

Cours MOdélisation, Vérification et Expérimentations  
Exercices (avec les corrections)  
Analyse des programmes  
par Dominique Méry  
22 mai 2025

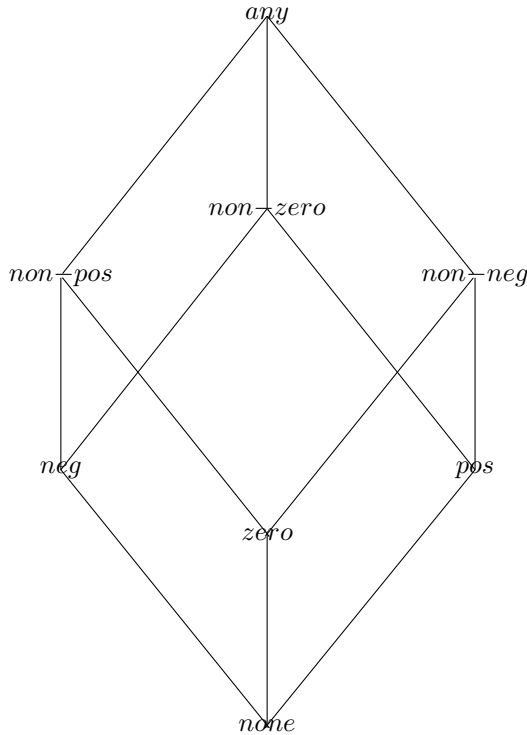
## Domaine des signes

### Exercice 1

On définit une abstraction pour les entiers relatifs  $\alpha \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq) \longrightarrow (\mathbb{S}igns, \sqsubseteq)$  :

- Si  $z < 0$ , alors  $\alpha(\{z\}) = neg$ .
- Si  $z > 0$ , alors  $\alpha(\{z\}) = pos$ .
- Si  $z = 0$ , alors  $\alpha(\{z\}) = zero$ .
- Si  $A \subseteq \mathbb{Z}$ , alors  $\alpha(A) = \bigsqcup \{\alpha(a) \mid a \in A\}$  où  $\bigsqcup$  désigne la borne supérieure dans  $\mathbb{S}igns$ .
- On notera  $\gamma$  l'opérateur de concrétisation associé à  $\alpha$  et définit par la relation caractérisant les connexions de Galois.

Cette paire  $(\alpha, \gamma)$  est une connexion de Galois, si elle satisfait  $\forall x_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), x_2 \in \mathbb{S}igns$  :

$$\alpha(x_1) \sqsubseteq x_2 \Leftrightarrow x_1 \subseteq \gamma(x_2)$$


$(\alpha, \gamma)$  est une connexion de Galois.

On rappelle que les opérations arithmétiques sont étendues aux parties des ensembles comme suit. Si  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ , alors  $A+B = \{a+b \mid a \in A \wedge b \in B\}$ . La définition d'un opérateur abstrait  $+_a$  sur  $\mathbb{S}igns$  est donnée par :

$$x, y \in \mathbb{S}igns : x+_a y = \alpha(\gamma(x) + \gamma(y))$$

**Question 1.1** Pour construire les éléments de l'abstraction, on va devoir définir des extensions des opérations arithmétiques et logiques sur l'ensemble des parties de  $\mathbb{Z} : (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$  :

- $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : A+B = \{a+b \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- $x, y \in \mathbb{S}igns : x+_a y = \alpha(\gamma(x) + \gamma(y))$

Par exemple, on peut montrer que :

- $pos+_a neg = \alpha(\gamma(pos) + \gamma(neg)) = \alpha((1, +\infty) + (-\infty, -1)) = \alpha((-\infty, +\infty))$
- $pos+_a zero = \alpha(\gamma(pos) + \gamma(zero)) = \alpha((1, +\infty) + (0)) = \alpha((1, +\infty)) = pos$

Construire une table des opérations abstraites pour  $+_a$ .

#### ◊ Solution de l'exercice 1

- $pos+_a neg = \alpha(\gamma(pos) + \gamma(neg)) = \alpha((1, +\infty) + (-\infty, -1)) = \alpha((-\infty, +\infty))$

—  $pos+_a zero = \alpha(\gamma(pos)+\gamma(zero)) = \alpha((1, +\infty)+(0)) = \alpha((1, +\infty)) = pos$   
 —  $non-pos+_a neg = \alpha(\gamma(non-pos)+\gamma(neg)) = \alpha((-\infty, 0)+(-\infty, -1)) = \alpha((-\infty, 0)) = non-pos$   
 Poursuivre en complétant la table.

**Fin 1**

**Question 1.2** Calculer les valeurs suivantes en justifiant le résultat :

1.  $\alpha(\{n|n \in \mathbb{Z} \wedge pair(|n|)\})$
2.  $\alpha(\{16, 1, -1\})$
3.  $\alpha(\{-91, -889\})$
4.  $\gamma(pos)$
5.  $\gamma(non-pos)$

◇ **Solution de la question 1.2**

1.  $\alpha(\{n|n \in \mathbb{Z} \wedge pair(|n|)\}) = any$
2.  $\alpha(\{16, 1, -1\}) = non-zero$
3.  $\alpha(\{-91, -889\}) = neg$
4.  $\gamma(pos) = (1, +\infty)$
5.  $\gamma(non-pos) = (-\infty, 0)$

**Fin 1.2**

**Question 1.3**

Un état concret est noté  $cv$  et appartient à l'ensemble  $Var \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$  : si  $X$  est une variable de  $Var$ , alors  $cv(X) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ .

Un état abstrait est noté  $av$  et appartient à l'ensemble  $Var \rightarrow Signs$  : si  $X$  est une variable de  $Var$ , alors  $av(X) \in Signs$ .

La connexion de Galois  $(\alpha, \gamma)$  s'étend naturellement en une connexion de Galois :

$(\alpha_1, \gamma_1)$  entre  $(Var \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$  et  $(Var \rightarrow Signs, \sqsubseteq)$ . En particulier,  $\alpha_1(cv) = av$  et, pour tout  $X$  de  $Var$ ,  $av(X) = \alpha(cv(X))$ ;  $\gamma_1(av) = cv$  et, pour tout  $X$  de  $Var$ ,  $cv(X) = \gamma(av(X))$ .

Toute expression  $e$  peut être interprétée selon l'un des domaines choisi. On peut donc définir deux évaluations possibles de  $e$  :

- domaine concret  $States = Var \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$  :  $\llbracket e \rrbracket \in (Var \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$  et  $\llbracket e \rrbracket(cv)$  est donc l'expression  $e$  interprétée dans l'état  $cv$  avec les valeurs concrètes (dans ce cas, les valeurs sont des ensembles d'entiers).
- domaine abstrait  $AStates = Var \rightarrow Signs$  :  $\llbracket e \rrbracket_a \in (Var \rightarrow Signs) \rightarrow Signs$  et  $\llbracket e \rrbracket_a(av)$  est donc l'expression  $e$  interprétée dans l'état  $av$  avec les valeurs abstraites (dans ce cas, les valeurs sont des valeurs de  $Signs$ ).
- La meilleure abstraction est simplement écrite sous la forme suivante :  $\llbracket e \rrbracket_{best}(av) = \alpha \circ \llbracket e \rrbracket \circ \gamma_1(av)$ .

On peut donc réaliser une exécution d'un petit algorithme en utilisant les variables contenant des valeurs abstraites. On demande de remplir le tableau avec les valeurs abstraites obtenues par évaluation abstraite :  $\llbracket e \rrbracket_{best}(av) = \alpha \circ \llbracket e \rrbracket \circ \gamma_1(av)$ .

$\ell_0[X := 1];$   
 $\ell_1[Y := 5];$   
 $\ell_2[X := X+1];$   
 $\ell_3[Y := Y-1];$   
 $\ell_4[X := Y+X];$   
 $\ell_{final}[skip];$

$\ell$	$X$	$Y$
$\ell_0$		
$\ell_1$		
$\ell_2$		
$\ell_3$		
$\ell_4$		
$\ell_{final}$		

◇ **Solution de la question 1.3**

$\ell$	$X$	$Y$
$\ell_0$	<i>any</i>	<i>any</i>
$\ell_1$	<i>pos</i>	<i>any</i>
$\ell_2$	<i>pos</i>	<i>pos</i>
$\ell_3$	<i>pos</i>	<i>pos</i>
$\ell_4$	<i>pos</i>	<i>non-neg</i>
$\ell_{final}$	<i>any</i>	<i>non-neg</i>

**Fin 1.3**

**Question 1.4** L'évaluation d'une expression  $e$  a été faite en utilisant la meilleure approximation par rapport à la connection de Galois choisie ( $\llbracket e \rrbracket_{best}(av) = \alpha \circ \llbracket e \rrbracket \circ \gamma_1(av)$ ). Cette évaluation revient à ramener le calcul abstrait sous la forme d'un calcul concret sur les expressions. Cela veut dire que cela est complexe dans la mesure où cela reste dans le domaine concret. Une autre voie est d'utiliser une approximation correcte pour définir une sémantique abstraite des expressions notée  $\llbracket e \rrbracket_a$  et telle que, pour tout état abstrait  $av$ ,  $\llbracket e \rrbracket_{best}(av) \sqsubseteq \llbracket e \rrbracket_a(av)$ .

$av \in Var \rightarrow Signs :$

- $\llbracket const \rrbracket_a(v) = \alpha(\{c\})$
- $\llbracket x \rrbracket_a(v) = v(x)$
- $\llbracket e_1 + e_2 \rrbracket_a(v) = \llbracket e_1 \rrbracket_a(v) \oplus \llbracket e_2 \rrbracket_a(v)$
- $\llbracket e_1 \times e_2 \rrbracket_a(v) = \llbracket e_1 \rrbracket_a(v) \otimes \llbracket e_2 \rrbracket_a(v)$

Dans le cas d'une instruction de la forme  $\ell[X := E]$ , on décide d'affecter à  $X$  la valeur abstraite obtenue par l'interprétation  $\llbracket E \rrbracket_a$  en  $av \llbracket E \rrbracket_a(av)$ . Par exemple, si  $E = Y + X + 6$ , alors  $\llbracket Y + X + 6 \rrbracket_a(av) = \llbracket Y \rrbracket_a(av) +_a \llbracket X \rrbracket_a(av) +_a \llbracket 6 \rrbracket_a(av)$ . Ainsi, si on considère l'affectation  $\ell[Y := Y - 1]$  avec  $av(Y) = pos$ , on obtient :

- $\llbracket Y - 1 \rrbracket_a(av) = \llbracket Y \rrbracket_a(av) \oplus \llbracket -1 \rrbracket_a(av) = pos \oplus neg = any$
- $\llbracket Y - 1 \rrbracket_{best}(av) = \alpha_1 \circ \llbracket Y - 1 \rrbracket \circ \gamma_1(av) = \alpha_1(\llbracket Y - 1 \rrbracket(\gamma_1(av))) = \alpha_1(\llbracket Y - 1 \rrbracket(\{Y \mapsto (1, +\infty)\})) = \alpha_1((1 + \infty) + (-1)) = \alpha_1((0, +\infty)) = non-neg$

Appliquer l'analyse sur l'exemple :

$\ell_0[X := 1];$   
 $\ell_1[Y := 5];$   
 $\ell_2[X := X + 1];$   
 $\ell_3[Y := Y - 1];$   
 $\ell_4[X := Y + X];$   
 $\ell_{final}[skip];$

$\ell$	$X$	$Y$
$\ell_0$		
$\ell_1$		
$\ell_2$		
$\ell_3$		
$\ell_4$		
$\ell_{final}$		

◇— **Solution de la question 1.4**

$\ell$	$X$	$Y$
$\ell_0$	<i>any</i>	<i>any</i>
$\ell_1$	<i>pos</i>	<i>any</i>
$\ell_2$	<i>pos</i>	<i>pos</i>
$\ell_3$	<i>pos</i>	<i>pos</i>
$\ell_4$	<i>pos</i>	<i>any</i>
$\ell_{final}$	<i>any</i>	<i>any</i>

**Fin 1.4**

## Exercice 2

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 624
main()
{
    /* D\ 'eclarations des variables */
    int i,s,r;
```

```

 $\ell_0[i = 1;]$ 
 $\ell_1[s = 0;]$ 
 $\ell_2[r = -1;]$ 
WHILE  $\ell_3[s \leq N]$ 
   $\ell_4[s+ = i;]$ 
   $\ell_5[i+ = 2;]$ 
   $\ell_6[r++];$ 
END-WHILE
 $\ell_{final}[skip]$ 

```

**Question 2.1** Produire le graphe de flôt d'analyse.

**Question 2.2** Ecrire le système d'équations définissant la sémantique collectrice.

**Question 2.3** Ecrire une analyse abstraite dans le cadre du domaine des signes.

## Domaine des intervalles

### Exercice 3

On définit le domaine des intervalles sur  $\mathbb{Z}$ , noté  $\mathbb{I}(\mathbb{Z})$  comme suit :  $\mathbb{I}(\mathbb{Z}) = \{\perp\} \cup \{[l, u] \mid l \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, u \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, l \leq u\}$   
 On définit une relation  $\sqsubseteq$  sur les intervalles comme suit :  
 $[l_1, u_1] \sqsubseteq [l_2, u_2]$  si, et seulement si,  $l_2 \leq l_1$  et  $u_1 \leq u_2$ .

**Question 3.1** Montrer que  $(\mathbb{I}(\mathbb{Z}), \sqsubseteq)$  est une structure partiellement ordonnée.

**Question 3.2** Montrer que

1.  $[l_1, u_1] \sqcup [l_2, u_2] = [\min(l_1, l_2), \max(u_1, u_2)]$
2. et que  $[l_1, u_1] \sqcap [l_2, u_2] = \begin{cases} [\max(l_1, l_2), \min(u_1, u_2)] \\ \perp, \text{ si } \max(l_1, l_2) > \min(u_1, u_2) \end{cases}$

**Question 3.3** Montrer que la structure ordonnée est un treillis complet.

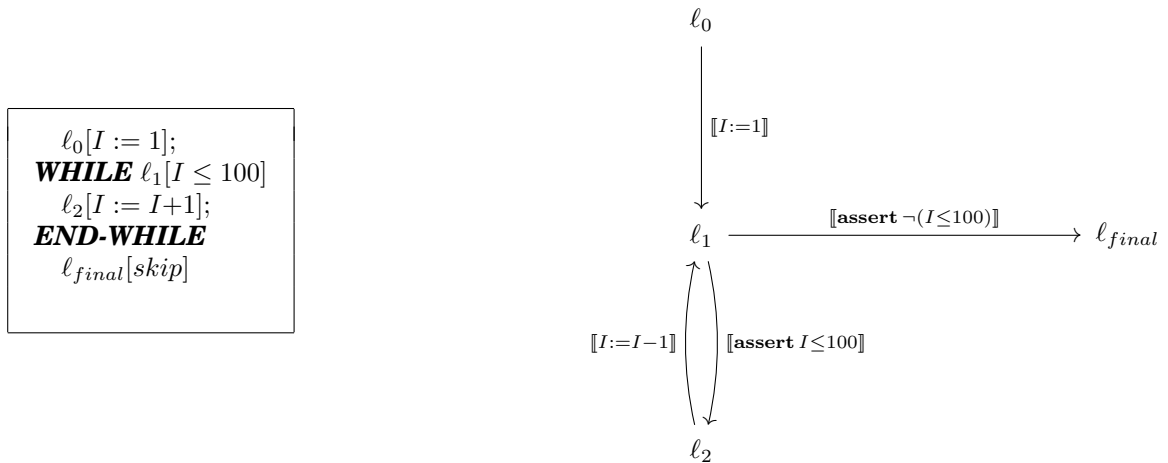
On définit deux fonctions :  
 $\alpha(X) = \begin{cases} [\min(X), \max(X)] \\ \perp, \text{ si } X = \emptyset \end{cases}$   
 $\gamma([l, u]) = [l..u]$  et  $\gamma(\perp) = \emptyset$

**Question 3.4** Montrer que  $(\alpha, \gamma)$  est une connexion de Galois.

On définit des opérations sur les intervalles comme suit :

1.  $i_1 \oplus i_2 = [l_1 + l_2, u_1 + u_2]$
2.  $i_1 \ominus i_2 = [l_1 - u_2, u_1 - l_2]$
3.  $i_1 \otimes i_2 = [\min(l_1 \cdot l_2, l_1 \cdot u_2, u_1 \cdot l_2, u_1 \cdot u_2), \max(l_1 \cdot l_2, l_1 \cdot u_2, u_1 \cdot l_2, u_1 \cdot u_2)]$
4.  $i_1 \oslash i_2 = [\min(l_1 / l_2, l_1 / u_2, u_1 / l_2, u_1 / u_2), \max(l_1 / l_2, l_1 / u_2, u_1 / l_2, u_1 / u_2)]$

**Question 3.5** Appliquer la technique de calcul abstrait sur cet exemple.



◊ **Solution de la question 3.5**

On peut utiliser l'analyseur Interproc [http : / / pop-art.inrialpes.fr / interproc /](http://pop-art.inrialpes.fr/interproc/) et on peut utiliser différentes analyses notamment l'analyse dite box qui correspond aux intervalles.

Result

Annotated program after forward analysis

```

var I : int;
begin
  /* (L2 C5) top */
  I = 1; /* (L3 C6) [|I-1>=0; -I+101>=0|] */
  while I <= 100 do
    /* (L4 C20) [|I-1>=0; -I+100>=0|] */
    I = I + 1; /* (L5 C9)
               [|I-2>=0; -I+101>=0|] */
  done; /* (L6 C5) [|I-101=0|] */
end

```

Source

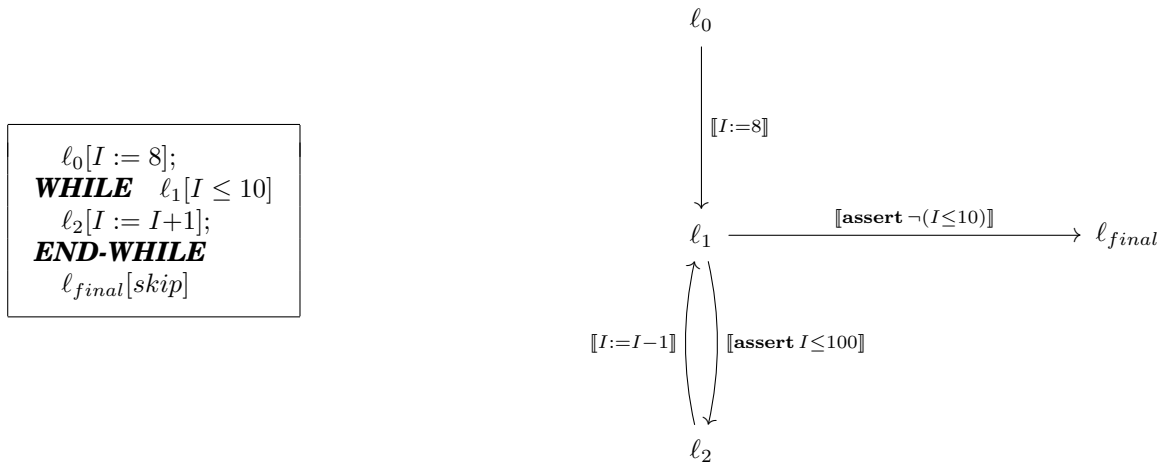
```

var I:int;
begin
  I = 1;
  while (I <= 100) do
    I = I+1;
  done;
end

```

**Fin 3.5**

**Question 3.6** Appliquer la technique de calcul abstrait sur cet exemple.



◊ **Solution de la question 3.6**

Result

Annotated program after forward analysis

```

var I : int;
begin
  /* (L2 C5) top */
  I = 8; /* (L3 C6) [|I-8>=0; -I+11>=0|] */
  while I <= 10 do
    /* (L4 C19) [|I-8>=0; -I+10>=0|] */
    I = I + 1; /* (L5 C9)
               [|I-9>=0; -I+11>=0|] */
  done; /* (L6 C5) [|I-11=0|] */
end
    
```

Source

```

var I:int;
begin
  I = 8;
  while (I <= 10) do
    I = I+1;
  done;
end
    
```

**Fin 3.6**

**Exercice 4**

*Soit l'algorithme suivant :*

```

 $\ell_0$ [Q := 0];
 $\ell_1$ [R := X];
IF  $\ell_5$ [Y > 0]
    WHILE  $\ell_2$ [R ≥ Y]
         $\ell_3$ [Q := Q+1];
         $\ell_4$ [R := R-Y]
    ENDWHILE
ELSE
     $\ell_6$ [skip]
ENDIF

```

**Question 4.1** Produire un graphe de flôt de contrôle de cetv algorithme.

**Question 4.2** Analyser l'algorithme avec le doamien abstrait des intervalles.

◊— **Solution de la question 4.2**

Result

Annotated program after forward analysis

```

var Q : int, R : int, X : int, Y : int;
begin
  /* (L3 C5) top */
  Q = 0; /* (L4 C4) [|Q=0|] */
  R = Y; /* (L5 C4) [|R=Y=0; Q=0|] */
  if Y > 0 then
    /* (L6 C15)
       [|Q-R+Y>=0; -Q+1>=0; Q>=0; Q+R-1>=0|] */
    while R >= Y do
      /* (L7 C20) [|R+Y=0; Q=0; R-1>=0|] */
      Q = Q + 1; /* (L8 C13)
                  [|R+Y=0; Q-1=0; R-1>=0|] */
      R = R - Y; /* (L9 C15)
                  [|R=0; Q-1=0; Y-1>=0|] */
    done; /* (L10 C7)
           [|Q+1>=0; -R+Y-1>=0; Q>=0; Q+R-1>=0|] */
  else
    /* (L11 C4) [|R+Y=0; Q=0; -R>=0|] */
    skip; /* (L12 C7) [|R+Y=0; Q=0; -R>=0|] */
  endif; /* (L13 C6)
          [|Q-R+Y>=0; -Q+1>=0; Q>=0|] */
end

```

Source

```

/* type your program here ! */
var Q:int,R:int,X:int,Y:int;
begin
  Q=0;
  R=Y;
  if (Y > 0) then
    while (R >= Y) do
      Q = Q+1;
      R = R - Y;
    done;

```

```
else
    skip;
endif;
end
```

**Fin 4.2**

## Exercice 5

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 624
main()
{
    /* D\ 'eclarations des variables */
    int i, s, r;
```

```
precondition :...
postcondition :...

 $\ell_0[i = 1;]$ 
 $\ell_1[s = 0;]$ 
 $\ell_2[r = -1;]$ 
while  $\ell_3[s \leq N]$  do
     $\ell_4[s+ = i; \ell_5[i+ = 2; \ell_6[r++];]$ 
;
 $\ell_{final}[skip]$ 
```

**Algorithme 1:** *PROGRAM1* annotée

**Question 5.1** Produire le graphe de flôt d'analyse.

**Question 5.2** Ecrire le système d'équations définissant la sémantique collectrice.

**Question 5.3** Ecrire une analyse abstraite dans le cadre du domaine des intervalles.

◊ **Solution de la question 5.3**

---

```
Annotated program after forward analysis
var I : int, S : int, R : int, N : int;
begin
    /* (L2 C5) top */
    I = 1; /* (L3 C4) [|I-1=0|] */
    S = 0; /* (L4 C4) [|I-1=0; S=0|] */
    R = -1; /* (L5 C5) [|I-1>=0; R+1>=0; S>=0|] */
    while S <= N do
        /* (L6 C16)
           [|I-1>=0; N>=0; R+1>=0; S>=0|] */
        S = S + I; /* (L7 C6)
```



```

[|I-1>=0; N>=0; R+1>=0; S-1>=0|] */
I = I + 2; /* (L8 C6)
[|I-3>=0; N>=0; R+1>=0; S-1>=0|] */
R = R + 1; /* (L9 C6)
[|I-3>=0; N>=0; R>=0; S-1>=0|] */
done; /* (L10 C5) [|I-1>=0; R+1>=0; S>=0|] */
end

```

Source

```

var I:int,S:int,R:int,N:int;
begin
I=1;
S=0;
R=-1;
while (S<= N) do
S=S+I;
I=I+2;
R=R+1;
done;
end

```

**Fin 5.3**

Cours MOdélisation, Vérification et Expérimentations  
Exercices (avec les corrections)  
Abstraction, approximation et calcul  
par Dominique Méry  
22 mai 2025

## Domaine des intervalles

### Exercice 6

On définit le domaine des intervalles sur  $\mathbb{Z}$ , noté  $\mathbb{I}(\mathbb{Z})$  comme suit :  $\mathbb{I}(\mathbb{Z}) = \{\perp\} \cup \{[l, u] \mid l \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, u \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, l \leq u\}$

On définit une relation  $\sqsubseteq$  sur les intervalles comme suit :

$[l_1, u_1] \sqsubseteq [l_2, u_2]$  si, et seulement si,  $l_2 \leq l_1$  et  $u_1 \leq u_2$ .

On peut montrer que  $(\mathbb{I}(\mathbb{Z}), \sqsubseteq)$  est une structure partiellement ordonnée.

#### Question 6.1 Montrer que

- $[l_1, u_1] \sqcup [l_2, u_2] = [\min(l_1, l_2), \max(u_1, u_2)]$
- et que  $[l_1, u_1] \sqcap [l_2, u_2] = \begin{cases} [\max(l_1, l_2), \min(u_1, u_2)] \\ \perp, \text{ si } \max(l_1, l_2) > \min(u_1, u_2) \end{cases}$

On peut montrer que  $(\mathbb{I}(\mathbb{Z}), \sqsubseteq)$  est un treillis complet.

On définit deux fonctions :

$\alpha(X) = \begin{cases} [\min(X), \max(X)] \\ \perp, \text{ si } X = \emptyset \end{cases}$   
 $\gamma([l, u]) = [l..u]$  et  $\gamma(\perp) = \emptyset$

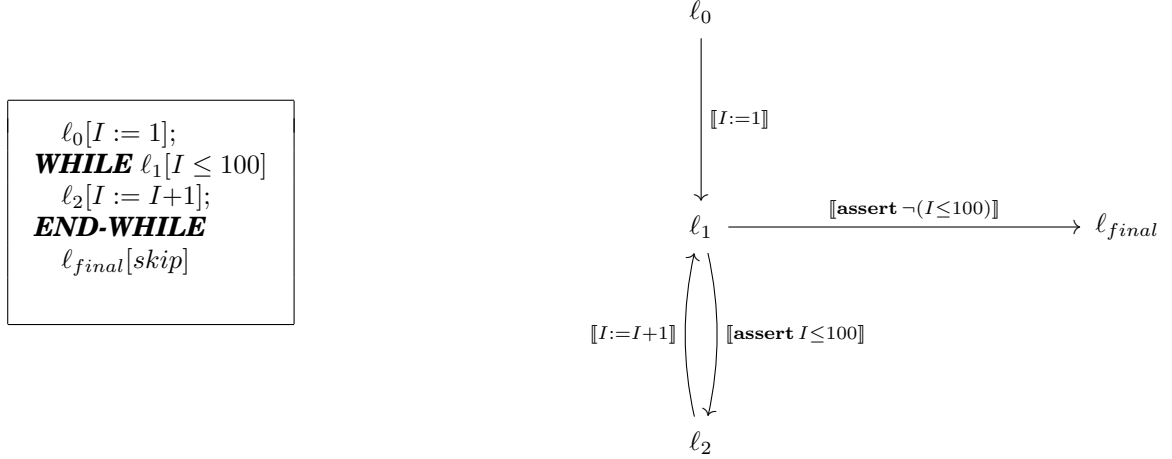
#### Question 6.2 Montrer que $(\alpha, \gamma)$ est une connexion de Galois c'est-à-dire que

Pour toute partie  $X$  de  $\mathbb{Z}$ , pour toutes les valeurs  $m$  et  $M$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $\alpha(X) \sqsubseteq [m, M]$  si, et seulement si,  $X \subseteq \gamma([m, M])$

On définit des opérations sur les intervalles comme suit :

1.  $i_1 \oplus i_2 = [l_1 + l_2, u_1 + u_2]$
2.  $i_1 \ominus i_2 = [l_1 - u_2, u_1 - l_2]$
3.  $i_1 \otimes i_2 = [\min(l_1 \cdot l_2, l_1 \cdot u_2, u_1 \cdot l_2, u_1 \cdot u_2), \max(l_1 \cdot l_2, l_1 \cdot u_2, u_1 \cdot l_2, u_1 \cdot u_2)]$
4.  $i_1 \oslash i_2 = [\min(l_1 / l_2, l_1 / u_2, u_1 / l_2, u_1 / u_2), \max(l_1 / l_2, l_1 / u_2, u_1 / l_2, u_1 / u_2)]$

**Question 6.3** Appliquer la technique de calcul abstrait sur cet exemple.



◊— **Solution de la question 6.3**

On peut utiliser l'analyseur Interproc <http://pop-art.inrialpes.fr/interproc/> et on peut utiliser différentes analyses notamment l'analyse dite box qui correspond aux intervalles.

Result

```

Annotated program after forward analysis
var I : int;
begin
  /* (L2 C5) top */
  I = 1; /* (L3 C6) [|I-1>=0; -I+101>=0|] */
  while I <= 100 do
    /* (L4 C20) [|I-1>=0; -I+100>=0|] */
    I = I + 1; /* (L5 C9)
               [|I-2>=0; -I+101>=0|] */
  done; /* (L6 C5) [|I-101=0|] */
end
        
```

Source

```

var I:int;
begin
  I = 1;
  while (I <= 100) do
    I = I+1;
  done;
end
        
```

**Fin 6.3**

## Exercice 7

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 624
main()
{
    /* D\ 'eclarations des variables */
    int i,s,r;
```

```
precondition  :...
postcondition :...

 $\ell_0[i = 1;]$ 
 $\ell_1[s = 0;]$ 
 $\ell_2[r = -1;]$ 
while  $\ell_3[s \leq N]$  do
     $\ell_4[s+ = i; \ell_5[i+ = 2; \ell_6[r++];]$ 
;
 $\ell_{final}[skip]$ 
```

**Algorithme 2:** PROGRAM1 annotée

**Question 7.1** Produire le graphe de flôt d'analyse.

**Question 7.2** Ecrire le système d'équations définissant la sémantique collectrice.

**Question 7.3** Ecrire une analyse abstraite dans le cadre du domaine des intervalles.

◇ **Solution de la question 7.3**

```
Annotated program after forward analysis
var I : int, S : int, R : int, N : int;
begin
    /* (L2 C5) top */
    I = 1; /* (L3 C4) [|I-1=0|] */
    S = 0; /* (L4 C4) [|I-1=0; S=0|] */
    R = -1; /* (L5 C5) [|I-1>=0; R+1>=0; S>=0|] */
    while S <= N do
        /* (L6 C16)
           [|I-1>=0; N>=0; R+1>=0; S>=0|] */
        S = S + I; /* (L7 C6)
                   [|I-1>=0; N>=0; R+1>=0; S-1>=0|] */
        I = I + 2; /* (L8 C6)
                   [|I-3>=0; N>=0; R+1>=0; S-1>=0|] */
        R = R + 1; /* (L9 C6)
                   [|I-3>=0; N>=0; R>=0; S-1>=0|] */
    done; /* (L10 C5) [|I-1>=0; R+1>=0; S>=0|] */
end
```

Source

```
var I:int,S:int,R:int,N:int;
```

```

begin
I=1;
S=0;
R=-1;
while (S<= N) do
S=S+I;
I=I+2;
R=R+1;
done;
end

```

---

**Fin 7.3**

**Exercice 8** Soit la connexion de Galois suivante :

$$\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Signs} : \begin{cases} z & \alpha(z) \\ z < 0 & \text{neg} \\ z > 0 & \text{pos} \\ z = 0 & \text{zero} \end{cases}$$

**Question 8.1** Soient  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$  where  $f(X) = \{0\} \cup \{x+2 | x \in \mathbb{Z} \wedge x \in X\}$  and  $g = \alpha \circ f \circ \gamma$ .

1. Compute the sequence  $f^0, f^1, f^2, f^i$ .
2. Compute the sequence  $g^0, g^1, g^2, g^i$ .
3. Compute  $\mu.g$ .
4. What is the link between  $\mu.f$  and  $\mu.g$ .

**Question 8.2** Soient  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$  where  $f(X) = \{1\} \cup \{x+2 | x \in \mathbb{Z} \wedge x \in X\}$  and  $g = \alpha \circ f \circ \gamma$ .

1. Compute the sequence  $f^0, f^1, f^2, f^i$ .
2. Compute the sequence  $g^0, g^1, g^2, g^i$ .
3. Compute  $\mu.g$ .
4. What is the link between  $\mu.f$  and  $\mu.g$ .