Algèbre de chemins

Merwan Achibet

1 Semi-anneau

On veut démontrer que $(R^+, \max, \min, 0, \infty)$ est un semi-anneau idempotent. Pour ce faire, on doit prouver que :

1. $(R^+, \max, 0)$ est un monoïde commutatif
2. $(R^+, \min, \infty)$ est un monoïde
3. l'opération min est distributive par rapport à max
4. l'élément 0 est absorbant pour l'opération min

Pour les démonstrations qui suivent, on prend $a, b, c \in R^+$.

1.1 $(R^+, \max, 0)$ est un monoïde commutatif

$$\max(a, b) = \max(b, a)$$

et

$$\max(a, 0) = \max(0, a) = a$$

donc il s'agit bien d'un monoïde commutatif.

1.2 $(R^+, \min, \infty)$ est un monoïde

$$\min(a, \infty) = \min(\infty, a) = a$$

donc il s'agit bien d'un monoïde

1.3 l'opération $\min$ est distributive par rapport à $\max$

Pour que cette opération soit distributive, il faut que

$$\min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$$

et que

$$\min(\max(a, b), c) = \max(\min(a, c), \min(a, b))$$

On étudie les six cas de figure possibles.

1.3.1 $a \geq b \geq c$

1.3.2 $a \geq c \geq b$

1.3.3 $b \geq a \geq c$

1.3.4 $b \geq c \geq a$

1.3.5 $c \geq a \geq b$

1.3.6 $c \geq b \geq a$

1.4 l'élément 0 est absorbant pour l'opération min

$$\min(a, 0) = \min(0, a) = 0$$

L'élément 0 est donc absorbant pour min.

Les quatres conditions précedemment citées sont validées, $(R^+, \max, \min, 0, \infty)$ est donc un semi-anneau idempotent.

1.5 Matrice d'adjacence

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 14 & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & 0 & \infty & 17 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ 14 & \infty & 0 & 5 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 10 & 17 & 5 & 0 & 11 & 6 & 15 & \infty \\ \infty & 8 & \infty & 11 & 0 & \infty & 18 & 11 \\ \infty & \infty & 3 & 6 & \infty & 0 & 4 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 15 & 18 & 4 & 0 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 11 & 15 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Warshall

3 A*

4 Dijkstra

5 Jacobi

6 Jacobi amélioré