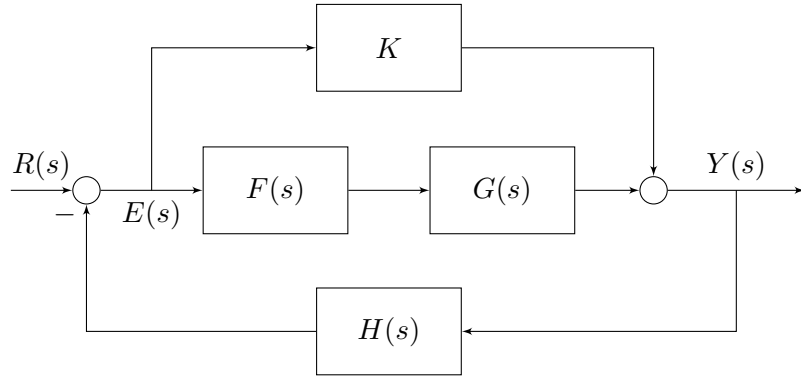


KON313 - Geribeslemeli Kontrol Sistemleri  
Ödev 1

Mertcan Ekiz  
040160420

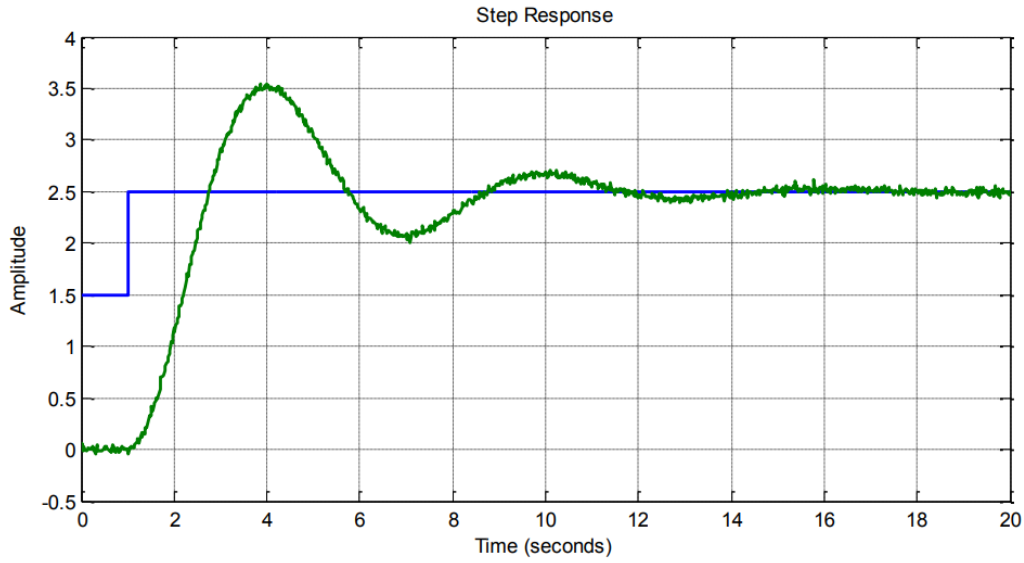
Ömer Furkan Esen  
040150423

**Soru 1:** Aşağıda bir kapalı çevrimli kontrol sisteminin blok şeması verilmiştir.



**Şekil 1:** Kapalı çevrim kontrol sistemi

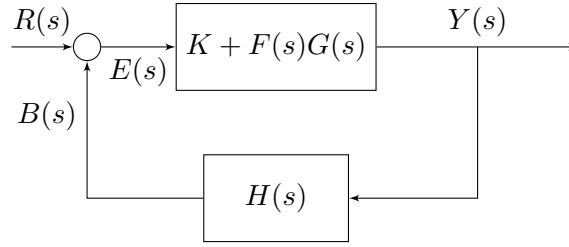
- a. Sistemin *açık çevrim* ve *kapalı çevrim* transfer fonksiyonlarını yazınız. *İkinci mertebeden* olduğu bilinen  $G(s)$  sistemine ilişkin birim basamak yanıtı Şekil 2'deki gibi olduğuna göre,  $G(s)$  transfer fonksiyonunu bulunuz. Sistemin *sönüm oranı* ( $\zeta$ ) ve *doğal frekansı* ( $\omega_n$ ) nedir?



**Şekil 2:** İkinci mertebeden bir sistemin basamak yanıtı

- b.  $G(s)$  transfer fonksiyonu için, *aşımı değiştirmeden* tepe zamanını yarıya indirmek isteniyor. Buna göre hangi parametre değiştirilmelidir ve bu parametrenin yeni değeri ne olmalıdır?

**Çözüm:** Sistemin ileri yöndeki ( $E(s) \rightarrow Y(s)$  arası) blok diyagramı sadeleştirilirse aşağıdaki eşdeğer sistem elde edilir:



Bu durumda açık çevrim transfer fonksiyonu  $\frac{B(s)}{E(s)}$ , kapalı çevrim transfer fonksiyonu ise  $\frac{Y(s)}{R(s)}$  olur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{B(s)}{E(s)} = (K + F(s)G(s))H(s), \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K + F(s)G(s)}{1 + (K + F(s)G(s))H(s)}$$

olarak bulunur.

İkinci mertebeden olduğu bilinen  $G(s)$  sistemi,  $\omega_n$  ve  $\zeta$  cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Grafikten DC kazancın yaklaşık 2.5 olduğu görülmektedir ( $K \approx 2.5$ ). Sönüm oranını bulmak için aşım miktarı incelenebilir. Grafikte aşımın yaklaşık  $\frac{3.5-2.5}{2.5} = 0.4$  olduğu görülmektedir. Aşım =  $OS = e^{-(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})}$  olduğuna göre,

$$\zeta = \frac{-\ln(OS)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(OS)}} = \frac{-\ln(0.4)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.4)}} \approx 0.28$$

olarak bulunur. Grafikten tepe zamanının yaklaşık 3 saniye olduğu görülmektedir. Bu değer aşağıdaki formüle koyulduğunda  $\omega_n$  bulunabilir:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow 3 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - (0.28)^2}}, \quad \omega_n \approx 1.09$$

Aşımı değiştirmeden tepe zamanını yarıya indirmek için paydada bulunan doğal frekansın iki katına çıkarılması gerekmektedir. Bu durumda yeni  $\omega_n \approx 2.18$ , yeni  $t_p = 1.5$ s olur. Birinci ve ikinci durumlardaki transfer fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$G_1(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{2.975}{s^2 + 0.61s + 1.19} \approx \frac{3}{s^2 + 0.6s + 1.2}$$

$$G_2(s) = \frac{K(4\omega_n^2)}{s^2 + 2\zeta(2\omega_n)s + 4\omega_n^2} = \frac{11.9}{s^2 + 1.22s + 4.76} \approx \frac{12}{s^2 + 1.2s + 4.8}$$

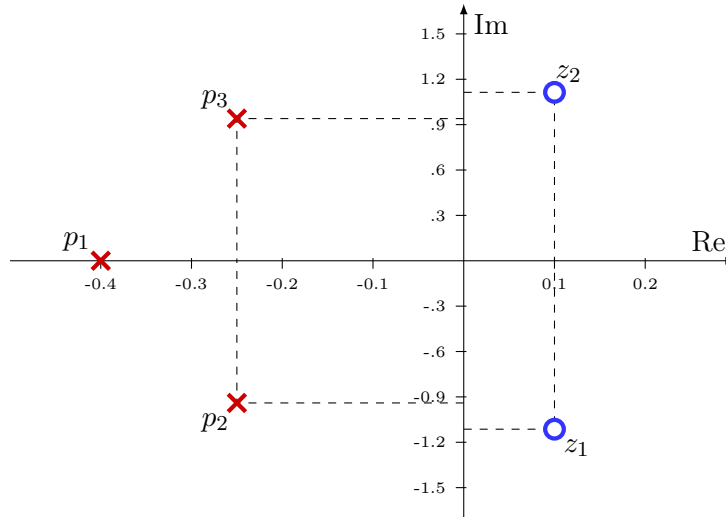
- c.  $F(s) = \frac{0.1(s^2 - 0.2s + 1.25)}{s}$ ,  $H(s) = 1$  ve  $K = 0$  alındığı durumda kapalı çevrim sistemin kutup ve sıfırlarının yerlerini hesaplayın ve  $s$ -düzleminde gösterin. Sistem kararlılığını yorumlayın.

**Çözüm:** İlk kısımda bulduğumuz  $G(s)$  sistemini de yerine koyduğumuzda sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{\frac{0.1(s^2 - 0.2s + 1.25)}{s} \times \frac{3}{s^2 + 0.6s + 1.2}}{1 + \frac{0.1(s^2 - 0.2s + 1.25)}{s} \times \frac{3}{s^2 + 0.6s + 1.2}} \\ &= \frac{0.3(s^2 - 0.2s + 1.25)}{s(s^2 + 0.6s + 1.2) + 0.3(s^2 - 0.2s + 1.25)} \end{aligned}$$

Bu durumda payın 2 kökü, paydanın 3 kökü, dolayısıyla da sistemin 2 sıfırı ve 3 kutbu olduğu görülmektedir. Bu kutuplar ve sıfırlar yaklaşık olarak aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} p_1 &\approx -0.4 & z_1 &\approx 0.1 - 1.11i \\ p_2 &\approx -0.25 - 0.94i & z_2 &\approx 0.1 + 1.11i \\ p_3 &\approx -0.25 + 0.94i \end{aligned}$$



Sistemin kutuplarından hiçbirisi imajiner eksenin sağ tarafında olmadığı için sistem kararlıdır.

- d.  $F(s) = H(s) = 1$  olduğu durumda kapalı çevrim sistem kutuplarının  $s_{1,2} = -0.3 \pm 1.9i$  noktalarında konumlanması için  $K$  ne seçilmelidir? Bu  $K$  değeri ile birlikte  $E(s)$  ifadesini elde ediniz.  $R(s) = \frac{1}{s}$  olarak verildiği durumda  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  ifadesinin değerini hesaplayınız.

**Çözüm:**  $F(s) = H(s) = 1$  olduğu durumda sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{K + G(s)}{1 + K + G(s)} = 1 - \frac{1}{1 + K + G(s)} \\ &= 1 - \frac{s^2 + 0.6s + 1.2}{(1 + K)(s^2 + 0.6s + 1.2) + 3} \end{aligned}$$

Kutupları bulmak için payda sıfıra eşitlenir ve verilen  $s$  değerleri yerine koyulur:

$$(1 + K)(s^2 + 0.6s + 1.2) + 3 = 0$$

Burada  $s_{1,2}$ 'den herhangi biri yerine koyulursa  $K = 0.2$  olarak bulunur.

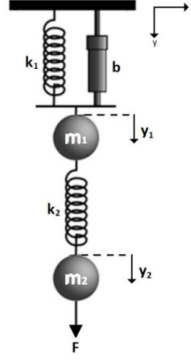
$E(s)$  ifadesini  $R(s)$  cinsinden elde etmek için sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu kullanılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= 1 - \frac{1}{1 + K + G(s)} \\ E(s) &= R(s) - Y(s) = R(s) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{1 + K + G(s)} \right) \right] \\ E(s) &= R(s) \left( \frac{1}{1 + K + G(s)} \right) \end{aligned}$$

$R(s)$ ,  $G(s)$  ve  $K$  değerleri yerine koyulursa ve son değer teoremi uygulanırsa:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{1}{\left( 1.2 + \frac{3}{s^2 + 0.6s + 1.2} \right)} = \frac{1}{1.2 + \frac{3}{1.2}} \approx 0.27$$

**Soru 2:** Aşağıda verilen mekanik sistem için soruları cevaplandırınız.



**Şekil 3:** İki serbestlik dereceli mekanik sistem

- a. X ekseninde herhangi bir hareketin olmadığını varsayarak, sisteme ilişkin hareket denklemlerini yazınız. Sistemin *durum uzayı modelini*, durum değişkenlerini

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, & x_3 &= y_2 \\ x_2 &= \dot{y}_1, & x_4 &= \dot{y}_2 \end{aligned}$$

olarak elde ediniz.

- b. Sisteme ilişkin  $G(s) = \frac{Y_1(s)}{F(s)}$  transfer fonksiyonunun

$$G(s) = \frac{25}{s^4 + 4s^3 + 125s^2 + 100s + 625}$$

olduğunu gösteriniz. (Laplace dönüşümü sırasında yerçekimini bozucu etki olarak düşünüp ihmal edebilirsiniz.) Sistemin *kutuplarını* hesaplayınız ve  $s$ -tanım bölgesinde gösteriniz. Sistemin *mertebesi* nedir?

**Çözüm:**  $m_1$  ve  $m_2$  kütleleri üzerine etki eden kuvvetleri ayrı ayrı yazarsak:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + b \dot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 &= k_2 y_2 \\ \ddot{y}_1 &= \frac{-b}{m_1} \dot{y}_1 - \frac{k_1 + k_2}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 &= k_2 y_1 + F \\ \ddot{y}_2 &= \frac{k_2}{m_2} y_1 - \frac{k_2}{m_2} y_2 + \frac{F}{m_2} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad u(t) = F$$

(1) ve (2) numaralı eşitlikler, yukarıdaki durum uzayı matrislerine uygun bir şekilde yerleştirilip Tablo 1'deki değerler yerine koyulursa sistemin durum uzayı modeli elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -4 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 25 & 0 & -25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

Transfer fonksiyonunu elde etmek içinse (1) ve (2) numaralı eşitliklerin Laplace dönüşümleri alınır:

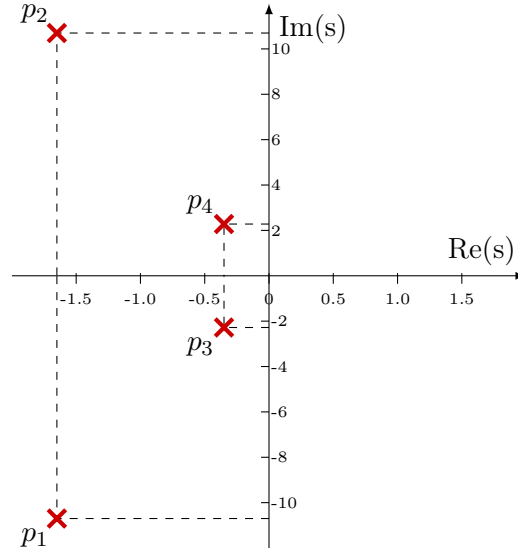
$$\begin{aligned}m_1 s^2 Y_1(s) + b s Y_1(s) + (k_1 + k_2) Y_1(s) &= k_2 Y_2(s) \\ m_2 s^2 Y_2(s) + k_2 Y_2(s) &= k_2 Y_1(s) + F(s)\end{aligned}$$

Denklemler sadeleştirilerek  $F(s)$ ,  $Y_1(s)$  cinsinden yazılır ve Tablo 1'deki değerler yerine konursa:

$$\begin{aligned}Y_1(s) \left( \frac{m_1 s^2 + b s + k_1 + k_2}{k_2} \times (m_2 s^2 + k_2) - k_2 \right) &= F(s) \\ Y_1(s) \left( \frac{s^2 + 4s + 100}{75} \times (3s^2 + 75) - 75 \right) &= F(s) \\ Y_1(s) \left( \frac{s^4 + 4s^3 + 125s^2 + 100s + 625}{25} \right) &= F(s) \\ G(s) = \frac{Y_1(s)}{F(s)} &= \frac{25}{s^4 + 4s^3 + 125s^2 + 100s + 625}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Transfer fonksiyonunun paydasının derecesi 4 olduğuna göre sistemin mertebesi de 4'tür. Dolayısıyla sistemin 4 adet kutbu vardır. Bu kutuplar yaklaşık olarak aşağıdaki gibidir:

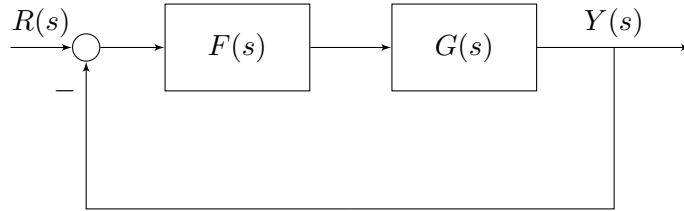


$$p_{1,2} \approx -1.65 \pm 10.70i$$

$$p_{3,4} \approx -0.35 \pm 2.28i$$

**Şekil 4:** Sistemin kutupları

- c. Sistem  $F(s) = 15$  olarak verilen P tipi bir kontrolör ile kapalı çevrime alınsın (Şekil 5). Bu durumda kapalı çevrim sistemin yaklaşık yerleşme süresini, sönüm oranını ve aşım miktarını hesaplayınız (Yüksek mertebeden sistemlerde sistem davranışı üzerinde baskın kutupların etkisinin en fazla olduğunu unutmayın).



**Şekil 5:** Birim geribeslemeli kapalı çevrim kontrol sistemi

**Çözüm:** Bu durumda sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{15 \times \frac{25}{s^4 + 4s^3 + 125s^2 + 100s + 625}}{1 + 15 \times \frac{25}{s^4 + 4s^3 + 125s^2 + 100s + 625}} \\ &= \frac{375}{s^4 + 4s^3 + 125s^2 + 100s + 1000} \end{aligned}$$

4. dereceden olan bu sistemin 4 tane kutbu vardır ve yaklaşık değerleri aşağıdaki gibidir:

$$p_{1,2} = -1.69 \pm 10.55i$$

$$p_{3,4} = -0.31 \pm 2.94i$$



Bu kutuplardan orijine daha yakın olanları ( $p_3$  ve  $p_4$ ) baskın kutup olacağından ve sistemin davranışını belirleyeceğinden dolayı, sistem sanki sadece bu iki kutuptan oluşan bir ikinci mertebeden sistemmiş gibi davranıp, yaklaşık sistem karakteristiklerine ulaşılabilir.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \approx \frac{K}{(s - p_3)(s - p_4)} = \frac{K}{(s + 0.31 - 2.94i)(s + 0.31 + 2.94i)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$(s + 0.31 - 2.94i)(s + 0.31 + 2.94i) = s^2 + 0.62s + 8.74 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$8.74 = \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n \approx 2.96, \quad 2\zeta\omega_n = 0.62 \Rightarrow \zeta \approx 0.1$$

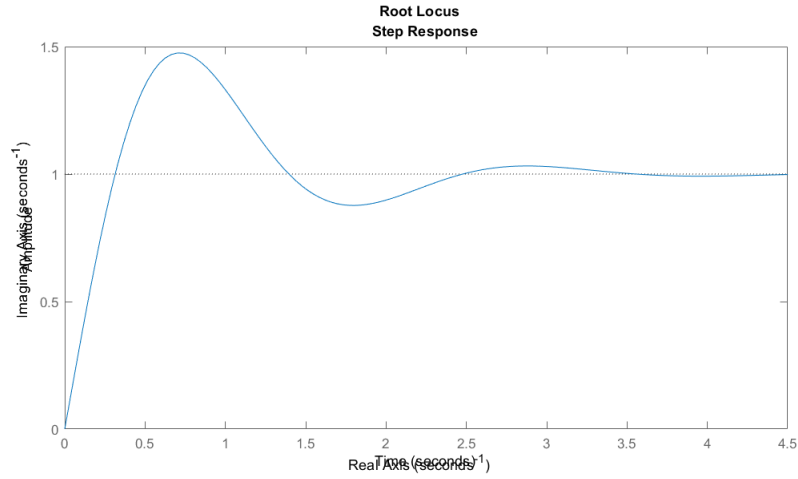
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \approx 12.88s \quad (\%2\text{'lik bant için})$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \approx 9.66s \quad (\%5\text{'lik bant için})$$

$$\%Aşım = 100 \times e^{(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})} \approx \%72$$

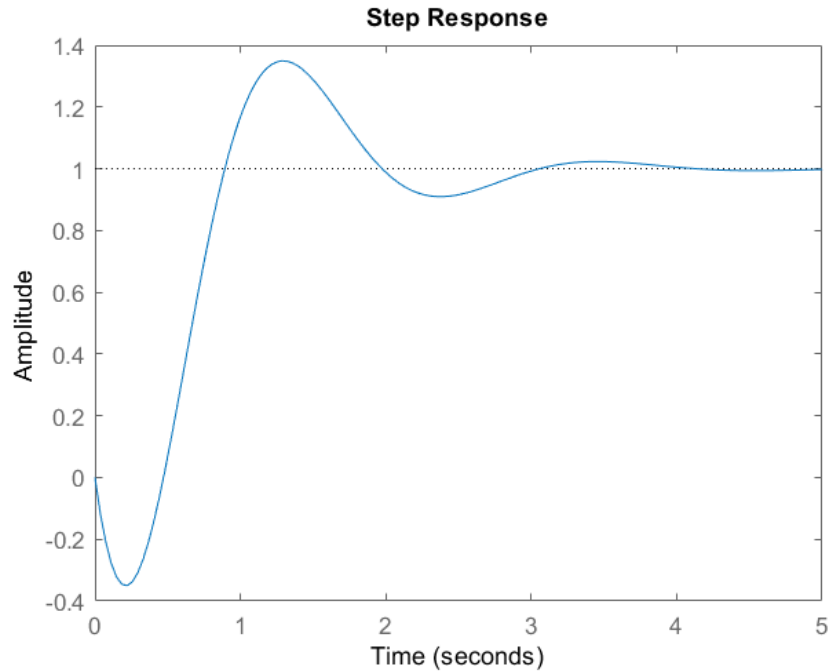
**Soru 3:** Aşağıda verilen sistemlerin birim basamak yanıtlarını MATLAB ile çizdiriniz ve bu yanıtlar arasındaki farkların nedenlerini yorumlayınız

a)  $\frac{7s + 20}{2s^2 + 5s + 20}$



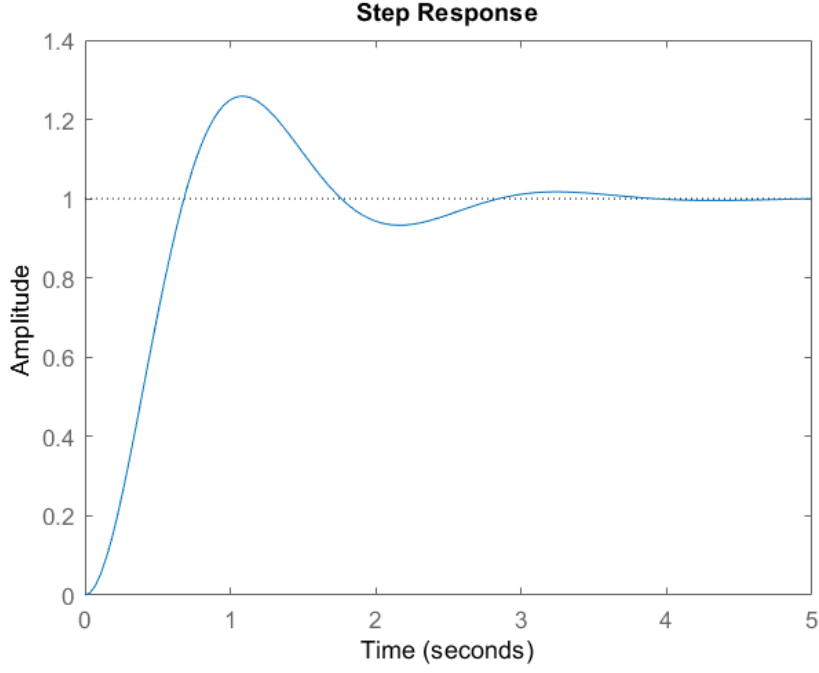
Sistem az sönümlüdür. Beklenildiği gibi sonuç vermiştir.

b)  $\frac{-7s + 20}{2s^2 + 5s + 20}$



Sistemin başlar başlamaz negatif yönde ilerlemesi  $G(s)$  nin pay kısmındaki  $-7s$  yüzündendir. Sisteme giren birim basamak fonksiyonuyla ( $1/s$ ) beraber bu değer, sadece  $-7$  değeriyle kalır ve bu da sistemi ilk halide negatif yönde ilerletir.

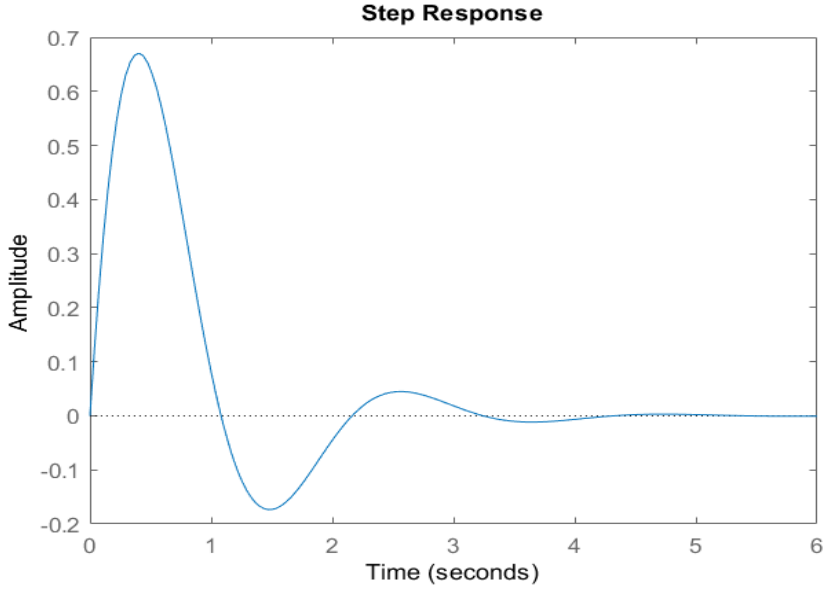
c)  $\frac{20}{2s^2 + 5s + 20}$



Sistemin grafiği

a şıkındakine çok benzer fakat küçük bir farkları vardır. bu da sıfır anından çıkış halinde c grafiği daha yatay bir halde çıkarken a grafiği birim basamak fonksiyonuyla çarpılan ve sonucunda +7 sayısını veren 7s'le beraber daha dik ve kesin bir yükselme sağlar.

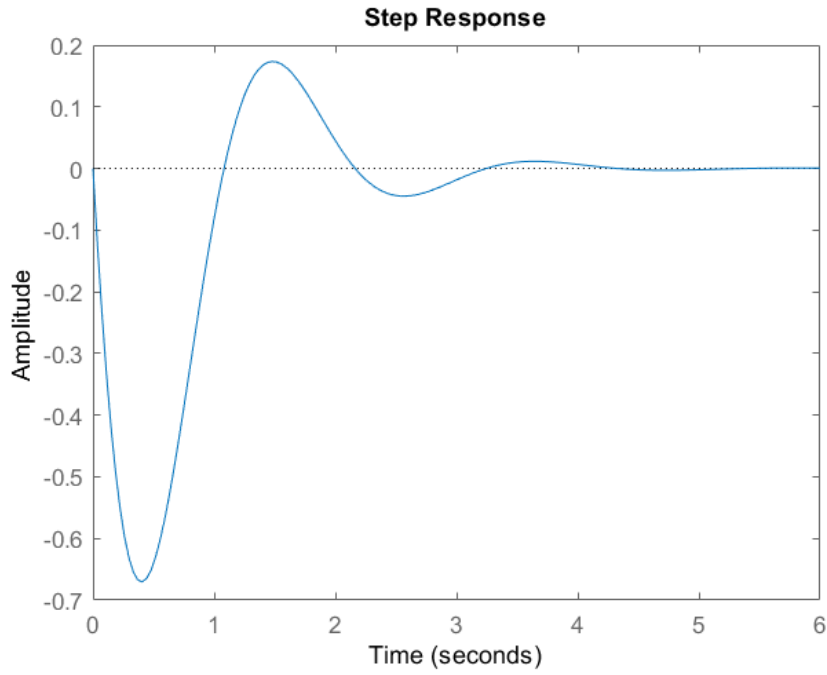
d)  $\frac{7s}{2s^2 + 5s + 20}$



Sistemin bu

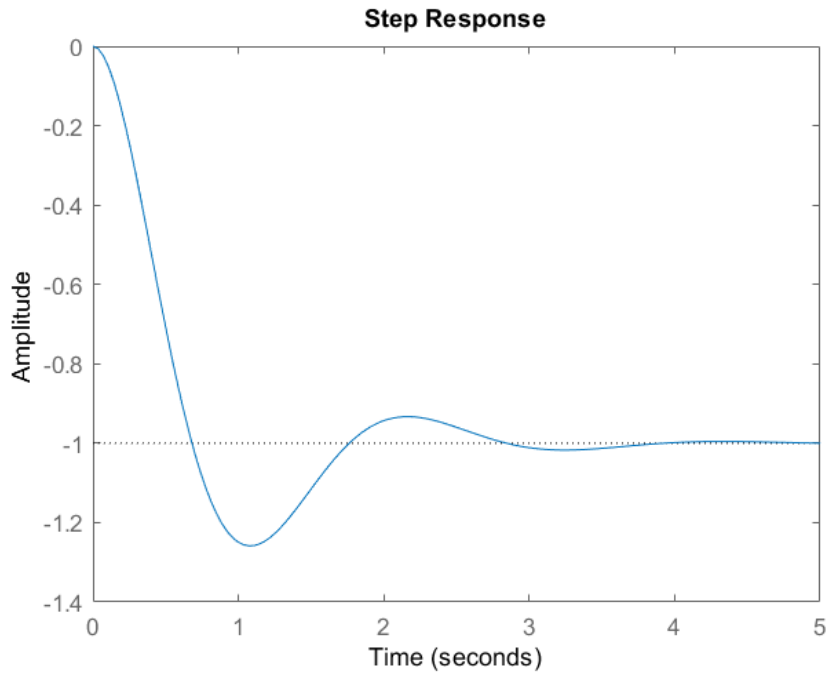
hali almasındaki temel neden basamak fonksiyonunun da sisteme girmesiyle beraber pay kısmında sadece 7 ifadesinin kalmasına rağmen paydada 2. Dereceden bir denklem vardır. İlk pozitif yöndeki sıçramayı 7s sayısının pozitif olmasına bağlayabiliriz. Sıçramadan sonra 0 konumuna geri döner ve bir zaman sonra stabil kalır.

e)  $\frac{-7s}{2s^2 + 5s + 20}$



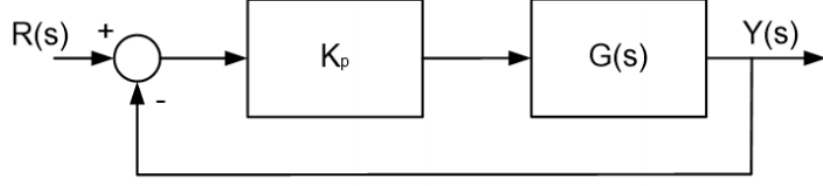
D'de verilen grafiğin aynısı sadece ilk başta pozitif yönde ilerlemek yerine negatif yönde ilerlemiş bu -7s'in önündeki eksi yüzünden olmuştur daha sonra eski sıfır haline döner.

f)  $\frac{-20}{2s^2 + 5s + 20}$



Yanında 7s veya -7s terimi olmayan sabit sayı birim basamak fonksiyonunun girmesiyle beraber yine sistemi 1 e götürmüştür fakat paydanın önündeki negatif katsayı nedeniyle sistemi -1 e götürüp orada sabitlemiştir.

**Soru 4:** Yukarıdaki blok diyagramındaki sistemin modeli



**Şekil 6:** Kapalı çevrim kontrol sistemi

$$G(s) = \frac{s^3 + 18s^2 + 95s + 150}{s^3 + 3s^2 - 28s}$$

biçimindedir. Buna göre,

- a. Pozitif  $K_p$  değerleri için kapalı çevrimli sistemin köklerin değişimini gösteren grafiği çiziniz (Not: Kök eğrisini derste gösterilen adımları teker teker uygulayarak çizmeniz beklenmektedir).

**Çözüm:**

- 1) Kutup sayısı "3"  $\rightarrow (0, -7, 4)$  kutuplar  
Sıfır sayısı "3"  $\rightarrow (-3, -5, -10)$  sıfırlar
- 2) Asimptot sayısı  
Kutup sayısı - Sıfır sayısı -  $3 - 3 = 0$
- 3)  $\frac{DK}{DP}$  bulunması

$$\frac{(s^3 + 18s^2 + 95s + 150)K_p}{s^3 + 3s^2 - 28s} + 1 = 0$$

$$\frac{-(s^3 + 3s^2 - 28s)}{s^3 + 18s^2 + 95s + 150} = K_p$$

$$\frac{\sigma^3 + 3\sigma^2 - 28\sigma}{\sigma^3 + 18\sigma^2 + 95\sigma + 150} = K_p$$

$$\frac{dK_p}{d\sigma} \Rightarrow (3\sigma^2 + 6\sigma - 28)(\sigma^3 + 18\sigma^2 + 95\sigma + 150) = A$$

$$(3\sigma^2 + 36\sigma + 95)(\sigma^3 + 3\sigma^2 - 28\sigma) = B$$

$$\frac{dK_p}{d\sigma} = \frac{A - B}{(\sigma^3 + 18\sigma^2 + 95\sigma + 150)^2} = 0$$

$$-8,5 \quad / \quad -4,6 \quad / \quad 1,04 + 0,6i \quad / \quad 1,04 - 0,6i$$

6) İmajiner eksenini kesen kısımlar

$$s^3(K_p + 1) + s^2(18K_p + 3) + s(95K_p - 28) + 150K_p$$

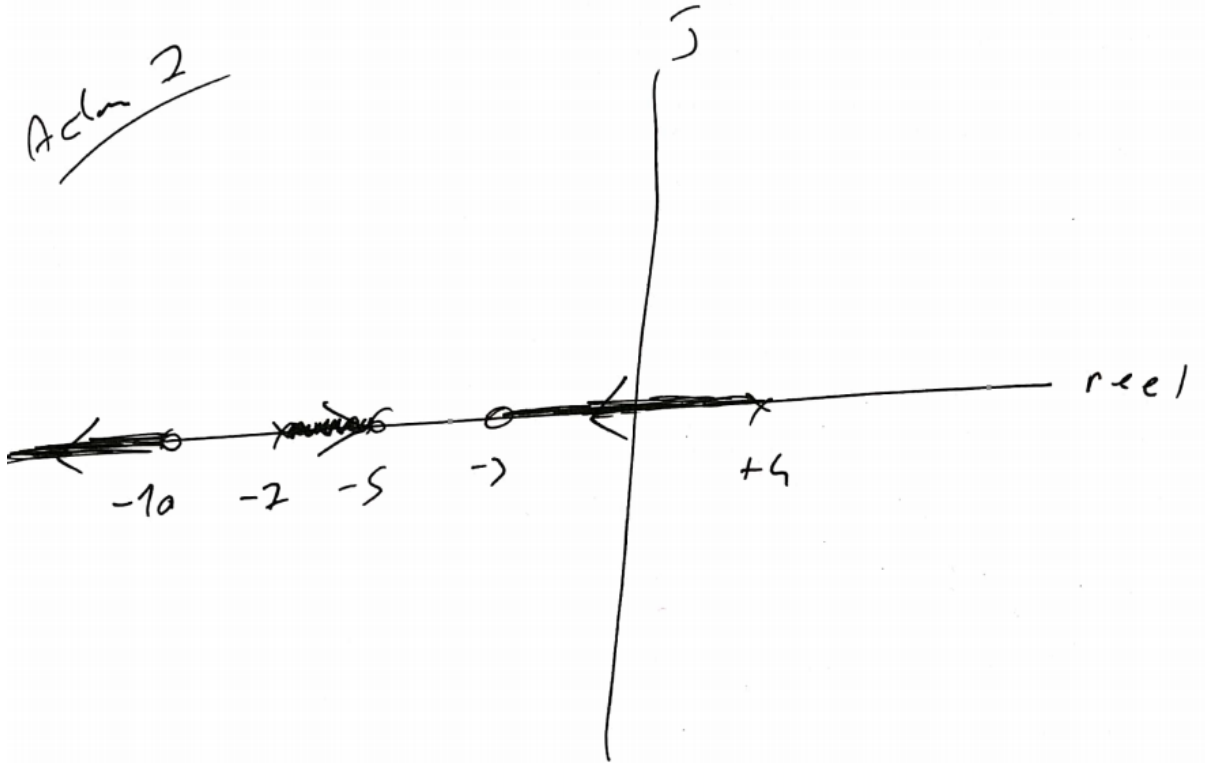
$$\begin{array}{l|l} s^3 & K_p + 1 \quad 95K_p - 28 \quad 0 \\ s^2 & 18K_p + 3 \quad 150K_p \quad 0 \\ s^1 & \beta_1 \quad 0 \\ s^0 & 150K_p \end{array}$$

$$\frac{(95K_p - 28)(18K_p + 3) - (K_p + 1)(150K_p)}{18K_p + 3} = \beta_1$$

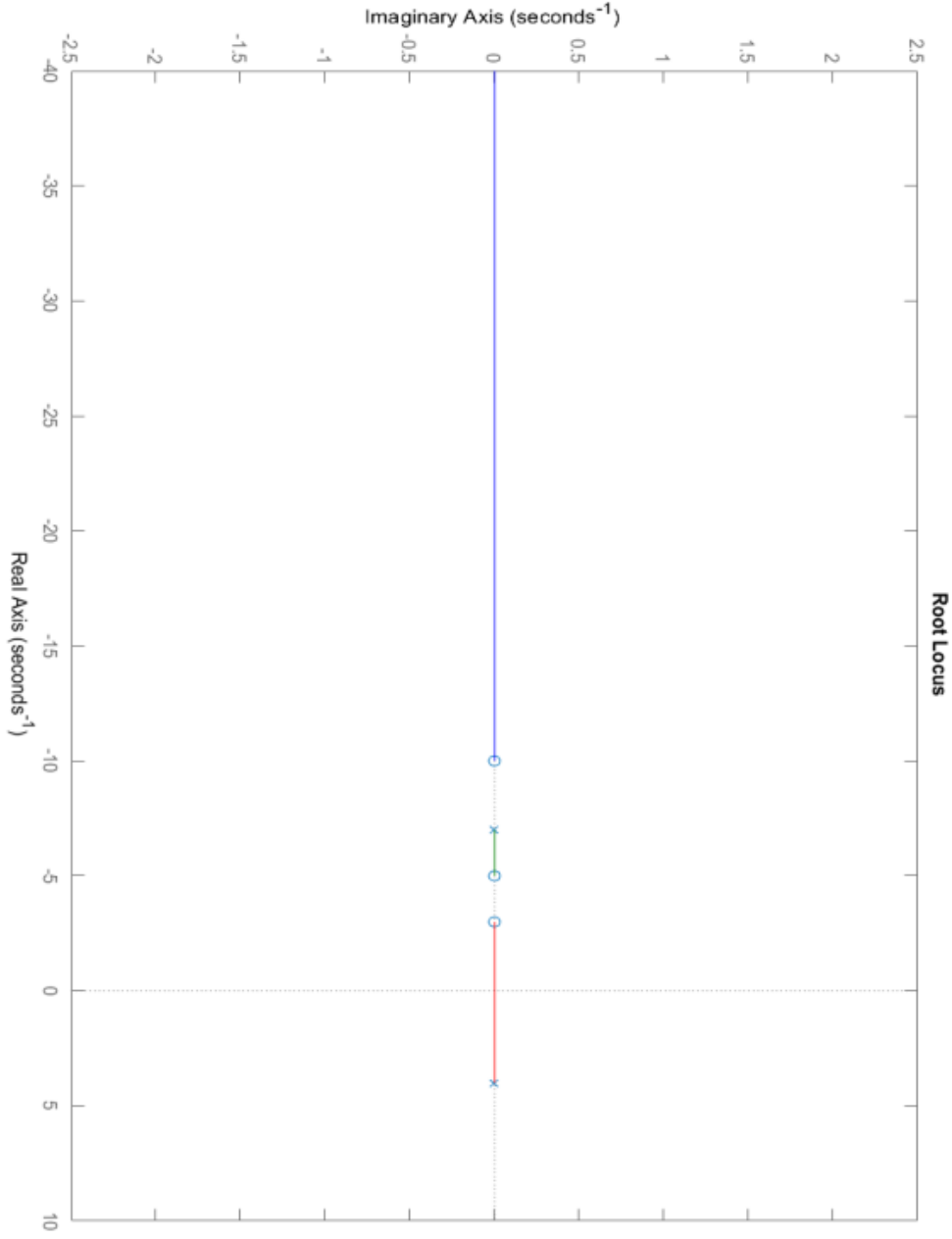
$$K_p > 0.39 \quad \cancel{K_p > -1} \quad \cancel{K_p > 0.18} \quad (K_p \text{ sıfırdan büyük})$$

$$K_p > 0.39 \implies 10.11s^2 = -59$$

$$s = \pm 2.24j$$



- g. Grafiğin doğruluğunu test etmek için MATLAB'ta `rlocus()` komutunu kullanarak kök eğrisini çizdiriniz.



Şekil 7: MATLAB rlocus grafiği