Sabit Sıcaklık Sınır Koşulları Altında İnce Bir Çubukta Geçici Isı Yayılımının Nümerik Analizi

MAT353 NÜMERİK ANALİZ DERSİ PROJE RAPORU

MERT ELDEMİR
25120205086

ÖZET

Bu çalışmada, uçları sabit sıcaklıkta tutulan ince bir çubukta zamanla gerçekleşen ısı yayılımı süreci nümerik olarak incelenmiştir. Fiziksel olarak bu problem, başlangıçta ısınmış bir çubuğun uçlarından sürekli olarak soğutulması durumunu temsil etmekte olup, mühendislikte ısı iletimi ve soğutma sistemleri gibi birçok uygulama alanına sahiptir. Çubuğun sıcaklık dağılımı, bir boyutlu ısı denklemi ile modellenmiş ve bu kısmi diferansiyel denklem sonlu farklar yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür.

Çalışmada, açık bir zaman adımlı yöntem olan Forward Time–Centered Space (FTCS) şeması kullanılmıştır. Öncelikle, yöntemin matematiksel temeli açıklanmış ve kararlılık koşulu olan boyutsuz parametre $\mathrm{r} = \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)2}$ dikkate alınarak uygun zaman ve uzay adımları seçilmiştir. Sayısal çözüm, Python programlama dili ve NumPy kütüphanesi kullanılarak gerçekleştirilmiş; sıcaklık dağılımının zamana bağlı değişimi grafikler yardımıyla görselleştirilmiştir.

Elde edilen nümerik sonuçlar, problem için bilinen analitik çözüm ile karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Ayrıca, maksimum mutlak hata ve RMS hata gibi hata ölçütleri hesaplanmış ve çözümün doğruluğu nicel olarak değerlendirilmiştir. Farklı uzaysal ağ aralıkları kullanılarak yapılan yakınsama çalışması sonucunda, FTCS yönteminin uzayda ikinci mertebeden yakınsadığı gözlemlenmiştir. Sonuçlar, kullanılan nümerik yöntemin bu problem için kararlı ve yeterli doğrulukta çözümler ürettiğini göstermektedir.

GİRİŞ

Isı iletimi problemleri, fizik ve mühendislik alanlarında sıkça karşılaşılan ve birçok gerçek dünya uygulamasının temelini oluşturan önemli problemlerdir. Özellikle katı cisimlerde sıcaklığın zamana ve konuma bağlı olarak nasıl değiştiğinin incelenmesi; ısıtma-soğutma sistemleri, elektronik bileşenlerin termal yönetimi, enerji verimliliği ve malzeme mühendisliği gibi alanlarda kritik bir rol oynamaktadır. Bu tür problemlerin analitik olarak çözümü yalnızca belirli ve ideal koşullar altında mümkün olmakta, daha karmaşık veya gerçekçi durumlarda ise nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bir boyutlu ısı denklemi, ince bir çubuk boyunca ısı yayılımını modelleyen temel bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklem, sıcaklığın zamana bağlı değişimini ve uzay boyunca gerçekleşen ısı difüzyonunu ifade eder. Özellikle uçları sabit sıcaklıkta tutulan bir çubuğun zamanla soğuması problemi, hem fiziksel olarak anlaşılır hem de nümerik yöntemlerin performansını test etmek için uygun bir örnek sunmaktadır. Ancak bu tür denklemlerin analitik çözümleri yalnızca sınırlı başlangıç ve sınır koşulları için elde edilebildiğinden, pratik uygulamalarda sayısal yaklaşımlar tercih edilmektedir.

Literatürde ısı denkleminin nümerik çözümü için sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi ve sonlu hacimler yöntemi gibi çeşitli yaklaşımlar kullanılmaktadır. Özellikle sonlu farklar yöntemi, uygulanmasının görece basit olması ve hesaplama maliyetinin düşük olması nedeniyle eğitim ve temel mühendislik problemlerinde yaygın olarak tercih edilmektedir. **İsmail Özışık [1],** ısı iletimi problemlerinde sonlu farklar yönteminin teorik temelini ve uygulama alanlarını ayrıntılı şekilde ele almıştır. **G.D. Smith [2]**, kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde açık ve kapalı zaman adımlı yöntemlerin kararlılık ve doğruluk özelliklerini karşılaştırmıştır. Ayrıca **Randal J. LeVeque [3]**, difüzyon problemleri için kullanılan sayısal yöntemlerin hata ve yakınsama davranışlarını kapsamlı biçimde incelemiştir.

Açık zaman adımlı yöntemlerden biri olan **Forward Time–Centered Space (FTCS)** şeması, uygulanmasının kolay olması ve hesaplama adımlarının açık biçimde tanımlanabilmesi nedeniyle bu çalışmada tercih edilmiştir. Her ne kadar FTCS yöntemi koşullu kararlı bir yöntem olsa da, uygun zaman ve uzay adımları seçildiğinde doğru ve güvenilir sonuçlar üretmektedir. Bu proje kapsamında FTCS yöntemi kullanılarak sabit sıcaklık sınır koşulları altındaki bir çubukta geçici ısı yayılımı nümerik olarak incelenmiş; elde edilen sonuçlar analitik çözümle karşılaştırılarak doğruluk ve yakınsama özellikleri değerlendirilmiştir. Böylece, yöntemin hem fiziksel davranışı ne ölçüde doğru yansıttığı hem de nümerik performansı sistematik olarak analiz edilmiştir.

YÖNTEM

Bu çalışmada, sabit sıcaklık sınır koşulları altında ince bir çubukta gerçekleşen geçici ısı yayılımı problemi nümerik olarak incelenmiştir. Problemin matematiksel modeli, bir boyutlu ısı iletim denklemi kullanılarak kurulmuş ve bu denklem sonlu farklar yöntemi ile ayrıklaştırılarak çözülmüştür. Çözüm sürecinde açık zaman adımlı bir yöntem olan **Forward Time–Centered Space (FTCS)** şeması tercih edilmiştir.

Matematiksel Model

İncelenen fiziksel sistem, uzunluğu L olan homojen bir çubuk boyunca gerçekleşen ısı iletimini temsil etmektedir. Sıcaklık dağılımı aşağıdaki bir boyutlu ısı denklemi ile modellenmiştir:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

Burada $u(x,t)$ çubuğun x konumundaki ve t anındaki sıcaklığını;
α ise malzemenin ısıl yayınım katsayısını ifade etmektedir.

Başlangıç koşulu olarak çubuğun ortasının daha sıcak olduğu düzgün bir sıcaklık dağılımı seçilmiştir:

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Çubuğun her iki ucunun sürekli olarak soğutulduğu varsayılarak sınır koşulları şu şekilde tanımlanmıştır:

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(L,t) = 0$$

Uzay ve Zaman Ayrıklaştırması

Sonlu farklar yönteminin uygulanabilmesi için hem uzay hem de zaman değişkenleri ayrıklaştırılmıştır. Uzay ekseni N eşit parçaya bölünerek uzay adımı

$$\Delta x = \frac{L}{N}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Zaman ekseni ise sabit bir zaman adımı Δt\Delta tΔt kullanılarak ayrıklaştırılmıştır. Ayrık sıcaklık değerleri

$$u_i^n \approx u(x_i, t^n)$$

ifadesiyle gösterilmiştir.

FTCS (Forward Time–Centered Space) Yöntemi

FTCS yönteminde zaman türevi ileri fark, uzaydaki ikinci türev ise merkezli fark yaklaşımı ile ifade edilir. Zaman türevi için kullanılan yaklaşım:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Uzaysal ikinci türev için ise:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) \approx \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

yaklaşımları kullanılmıştır. Bu ifadeler ısı denklemine yerleştirildiğinde FTCS güncelleme formülü elde edilir:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)$$

Burada yer alan boyutsuz kararlılık parametresi:

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. FTCS yöntemi koşullu kararlı bir yöntem olduğundan, sayısal kararlılığın sağlanabilmesi için $r \leq 1/2$ koşulu dikkate alınarak zaman adımı seçilmiştir.

Algoritmik Adımlar

FTCS yönteminin uygulanması aşağıdaki temel adımlarla gerçekleştirilmiştir:

1. Uzay ve zaman adımlarının belirlenmesi
2. Başlangıç sıcaklık dağılımının tanımlanması
3. Her zaman adımında iç düğüm noktalarının FTCS formülü ile güncellenmesi
4. Her adımda sınır koşullarının uygulanması
5. Belirlenen son zamana kadar işlemin tekrarlanması

Bu adımlar sonucunda sıcaklık dağılımının zamana bağlı değişimi nümerik olarak elde edilmiştir.

Kullanılan Yazılım ve Teknolojiler

Sayısal hesaplamalar Python programlama dili kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Vektör ve dizi tabanlı işlemler için **NumPy** kütüphanesinden, sonuçların görselleştirilmesi için ise **Matplotlib** kütüphanesinden yararlanılmıştır. Python'un tercih edilme nedeni, açık kaynaklı olması, nümerik hesaplamalar için güçlü kütüphaneler sunması ve elde edilen sonuçların kolayca görselleştirilebilmesidir. Bu çalışma kapsamında GPU hızlandırma veya ileri seviye paralel hesaplama tekniklerine ihtiyaç duyulmamıştır.

UYGULAMA

Bu bölümde geliştirilen yöntemin Python ortamında nasıl hayata geçirildiği detaylı olarak anlatılmalıdır. Kullanılan veri seti tanıtılmalı; veri seti öğrenciler tarafından oluşturulduysa üretim süreci açıklanmalıdır. Kodların yalnızca nümerik yöntemele ilişki kodları sunulabilir, ancak burada algoritmanın adım adım nasıl uygulandığı açıklanmalıdır. Uygulama sürecinde yapılan varsayımlar, parametre seçimleri ve sayısal hassasiyet tercihleri belirtilmelidir. Ayrıca hata analizi yapılmalı, farklı parametre veya yöntemlerle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmalıdır. Sonuçların görsel olarak anlaşılabilmesi için **Matplotlib veya Seaborn** kullanılarak oluşturulmuş grafikler bu bölümde sunulmalıdır.

DENEYSEL SONUÇLAR

Bu bölümde, hazırlanan Python/Colab notebook'unda elde edilen nümerik sonuçlar değerlendirilmiş ve FTCS (Forward Time–Centered Space) yönteminin bir boyutlu ısı iletim problemi üzerindeki davranışı analiz edilmiştir. Tüm grafikler ve sayısal çıktılar, proje kapsamında teslim edilen Colab notebook'unda üretilmiş olup, burada bu çıktılar üzerinden yorumlama yapılmıştır.

FTCS Yöntemi: Tek Zaman Adımının Etkisi

Notebook'ta yer alan *"FTCS: Effect of One Time Step"* başlıklı grafikte, başlangıç sıcaklık dağılımı ile bir zaman adımı sonrası elde edilen sıcaklık profili aynı eksende gösterilmektedir. Bu grafik, FTCS yönteminin tek bir zaman adımında sıcaklık dağılımını nasıl güncellediğini açık biçimde ortaya koymaktadır.

Başlangıçta çubuğun orta noktasında maksimum olan sıcaklık, bir zaman adımı sonrasında daha düzgün bir profile doğru evrilmektedir. Bu durum, ısı akışının yüksek sıcaklık bölgelerinden düşük sıcaklık bölgelerine doğru gerçekleştiğini ve FTCS güncelleme formülünün fiziksel ısı yayılımını doğru şekilde temsil ettiğini göstermektedir. Sınır noktalarının her iki durumda da sıfır sıcaklıkta kalması, sınır koşullarının doğru uygulandığını doğrulamaktadır.

Başlangıç Sıcaklık Dağılımı

Notebook'ta *"Initial Temperature Distribution"* başlığı altında çizdirilen grafikte, başlangıç anındaki sıcaklık dağılımı gösterilmektedir. Başlangıç koşulu olarak seçilen

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

fonksiyonu, çubuğun uç noktalarında sıfır sıcaklık değerini sağlamakta ve orta noktada maksimum sıcaklık oluşturmaktadır. Bu profil, hem fiziksel olarak anlamlı bir başlangıç durumu sunmakta hem de uygulanan Dirichlet sınır koşulları ile uyumlu bir yapı sağlamaktadır. Bu nedenle, seçilen başlangıç koşulu nümerik çözümün doğrulanması için uygun bir test durumu oluşturmaktadır.

FTCS Yöntemi: Tek Zaman Adımının Etkisi

Notebook'ta *"FTCS Method: Effect of a Single Time Step"* başlığı ile verilen grafikte, başlangıç sıcaklık dağılımı ile bir zaman adımı sonrasında elde edilen sıcaklık profili birlikte gösterilmektedir. Bu grafik, FTCS yönteminin bir zaman adımı içerisinde sıcaklık alanını nasıl güncellediğini açık biçimde ortaya koymaktadır.

Bir zaman adımı sonrasında, sıcaklığın yüksek olduğu bölgelerde azalma olduğu ve ısı akışının komşu noktalara doğru yayıldığı görülmektedir. Bu davranış, FTCS güncelleme formülünün fiziksel ısı difüzyonunu doğru biçimde temsil ettiğini göstermektedir. Sınır noktalarının her iki durumda da sıfır sıcaklıkta kalması, sınır koşullarının her adımda doğru şekilde uygulandığını doğrulamaktadır.

Zamana Bağlı Isı Yayılımı (FTCS Zaman Entegrasyonu)

Notebook'ta *"Transient Heat Dissipation Along the Rod (FTCS Method)"* başlığı altında sunulan grafikte, sıcaklık dağılımının zamanla nasıl değiştiği gösterilmektedir. Çözüm, $t = 0$

anından başlayarak $t = T$ zamanına kadar FTCS yöntemi ile adım adım hesaplanmış ve belirli zaman anlarında sıcaklık profilleri kaydedilmiştir.

Grafikte görüldüğü üzere, başlangıçta yüksek genliğe sahip olan sıcaklık profili zaman ilerledikçe genliğini kaybetmekte ve çubuk boyunca daha düşük sıcaklık değerlerine doğru sönümlenmektedir. Bu durum, uç noktaların sabit sıfır sıcaklıkta tutulması nedeniyle sistemin zamanla ısı kaybetmesiyle fiziksel olarak uyumludur. Profilin pürüzsüzlüğünü koruması ve herhangi bir sayısal salınım içermemesi, seçilen uzay ve zaman adımlarının FTCS kararlılık koşulunu sağladığını göstermektedir.

Analitik Çözüm ile Karşılaştırma

Notebook'ta *"Validation of FTCS Method at Final Time"* başlığı altında, FTCS yöntemi ile elde edilen nümerik çözüm ile analitik çözüm $t = T$ anında karşılaştırılmıştır. Analitik çözüm,

$$u_{\text{exact}}(x,t) = \exp\left(-\alpha\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

şeklinde verilmekte olup, seçilen başlangıç koşulu için bilinen kapalı form çözümdür.

Grafikten görüldüğü üzere, FTCS nümerik çözümü analitik çözüm ile neredeyse tamamen çakışmaktadır. Bu yüksek uyum, FTCS yönteminin doğru biçimde uygulandığını ve kullanılan ağ parametrelerinin yeterli hassasiyet sağladığını göstermektedir. Küçük farklar, sonlu fark yaklaşımına bağlı olarak ortaya çıkan kesme (truncation) hatalarından kaynaklanmaktadır.

Hata Analizi

Notebook'ta yapılan hata analizinde, son zaman adımında noktasal hata

$$e_i = u_{\text{num}}(x_i, T) - u_{\text{exact}}(x_i, T)$$

şeklinde tanımlanmış ve hata dağılımı grafiksel olarak gösterilmiştir. Hata değerlerinin sınır noktalarında sıfır olduğu görülmektedir; bunun nedeni hem nümerik hem de analitik çözümlerin aynı Dirichlet sınır koşullarını sağlamasıdır.

Hata büyüklüğünün çubuğun orta bölgelerinde nispeten daha yüksek olması, çözüm eğriliğinin bu bölgelerde daha büyük olmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca maksimum mutlak $L\infty$ ve RMS hata değerleri hesaplanmış olup, her iki hata ölçütünün de $10^{(-5)}$ mertebesinde olduğu görülmüştür. Bu sonuçlar, FTCS yönteminin yüksek doğrulukla çalıştığını göstermektedir.

Yakınsama Davranışı

Notebook'un son kısmında gerçekleştirilen yakınsama çalışmasında, farklı uzaysal ağ çözünürlükleri için aynı problem çözülmüş ve hata normları karşılaştırılmıştır. Uzay adımı küçüldükçe hem maksimum hata hem de RMS hatanın düzenli olarak azaldığı gözlemlenmiştir.

Özellikle, uzay adımı yaklaşık olarak yarıya indirildiğinde hata değerlerinin yaklaşık dört kat azalması, FTCS yönteminin uzayda ikinci mertebeden yakınsama özelliğine sahip olduğunu göstermektedir. Bu davranış, yöntemin teorik doğruluk özellikleriyle uyumludur ve nümerik çözümün ağ inceldikçe analitik çözüme yaklaştığını doğrulamaktadır.

Genel Değerlendirme

Notebook'ta elde edilen tüm sonuçlar birlikte değerlendirildiğinde, FTCS yönteminin bir boyutlu ısı iletim problemini kararlı, doğru ve fiziksel olarak tutarlı bir şekilde modellediği görülmektedir. Zamana bağlı çözüm davranışı, analitik çözümle karşılaştırma ve yakınsama analizi, uygulanan nümerik yöntemin güvenilirliğini açık biçimde ortaya koymaktadır.

TEST SÜREÇLERİ

Bu projede geliştirilen FTCS tabanlı nümerik çözümün doğruluğunu ve kararlılığını sağlamak amacıyla, uygulama süreci boyunca çeşitli doğrulama ve kontrol adımları uygulanmıştır. Test süreci, hem matematiksel modelin doğru şekilde uygulanıp uygulanmadığını hem de Python kodunun beklenen davranışı gösterip göstermediğini incelemeye odaklanmıştır.

Test Yaklaşımı

Proje kapsamında, sayısal analiz çalışmalarına uygun şekilde **doğrulama (verification)** ve **geçerleme (validation)** temelli testler gerçekleştirilmiştir. Test kapsamı aşağıdaki temel başlıklar altında belirlenmiştir:

- Başlangıç ve sınır koşullarının doğru uygulanması
- FTCS güncelleme formülünün fiziksel olarak beklenen davranışı göstermesi
- Zaman adımı ve ağ parametrelerinin kararlılık koşulunu sağlaması
- Nümerik çözümün analitik çözüm ile karşılaştırılması

Bu kontroller, kodun geliştirilme süreci boyunca kademeli olarak uygulanmıştır.

Doğruluk ve Kararlılık Kontrolleri

Başlangıç koşulunun uç noktalarda sıfır sıcaklık sağladığı ve sınır koşullarının her zaman adımında doğru biçimde uygulandığı doğrulanmıştır. Ayrıca FTCS yöntemine ait kararlılık parametresi

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

hesaplanmış ve $r \leq 0.5$ koşulunun sağlandığı görülmüştür. Bu sayede zaman entegrasyonu sırasında herhangi bir sayısal kararsızlık oluşmamıştır.

FTCS yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçlar, bilinen analitik çözüm ile karşılaştırılmış ve iki çözüm arasında yüksek uyum gözlemlenmiştir. Bu karşılaştırma, geliştirilen kodun doğru çalıştığını göstermektedir.

Hata ve Yakınsama Testleri

Son zaman adımında yapılan hata analizinde, maksimum mutlak hata ve RMS hata değerlerinin oldukça küçük olduğu belirlenmiştir. Ayrıca farklı uzaysal ağ çözünürlükleri kullanılarak yapılan yakınsama çalışması sonucunda, ağ inceldikçe hata değerlerinin düzenli olarak azaldığı gözlemlenmiştir. Bu durum, FTCS yönteminin yakınsak ve tutarlı bir nümerik yöntem olduğunu doğrulamaktadır.

Genel Değerlendirme

Uygulanan test süreci sonucunda, geliştirilen FTCS tabanlı nümerik çözümün kararlı, doğru ve güvenilir olduğu görülmüştür. Yapılan kontroller ve karşılaştırmalar, yazılımın bir boyutlu ısı iletim problemini başarılı bir şekilde modellediğini ortaya koymaktadır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu projede, bir boyutlu ısı iletim problemi FTCS (Forward Time–Centered Space) yöntemi kullanılarak nümerik olarak incelenmiştir. Isı denklemi uygun başlangıç ve sınır koşulları altında sonlu farklar yöntemiyle ayrıklaştırılmış ve zamana bağlı sıcaklık dağılımı başarıyla elde edilmiştir. Nümerik sonuçların analitik çözüm ile karşılaştırılması, uygulanan yöntemin doğru ve güvenilir sonuçlar ürettiğini göstermiştir.

Elde edilen grafikler ve hata analizleri, FTCS yönteminin seçilen ağ ve zaman adımı parametreleri altında kararlı çalıştığını ve fiziksel olarak beklenen ısı yayılımı davranışını doğru biçimde temsil ettiğini ortaya koymuştur. Ayrıca yapılan yakınsama çalışması, ağ inceldikçe hata değerlerinin düzenli olarak azaldığını ve yöntemin yakınsak olduğunu doğrulamıştır. Bu yönleriyle çalışma, sonlu farklar yönteminin ısı iletim problemlerine uygulanabilirliğini açıkça göstermektedir.

Bununla birlikte, FTCS yöntemi koşullu kararlı bir yöntemdir ve zaman adımı seçimi doğrudan kararlılığı etkilemektedir. Gelecekte yapılacak çalışmalarda, Crank–Nicolson veya örtük (implicit) sonlu fark yöntemleri kullanılarak daha büyük zaman adımlarıyla kararlı çözümler elde edilebilir. Ayrıca farklı başlangıç koşulları, değişken ısı iletkenliği veya iki boyutlu ısı iletim problemleri ele alınarak çalışmanın kapsamı genişletilebilir.

Sonuç olarak, bu proje kapsamında geliştirilen nümerik model, hem eğitimsel hem de mühendislik uygulamaları açısından temel bir referans niteliği taşımakta ve daha gelişmiş sayısal yöntemlere geçiş için sağlam bir temel oluşturmaktadır.

KAYNAKÇA

[1] M. N. Özışık, *Heat Conduction*, 2nd ed., New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1993.

[2] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, 7th ed., New York, NY, USA: McGraw-Hill Education, 2015.

[3] R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*, Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2007.

https://www.youtube.com/watch?v=ToIXSwZ1pJU

https://www.youtube.com/watch?v=MEqYYjGcnww

https://www.youtube.com/watch?v=sA2HVEeXkKs