

Cours Algorithmique des systèmes parallèles et distribués  
Exercices

Série 1 Modélisation, programmation et vérification en TLA<sup>+</sup>

par Dominique Méry

3 janvier 2026

## Modélisation et vérification avec TLA<sup>+</sup>

**Exercice 1** (*disapp\_td1\_ex1.tla*)

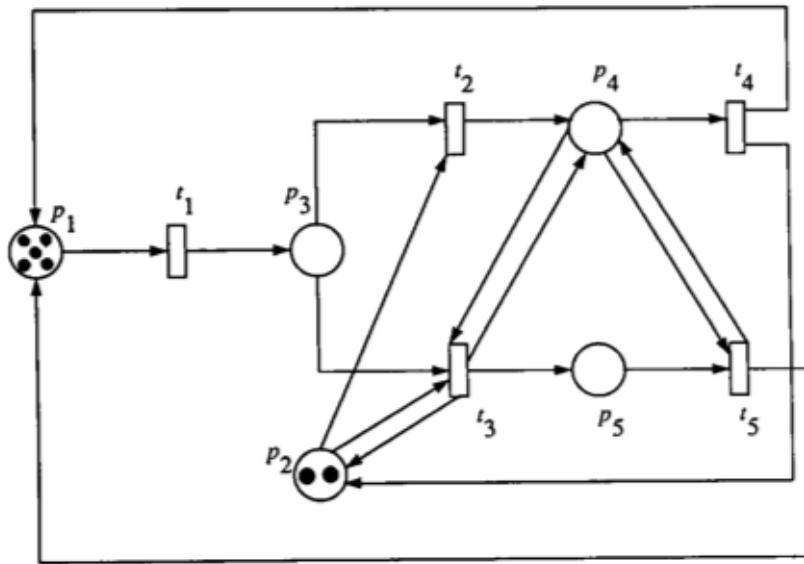
**Question 1.1** Modéliser sous forme d'un module TLA<sup>+</sup> le réseau de Petri de la figure 1. Donner une instantiation possible des constantes. Préciser les conditions initiales correspondant à un système avec cinq (5) processeurs et deux (2) bus.

**Question 1.2** On désire analyser le comportement de ce réseau et, pour cela, on souhaite savoir si la place  $p_5$  contiendra au moins un jeton. Expliquer comment on doit procéder pour obtenir une réponse en un temps fini. Préciser le message donné par le système TLAPS.

**Question 1.3** Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ?

**Question 1.4** Enoncez trois propriétés de sûreté de ce réseau établissant une relation entre au moins deux places.

```
----- MODULE disapp_td1_ex1 -----
(* Petri-net for the multiprocessor system *)
EXTENDS Naturals ,TLC
CONSTANTS Places ,IPlaces ,FPlaces ,P,B
VARIABLES M
-----
(* Auxiliary Definitions *)
K == [p \in FPlaces |-> IF p \in {"p3"} THEN 1 ELSE 0 ]
TOKENS==1..20
-----
TypeOK == M \in [Places |-> SUBSET TOKENS]
-----
t1 ==
  /\ M["p1"] \geq 1 /\ M["p3"]+1 \leq K["p3"]
  /\ M= [[M EXCEPT!["p3"] = M["p3"]+1] EXCEPT![ "p1"] = M["p1"] - 1]
t2 ==
  /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1
  /\ M=[[M EXCEPT!["p3"] = M["p3"]-1]
```



**Fig. 14.** A Petri-net model of a multiprocessor system, where tokens in  $p_1$  represent active processors,  $p_2$  available buses,  $p_3$ ,  $p_4$ , and  $p_5$  processors waiting for, having access to, queued for common memories, respectively.

FIGURE 1 – Réseau de Petri

```

EXCEPT!["p2"] = M["p2"] - 1
EXCEPT!["p4"] = M["p4"] + 1

t3 == 
  /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1 /\ M["p4"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p3"] = M["p3"] - 1]
            EXCEPT!["p5"] = M["p5"] + 1]

t4 == 
  /\ M["p4"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p4"] = M["p4"] - 1]
            EXCEPT!["p2"] = M["p2"] + 1]
            EXCEPT!["p1"] = M["p1"] + 1]

t5 == 
  /\ M["p4"] \geq 1 /\ M["p5"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p5"] = M["p5"] - 1]
            EXCEPT!["p1"] = M["p1"] + 1]

```

---

```

Init == M = [p \in Places |->
             IF p \in {"p1"} THEN P
             ELSE IF p \in {"p2"}
             THEN B ELSE 0 ]

```

```
Next == t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4 \vee t5
```

```
Petri == Init /\ [] [Next]_<<M>>
```

```
I0 == \A p \in Places : M[p] \geq 0
```

```
I1 == 0 \leq M["p3"] /\ M["p3"] \leq 1
I2 == M["p1"] \leq 5 /\ M["p2"] \leq 2
I3 == \A p \in {"p5"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 5
I4 == \A p \in {"p4"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 2
```

```

AP4 == M[ " p4 " ] = 0
AP5 == M[ " p5 " ] = 0
Test == I0 /\ I1 /\ I2 /\ I3 /\ I4
=====

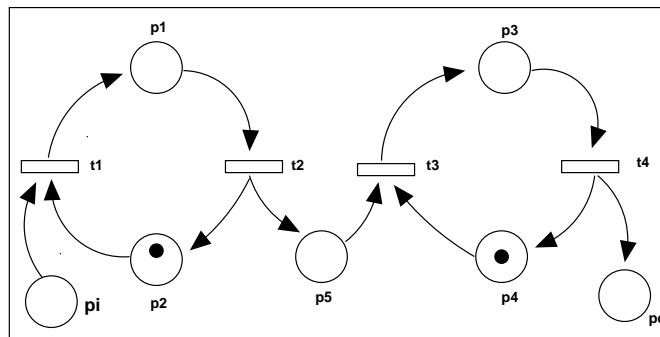
```

### Exercice 2 (disapp\_td1\_ex2.tla)

Un réseau de Petri est un uple  $R=(S,T,F,K,M,W)$  tel que

- $S$  est l'ensemble (fini) des places.
  - $T$  est l'ensemble (fini) des transitions.
  - $S \cap T = \emptyset$
  - $F$  est la relation du flôt d'exécution :  $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
  - $K$  représente la capacité de chaque place :  $K : S \rightarrow \text{Nat}$ .
  - $M$  représente le initial marquage chaque place :
    - $M : S \rightarrow \text{Nat}$  et vérifie la condition  $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$ .  - $W$  représente le poids de chaque arc :  $W : F \rightarrow \text{Nat}$
  - un marquage  $M$  pour  $R$  est une fonction de  $S$  dans  $\text{Nat}$  :
    - $M : S \rightarrow \text{Nat}$  et respectant la condition  $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$ .  - une transition  $t$  de  $T$  est activable à partir de  $M$  un marquage de  $R$  si
    1.  $\forall s \in \{s' \in S \mid (s',t) \in F\} : M(s) \geq W(s,t)$ .
    2.  $\forall s \in \{s' \in S \mid (t,s') \in F\} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$ .
  - Pour chaque transition  $t$  de  $T$ ,  $\text{Pre}(t)$  est l'ensemble des places conduisant à  $t$  et  $\text{Post}(t)$  est l'ensemble des places pointées par un lien depuis  $t$  :
 $\text{Pre}(t) = \{s' \in S : (s',t) \in F\}$  et  $\text{Post}(t) = \{s' \in S : (t,s') \in F\}$
  - Soit une transition  $t$  de  $T$  activable à partir de  $M$  un marquage de  $R$  :
    1.  $\forall s \in \{s' \in S \mid (s',t) \in F\} : M(s) \geq W(s,t)$ .
    2.  $\forall s \in \{s' \in S \mid (t,s') \in F\} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$ .
  - un nouveau marquage  $M'$  est défini à partir de  $M$  par :  $\forall s \in S$ ,
- $$M'(s) = \begin{cases} M(s) - W(s,t), & \text{SI } s \in \text{PRE}(t) - \text{POST}(t) \\ M(s) + W(t,s), & \text{SI } s \in \text{POST}(t) - \text{PRE}(t) \\ M(s) - W(s,t) + W(t,s), & \text{SI } s \in \text{PRE}(t) \cap \text{POST}(t) \\ M(s), & \text{SINON} \end{cases}$$

On considère le réseau suivant :



---

MODULE *petri10*

---

EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANTS *Places, N, Q, B*

**VARIABLES M**

$t1 \triangleq$   
 $t2 \triangleq$   
 $t3 \triangleq$   
 $t4 \triangleq$

$Init1 \triangleq M = [p \in Places \mapsto \text{IF } p \in \{ "p4", "p2" \} \text{ THEN } 1 \text{ ELSE }$   
 $\quad \quad \quad \text{IF } p = "p1" \text{ THEN } N \text{ ELSE } 0]$

$Next \triangleq t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4$

---

**Question 2.1** Traduire ce réseau en un module TLA<sup>+</sup> dont le squelette est donné dans le texte. Pour cela, on donnera la définition des quatre transitions  $t1, t2, t3, t4$ . On ne tiendra pas compte de la capacité des places : les places ont une capacité d'au plus un jeton, sauf la place  $p_i$  qui peut contenir  $N$  jetons, la place  $p_5$  peut contenir au plus  $B$  jetons et la place  $p_0$  peut contenir au plus  $Q$ .

**Question 2.2** Donner une relation liant les places  $p_0, p_1, p_3, p_5, p_i$  et la valeur  $N$ . Justifiez votre réponse.

**Question 2.3** Si on suppose que la place  $p_0$  peut contenir au plus  $Q$  jetons, donnez une condition sur  $Q$  pour que tous les jetons de  $p_i$  soient consommés un jour. Justifiez votre réponse.

**Question 2.4** Expliquez ce que modélise ce réseau de Petri.

◊ Solution de l'exercice 2

---

----- MODULE *disapp\_td1\_ex2* -----

---

EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANTS *Places, N, Q, B*

**VARIABLES M**

$t11 ==$   
 $\quad \quad \quad \wedge M["p1"] \leq 1 \wedge M["p5"] \leq 1$   
 $\quad \quad \quad \wedge M' = [[M \text{ EXCEPT! } ["p1"] = @-1] \text{ EXCEPT! } ["p5"] = @-1] \text{ EXCEPT! } ["p2"] = @+1]$

$t1 ==$   
 $\quad \quad \quad \wedge M["p2"] = 1 \wedge M["pi"] \leq 1$   
 $\quad \quad \quad \wedge M' = [[M \text{ EXCEPT! } ["p1"] = 1] \text{ EXCEPT! } ["pi"] = M["pi"] - 1] \text{ EXCEPT! } ["p2"] = 0]$

$t2 ==$

```

/\ M["p1"] = 1 /\ M["p5"] < B
/\ M= [[[M EXCEPT!["p1"]=0] EXCEPT!["p5"]=M["p5"]+1] EXCEPT!["p2"]=1]

t3 ==
/\ M["p5"] \geq 1 /\ M["p4"] = 1
/\ M= [[[M EXCEPT!["p3"] = 1] EXCEPT!["p5"] = M["p5"] - 1] EXCEPT!["p4"] = 0]

t4 ==
/\ M["p3"] = 1 /\ M["po"] < Q
/\ M= [[[M EXCEPT!["p3"] = M["p3"] - 1] EXCEPT!["po"] = M["po"] + 1] EXCEPT!["p4"]

-----
Init1 == M = [p \in Places |> IF p \in {"p4", "p2"} THEN 1 ELSE
              IF p = "pi" THEN N ELSE 0]

Init == Init1

Next == t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4 \vee M=M

Petri == Init /\ [] [Next]_<<M>>

TypeInvariant == \A p \in Places : M[p] \geq 0

Inv1 == M["pi"] + M["p5"] + M["po"] + M["p1"] + M["p3"] = N
Inv2 == M["po"] \leq Q

Inv4 == M["pi"] + M["p5"] + M["po"] + M["p2"] + M["p4"] = N+2
Inv5 == M["p3"] + M["p4"] + M["p1"] + M["p2"] = 2

Inv3 == M["po"] # Q
Inv == TypeInvariant /\ Inv1 /\ Inv2 /\ Inv5
Test == Inv3
=====
```

---

**Fin 2**