

---

## Cours MALG & MOVEX

# MOVEX2

## Modélisation synchrone

---

Dominique Méry  
Telecom Nancy, Université de Lorraine

---

Année universitaire 2023-2024

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous  
Modelling
- ④ Exemples de programmes  
LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes  
LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes  
LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes
- ⑩ Contrats

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes
- ⑩ Contrats

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes
- ⑩ Contrats

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)



- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

(Flôt de données)

## Listing 2 – count.lus

```
node COUNT (init,int incr:bool) returns (n: int);
let
    n = init ->
        (if reset then init else pre(n) +incr);
tel;
```

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique.

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique.

(Flôt de données)

## Listing 4 – dataflow1.lus

```
— count
node count(x,y:int)  returns (r: int);
let
    r = 5*(x+y);
tel
```

- ▶ production : Un flôt d'entrées produit un flôt (flux) de sorties :

$$f\text{lot} \in \text{input}^N \rightarrow \text{outpout}^N$$

$$f\text{lot}(i_0, i_1, \dots, i_n) = (o_0, o_1, \dots, o_n)$$

- ▶ réaction :

$$f\text{lot} \in \text{input} \times \text{state} \rightarrow \text{output} \times \text{state}$$

$$f\text{lot}(in, s_t) = (out, s_{t+1})$$

Le code engendré correspond à la fonction de cycle.

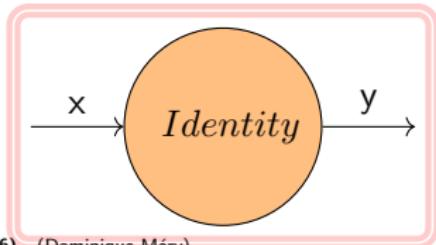
## Forme générale d'un module LUSTRE

```
node  $f(x_1 : \alpha_1, \dots, x_n : \alpha_n)$  returns  $(y_1 : \beta_1, \dots, y_m : \beta_m)$ 
var  $z_1 : \gamma_1, \dots, z_k : \gamma_k$ ;
let
 $z_1 = \delta_1; \dots; z_k = \delta_k$ ;
 $y_1 = \epsilon_1; \dots; y_m = \epsilon_m$ ;
assert  $P_1; \dots; \text{assert } P_l$ ;
tel
```

### Node Identity

```
node I(x : int) returns (y : int)
let
  y = x
  assert x = y;
tel
```

- ▶ Copie de la stream x vers la stream y.
- ▶  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$
- ▶ recopie
- ▶  $y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots)$



- ▶ Un programme LUSTRE est une liste de modules appelés des nœuds.
- ▶ Tous les nœuds fonctionnent de manière synchrone.
- ▶ Les communications sont réalisées via les inputs et les outputs.
- ▶ Les équations doivent avoir des solutions et ne sont pas des affectations.

- ▶ Toutes les variables, constantes et expressions sont des streams.
- ▶ Les opérations classiques sont étendues sur les streams :
  - $x = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$
  - $y = (1, 2, 3, 4, \dots)$
  - $x+y = (1, 3, 5, 7, \dots)$
- ▶ Chaque stream correspond à une horloge.

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes

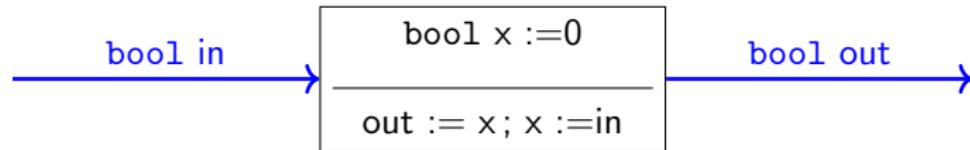
## Synchronous Reactive Component (R. Alur)

A Synchronous Reactive Component C is defined by :

- ▶ a finite set  $I$  of typed input variables defining the set of  $Q_I$  of inputs.
  - ▶ a finite set  $O$  of typed output variables defining the set of  $Q_O$  of outputs.
  - ▶ a finite set  $S$  of typed state variables defining the set of  $Q_S$  of states.
  - ▶ an initialisation  $\text{Init}$  defining the set  $[\text{Init}] \subseteq Q_S$  of initial states
  - ▶ a reaction description  $\text{React}$  defining the set  $[\text{React}]$  of reactions of the form  $s \xrightarrow{i/o} s'$  where  $i \in Q_I, o \in Q_O, s, s' \in Q_S$ .
- 
- ▶ an execution of a synchronous reactive component C is a sequence :  
$$s_0 \xrightarrow{i_1/o_1} s_1 \xrightarrow{i_2/o_2} \dots s \xrightarrow{i/o} s' \dots$$

## A simple example I

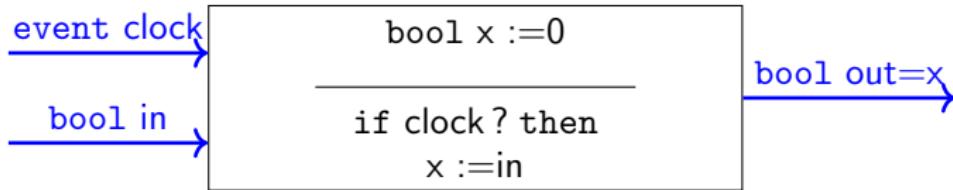
---



- ▶  $0 \xrightarrow{1/0} 1;$
- ▶  $0 \xrightarrow{1/0} 1$
- ▶  $1 \xrightarrow{0/1} 0;$
- ▶  $1 \xrightarrow{1/1} 1;$

## A simple example II

---



- ▶  $0 \xrightarrow{(1,\perp)/0} 0;$
- ▶  $0 \xrightarrow{(1,\top)/1} 1;$
- ▶  $1 \xrightarrow{(0,\perp)/1} 1;$
- ▶  $1 \xrightarrow{(1,\perp)/1} 1;$
- ▶  $1 \xrightarrow{(0,\top)/0} 0;$

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes

- ▶ Development Tools for Critical Reactive Systems using the Synchronous Approach The Verimag Reactive Tool Box
- ▶ Compilation of LUSTRE program into C programs.

- ▶ Automatic analysis of LUSTRE programs
- ▶ SMT-based tools
- ▶ k-induction

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes

## Exemple de programme LUSTRE (1)

(Sommation)

### Listing 5 – sum.lus

```
— the current value of Sum(X) is the sum of all values of X up to now
node sum (X: int) returns (S: int);
let
    S = X -> X + (pre S);
tel
```

—	0	1	2	3	4	5	...	
—	<hr/>							
—	X =	5,	3,	-1,	2,	7,	8,	...
—	S =	5,	8,	7,	9,	16,	24,	...

## Exemple de programme LUSTRE (2)

(Fibonacci)

### Listing 6 – fibo.lus

---

— This node produces the Fibonacci series: 1,1,2,3,5,8,13,21....

---

```
node fibo(_:bool) returns(Fib: int);
let
    Fib = 1 -> pre (1 -> Fib + pre Fib);
tel
```

## Exemple de programme LUSTRE (3)

(Opérations)

Listing 7 – operations.lus

```
— operations over nodes
node op (X: int;Y:int) returns (S,P,POLY,POLY2:int;TEST:bool);
let
    S = X + Y;
    P = X*Y;
    POLY = X*X + 2*X*Y + Y*Y;
    POLY2 = S*S;
    TEST = (POLY = POLY2);
    check TEST;
tel
```

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes

- ▶ Toutes les expressions sont des streams.
- ▶ Les opérateurs d'horloge modifient la temporalité des streams et le résultat est stream :
  - `pre s` pour toute stream s.
  - `s1 -> s2` *s1 suivi de s2*.
  - `s1 when s2` *échantillonnage*
  - `current s` pour toute stream s.

- ▶  $\llbracket \sigma \rrbracket \stackrel{def}{=} (\sigma_0, \sigma_1, \dots)$
- ▶  $\llbracket \text{pre}(\sigma) \rrbracket \stackrel{def}{=} (\perp, \sigma_0, \sigma_1, \dots)$
- ▶  $\llbracket \sigma - >\tau \rrbracket \stackrel{def}{=} (\sigma_0, \tau_1, \tau_2, \dots)$
- ▶  $\llbracket \sigma \text{ when } \varphi \rrbracket \stackrel{def}{=} (\sigma_{t_0}, \tau_{t_1}, \tau_{t_2}, \dots)$  où la suite des  $t_i$  est la suite des instants validant  $\varphi$  dans la suite  $\sigma$ .
- ▶  $\llbracket \text{current}(\sigma \text{ when } \varphi) \rrbracket \stackrel{def}{=} (\perp, \dots, \perp, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_2}, \dots)$

## Exemple d'horloges

(Horloge)

Listing 8 – clock1.lus

```
node clock1(b: bool) returns (y: int);
var n:int;
var e:bool;
var f:int;
let
    n = 0 -> pre(n)+1;
    e = true -> not pre(e);
    f = current ( n when e );
    y = current ( n when e ) div 2;
tel
```



current n'est pas supporté.

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes

# Semantical Concepts for Reactive Programming

►

4	4	4	...	4	...
x	$x_0$	$x_1$	...	$x_n$	...
y	$y_0$	$y_1$	...	$y_n$	...
$x+y$	$x_0+y_0$	$x_1+y_1$	...	$x_n+y_n$	...

►

x	$x_0$	$x_1$	...	$x_n$	...
pre x	<i>NIL</i>	$x_0$	...	$x_{n-1}$	...

►

x	$x_0$	$x_1$	...	$x_n$	...
y	$y_0$	$y_1$	...	$y_n$	...
$x \rightarrow y$	$x_0$	$y_1$	...	$y_n$	...

► nat = 0  $\rightarrow$  (1 + pre nat)

►

h	true	false	true	true	false
x	$x_0$	$x_1$	...	$x_n$	...
x when h	$x_0$	—	$x_2$	$x_3$	—

- ▶ Un programme LUSTRE s'appelle un nœud ou NODE.
- ▶ Un programme LUSTRE dénote une suite infinie de valeurs comme suit :  $(x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots)$
- ▶ Deux opérateurs sur les programmes :
  - pre
  - $\rightarrow$
- ▶  $\forall n \geq 0. CUP_{n+1} = CUP_n + 1$  s'écrira  
 $CUP = 0 \rightarrow (1 + \text{pre}(CUP))$
- ▶ et produira la suite  $(0 \ 1 \ 2 \ \dots)$ .
- ▶  $FIB = 0 \rightarrow 1 \rightarrow (\text{pre}(FIB) + \text{pre}(\text{pre}(FIB)))$

```
node EDGE(X : bool) returns (Y : bool)
let
  Y = false → X and not pre(X)
tel
```

désigne la suite  $(false, x_1 \wedge \neg x_0, x_2 \wedge \neg x_1, \dots)$

## ► Counter

$C = 0 \rightarrow \text{pre}(C)+1$  renvoie la suite des naturels

$C = 0 \rightarrow \text{if } X \text{ then } \text{pre}(C)+1 \text{ else } \text{pre}(C)$

compte le nombre d'occurrences de  $X$  qui sont vraies.

On ignore la valeur initiale

$PC = 0 \rightarrow \text{pre}(C)$

$C = \text{if } X \text{ then } PC+1 \text{ else } PC$



```
nodeCOUNTER(init, incr : int; X, reset : bool) returns (C : int)  
let
```

*PC = init -> pre C*

*C = if reset then init*

*else if X then (PC+incr)*

*else PC;*

*tel*

- ▶ *odds = COUNTER(0, 2, true, true -> false)* **définit les entiers impairs.**

► Deux opérateurs sur les programmes :

- pre
- $\rightarrow$

T

- $X \text{ when } B$
- current  $X$
- assert
- assert not ( $x$  and  $y$ )
  - assert (true-  $>$  not( $x$  and pre( $x$ )))

```
node COUNTER(init,incr:int; X,reset:bool) returns (C:int)
let
    PC=init-> pre C
    C = if reset then init
        else if X then (PC+incr)
        else PC;
tel
```

- ▶  $odds = COUNTER(0, 2, true, true -> false)$  définit les entiers impairs.

- ▶ Deux opérateurs sur les programmes :
  - pre
  - $\rightarrow$
- ▶  $X \text{ when } B$  : filtre de  $X$  quand la valeur de  $B$  est vraie.
- ▶ current  $X$  : interpolation de  $X$
- ▶ and, not, or, xor, ... sont des opérateurs booléens sur les streams.
- ▶ assert
  - assert not ( $x$  and  $y$ )
  - assert ( $true -> not(x)$  and pre( $x$ )))
- ▶ réutilisation de nœuds

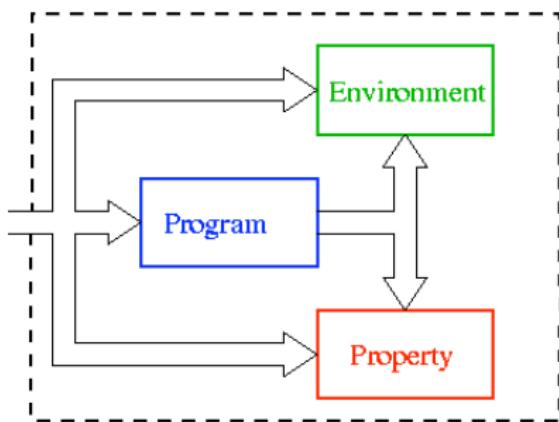
```
node FALLING_EDGE(X:bool) returns (Y:bool)
let
    Y= EDGE(not X);
tel
```

- ▶ Soit  $f$  une fonction du temps à valeurs réelles et on souhaite l'intégrer selon la méthode des trapèzes.
- ▶ Deux valeurs sont reçues par le programme  $F_n = f(x_n)$  et  $x_{n+1} = x_n + STEP_{n+1}$
- ▶ Calcul de  $Y$  :  $Y_{n+1} = Y_n + (F_n + F_{n+1}) \cdot STEP_{n+1} / 2$
- ▶ La valeur de  $Y$  est une donnée

```
node integration(F,STEP,init:real) returns (Y:real)
let
    Y= init -> pre(Y)+ ((F + pre(F))*STEP)/2.0;
tel
```

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes

- ▶ Description de la propriété à vérifier et les hypothèses de l'environnement
- ▶ Un observateur d'une propriété de sûreté est un programme qui utilise comme entrée les entrées-sorties du programme à vérifier et décide en émettant un signal à chaque instant si la propriété est violée ou non



- ▶ Transformer un signal en niveau par un switch qui est utilisé comme suit :
  - deux signaux possibles en entrée set et reset
  - une valeur initiale initial
  - toute occurrence de set fait passer le niveau à true
  - toute occurrence de reset fait passer le niveau à false
  - quand aucun des signaux n'apparaît, le niveau ne change pas
- ▶ un signal est modélisé comme un booléen :

```
node SWITCH1(set,reset,initial: bool) returns (level:bool)
let
    level = initial -> if set then true
                    else if reset then false
                    else pre(level);
tel
```

- ▶ Problème : ce programme ne modélise pas un switch à un bouton :

```
state = SWITCH1(change,change,true)
```

- Transformer un signal en niveau par un switch qui est utilisé comme suit :

- deux signaux possibles en entrée set et reset
- une valeur initiale initial
- toute occurrence de set fait passer le niveau à true
- toute occurrence de reset fait passer le niveau à false
- quand aucun des signaux n'apparaît, le niveau ne change pas

► node SWITCH(set,reset,initial: bool) returns (level:bool)  
let  
    level = initial -> if set and not pre(level) then true  
                          else if reset then false  
                          else pre(level);  
tel

- Vérification :

node verification(set,reset,initial: bool) returns (ok:bool)  
let  
    level = SWITCH(set,reset,initial);  
    level1 = SWITCH(set,reset,initial);  
    ok = (level = level1);  
    assert not(set and reset)  
tel

(power2 avec vérification)

## Listing 9 – power2prop.lus

```
— power2(_ ) contains all the square numbers in increasing order
— where  $0^2 = 0$ 
—  $(n+1)^2 = n^2 + 2*n + 1$ 
node power2(_ : bool) returns (P: int);
var W: int;
var P2:int;
var PROP:bool;
var N:int;
let
    — all the natural even numbers
    W = 1 -> (pre W) + 2;
    P = 0 -> (pre P) + (pre W);
    N = 0 -> (pre N)+1;
    P2 = N*N;
    PROP = P2 = P;
    check PROP;
tel
```

Application de la k-induction : kind2 --enable BMC --enable IND

① Modélisation synchrone (I)

② Synchronous Model

③ Tools for Synchronous Modelling

④ Exemples de programmes LUSTRE

⑤ Modélisation synchrone (II)

⑥ Le langage LUSTRE

⑦ Vérification de programmes LUSTRE

⑧ Propriétés des programmes LUSTRE

⑨ Sommaire sur les points-fixes

MOVEX2

Modélisation synchrone (14 janvier 2026) (Dominique Méry)

()

## Listing 10 – kindsession2/power2.lus

```
— power2(_) contains all the square numbers in increasing order
— where 0^2 = 0
—      (n+1)^2 = n^2 +2*n + 1
node power2() returns (P: int);
var W: int;
let
  — all the natural even numbers
  W = 1 -> (pre W) + 2;
  P = 0 -> (pre P) + (pre W);
tel
```

# Propriétés des programmes LUSTRE

()

## Listing 12 – kindsession2/power2.lus

```
— power2(_) contains all the square numbers in increasing order
— where  $0^2 = 0$ 
—  $(n+1)^2 = n^2 + 2*n + 1$ 
node power2() returns (P: int);
var W: int;
let
    — all the natural even numbers
    W = 1 -> (pre W) + 2;
    P = 0 -> (pre P) + (pre W);
tel
```

(--enable BMC --enable IND)

## Listing 13 – kindsession2/power2prop.lus

```
— power2(_) contains all the square numbers in increasing order
— where  $0^2 = 0$ 
—  $(n+1)^2 = n^2 + 2*n + 1$ 
include "power2.lus"
node power2prop() returns (P: int);
var P2,PP2,N:int;
var PROP:bool;
let
    PP2 = power2();
    N = 0 -> (pre N)+1;
    P2 = N*N;
    PROP = P2 = PP2;
    check PROP;
tel
MOVEX2
```

()

## Listing 14 – kindsession2/greycounter.lus

```
node greycounter (reset: bool) returns (out: bool);
var a, b: bool;
let
    a = false -> (not reset and not pre b);
    b = false -> (not reset and pre a);
    out = a and b;

tel
```

()

## Listing 15 – kindsession2/intcounter.lus

```
node intcounter (reset: bool; const max: int) returns (out: bool);
var t: int;
let
    t = 0 -> if reset or pre t = max then 0 else pre t + 1;
    out = t = 2;
tel
```

(Valid property)

## Listing 16 – kindsession2/ex1.lus

```
/* include */
include "greycounter.lus"

/* include */
include "intcounter.lus"

node top (reset: bool) returns (OK, OK2: bool);
var b, d: bool;
let
    b = greycounter(reset);
    d = intcounter(reset, 3);
    OK = b = d;
    —%PROPERTY OK;
tel
```

(Invalid property)

Listing 17 – kindsession2/ex2.lus

```
/* include */
include "greycounter.lus"

/* include */
include "intcounter.lus"

node top (reset: bool) returns (OK, OK2: bool);
var b, d: bool;
let
    b = greycounter(reset);
    d = intcounter(reset, 3);
    OK = b = d;
    OK2 = not d;
    — %PROPERTY OK;
    — %PROPERTY OK2;
tel
```

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes

### ☒ Definition

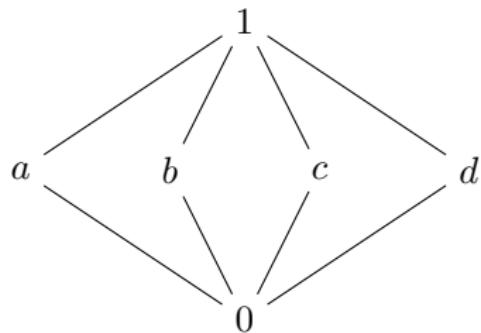
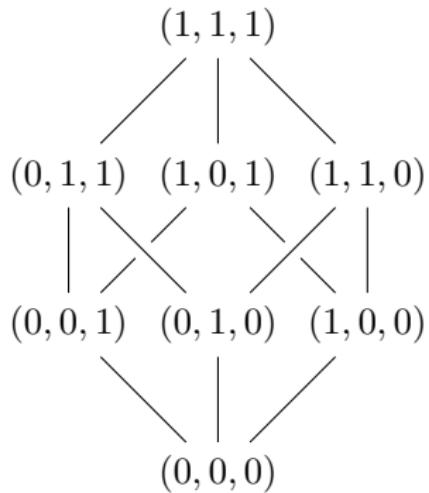
Un treillis complet  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$  est un treillis satisfaisant les propriétés suivantes :

- ① Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne supérieure notée  $\sqcup A$ .
- ② Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne inférieure notée  $\sqcap A$ .

- 
- ▶ Un treillis complet  $(L, \sqsubseteq, )$  peut être défini par les éléments suivants  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$
  - ▶ Un treillis est une structure munie d'un ordre partiel et telle que deux éléments ont une borne supérieure et une inférieure dans le treillis :  $(L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap)$ 
    - $a \sqcup b$  existe et est la borne supérieure des deux éléments a et b.
    - $a \sqcap b$  existe et est la borne inférieure des deux éléments a et b.

## Représentation par des diagrammes de Hasse

---



Pour une fonction  $f$  définie sur un treillis  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$  et à valeurs dans  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$ .

### Définition

- ▶ on appelle pré-point-fixe de  $f$ , tout élément  $x$  de  $L$  satisfaisant la propriété  $f(x) \sqsubseteq x$
  - ▶ on appelle post-point-fixe de  $f$ , tout élément  $x$  de  $L$  satisfaisant  $x \sqsubseteq f(x)$ .
- 
- ▶  $\text{PostFIX}(f) = \{x | x \in L \wedge x \sqsubseteq f(x)\}$  : l'ensemble des post-points-fixes de  $f$ .
  - ▶  $\text{PreFIX}(f) = \{x | x \in L \wedge f(x) \sqsubseteq x\}$  : l'ensemble des pré-points-fixes de  $f$ .
  - ▶  $\text{FIX}(f) = \{x | x \in L \wedge f(x) = x\}$  : l'ensemble des points-fixes de  $f$ .

### Théorème de Knaster-Tarski (I)

Soit  $f$  une fonction monotone croissante sur un treillis complet  $(T, \perp, \top, \vee, \wedge)$ . Alors il existe un plus petit point fixe et un plus grand point fixe pour  $f$ .

- ▶  $\mu f$  désigne le plus petit point fixe de  $f$ .
- ▶  $\nu f$  désigne le plus grand point fixe de  $f$ .
- ▶  $\mu f$  vérifie les propriétés suivantes :  $f(\mu f) = \mu f$  et  $\forall x \in T. f(x) \sqsubseteq x \Rightarrow \mu f \sqsubseteq x$  ( $\mu f$  est la borne inférieure des prépoints fixes de  $f$  ou  $\wedge(Pre(f))$ ).
- ▶  $\nu f$  vérifie les propriétés suivantes :  $f(\nu f) = \nu f$  et  $\forall x \in T. x \sqsubseteq f(x) \Rightarrow x \sqsubseteq \nu f$  ( $\nu f$  est la borne supérieure des postpoints fixes de  $f$  ou  $\vee(Post(f))$ ).

Posons  $y = \bigwedge\{x | f(x) \sqsubseteq x\}$  et montrons que  $y$  est un point fixe de  $f$  et que  $y$  est le plus petit point fixe de  $f$ .

### ① $f(y) \sqsubseteq y$

- Pour tout  $x$  de  $\{x | f(x) \sqsubseteq x\}$ ,  $y \sqsubseteq x$
- $f(y) \sqsubseteq f(x)$  (par monotonie de  $f$ ).
- $f(x) \sqsubseteq x$  (par définition de  $x$ ).
- $f(y) \sqsubseteq x$  (par déduction).
- $f(y) \sqsubseteq \bigwedge\{x | f(x) \sqsubseteq x\}$  (par définition de la borne inférieure,  $f(y)$  est un minorant).
- $f(y) \sqsubseteq y$

### ② $y \sqsubseteq f(y)$

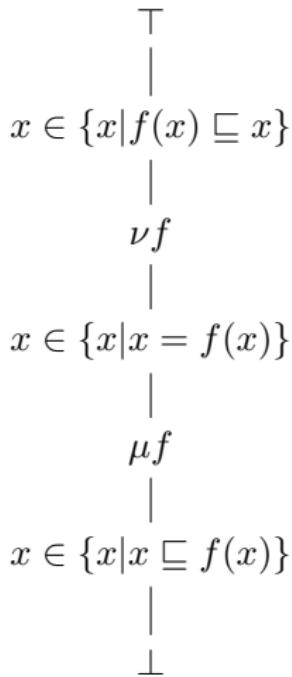
- $f(y) \sqsubseteq y$  (par le cas 1)
- $f(f(y)) \sqsubseteq f(y)$  (par monotonie de  $f$ )
- $f(y) \in \{x | f(x) \sqsubseteq x\}$
- $y \sqsubseteq f(y)$  (par définition de la borne inférieure)

### ③ Conclusion : $f(y) = y$ ou $y \in FIX(f)$ .

- ▶  $f(y) = y$  et  $z$  tel que  $f(z) = z$ 
  - $f(z) = z$  (par hypothèse sur  $z$ )
  - $f(z) \sqsubseteq z$  (par affaiblissement de l'égalité)
  - $z \in \{x|f(x) \sqsubseteq x\}$  (par définition de cet ensemble)
  - $y \sqsubseteq z$  (par construction)
- ▶  $y$  est le plus petit point fixe de  $f$ .

### lfp( $f$ ) et gfp( $f$ )

- ▶  $\mu f = lfp(f) = \bigwedge \{x|f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $\nu f = gfp(f) = \bigvee \{x|x \sqsubseteq f(x)\}$
- ▶  $lfp(f)$  signifie *least fixed-point*
- ▶  $gfp(f)$  signifie *greatest fixed-point*



- ▶  $\top = \sqcup \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $gfp(f) = \nu f = \sqcup \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$
- ▶  $lfp(f) = \mu f = \sqcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $\perp = \sqcap \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$

- ▶  $x \in \text{pre}(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)

- ▶  $x \in \text{pre}(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in \text{pre}(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)

- ▶  $x \in \text{pre}(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in \text{pre}(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in \text{pre}(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  ( croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )

- ▶  $x \in \text{pre}(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in \text{pre}(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in \text{pre}(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  ( croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ ))
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )
- ▶  $f(\mu f) \in pre(f)$  (définition des pré-points-fixes)

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )
- ▶  $f(\mu f) \in pre(f)$  (définition des pré-points-fixes)
- ▶  $\mu f \leq f(\mu f)$  (définition de  $\mu f$ )
- ▶  $\mu f = f(\mu f)$  (définition de  $\mu f$  et propriété précédente)

### Version constructive du théorème de Knaster-Tarski

Soit  $f$  une fonction monotone croissante sur un treillis complet  $(T, \perp, \top, \vee, \wedge)$ . Alors

- ① La structure formée des points fixes de  $f$  sur  $T$ ,  $(fp(f), \sqsubseteq)$  est un treillis complet non-vide.

$$fp(f) = \{x \in T : f(x) = x\}$$

- ②  $lfp(f) \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{\alpha} f^{\alpha}$  est le plus petit point fixe de  $f$  où :

$$\left\{ \begin{array}{lll} & f^0 & \stackrel{\text{def}}{=} \perp \\ \alpha \text{ ordinal successeur} & f^{\alpha+1} & \stackrel{\text{def}}{=} f(f^{\alpha}) \\ \alpha \text{ ordinal limite} & f^{\alpha} & \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{\beta < \alpha} f^{\beta} \end{array} \right.$$

- ③  $gfp(f) \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{\alpha} f_{\alpha}$  est le plus grand point fixe de  $f$  où

$$\left\{ \begin{array}{lll} & f_0 & \stackrel{\text{def}}{=} \top \\ \alpha \text{ ordinal successeur} & f_{\alpha+1} & \stackrel{\text{def}}{=} f(f_{\alpha}) \\ \alpha \text{ ordinal limite} & f_{\alpha} & \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{\beta < \alpha} f_{\beta} \end{array} \right.$$

# Computing the least fixed-point over a finite lattice

```
INPUT  $F \in T \rightarrow T$ 
OUTPUT  $result = \mu.F$ 
VARIABLES  $x, y \in T, i \in \mathbb{N}$ 
 $\ell_0 : \{x, y \in T\}$ 
 $x := \perp;$ 
 $y := \perp;$ 
 $i := 0;$ 
 $\ell_{11} : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T) \wedge i = 0\};$ 
WHILE  $i \leq Card(T)$ 
     $\ell_1 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$ 
     $x := F(x);$ 
     $\ell_2 : \{x, y \in T \wedge x = F^{i+1} \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$ 
     $y := x \sqcup y;$ 
     $\ell_3 : \{x, y \in T \wedge x = F^{i+1} \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i+1} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$ 
     $i := i+1;$ 
     $\ell_4 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)+1\};$ 
OD;
 $\ell_5 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i = Card(T)+1\};$ 
 $result := y;$ 
 $\ell_6 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i = Card(T)+1 \wedge result = y\};$ 
```

- ▶ Identify the safety property  $S$  to check.
- ▶ Run the algorithm for computing  $\mu F$ .
- ▶ Check that  $\mu F \subseteq S$  or  $\overline{S} \cap \mu F = \emptyset$ .
- ▶ Check that  $BUG \cap \mu F = \emptyset$ , when  $BUG$  is a set of states that you identify as *bad states*.

### Problem

- ▶ The general case is either infinite or large ... approximations of  $\mu F$ .
- ▶ Computing over abstract finite domain
- ▶ How to compute when it is not decidable ?
- ▶ Develop a framework for defining sound abstractions of software systems under analysis.

- ▶  $S$  is the set of states
- ▶  $(\mathcal{P}(S \times S), \subseteq)$  is a complete lattice.
- ▶  $R \subseteq S \times S$  is a binary relation over  $S$  simulating the computation or the transition as  $\text{Next}(x, x')$ .
- ▶  $F \in \mathcal{P}(S \times S) \rightarrow \mathcal{P}(S \times S)$  is defined by the following expression :
  - $X \subseteq S \times S$
  - $I = \{(s, s) | s \in S\}$
  - $F(X) = I \cup R; X$

### Transitive closure of $R$

- ▶  $F$  is a monotonous function.
- ▶  $F$  has a least-fixed point denoted  $\mu F$ .
- ▶  $\mu F = R^*$
- ▶  $\forall n \in \mathbb{N} : F^{n+1}(\emptyset) = \bigcup_{i=0}^n$
- ▶  $\bigcup_{n \geq 0} F^n = R^*$

- ▶  $G \subseteq S$  is the set of Good states.
- ▶  $I \subseteq S$  is the set of initial states.
- ▶  $\forall s_0, s \in S : s_0 \in I \wedge R^*(s_0, s) \Rightarrow s \in G$  (Expression of safety of G)
- ▶  $\forall s \in S : (\exists s_0. s_0 \in I \wedge R^*(s_0, s)) \Rightarrow s \in G$
- ▶  $R^*[I] \subset G$
- ▶  $R^*[I] = \bigcup_{n \geq 0} F^n[I] = \bigcup_{n \geq 0} G^n$
- ▶  $\bigcup_{n \geq 0} G^n \subseteq G$  (Expression de la safety)

### Techniques for checking

$\bigcup_{n \geq 0} G^n \subseteq G$  is checked using at least two possible techniques :

- ▶ Bounded Model Checking
- ▶ k-Induction
- ▶ ...

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes

(simple contrat)

### Listing 18 – kindsession2/contract0.lus

```
node g () returns ();
(* @contract
    assume true;
    guarantee true;
*)
const n = 7;
var t : int;
let
    t = n;
tel;
```

## Exemple de contrats

(simple contrat)

Listing 19 – kindsession2/contract1.lus

```
contract countSpec(trigger: bool; val: int) returns (count: int ; error: bool) ;  
  
let  
    assume val >= 0;  
    var initVal: int = val -> pre(initVal);  
    var once: bool = trigger or (false -> pre once) ;  
    guarantee count >= 0 ;  
  
mode still_zero (  
    require not once ;  
    ensure count = initVal ;  
) ;  
  
mode gt (  
    require not ::still_zero ;  
    ensure count > 0 ;  
) ;  
tel
```

### assumes

An assumption over a node  $n$  is a constraint one must respect in order to use  $n$  legally. It cannot depend on outputs of  $n$  in the current state, but referring to outputs under a pre is fine.

The idea is that it does not make sense to ask the caller to respect some constraints over the outputs of  $n$ , as the caller has no control over them other than the inputs it feeds  $n$  with.

The assumption may however depend on previous values of the outputs produced by  $n$ . Assumptions are given with the `assume` keyword, followed by any legal Boolean expression :



## guarantees

Unlike assumptions, guarantees do not have any restrictions on the streams they can depend on. They typically mention the outputs in the current state since they express the behavior of the node they specified under the assumptions of this node.

Guarantees are given with the guarantee keyword, followed by any legal Boolean expression :

## modes

A mode ( $R, E$ ) is a set of requires  $R$  and a set of ensures  $E$ .  
Modes are named to ease traceability and improve feedback.

(mode)

Listing 20 – kindsession2/mode.lus

```
mode <id> (
    [ require <expr> ; ]*
    [ ensure  <expr> ; ]*
);
```