

Bilişimde İstatistiksel Analiz

Ders 11

Ali Mertcan KOSE Msc.

`amertcankose@ticaret.edu.tr`

İstanbul Ticaret Üniversitesi



İSTANBUL TİCARET
ÜNİVERSİTESİ

Amaç

2'den fazla bağımsız grubun sayısal bir değişken bakımından karşılaştırılması

- *Parametrik test*: Tek Yönlü Varyans Analizi
- *Parametrik olmayan test*: Kruskal Wallis testi

Tek Yönlü Varyans Analizi

Parametrik test varsayımları sağlandığında ölçümle belirtilen bir değişken yönünden ikiden fazla bağımsız grubun ortalamaları arasında fark olup olmadığını test etmek için kullanılır. İki ortalama arasındaki farkın anlamlılık testi için gerekli varsayımlar varyans analizi için de geçerlidir.

Varsayımlar

- Karşılaştırılacak gruplar normal dağılım göstermeli
- Grupların varyansları homojen olmalı
- Gruplar birbirinden bağımsız olmalı

Hipotezler:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$$

H_a : En az bir μ_i farklıdır.

Tek Yönlü Varyans Analizi

1	2	3	...	k
x11	x12	x13	...	x1k
x21	x22	x23	...	x2k
x31	x32	x33	...	x3k
...
xn11	xn22	xn33	...	xnkk
T1	T2	T3		Tk
xort1	xort2	Xort3		Xortk

Tek Yönlü Varyans Analizi

$$T_j = \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} = \text{j. sütunun toplamı}$$

$$\bar{x}_{.j} = \frac{T_j}{n_j} = \text{j.sütunun ortalaması}$$

$$T = \sum_{j=1}^k T_j = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} = \text{Bütün gözlemlerin toplamı}$$

$$\bar{x}_{..} = \frac{T}{N}$$

$$N = \sum_{j=1}^k n_j$$

Genel Kareler Toplamı

$$\text{GNKT} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N}$$

Grup İçi Kareler Toplamı

$$\text{GIKT} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{T_{.j}^2}{n_j}$$

Gruplar Arası Kareler Toplamı

$$\text{GAKT} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} n_j (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} \frac{T_{.j}^2}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{N}$$

Gruplar Arası Kareler Ortalaması

$$GAKO = \frac{GAKT}{k-1}$$

Gruplar İçi Kareler Ortalaması

$$GIKO = \frac{GIKT}{n-k}$$

$$F_h = \frac{GAKO}{GIKO}$$

Tek Yönlü Varyans Analizi

DK	KT	SD	KO	F
Gruplar Arası	GAKT	k-1	GAKO	GAKO/GIKO
Grup İçi	GIKT	N-k	GIKO	
Genel	GNKT	N-1		

Varyans Analizi Sonucu Anlamlı Olduğunda Farklı Grupların Belirlenmesi

Varyans analizi sonucunda gruplar arasında fark yoksa işlemler sona erer. Ancak, gruplar arasında fark varsa, farklılığın hangi grup ya da gruplar arasında olduğu farklı yöntemlerle araştırılabilir. Bu yöntemlere post-hoc testleri denir. Bu yöntemlerde en çok kullanılanlar;

- LSD
- Tukey
- Benferroni
- Sidak
- Dunnett's C
- Dunnett's T3

Tek Yönlü Varyans Analizi

LSD Testi Örneklem genişlikleri eşit olduğunda ($n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_k = n$)

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq t \sqrt{\frac{2(GIKO)}{n}} \quad p < 0.05$$

Örneklem genişlikleri eşit olmadığında ($n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq \dots \neq n_k$)

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq t \sqrt{GIKO \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}} \quad p < 0.05$$

Örnek 1

Adölesan dönemindeki 90 kız, yaş gruplarına göre (11-14,15-18,19-24) 3 gruba ayrılmıştır. Günlük kilo başına tükettikleri kaloriler hesaplanmıştır. Yaş gruplarına göre tüketilen kaloriler bakımından farklılık var mıdır?

Örnek 1

	11-14	15-18	19-24
	42.45	39.98	43.30
	46.81	45.29	42.85
	45.62	33.08	32.43
	53.82	38.60	46.81

	50.68	37.57	35.18
Toplam	1380.76	1193.82	1105.72
Ortalama	46.02	39.79	36.86

Örnek 1

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$$

H_a : En az bir μ_i farklıdır.

$$\begin{aligned} \text{GNKT} &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N} = 42.45^2 + \\ &46.81^2 + \dots + 35.18^2 - \frac{3680.30^2}{90} \\ &= 154138.01 - 150495.65 = 3642.36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{GIKT} &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{T_{.j}^2}{n_j} = 42.45^2 + \\ &46.81^2 + \dots + 35.18^2 - \left[\frac{1380.76^2}{30} + \frac{1193.82^2}{30} + \frac{1105.72^2}{30} \right] \\ &= 2327.31 \end{aligned}$$

$$\text{GAKT} = \text{GNKT} - \text{GIKT} = 3642.36 - 2327.31 = 1315.05$$

Örnek 1

$$GIKO = GIKT / (90 - 3) = 2327.31 / 87 = 26.75$$

$$GAKO = GAKT / (3 - 1) = 1315.05 / 2 = 657.53$$

$$F = GAKO / GIKO = 657.53 / 26.75 = 24.58$$

DK	KT	SD	KO	F
Gruplar Arası	1315.05	2	657.53	24.58
Grup İçi	2327.31	87	26.75	
Genel	3642.36	89		

Grup ortalamaları arasında anlamlı bir farklılık vardır.

Örnek 1

Gruplardaki kişi sayıları birbirine eşit olduğu için

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq t \sqrt{\frac{2(GIKO)}{n}}$$

$$|46.02 - 39.79|$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad 1.98 \sqrt{\frac{2(26.75)}{30}} = 2.64 \rightarrow 6.23 > 2.64 \quad H_0 \text{ red}$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_3 \quad 1.98 \sqrt{\frac{2(26.75)}{30}} = 2.64 \rightarrow 9.16 > 2.64 \quad H_0 \text{ red}$$

$$H_0 : \mu_2 = \mu_3 \quad 1.98 \sqrt{\frac{2(26.75)}{30}} = 2.64 \rightarrow 2.93 > 2.64 \quad H_0 \text{ red}$$

Kruskal Wallis Testi

Tek yönlü varyans analizinin parametrik olmayan karşılığıdır. Veriler ölçümle belirtildiği halde parametrik test varsayımları sağlanmıyorsa (gözlem sayısı az ya da gruplar normal dağılmıyor ise) Kruskal-Wallis testi kullanılır.

Bu testte ve parametrik olmayan diğer testlerde, gruplara ait ölçümlerin karşılaştırılmasında aritmetik ortalama yerine ortanca değer esas alınır.

Mann-Whitney U testinin 3 veya daha çok grup olduğu duruma genişletilmesidir.

Kruskal Wallis Testi

Testin aşamaları şu şekilde gerçekleşir:

- 1 k grubun n_1, n_2, \dots, n_k gözlemleri tek bir değişken altında küçükten büyüğe sıralanır. Tüm gözlemlere sıra numarası verilir.
- 2 k grubun sıra numaraları ayrı ayrı toplanır(R_j).
- 3 Test istatistiği

$$KW = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3(n+1)$$

şeklinde hesaplanır.

R_j = j.gruptaki sıra sayıları toplamı

n_j = j.gruptaki gözlem sayısı

- 4 Üç grup olduğunda ve her bir grupta beş ve daha az gözlem olduğunda hesaplanan KW istatistiği, özel tablolar kullanılarak karşılaştırılır. Bir ya da daha fazla grupta beşten fazla gözlem olduğunda ise KW, $k-1$ serbestlik dereceli χ^2 tablo değeriyle karşılaştırılır.

Test Sonucu Anlamlı olduğunda farklı grupların belirlenmesi

ANOVA'da olduğu gibi bu Kruskal-Wallis testi de tüm gruplar arasında anlamlı bir farklılık olduğunu vermez. Bunun için çoklu karşılaştırma yapmak gerekir.

$$|\bar{R}_i - \bar{R}_j| > t \sqrt{\frac{n(n+1)}{12} \frac{n-1-KW}{n-k} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} \rightarrow p < 0.05$$

Üniversite öğrencilerinin çay içme miktarına göre hemoglobin düzeylerinin değişip değişmediği incelenmek istenmektedir. Bu amaçla 13 kişi “yemekten 1 saat önce veya sonra çay içenler”, “yemekten 30 dakika önce ya da sonra çay içenler” ve “yemekle birlikte çay içenler” olmak üzere üç gruba ayrılmışlardır ve hemoglobin düzeyleri ölçülmüştür. Buna göre hemoglobinin düzeyi çayın içilme zamanına göre değişmekte midir?

Hipotezler:

H_0 : Kitle dağılımları benzerdir.

H_1 : En az kitle dağılımı diğerinden farklıdır.

Örnek 2

I	II	III
13.5(9)	12.9(6.5)	10.9(1)
13.8(10)	12.5(5)	11.5(4)
15.5(13)	13(8)	11.2(3)
14(11)	12.9(6.5)	11(2)
14.7(12)		
Rj 55	26	10

I.Yemekten 1 saat

II.Yemekten 30 dakika önce ya da sonra çay içenler

III.Yemekle birlikte çay içenler

Örnek 2

$$KW = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3(n+1)$$

$$\frac{12}{13(13+1)} \left[\frac{55^2}{5} + \frac{26^2}{4} + \frac{10^2}{4} \right] - 3(13+1) = 10.68$$

$$KW_{(5,4,4;0.05)} = 5.657 < KW = 10.68$$

$p < 0.05$, H_0 red

Örnek 2

Critical Values of the Kruskal-Wallis H Distribution
Taken from Zar, 1984 Table B.12

H ₁	H ₂	H ₃	g = 0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001	H ₁	H ₂	H ₃	g = 0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
2	2	2	4.601							2	2	2	4.601	5.019	7.332	9.378	10.516	11.310	
3	2	1	4.286							3	2	1	4.286	5.005	7.355	9.405	10.495	11.275	
3	2	2	4.500	4.714						3	2	1	4.500	5.005	7.355	9.405	10.495	11.275	
3	2	2	4.501	5.163						3	2	2	4.501	5.005	7.355	9.405	10.495	11.275	
3	2	2	4.506	5.161	6.250					3	2	2	4.506	5.005	7.355	9.405	10.495	11.275	
3	3	3	6.627	5.100	6.889	17.200	7.200			3	3	3	6.627	5.100	6.889	17.200	7.200		
4	2	1	4.500							4	2	1	4.500	5.005	7.355	9.405	10.495	11.275	
4	2	2	4.500	5.333	6.000					4	2	2	4.500	5.333	6.000				
4	3	1	4.506	5.333	6.000					4	3	1	4.506	5.333	6.000				
4	3	2	4.511	5.444	6.144	4.444	7.000			4	3	2	4.511	5.444	6.144	4.444	7.000		
4	4	3	4.704	5.291	6.264	6.740	7.210	0.010		4	4	3	4.704	5.291	6.264	6.740	7.210	0.010	
4	4	4	4.187	4.967	6.067	6.067				4	4	4	4.187	4.967	6.067	6.067			
4	4	7	4.555	4.455	6.200	7.030	7.282	7.855		4	4	7	4.555	4.455	6.200	7.030	7.282	7.855	
4	4	8	4.585	4.588	6.712	7.144	7.088	8.267	8.989	4	4	8	4.585	4.588	6.712	7.144	7.088	8.267	8.989
4	4	4	4.654	5.602	6.952	7.054	8.300	8.054	9.269	4	4	4	4.654	5.602	6.952	7.054	8.300	8.054	9.269
5	2	1	4.200	5.000						5	2	1	4.200	5.000					
5	2	2	4.373	5.160	6.000	6.533				5	2	2	4.373	5.160	6.000	6.533			
5	3	1	4.216	4.969	6.044					5	3	1	4.216	4.969	6.044				
5	3	2	4.601	5.281	6.124	6.809	7.182			5	3	2	4.601	5.281	6.124	6.809	7.182		
5	3	3	4.533	5.444	6.533	7.170	7.436	8.248	8.727	5	3	3	4.533	5.444	6.533	7.170	7.436	8.248	8.727
5	4	1	3.997	4.985	6.481	6.955	7.364			5	4	1	3.997	4.985	6.481	6.955	7.364		
5	4	2	4.541	5.273	6.359	7.030	7.073	8.114	8.591	5	4	2	4.541	5.273	6.359	7.030	7.073	8.114	8.591
5	4	3	4.549	5.655	6.876	7.442	7.457	8.481	8.909	5	4	3	4.549	5.655	6.876	7.442	7.457	8.481	8.909
5	4	4	4.619	5.657	6.953	7.700	8.189	8.860	9.180	5	4	4	4.619	5.657	6.953	7.700	8.189	8.860	9.180
5	5	1	4.199	5.127	6.145	7.309	7.182			5	5	1	4.199	5.127	6.145	7.309	7.182		
5	5	2	4.623	5.238	6.444	7.038	7.131	8.444	7.338	5	5	2	4.623	5.238	6.444	7.038	7.131	8.444	7.338
5	5	3	4.545	5.755	6.866	7.478	8.316	8.809	9.161	5	5	3	4.545	5.755	6.866	7.478	8.316	8.809	9.161
5	5	4	4.533	5.666	6.909	7.828	8.523	9.183	9.098	5	5	4	4.533	5.666	6.909	7.828	8.523	9.183	9.098
5	5	5	4.543	5.760	7.222	8.000	8.760	9.620	9.920	5	5	5	4.543	5.760	7.222	8.000	8.760	9.620	9.920
5	6	1	4.222	4.822						5	6	1	4.222	4.822					
5	6	2	4.545	5.345	6.182	6.902				5	6	2	4.545	5.345	6.182	6.902			
5	6	3	4.589	5.855						5	6	3	4.589	5.855					
5	6	4	4.582	5.348	6.227	6.970	7.515	8.182		5	6	4	4.582	5.348	6.227	6.970	7.515	8.182	
5	6	5	4.138	5.615	6.930	7.618	7.872	8.828	9.348	5	6	5	4.138	5.615	6.930	7.618	7.872	8.828	9.348
5	6	6	4.586	5.287	6.174	7.106	7.614			5	6	6	4.586	5.287	6.174	7.106	7.614		
5	6	7	4.494	5.340	6.571	7.240	7.946	8.494	8.827	5	6	7	4.494	5.340	6.571	7.240	7.946	8.494	8.827
5	6	8	4.604	5.610	6.720	7.018	8.333	9.018	9.179	5	6	8	4.604	5.610	6.720	7.018	8.333	9.018	9.179
5	6	9	4.595	5.681	6.919	7.790	8.381	9.187	9.861	5	6	9	4.595	5.681	6.919	7.790	8.381	9.187	9.861
5	6	10	4.128	4.990	6.138	7.182	8.077	8.915		5	6	10	4.128	4.990	6.138	7.182	8.077	8.915	
6	2	2	4.596	5.338	6.585	7.276	8.106	8.987	9.189	6	2	2	4.596	5.338	6.585	7.276	8.106	8.987	9.189
6	2	3	4.596	5.682	7.292	7.990	8.214	9.100		6	2	3	4.596	5.682	7.292	7.990	8.214	9.100	
6	2	4	4.527	5.601	7.318	7.936	8.683	9.408	9.960	6	2	4	4.527	5.601	7.318	7.936	8.683	9.408	9.960
6	2	5	4.567	5.720	7.110	8.028	8.869	9.771	10.275	6	2	5	4.567	5.720	7.110	8.028	8.869	9.771	10.275
6	2	6	4.580	6.185	8.080	7.121	8.165	9.377	9.660	6	2	6	4.580	6.185	8.080	7.121	8.165	9.377	9.660
6	2	7	4.438	6.410	6.667	7.407	8.210	9.219	9.782	6	2	7	4.438	6.410	6.667	7.407	8.210	9.219	9.782
6	2	8	4.505	6.625	6.900	7.725	8.450	9.458	10.150	6	2	8	4.505	6.625	6.900	7.725	8.450	9.458	10.150
6	2	9	4.549	6.724	7.027	8.020	8.724	9.682	10.342	6	2	9	4.549	6.724	7.027	8.020	8.724	9.682	10.342
6	2	10	4.542	6.765	7.182	8.124	8.987	9.948	10.524	6	2	10	4.542	6.765	7.182	8.124	8.987	9.948	10.524
6	2	11	4.543	5.901	7.240	8.222	9.170	10.187	10.889	6	2	11	4.543	5.901	7.240	8.222	9.170	10.187	10.889
6	3	3	4.594	5.819	7.332	8.378	9.373	10.516	11.310	6	3	3	4.594	5.819	7.332	8.378	9.373	10.516	11.310
6	3	4	4.595	5.905	7.355	8.405	9.495	10.495	11.725	6	3	4	4.595	5.905	7.355	8.405	9.495	10.495	11.725
6	3	5	4.597	5.679						6	3	5	4.597	5.679					
6	3	6	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	6	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	7	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	7	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	8	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	8	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	9	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	9	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	10	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	10	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	11	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	11	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	12	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	12	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	13	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	13	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	14	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	14	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	15	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	15	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	16	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	16	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	17	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	17	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	18	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	18	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	19	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	19	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	20	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	20	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	21	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	21	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	22	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	22	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	23	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	23	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	24	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	24	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	25	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	25	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	26	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	26	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	27	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	27	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3	28	4.597	5.679	10.073	6.067				6	3	28	4.597	5.679	10.073	6.067			
6	3																		

Örnek 2

Gruplar	$ \bar{R}_i - \bar{R}_j $	KW	istatistiksel karar
1-2	4.5	2.115	$p < 0.05$
1-3	8.5	2.115	$p < 0.05$
2-3	4	2.229	$p < 0.05$

Egzersiz süreleri farklı gruplar arasında anksiyete skorları bakımından anlamlı farklılık var mıdır?(Anksiyete skorlarının normal dağılıma sahip olduğu bilinmektedir.)

grup1	grup2	grup3
5 saat	10 saat	15 saat
48	55	51
50	52	52
53	53	50
52	55	53
50	53	50

Tıp eğitiminde kullanılan 4 farklı yöntemden sonra öğrencilerin başarı notları aşağıdaki gibidir. Başarı notları bakımından teknikler arasında anlamlı farklılık var mıdır?(Normal dağılıma uygun değildir.)

1	2	3	4
65	75	59	94
87	69	78	89
73	83	67	80
79	81	62	88