Simulation physique de corps rigides avec interaction

Merwan Achibet
Université du Havre, 2011

Table des matières

Moteur physique ?

Moteur physique : système de simulation mécanique

Industrie, science, cinéma précis, lents

Jeu vidéo, réalité virtuelle approximatifs, temps réel

Ce projet :

- Moteur physique de base
- Corps rigides
- Corps convexes
- Temps réel

Étude de cas

1. La chute

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i$$

2. Le rebond

$$\vec{v}_1 = \gamma \vec{v}_2$$

3. Le repos

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} \qquad \vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = 0$$

Différentes tâches

- Dynamique
  - Composante linéaire
  - Composante angulaire
- Gestion des collisions
  - Détection
  - Correction
  - Réponse

La composante linéaire

Entrée	Forces environnementales
Sortie	Changement de position

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{p} = \int \vec{v}\,\partial t$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \qquad \qquad \vec{v} = \int \vec{a}\,\partial t$$

Intégration de la composante linéaire

Intégration d'Euler :

$$x_{n+1} = x_n + x' \partial t$$

Appliquée à nos besoins :

$$\vec{a}_{t+\partial t} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{v}_{t+\partial t} = \vec{v}_t + \vec{a}_{t+\partial t} \partial t$$

$$\vec{p}_{t+\partial t} = \vec{p}_t + \vec{v}_{t+\partial t} \partial t$$

Simplification grâce à l'élan linéaire

L'élan linéaire :

$$\vec{L} = m\vec{v} \qquad \sum_i \vec{F}_i = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \frac{\partial (m\vec{v})}{\partial t}$$

La nouvelle intégration :

$$\vec{L}_{t+\partial t} = \vec{L}_t + \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{p}_{t+\partial t} = \vec{p}_t + \frac{1}{m}\vec{L}_{t+\partial t}\partial t$$

Modélisation d'un corps

OK pour une particule, mais un objet plus complexe ?

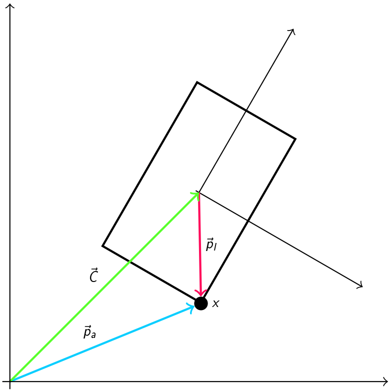
Une particule = un sommet Non

Une unique particule judicieusement placée Oui, le centre de masse

$$\vec{C} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{p}_i$$

Le centre de masse

Centre de masse = origine du repère local



$$\vec{p}_l = \vec{p}_a - \vec{C}$$

La composante angulaire

Il manque quelque chose... Les rotations !

Matrice d'orientation Un vecteur colonne = un axe du repère local

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Élan angulaire Analogue à l'élan linéaire

$$\vec{A}_{t+\partial t} = \vec{A}_n + \sum_i \vec{\tau}_i \qquad \vec{\tau}_i = (\vec{x} - \vec{C}) \times \vec{F}_i$$

Quantités auxiliaires I

Passage de l'élan à la nouvelle orientation moins direct.

Tenseur d'inertie local
: Matrice représentant les efforts à fournir pour produire une rotation le long de chaque axe

Tenseur d'inertie absolu
: Pendant absolu du tenseur d'inertie local

$$I_a = R I_l {}^t R$$

Vitesse angulaire

$$\vec{\omega} = I_a^{-1} \vec{A}$$

Quantités auxiliaires II

On définit l'opérateur $*$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

On multiplie $\vec{\omega}$ et chaque axe de R :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \begin{pmatrix} \vec{\omega}^* \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{xy} \\ R_{xz} \end{pmatrix} & \vec{\omega}^* \begin{pmatrix} R_{yx} \\ R_{yy} \\ R_{yz} \end{pmatrix} & \vec{\omega}^* \begin{pmatrix} R_{zx} \\ R_{zy} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \vec{\omega}^* R$$

Intégration de la composante angulaire

$$\vec{A}_{t+\partial t} = \vec{A}_t + \sum_i \vec{\tau}_i$$

$$I_a = R_t I_l {}^t R_t$$

$$\vec{\omega} = I_a^{-1} \vec{A}_{t+\partial t}$$

$$R_{t+\partial t} = R_t + \vec{\omega}^* R_t \partial t$$

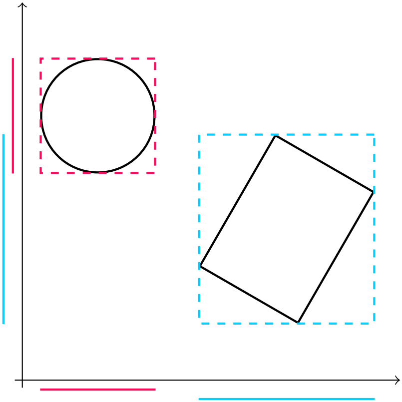
Deux niveaux de précision

On teste les collisions entre paires de corps : $\frac{n(n-1)}{2}$ tests

Beaucoup de tests, on veut accélérer le processus.

1. Détection grossière Économique, faux positif possible
2. Détection fine Précise, plus coûteuse

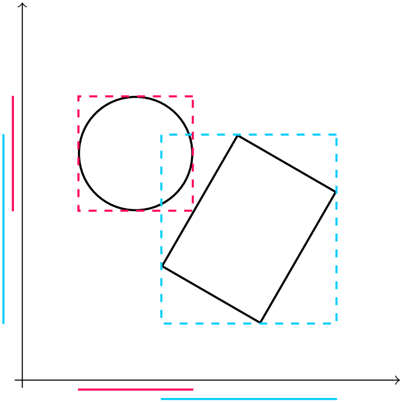
Détection grossière



Boîte englobante Contient tous les sommets, donc tous les points

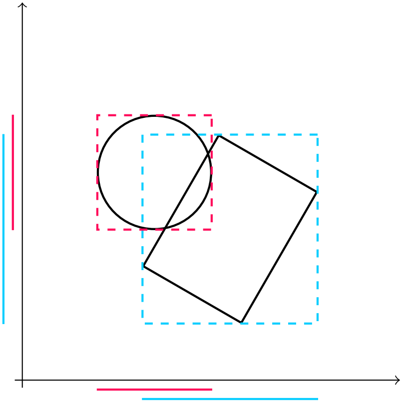
SAT Test rapide de collision entre boîtes

Détection grossière



Faux positif La détection fine invalidera le résultat

Détection grossière

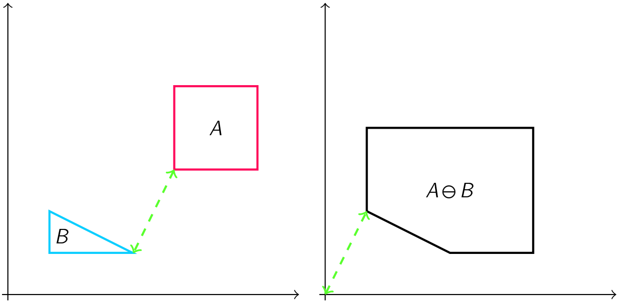


Collision détectée La détection fine validera le résultat

Détection fine I

Somme de Minkowski $A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

Différence de Minkowski $A \ominus B = A \oplus (-B)$



Particularité La plus petite distance de la différence de Minkowski à l'origine est la plus petite distance entre les corps A et B

Détection fine II

Comment calculer la plus petite distance entre M et l'origine ?

Algorithme GJK Expansion d'un simplex jusqu'à ce qu'il contienne le point le plus proche de l'origine.

Simplex Structure géométrique entièrement contenue dans M et liée à une dimension.

0 Sommet
1 Arête
2 Triangle
3 Tétraèdre

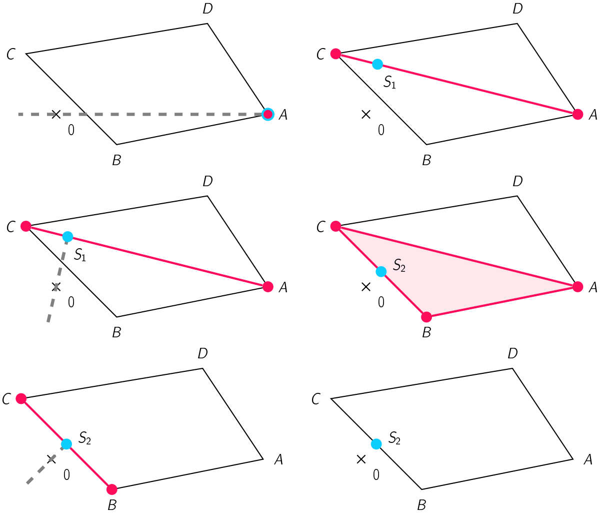
Détection fine III

Comment guider la recherche ?

$S(\vec{d})$ Fonction de support renvoyant le sommet de M le plus extrême dans la direction $\vec{d}$

Avantage $S_{A\ominus B}(\vec{d}) = S_A(\vec{d}) - S_B(-\vec{d})$
Inutile de calculer explicitement M !

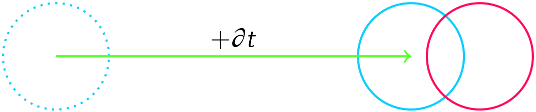
Détection fine IV



Correction I

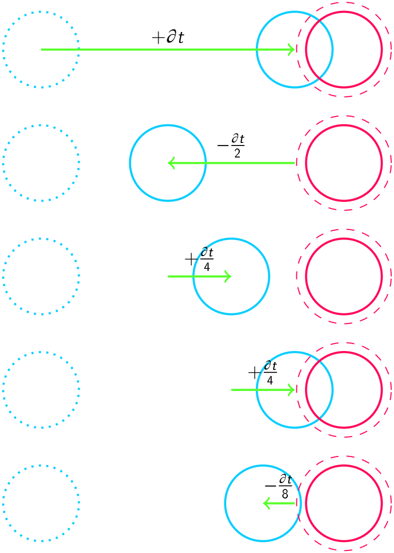
Intégration d'Euler Simulation discrète, pas de temps fixe

Problème Les collisions sont toujours pénétrantes



Solution Intégrer en arrière, par dichotomie

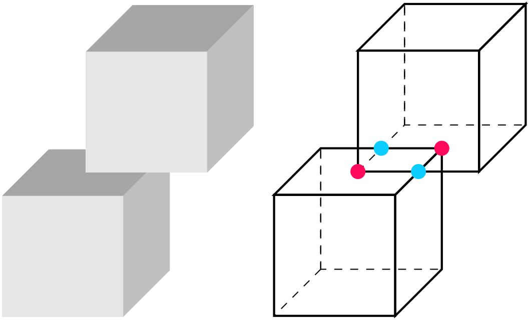
Correction II



Réponse I

Corps rigide Défini par sommets, arêtes et faces

On s'intéresse uniquement aux contacts sommet-face et arête-arête.



Réponse II

Un *contact* :

- Position
- Normale
- Temps

À chaque contact, une *impulsion* :

$$J = \vec{n}\frac{-(1+\varepsilon)v_r}{\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}+\vec{n}(I_A^{-1}(\vec{r}_A\times\vec{n}))\times\vec{r}_A+(I_B^{-1}(\vec{r}_b\times\vec{n}))\times\vec{r}_B}$$

Réponse III

Et pour les contacts de repos ?

On force un ε valant 0 pour produire une collision non-élastique.

Problème	Les collisions continuelles font vibrer les corps
Solution	On endort les corps dont l'énergie cinétique est faible pendant un laps de temps.

$$E_i = \frac{1}{2} m \vec{v_i}^2 \qquad E = \sum_i E_i$$

Algorithme principal

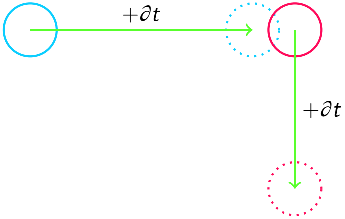
Algorithme 4 : Boucle principale

Entrées : Un pas de temps ∂t

```
pour chaque paire de corps (A,B) faire
    si collisionGrossiere(A,B) alors
        si collisionFine(A,B) alors
            (A, B) ← corrigerCollision(A,B)
            C ← detecterContacts(A,B)
            pour chaque contact c ∈ C faire
                I ← calculerImpulsion(c)
                appliquer(I, A)
                appliquer(-I, B)
pour chaque corps A faire
    appliquerForcesEnvironnementales(A)
    integrer(A, ∂t)
```

Défauts de cet algorithme

- Aucune cohérence temporelle
- L'ordre d'intégration des corps change l'issue de la simulation



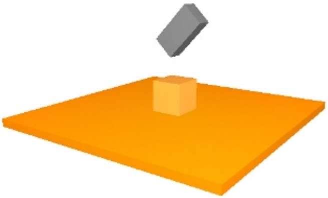
Algorithme principal amélioré

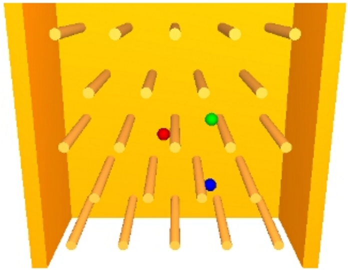
Algorithme 5 : Boucle principale améliorée

Entrées : Un pas de temps ∂t

```
C ← ∅
pour chaque paire de corps (A,B) faire
    (A2, B2) ← (A, B)

    appliquerForcesEnvironnementales(A2)
    integrer(A2, ∂t)
    appliquerForcesEnvironnementales(B2)
    integrer(B2, ∂t)

    si collisionGrossiere(A2, B2) alors
        si collisionFine(A2, B2) alors
            corrigerCollision(A2, B2)
            C ← C ∪ detecterContacts(A2, B2)
trierContacts(C)
∂t2 ← min(∂t, C[0].t)

pour chaque corps A faire
    appliquerForcesEnvironnementales(A)
    integrer(A, ∂t2)

pour chaque contact c ∈ C | c.t = ∂t2 faire
    I ← calculerImpulsion(c)
    appliquer(I, A)
    appliquer(-I, B)
```

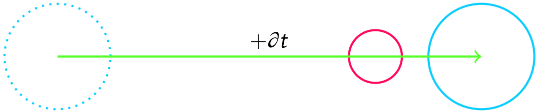
Démonstrations





Tunneling

Problème Les corps se traversent mais aucune collision détectée



Tunneling

Problème Les corps se traversent mais aucune collision détectée

Solution Lancer de rayons

+ Économique
– Peut manquer les plus petits corps

Tunneling

Problème Les corps se traversent mais aucune collision détectée

Solution Boîtes englobant les positions avant/après

+ Ne manque aucun tunneling
+ Procédures de base déjà utilisées pour la détection grossière

– Certaines trajectoires peu avantageuses (diagonales)

Conclusion

Différentes perspectives d'évolution :

- Partitionnement de l'espace
- Contraintes
- Plus de stabilitité (empilement)

Une voie intéressante : résolution de systèmes linéaires pour les contact de repos.

Questions