ olur.

$\langle (x-2, y+1, z-3), (3,1,-1) \rangle = 0$

$P(x, y, z)$

ÖRNEK

$A(2, -1, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{N}=(3, 1, -1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi nedir?

ÇÖZÜM

$A(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve $\vec{N}=(a, b, c)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ olduğundan aranılan denklem;

$3(x-2)+(y+1)-(z-3)=0$ dan

$3x+y-z-2=0$ olur.

ÖRNEK

$A(1, 0, -1)$ noktasından geçen ve $\vec{N}=(-1, -2, 1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi nedir?

ÇÖZÜM

$-(x-1)-2(y)+(z+1)=0$ dan

$-x+1-2y+z+1=0$

$x+2y-z-2=0$ bulunur.

UYARI :

i) Koordinat başlangıcından geçen düzlemin denklemi $\boxed{ax + by + cz = 0}$ dır.

ii) $E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemlerinin çakışık olmaları için

$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}}$ olması gerekir.

iii) Normal vektörü $\vec{N} = (a, b, c)$ olan tüm düzlemler $\boxed{ax + by + cz + \lambda = 0}$ denklemi ile verilirler.

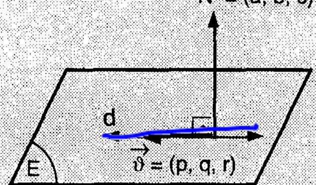
iv) $d: \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$ doğrusunun

$E: ax + by + cz + d = 0$ düzleminde bulunması koşulu:

$\boxed{\begin{array}{c} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ (x_1, y_1, z_1) \in E \end{array}}$ ve

$a.p + b.q + c.r = 0$

$\vec{N} = (a, b, c)$



$\vec{N} \perp \vec{\vartheta}$ ise

$\vec{N} \cdot \vec{\vartheta} = 0$ dır

dır.

v) $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ve

$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemlerinin ara kesitinden geçen düzlemlerin denklemi:

$\boxed{a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0}$ biçimindedir.

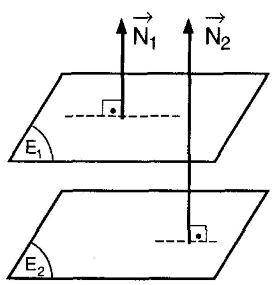
2) İki düzlemin paralel olma koşulu:

$E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemlerinin paralel olması için

$\vec{N_1} = (a_1, b_1, c_1) \wedge \vec{N_2} = (a_2, b_2, c_2)$ normallerinin paralel olması gerekir.

$$E_1 // E_2 \Rightarrow \vec{N_1} // \vec{N_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ dir.}$$



ÖRNEK **$x - my + 3z - 4 = 0$ düzleminin $2x + 6y + 6z - 1 = 0$ düzlemine paralel olması için m ne olmalıdır?**

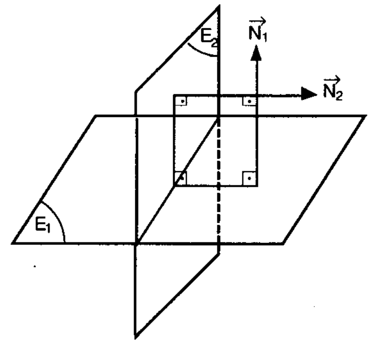
ÇÖZÜM $\vec{N_1} = (1, -m, 3) \wedge \vec{N_2} = (2, 6, 6)$ olup

$\vec{N_1} // \vec{N_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{m}{6} = \frac{3}{6} \Rightarrow -\frac{m}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow -m = 3 \Rightarrow m = -3$ bulunur.

3) İki düzlemin dik olma koşulu:

$E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemlerinin dik olması için $\vec{N_1} = (a_1, b_1, c_1) \wedge \vec{N_2} = (a_2, b_2, c_2)$ normallerinin dik olması gerekir.



$E_1 \perp E_2 \Rightarrow \vec{N_1} \perp \vec{N_2}$

$\Rightarrow \vec{N_1} \, . \, \vec{N_2} = 0$

$\Rightarrow \boxed{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$ olur.

ÖRNEK $E_1: 2x + 3y + mz - 3 = 0$

$E_2: -x + 2y + 3z + 1 = 0$ düzlemleri dik ise **m ne olmalıdır?**

ÇÖZÜM $\vec{N_1} = (2, 3, m) \wedge \vec{N_2} = (-1, 2, 3)$ elde edilir.

$-2 + 6 + 3m = 0$

$E_1 \perp E_2 \Rightarrow \vec{N_1} \perp \vec{N_2} \Rightarrow \vec{N_1} . \vec{N_2} = 0$

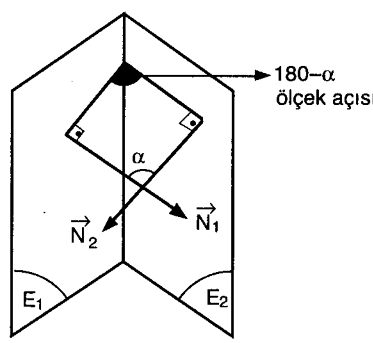
$\Rightarrow -2 + 6 + 3m = 0$

$3m = -4 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$ olur.

4) İki düzlem arasındaki açı –(ölçek açısı):

$E_1: = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemleri arasındaki açı $\vec{N_1}$ ve $\vec{N_2}$ normalleri arasındaki açının bütünleyenidir.



$(\widehat{E_1, E_2}) = 180 - (\widehat{\vec{N_1}, \vec{N_2}})$ dir.

$\text{Cos}\alpha = \frac{\vec{N_1} . \vec{N_2}}{\|\vec{N_1}\| . \|\vec{N_2}\|}$ den α bulunur. Bütünleyeni olan açı ölçek açısıdır.

ÖRNEK $E_1: x + \sqrt{2}\,y - z + 5 = 0$

$E_2: x - \sqrt{2}\,y + z - 1 = 0$ **düzlemleri arasındaki açı kaç derecedir?**

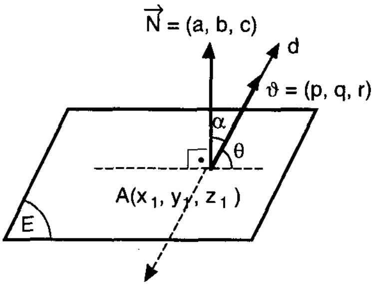
ÇÖZÜM $\vec{N_1} = (1, \sqrt{2}, -1) \wedge \vec{N_2} = (1, -\sqrt{2}, 1)$ dir.

$$\text{Cos}\alpha = \frac{\vec{N_1} . \vec{N_2}}{\|\vec{N_1}\| . \|\vec{N_2}\|} = \frac{1 - 2 - 1}{\sqrt{1 + 2 + 1} . \sqrt{1 + 2 + 1}} = -\frac{2}{2 . 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120' \text{ dır.}$$

Düzlemler arasındaki açı (ölçek açısı) 120° nin bütünleyeni, yani 60° dir.

5. Bir doğru ile bir düzlem arasındaki açı:

d: $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$ doğrusu ile



E: ax + by + cz + d = 0 düzlemi arasındaki açı doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali arasındaki açının sinüsüne eşittir.

Doğru ile düzlem arasındaki açı θ dır.

$\alpha + \theta = 90°$ olup $\cos\alpha = \sin\theta$ dır.

$\sin\theta = \cos\alpha = \dfrac{\vec{N} \cdot \vec{\vartheta}}{\|\vec{N}\| \cdot \|\vec{\vartheta}\|}$ eşitliğinden elde edilir.

ÖRNEK E: $\sqrt{2}x + y + z - 1 = 0$ düzlemi ile

d: $\dfrac{x-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$ **doğrusu arasındaki açı kaç derecedir?**

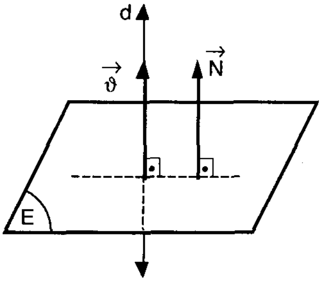
ÇÖZÜM $\vec{N} = (\sqrt{2}, 1, 1) \wedge \vec{\vartheta} = (\sqrt{2}, -1, 1)$ dır.

$\sin\theta = \dfrac{\vec{N} \cdot \vec{\vartheta}}{\|\vec{N}\| \cdot \|\vec{\vartheta}\|} = \dfrac{2 - 1 + 1}{\sqrt{2+1+1} \cdot \sqrt{2+1+1}} = \dfrac{2}{2.2} = \dfrac{1}{2}$ den

$\theta = 30°$ elde edilir.

6) Doğrunun düzleme diklik koşulu:

d: $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$ doğrusu



E: ax + by + cz + d = 0 düzlemine dik ise $\vec{N} \,//\, \vec{\vartheta}$ dir. (Doğrultman ve normal vektörleri paralal olmalıdırlar.

$E \perp d \Rightarrow \vec{N} \,//\, \vec{\vartheta} \Rightarrow \dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q} = \dfrac{c}{r}$ elde edilir.

ÖRNEK $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{m}$ doğrusunun $ax + 6y + 2z + 3 = 0$ düzlemine dik olması için **m +a ne olmalıdır?**

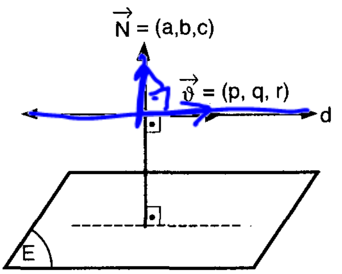
ÇÖZÜM $\vec{\vartheta} = (2, -3, m) \wedge \vec{N} = (a, 6, 2)$ olur.

$E \perp d \Rightarrow \vec{N} \,//\, \vec{\vartheta} \Rightarrow \dfrac{2}{a} = -\dfrac{3}{6} = \dfrac{m}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{a} = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{m}{2}$ den

$a = -4 \wedge m = -1$ olur.

Aranılan toplam $m + a = -1 - 4 = -5$ dir.

7. Doğrunun düzleme paralel olma koşulu:



d: $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$ doğrusunun

E: ax + by + cz + d = 0 düzlemine paralel olması için doğrunun doğrultman vektörü düzlemin normaline dik olmalıdır.

$d \,//\, E \Rightarrow \vec{\vartheta} \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{\vartheta} \,.\, \vec{N} = 0 \Rightarrow ap + bq + cr = 0$ bulunur.

ÖRNEK d: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z-2}{5}$ doğrusu

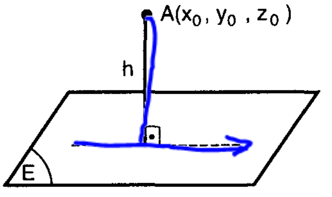
E: $3x - 2y + nz - 7 = 0$ düzlemine paralel ise **m ile n arasında hangi bağıntı vardır?**

ÇÖZÜM $\vec{\vartheta} = (2, m, 5) \wedge \vec{N} = (3, -2, n)$ olur.

$d//E \Rightarrow \vec{\vartheta} \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{\vartheta} \,.\, \vec{N} = 0 \Rightarrow 6 - 2m + 5n = 0$

$\boxed{2m - 5n = 6}$ bulunur.

8. *Bir noktanın bir düzleme olan uzaklığı:*



$A(x_0, y_0, z_0)$ noktasının E: ax + by + cz + d = 0 düzlemine olan uzaklığı:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ dir.

ÖRNEK **A(1, –3, 2) noktasının E: 2x – 9y + 6z + 8 = 0 düzlemine olan uzaklığı kaç birimdir?**

ÇÖZÜM $h = \frac{|2 + 27 + 12 + 8|}{\sqrt{4 + 81 + 36}} = \frac{|49|}{\sqrt{121}} = \frac{49}{11}$ br. dir.

9. Paralel iki düzlem arasındaki uzaklık:

$\left.\begin{array}{l} E_1: ax + by + cz + d_1 = 0 \\ E_2: ax + by + cz + d_2 = 0 \end{array}\right\}$ Paralel düzlemleri arasındaki uzaklık:

$$\ell = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ dir.

ÖRNEK $\left.\begin{array}{l} 2x + y - z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{array}\right\}$ **paralel düzlemleri arasındaki uzaklık kaç birimdir?**

ÇÖZÜM $\ell = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 - 7|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}$ br. dir.

ÖRNEK $\left.\begin{array}{l} x - y + 2z - 1 = 0 \\ -2x + 2y - 4z - 3 = 0 \end{array}\right\}$ **düzlemleri arasındaki uzaklık kaç birimdir?**

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} 2\,/\, & x - y + 2z - 1 = 0 \\ -1\,/\, & -2x + 2y - 4z - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 4z - 2 &= 0 \\ 2x - 2y + 4z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\ell = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-2-3|}{\sqrt{4+4+16}} = \frac{|-5|}{\sqrt{24}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12} \text{ br. olur.}$$

UYARI :

i) $A(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörleri $\vec{\vartheta}_1 = (p_1, q_1, r_1)$, $\vec{\vartheta}_2 = (p_2, q_2, r_2)$ olan doğrulara paralel bir düzlemin denklemi:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & p_1 & p_2 \\ y - y_0 & q_1 & q_2 \\ z - z_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ dır}$$

ii) $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ noktalarından geçen düzlemin denklemi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ dır.}$$

iii) $\dfrac{x - x_1}{p_1} = \dfrac{y - y_1}{q_1} = \dfrac{z - z_1}{r_1}$, $\dfrac{x - x_2}{p_2} = \dfrac{y - y_2}{q_2} = \dfrac{z - z_2}{r_2}$ doğrularının aynı düzlemde bulunmaları koşulu:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & p_1 & p_2 \\ y_2 - y_1 & q_1 & q_2 \\ z_2 - z_1 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ dır. Bu koşul doğrular paralel değilse kesişme koşuludur.}$$

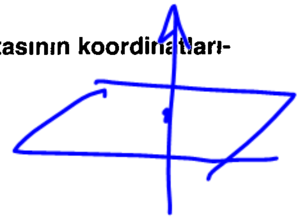
iV) $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$ doğrusu ve $ax + by + cz + d = 0$ düzlemi verilsin.

a) $ap + bq + cr \neq 0$ ise doğru düzlemi keser.

b) $ap + bq + cr = 0$ ve $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$ ise doğru düzleme paraleldir.

c) $ap + bq + cr = 0$ ve $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ ise doğru düzlemin içindedir.

ÖRNEK $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+3}{2}$ **doğrusu ile $2x-3y+z-5 = 0$ düzleminin kesim noktasının koordinatlarını bulunuz.**



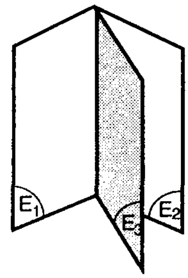
ÇÖZÜM $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+3}{2} = k$ dan

$$\left.\begin{aligned} x &= 2k+1 \\ y &= k \\ z &= 2k-3 \end{aligned}\right\}$$ bulunur. Bu değerler $2x-3y+z-5 = 0$ düzlem denkleminde yerine yazılırsa (ortak nokta olacağından)

$$\begin{aligned} 2(2k+1) - 3.k + (2k-3) - 5 &= 0 \\ 4k + 2 - 3k + 2k - 8 &= 0 \\ 3k - 6 &= 0 \\ k &= 2 \end{aligned}$$ elde edilir.

Öyleyse ortak nokta $A(5, 2, 1)$ bulunur.

İKİ DÜZLEMİN ARAKESİTİNDEN GEÇEN DÜZLEM DENKLEMİ



$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemlerinin arakesitinden geçen düzlemin denklemi $k \in R$ olmak üzere

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + k\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \text{ dır.}$$

ÖRNEK $x + 2y + z - 2 = 0$ ve $x - y + z = 0$ **düzlemlerinin arakesitinden ve A(–1, 2, 1) noktasından geçen düzlemin denklemi nedir?**

ÇÖZÜM Verilen düzlemlerin arakesitinden geçen düzlemin denklemi

$x + 2y + z - 2 + k\,(x - y + z) = 0$ olup

bu düzlem A(–1, 2, 1) noktasından da geçeceğinden bu nokta koordinatları düzlem denklemini sağlar.

$-1 + 4 + 1 - 2 + k(-1 - 2 + 1) = 0$

$2 - 2k = 0$ dan

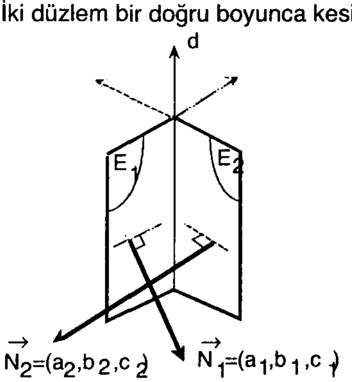
$k = 1$ bulunur. $k = 1$ yerine yazılırsa

$x + 2y + z - 2 + x - y + z = 0$

$2x + y + 2z - 2 = 0$ elde edilir.

İKİ DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

i) İki düzlem bir doğru boyunca kesişebilir.



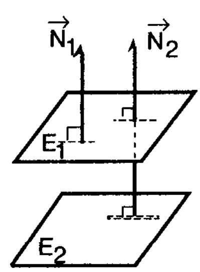
$E_1 \cap E_2 = \{d\}$

ii) İki düzlem paralel olabilir.

İki düzlem paralel olduğunda ortak hiçbir noktaları yoktur.

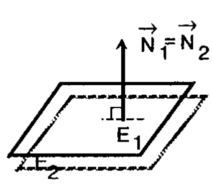
$E_1 \cap E_2 = \varnothing$

$E_1 \,//\, E_2 \Rightarrow \vec{N_1} \,//\, \vec{N_2}$ dir.



iii) İki düzlem çakışık olabilir.

Eğer iki düzlem çakışık ise bütün noktaları ortaktır.



ÖRNEK

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ x+y+z=6 \end{array}\right\}$$ **düzlemleri kesişen düzlemler olduğuna göre arakesit doğrusu nedir?**

ÇÖZÜM

$x=k$ olsun

$$-y+z=3-2k$$
$$y+z=6-k$$
$$+\ \overline{}$$
$$2z=9-3k$$
$$z=\frac{9-3k}{2} \Rightarrow k=\frac{-2z+9}{3}$$
$$x+y+z=6$$
$$k+\frac{9-3k}{2}+y=6 \Rightarrow y=\frac{k+3}{2} \Rightarrow k=2y-3$$
$$k=x\ ;\quad k=2y-3,\quad k=\frac{-2z+9}{3}$$

$\dfrac{x}{1}=\dfrac{2y-3}{1}=\dfrac{-2z+9}{3}$ arakesit doğrusunun denklemidir.

ÖRNEK

$x-2y+3z-4=0$

$2x+my+6z-4=0$ **düzlemleri paralel ise m nedir?**

ÇÖZÜM

İki düzlemin paralel olması için normal vektörleri paralel olmalıdır.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{N}_1=(1,-2,3) \\ \vec{N}_2=(2,m,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{N}_1 \,//\, \vec{N}_2 \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{-2}{m} \Rightarrow m=-4$$ bulunur.

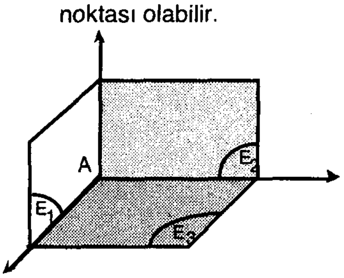
ÜÇ DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

$E_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

$E_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

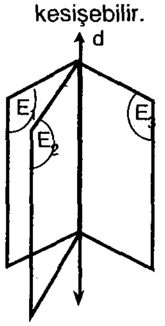
$E_3 : a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$ düzlem denklemleri verilmiş olsun.

a) Bu üç düzlemin bir tek ortak noktası olabilir.



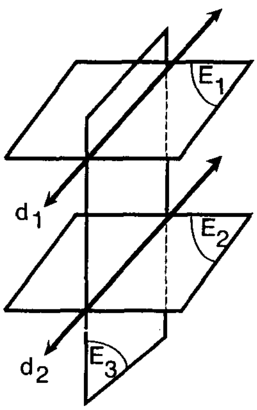
$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{A\}$

b) Üç düzlem bir doğru boyunca kesişebilir.



$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{d\}$

c) İki düzlem paralel olup, üçüncü düzlem bunları kesebilir.

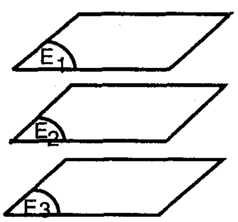


$E_1 \cap E_2 = \varnothing$

$E_1 \cap E_3 = \{d_1\}$

$E_2 \cap E_3 = \{d_2\}$

d) Üç düzlem birbirine paralel olabilir.



$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \varnothing$)

e) Üç düzlem çakışık olabilir.