Biyoistatistik

Lecture 9

Msc.Ali Mertcan KÖSE

İstanbul Kent Üniversitesi

Bağımsız İkiden fazla Gruplara İlişkin Hipotez Testleri

Amaç

2'den fazla bağımsız grubun sayısal bir değişken bakımından karşılaştırılması

- *Parametrik test:* Tek Yönlü Varyans Analizi
- *Parametrik olmayan test:* Kruskal Wallis testi

Tek Yönlü Varyans Analizi

Parametrik test varsayımları sağlandığında ölçümle belirtilen bir değişken yönünden ikiden fazla bağımsız grubun ortalamaları arasında fark olup olmadığını test etmek için kullanılır. İki ortalama arasındaki farkın anlamlılık testi için gerekli varsayımlar varyans analizi için de geçerlidir.

Tek Yönlü Varyans Analizi

Varsayımlar

- Karşılaştırılacak gruplar normal dağılım göstermeli
- Grupların varyansları homojen olmalı
- Gruplar birbirinden bağımsız olmalı

Hipotezler:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_k$

H_a : En az bir μ_i farklıdır.

Tek Yönlü Varyans Analizi

1	2	3	...	k
x11	x12	x13	...	x1k
x21	x22	x23	...	x2k
x31	x32	x33	...	x3k
...	...	...	. . .	...
xn11	xn22	xn33	...	xnkk
T1	T2	T3		Tk
xort1	xort2	Xort3		Xortk

Tek Yönlü Varyans Analizi

$T.j = \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} =$ j. sütunun toplamı

$\bar{x}_{.j} = \frac{T_{.j}}{n_j} =$ j.sütunun ortalaması

$T.j = \sum_{i=1}^{k} T_{.j} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} x_{ij} =$ Bütün gözlemlerin toplamı

$\bar{x}_{..} = \frac{T_{..}}{N}$

N$= \sum_{j=1}^{k} n_j$

Tek Yönlü Varyans Analizi

Genel Kareler Toplamı

GNKT $= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} - \frac{T_{..}^2}{N}$

Grup İçi Kareler Toplamı

GIKT$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{T_{.j}^2}{n_j}$

Gruplar Arası Kareler Toplamı

GAKT$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} n_j (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \frac{T_{.j}}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{N}$

Tek Yönlü Varyans Analizi

Gruplar Arası Kareler Ortalaması

$\text{GAKO} = \frac{GAKT}{k-1}$

Gruplar İçi Kareler Ortalaması

$\text{GIKO} = \frac{GIKT}{n-k}$

$F_h = \frac{GAKO}{GIKO}$

Tek Yönlü Varyans Analizi

DK	KT	SD	KO	F
Gruplar Arası	GAKT	k-1	GAKO	GAKO/GIKO
Grup İçi	GIKT	N-k	GIKO	
Genel	GNKT	N-1		

Varyans Analizi Sonucu Anlamlı Olduğunda Farklı Grupların Belirlenmesi

Varyans analizi sonucunda gruplar arasında fark yoksa işlemler sona erer. Ancak, gruplar arasında fark varsa, farklılığın hangi grup ya da gruplar arasında olduğu farklı yöntemlerle araştırılabilir. Bu yöntemlere post-hoc testleri denir. Bu yöntemlerde en çok kullanılanlar;

- LSD
- Tukey
- Benferroni
- Sidak
- Dunnett's C
- Dunnett's T3

Tek Yönlü Varyans Analizi

LSD Testi Örneklem genişlikleri eşit olduğunda $(n_1 = n_2 = n_3 = ... = n_k = n)$

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq t\sqrt{\frac{2(GIKO)}{n}} \text{ p<0.05}$$

Örneklem genişlikleri eşit olmadığında$(n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq ... \neq n_k)$

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq t\sqrt{GIKO\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}} \text{ p<0.05}$$

Örnek 1

Adölesan dönemindeki 90 kız, yaş gruplarına göre (11-14,15-18,19-24) 3 gruba ayrılmıştır. Günlük kilo başına tükettikleri kaloriler hesaplanmıştır. Yaş gruplarına göre tüketilen kaloriler bakımından farklılık var mıdır?

Örnek 1

	11-14	15-18	19-24
	42.45	39.98	43.30
	46.81	45.29	42.85
	45.62	33.08	32.43
	53.82	38.60	46.81
	. . .	. . .	. . .
	50.68	37.57	35.18
Toplam	1380.76	1193.82	1105.72
Ortalama	46.02	39.79	36.86

Örnek 1

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_k$

H_a : En az bir μ_i farklıdır.

GNKT $= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} - \frac{T_{..}^2}{N} = 42.45^2 + 46.81^2 + ... + 35.18^2$ - $\frac{3680.30^2}{90}$

$=$ 154138.01-150495.65 $=$ 3642.36

GIKT$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{T_{.j}^2}{n_j} = 42.45^2 + 46.81^2 + ... + 35.18^2$ - $[\frac{1380.76^2}{30} + \frac{1193.82^2}{30} + \frac{1105.72^2}{30}]$

$=$2327.31

GAKT$=$ GNKT-GIKT $=$ 3642.36-2327.31 $=$ 1315.05

Örnek 1

GIKO = GIKT/(90-3)=2327.31/87 = 26.75

GAKO= GAKT/(3-1)=1315.05/2 = 657.53

F= GAKO/GIKO = 657.53/26.75 = 24.58

DK	KT	SD	KO	F
Gruplar Arası	1315.05	2	657.53	24.58
Grup İçi	2327.31	87	26.75	
Genel	3642.36	89		

Grup ortalamaları arasında anlamlı bir farklılık vardır.

Örnek 1

Gruplardaki kişi sayıları birbirine eşit olduğu için

$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq t\sqrt{\frac{2(GIKO)}{n}}$

|46.02-39.79|

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \; 1.98\sqrt{\frac{2(26.75)}{30}}$ =2.64 $\rightarrow$ 6.23> 2.64 H_0 red

$H_0 : \mu_1 = \mu_3 \; 1.98\sqrt{\frac{2(26.75)}{30}}$ =2.64 $\rightarrow$ 9.16> 2.64 H_0 red

$H_0 : \mu_2 = \mu_3 \; 1.98\sqrt{\frac{2(26.75)}{30}}$ =2.64 $\rightarrow$ 2.93> 2.64 H_0 red

Kruskal Wallis Testi

Tek yönlü varyans analizinin parametrik olmayan karşılığıdır. Veriler ölçümle belirtildiği halde parametrik test varsayımları sağlanmıyorsa (gözlem sayısı az ya da gruplar normal dağılmıyor ise) Kruskal-Wallis testi kullanılır.

Kruskal Wallis Testi

Bu testte ve parametrik olmayan diğer testlerde, gruplara ait ölçümlerin karşılaştırılmasında aritmetik ortalama yerine ortanca değer esas alınır.

Mann-Whitney U testinin 3 veya daha çok grup olduğu duruma genişletilmesidir.

Kruskal Wallis Testi

Testin aşamaları şu şekilde gerçekleşir:

1. k grubun $n_1, n_2, ..., n_k$ gözlemleri tek bir değişken altında küçükten büyüğe sıralanır. Tüm gözlemlere sıra numarası verilir.
2. k grubun sıra numaraları ayrı ayrı toplanır(R_j).
3. Test istatistiği

$$\mathrm{KW} = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j^2}{n_j} - 3(n+1)$$

şeklinde hesaplanır.

$R_j =$ j.gruptaki sıra sayıları toplamı

$n_j =$ j.gruptaki gözlem sayısı

Kruskal Wallis Testi

4. Üç grup olduğunda ve her bir grupta beş ve daha az gözlem olduğunda hesaplanan KW istatistiği, özel tablolar kullanılarak karşılaştırılır. Bir ya da daha fazla grupta beşten fazla gözlem olduğunda ise KW, k-1 serbestlik dereceli χ^2 tablo değeriyle karşılaştırılır.

Test Sonucu Anlamlı olduğunda farklı grupların belirlenmesi

ANOVA'da olduğu gibi bu Kruskal-Wallis testi de tüm gruplar arasında anlamlı bir farklılık olduğunu vermez. Bunun için çoklu karşılaştırma yapmak gerekir.

$$|\bar{R}_i - \bar{R}_j| > t\sqrt{\frac{n(n+1)}{12}\frac{n-1-KW}{n-k}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} \rightarrow \text{p} < 0.05$$

Örnek 2

Üniversite öğrencilerinin çay içme miktarına göre hemoglobin düzeylerinin değişip değişmediği incelenmek istenmektedir. Bu amaçla 13 kişi "yemekten 1 saat önce veya sonra çay içenler", "yemekten 30 dakika önce ya da sonra çay içenler" ve "yemekle birlikte çay içenler" olmak üzere üç gruba ayrılmışlardır ve hemoglobin düzeyleri ölçülmüştür. Buna göre hemoglabin düzeyi çayın içilme zamanına göre değişmekte midir?

Hipotezler:

H_0 : Kitle dağılımları benzerdir.

H_1 : En az kitle dağılımı diğerinden farklıdır.

Örnek 2

I	II	III
13.5(9)	12.9(6.5)	10.9(1)
13.8(10)	12.5(5)	11.5(4)
15.5(13)	13(8)	11.2(3)
14(11)	12.9(6.5)	11(2)
14.7(12)		
Rj 55	26	10

I.Yemekten 1 saat

II.Yemekten 30 dakika önce ya da sonra çay içenler

III.Yemekle birlikte çay içenler

Örnek 2

$$\text{KW}= \frac{12}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{R_j^2}{n_j} - 3(n+1)$$

$$\frac{12}{13(13+1)}[\frac{55^2}{5}+\frac{26^2}{4}+\frac{10^2}{4}] - 3(13+1) = 10.68$$

$$KW_{(5,4,4;0.05)} = 5.657 < \text{KW} = 10.68$$

p$<$0.05, H_0 red

Örnek 2

Critical Values of the Kruskal-Wallis H Distribution

Taken from Zar, 1984 Table B.12

n_1	n_2	n_3	α = 0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
2	2	2	4.571						
3	2	1	4.286						
3	2	2	4.500	4.714					
3	3	1	4.571	5.143					
3	3	2	4.556	5.361	6.250				
3	3	3	4.622	5.600	6.489	(7.200)	7.200		
4	2	1	4.500						
4	2	2	4.458	5.333	6.000				
4	3	1	4.056	5.208					
4	3	2	4.511	5.444	6.144	6.444	7.000		
4	3	3	4.709	5.791	6.564	6.745	7.318	8.018	
4	4	1	4.167	4.967	(6.667)	6.667			
4	4	2	4.555	5.455	6.600	7.036	7.282	7.855	
4	4	3	4.545	5.598	6.712	7.144	7.598	8.227	8.909
4	4	4	4.654	5.692	6.962	7.654	8.000	8.654	9.269
5	2	1	4.200	5.000					
5	2	2	4.373	5.160	6.000	6.533			
5	3	1	4.018	4.960	6.044				
5	3	2	4.651	5.251	6.124	6.909	7.182		
5	3	3	4.533	5.648	6.533	7.079	7.636	8.048	8.727
5	4	1	3.987	4.985	6.431	6.955	7.364		
5	4	2	4.541	5.273	6.505	7.205	7.573	8.114	8.591
5	4	3	4.549	5.656	6.676	7.445	7.927	8.481	8.795
5	4	4	4.619	5.657	6.953	7.760	8.189	8.868	9.168
5	5	1	4.109	5.127	6.145	7.309	8.182		
5	5	2	4.623	5.338	6.446	7.338	8.131	6.446	7.338
5	5	3	4.545	5.705	6.866	7.578	8.316	8.809	9.521
5	5	4	4.523	5.666	7.000	7.823	8.523	9.163	9.606
5	5	5	4.560	5.780	7.220	8.000	8.780	9.620	9.920
6	1	1	-----						
6	2	1	4.200	4.822					
6	2	2	4.545	5.345	6.182	6.982			
6	3	1	3.909	4.855	6.236				
6	3	2	4.682	5.348	6.227	6.970	7.515	8.182	
6	3	3	4.538	5.615	6.590	7.410	7.872	8.628	9.346
6	4	1	4.038	4.947	6.174	7.106	7.614		
6	4	2	4.494	5.340	6.571	7.340	7.846	8.494	8.827
6	4	3	4.604	5.610	6.725	7.500	8.333	8.918	9.170
6	4	4	4.595	5.681	6.900	7.795	8.381	9.167	9.861
6	5	1	4.128	4.990	6.138	7.182	8.077	8.515	
6	5	2	4.596	5.338	6.585	7.376	8.196	8.967	9.189
6	5	3	4.535	5.602	6.829	7.590	8.314	9.150	9.669
6	5	4	4.522	5.661	7.018	7.936	8.643	9.458	9.960
6	5	5	4.547	5.729	7.110	8.028	8.859	9.771	10.271
6	6	1	4.000	4.945	6.286	7.121	8.165	9.077	9.692
6	6	2	4.438	5.410	6.667	7.467	8.210	9.219	9.752
6	6	3	4.558	5.625	6.900	7.725	8.458	9.458	10.150
6	6	4	4.548	5.724	7.107	8.000	8.754	9.662	10.342
6	6	5	4.542	5.765	7.152	8.124	8.987	9.948	10.524
6	6	6	4.643	5.801	7.240	8.222	9.170	10.187	10.889

n_1	n_2	n_3			α = 0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
7	7	7			4.594	5.819	7.332	8.378	9.373	10.516	11.310
8	8	8			4.595	5.805	7.355	8.465	9.495	10.805	11.705
2	2	1	1		-----						
2	2	2	1		5.357	5.679					
2	2	2	2		5.667	6.167	(6.667)	6.667			
3	1	1	1		-----						
3	2	1	1		5.143						
3	2	2	1		5.556	5.833	6.500				
3	2	2	2		5.644	6.333	6.978	7.133	7.533		
3	3	1	1		5.333	6.333					
3	3	2	1		5.689	6.244	6.689	7.200	7.400		
3	3	2	2		5.745	6.527	7.182	7.636	7.873	8.018	8.455
3	3	3	1		5.655	6.600	7.109	7.400	8.055	8.345	
3	3	3	2		5.879	6.727	7.636	8.105	8.379	8.803	9.030
3	3	3	3		6.026	7.000	7.872	8.538	8.897	9.462	9.513
4	1	1	1		-----						
4	2	1	1		5.250	5.833					
4	2	2	1		5.533	6.133	6.667	7.000			
4	2	2	2		5.755	6.545	7.091	7.391	7.964	8.291	
4	3	1	1		5.067	6.178	6.711	7.067			
	3	2	1		5.591	6.309	7.018	7.455	7.773	8.182	
4	3	2	2		5.750	6.621	7.530	7.871	8.273	8.689	8.909
4	3	3	1		5.598	6.545	7.485	7.758	8.212	8.697	9.182
4	3	3	2		5.872	6.795	7.763	8.333	8.718	9.167	9.455
4	3	3	3		6.016	6.984	7.995	8.659	9.253	9.709	10.016
4	4	1	1		5.182	5.945	7.091	7.909	7.909		
4	4	2	1		5.568	6.386	7.364	7.886	8.341	8.591	8.909
4	4	2	2		5.808	6.731	7.750	8.346	8.692	9.269	9.462
4	4	3	1		5.692	6.635	7.660	8.231	8.583	9.038	9.327
4	4	3	2		5.901	6.874	7.951	8.621	9.165	9.615	9.945
4	4	3	3		6.019	7.038	8.181	8.876	9.495	10.105	10.467
4	4	4	1		5.564	6.725	7.879	8.588	9.000	9.478	9.758
4	4	4	2		5.914	6.957	8.157	8.871	9.486	10.043	10.429
4	4	4	3		6.042	7.142	8.350	9.075	9.742	10.542	10.929
4	4	4	4		6.088	7.235	8.515	9.287	9.971	10.809	11.338
2	1	1	1	1	-----						
2	2	1	1	1	5.785						
2	2	2	1	1	6.250	6.750					
2	2	2	2	1	6.600	7.133	(7.533)	7.533			
2	2	2	2	2	6.982	7.418	8.073	8.291	(8.727)	8.727	
3	1	1	1	1	-----						
3	2	1	1	1	6.139	6.583					
3	2	2	1	1	6.511	6.800	7.400	7.600			
3	2	2	2	1	6.709	7.309	7.836	8.127	8.327	8.618	
3	2	2	2	2	6.955	7.682	8.303	8.682	8.985	9.273	9.364
3	3	1	1	1	6.311	7.111	7.467				
3	3	2	1	1	6.600	7.200	7.892	8.073	8.345		
3	3	2	2	1	6.788	7.591	8.258	8.576	8.924	9.167	9.303
3	3	2	2	2	7.026	7.910	8.667	9.115	9.474	9.769	10.026
3	3	3	1	1	6.788	7.576	8.242	8.424	8.848	(9.455)	9.455
3	3	3	2	1	6.910	7.769	8.590	9.051	9.410	9.769	9.974
3	3	3	2	2	7.121	8.044	9.011	9.505	9.890	10.330	10.637
3	3	3	3	1	7.077	8.000	8.879	9.451	9.846	10.286	10.549
3	3	3	3	2	7.210	8.200	9.267	9.876	10.333	10.838	11.171
3	3	3	3	3	7.333	8.333	9.467	10.200	10.733	10.267	11.667

Figure 1: KW tablosu.

Örnek 2

Gruplar	$\lvert\bar{R}_i - \bar{R}_j\rvert$	KW	istatistiksel karar
1-2	4.5	2.115	$p<0.05$
1-3	8.5	2.115	$p<0.05$
2-3	4	2.229	$p<0.05$

ÖDEV 1

Egzersiz süreleri farklı gruplar arasında anksiyete skorları bakımından anlamlı farklılık var mıdır?(Anksiyete skorlarının normal dağılıma sahip olduğu bilinmektedir.)

grup1	grup2	grup3
5 saat	**10 saat**	**15 saat**
48	55	51
50	52	52
53	53	50
52	55	53
50	53	50

ÖDEV 2

Tıp eğitiminde kullanılan 4 farklı yöntemden sonra öğrencilerin başarı notları aşağıdaki gibidir. Başarı notları bakımından teknikler arasında anlamlı farklılık var mıdır?(Normal dağılıma uygun değildir.)

1	2	3	4
65	75	59	94
87	69	78	89
73	83	67	80
79	81	62	88