Algèbre de chemins

Merwan Achibet
Université du Havre

1 Montrer que $(R^+, \max, \min, 0, \infty)$ est un semi-anneau idempotent

On veut démontrer que $(R^+, \max, \min, 0, \infty)$ est un semi-anneau idempotent. Pour ce faire, on doit prouver que :

1. $(R^+, \max, 0)$ est un monoïde commutatif
2. $(R^+, \min, \infty)$ est un monoïde
3. l'opération min est distributive par rapport à max
4. l'élément 0 est absorbant pour l'opération min

Pour chacune des quatre démonstrations qui suivent, on prend $a, b, c \in R^+$.

1.1 $(R^+, \max, 0)$ est un monoïde commutatif

$$\max(a, b) = \max(b, a)$$

et

$$\max(a, 0) = \max(0, a) = a$$

$(R^+, \max, 0)$ est donc un monoïde commutatif.

1.2 $(R^+, \min, \infty)$ est un monoïde

$$\min(a, \infty) = \min(\infty, a) = a$$

$(R^+, \min, \infty)$ est donc un monoïde.

1.3 l'opération $\min$ est distributive par rapport à $\max$

Pour que cette opération soit distributive, il faut que :

$$\min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$$

et

$$\min(\max(a, b), c) = \max(\min(a, c), \min(a, b))$$

On étudie les six cas de figure possibles.

1.3.1 $a \geq b \geq c$

$$\min(a, \max(b, c)) = \min(a, b) = b = \max(b, c) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$$

et

$$\min(\max(a, b), c) = \min(a, c) = c = \max(c, c) = \max(\min(a, c), \min(b, c))$$

1.3.2 $a \geq c \geq b$

$$\min(a, \max(b, c)) = \min(a, c) = c = \max(b, c) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$$

et

$$\min(\max(a, b), c) = \min(a, c) = c = \max(c, c) = \max(\min(a, c), \min(b, c))$$

1.3.3 $b \geq a \geq c$

$$\min(a, \max(b, c)) = \min(a, b) = a = \max(a, c) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$$

et

$$\min(\max(a, b), c) = \min(b, c) = c = \max(c, c) = \max(\min(a, c), \min(b, c))$$

1.3.4 $b \geq c \geq a$

$$\min(a, \max(b, c)) = \min(a, b) = a = \max(a, a) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$$

et

$$\min(\max(a, b), c) = \min(b, c) = c = \max(a, c) = \max(\min(a, c), \min(b, c))$$

1.3.5 $c \geq a \geq b$

$$\min(a, \max(b, c)) = \min(a, c) = a = \max(b, a) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$$

et

$$\min(\max(a, b), c) = \min(a, c) = a = \max(a, b) = \max(\min(a, c), \min(b, c))$$

1.3.6 $c \geq b \geq a$

$$\min(a, \max(b, c)) = \min(a, c) = a = \max(a, a) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$$

et

$$\min(\max(a, b), c) = \min(b, c) = b = \max(a, b) = \max(\min(a, c), \min(b, c))$$

Chaque cas de figure est vérifié, min est donc distributive par rapport à max.

1.4 l'élément 0 est absorbant pour l'opération min

$$\min(a, 0) = \min(0, a) = 0$$

L'élément 0 est donc absorbant pour min.

Les quatres conditions précedemment citées sont validées, $(R^+, \max, \min, 0, \infty)$ est donc un semi-anneau idempotent.

1.5 Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence est la suivante. On considère dans le cadre de ce problème que pour tout $i \in \{1, \ldots, 8\}$, $A_{ii} = \infty$.

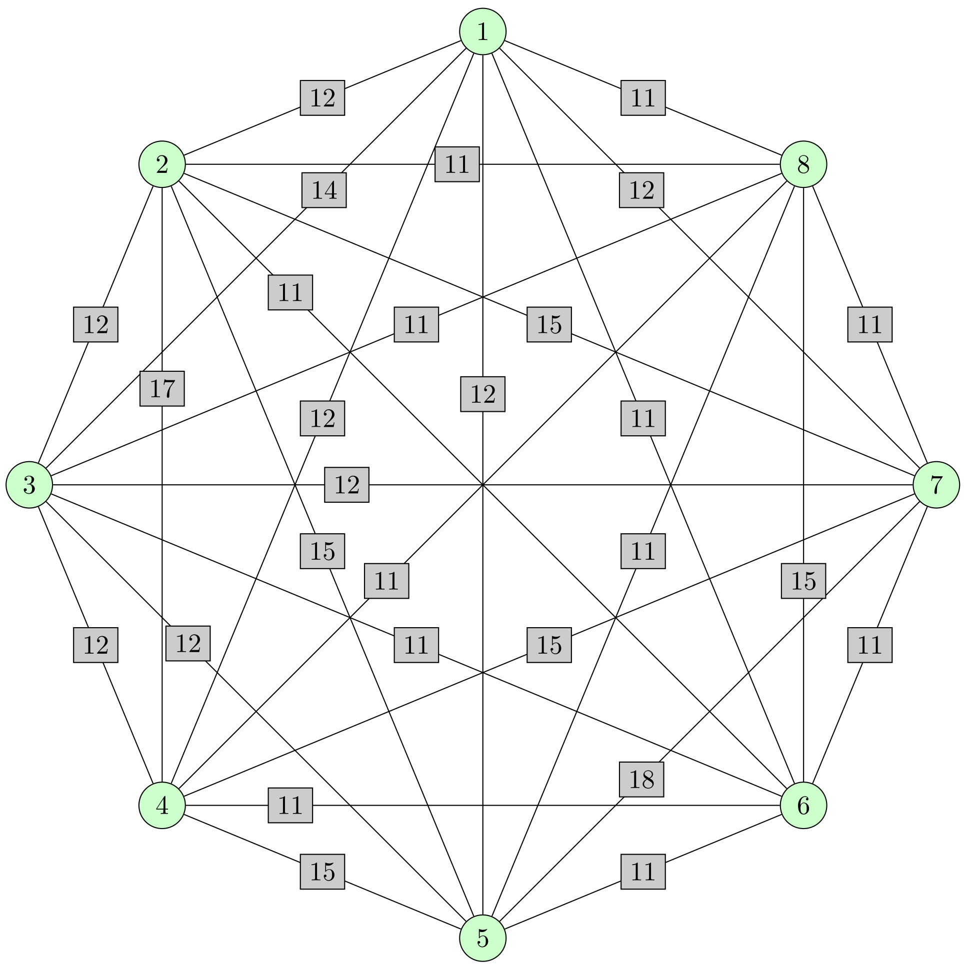
$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 12 & 14 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & \infty & 0 & 17 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & \infty & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 10 & 17 & 5 & \infty & 11 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 11 & \infty & 0 & 18 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & \infty & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 4 & \infty & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 15 & 9 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Appliquer l'algorithme de Warshall pour calculer A^*

Après avoir adapté l'algorithme fourni, afin qu'il prenne en compte les chemins de capacité maximum et non les plus courts chemins, on obtient la matrice A^* suivante.

$$A^* = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 12 & 14 & 12 & 12 & 11 & 12 & 11 \\ 12 & \infty & 12 & 17 & 15 & 11 & 15 & 11 \\ 14 & 12 & \infty & 12 & 12 & 11 & 12 & 11 \\ 12 & 17 & 12 & \infty & 15 & 11 & 15 & 11 \\ 12 & 15 & 12 & 15 & \infty & 11 & 18 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & \infty & 11 & 15 \\ 12 & 15 & 12 & 15 & 18 & 11 & \infty & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 15 & 11 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

3 Graphe de A^*



4 Appliquer l'algorithme de Dijkstra

On déroule manuellement l'algorithme de Dijkstra. On utilise ici sa version améliorée afin de bénéficier d'une liste contenant le prédécesseur de chaque nœud dans le meilleur parcours. On s'en servira typiquement pour reconstruire les chemins.

Initialisation

$$
\begin{aligned}
T &= (1,2,3,4,5,6,7,8)\\
\pi &= (\infty,0,0,0,0,0,0,0)\\
P &= (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Itération 1

$$
\begin{aligned}
i &= \mathrm{MAX}_{\forall j\in T}(\pi_j) = 1\\
T &= (2,3,4,5,6,7,8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\pi(2) = \max(\pi(2), \min(\pi(1), A_{12})) = \max(0, \min(\infty, 12)) = 12, \quad P(2) = 1\\
&\pi(3) = \max(\pi(3), \min(\pi(1), A_{13})) = \max(0, \min(\infty, 14)) = 14, \quad P(3) = 1\\
&\pi(4) = \max(\pi(4), \min(\pi(1), A_{14})) = \max(0, \min(\infty, 10)) = 10, \quad P(4) = 1\\
&\pi(5) = \max(\pi(5), \min(\pi(1), A_{15})) = \max(0, \min(\infty, 0)) = 0\\
&\pi(6) = \max(\pi(6), \min(\pi(1), A_{16})) = \max(0, \min(\infty, 0)) = 0\\
&\pi(7) = \max(\pi(7), \min(\pi(1), A_{17})) = \max(0, \min(\infty, 0)) = 0\\
&\pi(8) = \max(\pi(8), \min(\pi(1), A_{18})) = \max(0, \min(\infty, 0)) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi &= (\infty,12,14,10,0,0,0,0)\\
P &= (\varepsilon,1,1,1,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Itération 2

$$
\begin{aligned}
i &= \mathrm{MAX}_{\forall j\in T}(\pi_j) = 3\\
T &= (2,4,5,6,7,8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\pi(2) = \max(\pi(2), \min(\pi(3), A_{32})) = \max(12, \min(14, 0)) = 12\\
&\pi(4) = \max(\pi(4), \min(\pi(3), A_{34})) = \max(10, \min(14, 5)) = 10\\
&\pi(5) = \max(\pi(5), \min(\pi(3), A_{35})) = \max(0, \min(14, 0)) = 0\\
&\pi(6) = \max(\pi(6), \min(\pi(3), A_{36})) = \max(0, \min(14, 3)) = 3, \quad P(6) = 3\\
&\pi(7) = \max(\pi(7), \min(\pi(3), A_{37})) = \max(0, \min(14, 0)) = 0\\
&\pi(8) = \max(\pi(8), \min(\pi(3), A_{38})) = \max(0, \min(14, 0)) = 0
\end{aligned}
$$

$$\pi = (\infty, 12, 14, 10, 0, 3, 0, 0)$$
$$P = (\varepsilon, 1, 1, 1, \varepsilon, 3, \varepsilon, \varepsilon)$$

<u>Itération 3</u>

$$i = \mathrm{MAX}_{\forall j \in T}(\pi_j) = 2$$
$$T = (4, 5, 6, 7, 8)$$

$$\pi(4) = \max(\pi(4), \min(\pi(2), A_{24})) = \max(10, \min(12, 17)) = 12, \quad P(4) = 2$$
$$\pi(5) = \max(\pi(5), \min(\pi(2), A_{25})) = \max(0, \min(12, 8)) = 8, \quad P(5) = 2$$
$$\pi(6) = \max(\pi(6), \min(\pi(2), A_{26})) = \max(3, \min(12, 0)) = 3$$
$$\pi(7) = \max(\pi(7), \min(\pi(2), A_{27})) = \max(0, \min(12, 0)) = 0$$
$$\pi(8) = \max(\pi(8), \min(\pi(2), A_{28})) = \max(0, \min(12, 0)) = 0$$

$$\pi = (\infty, 12, 14, 12, 8, 3, 0, 0)$$
$$P = (\varepsilon, 1, 1, 2, 2, 3, \varepsilon, \varepsilon)$$

<u>Itération 4</u>

$$i = \mathrm{MAX}_{\forall j \in T}(\pi_j) = 4$$
$$T = (5, 6, 7, 8)$$

$$\pi(5) = \max(\pi(5), \min(\pi(4), A_{45})) = \max(8, \min(12, 11)) = 11, \quad P(5) = 4$$
$$\pi(6) = \max(\pi(6), \min(\pi(4), A_{46})) = \max(3, \min(12, 6)) = 6, \quad P(6) = 4$$
$$\pi(7) = \max(\pi(7), \min(\pi(4), A_{47})) = \max(0, \min(12, 15)) = 12, \quad P(7) = 4$$
$$\pi(8) = \max(\pi(8), \min(\pi(4), A_{48})) = \max(0, \min(12, 0)) = 0$$

$$\pi = (\infty, 12, 14, 12, 11, 6, 12, 0)$$
$$P = (\varepsilon, 1, 1, 2, 4, 4, 4, \varepsilon)$$

<u>Itération 5</u>

$$i = \mathrm{MAX}_{\forall j \in T}(\pi_j) = 7$$
$$T = (5, 6, 8)$$

$$\pi(5) = \max(\pi(5), \min(\pi(7), A_{75})) = \max(11, \min(12, 18)) = 12, \quad P(5) = 7$$
$$\pi(6) = \max(\pi(6), \min(\pi(7), A_{76})) = \max(6, \min(12, 4)) = 6$$
$$\pi(8) = \max(\pi(8), \min(\pi(7), A_{78})) = \max(0, \min(12, 9)) = 9, \qquad P(8) = 7$$

$$\pi = (\infty, 12, 14, 12, 12, 6, 12, 9)$$
$$P = (\varepsilon, 1, 1, 2, 7, 4, 4, 7)$$

Itération 6

$$i = \mathrm{MAX}_{\forall j \in T}(\pi_j) = 5$$
$$T = (6, 8)$$

$$\pi(6) = \max(\pi(6), \min(\pi(5), A_{56})) = \max(6, \min(12, 0)) = 6$$
$$\pi(8) = \max(\pi(8), \min(\pi(5), A_{58})) = \max(9, \min(12, 11)) = 11, \quad P(8) = 5$$

$$\pi = (\infty, 12, 14, 12, 12, 6, 12, 11)$$
$$P = (\varepsilon, 1, 1, 2, 7, 4, 4, 5)$$

Itération 7

$$i = \mathrm{MAX}_{\forall j \in T}(\pi_j) = 8$$
$$T = (6)$$

$$\pi(6) = \max(\pi(6), \min(\pi(8), A_{86})) = \max(6, \min(11, 15)) = 11, \quad P(6) = 8$$

$$\pi = (\infty, 12, 14, 12, 12, 11, 12, 11)$$
$$P = (\varepsilon, 1, 1, 2, 7, 8, 4, 5)$$

Itération 8

$$i = \mathrm{MAX}_{\forall j \in T}(\pi_j) = 6$$
$$T = \emptyset$$

$T = \emptyset$ alors l'algorithme est arrivé à la fin de son exécution et on obtient :

	1	2	3	4	5	6	7	8
π	∞	12	14	12	12	11	12	11
P	ε	1	1	2	7	8	4	5

Prenons l'exemple du chemin de capacité maximum reliant 1 à 8. On sait que sa capacité vaut 11 et on peut le reconstruire à l'aide de la liste P des prédécesseurs. Il s'agit de :

$$8 \to P(8) \to P(P(8)) \to \cdots \to 1$$

$$8 \to 5 \to 7 \to 4 \to 2 \to 1$$

5 Appliquer l'algorithme de Jacobi

Nous allons maintenant utiliser l'algorithme de Jacobi pour déterminer les chemins de capacité maximale partant de 1. Les résultats trouvés devraient être identiques à ceux de l'algorithme de Dijkstra.

<u>Initialisation</u>

$$y^0 = b^T = (\infty, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

<u>Itération 1</u>

$$y^1 = y^0 \otimes A \oplus b^T = \max(\min(y^0, A), b^T)$$

$$\begin{aligned}\min(y^0, A) = \min((\infty, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), &\begin{pmatrix} \infty & 12 & 14 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & \infty & 0 & 17 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & \infty & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 10 & 17 & 5 & \infty & 11 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 11 & \infty & 0 & 18 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & \infty & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 4 & \infty & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 15 & 9 & \infty \end{pmatrix}) \\ = (\infty, 12, 14, 10, 0, 0, 0, 0)&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^1 &= \max(\min(y^0, A), b^T) \\ &= \max((\infty, 12, 14, 10, 0, 0, 0, 0), (\infty, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)) \\ &= (\infty, 12, 14, 10, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Itération 2

$$y^2 = y^1 \otimes A \oplus b^T = \max(\min(y^1, A), b^T)$$

$$\min(y^1, A) = \min((\infty, 12, 14, 10, 0, 0, 0, 0), \begin{pmatrix} \infty & 12 & 14 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & \infty & 0 & 17 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & \infty & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 10 & 17 & 5 & \infty & 11 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 11 & \infty & 0 & 18 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & \infty & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & 4 & \infty & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 15 & 9 & \infty \end{pmatrix})$$
$$= (\infty, 12, 14, 12, 10, 6, 10, 0)$$

$$\begin{aligned} y^2 &= \max(\min(y^1, A), b^T) \\ &= \max((\infty, 12, 14, 12, 10, 6, 10, 0), (\infty, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)) \\ &= (\infty, 12, 14, 12, 10, 6, 10, 0) \end{aligned}$$

Itération 3

On procède de la même façon pour les itérations suivantes.

$$y^3 = (\infty, 12, 14, 12, 11, 10, 12, 10)$$

Itération 4

$$y^4 = (\infty, 12, 14, 12, 12, 10, 12, 11)$$

Itération 5

$$y^5 = (\infty, 12, 14, 12, 12, 11, 12, 11)$$

Itération 6

$$y^6 = (\infty, 12, 14, 12, 12, 11, 12, 11)$$

On a $y^5 = y^6$ donc on est arrivé à la fin de l'algorithme. Les résultats fournis par l'algorithme de Jacobi correspondent à ceux déterminés par l'algorithme de Dijkstra.

6 Améliorer l'algorithme de Jacobi

Afin de pouvoir reconstruire les chemins de capacité maximum à la fin de l'exécution de l'algorithme de Jacobi, on en propose une nouvelle version.

Le principe est le même que dans l'algorithme de Dijkstra amélioré : On initialise au début une liste P de prédécesseurs et à chaque itération on la met à jour en fonction des valeurs ayant changé. Pour connaître le prédécesseur d'un nœud dont la valeur dans la liste y vient de changer, il faut se référer à la matrice d'adjacence. Le prédécesseur est alors le nœud correpondant à la ligne de la matrice dont la valeur a été absorbée.

Par exemple, à la première itération de la question précédente, on avait $y^0(2) = 0$ et $y^1(2) = 12$, il était donc nécessaire de changer le prédécesseur de 2. Pour le déterminer, on remarque dans la matrice d'adjacence que la nouvelle valeur de 2 provient de la première ligne puisque $y^1(2) = \max(\min(y^0, A_2), b^T)$ et $\min(y^0, A_2) = \mathrm{MAX}(\min(\infty, 12), \min(0, \infty), \dots) = \mathrm{MAX}(\min(\infty, 12))$ et le 12 en question provient de la première ligne de la matrice. Au final $P(2) = 1$ après la première itération.