

---

# Cours MALG & MOVEX

## MOVEX2

## Théorie du Point-Fixe et ses Applications

---

Dominique Méry  
Telecom Nancy, Université de Lorraine  
(22 avril 2025 at 7:47 A.M.)

---

Année universitaire 2024-2025

---

### ① Transition Systems

Overview of Transition Systems as Modelling Tool  
Expression of transition systems

### ② Introduction of fixed-points

### ③ Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)

### ④ Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott

### ⑤ Treillis

### ⑥ Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

### ⑦ Applications

Lemme de Arden  
Grammaires algébriques  
Définition inductive

### 1 Transition Systems

Overview of Transition Systems as Modelling Tool

Expression of transition systems

### 2 Introduction of fixed-points

### 3 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)

### 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott

### 5 Treillis

### 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

### 7 Applications

## ① Transition Systems

Overview of Transition Systems as Modelling Tool

Expression of transition systems

## ② Introduction of fixed-points

## ③ Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)

## ④ Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott

## ⑤ Treillis

## ⑥ Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

## ⑦ Applications

Lemme de Arden

Grammaires algébriques

Définition inductive

### Transition system

A transition system  $\mathcal{ST}$  is given by a set of states  $\Sigma$ , a set of initial states  $Init$  and a binary relation  $\mathcal{R}$  on  $\Sigma$ .

- ▶ The set of terminal states  $Term$  defines specific states, identifying particular states associated with a termination state and this set can be empty, in which case the transition system does not terminate.

### event

A transformation is caused by an event that updates a temperature from a sensor, or a computer updating a computer variable, or an actuator sending a signal to a controlled entity.

An observation of a system  $S$  is based on the following points :

- ▶ a state  $s \in \Sigma$  allows you to observe elements and reports on these elements, such as the number of people in the meeting room or the capacity of the room :  $s(np)$  and  $s(cap)$  are two positive integers.
- ▶ a relationship between two states  $s$  and  $s'$  observes a transformation of the state  $s$  into a state  $s'$  and we will note  $s \xrightarrow{R} s'$  which expresses the observation of a relationship  $R$  :  
 $R = s(np) \in 0..s(cap)-1 \wedge s'(np) = s(np)+1 \wedge s'(cap) = s(cap)$  is an expression of  $R$  observing that one more person has entered the room.
- ▶ a trace  $s_0 \xrightarrow{R_0} s_1 \xrightarrow{R_1} s_2 \xrightarrow{R_2} s_3 \xrightarrow{R} \dots \xrightarrow{R_{i-1}} s_i \xrightarrow{R_i} \dots$  is a trace generated by the different observations  $R_0, \dots R_p, \dots$



- ▶ a language of assertions  $\mathcal{L}$  (or a language of formulae) is supposed to be given :  $\mathcal{P}(\Sigma)$  (the set of parts of  $\Sigma$ )
- ▶  $\varphi(s)$  (or  $s \in \hat{\varphi}$ ) means that  $\varphi$  is true in  $s$ .
- ▶ Properties of a system  $S$  which interest us are the state properties expressing that *nothing bad can happen*.
- ▶ Examples : *the number of people in the meeting room is always smaller than the maximum allowed by law* or *the computer variable storing the number of wheel revolutions is sufficient and no overflow will happen*.
- ▶ Safety properties : the partial correctness (PC) of an algorithm  $A$  with respect to its pre/post specifications (PC), the absence of errors at runtime (RTE) ...
- ▶ Properties are expressed in the language  $\mathcal{L}$  whose elements are combined by logical connectors or by instantiations of variable values in the computer sense called flexible.



- ▶ hypothesis : a system  $S$  is modelled by a set of states  $\Sigma$ , and  $\Sigma \stackrel{def}{=} \text{Var} \longrightarrow D$  where  $\text{Var}$  is the variable (or list of variables) of the system  $S$  and  $D$  is the domain of possible values of variables.
- ▶ The interpretation of a formula  $P$  in a state  $s \in \Sigma$  is denoted  $\llbracket P \rrbracket(s)$  or sometimes  $s \in \hat{P}$ .
- ▶ A distinction is made between flexible variable symbols  $x$  and logical variable symbols  $v$ , and constant symbols  $c$  are used.

- ①  $\llbracket x \rrbracket(s) = s(x) = x : x$  is the value of the variable  $x$  in  $s$ .
- ②  $\llbracket x \rrbracket(s') = s'(x) = x' : x'$  is the value of the variable  $x$  in  $s'$ .
- ③  $\llbracket c \rrbracket(s)$  is the value of  $c$  in  $s$ , in other words the value of the constant  $c$  in  $s$ .
- ④  $\llbracket \varphi(x) \wedge \psi(x) \rrbracket(s) = \llbracket \varphi(x) \rrbracket(s)$  et  $\llbracket \psi(x) \rrbracket(s)$  where *and* is the classical interpretation of symbol  $\wedge$  according to the truth table.
- ⑤  $\llbracket x = 6 \wedge y = x+8 \rrbracket(s) \stackrel{def}{=} \llbracket x \rrbracket(s) = \llbracket 6 \rrbracket(s)$  **and**  $\llbracket y \rrbracket(s) = \llbracket x \rrbracket(s) + \llbracket 8 \rrbracket(s) = (x = 6$  **and**  $y = x+8$  where  $y$  is a logical variable distinct of  $x$  and where  $\llbracket x \rrbracket(s) = s(x) = x$ .

- ▶  $\llbracket x \rrbracket(s)$  is the value of  $x$  in  $s$  and its value will be distinguished by the font used :  $x$  is the `tt` font of  $\text{\LaTeX}$  and  $x$  is the math font of  $\text{\LaTeX}$ .
- ▶ Using the name of the variable  $x$  as its current value, i.e.  $x$  and  $\llbracket x \rrbracket(s')$  is the value of  $x$  in  $s'$  and will be noted  $x'$ .
- ▶ The transition relation as a relation linking the state of the variables in  $s$  and the state of the variables in  $s'$  using the prime notation as defined by L. Lamport for TLA.
- ▶ Types of variable depending on whether we are talking about the computer variable, its value or whether we are defining constants such as  $np$ , the number of processes, or  $\pi$ , which designates the constant  $\pi$ .
- ▶ a current observation refers to a current state for both endurant and perdurant information data in the sense of the Dines Bjørner.

### flexible variable

A flexible variable  $x$  is a name related to a perdurant information according to a state of the (current observed) system :

- ▶  $x$  is the current value of  $x$  in other words the value at the observation time of  $x$ .
- ▶  $x'$  is the next value of  $x$  in other words the value at the next observation time of  $x$ .
- ▶  $x_0$  is the initial value of  $x$  in other words the value at the initial observation time of  $x$ .

A logical variable  $x$  is a name related to an endurant entity designated by this name.

### state property of a system

Let be a system  $S$  whose flexible variables  $x$  are the elements of  $\mathcal{Var}(S)$ . A property  $P(x)$  of  $S$  is a logical expression involving ,freely the flexible variables  $x$  and whose interpretation is the set of values of the domain of  $x$  :  $P(x)$  is true in  $x$ , if the value  $x$  satisfies  $P(x)$ .

For each property  $P(x)$ , we can associate a subset of  $D$  denoted  $\hat{P}$  and, in this case,  $P(x)$  is true in  $x$ . is equivalent to  $x \in \hat{P}$ .

### Examples of property

- ▶  $P_1(x) \stackrel{def}{=} x \in 18..22 : x \text{ is a value between 18 and 22 and } \hat{P}_1 = \{18, 19, 20, 21, 22\}.$
- ▶  $P_2(p) \stackrel{def}{=} p \subset PEOPLE \wedge card(p) \leq n : p \text{ is a set of persons and that set has at most } n \text{ elements and } \hat{P}_2 = \{p_1 \dots p_n\}.$  In this example, we use a logical variable  $n$  and a name for a constant  $PEOPLE$ .

basic set of a system  $S$

The list of symbols  $s_1, s_2, \dots, s_p$  corresponds to the list of basic set symbols in the D domain of S and  $s_1 \cup \dots \cup s_p \subseteq D$ .

constants of system S

The list of symbols  $c_1, c_2, \dots, c_q$  corresponds to the list of symbols for the constants of  $S$ .

## Examples of constant and set

- ▶ *fred* is a constant and is linked to the set *PEOPLE* using the expression  $fred \in PEOPLE$  which means that *fred* is a person from *PEOPLE*.
- ▶ *aut* is a constant which is used to express the table of authorisations associated with the use of vehicles. the expression  $aut \subset PEOPLE \times CARS$  where *CARS* denotes a set of cars.

### axiom of system S

An axiom  $ax(s,c)$  of S is a logical expression describing a constant or constants of S and can be defined as an expression depending on symbols of constants expressing a set-theoretical expression using symbols of sets and symbols of constants already defined.

### Examples of axiom

- ▶  $ax1(fred \in PEOPLE) : fred \text{ is a person from the set } PEOPLE$
- ▶  $ax2(suc \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \wedge (!i.i \in \mathbb{N} \Rightarrow suc(i) = i+1)) : The \text{ function } suc \text{ is the total function which associates any natural } i \text{ with its successor. successor}$
- ▶  $ax3(\forall A.A \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in \mathbb{N} \wedge suc[A] \subseteq A \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq A) : This \text{ axiom states the induction property for natural numbers. It is an instantiation of the fixed-point theorem.}$
- ▶  $ax4(\forall x.x = 2 \Rightarrow x+2 = 1) : This \text{ axiom poses an obvious problem of consistency and care should be taken not to use this kind of statement as axiom.}$

The list of axioms of  $S$  is called the axiomatics of  $S$  and is denoted  $AX(S, s, c)$  where  $s$  denotes the basic sets and  $c$  denotes the constants of  $S$ .

.....

.....

A property  $P(s, c)$  is a theorem for  $S$ , if  $AX(S, s, c) \vdash P(s, c)$  is a valid sequent.

.....

Let  $\mathcal{Var}(S)$  be the set of flexible variables of  $S$ . Let  $s$  be the basis sets and  $c$  the constants of  $S$ . An event  $e$  for  $S$  is a relational expression of the

form  $R(s, c, x, x')$  denoted  $BA(e)(s, c, x, x')$ .  
Théorie du Point-Fixé et ses Applications (22 avril 2025) (Dominique Méry)



.....

⊠ Definition(event-based model of a system)

Let  $\mathcal{Var}(S)$  be the set of flexible variables of  $S$  denoted  $x$ . Let  $s$  be the list of basis sets of the system  $S$ . Let  $c$  be the list of constants of the system  $S$ . Let  $D$  be a domain containing sets  $s$ . An event-based model for a system  $S$  is defined by

$$(AX(s, c), x, \text{VALS}, \text{Init}(x), \{e_0, \dots, e_n\})$$

where

- ▶  $AX(s, c)$  is an axiomatic theory defining the sets, constants and static properties of these elements.
- ▶  $\text{Init}(x)$  defines the possible initial values of  $x$ .
- ▶  $\{e_0, \dots, e_n\}$  is a finite set of events of  $S$  and  $e_0$  is a particular event present in each event-based model defined by  $BA(e_0)(x, x') = (x' = x)$ .

The event-based model is denoted

$$EM(s, c, x, \text{VALS}, \text{Init}(x) \{e_0, \dots, e_n\}) = (AX(s, c), x, \text{VALS}, \text{Init}(x), \{e_0, \dots, e_n\}).$$

- ▶  $Next(x, x')$  or  
 $Next(s, c, x, x') \stackrel{def}{=} BA(e_0)(s, c, x, x') \vee \dots \vee BA(e_n)(s, c, x, x')$ .
- ▶ the transitive reflexive closure of the relation  $Next^*(s, c, x_0, x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \vee x = x_0 \\ \vee Next(s, c, x_0, x) \\ \vee \exists xi \in VALS. Next^*(s, c, x_0, xi) \wedge Next(s, c, xi, x) \end{cases}$

.....  
☒ Definition(safety property)

A property  $P(x)$  is a safety property for the system  $S$ , if

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge Next^*(s, c, x_0, x) \Rightarrow P(x).$$

.....

## ① Transition Systems

Overview of Transition Systems as Modelling Tool

Expression of transition systems

## ② Introduction of fixed-points

## ③ Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)

## ④ Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott

## ⑤ Treillis

## ⑥ Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

## ⑦ Applications

Lemme de Arden

Grammaires algébriques

Définition inductive

```
ℓ0[Q := 0];  
ℓ1[R := X];  
IF ℓ5[Y > 0]  
    WHILE ℓ2[R ≥ Y]  
        ℓ3[Q := Q+1];  
        ℓ4[R := R-Y]  
    ENDWHILE  
ELSE  
    ℓ6[skip]  
ENDIF
```



☒ Definition(assertion)

Let  $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  a relational model  $M$  of a system  $\mathcal{S}$ . A property  $A$  is an assertional safety property for the system  $\mathcal{S}$ , if

$$\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

☒ Definition(relation)

Let  $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  a relational model  $M$  of a system  $S$ . A property  $R$  is a relational safety property for the system  $S$ , if

$$\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x).$$

- 1 Transition Systems
- 2 Introduction of fixed-points
- 3 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- 7 Applications

## Invariant for checking a safety property

- ▶ The event-based model for a system  $\mathcal{S}$  : is defined as  
 $EM(s, c, x, \text{VALS}, \text{Init}(x)\{e_0, \dots, e_n\}) =$   
 $(AX(s, c), x, \text{VALS}, \text{Init}(x), \{e_0, \dots, e_n\})$ .
- ▶  $\text{REACHABLE}(\mathcal{S}) = \{u | u \in \text{VALS} \wedge \exists u_0 \in \text{VALS}. (\text{Init}(u_0) \wedge \text{NEXT}^*(u_0, u))\}$  is the set of values reachable for the system  $\mathcal{S}$ .

Let consider  $A$  a safety property for a system  $\mathcal{S}$  :

- ▶  $\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow A(x)$ .  
if, and only if,
- ▶  $\text{REACHABLE}(\mathcal{S}) \subseteq \{u | u \in \text{VALS} \wedge A(u)\}$

$\text{REACHABLE}(\mathcal{S})$  satisfies the following properties

- ▶  $\{u | u \in \text{VALS} \wedge \text{Init}(u)\} \subseteq \text{REACHABLE}(\mathcal{S})$
- ▶  $\text{NEXT}[\text{REACHABLE}(\mathcal{S})] \subseteq \text{REACHABLE}(\mathcal{S})$

$$\text{▶ } \forall U. \left( \begin{array}{c} U \subseteq \text{VALS} \\ \{u | u \in \text{VALS} \wedge \text{Init}(u)\} \subseteq U \\ \wedge \\ \text{NEXT}[U] \subseteq U \end{array} \right) \Rightarrow \text{REACHABLE}(\mathcal{S}) \subseteq U$$

$$\text{NEXT}[U] = \{v | v \in \Sigma \wedge \exists u. (u \in U \wedge \text{Next}(u, v))\}$$

### Principle for exhaustive checking

Let a property  $A$  pour  $\mathcal{S}$

▶  $\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$

if, and only if,

▶  $\text{REACHABLE}(\mathcal{S}) \subseteq \{u \mid u \in \text{VALS} \wedge A(u)\}$

▶  $\text{REACHABLE}(\mathcal{S}) = \{u \mid u \in \text{VALS} \wedge \text{Init}(u)\} \cup \text{NEXT}[\text{REACHABLE}(\mathcal{S})]$

▶  $F \in \mathcal{P}(\text{VALS}) \longrightarrow \mathcal{P}(\text{VALS})$

▶  $F(U) = \{u \mid u \in \text{VALS} \wedge \text{Init}(u)\} \cup \text{NEXT}[U]$

▶  $F(\text{REACHABLE}(\mathcal{S})) = \text{REACHABLE}(\mathcal{S})$



- ▶ Solving equations as  $X = \mathcal{F}(X)$
- ▶ Finding and even better computing solutions when they exist.

### Theorem of Picard

Let  $(E, d)$  a complete metric space and  $f : E \longrightarrow E$  a contracting function, ie there exists  $k \in [0, 1[$  such that for any  $(x, y) \in E$ ,  $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ . Then  $f$  belongs a unique fixed-point  $\ell$ .

Moreover, every sequence defined by  $u_0 \in I$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , converges to the unique fixed-point with the following estimates :

- ▶  $d(u_n, \ell) \leq k^n \times d(u_0, \ell)$
- ▶  $d(u_n, \ell) \leq k/(1-k) \times d(u_n, u_{n-1})$

## Fixed-point theorem 2 : inductive structure

---

```
struct liste {  
    int val;  
    struct liste *next  
}  
  
int longueur(struct liste *l)  
{  
    if (l == NIL) {return(0);}   
    else {return(1 + longueur(l -> next));}
```

```
#include <stdio.h>
int f (int x, int y)
{
    int i;
    if (x==y)
        {i = y+1;return(i);}
    else
        {i=f(x, f(x-1,y+1));return(i);}
}
int main ()
{
    int a = 2;
    int b = 2;
    printf("Valeur:%d\n", f(a,b));
}
```

```
fun A(0,y) = y + 1  
| A(x,0) = A(x-1,1)  
| A(x,y) = A(x-1,A(x,y-1));  
val A = fn : int * int -> int
```

### Property to prove

▶  $\forall (x,y) \in \text{nat} \times \text{nat} : (x,y) \in \text{Domaine}(A)$

ou

▶  $\forall (x,y) \in \text{nat} \times \text{nat} : P(x,y)$  avec  
 $P(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} ((x,y) \in \text{domaine}(A)).$

### Méthode

- ① Choose a well founded structure  $nat : (nat \times nat, <_{lex})$
- ② Use the principle of induction for the well founded structure
  - ①  $\forall y \in nat : P(0, y)$
  - ②  $\forall x \in nat : x \neq 0 : P(x, 0)$
  - ③  $\forall (x, y) \in nat \times nat : x \neq 0 : y \neq 0 : P(x, y)$

- Question : what is the meaning of the next function ?  
 $f(x, y) = \text{if } x = y \text{ then } y+1 \text{ else } f(x, f(x-1, y+1)) \text{ fi}$

- 1 Transition Systems
- 2 Introduction of fixed-points
- 3 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)**
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- 7 Applications



Une structure partiellement ordonnée  $(X, \sqsubseteq)$  est définie par un ensemble  $X$  et une relation d'ordre partiel  $\sqsubseteq$ .

### Relation d'ordre partiel $\sqsubseteq$

- ▶  $\sqsubseteq \subseteq X \times X$
- ▶  $\{(a, a) \mid a \in X\} \subseteq \sqsubseteq$  (réflexivité)
- ▶  $\forall (a, b). ((a \in X \wedge b \in X \wedge (a \sqsubseteq b) \wedge (b \sqsubseteq a)) \Rightarrow (a = b))$   
(anti-symétrie)
- ▶  $(\sqsubseteq; \sqsubseteq) \subseteq \sqsubseteq$  (transitivité)

Soit une structure partiellement ordonnée  $(X, \sqsubseteq)$ . Soit une fonction totale  $F$  sur  $X$  à valeurs dans  $X$ . On dit que  $fp \in X$  est un point-fixe de  $F$ , si  $F(fp) = fp$ .

### Point-fixe $fp$ de $F$

- ▶  $fp \in X$
- ▶  $F \in X \longrightarrow X \quad F(fp) = fp$

### Structure partiellement ordonnée inductive (ou CPO)

Une structure partiellement ordonnée inductive (ou un CPO Complete Partially Ordered Set) est une structure partiellement ordonnée  $(D, \sqsubseteq)$  telle que :

- 1  $D$  admet un plus petit élément noté  $\perp_D : \forall d \in D. \perp_D \sqsubseteq d$ .
- 2 tout ensemble dirigé  $X$  de  $D$  ( $X$  est dirigé, si  $X$  est non-vide et si  $\forall x, y \in X. \exists z \in X. [x \sqsubseteq z \text{ et } y \sqsubseteq z]$ ) admet une borne supérieure dans  $D$ .

### Chaîne (ou structure totalement ordonnée)

Une structure partiellement ordonnée inductive est une chaîne, si :

$$\forall d, d' \in D, d \sqsubseteq d' \text{ ou } d' \sqsubseteq d.$$

### Propriété de réduction aux chaines (théorème)

Une structure partiellement ordonnée inductive (ou un CPO Complete Partially Ordered Set, ou une structure partiellement ordonnée complète (inductive)) est une structure partiellement ordonnée  $(D, \sqsubseteq)$  telle que :

- 1  $D$  admet un plus petit élément noté  $\perp_D : \forall d \in D. \perp_D \sqsubseteq d$ .
- 2 toute chaîne  $C$  de  $D$  admet une borne supérieure dans  $D$ .

- ▶ Montrer qu'une structure est une structure partiellement ordonnée inductive revient à ne montrer la propriété que pour les chaînes de la structure.
- ▶ La démonstration utilise l'axiome du choix qui permet de construire une chaîne à partir d'un ensemble dirigé.

### Flat CPO

Soit  $D$  un ensemble et  $\perp$  un élément qui n'est pas élément de  $D$ . On définit l'ordre partiel sur  $D \cup \{\perp\} \sqsubseteq$  comme suit :

$$\forall d \in D \cup \{\perp\}. d \sqsubseteq d$$

$$\forall d \in D \cup \{\perp\}. \perp \sqsubseteq d$$

On notera  $D^\perp = D \cup \{\perp\}$ .  $(D^\perp, \sqsubseteq)$  est un CPO.

### Ensemble des fonctions partielles $A \rightarrowtail B$

Soit  $A$  un ensemble et  $B$  un autre ensemble. On notera  $\mathfrak{F}(A, B)$  ou  $A \rightarrowtail B$  l'ensemble des fonctions de  $A$  dans  $B$ .

$f \sqsubseteq g$  si, et seulement si,  $(\text{dom}(f) \subseteq \text{dom}(g))$  et  $(\forall x \in \text{dom}(f). f(x) = g(x))$ .

### Propriété de $(A \rightarrowtail B, \sqsubseteq)$

$(A \rightarrowtail B, \sqsubseteq)$  est une structure partiellement ordonnée inductive où  $\perp_{A \rightarrowtail B}$  est la fonction définie nulle part.

### Ensemble des parties d'un ensemble

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble des parties de  $E$ .  $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$  est une structure partiellement ordonnée inductive.

Soit  $(A, \sqsubseteq)$  une structure partiellement ordonnée et  $D \subseteq A$ .

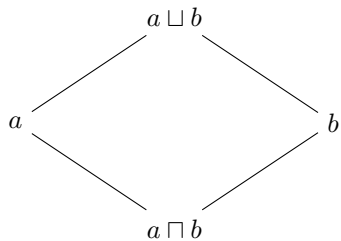
- ▶  $x$  est un majorant de  $D$ , si  $\forall d \in D : d \sqsubseteq x$
- ▶  $x$  est un minorant de  $D$ , si  $\forall d \in D : x \sqsubseteq d$
- ▶ La borne supérieure d'une partie de  $D$  est le plus petit des majorants.
- ▶ La borne inférieure d'une partie de  $D$  est le plus grand des minorants.
- ▶  $x \sqcup y$  est la borne supérieure de  $\{x, y\}$ , lorsqu'elle existe.
- ▶  $x \sqcap y$  est la borne inférieure de  $\{x, y\}$ , lorsqu'elle existe.
- ▶  $Sup(D) = \sqcup D = \vee D$  : borne supérieure de  $D$  quand elle existe.
- ▶  $Min(D) = \sqcap D = \wedge D$  : borne inférieure de  $D$  quand elle existe.





►  $D = \{a, b, c, d\}$

►  $D^\perp = \{a, b, c, d\}$



## ✓ Illustration ds notations

---



## ✓ Illustration ds notations

---





- ▶ ANY désigne l'ensemble des entiers
- ▶ NON-POS désigne l'ensemble des entiers négatifs ou nuls
- ▶ POS désigne l'ensemble des entiers positifs non nuls.
- ▶ ZERO est l'ensemble contenant uniquement 0.

- Une fonction  $f$  de  $(D_1, \sqsubseteq)$ , dans  $(D_2, \sqsubseteq)$  est monotone croissante, si :

$$\forall d, d' \in D_1, d \sqsubseteq_1 d' \Rightarrow f(d) \sqsubseteq_2 f(d')$$

- Un ouvert  $O$  de  $D$  est une partie de  $D$  satisfaisant :
- ① Si  $x \in O$  et  $x \sqsubseteq y$ , alors  $y \in O$ .
  - ② Si  $X$  est une partie dirigée de  $D$  telle que  $\sqcup X \in O$ , alors  $X \cap O \neq \emptyset$ .

- ▶ Une fonction  $f$  est continue pour une topologie donnée, si l'image réciproque de tout ouvert  $O$  est un ouvert : si  $O$  est un ouvert,  $f^{-1}(O)$  est un ouvert.
- ▶ Théorème : Soit  $f$  une fonction définie de  $(D, \sqsubseteq)$  dans  $(D', \sqsubseteq')$ .  $f$  est continue pour la topologie de Scott si, et seulement si, pour tout ensemble dirigé  $X$  de  $D$ ,  $f(\sqcup X) = \sqcup f(X)$ .
- ▶ Une première conséquence du choix de la topologie de Scott est que toute fonction continue est monotone.

- 1 Transition Systems
- 2 Introduction of fixed-points
- 3 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- 7 Applications



### Théorème de Kleene

Soit  $f$  une fonction continue sur  $(D, \sqsubseteq)$  à valeurs dans  $(D, \sqsubseteq)$  où  $(D, \sqsubseteq)$  est une structure partiellement ordonnée inductive.

Alors il existe un élément  $x$  de  $D$  tel que

$$\begin{cases} f(x) = x \\ \forall y \in D : (f(y) = y) \Rightarrow (x \sqsubseteq y) \end{cases}$$

et on le notera  $\mu f$ .



- $x \stackrel{def}{=} \bigvee_{i \geq 0} f^i$  où  $\forall i \in \text{nat}^* : f^{i+1} = f(f^i)$  et  $f^0 = \perp_D$  :  
 $x$  existe car  $(D, \sqsubseteq)$  est une structure inductive.

►  $x \stackrel{def}{=} \bigvee_{i \geq 0} f^i$  où  $\forall i \in \text{nat}^* : f^{i+1} = f(f^i)$  et  $f^0 = \perp_D$  :  
 $x$  existe car  $(D, \sqsubseteq)$  est une structure inductive.

►  $x$  est un point-fixe de  $f$  :

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{\text{definition}}{=} f\left(\bigvee_{i \geq 0} f^i\right) \stackrel{\text{continuite}}{=} \bigvee_{i \geq 0} f(f^i) \\ &\stackrel{\text{definition de la suite}}{=} \bigvee_{i \geq 0} f^{i+1} \stackrel{\text{renommage}}{=} \bigvee_{j > 0} f^j \\ &\stackrel{\text{propriete de } \perp_D}{=} \perp_D \sqcup \bigvee_{j > 0} f^j = x \end{aligned}$$

- $x \stackrel{def}{=} \bigvee_{i \geq 0} f^i$  où  $\forall i \in \text{nat}^* : f^{i+1} = f(f^i)$  et  $f^0 = \perp_D$  :  
 $x$  existe car  $(D, \sqsubseteq)$  est une structure inductive.

- $x$  est un point-fixe de  $f$  :

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{\text{definition}}{=} f\left(\bigvee_{i \geq 0} f^i\right) \stackrel{\text{continuite}}{=} \bigvee_{i \geq 0} f(f^i) \\ &\bigvee_{i \geq 0} f(f^i) \stackrel{\text{definition de la suite}}{=} \bigvee_{i \geq 0} f^{i+1} \stackrel{\text{renommage}}{=} \\ &\bigvee_{j > 0} f^j \stackrel{\text{propriete de } \perp_D}{=} \perp_D \sqcup \bigvee_{j > 0} f^j = x \end{aligned}$$

- $x$  est le plus petit point-fixe de  $F$ .

Soit  $y$  un autre point-fixe de  $f$  :

- $\perp_D \sqsubseteq y$
- Si  $\forall j \in \{0, \dots, i-1\} : f^j \sqsubseteq y$ , alors  $f^i \sqsubseteq y$ .
- $\forall j \in \text{nat} : f^j \sqsubseteq y$

D'où  $x \sqsubseteq y$ .

□

## Un exemple de fonction

---

```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if  (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x <0 */
       return(f5(-x));}
      }
}
```

```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x <0 */
       return(f5(-x));}
      }
}
```

- ▶ Déterminer l'espace du problème :  
 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ Définir la fonctionnelle définissant l'équation du problème :  
 $\mathcal{F} \in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$

```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x <0 */
       return(f5(-x));}
      }
}
```

- ▶ Déterminer l'espace du problème :  
 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ Définir la fonctionnelle définissant l'équation du problème :  
 $\mathcal{F} \in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$
- ▶  $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$  est un CPO pour l'ordre *moins défini* que.



```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x <0 */
       return(f5(-x));}
      }
}
```

- ▶ Déterminer l'espace du problème :  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ Définir la fonctionnelle définissant l'équation du problème :  $\mathcal{F} \in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$
- ▶  $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$  est un CPO pour l'ordre *moins défini* que.
- ▶  $\mathcal{F}$  est continue pour la topologie de Scott

```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x <0 */
        return(f5(-x));}
      }
}
```

- ▶ Déterminer l'espace du problème :  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ Définir la fonctionnelle définissant l'équation du problème :  $\mathcal{F} \in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$
- ▶  $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$  est un CPO pour l'ordre *moins défini* que.
- ▶  $\mathcal{F}$  est continue pour la topologie de Scott
- ▶  $f5$  satisfait l'équation  $\mathcal{F}(f5) = f5$

```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x < 0 */
       return(f5(-x));}
      }
}
```

- ▶ Déterminer l'espace du problème :  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ Définir la fonctionnelle définissant l'équation du problème :  $\mathcal{F} \in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$
- ▶  $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$  est un CPO pour l'ordre *moins défini* que.
- ▶  $\mathcal{F}$  est continue pour la topologie de Scott
- ▶  $f5$  satisfait l'équation  $\mathcal{F}(f5) = f5$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \text{if } (x == 0) \text{ then } 0 \text{ elseif } (x > 0) \text{ then } 2 - f(1-x) \text{ else } f(-x) \text{ fi}$$

# Développer la solution par itération

---

▶  $\mathcal{F}^0 = \{ \}$

▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$

▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$



- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^4) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^4) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^6 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^5) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^4) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^6 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^5) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^7 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^6) = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^4) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^6 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^5) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^7 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^6) = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$
- ▶ ...

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^4) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^6 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^5) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^7 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^6) = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$
- ▶ ...
- ▶  $g(x) = \text{if odd}(x) \text{ then } 2 \text{ else } 0 \text{ fi}$  est solution de cette équation et  $\mu\mathcal{F} \sqsubseteq g$  mais on doit montrer que  $\mu\mathcal{F} = g$

- ▶ Un prédicat  $P$  sur un ensemble inductif  $(D, \sqsubseteq)$  (CPO) est admissible, si, pour tout ensemble dirigé  $A$  de  $D$ , si, pour tout  $a$  de  $A$   $P(a)$ , alors  $P(\bigvee A)$ .
- ▶ Principe d'induction du point fixe :  
Soit  $(D, \sqsubseteq)$  une structure inductive,  $P$  un prédicat admissible sur  $D$ ,  
 $F$  une fonction continue de  $D$  dans  $D$ .  
Si
  - ①  $P(\perp_D)$
  - ② Soit  $d \in D$  tel que  $P(d)$  :

⋮

$$P(F(d)).$$

Alors  $P(\mu F)$ .

- ▶  $P(x)$  défini par  $x = a$  est admissible.
- ▶  $P(x)$  défini par  $x \sqsubseteq a$  est admissible.
- ▶ Si  $f_i$  et  $g_i$  sont deux suites de fonctions continues sur un CPO  $(D, \sqsubseteq)$ , alors  $\bigwedge_i f_i(x) \sqsubseteq g_i(x)$  est un prédicat admissible.

### Fonction 91 de McCarthy

- ▶  $F(f)(x) = \text{si } 100 < x \text{ alors } x-10 \text{ sinon } f(f(x+11))$  *fi* et  $g(x) = \text{si } 100 < x \text{ then } x-10 \text{ sinon } 91$  *fi*. Montrez que  $\mu F \sqsubseteq g$ .



- ▶  $F(f)(x) = \text{si } x > 100 \text{ alors } x-10 \text{ sinon } f(f(x+11)) \text{ fi}$
- ▶ et  $g(x) = \text{si } x > 100 \text{ then } x-10 \text{ sinon } 91 \text{ fi.}$
- ▶ On peut montrer que  $\mu f \sqsubseteq g$ .
- ▶ Puis on peut en déduire que  $\mu f = g$ , en montrant que la fonction  $\mu f$  est totale.

$\mathcal{F}(f)(x) = \text{if } (x == 0) \text{ then } 0 \text{ elseif } (x > 0) \text{ then } 2 - f(1-x) \text{ else } f(-x) \text{ fi}$

- ▶  $g(x) = \text{if } \text{odd}(x) \text{ then } 2 \text{ else } 0 \text{ fi}$  est solution de cette équation
- ▶ Utilisation de  $P(f) \stackrel{\text{def}}{=} f \sqsubseteq g$
- ▶ Montrer que  $\text{dom}(\mu f) = \mathbb{N}$  :
  - $\mathcal{F}^{2n} = \{(p, v_p) | 0 \leq p < n \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(p, v_p) | 0 > p \geq -(n-1) \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(n, g(n))\}$
  - $\mathcal{F}^{2n+1} = \{(p, v_p) | 0 \leq p < n \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(p, v_p) | 0 > p \geq -(n-1) \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(n, g(n)), (-n, g(-n))\}$
  - $\mu \mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup \mathcal{F}^3 \cup \dots \cup \mathcal{F}^{2n} \cup \mathcal{F}^{2n+1} \dots$
  - Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathcal{F}^{2p} \cup \mathcal{F}^{2p+1}$  par construction de cette suite.

- 1 Transition Systems
- 2 Introduction of fixed-points
- 3 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- 7 Applications

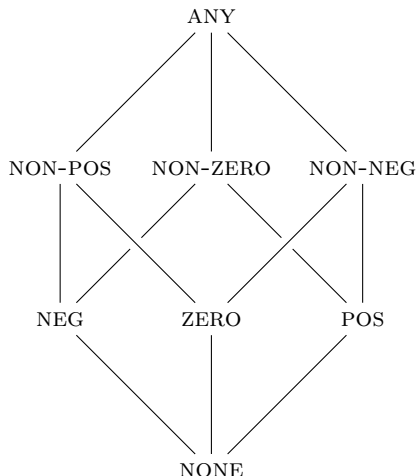
### ☒ Definition

Un treillis complet  $(L, \sqsubseteq)$  est un treillis satisfaisant les propriétés suivantes :

- 1 Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne supérieure notée  $\sqcup A$ .
- 2 Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne inférieure notée  $\sqcap A$ .

### ☼ Exemple

- 1 Un exemple simple est la structure  $(\mathcal{P}(E), \subseteq, \emptyset, \cup, E, \cap)$  associée à l'ensemble des parties d'un ensemble  $E$ .
- 2 Treillis des signes est un treillis complet  
 $Signs =$   
 $\{\text{NONE}, \text{ZERO}, \text{NON-ZERO}, \text{ANY}, \text{POS}, \text{NEG}, \text{NON-NEG}, \text{NON-POS}\}$   
 $(Signs, \sqsubseteq)$
- 3 Treillis des intervalles
  - $\mathbb{I}(\mathbb{Z}) = \{\perp\} \cup \{[l, u] \mid l \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, u \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, l \leq u\}$
  - $[l_1, u_1] \sqsubseteq [l_2, u_2]$  si, et seulement si,  $l_2 \leq l_1$  et  $u_1 \leq u_2$ .
  - $(\mathbb{I}(\mathbb{Z}), \sqsubseteq)$  est un treillis complet



- ▶ ANY désigne l'ensemble des entiers
- ▶ NON-POS désigne l'ensemble des entiers négatifs ou nuls
- ▶ POS désigne l'ensemble des entiers positifs non nuls.
- ▶ ZERO est l'ensemble contenant uniquement 0.

- ▶  $\mathbb{I}(\mathbb{Z}) = \{\perp\} \cup \{[l, u] \mid l \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, u \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, l \leq u\}$
- ▶  $[l_1, u_1] \sqsubseteq [l_2, u_2]$  si, et seulement si,  $l_2 \leq l_1$  et  $u_1 \leq u_2$ .
- ▶  $(\mathbb{I}(\mathbb{Z}), \sqsubseteq)$  est une structure partiellement ordonnée.
- ▶
  - ①  $[l_1, u_1] \sqcup [l_2, u_2] = [\min(l_1, l_2), \max(u_1, u_2)]$
  - ②  $[l_1, u_1] \sqcap [l_2, u_2] = \begin{cases} [\max(l_1, l_2), \min(u_1, u_2)] \\ \perp, \text{ si } \max(l_1, l_2) > \min(u_1, u_2) \end{cases}$
- ▶  $(\mathbb{I}(\mathbb{Z}), \sqcup)$  est un treillis complet.







- 1 Transition Systems
- 2 Introduction of fixed-points
- 3 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski**
- 7 Applications

Pour une fonction  $f$  définie sur un treillis  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$  et à valeurs dans  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$ .

### Définition

- ▶ on appelle pré-point-fixe de  $f$ , tout élément  $x$  de  $L$  satisfaisant la propriété  $f(x) \sqsubseteq x$
- ▶ on appelle post-point-fixe de  $f$ , tout élément  $x$  de  $L$  satisfaisant  $x \sqsubseteq f(x)$ .
- ▶  $PostFIX(f) = \{x | x \in L \wedge x \sqsubseteq f(x)\}$  : l'ensemble des post-points-fixes de  $f$ .
- ▶  $PreFIX(f) = \{x | x \in L \wedge f(x) \sqsubseteq x\}$  : l'ensemble des pré-points-fixes de  $f$ .
- ▶  $FIX(f) = \{x | x \in L \wedge f(x) = x\}$  : l'ensemble des points-fixes de  $f$ .

### Théorème de Knaster-Tarski (I)

Soit  $f$  une fonction monotone croissante sur un treillis complet  $(T, \perp, \top, \bigvee, \bigwedge)$ . Alors il existe un plus petit point fixe et un plus grand point fixe pour  $f$ .

- ▶  $\mu f$  désigne le plus petit point fixe de  $f$ .
- ▶  $\nu f$  désigne le plus grand point fixe de  $f$ .
- ▶  $\mu f$  vérifie les propriétés suivantes :  $f(\mu f) = \mu f$  et  $\forall x \in T. f(x) \sqsubseteq x \Rightarrow \mu f \sqsubseteq x$  ( $\mu f$  est la borne inférieure des prépoints fixes de  $f$  ou  $\bigwedge(Pre(f))$ ).
- ▶  $\nu f$  vérifie les propriétés suivantes :  $f(\nu f) = \nu f$  et  $\forall x \in T. x \sqsubseteq f(x) \Rightarrow x \sqsubseteq \nu f$  ( $\nu f$  est la borne supérieure des postpoints fixes de  $f$  ou  $\bigvee(Post(f))$ ).

Posons  $y = \bigwedge \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$  et montrons que  $y$  est un point fixe de  $f$  et que  $y$  est le plus petit point fixe de  $f$ .

①  $f(y) \sqsubseteq y$

- Pour tout  $x$  de  $\{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$ ,  $y \sqsubseteq x$
- $f(y) \sqsubseteq f(x)$  (par monotonie de  $f$ ).
- $f(x) \sqsubseteq x$  (par définition de  $x$ ).
- $f(y) \sqsubseteq x$  (par déduction).
- $f(y) \sqsubseteq \bigwedge \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$  (par définition de la borne inférieure,  $f(y)$  est un minorant).
- $f(y) \sqsubseteq y$

②  $y \sqsubseteq f(y)$

- $f(y) \sqsubseteq y$  (par le cas 1)
- $f(f(y)) \sqsubseteq f(y)$  (par monotonie de  $f$ )
- $f(y) \in \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- $y \sqsubseteq f(y)$  (par définition de la borne inférieure)

③ Conclusion :  $f(y) = y$  ou  $y \in \text{FIX}(f)$ .

- ▶  $f(y) = y$  et  $z$  tel que  $f(z) = z$ 
  - $f(z) = z$  (par hypothèse sur  $z$ )
  - $f(z) \sqsubseteq z$  (par affaiblissement de l'égalité)
  - $z \in \{x | f(x) \sqsubseteq x\}$  (par définition de cet ensemble)
  - $y \sqsubseteq z$  (par construction)
- ▶  $y$  est le plus petit point fixe de  $f$ .

### $\text{lfp}(f)$ et $\text{gfp}(f)$

- ▶  $\mu f = \text{lfp}(f) = \bigwedge \{x | f(x) \sqsubseteq x\}$
  - ▶  $\nu f = \text{gfp}(f) = \bigvee \{x | x \sqsubseteq f(x)\}$
- 
- ▶  $\text{lfp}(f)$  signifie *least fixed-point*
  - ▶  $\text{gfp}(f)$  signifie *greatest fixed-point*



- ▶  $\top = \sqcup \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $gfp(f) = \nu f = \sqcup \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$
- ▶  $lfp(f) = \mu f = \sqcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $\perp = \sqcap \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$

►  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)



- ▶  $x \in \text{pre}(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in \text{pre}(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in \text{pre}(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )

- ▶  $x \in \text{pre}(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in \text{pre}(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in \text{pre}(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )
- ▶  $f(\mu f) \in pre(f)$  (définition des pré-points-fixes)

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )
- ▶  $f(\mu f) \in pre(f)$  (définition des pré-points-fixes)
- ▶  $\mu f \leq f(\mu f)$  (définition de  $\mu f$ )
- ▶  $\mu f = f(\mu f)$  (définition de  $\mu f$  et propriété précédente)

### Version constructive du théorème de Knaster-Tarski

Soit  $f$  une fonction monotone croissante sur un treillis complet  $(T, \perp, \top, \vee, \wedge)$ . Alors

- 1 La structure formée des points fixes de  $f$  sur  $T$ ,  $(fp(f), \sqsubseteq)$  est un treillis complet non-vide.

$$(fp(f) = \{x \in T : f(x) = x\})$$

- 2  $lfp(f) \stackrel{def}{=} \bigvee_{\alpha} f^{\alpha}$  est le plus petit point fixe de  $f$  où :

$$\left\{ \begin{array}{lll} & f^0 & \stackrel{def}{=} \perp \\ \alpha \text{ ordinal successeur} & f^{\alpha+1} & \stackrel{def}{=} f(f^{\alpha}) \\ \alpha \text{ ordinal limite} & f^{\alpha} & \stackrel{def}{=} \bigvee_{\beta < \alpha} f^{\beta} \end{array} \right.$$

- 3  $gfp(f) \stackrel{def}{=} \bigwedge_{\alpha} f_{\alpha}$  est le plus grand point fixe de  $f$  où

$$\left\{ \begin{array}{lll} & f_0 & \stackrel{def}{=} \top \\ \alpha \text{ ordinal successeur} & f_{\alpha+1} & \stackrel{def}{=} f(f_{\alpha}) \\ \alpha \text{ ordinal limite} & f_{\alpha} & \stackrel{def}{=} \bigwedge_{\beta < \alpha} f_{\beta} \end{array} \right.$$

- ① Transition Systems
- ② Introduction of fixed-points
- ③ Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- ④ Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- ⑤ Treillis
- ⑥ Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- ⑦ Applications
  - Lemme de Arden
  - Grammaires algébriques
  - Définition inductive

## 1 Transition Systems

Overview of Transition Systems as Modelling Tool  
Expression of transition systems

## 2 Introduction of fixed-points

## 3 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)

## 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott

## 5 Treillis

## 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

## 7 Applications

Lemme de Arden

Grammaires algébriques

Définition inductive



- ▶ Soit l'ensemble des parties de  $\Sigma^*$  munies des opérations classiques des ensembles et l'opération de concaténation.
- ▶ La fonction  $\mathcal{F}$  définie sur cet ensemble à valeur dans le même ensemble associe à tout ensemble un ensemble obtenu par application des opérations ensemblistes et de la concaténation :  
$$\mathcal{F}(X) = A.X \cup B$$
- ▶  $(\mathcal{P}(\Sigma^*), \emptyset, \Sigma^*, \cup, \cap)$  est un treillis complet.
- ▶  $\mathcal{F}$  admet un plus petit point fixe qui est le langage régulier caractérisé par l'expression régulière  $a^*b$

## 1 Transition Systems

Overview of Transition Systems as Modelling Tool  
Expression of transition systems

## 2 Introduction of fixed-points

## 3 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)

## 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott

## 5 Treillis

## 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

## 7 Applications

Lemme de Arden

Grammaires algébriques

Définition inductive

- ▶ Soit une grammaire algébrique  $G = (N, T, P, S)$  définissant un langage sur  $T$ .
- ▶ On définit pour cette grammaire un opérateur sur  $T^*$  l'ensemble des mots finis sur  $T$ , noté  $\mathcal{F}_G$  comme suit :
  - $N = \{X_1, \dots, X_n\}$
  - $S = X_1$  et  $X = (X_1, \dots, X_n)$ .
  - $\mathcal{F}_G(X)$  est construit par application des règles de  $P$  pour chaque non terminal  $X_i$
  - Si  $X_i \longrightarrow v_1 + \dots + v_p$ , on obtient l'ensemble par remplacement des  $X_k$  dans les  $v_p$ .
- ▶ Exemple :
  - $N = \{X, Y, Z\}$
  - $T = \{a, b\}$
  - $P = \{X \longrightarrow aYZb, Y \longrightarrow aY, Z \longrightarrow Zb, Y \longrightarrow a, Z \longrightarrow b\}$
  - $$F(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} aYZb \\ aY \cup \{a\} \\ Zb \cup \{b\} \end{pmatrix}$$

- ▶  $F$  est monotone croissante sur  $(\{X, Y, Z, a, b\}^*)^3$ .
- ▶ 
$$\begin{pmatrix} X = aYZb \\ Y = aY \cup \{a\} \\ Z = Zb \cup \{b\} \end{pmatrix}$$
- ▶  $\mu F$  est le plus petit point fixe.
- ▶  $L(G) = \pi_1^3(\mu F)$

## 1 Transition Systems

Overview of Transition Systems as Modelling Tool  
Expression of transition systems

## 2 Introduction of fixed-points

## 3 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)

## 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott

## 5 Treillis

## 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

## 7 Applications

Lemme de Arden  
Grammaires algébriques  
Définition inductive

- ▶ L'ensemble  $\mathcal{EVEN}$  des nombres naturels pairs est le plus petit ensemble stable par application des règles suivantes :
  - ①  $0 \in \mathcal{EVEN}$
  - ② Si  $n \in \mathcal{EVEN}$ , alors  $n+2 \in \mathcal{EVEN}$
- ▶ Opérateur induit :  $\mathcal{F}(X) = \{0\} \cup \{n+2 | n \in X\}$
- ▶  $\mathcal{F} \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{N})$
- ▶  $\mathcal{F}(\mathcal{EVEN}) = \mathcal{EVEN}$  et  $\mathcal{EVEN} = \mu\mathcal{F}$ .

- ▶ Une définition inductive  $\mathcal{I}$  est une structure  $(U, \mathcal{F}, \perp, \sqcup)$  où
  - $U$  est un ensemble appelé l'univers
  - $\mathcal{R}$  est un ensemble de règles de la forme **Si**  $P$ , **alors**  $C$  où  $P \subseteq U$  et  $C \in U$ .
  - $\perp \in U$
  - $\sqcup \in \mathbb{P}(\mathbb{P}(U)) \longrightarrow \mathbb{P}(U)$
- ▶ Pour une définition inductive, on peut dériver un opérateur induit  $\mathcal{F}$  :  
$$\mathcal{F}(X) = \{c \in U \mid \exists P \subseteq X : \textbf{Si } P, \textbf{alors } C \in \mathcal{R}\}$$
- ▶  $\mathcal{F}_1(X) = \{0\} \cup \{n+3 \in \mathbb{N} \mid n \in X\}$
- ▶  $\mathcal{F}_2(X) = \textit{Init} \cup \{u \in U \mid \exists s. s \xrightarrow{*} u \wedge s \in X\}$

$$\forall A. A \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in A \wedge \text{suc}[A] \subseteq A \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq A$$

- ▶  $0 \in A$
- ▶ Pas d'induction
  - Hypothèse  $n \in A$
  - Conclusion  $\text{suc}(n) \in A$
- ▶ Conclusion  $\forall n. n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in A$

Soit la propriété suivante à démontrer  $\forall n. n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in P(n)$  :

- ①  $A \stackrel{\text{def}}{=} \{n | n \in \mathbb{N} \wedge P(n)\}$
- ②
  - $0 \in A$
  - Pas d'induction
    - ▶ Hypothèse  $n \in A$
    - ▶ Conclusion  $\text{suc}(n) \in A$
  - Conclusion  $\forall n. n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in A$