Ejercicio 1 :

Contrasta la hipótesis

H_0: la varianza de la población es $\sigma^2 = \sigma_0^2$

H_1: la varianza de la población es $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$\sigma_0 = 25$ (desviación estandar)

$N = 15$ (tamaño de muestra)

$\alpha = 0{,}05$ (nivel de significación)

$\bar{x} = 304$ (media observada)

$\hat{S} = \sqrt{250{,}66}$ (desviación estandar observada)

$$\sum_{n=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 = 3760$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{3760}{15}} = \sqrt{250{,}66}$$

La media no se conoce. Dada una muestra de $N=15$ elementos tomados al azar de la población, y si H_0 es cierta, entonces el estadístico:

$$d = \frac{(N-1).\hat{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15-1).(250{,}66)}{25^2} = \frac{14.(250{,}66)}{625} = 5{,}61$$

Se distribuye según una X^2_{N-1} (distribución chi cuadrado con N-1 grados de libertad). Fijando el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, la región de aceptación

$$d \leq X^2_\alpha$$

$$X^2_{14}(0{,}95) = 23{,}7$$

$d = 5{,}61 \leq 23{,}7$

Que cae dentro de la región de aceptación, por tanto aceptamos la hipótesis H_0.

el nivel crítico del contraste:

$d = 5,61 \leq \chi^2_{14}(0,95)$

$\chi^2_{14}(0,01) = 4,66$, por lo que hubiéramos rechazado H_0 con nivel de significación 0,99.

El nivel crítico del test es, aproximadamente, 0,10.

¿Cuál es el tamaño máximo que podría tener la muestra para aceptar la hipótesis?

$$d = \frac{(N-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(N-1) \cdot \frac{3760}{15}}{625} = 23,7 = \chi^2_{14}(0,95)$$

$$(N-1) \cdot \frac{3760}{15} \cdot \frac{1}{625} = 23,7$$

$$(N-1) = (23,7) \cdot 625 \cdot \frac{15}{3760} = (23,7) \cdot 625 \cdot \frac{3}{752}$$

$$N-1 = 59,09 \rightarrow N = 60,09$$

$N = 60 \Rightarrow d = 24,06$ se rechaza H_0

$N = 59 \Rightarrow d = 23,66$ se acepta H_0

Para aceptar la hipótesis H_0, el tamaño máximo de muestra podría ser 59.

Ejercicio 2

Contraste de hipótesis sobre la media:

H_0: la muestra proviene de una población normal con $\mu = \mu_0 = 60$

H_1: la muestra proviene de una población normal con $\mu \neq \mu_0 = 60$

$\sigma_0 = 8$ (desviación estandar) $\bar{x} = 60.5$ (media observada)

$n = 10$ (tamaño de muestra) $\hat{S} = 2{,}87$ (desviación estandar observada)

$\alpha = 0{,}05$ (nivel de significación) $\mu_0 = 60$ (media)

$$d = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{S}/\sqrt{n}} = \frac{(60{,}5) - 60}{2{,}87/\sqrt{10}} = \frac{0{,}5}{0{,}9} = 0{,}55$$

$$-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{S}/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}$$

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$1 - \alpha = 0{,}975$

Se distribuye según una t de Student con n-1 grados de libertad.

$t_{0{,}975} = 2{,}26$

La región de aceptación es por tanto: $-2{,}26 \leq d \leq 2{,}26$

$-2{,}26 \leq 0{,}55 \leq 2{,}26$

La hipótesis H_0 se acepta.

Ejercicio 2:

Contraste de hipótesis sobre la varianza:

H_0: la varianza de la población es $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 64$

H_1: la varianza de la población es $\sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 64$

$\hat{S} = 2{,}87$ (desviación estandar observada) $\qquad \alpha = 0{,}05$

$\sigma_0 = 8$ (desviación estandar)

$$d = \frac{(n-1)\,\hat{s}^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \cdot (8{,}24)}{64} = 1{,}16$$

Se distribuye según una X^2_{n-1} (distribución chi cuadrado con n-1 grados de libertad). La región de aceptación;

$$d \leq X_\alpha^2$$

$$X^2_9(0{,}95) = 16{,}9$$

$d = 1{,}16 \leq 16{,}9$

Que cae dentro de la región de aceptación, por tanto aceptamos la hipotesis H_0.

Ejercicio 3 :

$n = 1200$ usuarios en encuesta

$\hat{p} = 0,58$

$p_0 = 0,60$

H_0: $p = p_0 = 0,60$

H_1: $p \neq p_0 = 0,60$

$$d = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,58 - 0,60}{\sqrt{\frac{(0,6)(0,4)}{1200}}} = \frac{-0,02}{\sqrt{\frac{0,24}{1200}}} = (-0,02) \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1200}{0,24}}}_{70,71}$$

$$d = -1,414$$

Fijamos $\alpha = 0,05$ y calculamos las regiones de aceptación y rechazo para contraste bilateral

$\frac{\alpha}{2} = 0,025$ $\quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$

Se distribuye según una distribucion normal estandarizada

$-1,96 \leq d \leq 1,96 \rightarrow -1,96 \leq -1,414 \leq 1,96$

Que cae dentro de la región de aceptación. Por tanto, la afirmación del fabricante se confirma con un nivel de significación de 0,05.

¿Cuál sería el tamaño necesario de la muestra para poder refutar la afirmación con un nivel de significación del 0,01?

$\alpha = 0,01$

$\frac{\alpha}{2} = 0,005$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \rightarrow -2,58 < d < 2,58$

$$d = \frac{|\hat{p} - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{|0,58 - 0,60|}{\sqrt{\frac{(0,6)(0,4)}{n}}} = 2,58$$

$$\Rightarrow \frac{|-0,02|}{\sqrt{\frac{0,24}{n}}} = + \frac{2}{100} \cdot \sqrt{\frac{n}{0,24}} = 2,58$$

$$\sqrt{n} = 2,58 \cdot \frac{100}{2} \cdot \sqrt{\frac{24}{100}}$$

$$\sqrt{n} = 129 \cdot \sqrt{\frac{24}{100}} \rightarrow n = \cancel{1650}\ 16641 \cdot \frac{24}{100}$$

$$\rightarrow n = 3993,84 \sim 3994$$

Si $n = 3995$, ~~d~~ sería $d = 2,5803$ y por tanto, la afirmación podría refutar con un nivel de significación del 0,01.

Ejercicio 4:

H_0: No hay evidencia suficiente para afirmar que la producción promedio de frutas por árbol es inferior a 25 kilogramos $\mu = \mu_0 = 25$

H_1: Hay evidencia suficiente para afirmar que la producción promedio de frutas por árbol es inferior a 25 kilogramos $\mu < \mu_0 = 25$

$n = 15$ (tamaño de muestra)

$\alpha = 0{,}05$ (nivel de significación)

$\bar{X} = 25.4$ (media observada de muestra)

$\mu_0 = 25$ (media)

$\hat{S} = 1{,}67$ (desviación estandar observada de muestra)

El estadístico:

$$d = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{S}/\sqrt{n}} = \frac{25{,}4 - 25}{1{,}67/\sqrt{15}} = \frac{0{,}4}{0{,}431} = 0{,}93$$

Se distribuye según una t de Student unilateral con $n-1$ grados de libertad.

$\alpha = 0{,}05$

$1 - \alpha = 0{,}95$

$n - 1 = 14$

$t_{0{,}95} = 1{,}76$

$$d = 0{,}93 \leq t_{0{,}95} = 1{,}76$$

H_0 se acepta.

No hay evidencia suficiente para afirmar que la producción promedio de frutas por árbol es inferior a 25 kilogramos.