

---

# Cours ASPD

## Modélisation des systèmes répartis

### Telecom Nancy 2A Apprentissage

---

Dominique Méry  
Telecom Nancy  
Université de Lorraine

---

**Année universitaire 2025-2026**  
**5 janvier 2026(10:16am)**

- ① Modélisation d'algorithmes et de systèmes répartis
- ② Modélisation relationnelle
- ③ Introduction au langage TLA<sup>+</sup>
  - Exemple 1 : un protocole simple de communication entre agents
  - Exemple 2 : Réseaux de Petri
- ④ Modélisation et vérification avec le langage TLA<sup>+</sup>
- ⑤ Processus en PlusCal
- ⑥ Conclusion

# Section Courante

---

- ① Modélisation d'algorithmes et de systèmes répartis
- ② Modélisation relationnelle
- ③ Introduction au langage TLA<sup>+</sup>
  - Exemple 1 : un protocole simple de communication entre agents
  - Exemple 2 : Réseaux de Petri
- ④ Modélisation et vérification avec le langage TLA<sup>+</sup>
- ⑤ Processus en PlusCal
- ⑥ Conclusion

]

## Système de transition

Un système de transition  $\mathcal{TS}$  est une structure  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$  où

- $\mathcal{C}$  : un (fini ou infini) ensemble de configurations
- $\longrightarrow$  : une relation binaire sur  $\mathcal{C}$
- $\mathcal{I}$  : un sous-ensemble de  $\mathcal{C}$  constituant les configurations initiales.

## Système de transition étiquettée

Un système de transition étiquettée  $\mathcal{LTS}$  est une structure  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \mathcal{E}, \longrightarrow)$  où

- $\mathcal{C}$  : un (fini ou infini) ensemble de configurations
- $\mathcal{I}$  : un sous-ensemble de  $\mathcal{C}$  constituant les configurations initiales.
- $\mathcal{E}$  : un ensemble d'événements
- $\longrightarrow$  : une partie de  $\mathcal{C} \times \mathcal{E} \times \mathcal{C}$

# Exécution d'un système de transition

---

Soit un système de transition  $\mathcal{ST}$  défini par  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$ .

# Exécution d'un système de transition

---

Soit un système de transition  $\mathcal{ST}$  défini par  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$ .

- Une configuration terminale  $t \in \mathcal{C}$  est une configuration telle que, pour toute configuration  $c \in \mathcal{C}$ ,  $(t, c) \notin \longrightarrow$ .

# Exécution d'un système de transition

---

Soit un système de transition  $\mathcal{ST}$  défini par  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$ .

- Une configuration terminale  $t \in \mathcal{C}$  est une configuration telle que, pour toute configuration  $c \in \mathcal{C}$ ,  $(t, c) \notin \longrightarrow$ .
- $\text{TERM}[\mathcal{ST}]$  est l'ensemble des configurations terminales du système de transition  $\mathcal{ST}$ .

# Exécution d'un système de transition

Soit un système de transition  $\mathcal{ST}$  défini par  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$ .

- Une configuration terminale  $t \in \mathcal{C}$  est une configuration telle que, pour toute configuration  $c \in \mathcal{C}$ ,  $(t, c) \notin \longrightarrow$ .
- $\text{TERM}[\mathcal{ST}]$  est l'ensemble des configurations terminales du système de transition  $\mathcal{ST}$ .
- Une exécution de  $\mathcal{ST}$  est une trace maximale  $\sigma$  sur  $\mathcal{C}$  satisfaisant les conditions suivantes :
  - ▶  $\sigma \in \mathbb{N} \mapsto \mathcal{C}$
  - ▶ soit il existe une valeur  $n \in \mathbb{N}$  telle que  $\text{dom}(\sigma) = 0..n-1$  et sa longueur est  $n$ , soit  $\text{dom}(\sigma) = \mathbb{N}$  et sa longueur est infinie.
  - ▶ Quand l'exécution est finie et de longueur  $n$ , alors  $\sigma(n-1) \in \text{TERM}[\mathcal{ST}]$ .



# Exécution d'un système de transition

Soit un système de transition  $\mathcal{ST}$  défini par  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$ .

- Une configuration terminale  $t \in \mathcal{C}$  est une configuration telle que, pour toute configuration  $c \in \mathcal{C}$ ,  $(t, c) \notin \longrightarrow$ .
- $\text{TERM}[\mathcal{ST}]$  est l'ensemble des configurations terminales du système de transition  $\mathcal{ST}$ .
- Une exécution de  $\mathcal{ST}$  est une trace maximale  $\sigma$  sur  $\mathcal{C}$  satisfaisant les conditions suivantes :
  - ▶  $\sigma \in \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$
  - ▶ soit il existe une valeur  $n \in \mathbb{N}$  telle que  $\text{dom}(\sigma) = 0..n-1$  et sa longueur est  $n$ , soit  $\text{dom}(\sigma) = \mathbb{N}$  et sa longueur est infinie.
  - ▶ Quand l'exécution est finie et de longueur  $n$ , alors  $\sigma(n-1) \in \text{TERM}[\mathcal{ST}]$ .
- Une configuration  $c \in \mathcal{C}$  est accessible, s'il existe une exécution  $\sigma$  telle qu'il existe  $i \in \text{dom}(\sigma)$  tel que  $\sigma(i) = c$  ( $c \in \text{ran}(\sigma)$ )

# Exécution d'un système de transition

Soit un système de transition  $\mathcal{ST}$  défini par  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$ .

- Une configuration terminale  $t \in \mathcal{C}$  est une configuration telle que, pour toute configuration  $c \in \mathcal{C}$ ,  $(t, c) \notin \longrightarrow$ .
- $\text{TERM}[\mathcal{ST}]$  est l'ensemble des configurations terminales du système de transition  $\mathcal{ST}$ .
- Une exécution de  $\mathcal{ST}$  est une trace maximale  $\sigma$  sur  $\mathcal{C}$  satisfaisant les conditions suivantes :
  - ▶  $\sigma \in \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$
  - ▶ soit il existe une valeur  $n \in \mathbb{N}$  telle que  $\text{dom}(\sigma) = 0..n-1$  et sa longueur est  $n$ , soit  $\text{dom}(\sigma) = \mathbb{N}$  et sa longueur est infinie.
  - ▶ Quand l'exécution est finie et de longueur  $n$ , alors  $\sigma(n-1) \in \text{TERM}[\mathcal{ST}]$ .
- Une configuration  $c \in \mathcal{C}$  est accessible, s'il existe une exécution  $\sigma$  telle qu'il existe  $i \in \text{dom}(\sigma)$  tel que  $\sigma(i) = c$  ( $c \in \text{ran}(\sigma)$ )
- $\text{REACHABLE}[\mathcal{ST}]$  est l'ensemble des configurations accessibles du système de transition  $\mathcal{ST}$ .

## Algorithme local

Un algorithme local  $\mathcal{LA}$  d'un processus  $P$  est une structure  $(\mathcal{LC}, \mathcal{LI}, \longrightarrow_i, \longrightarrow_s, \longrightarrow_r, \mathcal{M})$  telle que :

- $\mathcal{LC}$  : un ensemble de configurations
- $\mathcal{LI}$  : un sous-ensemble de  $\mathcal{LC}$  constituant les configurations initiales.
- $\mathcal{M}$  : un ensemble de messages
- $\longrightarrow_i$  : une partie de  $\mathcal{LC} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_s$  : une partie de  $\mathcal{LC} \times \mathcal{M} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_r$  : une partie d'une partie de  $\mathcal{LC} \times \mathcal{M} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_P \stackrel{def}{=} \Longrightarrow_i \cup \Longrightarrow_r \cup \Longrightarrow_s$

## Algorithme local

Un algorithme local  $\mathcal{LA}$  d'un processus  $P$  est une structure  $(\mathcal{LC}, \mathcal{LI}, \longrightarrow_i, \longrightarrow_s, \longrightarrow_r, \mathcal{M})$  telle que :

- $\mathcal{LC}$  : un ensemble de configurations
- $\mathcal{LI}$  : un sous-ensemble de  $\mathcal{LC}$  constituant les configurations initiales.
- $\mathcal{M}$  : un ensemble de messages
- $\longrightarrow_i$  : une partie de  $\mathcal{LC} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_s$  : une partie de  $\mathcal{LC} \times \mathcal{M} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_r$  : une partie d'une partie de  $\mathcal{LC} \times \mathcal{M} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_P \stackrel{def}{=} \Longrightarrow_i \cup \Longrightarrow_r \cup \Longrightarrow_s$

- $\mathcal{M}$  est l'ensemble des messages qui sont échangés par les processus.
- Un message est utilisé une seule fois
- $\mathcal{M}$  pourrait être un multi-ensemble.

Soient  $lc, m$  et  $lc', m'$  deux configurations de  $\mathcal{LA}$ .

- ①  $lc, m \Longrightarrow_P lc', m' \stackrel{def}{=} (lc \longrightarrow_i lc') \wedge m = m'$
- ②  $lc, m \Longrightarrow_P lc', m' \stackrel{def}{=} \exists mes \in \mathcal{M} : \left\{ \begin{array}{l} ((lc, mes, lc') \in \longrightarrow_s) \\ \wedge m' = m \cup \{mes\} \end{array} \right.$
- ③  $lc, m \Longrightarrow_P lc', m' \stackrel{def}{=} \exists mes \in \mathcal{M} : \left\{ \begin{array}{l} ((lc, mes, lc') \in \longrightarrow_r) \\ \wedge m = m' \cup \{mes\} \end{array} \right.$

## Algorithme réparti

Un algorithme réparti  $\mathcal{DA}$  pour un ensemble fini de processus  $\{P_1, \dots, P_n\}$  est un ensemble fini d'algorithmes locaux  $\{\mathcal{LA}_1, \dots, \mathcal{LA}_n\}$  où  $\mathcal{LC}_i$  est un algorithme local pour le processus  $P_i$ ,  $i \in 1..n$ .

Un algorithme réparti  $\mathcal{DA}$  pour un ensemble fini de processus  $\{P_1, \dots, P_n\}$  est associé à une structure de transition construite à partir des systèmes de transition des algorithmes locaux :

- $\mathcal{C} = \mathcal{LC}_1 \times \dots \times \mathcal{LC}_n \times \mathcal{M}$  : un ensemble des configurations constituée des configurations locales et des messages possibles.
- $\mathcal{I} = \mathcal{LI}_1 \times \dots \times \mathcal{LI}_n \times \mathcal{M}$  : un sous-ensemble de  $\mathcal{C}$  constituant les configurations initiales.
- $\mathcal{M}$  : un ensemble de messages
- $\longrightarrow \stackrel{def}{=} \longrightarrow_{P_1} \cup \dots \cup \longrightarrow_{P_n}$  :

# Modèle asynchrone

---

soient  $C$  et  $C'$  deux configurations de  $\mathcal{C}$  :



soient  $C$  et  $C'$  deux configurations de  $\mathcal{C}$  :

- ① local :  $C \longrightarrow C'$  : il existe  $P$  de  $\{P_1, \dots, P_n\}$  avec  $P = P_i$  tel que  $\forall j \in 1..N : j \neq i : C_j = C'_j$  et  $C_i \longrightarrow_P C'$

soient  $C$  et  $C'$  deux configurations de  $\mathcal{C}$  :

- ① local :  $C \longrightarrow C'$  : il existe  $P$  de  $\{P_1, \dots, P_n\}$  avec  $P = P_i$  tel que  $\forall j \in 1..N : j \neq i : C_j = C'_j$  et  $C_i \longrightarrow_P C'$
- ② sending :  $C \longrightarrow C'$  : il existe  $P$  de  $\{P_1, \dots, P_n\}$  avec  $P = P_i$  tel que  $\forall j \in 1..N : C_j = C'_j$  et  $M_2 = M_1 \cup \{m\}$  où  $m \in \mathcal{M}$  et  $(C_i, m, C'_i) \in \longrightarrow_{P_s} C'$

soient  $C$  et  $C'$  deux configurations de  $\mathcal{C}$  :

- ① local :  $C \longrightarrow C'$  : il existe  $P$  de  $\{P_1, \dots, P_n\}$  avec  $P = P_i$  tel que  $\forall j \in 1..N : j \neq i : C_j = C'_j$  et  $C_i \longrightarrow_P C'$
- ② sending :  $C \longrightarrow C'$  : il existe  $P$  de  $\{P_1, \dots, P_n\}$  avec  $P = P_i$  tel que  $\forall j \in 1..N : C_j = C'_j$  et  $M_2 = M_1 \cup \{m\}$  où  $m \in \mathcal{M}$  et  $(C_i, m, C'_i) \in \longrightarrow_{P_s} C'$
- ③ receiving :  $C \longrightarrow C'$  : il existe  $P$  de  $\{P_1, \dots, P_n\}$  avec  $P = P_i$  tel que  $\forall j \in 1..N : C_j = C'_j$  et  $M_1 = M_2 \cup \{m\}$  où  $m \in \mathcal{M}$  et  $(C_i, m, C'_i) \in \longrightarrow_{P_r} C'$

# Propriétés des algorithmes répartis

---

# Propriétés des algorithmes répartis

---

- *safety* : toutes les configurations d'un algorithme réparti vérifie une propriété  $A$

# Propriétés des algorithmes répartis

---

- *safety* : toutes les configurations d'un algorithme réparti vérifie une propriété  $A$
- *équité faible* : toute transition activable ou observable à partir d'une configuration donnée finit par être observée

# Propriétés des algorithmes répartis

---

- *safety* : toutes les configurations d'un algorithme réparti vérifie une propriété  $A$
- *équité faible* : toute transition activable ou observable à partir d'une configuration donnée finit par être observée
- *équité forte* : toute transition infiniment souvent activable ou observable à partir d'une configuration donnée finit par être observée

## Propriétés des algorithmes répartis

- *safety* : toutes les configurations d'un algorithme réparti vérifie une propriété  $A$
- *équité faible* : toute transition activable ou observable à partir d'une configuration donnée finit par être observée
- *équité forte* : toute transition infiniment souvent activable ou observable à partir d'une configuration donnée finit par être observée
- $P \rightsquigarrow Q$  : A partir de toute configuration satisfaisant une propriété  $P$ , l'algorithme réparti atteindra fatalement une configuration satisfaisant  $Q$ .



# Exemples de propriété de sûreté

---

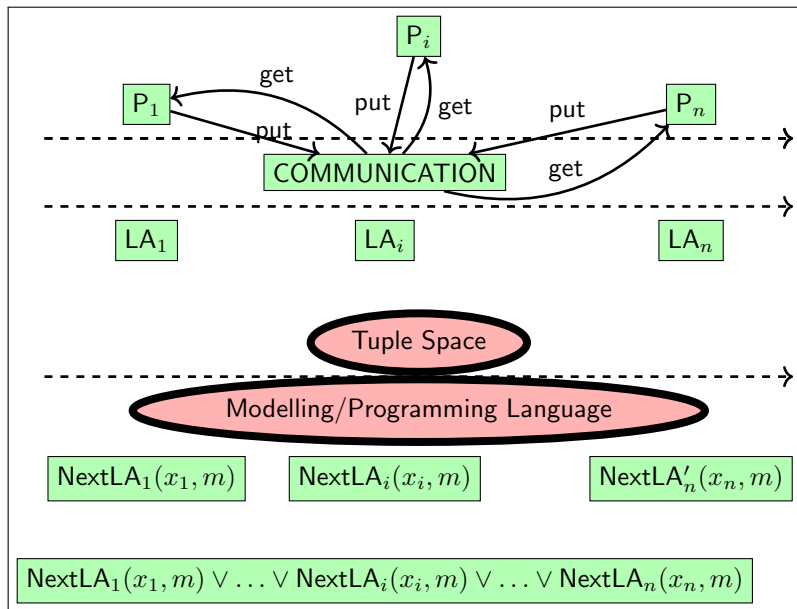
- Exclusion mutuelle : soit une ressource  $R$  partagée par un ensemble de processus  $\{P_1, \dots, P_n\}$ .  $R$  est utilisée par au plus un processus de  $\{P_1, \dots, P_n\}$ .
- La ressource  $R$  est utilisée par au plus un processus  $P$  du système réparti.
- Absence de blocage : soit les processus  $\{P_1, \dots, P_n\}$ . Aucun des processus n'est bloqué c'est à dire que tout processus peut toujours exécuté une action sauf s'il est terminé.
- Correction Partielle : étant donné un processus de calcul caractérisé par un ensemble d'actions ou d'événements. Si les variables satisfont une précondition  $PRE(x)$ , alors si le processus termine, les variables satisfont  $POST(x)$ .
- Une propriété de sûreté exprime que rien de mauvais ne peut arriver !

# Exemples de propriétés générales

---

- Chaque fois que le système entre dans une configuration instable, il finira par retrouver un état stable au bout d'un temps fini.
- Le processus P envoie infiniment souvent des messages au processys Q.
- Tout demande est servie.
- Les messages sont *toujours* reçus dans l'ordre d'envoi.
- Si un calcul réparti est lancé sur une ensemble de nœuds, le calcul finira par se terminer fatalement.





# Section Courante

---

- ① Modélisation d'algorithmes et de systèmes répartis
- ② Modélisation relationnelle
- ③ Introduction au langage TLA<sup>+</sup>
  - Exemple 1 : un protocole simple de communication entre agents
  - Exemple 2 : Réseaux de Petri
- ④ Modélisation et vérification avec le langage TLA<sup>+</sup>
- ⑤ Processus en PlusCal
- ⑥ Conclusion

]

# Modèle relationnel d'un système

---

Un modèle relationnel  $\mathcal{MS}$  pour un système  $S$  est une structure

$$(Th(s, c), x, \text{VALS}, \text{INIT}(x), \{r_0, \dots, r_n\})$$

où

- $Th(s, c)$  est une théorie définissant les ensembles, les constantes et les propriétés statiques de ces éléments.
- $x$  est une liste de variables flexibles.
- $\text{VALS}$  est un ensemble de valeurs possibles pour  $x$ .
- $\{r_0, \dots, r_n\}$  est un ensemble fini de relations reliant les valeurs avant  $x$  et les valeurs après  $x'$ .
- $\text{INIT}(x)$  définit l'ensemble des valeurs initiales de  $x$ .
- la relation  $r_0$  est la relation  $\text{Id}[\text{VALS}]$ , identité sur  $\text{VALS}$ .

## Definition

Soit  $(Th(s, c), x, \text{VALS}, \text{INIT}(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel d'un système  $\mathcal{S}$ . La relation NEXT associée à ce modèle est définie par la disjonction des relations  $r_i$  :

$$\text{NEXT} \stackrel{\text{def}}{=} r_0 \vee \dots \vee r_n$$

i

pour une variable  $x$ , nous définissons les valeurs suivantes :

- $x$  est la valeur courante de la variable  $x$ .
- $x'$  est la valeur suivante de la variable  $x$ .
- $x_0$  ou  $\underline{x}$  sont la valeur initiale de la variable  $x$ .
- $\bar{x}$  est la valeur finale de la variable  $x$ , quand cette notion a du sens.

# Exemples de systèmes de transition

---

- Une grammaire  $(N, T, P, S)$  permet de construire un système de transition sur l'ensemble des configurations  $(N \cup T)^*$ .
- Une machine de Turing  $(Q, \Sigma, \Gamma, B, \delta)$  permet de construire un système de transition sur l'ensemble des configurations  $(\Sigma \cup \Gamma)^*$ .
- Un réseau de Petri
- Un programme



- ① Modélisation d'algorithmes et de systèmes répartis
- ② Modélisation relationnelle
- ③ Introduction au langage TLA<sup>+</sup>
  - Exemple 1 : un protocole simple de communication entre agents
  - Exemple 2 : Réseaux de Petri
- ④ Modélisation et vérification avec le langage TLA<sup>+</sup>
- ⑤ Processus en PlusCal
- ⑥ Conclusion

]

- Le système est modélisé par
  - ▶ une liste de variables flexibles  $x$  et une condition initiale notée  $Init(x)$
  - ▶ une relation de transition modélisant le passage des variables flexibles de l'état courant à l'état suivant  $Next(x, x')$
  - ▶ un invariant inductif noté  $I(x)$
  - ▶ une liste de propriétés de sûreté

1 Modélisation d'algorithmes et de systèmes répartis

2 Modélisation relationnelle

3 Introduction au langage TLA<sup>+</sup>

Exemple 1 : un protocole simple de communication entre agents

Exemple 2 : Réseaux de Petri

4 Modélisation et vérification avec le langage TLA<sup>+</sup>

5 Processus en PlusCal

6 Conclusion

# Définir un protocole simple avec TLA<sup>+</sup>

- Envoi de messages
- Modélisation par des ensembles de messages envoyés ou reçus.

$$\begin{aligned} \text{sending}(\text{agent}, \text{message}, \text{bgent}) &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &\wedge \text{agent} \in \text{AGENTS} \\ &\wedge \text{bgent} \in \text{AGENTS} \\ &\wedge \text{message} \in \text{MESSAGES} \\ &\wedge \langle \langle \text{agent}, \text{message}, \text{bgent} \rangle \rangle \notin \text{sent} \\ &\wedge \langle \langle \text{agent}, \text{message}, \text{bgent} \rangle \rangle \notin \text{got} \\ &\wedge \text{sent}' = \text{sent} \cup \langle \langle \text{agent}, \text{message}, \text{bgent} \rangle \rangle \\ &\wedge \text{got}' = \text{got} \end{aligned}$$

# Définir un protocole simple avec TLA<sup>+</sup>

- Réception de messages
- Modélisation par des ensembles de messages envoyés ou reçus.

$$\begin{aligned} \text{receiving}(\text{agent}, \text{message}, \text{bgent}) &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &\wedge \text{agent} \in \text{AGENTS} \\ &\wedge \text{bgent} \in \text{AGENTS} \\ &\wedge \text{message} \in \text{MESSAGES} \\ &\wedge \langle \langle \text{agent}, \text{message}, \text{bgent} \rangle \rangle \in \text{sent} \\ &\wedge \langle \langle \text{agent}, \text{message}, \text{bgent} \rangle \rangle \notin \text{got} \\ &\wedge \text{got}' = \text{got} \cup \langle \langle \text{agent}, \text{message}, \text{bgent} \rangle \rangle \\ &\wedge \text{sent}' = \text{sent} \end{aligned}$$

# Définir un protocole simple avec TLA<sup>+</sup>

- Définir le système
- Donner des propriétés de sûreté

$$Init \stackrel{def}{=} sent = \emptyset \wedge got = \emptyset$$

$$Next \stackrel{def}{=} \\ \exists agent, bgent \in AGENTS : \\ \exists message \in MESSAGES : \\ \quad \vee \text{ sending}(agent, message, bgent) \\ \quad \vee \text{ receiving}(agent, message, bgent)$$

## ... et les messages se perdent parfois...

- Le système de gestion des communications peut être non fiable et perdre des messages.
- $\text{loosing}(\text{agent}, \text{message}, \text{bgent})$  modélise la perte d'un message.

$$\begin{aligned} \text{loosing}(\text{agent}, \text{message}, \text{bgent}) &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &\wedge \text{agent} \in \text{AGENTS} \\ &\wedge \text{bgent} \in \text{AGENTS} \\ &\wedge \text{message} \in \text{MESSAGES} \\ &\wedge \langle \langle \text{agent}, \text{message}, \text{bgent} \rangle \rangle \in \text{sent} \\ &\wedge \langle \langle \text{agent}, \text{message}, \text{bgent} \rangle \rangle \notin \text{got} \\ &\wedge \text{got}' = \text{got} - \langle \langle \text{agent}, \text{message}, \text{bgent} \rangle \rangle \\ &\wedge \text{sent}' = \text{sent} \end{aligned}$$

# Définir un protocole simple avec pertes

$$Init \stackrel{def}{=} sent = \emptyset \wedge got = \emptyset$$

$$Next \stackrel{def}{=} \\ \exists agent, bgent \in AGENTS : \\ \exists message \in MESSAGES : \\ \quad \vee \text{ sending}(agent, message, bgent) \\ \quad \vee \text{ receiving}(agent, message, bgent) \\ \quad \vee \text{ losing}(agent, message, bgent)$$

- sûreté *tout message reçu est envoyé*  $got \subseteq sent$



Il est possible que  $got = \emptyset$



1 Modélisation d'algorithmes et de systèmes répartis

2 Modélisation relationnelle

3 Introduction au langage TLA<sup>+</sup>

Exemple 1 : un protocole simple de communication entre agents

Exemple 2 : Réseaux de Petri

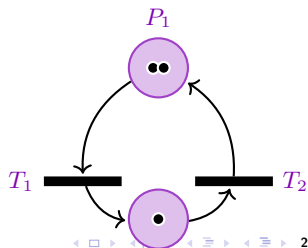
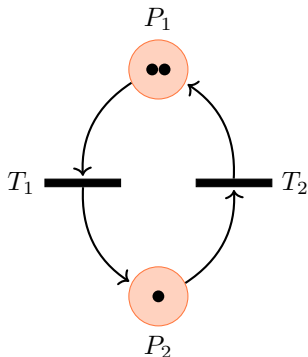
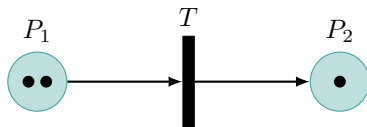
4 Modélisation et vérification avec le langage TLA<sup>+</sup>

5 Processus en PlusCal

6 Conclusion

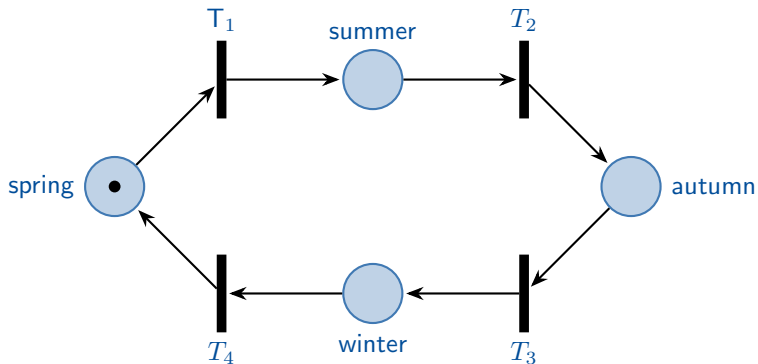
# Exemples de réseaux de Petri

- Graphes bipartis
- Places
- Transitions
- Capacité des places
- Consommation/production des jetons

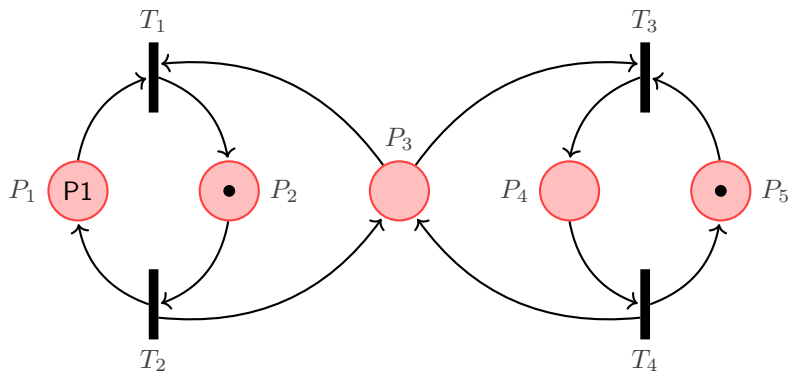


# Les quatre saisons ...

---

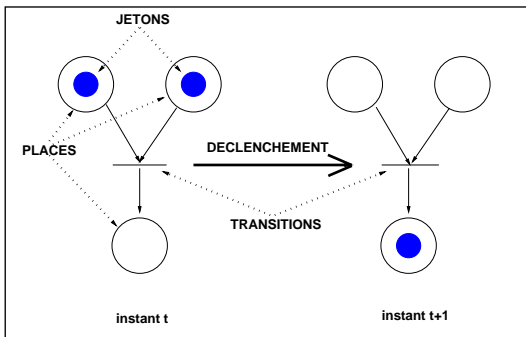


# Synchronisation de deux processus concurrents



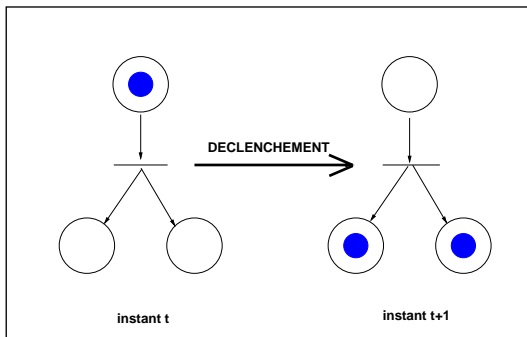
- Un réseau de Petri est un graphe dirigé biparti ayant des jetons constituant la marquage.
- Le réseau est caractérisé par son marquage qui évolue au cours de l'exécution des transitions
- Le déclenchement ou l'activation des transitions est fonction de conditions de ressources sur les places avant la transition et après la transition.

# Réseaux de Petri



- Les transitions peuvent soit consommer des jetons (synchronisation) soit produire de jetons (activités concurrentes) :
- Les ressources sont modélisées par les jetons présents et il peut y avoir une limitation de la capacité des places.

# Réseaux de Petri

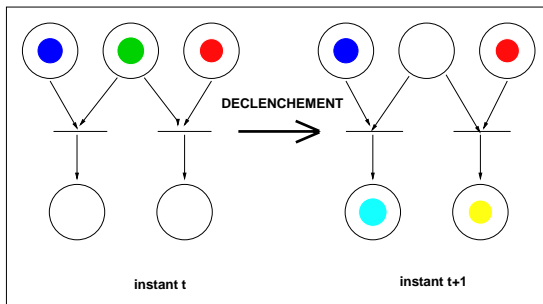




# Réseaux de Petri

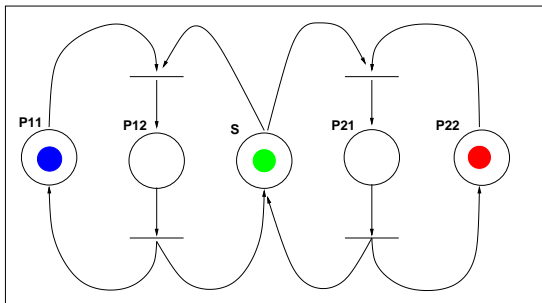
- Le partage d'une ressource est modélisé par le partage d'un jeton requis pour l'une ou l'autre des transitions possibles c'est-à-dire activable.
- Le jeton vert est consommé par l'une ou l'autre des deux transitions possibles.

# Réseaux de Petri



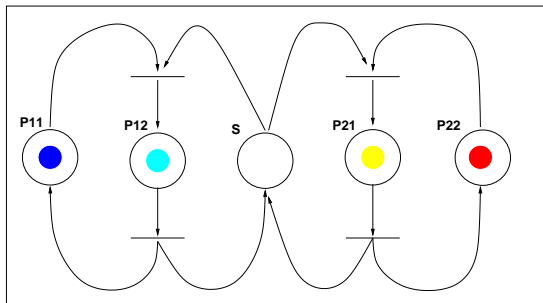
- La synchronisation de processus est réalisée par une place  $S$  qui est partagée par deux processus  $P1$  et  $P2$  :
- La propriété d'exclusion mutuelle est garantie par l'utilisation exclusive du jeton de la place  $S$  par les processus  $P1$  et  $P2$ .

# Réseaux de Petri



- Le déclenchement de l'une des deux transitions est possible quand le jeton vert est en place mais une seule est activée.
- Les réseaux de Petri (1962) ont été créés par **Carl Adam Petri** (avec un C et pas un K) et ont été largement utilisés par la communauté informatique et automatique.
- Des extensions ont été proposées notamment en colorant les jetons ou en ajoutant des probabilités aux transitions.

# Réseaux de Petri



Un réseau de Petri est un uple  $R=(S,T,F,K,M,W)$

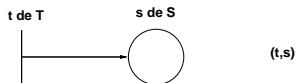
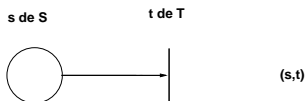
- $S$  est l'ensemble (fini) des places.
- $T$  est l'ensemble (fini) des transitions.
- $S \cap T = \emptyset$
- $F$  est la relation du flôt d'exécution :  
$$F \subseteq S \times T \cup T \times S$$
- $K$  représente la capacité de chaque place :  
$$K \in S \rightarrow \text{Nat} \cup \{\omega\}$$

- $M$  représente le initial marquage chaque place :  
 $M \in S \rightarrow \text{Nat}$  et vérifie la condition  $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$ .
- $W$  représente le poids de chaque arc :  
 $W \in F \rightarrow \text{Nat}$
- relation entre la représentation graphique et la définition textuelle :
- un marquage  $M$  pour  $R$  est une fonction de  $S$  dans  $\text{Nat}$   
 $M \in S \rightarrow \text{Nat}$   
et respectant la condition  $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$ .



# Réseaux de Petri

---



- une transition  $t$  de  $T$  est activable à partir de  $M$  un marquage de  $R$  si
  - ①  $\forall s \in \{ s' \in S \mid (s',t) \in F \} :$   
 $M(s) \geq W(s,t).$
  - ②  $\forall s \in \{ s' \in S \mid (t,s') \in F \} :$   
 $M(s) \leq K(s) - W(s,t).$
- Pour chaque transition  $t$  de  $T$ ,  $\text{Pre}(t)$  est l'ensemble des places conduisant à  $t$  et  $\text{Post}(t)$  est l'ensemble des places pointées par un lien depuis  $t$  :  
 $\text{Pre}(t) = \{ s' \in S : (s',t) \in F \}$   
 $\text{Post}(t) = \{ s' \in S : (t,s') \in F \}$

- Soit une transition  $t$  de  $T$  activable à partir de  $M$  un marquage de  $R$  :

①  $\forall s \in \{ s' \in S \mid (s', t) \in F \} :$

$$M(s) \geq W(s, t).$$

②  $\forall s \in \{ s' \in S \mid (t, s') \in F \} :$

$$M(s) \leq K(s) - W(s, t).$$

- un nouveau marquage  $M'$  est défini à partir de  $M$  par : '  $\forall s \in S,$

$$M'(s) = \begin{cases} M(s) - W(s, t), & \text{SI } s \in \text{PRE}(t) - \text{POST}(t) \\ M(s) + W(t, s), & \text{SI } s \in \text{POST}(t) - \text{PRE}(t) \\ M(s) - W(s, t) + W(t, s), & \text{SI } s \in \text{PRE}(t) \cap \text{POST}(t) \\ M(s), & \text{SINON} \end{cases}$$

- Une relation de transition sur l'ensemble des marquages possibles modélise l'activité du réseau :

$$M_0 \xrightarrow{T_0} M_1 \xrightarrow{T_1} M_2 \xrightarrow{T_2} M_3 \xrightarrow{T_3} M_4 \xrightarrow{T_4} \dots M_I \xrightarrow{T_I} M_{I+1} \xrightarrow{T_{I+1}} \dots$$

- Un réseau est bloqué, si aucune de ses transitions n'est activable.
- Un réseau est non bloqué en permanence ou vif, si initialement et pour tout marquage atteint au cours du calcul, au moins une transition est activable.

## Invariant de réseau de Petri

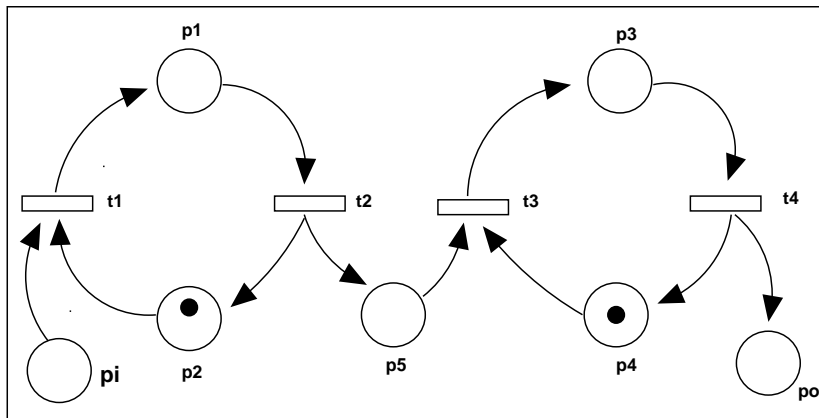
Un invariant de marquage pour un réseau de Petri est une expression de la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\exists p_1, \dots, p_n \in P : \exists q_1, \dots, q_n, C \in \mathbb{Z} : \\ &\forall M \in \mathcal{M} : q_1 M(p_1) + q_n M(p_n) = C \end{aligned}$$

- Les réseaux de Petri sont aussi représentés à l'aide de matrices pour leur flût et cela définit une algèbre sur les réseaux de Petri :  
 $M_K = M_I + W.S$  est l'équation fondamentale permettant de définir la relation de transition.
- Les réseaux de Petri permettent d'exprimer des contraintes de synchronisation

- Le modèle est aussi puissant que les machines de Turing
- Le modèle permet de modéliser les activités concurrentes et non déterministes.
- Le Graphcet est une forme proche des réseaux de Petri et est utilisé pour la modélisation des systèmes.
- La notion sous-jacente est celle des systèmes de transition discrets.

# Exemple d'un réseau de Petri



EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANTS *Places, N, Q, B*

VARIABLES *M*

t1  $\stackrel{def}{=}$

$$\wedge M["p2"] = 1 \wedge M["pi"] \geq 1 \wedge M["p1"] = 0$$

$$\wedge M' = [[[MEXCEPT!["p1"] = 1]EXCEPT!["pi"] = M["pi"] - 1]EXC$$

t2  $\stackrel{def}{=}$

$$\wedge M["p1"] = 1 \wedge M["p5"] \leq B$$

$$\wedge M' = [[[MEXCEPT!["p1"] = 0]EXCEPT!["p5"] = M["p5"] + 1]EXC$$

t3  $\stackrel{def}{=}$

$$\wedge M["p5"] \geq 1 \wedge M["p3"] = 0$$

$$\wedge M' = [[[MEXCEPT!["p3"] = 1]EXCEPT!["p5"] = M["p5"] - 1]EXC$$

t4  $\stackrel{def}{=}$

$$\wedge M["p3"] = 1 \wedge M["p4"] = 0 \wedge M["po"] < Q$$

$$\wedge M' = [[[MEXCEPT!["p3"] = 0]EXCEPT!["po"] = M["po"] + 1]EXC$$



$$Init1 \stackrel{def}{=} M = [p \in Places | - > IF p \in "p4", "p2" THEN 1 ELSE IF p$$
$$Init \stackrel{def}{=} Init1$$
$$Next \stackrel{def}{=} t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4$$
$$Petri \stackrel{def}{=} Init \wedge \square[Next]_{<M>}$$
$$TypeInvariant \stackrel{def}{=} \forall p \in Places : M[p] \geq 0$$
$$Inv1 \stackrel{def}{=} M["pi"] + M["p5"] + M["po"] + M["p1"] + M["p3"] = N$$
$$Inv2 \stackrel{def}{=} M["po"] \# Q$$
$$Inv3 \stackrel{def}{=} M["p5"] \# 1$$
$$Inv \stackrel{def}{=} TypeInvariant$$

# Choix de modélisation

---

- Donner le « quoi » : spécification de ce que fait le protocole

# Choix de modélisation

---

- Donner le « quoi » : spécification de ce que fait le protocole
  - ▶ envoi d'un message  $m$  par un processus  $P$  à un processus  $Q$

- Donner le « quoi » : spécification de ce que fait le protocole
  - ▶ envoi d'un message  $m$  par un processus  $P$  à un processus  $Q$
  - ▶ décomposition en plusieurs phases

- Donner le « quoi » : spécification de ce que fait le protocole
  - ▶ envoi d'un message  $m$  par un processus  $P$  à un processus  $Q$
  - ▶ décomposition en plusieurs phases
- Donner le « comment » : simulation du protocole par des événements et des phases des couches plus basses

# Section Courante

---

- ① Modélisation d'algorithmes et de systèmes répartis
- ② Modélisation relationnelle
- ③ Introduction au langage TLA<sup>+</sup>
  - Exemple 1 : un protocole simple de communication entre agents
  - Exemple 2 : Réseaux de Petri
- ④ Modélisation et vérification avec le langage TLA<sup>+</sup>**
- ⑤ Processus en PlusCal
- ⑥ Conclusion

]

# Définir un module en TLA<sup>+</sup>

---

- Définir les données : chaînes, nombres, ensembles, fonctions
- Définir les actions : relation entre des variables non primées et primées
- Définir le système : donner ses conditions initiales et la relation de transition
- Définir les propriétés : sûreté, non-blocage, accessibilité

- 1 L'entité de structuration syntaxique est le `MODULE` dont le nom *name* est utilisé comme identificateur du fichier en ajoutant le suffixe *.tla*
- 2 Un module peut étendre d'autres modules par la directive `EXTENDS` indiquant que tout ce qui est dans ces modules est utilisable dans le module courant
- 3 Un module peut déclarer des constantes par la directive `CONSTANTS` et ces constantes sont instanciées dans un modèle.
- 4 Un module peut déclarer des variables dites flexibles par la directive `VARIABLES` et chaque variable  $x$  a deux références possibles  $x$  valeur courante et  $x'$  valeur suivante
- 5 Un module peut définir une entité en indiquant son nom *name* et une expression *expr* comportant des éléments déjà définis :  
`name == expr`



# Conventions pour l'outil TLC

- Toute action est écrite sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l} name \stackrel{def}{=} \\ \quad \wedge G(x, y, u) \\ \quad \wedge u' = f(u) \\ \quad \wedge y' = y \end{array}$$

- $y$  est une variable qui n'est pas modifiée
- $f$  est une fonction calculable ou codable
- $x$  est une coinstante

## Un exemple simple et complet

```

----- MODULE pgcd -----
EXTENDS Naturals,TLC
CONSTANTS a,b
VARIABLES  x,y
-----

Init == x=a /\ y=b
-----

a1 == x > y /\ x'=x-y /\ y'=y
a2 == x < y /\ y'=y-x /\ x'=x
over == x=y /\ x'=x /\ y'=y
-----

Next == a1 \/ a2 \/ over
-----

test == x # y
prop == x \geq 0
prop2 == x+y \leq a+b
=====

```

# Section Courante

---

- ① Modélisation d'algorithmes et de systèmes répartis
- ② Modélisation relationnelle
- ③ Introduction au langage TLA<sup>+</sup>
  - Exemple 1 : un protocole simple de communication entre agents
  - Exemple 2 : Réseaux de Petri
- ④ Modélisation et vérification avec le langage TLA<sup>+</sup>
- ⑤ Processus en PlusCal
- ⑥ Conclusion

]

# Processes

---

```
—— MODULE module_name ——  
\* TLA+ code  
  
(* ——algorithm algorithm_name  
variables global_variables  
  
process p_name = ident  
variables local_variables  
begin  
  \* pluscal code  
end process  
  
process p_group \in set  
variables local_variables  
begin  
  \* pluscal code  
end process  
  
end algorithm; *)
```

# Macros and Procedures

---

```
macro Name(var1, ...)  
begin  
  \* something to write  
end macro;
```

```
procedure Name(arg1, ...)  
variables var1 = ... \* not \in, only =  
begin  
  Label:  
  \* something  
  return;  
end procedure;
```

# Exemples

---

```
process pro = "test"  
begin  
  print<<"test">>;  
end process
```

```
process (pro \in 0..8)  
begin  
  print<<"test",self>>;  
end process
```

- A multiprocess algorithm contains one or more processes.
- A process begins in one of two ways :
  - ▶ defining a set of processes : `process ( ProcName  $\in$  IdSet )`
  - ▶ defining one process with an identifier `process ( ProcName = Id )`
- `self` designates the current process
- Communication using shared variables defined as global variables
- Communication using sequences introduced by the EXTENDS  
Sequences and using operation over sequences as Head, Append  
and Tail

# processus R

---

```
—algorithm ex_process {  
  variables  
    input = <<>>, output = <<>>,  
    msgChan = <<>>, ackChan = <<>>,  
    newChan = <<>>;  
  /* defining macros  
    process (Sender = "S")  
    {  
  
    }; /* end Sender process block  
    process (Receiver = "R")  
    {  
  
    }; /* end Receiver process block  
  
  } /* end algorithm  
  \sec
```



## How to do

`await (expression) :`

- A step containing the statement `await expr` can be executed only when the value of the Boolean expression `expr` is `TRUE`.
- Although it usually appears at the beginning of a step, an `await` statement can appear anywhere within the step.
- `await` can be used as well as `when`

```

(*
algorithm Tut2 {
variables x = 0;

process (one = 1)

variables temp
{
  A:
    temp := x + 1;

    x := temp;
};

process (two = 2)

variables temp
{
  CC:
    temp := x + 1;

    x := temp;
};
}
end algorithm;

*)
\* BEGIN TRANSLATION (chksum(pcal) = "b54fa406" /\ chksum(tla) = "e84b4125")
\* Process variable temp of process one at line 10 col 11 changed to temp_
CONSTANT defaultInitValue
VARIABLES x, pc, temp_, temp

vars == << x, pc, temp_, temp >>

ProcSet == {1} \cup {2}

```

EXTENDS Integers, Sequences, TLC, FiniteSets

```

(*
—algorithm Tut3 {
  variables x = 0;

  process (one = 1)
  {
    A:
      x := x + 1;
    B:
      await x = 1;
    C:
      print <<"x=",x>>;
  };

  process (two = 2)
  {
    D:
      await x = 1;
    E:
      assert x = 1;
    F:
      x := x + 2;
  };
}

```

## How to do

Using macros for defining sending and receiving primitives over sequences.

```
—algorithm ex_process {  
  variables  
    input = <<>>, output = <<>>,  
    msgChan = <<>>, ackChan = <<>>,  
    newChan = <<>>;  
  macro Send(m, chan) {  
    chan := Append(chan, m);  
  }  
  macro Recv(v, chan) {  
    await chan # <<>>;  
    v := Head(chan);  
    chan := Tail(chan);  
  }  
}
```

\* Processes S and R

# Définir les processus S et R

---

```
—algorithm ex_process {
  variables
    input = <<>>, output = <<>>,
    msgChan = <<>>, ackChan = <<>>,
    newChan = <<>>;
  /* defining macros
    process (Sender = "S")
      variables msg;
      {
        sending:  Send(" Hello" , msgChan);
        printing:  print <<" Sender", input>>;
      }; /* end Sender process block
    process (Receiver = "R")
      {
        waiting:  Recv(msg, msgChan);
        adding:   output := Append(output, msg);
        printing:  print <<" Receiver", output>>;
      }; /* end Receiver process block
  } /* end algorithm
```

EXTENDS Integers , Sequences , TLC, FiniteSets

```

(*
—wf
—algorithm Tut1 {
  variables x = 0;

  process (one = 1)
  {
    A: assert x \in {0,1};
      x := x - 1;
    B: assert x \in {-1,0} ;
      x := x * 3;
    BB: assert x \in {-3,-2,0,1};
  };

  process (two = 2)
  {
    C: assert x \in {-3,-2,-1,0,1};
      x := x + 1;
    D:
      assert x \in {-2,-1,0,1,2};
  };
}

```

# Autres instructions

---

- `with` : `with (id ∈ S)` body is executed by executing the (possibly compound) statement body with identifier `id` equal to a nondeterministically chosen element of `S`.
- `either`
- `call`
- `return`
- `goto`

- ① Modélisation d'algorithmes et de systèmes répartis
- ② Modélisation relationnelle
- ③ Introduction au langage TLA<sup>+</sup>
  - Exemple 1 : un protocole simple de communication entre agents
  - Exemple 2 : Réseaux de Petri
- ④ Modélisation et vérification avec le langage TLA<sup>+</sup>
- ⑤ Processus en PlusCal
- ⑥ Conclusion

]



- Importance de l'abstraction
- Raffiner la vue des modèles
- Intégration du temps
- Intégration des probabilités