ÖRNEK : $y\,dx + (x - yx^2)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\underbrace{y\,dx + x\,dy} - x^2 y\,dy = 0$

denkleminin her iki tarafı $\frac{1}{(xy)^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \frac{d(xy)}{(xy)^2} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{xy} - \ln y = c$$

Not: 1 $d(xy)$ ifadesi (xy) nin diferensiyeli demektir.

$$d(xy) \equiv 1.dx.y + 1.dy.x = y\,dx + x\,dy$$

Not: 2 Eğer $\frac{1}{xy}$ ile çarpılırsa dy nin önündeki x gitmiyor.

Amaç dx'in önündeki fonksiyon sadece x'e, dy nin önündeki de sadece y'ye bağlı olmasıdır ve böylece integral alınabilsin.

2.3. DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Eğer bir dif. denklem,

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

şeklinde yazılabilirse bu denkleme değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklem denir. Bu şekilde yazılabilen denklemler çözülebilirdir.

ÖRNEK : $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $x\,dx + y\,dy = 0 \Rightarrow \int x\,dx + \int y\,dy = c_1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = c}$$

ÖRNEK: $y\,dx - x\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln x - \ln y = \ln c_0$

$\Rightarrow \ln \frac{x}{y} = \ln c_0 \Rightarrow \frac{x}{y} = c_0 \Rightarrow y = \frac{1}{c_0} x \Rightarrow \boxed{y = cx}$

ÖRNEK: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ denklemini çözünüz

Çözüm: $y\,dy - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$ denkleminde integral alınırsa

$\frac{1}{2} y^2 + \sqrt{1-x^2} = c_0 \Rightarrow y^2 + 2\sqrt{1-x^2} = c$ bulunur.

ÖRNEK: $(3x+8)(y^2+4)\,dx - 4y\,(x^2+5x+6)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{3x+8}{x^2+5x+6}\,dx - \frac{4y}{y^2+4}\,dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{3x+8}{(x+2)(x+3)}\,dx - \frac{4y}{y^2+4}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right) dx - 2 \cdot \frac{2y}{y^2+4}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow 2\ln|x+2| + \ln|x+3| - 2\ln(y^2+4) = \ln c$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 \cdot (x+3) = c \cdot (y^2+4)^2$$

bulunur.

Not: $\int \frac{3x+8}{(x+2)(x+3)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}\right) dx \Rightarrow A = 2,\ B = 1$ bulunur. (Basit kesirlere ayırma)

2.4. HOMOJEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Birinci mertebeden bir lineer adi dif. denklemin $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ şeklinde verildiğini biliyoruz. Eğer $\frac{y}{x}$ veya $\frac{x}{y}$ nin

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2.6)$$

şeklinde bir g fonksiyonu bulunabilirse o zaman $f(x,y)$ fonksiyonuna homojen fonksiyon ve yukarıdaki denkleme de homojen dif. denklem denir.

Eğer bir $F(x,y)$ fonksiyonunda x yerine tx ve y yerine ty yazıldığında fonksiyon

$$F(tx, ty) = t^n F(x,y)$$

şeklinde yazılabilirse, bu fonksiyona n-yinci dereceden homojen fonksiyon denir.

Bir homojen dif. denklem, $v = \frac{y}{x}$ dönüşümü yapılarak değişkenlerine ayrılabilen bir şekle dönüşür. Bu durumda

$$\frac{dy}{dx} = v + x\cdot\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots$$

dır. (2.6) nın çözümü, dif. denklemi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \quad \ldots\ldots \quad (2.7)$$

halinde yeniden yazarak ve $x = yu$ $\left(u = \frac{x}{y}\right)$ dönüşümünü ve ilgili

$$\frac{dx}{dy} = u + y\,\frac{du}{dy}$$

türevini (2.7) denkleminde kullanarak da elde edilir.

<u>Not:</u> Homojen dif. denklemlerde integrasyon çarpanı $\mu = \frac{1}{Mx+Ny}$ dir

ÖRNEK : $(x^2+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$ denklemini çözünüz. 16

Çözüm : $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

şeklinde yazılabildiği için verilen denklem homojendir.
$y = vx$ dönüşümü yapılırsa $v = \frac{y}{x}$ olacağından

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{1}{v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow v\,dv - \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \ln x = c_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \ln x = c_0 \Rightarrow y^2 = x^2 \ln x^2 + c x^2$$

ÖRNEK : $(3x^2-y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-y^2}{2xy} = \frac{3}{2}\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\frac{y}{x}, \quad y = vx \text{ alınırsa}$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3}{2v} - \frac{1}{2}v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{v} - v\right)$$

$$\Rightarrow 3\frac{dx}{x} = \frac{2v\,dv}{1-v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3dx}{x} + \frac{2v\,dv}{v^2-1} = 0$$

$$\Rightarrow 3\ln x + \ln(v^2-1) = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln x^3(v^2-1) = \ln c$$

$$\Rightarrow x^3(v^2-1) = \ln c$$

$$\Rightarrow x^3\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right) = \ln c \Rightarrow x(y^2-x^2) = c$$

ÖRNEK: $(y-x)dx+(x+y)dy=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}=\frac{\frac{x-y}{x}}{\frac{x+y}{x}}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

şeklinde yazılabildiği için verilen dif. denklem homojendir. $y=vx$ dönüşümü yapılırsa $v=\frac{y}{x}$ olacağından

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v}{1+v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{(1+v)\,dv}{v^2+2v-1}=0$$

$$\Rightarrow \ln x+\frac{1}{2}\ln(v^2+2v-1)=\ln c$$

$$\Rightarrow x^2-2xy-y^2=c$$

ÖRNEK: $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-x\,dy=0$, $y(1)=0$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

old. denklem homojendir. $y=vx$ dönüşümü yapılırsa

$$v+x\frac{dv}{dx}=v+\sqrt{1+v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}\Rightarrow \frac{dx}{x}-\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=0$$

$$\Rightarrow \ln x-\ln\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)=\ln c_1$$

$$\Rightarrow \ln x-\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)=\ln c_1$$

$$\Rightarrow y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2 \text{ bulunur.}$$

$x=1$ ve $y=0$ için $c=1$ olduğundan çözüm

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$$

şeklindedir.

ÖRNEK : $y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Denklem $y' = f(x,y)$ biçiminde, yani $f(x,y) = \dfrac{2y^4+x^4}{xy^3}$ dır.

$$f(tx, ty) = \frac{2(ty)^4 + (tx)^4}{(tx)(ty)^3} = \frac{\cancel{t^4}(2y^4+x^4)}{\cancel{t^4}(xy^3)} = f(x,y)$$

olduğundan verilen denklem homojendir. $y = vx$ alalım :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4+x^4}{xy^3} \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2(vx)^4 + x^4}{x(vx)^3}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^4+1}{v^3} \Rightarrow \frac{dx}{x} - \frac{v^3 dv}{v^4+1} = 0$$

$$\Rightarrow \ln x - \frac{1}{4}\ln(v^4+1) = -\ln k$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln k = \ln(v^4+1)^{1/4}$$

$$\Rightarrow xk = (v^4+1)^{1/4}$$

$$\Rightarrow xk = \left(\left(\frac{y}{x}\right)^4 + 1\right)^{1/4}$$

$$\Rightarrow y^4 = c_1 x^8 - x^4, \quad (c_1 = k^4)$$

bulunur.

II. yol: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{xy^3}{2y^4+x^4}$ şeklinde ters çevrilirse $x = yu$ $\left(u = \dfrac{x}{y}\right)$

dönüşümü yapılarak

$$u + y\frac{du}{dy} = \frac{(yu)\cdot y^3}{2y^4 + (yu)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{2+u^4}{u+u^5}\,du = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{2+u^4}{u+u^5}\,du = c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

$$\int \frac{2+u^4}{u+u^5}\,du = \int\left(\frac{2}{u} - \frac{u^3}{1+u^4}\right)du = 2\ln u - \frac{1}{4}\ln(1+u^4)$$

değeri (*) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\ln y + 2\ln u - \frac{1}{4}\ln(1+u^4) = c$$

$$\Rightarrow \quad k y^4 u^8 = 1+u^4 \qquad \left(c = -\frac{1}{4}\ln k\right)$$

$$\Rightarrow \quad k y^4\left(\frac{x}{y}\right)^8 = 1+\left(\frac{x}{y}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^4 = c_1 x^8 - x^4 \qquad (c_1 = k^4)$$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK: $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $f(tx,ty) = \dfrac{2(tx)(ty)}{(tx)^2-(ty)^2} = \dfrac{\cancel{t^2}(2xy)}{\cancel{t^2}(x^2-y^2)} = f(x,y)$

veya $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2-y^2} = \dfrac{\frac{2xy}{y^2}}{\frac{x^2-y^2}{y^2}} = \dfrac{2\,\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}-1} \equiv g\left(\frac{x}{y}\right)$

şeklinde yazılabildiği için denklem homojendir. $y = vx$ dönüşümü yapılırsa

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x(vx)}{x^2-(vx)^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{v(v^2+1)}{v^2-1} \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} + \frac{v^2-1}{v(v^2+1)}dv = 0$$

bulunur. İntegral alınırsa

$$\int\frac{dx}{x} + \int\left(-\frac{1}{v}+\frac{2v}{v^2+1}\right)dv = \ln k$$

$$\ln x - \ln v + \ln(v^2+1) = \ln k$$

$$x(v^2+1) = kv$$

$$x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right) = k\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2 = ky$$

NOT! Bazı diferensiyel denklemlerin homojen olup olmadıklarını görmek kolay olmayabilir. Örneğin,

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2.8)$$

denkleminin homojen olup olmadığı ilk bakışta anlaşılamaz. Bunun için $x = X + h$ ve $y = Y + k$ dönüşümleri yapılırsa

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c &= 0 \\ ph+qk+r &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.9)$$

denklemleri elde edilir ve bu denklemlerden h ile k bulunur.

ÖRNEK: $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y+1}\right)^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Bu denklem (2.8) tipindedir. Burada $a=0$, $b=1$, $c=2$, $p=1$, $q=1$, $r=1$ dir. Bu değerler (2.9)'da yerine yazılırsa

$$\left.\begin{aligned} k+2 &= 0 \\ h+k+1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $k=-2$ ve $h=1$ bulunur. Bu durumda

$$x = X + 1$$
$$y = Y - 2$$

dönüşümleri elde edilir. Bu değerler dif. denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{dY}{dX} = 2\frac{Y^2}{(X+Y)^2}$$

elde edilir. Bu denklem homojen olduğundan $Y = VX$ dönüşümü uygulanırsa,

$$V + X\frac{dV}{dX} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{Y}{X}\right)^2}{\frac{(X+Y)^2}{X^2}} = \frac{2V^2}{(1+V)^2}$$

$$V - \frac{2V^2}{(1+V)^2} + X' \frac{dV}{dX'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+V)^2}{V(1+V^2)} dV + \frac{dX'}{X'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{V} + \frac{2}{1+V^2}\right) dV + \frac{dX'}{X'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln V + 2 \arctan V + \ln X' = c$$

$$\Rightarrow \quad \ln \frac{Y}{X'} + 2 \arctan \frac{Y}{X'} + \ln X' = c$$

$$\Rightarrow \quad \ln Y + 2 \arctan \frac{Y}{X'} = c$$

$$\Rightarrow \quad \ln (y+2) + 2 \arctan \frac{y+2}{x-1} = c$$ bulunur.

2.5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİF. DENKLEMLER

Bu tip denklemler içinde

$$a(x) \cdot \frac{dy}{dx} + b(x) y = c(x)$$

şeklindeki lineer dif. denklemler önemli bir yer tutar. Bir I aralığında eğer $a(x) \neq 0$ ise bu denklemin bütün terimleri $a(x)$ ile bölünürse

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) \quad \ldots \ldots \quad (2.10)$$

denklemi elde edilir. Burada $P(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ ve $Q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$ dir.

Eğer $Q(x) = 0$ ise

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2.11)$$

olur ve bu denkleme (2.10) denkleminin homojen kısmı denir ve çözümü

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\, dx \Rightarrow y = c e^{-\int P(x) dx}$$

olur.