

<p style="text-align: center;">Cours Algorithmique des systèmes parallèles et distribués</p> <p style="text-align: center;">Exercices</p> <p style="text-align: center;">Série :5 Algorithmes répartis</p> <p style="text-align: center;">par Dominique Méry</p> <p style="text-align: center;">2 janvier 2026</p>
--

**Exercice 1** Soit le fichier *exiee.tla* contenant la description de l'élection du leader dans un graphe connexe acyclique.

```

----- MODULE ieec -----
EXTENDS Naturals

VARIABLES
    nb, sn, bm, bt, ba, root, msg, ack, tr, cnt, con

-----

NODES == {1,2,3,4}

(* le noeud i sait qu'il est le leader, puisque tous ses voisins sont ses enfants
election(i) ==
/\ i \in NODES
/\ nb[i]=sn[i]
    /\ root'=[root EXCEPT![i]= TRUE]
    /\ UNCHANGED <<nb, sn, bm, bt, ba, msg, ack, tr, cnt, con>>

-----

(* le noeud x envoie un message au noeud y, si le message n'est pas déjà envoyé
(* si $x$ n'a pas déjà envoyé un message d'accord pour être le parent de y

sending_msg(x,y) ==
/\ x \notin bm
/\ y \notin ba[x]
/\ nb[x]=sn[x] \cup {y}
    /\ msg' = msg \cup {<x,y>}
/\ bm' = bm \cup {x}
    /\ UNCHANGED <<nb, sn, bt, ba, root, ack, tr, cnt, con>>

-----

(* x a envoyé un message à y; y n'a pas encore envoyé son accord à $x$; y n'a pas
(* de message à x pour lui demander d'être le chef.
sending_ack(x,y) ==
/\ <x,y> \in msg
/\ x \notin ba[y]
/\ y \notin bm
    /\ ba'=[ba EXCEPT![y]= @ \cup {x}]
/\ ack' = ack \cup {<x,y>}
    /\ UNCHANGED <<nb, sn, bm, bt, root, msg, tr, cnt, con>>

-----

```

```

progress(x,y) ==
/\ <<x,y>> \in ack
/\ x \notin bt
    /\ tr'=tr \cup {<<x,y>>}
/\ bt' = bt \cup {x}
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bm,ba,root,msg,ack,cnt,con>>

rcv_cnf(x,y) ==
/\ <<x,y>> \in tr
/\ x \notin sn[y]
    /\ sn'=[sn EXCEPT![y]= @ \cup {x}]
    /\ UNCHANGED <<nb,bm,bt,ba,root,msg,ack,tr,cnt,con>>

decontention(x,y) ==
/\ <<x,y>> \in cnt
/\ <<y,x>> \in cnt
    /\ msg'=msg - cnt
    /\ bm'=bm - {x,y}
    /\ cnt'={}
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bt,ba,root,ack,tr,con>>

contention(x,y) ==
/\ con = 0
/\ <<x,y>> \in msg
/\ <<x,y>> \notin ack
/\ x \notin ba[y]
/\ y \in bm
    /\ cnt'=cnt\cup {<<x,y>>}
/\ con'=1
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bm,bt,ba,root,msg,ack,tr>>

solvecon(x,y) ==
/\ con = 1
/\ <<x,y>> \in msg
/\ x \notin ba[y]
/\ y \in bm
    /\ ba'=[ba EXCEPT![y]= @ \cup {x}]
/\ ack' = ack \cup {<<x,y>>}
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bm,bt,root,msg,tr,cnt,con>>

```

```

-----
(* modification *)
Init ==
/\ nb = [i \in NODES  |-> IF i=1 THEN {2,3} ELSE IF i = 3 THEN {1,4} ELSE IF i =
/\ sn = [i \in NODES  |-> {}]
/\ bm = {}
/\ bt = {}
/\ ack = {}
/\ ba = [i \in NODES  |-> {}]
/\ root = [i \in NODES  |-> FALSE]
/\ msg = {}
/\ cnt = {}
/\ tr = {}
/\ con = 0
Next ==
\/ \E i \in NODES: election(i)
\/ \E x,y \in NODES: sending_msg(x,y)
\/ \E x,y \in NODES: sending_ack(x,y)
\/ \E x,y \in NODES: progress(x,y)
\/ \E x,y \in NODES: rcv_cnf(x,y)
\/ \E x,y \in NODES: contention(x,y)
\/ \E x,y \in NODES: decontention(x,y)
\/ \E x,y \in NODES: solvecon(x,y)

```

**Question 1.1** *Montrer que ce modèle TLA vérifie les propriétés attendues de l'élection.*

**Question 1.2** *Montrer que les invariants de présentation de la solution sont vérifiés.*

**Question 1.3** *Modifier l'algorithme pour résoudre la contention en considérant un choix entre deux nœuds  $x$  et  $y$  par exemple le plus petit.*

**Question 1.4** *Traduire cette dernière version en utilisant le langage PlusCal.*

**Exercice 2** *Soit le fichier `exdijkstra.tla` contenant la description de l'autostabilisation dans un anneau.*

```

-----MODULE exdijkstra -----
EXTENDS Naturals
CONSTANTS
    N,M
VARIABLES
    V
-----

DOMAINE == 0 .. N
IMAGE == 0 .. M
-----

(* actions *)

NToZero ==
/\ V[0] = V[N]
/\ V' = [V EXCEPT![0] = (V[0] + 1) % (M+1)]

Others(I) ==
/\ I \in 0..N
/\ I # N
/\ V[I+1] # V[I]
/\ V' = [V EXCEPT ![I+1] = V[I]]

-----

Init == V = [i \in 0..N |-> (IF i # N THEN 9 ELSE 0)]
Next == NToZero /\ (\E I \in 0..N-1:Others(I))

Prop1 == (V[0] = V[N]) => (\A i \in 1..N-1: V[i+1] = V[i])

Prop2 ==
/\ (\E i,j \in 0..N-1: i # j /\ V[i+1] # V[i] /\ V[j+1] # V[j])
/\ (V[0] = V[N] /\ (\E i \in 0..N-1: V[i+1] # V[i]))

Prop == Prop2

test == Prop2

(* /\ ( (V[I+1] # V[I]) /\ (I \in 1..N)) => (V[0] # V[N]) /\ ( \A i \in 1..N
=====

```

**Question 2.1** Compléter le module et vérifier des propriétés attendues comme la stabilité.

**Question 2.2** Traduire ce module en un module *PlusCal* qui définit cet algorithme.