

---

# Cours MALG & MOVEX

## MALG

# Sémantique des langages de programmation

---

Dominique Méry

Telecom Nancy, Université de Lorraine

---

**Année universitaire 2023-2024**

- ① Software-based system engineering
- ② Summary on verification techniques
  - Tryptic Pattern
  - Programs as Predicate
  - Transformers
- ③ Introduction to semantics for programming languages
- ④ Operational Semantics
- ⑤ Denotational Semantics
- ⑥ Equivalence des deux sémantiques
- ⑦ Transformateurs de prédicats
  - Introduction
  - Définition et propriétés
  - Construction du wp pour la conditionnelle
  - Construction du wp pour l'itération
- ⑧ Logique de Hoare
- ⑨ Epilogue

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
  - Tryptic Pattern
  - Programs as Predicate Transformers
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
  - Introduction
  - Définition et propriétés
  - Construction du wp pour la conditionnelle
  - Construction du wp pour l'itération
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
  - Tryptic Pattern
  - Programs as Predicate Transformers
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
  - Introduction
  - Définition et propriétés
  - Construction du wp pour la conditionnelle
  - Construction du wp pour l'itération
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

# Summary

---

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue



Software/System development *ideally* proceeds in three phases according to Dines Børner : :

$$\mathcal{D}, \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R}$$

## Pre/Post Specification

- ▶  $\mathcal{R}$  : pre/post.
- ▶  $\mathcal{D}$  : integers, reals, ...
- ▶  $\mathcal{S}$  : algorithm, program, ...

Software/System development *ideally* proceeds in three phases according to Dines Børner :

$$\mathcal{D}, \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R}$$

## Pre/Post Specification

- ▶  $\mathcal{R}$  : pre/post.
  - ▶  $\mathcal{D}$  : integers, reals, ...
  - ▶  $\mathcal{S}$  : algorithm, program, ...
- 
- ▶ Semantical relationship
  - ▶ Verification by induction principle



Software/System development *ideally* proceeds in three phases according to Dines Børner : :

$$\mathcal{D}, \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R}$$

Software/System development *ideally* proceeds in three phases according to Dines Børner : :

$$\mathcal{D}, \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R}$$

- ▶ First, a phase of **domain engineering**  $\mathcal{D}$  : an analysis of the application domain leads to a description of that domain.
- ▶ Second, a phase of **requirements engineering**  $\mathcal{R}$  : an analysis of the domain description leads to a prescription of requirements to software for that domain.
- ▶ Third, a phase of **software/system design**  $\mathcal{S}$  : an analysis of the requirements prescription leads to software for that domain.

J. Piaget. *Logique et Connaissance scientifique*. La Pléiade, encyclopaedia.

If we refer to whom is talking, or more generally to the language users, this investigation is attributed to the **pragmatics**.

If we make an abstraction of the language users and if we analyze the expressions and their meanings only, we are in the area of the **semantics**.

Finally, if we make an abstraction of the meanings to analyze the relations between expressions, we are dealing with **syntax**.

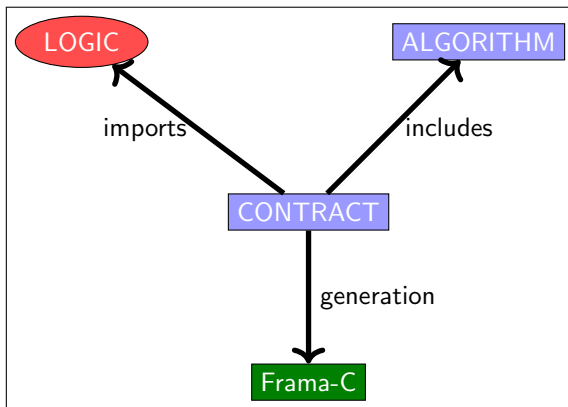
These three elements constitute the science of the language or semiotics.

# Summary

---

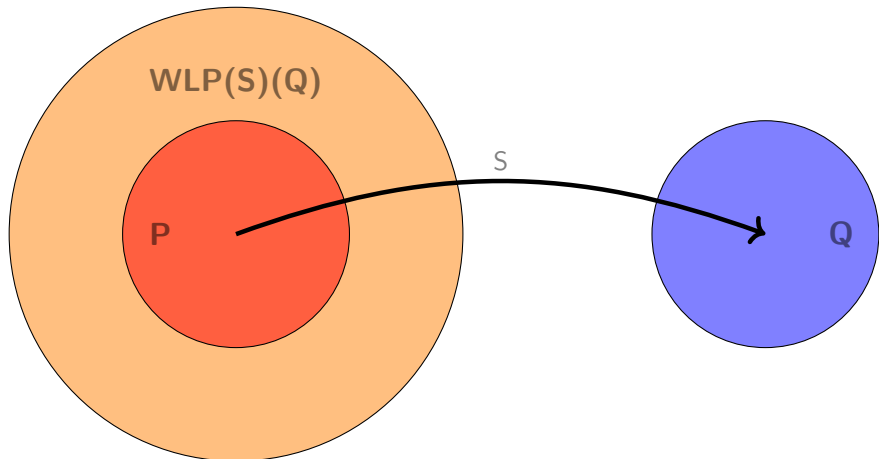
- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
  - Tryptic Pattern
  - Programs as Predicate Transformers
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
- 8 Logique de Hoare

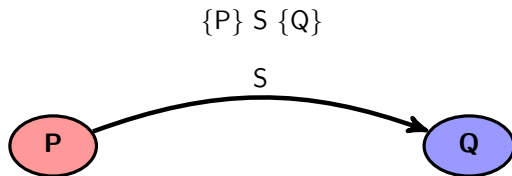
- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
  - Tryptic Pattern
  - Programs as Predicate Transformers
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
  - Introduction
  - Définition et propriétés
  - Construction du wp pour la conditionnelle
  - Construction du wp pour l'itération
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

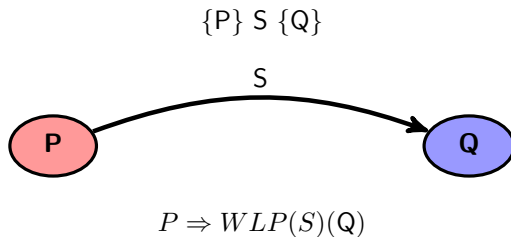


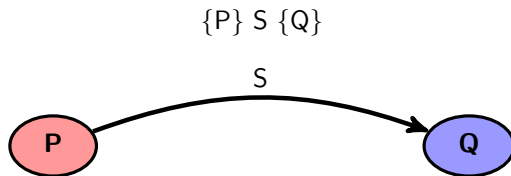
- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
  - Tryptic Pattern
  - Programs as Predicate Transformers
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
  - Introduction
  - Définition et propriétés
  - Construction du wp pour la conditionnelle
  - Construction du wp pour l'itération
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue











$$P \Rightarrow WLP(S)(Q)$$

Computing  $WLP(S)(Q)$  ?

# Summary

---

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

### Implicite versus explicite

- ▶ Writing  $101 = 5$  may have a meaning ...

### Implicite versus explicite

- ▶ Writing  $101 = 5$  may have a meaning ...
- ▶ Le code du nombre  $n$  est  $101$  à gauche du symbole  $=$  et le code du nombre  $n$  est sa représentation en base 10 à droite.
- ▶  $n_{10} = 5$  et  $n_2 = 101$
- ▶ Vérification :  $base(2, 10, 101) = 1.2^2 + 0.2 + 1.2^0 = 5_{10}$

```
int average(int a,int b)
{
    return((a+b)/2);
}
```

- ▶ average est une fonction utilisée dans des parties très profondes du code comme la recherche dichotomique.
- ▶ analyse de l'addition et de la division.
- ▶ anticiper les calculs



### Example : description of static behaviour

- ▶ A train moving at absolute speed  $spd1$
- ▶ A person walking in this train with relative speed  $spd2$ 
  - One may compute the absolute speed of the person
- ▶ Modelling
  - Syntax. Classical expressions
    - ▶ Type  $Speed = Float$
    - ▶  $spd1, spd2 : Speed$
    - ▶  $AbsoluteSpeed = spd1 + spd2$
  - Semantics
    - ▶ If  $spd1 = 25.6$  and  $spd2 = 24.4$  then  $AbsoluteSpeed = 50.0$
    - ▶ If  $spd1 = "val"$  and  $spd2 = 24.4$  then exception raised
  - Pragmatics
    - ▶ What if  $spd1$  is given in  $mph$  (miles per hour) and  $spd2$  in  $km/s$  (kilometers per second) ?
    - ▶ What if  $spd1$  is a relative speed ?

- ▶ La sémantique décrit le sens des objets définis par la syntaxe.
- ▶ La sémantique permet d'éviter l'ambiguïté des éléments d'un langage.
- ▶ Exemples
  - L'objet  $123$  désigne le nombre 123 en base dix.
  - L'objet  $x+12+8$  désigne la somme des valeurs de la variable  $x$  et des deux nombres écrits en base dix  $12$  et  $8$ .
- ▶ Styles de sémantique
  - Sémantique Opérationnelle : la sémantique du programme est décrite par une relation de transition qui décrit les différents états du programme et la relation de transition est définie par des *opérations* ou des *actions*.
  - Sémantique Dénotationnelle : la sémantique du programme est une fonction *calculant* le résultat à partir de la donnée.
  - Sémantique Axiomatique : le programme est caractérisé par des axiomes et des règles d'inférences comme par exemple la logique de HOARE.

Un programme  $P$  *remplit* un contrat (pre,post) :

- ▶  $P$  transforme une variable  $x$  à partir d'une valeur initiale  $x_0$  et produisant une valeur finale  $x_f$  :  $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- ▶  $x_0$  satisfait pre :  $\text{pre}(x_0)$
- ▶  $x_f$  satisfait post :  $\text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$

```
requires pre(x0)  
ensures post(x0, xf)  
variables X
```

```
begin  
  0 : P0(x0, x)  
  instruction0  
  ...  
  i : Pi(x0, x)  
  ...  
  instructionf-1  
  f : Pf(x0, x)  
end
```

- ▶  $\text{pre}(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- ▶  $P_f(x_0, x) \Rightarrow \text{post}(x_0, x)$
- ▶ conditions de vérification pour toutes les paires  $\ell \longrightarrow \ell'$  qui vont être traduites avec une sémantique wp.
- ▶  $x_0 \xrightarrow{P} x_f$  exprime la relation de calcul de  $x_0$  à  $x_f$  sous la forme d'une sémantique opérationnelle ou dénotationnelle.

## Correction partielle

- (I)  $\forall x_0, x_f \in D. \text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- (II)  $\forall x_0 \in D. \text{pre}(x_0) \Rightarrow (\forall x_f \in D. x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f))$
- (III)  $\forall x_0 \in D. \text{pre}(x_0) \Rightarrow \text{wlp}(P)(\text{post}(x_0, x_f))$

## Correction partielle

- (I)  $\forall x_0, x_f \in D. \text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- (II)  $\forall x_0 \in D. \text{pre}(x_0) \Rightarrow (\forall x_f \in D. x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f))$
- (III)  $\forall x_0 \in D. \text{pre}(x_0) \Rightarrow wlp(P)(\text{post}(x_0, x_f))$

## Techniques équivalentes de vérification

- ▶ méthode des assertions inductives de Floyd-Hoare (annotation et vérification).
- ▶ méthode du calcul wp (calcul de la précondition associée à un programme)
- ▶ définition équivalente de sémantiques des langages de programmation :
  - opérationnelle
  - dénotationnelle
  - axiomatique

# Summary

---

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics**
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

► Sémantique à petits pas (small steps) :

- Définition d'une relation notée  $\xrightarrow{\text{SOS}}$  sur l'ensemble des configurations de la forme  $(S, s)$  où  $S$  est une instruction ou un programme ou une instruction et  $s$  est un état ou de la forme  $s$  où  $s$  est un état.
- Transitions de type 1 :  $(S, s) \xrightarrow{\text{SOS}} (S', s')$
- Transitions de type 2 :  $(S, s) \xrightarrow{\text{SOS}} s'$

► Sémantique naturelle ou à grands pas (*big step*) :

- Définition d'une relation notée  $\xrightarrow{\text{nat}}$  sur l'ensemble des configurations de la forme  $(S, s)$  où  $S$  est une instruction ou un programme ou une instruction et  $s$  est un état ou de la forme  $s$  où  $s$  est un état.
- Transitions uniquement de ce type :  $(S, s) \xrightarrow{\text{nat}} s'$

- ▶ Un état  $s$  est un élément de  $STATES = V \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $STATES$  est l'ensemble des états.
- ▶  $\mathcal{E}$  est une fonction associant à toute expression arithmétique une fonction permettant de donner la valeur de cette expression en un état donné :  $\mathcal{E} \in \text{EXPR} \rightarrow (\text{STATES} \rightarrow \mathbb{Z})$  :
  - $\mathcal{E}(x)(s) = s(x)$  où  $x \in V$  et  $s \in \text{STATES}$ .
  - $\mathcal{E}(\text{constant})(s) = \text{constant}$ . Technique
  - $\mathcal{E}(e1 \text{ op } e2)(s) = \mathcal{E}(e1)(s) \text{ op } \mathcal{E}(e2)(s)$ .
- ▶  $\mathcal{B}$  est une fonction associant à toute expression booléenne une fonction permettant de donner la valeur de cette expression en un état donné :  $\mathcal{B} \in \text{EXPR} \rightarrow (\text{STATES} \rightarrow \text{BOOL})$  :
  - $\mathcal{B}(ff)(s) = \text{FALSE}$
  - $\mathcal{B}(tt)(s) = \text{TRUE}$
  - $\mathcal{B}(e1 \text{ relop } e2)(s) = \mathcal{E}(e1)(s) \text{ relop } \mathcal{E}(e2)(s)$ .
  - $\mathcal{B}(b1 \text{ bop } b2)(s) = \mathcal{E}(b1)(s) \text{ bop } \mathcal{E}(b2)(s)$ .



## Règles de définition selon la syntaxe

- ▶ Si  $\mathcal{E}(e)(s)$  est la valeur de l'expression  $e$  en  $s$ , alors
$$(x := e, s) \xrightarrow[\text{SOS}]{} s[x \mapsto \mathcal{E}(e)(s)]$$
- ▶  $(\text{skip}, s) \xrightarrow[\text{SOS}]{} s$
- ▶ Si  $(S_1, s) \xrightarrow[\text{SOS}]{} (S'_1, s')$ , alors  $(S_1; S_2, s) \xrightarrow[\text{SOS}]{} (S'_1; S_2, s')$ .
- ▶ Si  $(S_1, s) \xrightarrow[\text{SOS}]{} s'$ , alors  $(S_1; S_2, s) \xrightarrow[\text{SOS}]{} (S_2, s')$ .
- ▶ Si  $\mathcal{B}(b)(s) = \text{TRUE}$ , alors  $(\text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi}, s) \xrightarrow[\text{SOS}]{} (S_1, s)$ .
- ▶ Si  $\mathcal{B}(b)(s) = \text{FALSE}$ , alors  $(\text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi}, s) \xrightarrow[\text{SOS}]{} (S_2, s)$ .
- ▶  $(\text{while } b \text{ do } S \text{ od}, s) \xrightarrow[\text{SOS}]{} (\text{if } b \text{ then } S; \text{while } b \text{ do } S \text{ od else skip fi}, s)$

## Règles de définition selon la syntaxe

- ▶ Si  $\mathcal{E}(e)(s)$  est la valeur de l'expression  $e$  en  $s$ , alors
$$(x := e, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s[x \mapsto \mathcal{E}(e)(s)]$$
- ▶  $(\text{skip}, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s$
- ▶ Si  $(S_1, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s'$  et  $(S_2, s') \xrightarrow[\text{nat}]{} s''$ , alors  $(S_1; S_2, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s''$ .
- ▶ Si  $(S_1, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s'$  et  $\mathcal{B}(b)(s) = \text{TRUE}$ , alors
$$(\text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi}, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s'.$$
- ▶ Si  $(S_2, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s'$  et  $\mathcal{B}(b)(s) = \text{FALSE}$ , alors
$$(\text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi}, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s'.$$
- ▶ Si  $(S, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s'$  et  $(\text{while } b \text{ do } S \text{ od}, s') \xrightarrow[\text{nat}]{} s''$  et  $\mathcal{B}(b)(s) = \text{TRUE}$ , alors  $(\text{while } b \text{ do } S \text{ od}, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s''$ .
- ▶ Si  $\mathcal{B}(b)(s) = \text{FALSE}$ , alors  $(\text{while } b \text{ do } S \text{ od}, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s$ .

### Fonction sémantique $\mathcal{S}_{sos}$ :

▶  $\mathcal{S}_{sos} \in STATS \rightarrow (STATES \rightarrow STATES)$  :

▶  $\mathcal{S}_{sos}(S)(s) \stackrel{def}{=} \begin{cases} s' \text{ si } (S, s) \xrightarrow[\text{sos}]{*} s' \\ \text{indefinie sinon} \end{cases}$

### Fonction sémantique $\mathcal{S}_{nat}$ :

▶  $\mathcal{S}_{nat} \in STATS \rightarrow (STATES \rightarrow STATES)$  :

▶  $\mathcal{S}_{nat}(S)(s) \stackrel{def}{=} \begin{cases} s' \text{ si } (S, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s' \\ \text{indefinie sinon} \end{cases}$

## Equivalence pour les instructions de STATS

Pour toute instruction  $S$  de STATS, pour tout état  $s$  de STATES,  
 $\mathcal{S}_{sos}(S)(s) = \mathcal{S}_{nat}(S)(s)$

## Preuve

- ▶ Montrons que si  $(S, s) \xrightarrow{\text{nat}} s'$ , alors  $(S, s) \xrightarrow{\text{sos}}^* s'$ .
- ▶ Montrons que si  $(S, s) \xrightarrow{\text{sos}}^* s'$ , alors  $(S, s) \xrightarrow{\text{nat}} s'$ .

# Summary

---

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics**
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

- ▶ Fondement des langages de programmation.
- ▶ Outils mathématiques permettant de raisonner sur les objets de la programmation.
- ▶ Liaison entre les programmes et les spécifications : le raffinement ou l'implémentation.
- ▶ Préservation de la sémantique d'un langage de programmation dans un langage de plus bas niveau par compilation : correction du compilateur.

Une notation pour des instructions comme par exemple C,  
PASCAL, SHELL,

- ▶ Syntaxe : Structure et forme des sentences
- ▶ Sémantique : Association d'un sens aux sentences comme par exemple des nombres, des fonctions, des actions d'une machine, ...
- ▶ Pragmatique : Utilisation effective du langage comme par exemple les domaines d'applications, les performances, ...

Des éléments spécifiques pour chaque programme d'une machine.

- ▶ Un module d'analyse syntaxique : lecture du texte fourni, vérification de la syntaxe, génération de la représentation interne.
- ▶ Un module d'évaluation : évaluation du texte fourni en donnée du texte analysé en un texte résultat ; cela définit la sémantique du langage.

La mise en œuvre d'un langage est une activité pragmatique.



- ▶ Interprétation : Exécution du programme  
L'interprète définit le sens par ses actions.
- ▶ Compilation : Transformation d'un programme écrit dans un langage L en un texte équivalent d'un langage L2 ( langage machine en général).  
Le compilateur préserve le sens par équivalence.

- ▶ Syntaxe sous BNF (Backus Naur Form)
  - Correspondance entre la BNF et l'analyseur syntaxique.
  - Générateur d'analysuer à partir de spécification du langage.
- ▶ Sémantique :
  - Opérationnelle.
  - Axiomatique
  - Dénotationnelle

- ▶ Le sens d'un programme est un objet mathématique.
- ▶ Chaque construction du langage est associée à un objet mathématique par une fonction de valuation. Le sens d'une structure est appelée une dénotation.

$$\mathcal{M}(P) = D \quad (1)$$

$P$  est un programme

$\mathcal{M}$  est une fonction de valuation.

$D$  est une dénotation ou une valeur sémantique de dénotation.

- ▶ Domaine : Structure syntaxique abstraite du langage
- ▶ Codomaine : Objets des domaines sémantiques.
- ▶ Définition structurelle : le sens d'un arbre est défini à partir du sens de ses sous-arbres.

Une fonction de valuation sémantique associe une syntaxe abstraite à des objets d'un domaine sémantique.

► Syntaxe abstraite :

- Domaines syntaxiques :  $B \in \text{Nombre-binaire}$   
 $D \in \text{Chiffre-binaire}$
- Règles syntaxiques :  $B ::= BD|D$   
 $D ::= 0|1$

► Sous-arbre :  $\begin{array}{c} D \\ | \\ 0 \end{array}$

► Sens :  $\mathcal{D}\left(\begin{array}{c} D \\ | \\ 0 \end{array}\right) = zero$

► Notation :  $\mathcal{D}[0] = zero$

Fonction de valuation :  $\begin{array}{l} \mathcal{D}[0] = zero \\ \mathcal{D}[1] = un \end{array}$

► Sous-arbre :

$$\begin{array}{c} B \\ | \\ D \\ | \\ 1 \end{array}$$

► Sens :  $\mathcal{B}\left(\begin{array}{c} B \\ | \\ D \\ \Delta \end{array}\right) = \mathcal{D}\left(\begin{array}{c} D \\ \Delta \end{array}\right)$

► Notation :  $\mathcal{B}[[D]] = \mathcal{D}[[D]]$

Fonction de valuation :  $\mathcal{B}[[D]] = \mathcal{D}[[D]]$   
 $\mathcal{B}[[BD]] = (\mathcal{B}[[B]] \text{ fois deux}) \text{ plus } \mathcal{D}[[D]]$

Syntaxe abstraite

$B \in \text{Nombre-binaire}$

$D \in \text{Chiffre-binaire} \quad B ::= BD \mid D$

$D ::= 0 \mid 1$

Domaines sémantiques

*Nombres naturels :*

Domaine  $\text{Nat} = \mathbb{N}$

Opérations zero, un deux, trois, ... :  $\text{Nat}$

plus, fois :  $\text{Nat} \times \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$



Fonctions de valuation

$\mathcal{B} : \text{Nombre-binaire} \rightarrow \text{Nat}$

$\mathcal{B}[[D]] = \mathcal{D}[[D]]$

$\mathcal{B}[[BD]] = (\mathcal{B}[[B]] \text{ fois deux}) \text{ plus } \mathcal{D}[[D]]$

$\mathcal{D} : \text{Chiffre-binaire} \rightarrow \text{Nat}$

$\mathcal{D}[[0]] = \text{zero}$

$\mathcal{D}[[1]] = \text{un}$

## ► Syntaxe

$\tau ::= \text{bool} \mid \text{nat} \mid \text{int} \mid \dots$  % types de données

$\theta ::= \text{exp}[\tau] \mid \text{comm}$  % types des textes de commandes

- tout nom de type  $\tau$  dénote un ensemble non vide  $\llbracket \tau \rrbracket$  de valeurs possibles :

- $\llbracket \text{bool} \rrbracket = \{\text{true}, \text{false}\} = \mathbb{B}$
- $\llbracket \text{nat} \rrbracket = \{0, 1, 2, 3 \dots\} = \mathbb{N}$
- $\llbracket \text{int} \rrbracket = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\} = \mathbb{Z}$

- $\llbracket \text{exp}[\tau] \rrbracket = \text{States} \longrightarrow \llbracket \tau \rrbracket$   
 $\llbracket \text{comm} \rrbracket = \text{States} \rightarrow \text{States}$  (fonction partielle)  
où States est l'ensemble des états,  
par exemple  $\text{States} = \text{Var} \longrightarrow \mathbb{Z}$

## Equations sémantiques

- ▶  $\llbracket \bullet \rrbracket_{\text{exp}[\tau]} : \text{exp}[\tau] \longrightarrow \llbracket \text{exp}(\tau) \rrbracket$
- ▶  $\llbracket \bullet \rrbracket_{\text{comm}} : \text{comm} \longrightarrow \llbracket \text{comm} \rrbracket$
- ▶  $\llbracket \bullet \rrbracket_{\text{exp}[\tau]}$  est noté  $\llbracket \bullet \rrbracket$
- ▶  $\llbracket \bullet \rrbracket_{\text{comm}}$  est noté  $\llbracket \bullet \rrbracket$

## Instruction d'affectation

Pour tout état  $s \in \text{States}$ ,  $\llbracket I := E \rrbracket(s) = s[I \mapsto \llbracket E \rrbracket(s)]$

### Instruction conditionnelle

Pour tout état  $s \in \text{States}$ ,

**Cond+** :  $\llbracket \text{if } B \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi} \rrbracket(s) = \llbracket S_1 \rrbracket(s)$  si  $\llbracket B \rrbracket(s) = \text{TRUE}$

**Cond-** :  $\llbracket \text{if } B \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi} \rrbracket(s) = \llbracket S_2 \rrbracket(s)$  si  $\llbracket B \rrbracket(s) = \text{FALSE}$

### Instruction conditionnelle

Pour tout état  $s \in \text{States}$ ,

$$\llbracket S_1; S_2 \rrbracket(s) = \llbracket S_2 \rrbracket(\llbracket S_1 \rrbracket(s)) = \llbracket S_2 \rrbracket \circ \llbracket S_1 \rrbracket(s)$$

### Application à des démonstrations de propriétés sur les commandes :

- ▶  $C \equiv C'$  si, et seulement si,  $\llbracket C \rrbracket = \llbracket C' \rrbracket$
- ▶  $\text{for } 0 \text{ do } C \equiv \text{SKIP}$
- ▶  $(C; C); C \equiv C; (C; C)$
- ▶  $\llbracket \text{for } N \text{ do } C \rrbracket = \llbracket C \rrbracket^{\llbracket N \rrbracket}$

### Observation

$\text{while } B \text{ do } C \equiv \text{if } B \text{ then } C; \text{while } B \text{ do } C$

traduite sémantiquement comme suit :

$\llbracket \text{while } B \text{ do } C \rrbracket \equiv \llbracket \text{if } B \text{ then } C; \text{while } B \text{ do } C \rrbracket$

Pour tout  $s \in \text{States}$ ,  $W(f)(s) =$  si  $\llbracket B \rrbracket(s)$  alors  $f(\llbracket C \rrbracket(s))$  sinon  $s$  :

- ▶  $W \in (\text{States} \rightarrow \text{States}) \rightarrow (\text{States} \rightarrow \text{States})$
- ▶  $(\text{States} \rightarrow \text{States}, \sqsubseteq)$  est une structure partiellement ordonnée inductive.
- ▶  $W$  est continue pour cette structure.
- ▶ Le plus petit point fixe de  $W$  est noté  $\mu W$  :
  - $\mu W = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} W_i$ .
  - $W_0 = \perp$  où  $\text{graphe}(\perp) = \emptyset$ .
  - Soit  $s \in \text{States}$  :  
 $W_{i+1}(s) = \text{if } \llbracket B \rrbracket(s) \text{ then } W_i(\llbracket C \rrbracket(s)) \text{ else } s \text{ end}$
- ▶ Soit  $s \in \text{States}$  :  
 $\mu W(s) = \text{if } \llbracket B \rrbracket(s) \text{ then } \mu W(\llbracket C \rrbracket(s)) \text{ else } s \text{ end}$

### Denotational Semantics for iteration

$\text{while } B \text{ do } C \equiv \text{if } B \text{ then } C; \text{while } B \text{ do } C$

Pour tout  $s \in \text{States}$ ,  $W(f)(s) = \text{si } \llbracket B \rrbracket(s) \text{ alors } f(\llbracket C \rrbracket(s)) \text{ sinon } s :$

Pour tout état  $s \in \text{States}$ ,

$\llbracket \text{while } B \text{ do } C \rrbracket(s) = \mu f. W(f)(s)$

- ▶  $\llbracket \text{while } B \text{ do } C \rrbracket \equiv \llbracket \text{if } B \text{ then } C; \text{while } B \text{ do } C \rrbracket$  is a property from the definition of  $\llbracket \text{while } B \text{ do } C \rrbracket$ .
- ▶ For any statement  $S$ ,  $\llbracket S \rrbracket$  is a partial function from States to States.

# Summary

---

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques**
- 7 Transformateurs de prédicats
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

## Equivalence pour les instructions de STATS

Pour toute instruction  $S$  de STATS, pour tout état  $s$  de STATES,  
 $\mathcal{S}_{sos}(S)(s) = \mathcal{S}_{nat}(S)(s) = \mathcal{D}(S)(s)$

- ▶ La sémantique opérationnelle est une sémantique liée à une fonction d'interprétation et de calcul du programme évalué.
- ▶ La sémantique dénotationnelle est une expression fonctionnelle du programme ;



- ① Software-based system engineering
- ② Summary on verification techniques
- ③ Introduction to semantics for programming languages
- ④ Operational Semantics
- ⑤ Denotational Semantics
- ⑥ Equivalence des deux sémantiques
- ⑦ Transformateurs de prédicats
  - Introduction
  - Définition et propriétés
  - Construction du wp pour la conditionnelle
  - Construction du wp pour l'itération

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
  - Tryptic Pattern
  - Programs as Predicate Transformers
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats**
  - Introduction
  - Définition et propriétés
  - Construction du wp pour la conditionnelle
  - Construction du wp pour l'itération
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

- Un programme  $P$  *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :
- $STATES$  est l'ensemble de tous les états de  $P$  :  $STATES = X \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $X$  désigne les variables de  $P$ .
  - $s_0$  et  $s_f$  deux états de  $STATES$  :  $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  signifie que  $P$  est exécuté à partir d'un état  $s_0$  et produit un état  $s_f$ .
  - Pour un état  $s$  de  $P$  courant, on notera  $s(X) = x$  pour distinguer la valeur de la variable  $X$  et sa valeur courante en  $s$  :

- Un programme  $P$  *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :
- STATES est l'ensemble de tous les états de  $P$  :  $STATES = X \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $X$  désigne les variables de  $P$ .
  - $s_0$  et  $s_f$  deux états de STATES :  $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  signifie que  $P$  est exécuté à partir d'un état  $s_0$  et produit un état  $s_f$ .
  - Pour un état  $s$  de  $P$  courant, on notera  $s(X) = x$  pour distinguer la valeur de la variable  $X$  et sa valeur courante en  $s$  :

$$s_0(X) = x_0, s_f(X) = x_f, s'(X) = x'$$

- Un programme  $P$  *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :

- STATES est l'ensemble de tous les états de  $P$  :  $STATES = X \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $X$  désigne les variables de  $P$ .
- $s_0$  et  $s_f$  deux états de STATES :  $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  signifie que  $P$  est exécuté à partir d'un état  $s_0$  et produit un état  $s_f$ .
- Pour un état  $s$  de  $P$  courant, on notera  $s(X) = x$  pour distinguer la valeur de la variable  $X$  et sa valeur courante en  $s$  :

$$s_0(X) = x_0, s_f(X) = x_f, s'(X) = x'$$

- $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  définit la relation suivante sur l'ensemble des valeurs :

$$x_0 \xrightarrow{P} x_f$$

- Un programme  $P$  *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :

- STATES est l'ensemble de tous les états de  $P$  :  $STATES = X \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $X$  désigne les variables de  $P$ .
- $s_0$  et  $s_f$  deux états de STATES :  $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  signifie que  $P$  est exécuté à partir d'un état  $s_0$  et produit un état  $s_f$ .
- Pour un état  $s$  de  $P$  courant, on notera  $s(X) = x$  pour distinguer la valeur de la variable  $X$  et sa valeur courante en  $s$  :

$$s_0(X) = x_0, s_f(X) = x_f, s'(X) = x'$$

- $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  définit la relation suivante sur l'ensemble des valeurs :

$$x_0 \xrightarrow{P} x_f$$

- Un programme  $P$  *remplit* un contrat (pre,post) :

- $P$  transforme une variable  $x$  à partir d'une valeur initiale  $x_0$  et produisant une valeur finale  $x_f$  :  $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- $x_0$  satisfait pre :  $\text{pre}(x_0)$
- $x_f$  satisfait post :  $\text{post}(x_0, x_f)$
- $\text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
  - Tryptic Pattern
  - Programs as Predicate Transformers
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats**
  - Introduction
  - Définition et propriétés
  - Construction du wp pour la conditionnelle
  - Construction du wp pour l'itération
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

### Opérateur WP

Soit  $STATES$  l'ensemble des états sur l'ensemble  $X$  des variables. Soit  $S$  une instruction de programme sur  $X$ . Soit  $A$  une partie de  $STATES$ .

$s \in WP(S)(A)$ , si la condition suivante est vérifiée :

$$\left( \begin{array}{l} \forall t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow t \in A \\ \wedge \\ \exists t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \end{array} \right)$$

- ▶  $WP(X := X+1)(A) = \{s \in STATES \mid s[X \mapsto s(X) \oplus 1] \in A\}$
- ▶  $WP(X := Y+1)(A) = \{s \in STATES \mid s[X \mapsto s(Y) \oplus 1] \in A\}$
- ▶  $WP(\text{while } X > 0 \text{ do } X := X-1 \text{ od})(A) = \{s \in STATES \mid (s(X) \leq 0) \vee (s(X) \in A \wedge s(X) < 0)\}$
- ▶  $WP(\text{while } x > 0 \text{ do } x := x+1 \text{ od})(A) = \{s \in STATES \mid (s(X) \in A \wedge s(X) \leq 0)\}$
- ▶  $WP(\text{while } x > 0 \text{ do } x := x+1 \text{ od})(\emptyset) = \emptyset$
- ▶  $WP(\text{while } x > 0 \text{ do } x := x+1 \text{ od})(STATES) = \{s \in STATES \mid s(X) \leq 0\}$



## Propriétés

- ▶  $WP$  est une fonction monotone pour l'inclusion d'ensembles de STATES.
- ▶  $WP(S)(\emptyset) = \emptyset$
- ▶  $WP(S)(A \cap B) = WP(S)(A) \cap WP(S)(B)$
- ▶  $WP(S)(A) \cup WP(S)(B) \subseteq WP(S)(A \cup B)$
- ▶ Si  $S$  est déterministe,  $WP(S)(A \cup B) = WP(S)(A) \cup WP(S)(B)$
  
- ▶  $WP$  est un opérateur avec le profil suivant  
pour toute instruction  $S$  du langage de programmation,  
$$WP(S) \in \mathcal{P}(STATES) \rightarrow \mathcal{P}(STATES)$$
- ▶  $(\mathcal{P}(STATES), \subseteq)$  est un treillis complet.
- ▶  $(Pred, \Rightarrow)$  est une structure où
  - (1)  $Pred$  est une *extension* du langage d'expressions booléennes
  - (2)  $Pred$  est une *intension* introduite comme un langage d'assertions
  - $\Rightarrow$  est l'implication
  - $s \in A$  correspond une assertion  $P$  vraie en  $s$  notée  $P(s)$ .

- ▶  $S$  est une instruction de STATS.
- ▶  $T$  est le type ou les types des variables et  $D$  est la constante ou les constantes Définie(s).
- ▶  $P$  est un prédicat du langage Pred
- ▶  $X$  est une variable de programme
- ▶  $E(X, D)$  (resp.  $B(X, D)$ ) est une expression arithmétique (resp. booléenne) dépendant de  $X$  et de  $D$ .
- ▶  $x$  est la valeur de  $X$  ( $X$  contient la valeur  $x$ ).
- ▶  $e(x, d)$  (resp.  $b(x, d)$ ) est l'expression arithmétique (resp. booléenne) du langage Pred associée à l'expression  $E(X, D)$  (resp.  $B(X, D)$ ) du langage des expressions arithmétiques (resp. booléennes) du langage de programmation Prog
- ▶  $b(x, d)$  est l'expression arithmétique du langage Pred associée à l'expression  $E(X, D)$  du langage des expressions arithmétiques du langage de programmation Prog

|                            |   |
|----------------------------|---|
| S                          | $wp(S)(P)$  |
| $X := E(X, D)$             | $P[e(x, d)/x]$  |
| SKIP                       | $P$   |
| $S_1; S_2$                 | $wp(S_1)(wp(S_2)(P))$   |
| IF $B$ $S_1$ ELSE $S_2$ FI | $(B \Rightarrow wp(S_1)(P)) \wedge (\neg B \Rightarrow wp(S_2)(P))$       |
| WHILE $B$ DO $S$ OD        | $\mu.(\lambda X. (B \Rightarrow wp(S)(X)) \wedge (\neg B \Rightarrow P))$ |

- ▶  $wp(X := X+5)(x \geq 8) \stackrel{def}{=} x+5 \geq 8 \approx x \geq 3$
- ▶  $wp(\text{WHILE } x > 1 \text{ DO } X := X+1 \text{ OD})(x = 4) = FALSE$
- ▶  $wp(\text{WHILE } x > 1 \text{ DO } X := X+1 \text{ OD})(x = 0) = x = 0$

$S$  est une instruction et  $P$  et  $Q$  sont des prédicats.

- ▶ Loi du miracle exclu :  $wp(S)(FALSE) = FALSE$
- ▶ Distributivité de la conjonction :  
 $wp(S)(P) \wedge wp(S)(Q) = wp(S)(P \wedge Q)$
- ▶ Distributivité de la disjonction :  
 $wp(S)(P) \vee wp(S)(Q) \Rightarrow wp(S)(P \vee Q)$
- ▶ Si  $S$  est déterministe, alors  $wp(S)(P) \vee wp(S)(Q) = wp(S)(P \vee Q)$

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
  - Tryptic Pattern
  - Programs as Predicate Transformers
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats**
  - Introduction
  - Définition et propriétés
  - Construction du wp pour la conditionnelle
  - Construction du wp pour l'itération
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

$$\blacktriangleright S \stackrel{def}{=} \left[ \begin{array}{l} \text{IF } B_1 \longrightarrow S_1 \\ \square B_2 \longrightarrow S_2 \\ \dots \\ \square B_n \longrightarrow S_n \\ \text{FI} \end{array} \right]$$

$$\blacktriangleright wp(S)(P) = \left[ \begin{array}{l} (B_1 \vee \dots \vee B_n) \\ \wedge (B_1 \Rightarrow wp(S_1)(P)) \\ \dots \\ \wedge (B_n \Rightarrow wp(S_n)(P)) \end{array} \right]$$

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
  - Tryptic Pattern
  - Programs as Predicate Transformers
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats**
  - Introduction
  - Définition et propriétés
  - Construction du wp pour la conditionnelle
  - Construction du wp pour l'itération
- 8 Logique de Hoare
- 9 Epilogue

$$\blacktriangleright S \stackrel{def}{=} \left[ \begin{array}{l} \text{DO } B_1 \longrightarrow S_1 \\ \square B_2 \longrightarrow S_2 \\ \dots \\ \square B_n \longrightarrow S_n \\ \text{OD} \end{array} \right]$$

$$\blacktriangleright BS \stackrel{def}{=} \left[ \begin{array}{l} \text{IF } B_1 \longrightarrow S_1 \\ \square B_2 \longrightarrow S_2 \\ \dots \\ \square B_n \longrightarrow S_n \\ \text{FI} \end{array} \right]$$

$$\blacktriangleright B \stackrel{def}{=} (B_1 \vee \dots \vee B_n)$$

$$\blacktriangleright T \stackrel{def}{=} \left[ \begin{array}{l} \text{DO } B \longrightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{IF } B_1 \longrightarrow S_1 \\ \square B_2 \longrightarrow S_2 \\ \dots \\ \square B_n \longrightarrow S_n \\ \text{FI} \end{array} \right] \end{array} \right]$$



$$\blacktriangleright T \stackrel{def}{=} \left[ \text{DO } B \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{IF } B_1 \longrightarrow S_1 \\ \square B_2 \longrightarrow S_2 \\ \dots \\ \square B_n \longrightarrow S_n \\ \text{FI} \end{bmatrix} \right]$$

$$\blacktriangleright T \stackrel{def}{=} [ \text{DO } B \longrightarrow BS \text{ OD} ]$$

$$\blacktriangleright wp(S)(P) = wp(T)(P)$$

$$\blacktriangleright wp(T)(P) = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} W_k \text{ où}$$

- Une suite d'assertions notées  $W_0, \dots, W_k \dots$  est définie comme étant
- $W_0(P) = \neg B \wedge P$
- $\forall k \in \mathbb{N} : W_{k+1}(P) = W_0(P) \vee wp(BS)(W_k)$

$$\blacktriangleright wp(S)(P) = \exists k \in \mathbb{N} : W_k$$

- ▶  $W$  est un transformateur de prédicats de  $\text{Pred}$  dans  $\text{Pred}$  défini par  $W(X) = (B \wedge wp(BS)(X)) \vee (\neg B \wedge P)$
- ▶  $W$  est monotone croissant (Si  $P \Rightarrow Q$ , alors  $W(P) \Rightarrow W(Q)$ ).
- ▶  $W$  admet un plus petit point-fixe d'après le Théorème de Tarski noté  $\mu W$  et défini par :
  - $F_0 = \text{FALSE}$
  - $\forall i \in \mathbb{N} : F_{i+1} = W(F_i)$

.....  
☺ Théorème

$$\forall i \in \mathbb{N} : F_{i+1} = W_i$$

---

.....  
☺ Théorème

$$\mu W = WP(S)(P)$$

---

.....

☒ Definition

$$WP(S)(P) = \mu\lambda X.((B \wedge wp(BS)(X)) \vee (\neg B \wedge P))$$

.....

- ▶ La suite  $W_k$  compte le nombre de boucles avant de terminer.
- ▶ La méthode de terminaison consiste à définir une borne de terminaison.
- ▶ En général, il faut une relation bien fondée telle que chaque boucle décroît strictement selon la relation bien fondée ;

# Summary

---

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
- 8 Logique de Hoare

## 9 Epilogue

.....

☒ Definition(Axiomes et règles d'inférence)

- ▶ Axiome d'affectation :  $\{P(e/x)\} \mathbf{X} := \mathbf{E(X)} \{P\}$ .
  - ▶ Axiome du saut :  $\{P\} \mathbf{skip} \{P\}$ .
  - ▶ Règle de composition : Si  $\{P\} \mathbf{S_1} \{R\}$  et  $\{R\} \mathbf{S_2} \{Q\}$ , alors  $\{P\} \mathbf{S_1 ; S_2} \{Q\}$ .
  - ▶ Si  $\{P \wedge B\} \mathbf{S_1} \{Q\}$  et  $\{P \wedge \neg B\} \mathbf{S_2} \{Q\}$ , alors  $\{P\} \mathbf{if B then S_1 then S_2 fi} \{Q\}$ .
  - ▶ Si  $\{P \wedge B\} \mathbf{S} \{P\}$ , alors  $\{P\} \mathbf{while B do S od} \{P \wedge \neg B\}$ .
  - ▶ Règle de renforcement/affaiblissement : Si  $P' \Rightarrow P$ ,  $\{P\} \mathbf{S} \{Q\}$ ,  $Q \Rightarrow Q'$ , alors  $\{P'\} \mathbf{S} \{Q'\}$ .
- .....

Exemple de preuve  $\{x = 1\} \mathbf{Z} := \mathbf{X}; \mathbf{X} := \mathbf{Y}; \mathbf{Y} := \mathbf{Z} \{y = 1\}$

- ▶ (1)  $x = 1 \Rightarrow (z = 1)[x/z]$  (propriété logique)
- ▶ (2)  $\{(z = 1)[x/z]\} \mathbf{Z} := \mathbf{X} \{z = 1\}$  (axiome d'affectation)
- ▶ (3)  $\{x = 1\} \mathbf{Z} := \mathbf{X} \{z = 1\}$  (Règle de renforcement/affaiblissement avec (1) et (2))
- ▶ (4)  $z = 1 \Rightarrow (z = 1)[y/x]$  (propriété logique)
- ▶ (5)  $\{(z = 1)[y/x]\} \mathbf{X} := \mathbf{Y} \{z = 1\}$  (axiome d'affectation)
- ▶ (6)  $\{z = 1\} \mathbf{X} := \mathbf{Y} \{z = 1\}$  (Règle de renforcement/affaiblissement avec (4) et (5))
- ▶ (7)  $z = 1 \Rightarrow (y = 1)[z/y]$  (propriété logique)
- ▶ (8)  $\{(z = 1)[x/z]\} \mathbf{Y} := \mathbf{Z} \{y = 1\}$  (axiome d'affectation)
- ▶ (9)  $\{z = 1\} \mathbf{Y} := \mathbf{Z} \{y = 1\}$  (Règle de renforcement/affaiblissement avec (7) et (8))
- ▶ (10)  $\{x = 1\} \mathbf{Z} := \mathbf{X}; \mathbf{X} := \mathbf{Y}; \{z = 1\}$  (Règle de composition avec 3 et 6)
- ▶ (11)  $\{x = 1\} \mathbf{Z} := \mathbf{X}; \mathbf{X} := \mathbf{Y}; \mathbf{Y} := \mathbf{Z} \{y = 1\}$  (Règle de composition avec 11 et 9)

.....

### ☒ Definition

$\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$  est défini par  $\forall s, t \in STATES : P(s) \wedge \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t)$

.....

.....

☺ Property(Correction du système axiomatique des programmes commentés)

- ▶ S'il existe une preuve construite avec les règles précédentes de  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ , alors  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$  est valide.
- ▶ Si  $\{P'\}\mathbf{S}\{Q'\}$  est valide et si le langage d'assertions est suffisamment expressif, alors il existe une preuve construite avec les règles précédentes de  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ .

.....

### ☒ Definition

Un langage d'assertions est la donnée d'un ensemble de prédicats et d'opérateurs de composition comme la disjonction et la conjonction ; il est muni d'une relation d'ordre partielle appelée implication. On le notera  $(\text{PRED}, \Rightarrow, \mathbf{false}, \mathbf{true}, \wedge, \vee) : (\text{PRED}, \Rightarrow, \mathbf{false}, \mathbf{true}, \wedge, \vee)$  est un treillis complet.

- .....

$$wlp(S)(Q) \stackrel{def}{=} (\forall t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t))$$

.....

- ▶  $loop(S) \equiv \overline{(\exists t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t)}$  (ensemble des états qui ne permettent pas à S de terminer)

.....



.....

☒ Definition

$$WLP(S)(P) = \nu \lambda X. ((B \wedge wlp(BS)(X)) \vee (\neg B \wedge P))$$

.....

.....

☺ Property

▶ Si  $P \Rightarrow Q$ , then  $wlp(S)(P) \Rightarrow wlp(S)(Q)$ .

---

.....

⊠ Definition triplets de Hoare

$$\{P\}\mathbf{S}\{Q\} \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wlp(S)(Q)$$

.....

.....

☒ Definition triplets de Hoare

$$\{P\}S\{Q\} \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wlp(S)(Q)$$

.....

☒ Definition (Axiomes et règles d'inférence)

- ▶ Axiome d'affectation :  $\{P(e/x)\}X := E(X)\{P\}$ .
  - ▶ Axiome du saut :  $\{P\}\text{skip}\{P\}$ .
  - ▶ Règle de composition : Si  $\{P\}S_1\{R\}$  et  $\{R\}S_2\{Q\}$ , alors  $\{P\}\text{if } B \text{ then } S_1 \text{ then } S_2 \text{ fi}\{Q\}$ .
  - ▶ Si  $\{P \wedge B\}S_1\{Q\}$  et  $\{P \wedge \neg B\}S_2\{Q\}$ , alors  $\{P\}\text{if } B \text{ then } S_1 \text{ then } S_2 \text{ fi}\{Q\}$ .
  - ▶ Si  $\{P \wedge B\}S\{P\}$ , alors  $\{P\}\text{while } B \text{ do } S \text{ od}\{P \wedge \neg B\}$ .
  - ▶ Règle de renforcement/affaiblissement : Si  $P' \Rightarrow P$ ,  $\{P\}S\{Q\}$ ,  $Q \Rightarrow Q'$ , alors  $\{P'\}S\{Q'\}$ .
- .....

- ▶  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$
- ▶  $\forall s \in STATES. P(s) \Rightarrow wlp(S)(Q)(s)$
- ▶  $\forall s \in STATES. P(s) \Rightarrow (\forall t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t))$
- ▶  $\forall s, t \in STATES. P(s) \wedge \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t)$
- ▶ Correction : Si on a construit une preuve de  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$  avec les règles de la logique de Hoare, alors  $P \Rightarrow wlp(S)(Q)$
- ▶ Complétude sémantique : Si  $P \Rightarrow wlp(S)(Q)$ , alors on peut construire une preuve de  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$  avec les règles de la logique de Hoare si on peut exprimer  $wlp(S)(P)$  dans le langage d'assertions.

.....  
☒ Definition triplets de Hoare Correction Totale

$$[P]\mathbf{S}[Q] \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wp(S)(Q)$$

.....

.....

### ☒ Definition triplets de Hoare Correction Totale

$$[P]\mathbf{S}[Q] \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wp(S)(Q)$$

.....

.....

### ☒ Definition (Axiomes et règles d'inférence)

- ▶ Axiome d'affectation :  $[P(e/x)]\mathbf{X} := \mathbf{E}(\mathbf{X})[P]$ .
  - ▶ Axiome du saut :  $[P]\mathbf{skip}[P]$ .
  - ▶ Règle de composition : Si  $[P]\mathbf{S}_1[R]$  et  $[R]\mathbf{S}_2[Q]$ , alors  $[P]\mathbf{if\ B\ then\ S_1\ then\ S_2\ fi}[Q]$ .
  - ▶ Si  $[P \wedge B]\mathbf{S}_1[Q]$  et  $[P \wedge \neg B]\mathbf{S}_2[Q]$ , alors  $[P]\mathbf{if\ B\ then\ S_1\ then\ S_2\ fi}[Q]$ .
  - ▶ Si  $[P(n+1)]\mathbf{S}[P(n)]$ ,  $P(n+1) \Rightarrow b$ ,  $P(0) \Rightarrow \neg b$ , alors  $[\exists n \in \mathbb{N}. P(n)]\mathbf{while\ B\ do\ S\ od}[P(0)]$ .
  - ▶ Règle de renforcement/affaiblissement : Si  $P' \Rightarrow P$ ,  $[P]\mathbf{S}[Q]$ ,  $Q \Rightarrow Q'$ , alors  $[P']\mathbf{S}[Q']$ .
- .....

### Correction

:

Si  $[P]\mathbf{S}[Q]$  est dérivé selon les règles ci-dessus, alors  $P \wp(S) \wp Q$ .

- ▶  $[P(e/x)]\mathbf{X} := \mathbf{E}(\mathbf{X})[P]$  est valide :  $wp(X := E)(P)/x = P(e/x)$ .
- ▶  $[\exists n \in \mathbb{N}. P(n)]\mathbf{while\ B\ do\ S\ od}[P(0)]$  : si  $s$  est un état de  $P(n)$  alors au bout de  $n$  boucles on atteint un état  $s_f$  tel que  $P(0)$  est vrai en  $s_f$ .

## Complétude

:

Si  $P \Rightarrow wp(S)(Q)$ , alors il existe une preuve de  $[P]\mathbf{S}[Q]$  construites avec les règles ci-dessus,

- ▶  $P \Rightarrow wp(X := E(X))(Q) : P \Rightarrow Q(e/x)$  et  $[Q(e/x)]\mathbf{X} := \mathbf{E}(\mathbf{X})[Q]$  constituent une preuve.
- ▶  $P \Rightarrow wp(\text{while})(Q) :$ 
  - On construit la suite de  $P(n)$  en définissant  $P(n) = W_n$ .
  - On vérifie que cela vérifie la règle du while.



# Summary

---

- 1 Software-based system engineering
- 2 Summary on verification techniques
- 3 Introduction to semantics for programming languages
- 4 Operational Semantics
- 5 Denotational Semantics
- 6 Equivalence des deux sémantiques
- 7 Transformateurs de prédicats
- 8 Logique de Hoare

## 9 Epilogue

MALG

Sémantique des langages de programmation (14 janvier 2026) (Dominique Méry)

- ▶ Trois notions importantes : syntaxe, sémantique et pragmatique
- ▶ La sémantique est le fondement des langages de programmation.
- ▶ La sémantique permet de donner une vue cohérente des programmes et des spécifications.
- ▶ Développement de techniques et d'outils de vérification et de validation de systèmes.