

---

## Cours MALG & MOVEX

# Le langage de spécification ANSI/ISO C Specification Language (ACSL)

---

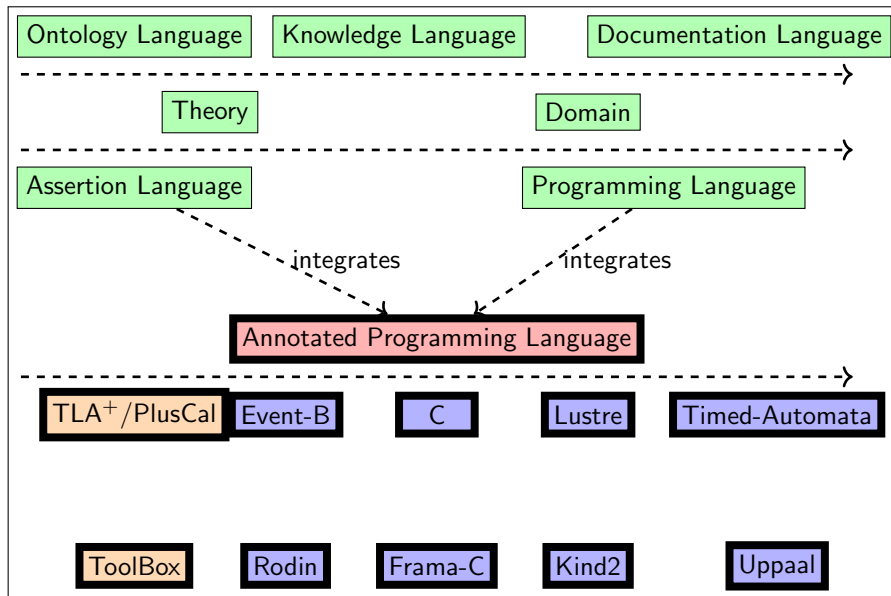
Dominique Méry  
Telecom Nancy, Université de Lorraine  
(31 mars 2025 at 9:06 A.M.)

---

Année universitaire 2024-2025

- ▶ Mise en œuvre de la notion de contrat et de la vérification des contrats pour le langage C avec Frama-c
- ▶ Apprentissage d'un langage d'annotations pour les programmes C.
- ▶ Utilisation de vérificateurs comme les solveurs SMT Z3, AlterErgo ou encore Why3

## Summary of concepts





►  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$

- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$

- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$

- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow \forall x. x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$



- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow \forall x. x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow [P] \text{post}(x_0, x_f)$

- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x, x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow \forall x. x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\forall x_0. \text{pre}(x_0) \Rightarrow [P]\text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $[x := e]P(x) = P[x \mapsto e]$
- ▶  $[\text{if } b(x) \text{ then } S1 \text{ else } S2]P(x) = b(x) \wedge [S1]P(x) \vee \text{not } b(x) [S2]P(x)$

►  $[\text{while } b(x) \text{ do } S \text{ end}]P(x) =$

- ▶  $[\text{while } b(x) \text{ do } S \text{ end}]P(x) =$
- ▶  $[\text{if } b(x) \text{ then } S; w \text{ else } skip]P(x) =$

- ▶  $[\text{while } b(x) \text{ do } S \text{ end}]P(x) =$
- ▶  $[\text{if } b(x) \text{ then } S; w \text{ else skip } ]P(x) =$
- ▶  $b(x) \wedge [S; w]P(x) \vee \text{ not } b(x) P(x) =$

- ▶  $[\text{while } b(x) \text{ do } S \text{ end}]P(x) =$
- ▶  $[\text{if } b(x) \text{ then } S; w \text{ else skip } ]P(x) =$
- ▶  $b(x) \wedge [S; w]P(x) \vee \text{ not } b(x) P(x) =$
- ▶  $b(x) \wedge [S]w(P(x)) \vee \text{ not } b(x) P(x) = w(P(x))$

### Listing 1 – difference de deux nombres

```
#include <limits.h>

/*@ requires a-b >= INT_MIN && a-b <= INT_MAX;
   assigns \nothing;
   ensures \result == (a - b);
*/
static int difference(int a, int b) {
    return a-b;
}
```

### Listing 2 – incrément de nombre

```
/*@ requires x0 >= 0;  
    assigns \nothing;  
    ensures \result == x0+2;  
    @*/
```

```
int exemple(int x0) {  
    int x=x0;  
    //@ assert x == x0;  
    x = x + 2;  
    //@ assert x == x0+2;  
    return x;  
}
```



- ▶ Un programme  $P$  *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :
  - STATES est l'ensemble de tous les états de  $P$  :  $STATES = X \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $X$  désigne les variables de  $P$ .
  - $s_0$  et  $s_f$  deux états de STATES :  $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  signifie que  $P$  est exécuté à partir d'un état  $s_0$  et produit un état  $s_f$ .
  - Pour un état  $s$  de  $P$  courant, on notera  $s(X) = x$  pour distinguer la valeur de la variable  $X$  et sa valeur courante en  $s$  :

- Un programme  $P$  *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :
- STATES est l'ensemble de tous les états de  $P$  :  $STATES = X \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $X$  désigne les variables de  $P$ .
  - $s_0$  et  $s_f$  deux états de STATES :  $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  signifie que  $P$  est exécuté à partir d'un état  $s_0$  et produit un état  $s_f$ .
  - Pour un état  $s$  de  $P$  courant, on notera  $s(X) = x$  pour distinguer la valeur de la variable  $X$  et sa valeur courante en  $s$  :

$$s_0(X) = x_0, s_f(X) = x_f, s'(X) = x'$$

- Un programme  $P$  *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :

- STATES est l'ensemble de tous les états de  $P$  :  $STATES = X \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $X$  désigne les variables de  $P$ .
- $s_0$  et  $s_f$  deux états de STATES :  $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  signifie que  $P$  est exécuté à partir d'un état  $s_0$  et produit un état  $s_f$ .
- Pour un état  $s$  de  $P$  courant, on notera  $s(X) = x$  pour distinguer la valeur de la variable  $X$  et sa valeur courante en  $s$  :

$$s_0(X) = x_0, s_f(X) = x_f, s'(X) = x'$$

- $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  définit la relation suivante sur l'ensemble des valeurs :

$$x_0 \xrightarrow{P} x_f$$

- Un programme  $P$  *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :

- STATES est l'ensemble de tous les états de  $P$  :  $STATES = X \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $X$  désigne les variables de  $P$ .
- $s_0$  et  $s_f$  deux états de STATES :  $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  signifie que  $P$  est exécuté à partir d'un état  $s_0$  et produit un état  $s_f$ .
- Pour un état  $s$  de  $P$  courant, on notera  $s(X) = x$  pour distinguer la valeur de la variable  $X$  et sa valeur courante en  $s$  :

$$s_0(X) = x_0, s_f(X) = x_f, s'(X) = x'$$

- $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$  définit la relation suivante sur l'ensemble des valeurs :

$$x_0 \xrightarrow{P} x_f$$

- Un programme  $P$  *remplit* un contrat (pre,post) :

- $P$  transforme une variable  $x$  à partir d'une valeur initiale  $x_0$  et produisant une valeur finale  $x_f$  :  $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- $x_0$  satisfait pre :  $\text{pre}(x_0)$
- $x_f$  satisfait post :  $\text{post}(x_0, x_f)$
- $\text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$

Un programme  $P$  *remplit* un contrat (pre,post) :

- ▶  $P$  transforme une variable  $x$  à partir d'une valeur initiale  $x_0$  et produisant une valeur finale  $x_f$  :  $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- ▶  $x_0$  satisfait pre :  $\text{pre}(x_0)$
- ▶  $x_f$  satisfait post :  $\text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$

```
requires pre(x0)
ensures post(x0, xf)
variables X
begin
  0 : P0(x0, x)
  instruction0
  ...
  i : Pi(x0, x)
  ...
  instructionf-1
  f : Pf(x0, x)
end
```

▶  $\text{pre}(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$

▶  $P_f(x_0, x) \Rightarrow \text{post}(x_0, x)$

▶ conditions de vérification pour toutes les paires  $\ell \longrightarrow \ell'$

$\forall v, v' \in \text{MEMORY}$

$$\left( \begin{array}{l} \text{pre}(x_0) \wedge P_\ell(v_0, v) \\ \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \end{array} \right) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$$

requires  $x_0 \geq 0$ ;  
ensures  $x_f = x_0 + 2$ ;  
variables  $X$

```
begin  
  int  $X = x_0$ ;  
  0 :  $x = x_0$   
   $X = X + 2$ ;  
  1 :  $x = x_0 + 2$   
end
```

- ▶  $x_0 \geq 0 \wedge x = x_0 \Rightarrow x = x_0$
- ▶  $x = x_0 + 2 \Rightarrow x = x_0 + 2$
- ▶ conditions de vérification  $0 \longrightarrow 1$  :  
 $x = x_0 \wedge x' = x + 2 \Rightarrow x' = x_0 + 2$
- ▶  $(x_0 \geq 0, x == x_0, x != x_0)$
- ▶  $(x == x_0 + 2, x != x_0 + 2)$
- ▶  $(x == x_0, x \neq x + 2, x \neq x_0 + 2)$

### Listing 3 – z3 en Python

```
from numbers import Real  
from z3 import *  
x = Real('x')  
xp = Real('xp')  
x0 = Real('x0')  
s = Solver()  
s.add(x0 >= 0, x == x0, x != x0)  
print(s.check())  
s.add(x == x0 + 2, x != x0 + 2)  
print(s.check())  
s.add(x == x0, xp == x + 2, xp != x0 + 2)  
print(s.check())
```

```
requires  $x_0 \geq 0$ ;  
ensures  $x_f = x_0 + 2$ ;  
variables  $X$ 
```

```
begin  
   $\text{int } X = x_0$ ;  
   $0 : x = x_0$   
   $X = X + 2$ ;  
   $1 : x = x_0 + 2$   
end
```

Conditions de vérification  $0 \longrightarrow 1$  :

- ▶  $x = x_0 \wedge x' = x + 2 \Rightarrow x' = x_0 + 2$
- ▶  $x = x_0 \Rightarrow (x' = x + 2 \Rightarrow x' = x_0 + 2)$
- ▶  $x = x_0 \Rightarrow (x + 2 = x_0 + 2)$
- ▶  $\text{wp}(X := X + 2)(x = x_0 + 2) = (x + 2 = x_0 + 2)$
- ▶  $x = x_0 \Rightarrow \text{wp}(X := X + 2)(x = x_0 + 2)$

- ▶  $x_0 \geq 0 \wedge x = x_0 \Rightarrow x = x_0$
- ▶  $x = x_0 + 2 \Rightarrow x = x_0 + 2$
- ▶  $x = x_0 \Rightarrow \text{wp}(X := X + 2)(x = x_0 + 2)$



calcul de  $\text{wp}(X := X + 2)(x = x_0 + 2)$

### Listing 4 – incrément de nombre

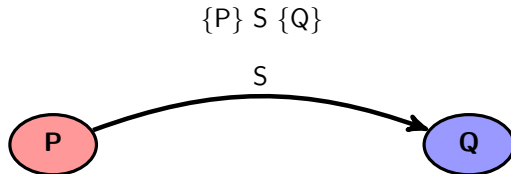
```
/*@ requires x0 >= 0;  
   assigns \nothing;  
   ensures \result == x0+1;  
  @*/  
  
int exemple(int x0) {  
    int x=x0;  
    //@ assert x == x0;  
    x = x + 2;  
    //@ assert x == x0+2;  
    return x;  
    //@ assert \result == x0+2;  
}
```

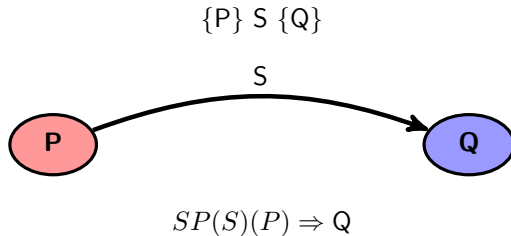


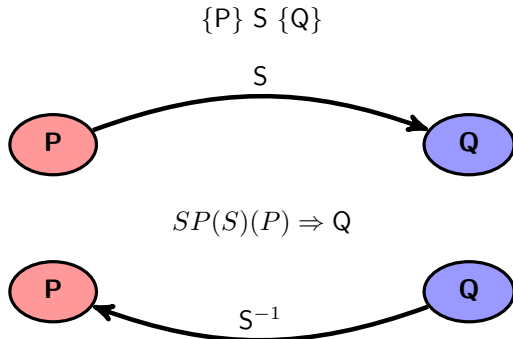
### Listing 5 – incrément de nombre

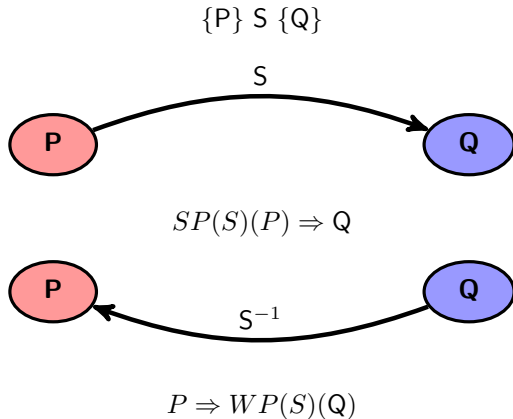
```
/*@ requires x0 >= 0;  
assigns \nothing;  
ensures \result == x0;  
@*/
```

```
int exemple(int x0) {  
    int x=x0;  
    //@ assert x == x0+1;  
    x = x + 2;  
    //@ assert x == x0+2;  
    return x;  
  
}
```









### Opérateur WP

Soit  $STATES$  l'ensemble des états sur l'ensemble  $X$  des variables. Soit  $S$  une instruction de programme sur  $X$ . Soit  $A$  une partie de  $STATES$ .

$s \in WP(S)(A)$ , si la condition suivante est vérifiée :

$$\left( \begin{array}{l} \forall t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow t \in A \\ \wedge \\ \exists t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \end{array} \right)$$

- ▶  $WP(X := X+1)(A) = \{s \in STATES \mid s[X \mapsto s(X) \oplus 1] \in A\}$
- ▶  $WP(X := Y+1)(A) = \{s \in STATES \mid s[X \mapsto s(Y) \oplus 1] \in A\}$
- ▶  $WP(\text{while } X > 0 \text{ do } X := X-1 \text{ od})(A) = \{s \in STATES \mid (s(X) \leq 0) \vee (s(X) \in A \wedge s(X) < 0)\}$
- ▶  $WP(\text{while } x > 0 \text{ do } x := x+1 \text{ od})(A) = \{s \in STATES \mid (s(X) \in A \wedge s(X) \leq 0)\}$
- ▶  $WP(\text{while } x > 0 \text{ do } x := x+1 \text{ od})(\emptyset) = \emptyset$
- ▶  $WP(\text{while } x > 0 \text{ do } x := x+1 \text{ od})(STATES) = \{s \in STATES \mid s(X) \leq 0\}$

### Propriétés

- ▶  $WP$  est une fonction monotone pour l'inclusion d'ensembles de STATES.
- ▶  $WP(S)(\emptyset) = \emptyset$
- ▶  $WP(S)(A \cap B) = WP(S)(A) \cap WP(S)(B)$
- ▶  $WP(S)(A) \cup WP(S)(B) \subseteq WP(S)(A \cup B)$
- ▶ Si  $S$  est déterministe,  $WP(S)(A \cup B) = WP(S)(A) \cup WP(S)(B)$
  
- ▶  $WP$  est un opérateur avec le profil suivant  
pour toute instruction  $S$  du langage de programmation,  
$$WP(S) \in \mathcal{P}(\text{STATES}) \rightarrow \mathcal{P}(\text{STATES})$$
- ▶  $(\mathcal{P}(\text{STATES}), \subseteq)$  est un treillis complet.
- ▶  $(Pred, \Rightarrow)$  est une structure où
  - (1)  $Pred$  est une *extension* du langage d'expressions booléennes
  - (2)  $Pred$  est une *intension* introduite comme un langage d'assertions
  - $\Rightarrow$  est l'implication
  - $s \in A$  correspond une assertion  $P$  vraie en  $s$  notée  $P(s)$ .

- ▶  $S$  est une instruction de STATS.
- ▶  $T$  est le type ou les types des variables et  $D$  est la constante ou les constantes Définie(s).
- ▶  $P$  est un prédicat du langage Pred
- ▶  $X$  est une variable de programme
- ▶  $E(X, D)$  (resp.  $B(X, D)$ ) est une expression arithmétique (resp. booléenne) dépendant de  $X$  et de  $D$ .
- ▶  $x$  est la valeur de  $X$  ( $X$  contient la valeur  $x$ ).
- ▶  $e(x, d)$  (resp.  $b(x, d)$ ) est l'expression arithmétique (resp. booléenne) du langage Pred associée à l'expression  $E(X, D)$  (resp.  $B(X, D)$ ) du langage des expressions arithmétiques (resp. booléennes) du langage de programmation Prog
- ▶  $b(x, d)$  est l'expression arithmétique du langage Pred associée à l'expression  $E(X, D)$  du langage des expressions arithmétiques du langage de programmation Prog



S	$wp(S)(P)$
$X := E(X, D)$	$P[e(x, d)/x]$
SKIP	$P$
$S_1; S_2$	$wp(S_1)(wp(S_2)(P))$
IF $B$ $S_1$ ELSE $S_2$ FI	$(B \Rightarrow wp(S_1)(P)) \wedge (\neg B \Rightarrow wp(S_2)(P))$
WHILE $B$ DO $S$ OD	$\mu.(\lambda X. (B \Rightarrow wp(S)(X)) \wedge (\neg B \Rightarrow P))$

- ▶  $wp(X := X+5)(x \geq 8) \stackrel{def}{=} x+5 \geq 8 \approx x \geq 3$
- ▶  $wp(\text{WHILE } x > 1 \text{ DO } X := X+1 \text{ OD})(x = 4) = FALSE$
- ▶  $wp(\text{WHILE } x > 1 \text{ DO } X := X+1 \text{ OD})(x = 0) = x = 0$

.....

☒ Definition(Axiomes et règles d'inférence)

- ▶ Axiome d'affectation :  $\{P(e/x)\} \mathbf{X} := \mathbf{E(X)} \{P\}$ .
  - ▶ Axiome du saut :  $\{P\} \mathbf{skip} \{P\}$ .
  - ▶ Règle de composition : Si  $\{P\} \mathbf{S_1} \{R\}$  et  $\{R\} \mathbf{S_2} \{Q\}$ , alors  $\{P\} \mathbf{S_1 ; S_2} \{Q\}$ .
  - ▶ Si  $\{P \wedge B\} \mathbf{S_1} \{Q\}$  et  $\{P \wedge \neg B\} \mathbf{S_2} \{Q\}$ , alors  $\{P\} \mathbf{if B then S_1 then S_2 fi} \{Q\}$ .
  - ▶ Si  $\{P \wedge B\} \mathbf{S} \{P\}$ , alors  $\{P\} \mathbf{while B do S od} \{P \wedge \neg B\}$ .
  - ▶ Règle de renforcement/affaiblissement : Si  $P' \Rightarrow P$ ,  $\{P\} \mathbf{S} \{Q\}$ ,  $Q \Rightarrow Q'$ , alors  $\{P'\} \mathbf{S} \{Q'\}$ .
- .....

.....

Exemple de preuve  $\{x = 1\} \mathbf{Z} := \mathbf{X}; \mathbf{X} := \mathbf{Y}; \mathbf{Y} := \mathbf{Z} \{y = 1\}$

- ▶ (1)  $x = 1 \Rightarrow (z = 1)[x/z]$  (propriété logique)
- ▶ (2)  $\{(z = 1)[x/z]\} \mathbf{Z} := \mathbf{X} \{z = 1\}$  (axiome d'affectation)
- ▶ (3)  $\{x = 1\} \mathbf{Z} := \mathbf{X} \{z = 1\}$  (Règle de renforcement/affaiblissement avec (1) et (2))
- ▶ (4)  $z = 1 \Rightarrow (z = 1)[y/x]$  (propriété logique)
- ▶ (5)  $\{(z = 1)[y/x]\} \mathbf{X} := \mathbf{Y} \{z = 1\}$  (axiome d'affectation)
- ▶ (6)  $\{z = 1\} \mathbf{X} := \mathbf{Y} \{z = 1\}$  (Règle de renforcement/affaiblissement avec (4) et (5))
- ▶ (7)  $z = 1 \Rightarrow (y = 1)[z/y]$  (propriété logique)
- ▶ (8)  $\{(z = 1)[x/z]\} \mathbf{Y} := \mathbf{Z} \{y = 1\}$  (axiome d'affectation)
- ▶ (9)  $\{z = 1\} \mathbf{Y} := \mathbf{Z} \{y = 1\}$  (Règle de renforcement/affaiblissement avec (7) et (8))
- ▶ (10)  $\{x = 1\} \mathbf{Z} := \mathbf{X}; \mathbf{X} := \mathbf{Y}; \{z = 1\}$  (Règle de composition avec 3 et 6)
- ▶ (11)  $\{x = 1\} \mathbf{Z} := \mathbf{X}; \mathbf{X} := \mathbf{Y}; \mathbf{Y} := \mathbf{Z} \{y = 1\}$  (Règle de composition avec 11 et 9)

.....

### ☒ Definition

$\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$  est défini par  $\forall s, t \in STATES : P(s) \wedge \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t)$

.....

.....

☺ PropertyCorrection du système axiomatique des programmes commentés

- ▶ S'il existe une preuve construite avec les règles précédentes de  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ , alors  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$  est valide.
- ▶ Si  $\{P'\}\mathbf{S}\{Q'\}$  est valide et si le langage d'assertions est suffisamment expressif, alors il existe une preuve construite avec les règles précédentes de  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ .

.....

### ☒ Definition

Un langage d'assertions est la donnée d'un ensemble de prédicats et d'opérateurs de composition comme la disjonction et la conjonction ; il est muni d'une relation d'ordre partielle appelée implication. On le notera  $(\text{PRED}, \Rightarrow, \mathbf{false}, \mathbf{true}, \wedge, \vee) : (\text{PRED}, \Rightarrow, \mathbf{false}, \mathbf{true}, \wedge, \vee)$  est un treillis complet.

- ▶  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$
- ▶  $\forall s, t \in STATES : P(s) \wedge \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t)$
- ▶  $\forall s \in STATES : P(s) \Rightarrow (\forall t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t))$

.....

Définition de wlp

$$wlp(S)(Q) \stackrel{def}{=} (\forall t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t))$$

.....

$$wlp(S)(Q) \equiv \overline{(\exists t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \wedge \overline{Q}(t))}$$

.....

Lien entre wp et wlp

- ▶  $loop(S) \equiv \overline{(\exists t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t)}$  (ensemble des états qui ne permettent pas à S de terminer)
  - ▶  $wp(S)(Q) \equiv wlp(S)(Q) \wedge \overline{loop(S)}$
- .....

.....

☒ Definition

$$WLP(S)(P) = \nu \lambda X. ((B \wedge wlp(BS)(X)) \vee (\neg B \wedge P))$$

.....

.....

☺ Property

▶ Si  $P \Rightarrow Q$ , then  $wlp(S)(P) \Rightarrow wlp(S)(Q)$ .

---

.....

☒ Definition triplets de Hoare

$$\{P\}\mathbf{S}\{Q\} \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wlp(S)(Q)$$

.....

.....

⊠ Definition triplets de Hoare

$$\{P\}S\{Q\} \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wlp(S)(Q)$$

.....

.....

⊠ Definition (Axiomes et règles d'inférence)

- ▶ Axiome d'affectation :  $\{P(e/x)\}X := E(X)\{P\}$ .
  - ▶ Axiome du saut :  $\{P\}\text{skip}\{P\}$ .
  - ▶ Règle de composition : Si  $\{P\}S_1\{R\}$  et  $\{R\}S_2\{Q\}$ , alors  $\{P\}S_1;S_2\{Q\}$ .
  - ▶ Si  $\{P \wedge B\}S_1\{Q\}$  et  $\{P \wedge \neg B\}S_2\{Q\}$ , alors  $\{P\}\text{if } B \text{ then } S_1 \text{ then } S_2 \text{ fi}\{Q\}$ .
  - ▶ Si  $\{P \wedge B\}S\{P\}$ , alors  $\{P\}\text{while } B \text{ do } S \text{ od}\{P \wedge \neg B\}$ .
  - ▶ Règle de renforcement/affaiblissement : Si  $P' \Rightarrow P$ ,  $\{P\}S\{Q\}$ ,  $Q \Rightarrow Q'$ , alors  $\{P'\}S\{Q'\}$ .
- .....



- ▶  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$
- ▶  $\forall s \in STATES. P(s) \Rightarrow wlp(S)(Q)(s)$
- ▶  $\forall s \in STATES. P(s) \Rightarrow (\forall t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t))$
- ▶  $\forall s, t \in STATES. P(s) \wedge \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t)$
- ▶ Correction : Si on a construit une preuve de  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$  avec les règles de la logique de Hoare, alors  $P \Rightarrow wlp(S)(Q)$
- ▶ Complétude sémantique : Si  $P \Rightarrow wlp(S)(Q)$ , alors on peut construire une preuve de  $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$  avec les règles de la logique de Hoare si on peut exprimer  $wlp(S)(P)$  dans le langage d'assertions.

.....

☒ Definition triplets de Hoare Correction Totale

$$[P]\mathbf{S}[Q] \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wp(S)(Q)$$

.....

.....

### ☒ Definition triplets de Hoare Correction Totale

$$[P]\mathbf{S}[Q] \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wp(S)(Q)$$

.....

.....

### ☒ Definition (Axiomes et règles d'inférence)

- ▶ Axiome d'affectation :  $[P(e/x)]\mathbf{X} := \mathbf{E}(\mathbf{X})[P]$ .
  - ▶ Axiome du saut :  $[P]\mathbf{skip}[P]$ .
  - ▶ Règle de composition : Si  $[P]\mathbf{S}_1[R]$  et  $[R]\mathbf{S}_2[Q]$ , alors  $[P]\mathbf{S}_1 ; \mathbf{S}_2[Q]$ .
  - ▶ Si  $[P \wedge B]\mathbf{S}_1[Q]$  et  $[P \wedge \neg B]\mathbf{S}_2[Q]$ , alors  
 $[P]\mathbf{if\ B\ then\ S_1\ then\ S_2\ fi}[Q]$ .
  - ▶ Si  $[P(n+1)]\mathbf{S}[P(n)]$ ,  $P(n+1) \Rightarrow b$ ,  $P(0) \Rightarrow \neg b$ , alors  
 $[\exists n \in \mathbb{N}. P(n)]\mathbf{while\ B\ do\ S\ od}[P(0)]$ .
  - ▶ Règle de renforcement/affaiblissement : Si  $P' \Rightarrow P$ ,  $[P]\mathbf{S}[Q]$ ,  
 $Q \Rightarrow Q'$ , alors  $[P']\mathbf{S}[Q']$ .
- .....

### Correction

:  
Si  $[P]\mathbf{S}[Q]$  est dérivé selon les règles ci-dessus, alors  $P \wp(S) \wp Q$ .

- ▶  $[P(e/x)]\mathbf{X} := \mathbf{E}(\mathbf{X})[P]$  est valide :  $wp(X := E)(P)/x = P(e/x)$ .
- ▶  $[\exists n \in \mathbb{N}. P(n)]\mathbf{while\ B\ do\ S\ od}[P(0)]$  : si  $s$  est un état de  $P(n)$  alors au bout de  $n$  boucles on atteint un état  $s_f$  tel que  $P(0)$  est vrai en  $s_f$ .

### Complétude

:

Si  $P \Rightarrow wp(S)(Q)$ , alors il existe une preuve de  $[P]\mathbf{S}[Q]$  construites avec les règles ci-dessus,

- ▶  $P \Rightarrow wp(X := E(X))(Q) : P \Rightarrow Q(e/x)$  et  $[Q(e/x)]\mathbf{X} := \mathbf{E}(\mathbf{X})[Q]$  constituent une preuve.
- ▶  $P \Rightarrow wp(\text{while})(Q) :$ 
  - On construit la suite de  $P(n)$  en définissant  $P(n) = W_n$ .
  - On vérifie que cela vérifie la règle du while.

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
 $S1; S2$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

- ▶ Application de la propriété :  
 $wp(S1; S2)(A) = wp(S1)(wp(S2)(A))$



```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
 $S1$ ;  
//@ assert  $wp(S2)(Q(v0, v))$  :  
 $S2$ ;  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
//@ assert  $xp(S1)(wp(S2)(Q(v0, v)))$  :  
 $S1$ ;  
//@ assert  $wp(S2)(Q(v0, v))$  :  
 $S2$ ;  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
     $S1$   
ELSE  
     $S2$   
FI  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

- ▶ Application de la propriété :  
 $wp(if(B, S1, S2))(A) = b \wedge wp(S1)(A) \vee \neg b \wedge wp(S2)(A).$

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
     $S1$   
ELSE  
     $S2$   
FI  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
     $S1$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
ELSE  
     $S2$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
FI  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
     $S1$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
ELSE  
     $S2$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
FI  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```



```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
   $S1$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
ELSE  
   $S2$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
FI  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
//@ assert  $B \wedge wp(S2)(Q(v0, v))$  :  
   $S1$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
ELSE  
//@ assert  $\neg B \wedge wp(S2)(Q(v0, v))$  :  
   $S2$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
FI
```

## Transformations de programmes annotés (2)

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
   $S1$   
  //@ assert  $Q(v0, v)$  :  
ELSE  
   $S2$   
  //@ assert  $Q(v0, v)$  :  
FI  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
  //@ assert  $B \wedge wp(S2)(Q(v0, v))$  :  
   $S1$   
  //@ assert  $Q(v0, v)$  :  
ELSE  
  //@ assert  $\neg B \wedge wp(S2)(Q(v0, v))$  :  
   $S2$   
  //@ assert  $Q(v0, v)$  :  
FI
```

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
  //@ assert  $b \wedge wp(S1)(Q(v0, v))$  :  
   $S1$   
  //@ assert  $Q(v0, v)$  :  
ELSE  
  //@ assert  $\neg b \wedge wp(S2)(Q(v0, v))$  :  
   $S2$   
  //@ assert  $Q(v0, v)$  :  
FI  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

## Transformations de programmes annotés (2)

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
   $S1$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
ELSE  
   $S2$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
FI  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
//@ assert  $B \wedge wp(S2)(Q(v0, v))$  :  
   $S1$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
ELSE  
//@ assert  $\neg B \wedge wp(S2)(Q(v0, v))$  :  
   $S2$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
FI
```

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
IF  $B$  THEN  
//@ assert  $b \wedge wp(S1)(Q(v0, v))$  :  
   $S1$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
ELSE  
//@ assert  $\neg b \wedge wp(S2)(Q(v0, v))$  :  
   $S2$   
//@ assert  $Q(v0, v)$  :  
FI  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

- ▶  $b \wedge P(v0, v) \Rightarrow b \wedge wp(S1)(Q(v0, v))$
- ▶  $\neg b \wedge P(v0, v) \Rightarrow \neg b \wedge wp(S2)(Q(v0, v))$

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
//@ loop invariant  $I(v0, v)$  :  
WHILE  $B$  THEN  
   $S$   
OD  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

- Application de la règle de la logique de Hoare pour l'itération

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
//@ loop invariant  $I(v0, v)$  :  
WHILE  $B$  THEN  
   $S$   
OD  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

- Application de la règle  
de nla logique de Hoare  
pour l'itération

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
//@ loop invariant  $I(v0, v)$  :  
//@ assert  $I(v0, v)$  :  
WHILE  $B$  THEN  
  //@ assert  $b \wedge I(v0, v)$  :  
   $S$   
  //@ assert  $I(v0, v)$  :  
OD  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
//@ loop invariant  $I(v0, v)$  :  
WHILE  $B$  THEN  
   $S$   
OD  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

- ▶ Application de la règle de la logique de Hoare pour l'itération

```
//@ assert  $P(v0, v)$  :  
//@ loop invariant  $I(v0, v)$  :  
//@ assert  $I(v0, v)$  :  
WHILE  $B$  THEN  
  //@ assert  $b \wedge I(v0, v)$  :  
   $S$   
  //@ assert  $I(v0, v)$  :  
OD  
//@ assert  $Q(v0, v)$  :
```

- ▶  $b \wedge I(v0, v) \Rightarrow wp(S)(I(v0, v))$
- ▶  $P(v0, v) \Rightarrow I(v0, v)$
- ▶  $\neg b \wedge I(v0, v) \Rightarrow Q(v0, v)$

- ▶ Etablir que l'invariant est préservé.
- ▶ Appliquer les wps sur les assertions selon les instructions.

- ▶ Assertions à un point du programme :

```
/*@ assert pred; */
```

```
//@ assert pred;
```

- ▶ Assertions à un point du programme selon les comportements.

```
/*@ for id1,id2, ..., idn: assert pred; */
```



(Incrément d'un nombre)

### Listing 6 – project-divers/compwp0.c

```
#define x0 5
/*@ assigns \nothing; */
int exemple() {
    int x=x0;
    //@ assert x == x0;
    x = x + 1;
    //@ assert x == x0+1;
    return x;
}
```

(Incrément d'un nombre)

### Listing 7 – project-divers/compwp00.c

```
#define x0 5
/*@ assigns \nothing;
*/
int exemple() {
    int x=x0;
    //@ assert x == x0;
    //@ assert x+1== x0+1;
    x = x + 1;
    //@ assert x== x0+1;
    return x;
}
```

(Incrément d'un nombre)

### Listing 8 – project-divers/compwp000.c

```
#define x0 5
/*@ assigns \nothing;
*/
int exemple() {
    //@ assert x0 == x0;
    //@ assert x0+1 == x0+1;
    int x=x0;
    //@ assert x == x0;
    //@ assert x+1 == x0+1;
    x = x + 1;
    //@ assert x == x0+1;

    return x;
}
```

(Condition de vérification)

### Listing 9 – project-divers/compwp0000.c

```
...  
//@ assert x0 == x0;  
//@ assert x0+1 == x0+1;  
...
```

- ▶ condition de vérification :  $x0 == x0 \Rightarrow x0+1 == x0+1$
- ▶ Le simplificateur QED produit le prédicat TRUE et avlde le

(Contrat invalide)

### Listing 10 – project-divers/anno0.c

```
int main(void){
    signed long int x,y,z;
    x = 1;
    /*@ assert x == 1; */
    y = 2;
    /*@ assert x == 1 && y == 2; */
    z = x * y;
    /*@ assert x == 1 && y == 1 && z==2; */
    return 0;
}
```

(Contrat valide)

### Listing 11 – project-divers/anno00.c

```
int main(void){
    signed long int x,y,z; //    int x,y,z;
    x = 1;
    /*@ assert x == 1; */
    y = 2;
    /*@ assert x == 1 && y == 2; */
    z = x * y;
    /*@ assert x == 1 && y == 2 && z == 2; */
    return 0;
}
```

```
...  
/*@ loop invariant I;  
   @ loop assigns L;  
*/  
...
```

(Invariant de boucle)

### Listing 12 – project-divers/anno5.c

```
/*@ requires a >= 0 && b >= 0;  
   ensures 0 <= \result;  
   ensures \result < b;  
   ensures \exists integer k; a == k * b + \result;  
*/  
int rem(int a, int b) {  
    int r = a;  
    /*@  
       loop invariant  
       (\exists integer i; a == i * b + r) &&  
       r >= 0;  
       loop assigns r;  
    */  
    while (r >= b) { r = r - b;};  
    return r;  
}
```

(Invariant de boucle)

### Listing 13 – project-divers/anno6.c

```
/*@ requires a >= 0 && b >= 0;  
    ensures 0 <= \result;  
    ensures \result < b;  
    ensures \exists integer k; a == k * b + \result;  
*/  
int rem(int a, int b) {  
    int r = a;  
    /*@  
        loop invariant  
        (\exists integer i; a == i * b + r) &&  
        r >= 0;  
        loop assigns r;  
    */  
    while (r >= b) { r = r - b; };  
    return r;  
}
```

### Echec de la preuve

L'invariant est insuffisamment informatif pour être prouvé et il faut ajouter une information sur `y`.

```
frama-c -wp anno6.c
[kernel] Parsing anno6.c (with preprocessing)
[wp] Warning: Missing RTE guards
[wp] anno6.c:8: Warning: Missing assigns clause (assigns 'everything' i
[wp] 2 goals scheduled
[wp] [Alt-Ergo 2.3.3] Goal typed_f_loop_invariant_preserved : Timeout (
[wp] [Cache] found:1
[wp] Proved goals:      1 / 2
    Qed:                1 (0.57ms)
    Alt-Ergo 2.3.3:      0 (interrupted: 1) (cached: 1)
[wp:pedantic-assigns] anno6.c:1: Warning:
    No 'assigns' specification for function 'f'.
    Callers assumptions might be imprecise.
```



### Analyse avec succès

L'invariant est plus précis et donne des conditions liant  $x$  et  $y$ .

(Invariant de boucle)

#### Listing 14 – project-divers/anno7.c

```
int f() {  
  int x = 0;  
  int y = 10;  
  /*@  
    loop invariant  
    0 <= x < 11 && x+y == 10;  
  */  
  while (y > 0) {  
    x++;  
    y--;  
  }  
  return 0;  
}
```

```
frama-c -wp anno7.c
[kernel] Parsing anno7.c (with preprocessing)
[wp] Warning: Missing RTE guards
[wp] anno7.c:8: Warning: Missing assigns clause (assigns 'everything' i
[wp] 2 goals scheduled
[wp] [Cache] found:1
[wp] Proved goals:    2 / 2
    Qed:                1 (0.32ms-3ms)
    Alt-Ergo 2.3.3:      1 (6ms) (8) (cached: 1)
[wp:pedantic-assigns] anno7.c:1: Warning:
    No 'assigns' specification for function 'f'.
    Callers assumptions might be imprecise.
```

- ▶ Un variant est une quantité qui décroît au cours de la boucle.
- ▶ Deux possibilités d'analyse sont possibles :
  - Terminaison d'une boucle (`variant`)
  - Terminaison de l'appel d'une fonction récursive (`decreawse`)

(Variant)

### Listing 15 – project-divers/variant2.c

```
//@ loop variant e;
```

```
//@ decreases e;
```

- ▶ La terminaison est assurée en montrant que chaque boucle termine.
- ▶ Une boucle est caractérisée par une expression `expvariant(x)` appelée `variant` qui doit décroître à chaque exécution du corps de la boucle `S` où  $x_1$  et  $x_2$  sont les valeurs de  $X$  respectivement au début de la boucle `S` et à la fin de `S` :

$$\forall x_1, x_2. b(x_1) \wedge x_1 \xrightarrow{S} x_2 \Rightarrow \text{expvariant}(x_1) > \text{expvariant}(x_2)$$

(Variant)

### Listing 16 – project-divers/variant1.c

```
/*@ requires n > 0;
    terminates n > 0;

    ensures \result == 0;
*/
int code(int n) {
    int x = n;
    /*@ loop invariant x >= 0 && x <= n;
        loop assigns x;
        loop variant x;
    */
    while (x != 0) {
        x = x - 1;
    };
    return x;
}
```

(Variant)

### Listing 17 – project-divers/variant3.c

```
int f() {  
  int x = 0;  
  int y = 10;  
  /*@  
    loop invariant  
    0 <= x < 11 && x+y == 10;  
    loop variant y;  
  */  
  while (y > 0) {  
    x++;  
    y—;  
  }  
  return 0;  
}
```

(Variant)

### Listing 18 – project-divers/variant4.c

```
g/*@ requires n <= 12;  
  @ decreases n;  
  @*/  
int fact(int n){  
  if (n <= 1) return 1;  
  return n*fact(n-1);  
}
```

- ▶ Pas de gestion de la mémoire comme les pointeurs
- ▶ Affectation à chaque variable une variable logique
- ▶  $x++$  avec  $x$  de type `int` et la C-variable est affectée à deux L-variables  $x2 = x1 + 1$ .

(Variant)

### Listing 19 – project-divers/wp2.c

```
/*@CONSOLE
#include <LIMITS.h>
int q1() {
    int x=10,y=30,z=20;
    //@ assert x== 10 && y == z+x && z==2*x;
    y= z+x;
    //@ assert x== 10 && y == x+2*10;
    x = x+1;
    //@ assert x-1== 10 && y == x-1+2*10;
    return (0);
}
```

(Variant)

### Listing 20 – project-divers/wp3.c

```
int q1() {
    int c = 2 ;
    /*@ assert c == 2; */
    int x;
    /*@ assert c == 2; */
    x = 3 * c ;
    /*@ assert x == 6; */
    return (0);
}
```



(Variant)

## Listing 21 – project-divers/wp4.c

```
int main()
{
    int a = 42; int b = 37;
    int c = a+b; // i:1
    //@assert b == 37 ;
    a = c; // i:2
    b += a; // i:3
    //@assert b == 0 && c == 79;
    return (0);
}
```

(Variant)

## Listing 22 – project-divers/wp5.c

```
int main()
{
    int z; // instruction 8
    int a = 4; // instruction 7
    //@assert a == 4 ;
    int b = 3; // instyruction 6
    //@assert b == 3 && a == 4;
    int c = a+b; // instruction 4
    /*@ assert b == 3 && c == 7 && a == 4 ; */
    a += c; // instruction 3
    b += a; // instruction 2
    //@ assert a == 11 && b == 14 && c == 7 ;
    //@ assert a +b == 25 ;
    z = a*b; // instruction 1
    //@assert a == 11 && b == 14 && c == 7 && z == 154;
    return (0);
}
```

(Variant)

## Listing 23 – project-divers/wp6.c

```
int main()
{
    int a = 4;
    int b = 3;
    int c = a+b; // i:1
    a += c; // i:2
    b += a; // i:3
    //@assert a == 11 && b == 14 && c == 7 ;
    return (0);
}
```

## Listing 24 – project-divers/wp7.c

```

/*@ ensures x == a;
    ensures y == b;
*/
void swap1(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    //@ assert x == a && y == b;
    int tmp;
    tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
    //@ assert x == a && y == a;
}

void swap2(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    //@ assert x == a && y == b;
    x = x + y;
    y = x - y;
    x = x - y;
    //@ assert x == b && y == a;
}

/*@ requires \valid(a);
    requires \valid(b);
    ensures *a == \old(*b);
    ensures *b == \old(*a);
*/
void swap3(int *a, int *b) {
    int tmp;
    tmp = *a;
    *a = *b;
    *b = tmp;
}

```

Un programme  $P$  remplit un contrat (pre,post) :

- ▶  $P$  transforme une variable  $x$  à partir d'une valeur initiale  $x_0$  et produisant une valeur finale  $x_f$  :  $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- ▶  $x_0$  satisfait pre :  $\text{pre}(x_0)$  and  $x_f$  satisfait post :  $\text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- ▶  $\mathbb{D}$  est le domaine RTE de  $X$

requires  $\text{pre}(x_0)$

ensures  $\text{post}(x_0, x_f)$

variables  $X$

begin

$0 : P_0(x_0, x)$

instruction<sub>0</sub>

...

$i : P_i(x_0, x)$

...

instruction <sub>$f-1$</sub>

$f : P_f(x_0, x)$

end

▶  $\text{pre}(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$

▶  $P_f(x_0, x) \Rightarrow \text{post}(x_0, x)$

▶ Pour toute paire d'étiquettes  $\ell, \ell'$  telle que  $\ell \rightarrow \ell'$ , on vérifie que, pour toutes valeurs  $x, x' \in \text{MEMORY}$

$$\left( \begin{array}{l} P_\ell(x_0, x) \\ \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(x) \wedge x' = f_{\ell, \ell'}(x) \end{array} \right) \Rightarrow P_{\ell'}(x_0, x')$$

▶ Pour toute paire d'étiquettes  $m, n$  telle que  $m \rightarrow n$ , on vérifie que,  $\forall x, x' \in \text{MEMORY} : \text{pre}(x_0) \wedge P_m(x_0, x) \Rightarrow \text{DOM}(m, n)(x)$

## Définition du contrat et des axiomes (spécification)

- ▶ Définir la fonction mathématique à calculer.
- ▶ Définition inductive sous forme d'axiomes.

Listing 25 – mathfact

```
#ifndef _A_H
#define _A_H
/*@ axiomatic mathfact {
    @ logic integer mathfact(integer n);
    @ axiom mathfact_1: mathfact(1) == 1;
    @ axiom mathfact_rec: \forall integer n; n > 1
    ==> mathfact(n) == n * mathfact(n-1);
    @ } */

/*@ requires n > 0;
    decreases n;
    ensures \result == mathfact(n);
    assigns \nothing;
*/
int codefact(int n);
#endif
```

## Définition du contrat et des axiomes (programmation)

- ▶ Définir le calcul codefact
- ▶ Définition de l'agorithme réalisant le calcul

Listing 26 – codefact

```
#include "factorial.h"

int codefact(int n) {
    int y = 1;
    int x = n;
    /*@ loop invariant x >= 1 && x <= n && mathfact(n) == y * x
       loop assigns x, y;
       loop variant x;
    */
    while (x != 1) {
        y = y * x;
        x = x - 1;
    };
    return y;
}
```

- ▶ La spécification d'une fonction `mathfact` à calculer nécessite de la définir mathématiquement.
- ▶ Cette définition axiomatique est fondée sur une définition inductive de la fonction `mathfact` qui sera utilisée dans les assertions pour le contrat définissant la fonction informatique de calcul.
- ▶ La relation entre la valeur calculée `\result` et `mathfact(n)` est établie dans la partie `ensures` : `\result == mathfact(n)`.
- ▶ On peut aussi écrire `codefact(n) == mathfact(n)` : l'appel de la fonction `codefact` pour la valeur `n` renvoie une valeur égale à celle de `mathfact(n)`.

- ▶ La fonction appelante doit garantir que l'assertion (requires))  $P1 \wedge \dots \wedge Pn$  est vraie au point d'appel.
- ▶ La fonction appelée renvoie un résultat satisfaisant (ensures)  $E1 \wedge \dots \wedge Em$
- ▶ Les variables qui ne figurent pas dans l'ensemble  $L1 \cup \dots \cup Lp$  ne sont pas modifiées.

### Listing 27 – schema de contrat

```
/*@ requires P1;...;requires Pn;  
  @ assigns L1;...;assigns Lm;  
  @ ensures E1;...;ensures Ep;  
  @*/
```



### Listing 28 – division

```
#ifndef _A_H
#define _A_H
#include "structures.h"
/*@ requires a >= 0 && b >= 0;
   @ behavior b :
       @ assumes b == 0;
       @ assigns \nothing;
       @ ensures \result.q == -1 && \result.r == -1 ;
   @ behavior B2:
       @ assumes b != 0;
       @ assigns \nothing;
       @ ensures 0 <= \result.r;
       @ ensures \result.r < b;
       @ ensures a == b * \result.q + \result.r;
   */
struct s division(int a, int b);
#endif
```

### Listing 29 – division

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#include "division.h"

struct s division(int a, int b)
{
    int rr = a;
    int qq = 0;
    struct s silly = {-1,-1};
    struct s resu;
    if (b == 0) {
        return silly;
    }
    else
    {
        /*@
        loop invariant
        ( a == b*qq + rr ) &&
```

### Listing 30 – schema de contrat

```
/*@ requires P1 && ... && Pn;  
   @ assigns L1, ..., Lm;  
   @ ensures E1 && ... && Ep;  
   @*/
```

- ▶  $\backslash old(x)$  fait référence à la valeur de  $x$  à l'appel ou dans le pré-état ( $x_0$ )
- ▶  $\backslash result$  fait référence à la valeur du résultat de l'appel.
- ▶ Ces deux expressions ne peuvent être utilisées uniquement dans une clause ensure.
- ▶  $\backslash valid(x)$  signifie que  $x$  est une adresse valide et  $\cdot x$  désigne le contenu de  $x$  et  $\&x$  désigne l'adresse de  $x$ .

Listing 31 – change1.c

```
/*@ requires \valid(a) && *a >= 0;  
   @ assigns *a;  
   @ ensures  *a == \old(*a)+2 && \result == 0;  
*/  
int change1(int *a)  
{ int x = *a;  
  x = x + 2;  
  *a = x;  
  return 0;  
}
```



- ▶ Pré-condition ou requires  $x \geq 0$
- ▶ Postcondition ou ensures  
 $result \cdot result \leq x < (result+1) \cdot (result+1)$

### Listing 32 – contrat squareroot

```
/*@ requires x >= 0;  
   @ ensures \result >= 0;  
   @ ensures \result * \result <= x;  
   @ ensures (\result+1) * (\result + 1) > x;  
   @*/  
int squareroot(int x);
```

- ▶ Précondition  $def(p)$
- ▶ Postcondition  $\star p = \star p0 + 1$

### Listing 33 – contrat increment

```
/*@ requires \valid(p);  
@ assigns *p;  
@ ensures *p == \old(*p) + 1;  
@*/  
void increment(int *p);
```

### Listing 34 – schema de contrat

```
/*@ requires P;  
  @ behavior B1;  
  @   assumes A1;  
  @   requires R1;  
  @   assigns L1;  
  @   ensures E1;  
  @ behavior B2;  
  @   assumes A2;  
  @   requires R2;  
  @   assigns L2;  
  @   ensures E2;  
  @*/  
  
/*@  
  @ complete behaviors b1, ..., bn;
```

```
@ complete behaviors;
```

- ▶ La fonction appelante doit garantir que  $P \wedge (A1 \Rightarrow R1) \wedge (A2 \Rightarrow R2)$  est vraie à l'appel.
- ▶ La fonction appelante renvoie un état satisfaisant le prédicat  $\text{old}(A1) \Rightarrow E1$  et  $\text{old}(A2) \Rightarrow E2$
- ▶ Les variables qui ne figurent pas dans l'ensemble  $L1 \cup \dots \cup Lp$  ne sont pas modifiées.



(contrat3.c)

## Listing 35 – project-divers/contrat3.c

```
/*@ behavior change_p:
   @ assumes n > 0;
   @ requires \valid(p);
   @ assigns *p;
   @ ensures *p == n;
   @ behavior change_q:
   @ assumes n <= 0;
   @ requires \valid(q);
   @ assigns *q;
   @ ensures *q == n;
   @*/
void f(int n, int *p, int *q) {
    if (n > 0) *p = n; else *q = n;
}
```

(squareroot)

### Listing 36 – project-divers/contrat1.c

```
/*@ requires x >= 0;  
@ ensures \result >= 0;  
@ ensures \result * \result <= x;  
@ ensures x < (\result + 1) * (\result + 1); @*/  
int squareroot(int x);
```

(contrat2)

### Listing 37 – project-divers/contrat2.c

```
/*@ requires \valid(p);  
  @ assigns *p;  
  @ ensures *p == \old(*p) + 1;  
  @*/  
void increment(int *p);
```

(contrat3)

## Listing 38 – project-divers/contrat3.c

```
/*@ behavior change_p:
  @ assumes n > 0;
  @ requires \valid(p);
  @ assigns *p;
  @ ensures *p == n;
  @ behavior change_q:
  @ assumes n <= 0;
  @ requires \valid(q);
  @ assigns *q;
  @ ensures *q == n;
  @*/
void f(int n, int *p, int *q) {
  if (n > 0) *p = n; else *q = n;
}
```

- ▶ requires
- ▶ assigns
- ▶ ensures
- ▶ decreases
- ▶ predicate
- ▶ logic
- ▶ lemma

()

### Listing 39 – project-divers/predicate1.c

```
/*@ predicate is_positive(integer x) = x > 0; */  
  
/*@ logic integer get_sign(real x) = @ x > 0.0 ? 1 : (x < 0.0 ? -1 : 0);  
*/  
/*@ logic integer max(int x, int y) = x >= y ? x : y;  
*/
```

()

### Listing 40 – project-divers/lemma1.c

```
/*@ lemma div_mul_identity:  
@ \forall real x, real y; y != 0.0 => y*(x/y) = x; @*/  
  
/*@ lemma div_qr:  
@ \forall int a, int b; a >= 0 && b > 0 =>  
\exists int q, int r; a = b*q + r && 0 <= r && r < b; @*/
```

(Définition de la fonction fibonacci)

### Listing 41 – project-divers/predicate2.c

```
/*@ axiomatic mathfibonacci{  
  @ logic integer mathfib(integer n);  
  @ axiom mathfib0: mathfib(0) == 1;  
  @ axiom mathfib1: mathfib(1) == 1;  
  @ axiom mathfibrec: \forall integer n; n > 1  
    ==> mathfib(n) == mathfib(n-1)+mathfib(n-2);  
  @ } */
```

(Définition de la fonction factoriel)

### Listing 42 – project-factorial/factorial.h

```
#ifndef _A.H  
#define _A.H  
/*@ axiomatic mathfact {  
  @ logic integer mathfact(integer n);  
  @ axiom mathfact_1: mathfact(1) == 1;  
  @ axiom mathfact_rec: \forall integer n; n > 1  
    ==> mathfact(n) == n * mathfact(n-1);  
  @ } */  
  
/*@ requires n > 0;  
  decreases n;  
  ensures \result == mathfact(n);  
  assigns \nothing;  
  */  
int codefact(int n);  
#endif
```

(Définition de la relation gc)

### Listing 43 – project-divers/predicate3.c

```
/*@ inductive is_gcd(integer a, integer b, integer d) {  
  @ case gcd_zero:  
  @ \forall integer n; is_gcd(n,0,n);  
  @ case gcd_succ:  
  @ \forall integer a,b,d; is_gcd(b, a % b, d) ==> is_gcd(a,b,d); @}  
*/
```

(Définition de la fonction pair/impair)

### Listing 44 – project-divers/predicate4.c

```
//@ predicate pair(integer x) = (x/2)*2==x;  
//@ predicate impair(integer x) = (x/2)*2!=x;  
//@ lemma ex: \forall integer a,b; a < b ==> 2*a < 2*b;  
  
/*@ inductive is_gcd(integer a, integer b, integer c) {  
  case zero: \forall integer n; is_gcd(n,0,n);  
  case un: \forall integer u,v,w; u >= v ==> is_gcd(u-v,v,w);  
  case deux: \forall integer u,v,w; u < v ==> is_gcd(u,v-u,w);  
}  
*/
```



- ▶ Une variable dite *ghost* permet de désigner de manière cachée ou masquée une valeur calculée et utile pour exprimer une propriété.
- ▶ Elle ne doit pas changer la sémantique des autres variables et on ne modifie pas le code dans les instructions ghost.

(erreur)

### Listing 45 – project-divers/ghost2.c

```
int f (int x, int y) {  
    //@ghost int z=x+y;  
    switch (x) {  
        case 0: return y;  
        //@ ghost case 1: z=y;  
        // above statement is correct.  
        //@ ghost case 2: { z++; break; }  
        // invalid, would bypass the non-ghost default  
        default: y++; }  
    return y; }  
  
int g(int x) { //@ ghost int z=x;  
    if (x>0){return x;}  
    //@ ghost else { z++; return x; }  
    // invalid, would bypass the non-ghost return  
    return x+1; }
```

(Variable ghost)

## Listing 46 – project-divers/ghost1.c

```
/*@ requires a >= 0 && b >= 0;
   ensures 0 <= \result;
   ensures \result < b;
   ensures \exists integer k; a == k * b + \result; */
int rem(int a, int b) {
    int r = a;
    /*@ ghost    int q=0;    */
    /*@
       loop invariant
       a == q * b + r &&
       r >= 0 && r <= a;
       loop assigns r;
       loop assigns q;
    // loop variant r;
    */
    while (r >= b) {
        r = r - b;
    /*@ ghost    q = q+1;    */
    };
    return r;
}
```

- ▶  $\backslash old(x)$  désigne la valeur de la variable  $x$  au moment de l'appel de la fonction.
- ▶ Cette expression est utilisable uniquement dans la postcondition *ensures*

(Valeur initiale x0)

### Listing 47 – project-divers/old1.c

```
/*@ requires \valid(a) && \valid(b);  
  @ assigns *a,*b;  
  @ ensures  *a == \at(*a,Pre) +2;  
  @ ensures  *b == \at(*b,Pre)+\at(*a,Pre)+2;  
  
      @ ensures  \result == 0;  
*/  
int old(int *a, int *b) {  
    int x,y;  
    x = *a;  
    y = *b;  
    x=x+2;  
    y = y +x;  
  
    *a = x;  
    *b = y;  
    return 0 ;  
}
```

- ▶  $\backslash at(e, id)$  désigne la valeur de  $e$  au point de contrôle  $id$ .
- ▶  $id$  doit être rencontré avant  $\backslash at(e, id)$
- ▶  $id$  est une expression parmi Pre, Here, Old, Post, LoopEntry, LoopCurrent, Init
- ▶  $\backslash old(e)$  est équivalent à  $\backslash at(e, Old)$

(label Pre)

### Listing 48 – project-divers/at1.c

```
/*@
  requires \valid(a) && \valid(b);
  assigns *a,*b;
  ensures  *a == \old(*a)+2;
  ensures  *b == \old(*b)+\old(*a)+2;
*/
int at1(int *a, int *b) {
  //@ assert *a == \at(*a, Pre);
  *a = *a + 1;
  //@ assert *a == \at(*a, Pre)+1;
  *a = *a + 1;
  //@ assert *a == \at(*a, Pre)+2;
  *b = *b + *a;
  //@ assert *a == \at(*a, Pre)+2 && *b == \at(*b, Pre)+\at(*a, Pre)+2;
  return 0;
}
```



(autre label)

### Listing 49 – project-divers/at2.c

```
void f (int n) {  
  for (int i = 0; i < n; i++) {  
    /*@ assert \at(i, LoopEntry) == 0; */  
    int j=0;  
    while (j++ < i) {  
      /*@ assert \at(j, LoopEntry) == 0; */  
      /*@ assert \at(j, LoopCurrent) + 1 == j; */  
    } }  
}
```



- ▶ Ce cours est une introduction et n'a pas vocation à être complet sur Frama-C et il est préférable de se reporter aux documents officiels sur le site [www.frama-c.org](http://www.frama-c.org).
- ▶ Frama-C permet d'énoncer les contrats (requires, ensures), d'annoter les codes séquentiels et de vérifier les annotations : programmation par contrat.
- ▶ La commande `frama-c` offre deux greffons `-wp` et `-rte` pour respectivement produire *les weakest-preconditions* et les conditions de débordement de mémoire.
- ▶ Les outils sont des procédures d'analyse de formules logiques de type SMT (Alt-Ergo) et des assistant de preuve (Why3).