Cours ASPD
Modélisation des systèmes répartis
Telecom Nancy 2A (Apprentissage et IL)

Dominique Méry
Telecom Nancy
Université de Lorraine

Année universitaire 2025-2026
21 janvier 2026(1:43pm)

Sommaire

Section Courante

]

Systèmes de transition

Système de transition

Un système de transition $\mathcal{TS}$ est une structure $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$ où

- $\mathcal{C}$: un (fini ou infini) ensemble de configurations
- $\longrightarrow$: une relation binaire sur $\mathcal{C}$
- $\mathcal{I}$: un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ constituant les configurations initiales.

Système de transition étiquettée

Un système de transition étiquettée $\mathcal{LTS}$ est une structure $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \mathcal{E}, \longrightarrow)$ où

- $\mathcal{C}$: un (fini ou infini) ensemble de configurations
- $\mathcal{I}$: un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ constituant les configurations initiales.
- $\mathcal{E}$: un ensemble d'événements
- $\longrightarrow$: une partie de $\mathcal{C} \times \mathcal{E} \times \mathcal{C}$

Exécution d'un système de transition

Soit un système de transition $\mathcal{ST}$ défini par $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$.

Exécution d'un système de transition

Soit un système de transition $\mathcal{ST}$ défini par $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$.

- A terminal configuration $t \in \mathcal{C}$ is a configuration such that, for any configuration $c \in \mathcal{C}$, $(t, c) \notin \longrightarrow$.

Exécution d'un système de transition

Soit un système de transition $\mathcal{ST}$ défini par $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$.

- A terminal configuration $t \in \mathcal{C}$ is a configuration such that, for any configuration $c \in \mathcal{C}$, $(t, c) \notin \longrightarrow$.
- TERM$[\mathcal{ST}]$ is the set of terminal configurations of the transition system $\mathcal{ST}$.

Exécution d'un système de transition

Soit un système de transition $\mathcal{ST}$ défini par $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$.

- A terminal configuration $t \in \mathcal{C}$ is a configuration such that, for any configuration $c \in \mathcal{C}$, $(t, c) \notin \longrightarrow$.
- TERM$[\mathcal{ST}]$ is the set of terminal configurations of the transition system $\mathcal{ST}$.
- An execution of $\mathcal{ST}$ is a maximal trace σ on $\mathcal{C}$ satisfying the following conditions :
  - $\sigma \in \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathcal{C}$
  - either there exists a value $n \in \mathbb{N}$ such that $dom(\sigma) = 0..n{-}1$ and its length is n, or $dom(\sigma) = \mathbb{N}$ and its length is infinite.
  - When the execution is finite and of length n, then $\sigma(n{-}1) \in$ TERM$[\mathcal{ST}]$.

Exécution d'un système de transition

Soit un système de transition $\mathcal{ST}$ défini par $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$.

- A terminal configuration $t \in \mathcal{C}$ is a configuration such that, for any configuration $c \in \mathcal{C}$, $(t, c) \notin \longrightarrow$.
- TERM$[\mathcal{ST}]$ is the set of terminal configurations of the transition system $\mathcal{ST}$.
- An execution of $\mathcal{ST}$ is a maximal trace σ on $\mathcal{C}$ satisfying the following conditions :
  - $\sigma \in \mathbb{N} \nrightarrow \mathcal{C}$
  - either there exists a value $n \in \mathbb{N}$ such that $dom(\sigma) = 0..n-1$ and its length is n, or $dom(\sigma) = \mathbb{N}$ and its length is infinite.
  - When the execution is finite and of length n, then $\sigma(n-1) \in$ TERM$[\mathcal{ST}]$.
- Une configuration $c \in \mathcal{C}$ est accessible, s'il existe une exécution σ telle qu'il existe $i \in dom(\sigma)$ tel que $\sigma(i) = c$ $((c \in ran(\sigma))$

Exécution d'un système de transition

Soit un système de transition $\mathcal{ST}$ défini par $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \longrightarrow)$.

- A terminal configuration $t \in \mathcal{C}$ is a configuration such that, for any configuration $c \in \mathcal{C}$, $(t, c) \notin \longrightarrow$.
- TERM$[\mathcal{ST}]$ is the set of terminal configurations of the transition system $\mathcal{ST}$.
- An execution of $\mathcal{ST}$ is a maximal trace σ on $\mathcal{C}$ satisfying the following conditions :
  - $\sigma \in \mathbb{N} \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} \mathcal{C}$
  - either there exists a value $n \in \mathbb{N}$ such that $dom(\sigma) = 0..n-1$ and its length is n, or $dom(\sigma) = \mathbb{N}$ and its length is infinite.
  - When the execution is finite and of length n, then $\sigma(n-1) \in$ TERM$[\mathcal{ST}]$.
- Une configuration $c \in \mathcal{C}$ est accessible, s'il existe une exécution σ telle qu'il existe $i \in dom(\sigma)$ tel que $\sigma(i) = c$ ($(c \in ran(\sigma))$)
- REACHABLE$[\mathcal{ST}]$ est l'ensemble des configurations accessibles du système de transition $\mathcal{ST}$.

Section Courante

Local algorithm

Local algorithm

A local algorithm $\mathcal{LA}$ of a process P is a structure $(\mathcal{LC}, \mathcal{LI}, \longrightarrow_i, \longrightarrow_s, \longrightarrow_r, \mathcal{M})$ such that :

- $\mathcal{LC}$: a set of configurations
- $\mathcal{LI}$: a subset of $\mathcal{LC}$ constituting the initial configurations.
- $\mathcal{M}$: a set of messages
- $\longrightarrow_i$: a subset of $\mathcal{LC} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_s$: a subset of $\mathcal{LC} \times \mathcal{M} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_r$: a subset of a subset of $\mathcal{LC} \times \mathcal{M} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_P \stackrel{def}{=} \Longrightarrow_i \cup \Longrightarrow_r \cup \Longrightarrow_s$

Local algorithm

Local algorithm

A local algorithm $\mathcal{LA}$ of a process P is a structure $(\mathcal{LC}, \mathcal{LI}, \longrightarrow_i, \longrightarrow_s, \longrightarrow_r, \mathcal{M})$ such that :

- $\mathcal{LC}$: a set of configurations
- $\mathcal{LI}$: a subset of $\mathcal{LC}$ constituting the initial configurations.
- $\mathcal{M}$: a set of messages
- $\longrightarrow_i$: a subset of $\mathcal{LC} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_s$: a subset of $\mathcal{LC} \times \mathcal{M} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_r$: a subset of a subset of $\mathcal{LC} \times \mathcal{M} \times \mathcal{LC}$
- $\longrightarrow_P \stackrel{def}{=} \Longrightarrow_i \cup \Longrightarrow_r \cup \Longrightarrow_s$

- $\mathcal{M}$ is the set of messages exchanged by the processes.
- A message is used only once.
- $\mathcal{M}$ could be a multiset.

Transition locale

Soient lc, m et lc', m' deux configurations de $\mathcal{LA}$.

1. $lc, m \Longrightarrow_P lc', m' \stackrel{def}{=} (lc \longrightarrow_i lc') \wedge m = m'$
2. $lc, m \Longrightarrow_P lc', m' \stackrel{def}{=} \exists\, mes \in \mathcal{M} : \left\{ \begin{array}{l} ((lc, mes, lc') \in \longrightarrow_s) \\ \wedge\ m' = m \cup \{mes\} \end{array} \right.$
3. $lc, m \Longrightarrow_P lc', m' \stackrel{def}{=} \exists\, mes \in \mathcal{M} : \left\{ \begin{array}{l} ((lc, mes, lc') \in \longrightarrow_r) \\ \wedge\ m = m' \cup \{mes\} \end{array} \right.$

Distributed algorithm

Distributed algorithm

A distributed algorithm $\mathcal{DA}$ for a finite set of processes $\{P_1, \ldots, P_n\}$ is a finite set of local algorithms $\{\mathcal{LA}_1, \ldots, \mathcal{LA}_n\}$ where $\mathcal{LC}_i$ is a local algorithm for process P_i, $i \in 1..n$.

A distributed algorithm $\mathcal{DA}$ for a finite set of processes $\{P_1, \ldots, P_n\}$ is associated with a transition structure constructed from the transition systems of the local algorithms :

- $\mathcal{C} = \mathcal{LC}_1 \times \ldots \times \mathcal{LC}_n \times \mathcal{M}$: a set of configurations consisting of local configurations and possible messages.
- $\mathcal{I} == \mathcal{LI}_1 \times \ldots \times \mathcal{LI}_n \times \mathcal{M}$: a subset of $\mathcal{C}$ constituting the initial configurations.
- $\mathcal{M}$: a set of messages
- $\longrightarrow \stackrel{def}{=} \longrightarrow_{P_1} \cup \ldots \cup \longrightarrow_{P_n}$:

Modèle asynchrone

Modèle asynchrone

soient C et C' deux configurations de $\mathcal{C}$:

Modèle asynchrone

soient C et C' deux configurations de $\mathcal{C}$:

1. local : $C \longrightarrow C'$: il existe P de $\{P_1, \ldots, P_n\}$ avec $P = P_i$ tel que $\forall j \in 1..N : j \neq i : C_j = {C'}_j$ et $C_i \longrightarrow_P C'$

Modèle asynchrone

soient C et C' deux configurations de $\mathcal{C}$:

1. local : $C \longrightarrow C'$: il existe P de $\{P_1, \ldots, P_n\}$ avec $P = P_i$ tel que $\forall j \in 1..N : j \neq i : C_j = C'_j$ et $C_i \longrightarrow_P C'$
2. sending : $C \longrightarrow C'$: il existe P de $\{P_1, \ldots, P_n\}$ avec $P = P_i$ tel que $\forall j \in 1..N : C_j = C'_j$ et $M_2 = M_1 \cup \{m\}$ où $m \in \mathcal{M}$ et $(C_i, m, C'_i) \in \longrightarrow_{P\,s} C'$

Modèle asynchrone

soient C et C' deux configurations de $\mathcal{C}$:

1. local : $C \longrightarrow C'$: il existe P de $\{P_1, \ldots, P_n\}$ avec $P = P_i$ tel que $\forall j \in 1..N : j \neq i : C_j = {C'}_j$ et $C_i \longrightarrow_P C'$
2. sending : $C \longrightarrow C'$: il existe P de $\{P_1, \ldots, P_n\}$ avec $P = P_i$ tel que $\forall j \in 1..N : C_j = {C'}_j$ et $M_2 = M_1 \cup \{m\}$ où $m \in \mathcal{M}$ et $(C_i, m, {C'}_i) \in \longrightarrow_{P\,s} C'$
3. receiving : $C \longrightarrow C'$: il existe P de $\{P_1, \ldots, P_n\}$ avec $P = P_i$ tel que $\forall j \in 1..N : C_j = {C'}_j$ et $M_1 = M_2 \cup \{m\}$ où $m \in \mathcal{M}$ et $(C_i, m, {C'}_i) \in \longrightarrow_{P\,r} C'$

Propriétés des algorithmes répartis

Propriétés des algorithmes répartis

- *safety* : toutes les configurations d'un algorithme réparti vérifie une propriété A

Propriétés des algorithmes répartis

- *safety* : toutes les configurations d'un algorithme réparti vérifie une propriété A
- *équité faible* : toute transition activable ou observable à partir d'une configuration donnée finit par être observée

Propriétés des algorithmes répartis

- *safety* : toutes les configurations d'un algorithme réparti vérifie une propriété A
- *équité faible* : toute transition activable ou observable à partir d'une configuration donnée finit par être observée
- *équité forte* : toute transition infirniment souvent activable ou observable à partir d'une configuration donnée finit par être observée

Propriétés des algorithmes répartis

- *safety* : toutes les configurations d'un algorithme réparti vérifie une propriété A
- *équité faible* : toute transition activable ou observable à partir d'une configuration donnée finit par être observée
- *équité forte* : toute transition infirniment souvent activable ou observable à partir d'une configuration donnée finit par être observée
- $P \leadsto Q$: A partir de toute configuration satisfaisant une propritét P, l'algorithme réparti attenindra fatalement une configuration satisfaisant Q.

Exemples de propriété de sûreté

- Exclusion mutuelle : soit une ressource R partagée par un ensemble de processus $\{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\}$. R est utilisée par au plus un processus de $\{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\}$.
- La ressource R est utilisée par au plus un processus P ddu système réparti.
- Absence de blocage : soit les processus $\{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\}$. Aucun des processus n'est bloqué c'est à dire que tout processus peut toujours exécuté une action sauf s'il est terminé.
- Correction Partielle : étant donné un processus de calcul caractérisé par un ensemble d'actions ou d'événements. Si les variables satisfont une précondition $\mathrm{PRE}(x)$, alors si le processus termine, les variables satisfont $\mathrm{POST}(x)$.
- Une propriété de sûreté exprime que rien de mauvais ne peut arriver !

Exemples de propriétés générales

- Chaque fois que le système entre dans une configuration instable, il finira par retrouver un état stable au bout d'un temps fini.
- Le processus P envoie infiniment souvent des messages au processys Q.
- Tout demande est servie.
- Les messages sont *toujours* reçus dans l'ordre d'envoi.
- Si un calcul réparti est lancé sur une ensemble de nœuds, le calcul finira par se terminer fatalement.

Observation d'un système réparti

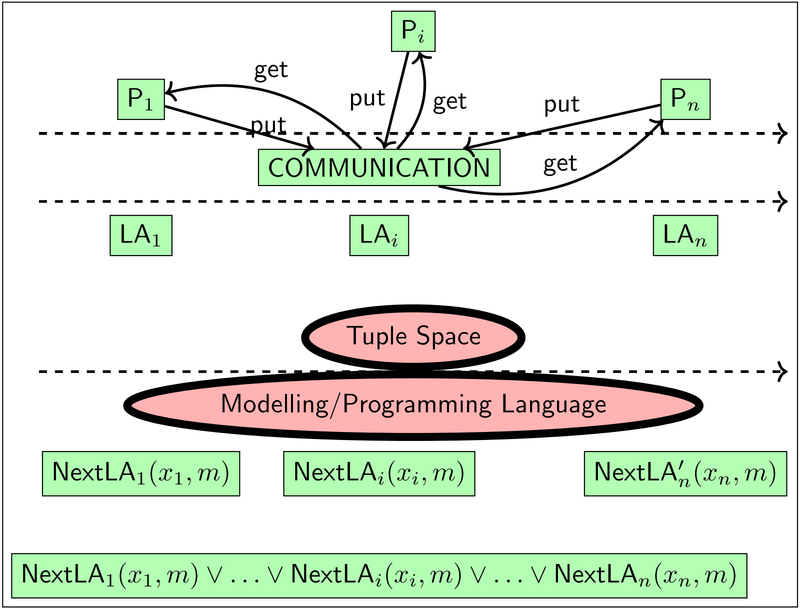
- $u_0 \xrightarrow{\mathsf{e}_0} u_1 \xrightarrow{\mathsf{e}_1} \ldots \xrightarrow{\mathsf{e}_{i-1}} u_i \xrightarrow{\mathsf{e}_i} u_{i+1} \xrightarrow{\mathsf{e}_{i+1}} \ldots$
- e_0 ou e_1 ou $\ldots$ ou e_{i-1} ou e_i ou e_{i+1} ou $\ldots$
- $\mathsf{e} \in \{\mathsf{e}_0, \mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_{i-1}, \mathsf{e}_i, \mathsf{e}_{i+1}, \ldots\}$
- $\mathsf{e} \in E$: E est l'ensemble fini des actions ou des événements observés sur le système modifiant l'état courant.
- $u_0 \xrightarrow{\mathsf{g}} \ldots \xrightarrow{\mathsf{f}} u \xrightarrow{\mathsf{e}} u' \xrightarrow{\mathsf{g}} \ldots$
- Chaque événement modélise la transformation d'une liste de variables d'états appelées *frame* et notée u :

$$\mathbf{if}\ cond(u)\ \mathbf{then}\ u := f(u)\ \mathbf{fi}$$

Non-déterminisme et entrelacement

Les événements de E sont observés les uns à la suite des autres en veillant à ce qu'un événement est observé quand sa *garde* est vraie.
On peut ajouter une hypothèse d'équité sur la trace produite.

Système réparti en tant que collection d'algorithmes locaux



Section Courante

]

Modèle relationnel d'un système

Un modèle relationnel $\mathcal{MS}$ pour un système $\mathcal{S}$ est une structure

$$(Th(s,c), x, \textsc{Vals}, \textsc{Init}(x), \{r_0, \ldots, r_n\})$$

où

- $Th(s,c)$ est une théorie définissant les ensembles, les constantes et les propriétés statiques de ces éléments.
- x est une liste de variables flexibles.
- $\textsc{Vals}$ est un ensemble de valeurs possibles pour x.
- $\{r_0, \ldots, r_n\}$ est un ensemble fini de relations reliant les valeurs avant x et les valeurs après x'.
- $\textsc{Init}(x)$ définit l'ensemble des valeurs initiales de x.
- la relation r_0 est la relation $Id[\textsc{Vals}]$, identité sur $\textsc{Vals}$.

Definition

Soit $(Th(s,c), x, \text{VALS}, \text{INIT}(x), \{r_0, \ldots, r_n\})$ un modèle relationnel d'un système $\mathcal{S}$. La relation NEXT associée à ce modèle est définie par la disjonction des relations r_i :
$\text{NEXT} \stackrel{def}{=} r_0 \vee \ldots \vee r_n$

i
pour une variable x, nous définissons les valeurs suivantes :

- x est la valeur courante de la variable x.
- x' est la valeur suivante de la variable x.
- x_0 ou $\underline{x}$ sont la valeur initiale de la variable x.
- $\overline{x}$ est la valeur finale de la variable X, quand cette notion a du sens.

Exemples de systèmes de transition

- Une grammaire $(\mathrm{N}, \mathrm{T}, \mathrm{P}, \mathrm{S})$ permet de construire un système de transition sur l'ensemble des configurations $(\mathrm{N} \cup \mathrm{T})^{\star}$.
- Une machine de Turing $(\mathrm{Q}, \Sigma, \Gamma, \mathrm{B}, \delta)$ permet de construire un système de transition sur l'ensemble des configurations $(\Sigma \cup \Gamma)^{\star}$.
- Un réseau de Petri
- Un programme

Section Courante

]

Section Courante

]

Modélisation avec une relation

- Le système est modélisé par
  - une liste de variables flexibles x et une condition initiale notée $Init(x)$
  - une relation de transition modélisant le passage des variabables flexibles de l'état courant à l'état suivant $Next(x,x')$
  - un invariant inductif noté $I(x)$
  - une liste de propriétés de sûreté

Etat courant

Définir un protocole simple avec TLA$^+$

- Envoi de messages
- Modélisation par des ensembles de messages envoyés ou reçus.

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{sending}(agent, message, bgent) \stackrel{def}{=} \\
\quad \wedge agent \in AGENTS \\
\quad \wedge bgent \in AGENTS \\
\quad \wedge message \in MESSAGES \\
\quad \wedge << agent, message, bgent >> \notin sent \\
\quad \wedge << agent, message, bgent >> \notin got \\
\quad \wedge sent' = sent \cup << agent, message, bgent >> \\
\quad \wedge got' = got
\end{array}
$$

Définir un protocole simple avec TLA$^+$

- Réception de messages
- Modélisation par des ensembles de messages envoyés ou reçus.

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{receiving}(agent, message, bgent) \stackrel{def}{=} \\
\quad \wedge agent \in AGENTS \\
\quad \wedge bgent \in AGENTS \\
\quad \wedge message \in MESSAGES \\
\quad \wedge << agent, message, bgent >> \in sent \\
\quad \wedge << agent, message, bgent >> \notin got \\
\quad \wedge got' = got \cup << agent, message, bgent >> \\
\quad \wedge sent' = sent
\end{array}
$$

Définir un protocole simple avec TLA$^+$

- Définir le système
- Donner des propriétés de sûreté

$$Init \stackrel{def}{=} sent = \varnothing \wedge got = \varnothing$$

$$\begin{array}{l} Next \stackrel{def}{=} \\ \quad \exists agent, bgent \in AGENTS : \\ \quad \exists message \in MESSAGES : \\ \quad\quad \vee \quad \mathsf{sending}(agent, message, bgent) \\ \quad\quad \vee \quad \mathsf{receiving}(agent, message, bgent) \end{array}$$

... et les messages se perdent parfois...

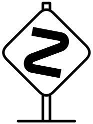
- Le système de gestion des communications peut être non fiable et perdre des messages.
- loosing(agent,message,bgent) modélise la perte d'un message.

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{loosing}(agent, message, bgent) \stackrel{def}{=} \\
\quad \wedge agent \in AGENTS \\
\quad \wedge bgent \in AGENTS \\
\quad \wedge message \in MESSAGES \\
\quad \wedge << agent, message, bgent >> \in sent \\
\quad \wedge << agent, message, bgent >> \notin got \\
\quad \wedge got' = got - << agent, message, bgent >> \\
\quad \wedge sent' = sent
\end{array}
$$

Définir un protocole simple avec pertes

$$
\begin{array}{l}
Init \stackrel{def}{=} sent = \varnothing \wedge got = \varnothing \\
\\
Next \stackrel{def}{=} \\
\quad \exists agent, bgent \in AGENTS : \\
\quad \exists message \in MESSAGES : \\
\qquad \vee \quad \mathsf{sending}(agent, message, bgent) \\
\qquad \vee \quad \mathsf{receiving}(agent, message, bgent) \\
\qquad \vee \quad \mathsf{loosing}(agent, message, bgent)
\end{array}
$$

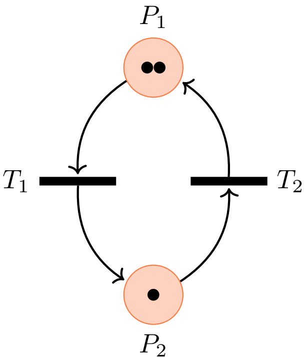
- sûreté *tout message reçu est envoyé* $got \subseteq sent$



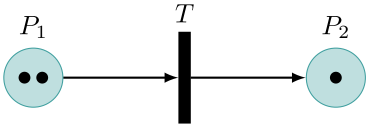
Il est possible que $got = \varnothing$

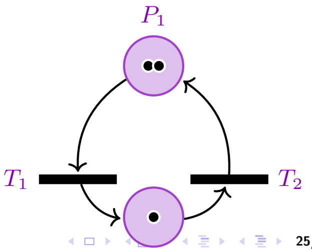
Etat courant

Exemples de réseaux de Petri

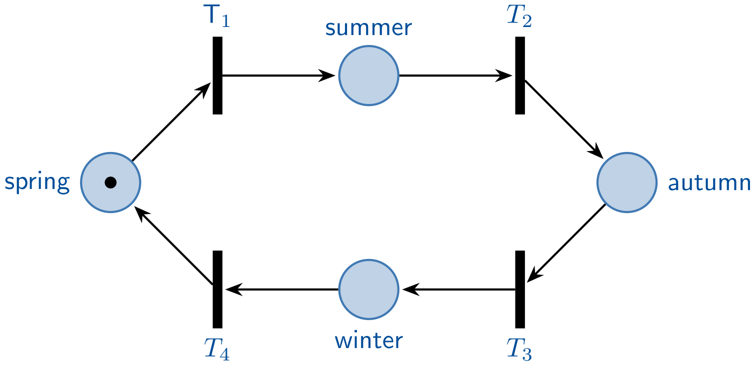


- Graphes bipartis
- Places
- Transitions
- Capacité des places
- Consommation/production des jetons

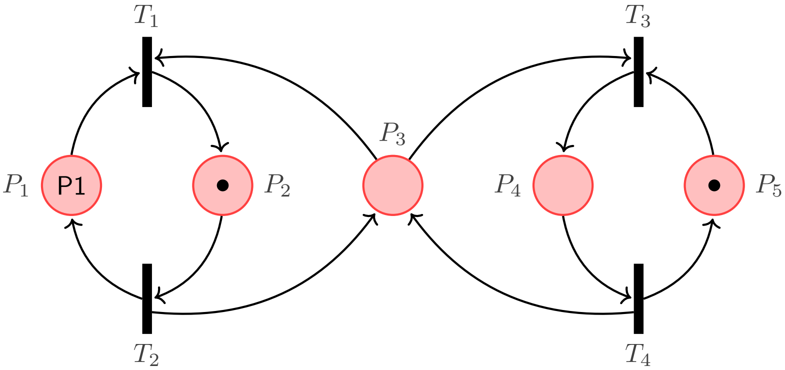




Les quatre saisons ...



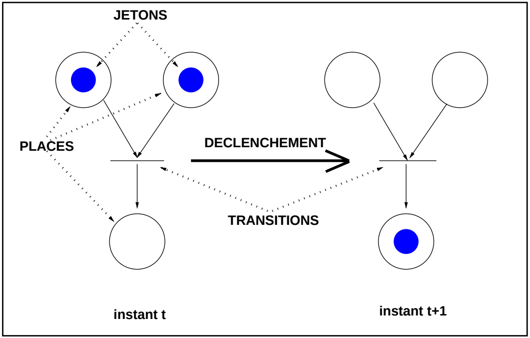
Synchronisation de deux processus concurrents



Réseaux de Petri

- Un réseau de Petri est un graphe dirigé biparti ayant des jetons constituant la marquage.
- Le réseau est caractérisé par son marquage qui évolue au cours de l'exécution des transitions
- Le déclenchement ou l'activation des transitions est fonction de conditions de ressources sur les places avant la transition et après la transition.

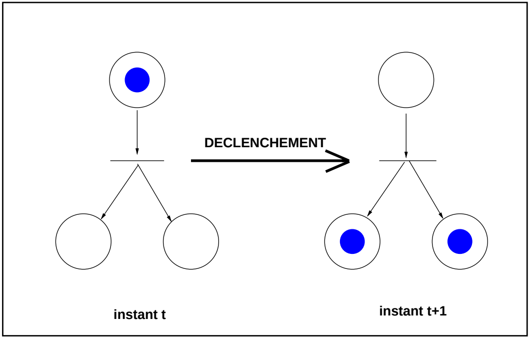
Réseaux de Petri



Réseaux de Petri

- Les transitions peuvent soit consommer des jetons (synchronisation) soit produire de jetons (activités concurrentes) :
- Les ressources sont modélisées par les jetons présents t il peut y avoir une limitation de la capacité des places.

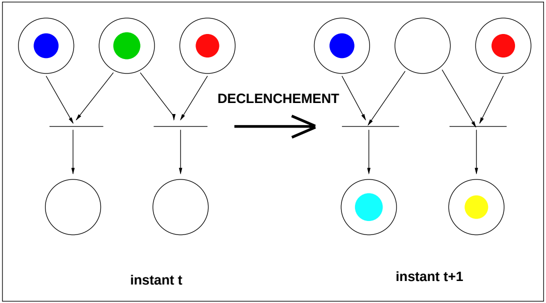
Réseaux de Petri



Réseaux de Petri

- Le partage d'une ressource est modélisé par le partage d'un jeton requis pour l'une ou l'autre des transitions possibles c'est-à-dire activable.
- Le jeton vert est consommé par l'une ou l'autre des deux transitions possibles.

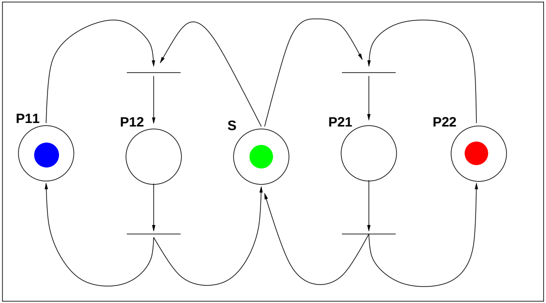
Réseaux de Petri



Réseaux de Petri

- La synchronisation de processus est réalisée par une place S qui est partagée par deux processus P1 et P2 :
- La propriété d'exclusion mutuelle est garantie par l'utilisation exclusive du jeton de la place S par les processus P1 et P2.

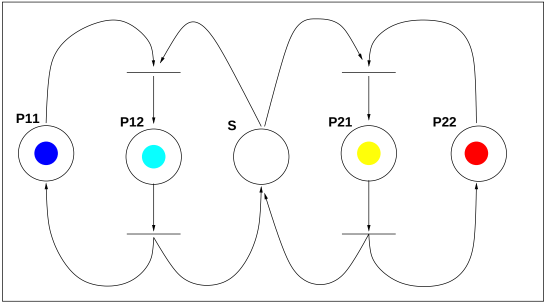
Réseaux de Petri



Réseaux de Petri

- Le déclenchement de l'une des deux transitions est possible quand le jeton vert est en place mais une seule est activée.
- Les réseaux de Petri (1962) ont été créés par **Carl Adam Petri** (avec un C et pas un K) et ont été largement utilisés par la communauté informatique et automatique.
- Des extensions ont été proposées notamment en colorant les jetons ou en ajoutant des probablités aux transitions.

Réseaux de Petri



Réseaux de Petri

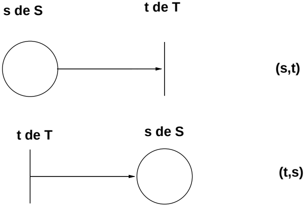
Un réseau de Petri est un uple R=(S,T,F,K,M,W)

- S est l'ensemble (fini) des places.
- T est l'ensemble (fini) des transitions.
- $S \cap T = \varnothing$
- F est la relation du flôt d'exécution :
  $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
- K représente la capacité de chaque place :
  $K \in S \rightarrow Nat \cup \{\omega\}$

Réseaux de Petri

- M représente le initial marquage chaque place :
  M $\in$ S $\rightarrow$ Nat et vérifie la condition $\forall$ s $\in$ S : M(s) $\leq$ K(s).
- W représente le poids de chaque arc :
  W $\in$ F $\rightarrow$ Nat
- relation entre la représentation graphique et la définition textuelle :
- un marquage M pour R est une fonction de S dans Nat
  M $\in$ S $\rightarrow$ Nat
  et respectant la condition $\forall\ s \in\ S : M(s)\ \leq\ K(s)$.

Réseaux de Petri



Réseaux de Petri

- une transition t de T est activable à partir de M un marquage de R si
  1. $\forall$ s $\in$ { s' $\in$ S — (s',t) $\in$ F } :
     M(s) $\geq$ W(s,t).
  2. $\forall$ s $\in$ { s' $\in$ S — (t,s') $\in$ F } :
     M(s) $\leq$ K(s) - W(s,t).
- Pour chaque transition t de T, Pre(t) est l'ensemble des places conduisant à t et Post(t) est l'ensemble des places pointées par un lien depuis t :
  Pre(t) = { s' $\in$ S : (s',t) $\in$ F }
  Post(t) = { s' $\in$ S : (t,s') $\in$ F }

Réseaux de Petri

- Soit une transition t de T activable à partir de M un marquage de R :
  1. $\forall$ s $\in$ { s' $\in$ S — (s',t) $\in$ F } :
     M(s) $\geq$ W(s,t).
  2. $\forall$ s $\in$ { s' $\in$ S — (t,s') $\in$ F } :
     M(s) $\leq$ K(s) - W(s,t).
- un nouveau marquage M' est défini à partir de M par : ' $\forall$ s $\in$ S,

$$M'(s) = \begin{cases} M(s) - W(s,t), \text{ si } s \in \textsc{Pre}(t) \text{ - } \textsc{Post}(t) \\ M(s) + W(t,s), \text{ si } s \in \textsc{Post}(t) \text{ - } \textsc{Pre}(t) \\ M(s) - W(s,t) + W(t,s), \text{ si } s \in \textsc{Pre}(t) \cap \textsc{Post}(t) \\ M(s), \text{ sinon} \end{cases}$$

Réseaux de Petri

- Une relation de transition sur l'ensemble des marquages possibles modélise l'activité du réseau :
$M_0 \xrightarrow{T_0} M_1 \xrightarrow{T_1} M_2 \xrightarrow{T_2} M_3 \xrightarrow{T_3} M_4 \xrightarrow{T_4} \ldots M_I \xrightarrow{T_I} M_{I+1} \xrightarrow{T_{I+1}} \ldots$
- Un réseau est bloqué, si aucune de ses transitions n'est activable.
- Un réseau est non bloqué en permanence ou vif, si initialement et pour tout marquage atteint au cours du calcul, au moins une transition est activable.

Réseaux de Petri

Invariant de réseau de Petri

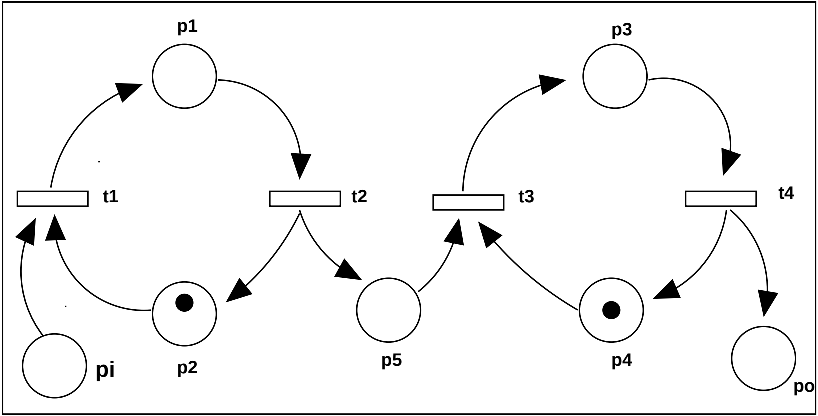
Un invariant de marquage pour un réseau de Petri est un expression de la forme suivante :
$\exists\ p_1, \ldots p_n \in P : \exists q_1, \ldots q_n, C \in \mathbb{Z} :$
$\forall M \in \mathcal{M} : q_1 M(p_1) + q_n M(p_n) = C$

- Les réseaux de Petri sont aussi représentés à l'aide de matrices pour leur flôt et cela définit une algèbre sur les réseaux de Petri : $M_{\mathrm{K}} = M_{\mathrm{I}} + W.S$ est l'équation fondamentale permettant de définir la relation de transition.
- Les réseaux de Petri permettent d'exprimer des contraintes de synchronisation

Réseaux de Petri

- Le modèle est aussi puissant que les machines de Turing
- Le modèle permet de modéliser les activités concurrentes et non déterministes.
- Le Graphcet est une forme proche des réseaux de Petri et est utilisé pour la modélisation des systèmes.
- La notion sous-jacente est celle des systèmes de transition discrets.

Exemple d'un réseau de Petri



Modélisation de petri10

EXTENDS $Naturals, TLC$
CONSTANTS $Places, N, Q, B$
VARIABLES M

t1 $\stackrel{def}{=}$

$\wedge M["p2"] = 1 \wedge M["pi"] \geq 1 \wedge M["p1"] = 0$

$\wedge M' = [[[MEXCEPT!["p1"] = 1]EXCEPT!["pi"] = M["pi"]-1]EXC$

t2 $\stackrel{def}{=}$

$\wedge M["p1"] = 1 \wedge M["p5"] \leq B$

$\wedge M' = [[[MEXCEPT!["p1"] = 0]EXCEPT!["p5"] = M["p5"]+1]EXC$

t3 $\stackrel{def}{=}$

$\wedge M["p5"] \geq 1 \wedge M["p3"] = 0$

$\wedge M' = [[[MEXCEPT!["p3"] = 1]EXCEPT!["p5"] = M["p5"]-1]EXC$

t4 $\stackrel{def}{=}$

$\wedge M["p3"] = 1 \wedge M["p4"] = 0 \wedge M["po"] < Q$

$\wedge M' = [[[MEXCEPT!["p3"] = 0]EXCEPT!["po"] = M["po"]+1]EXC$

Modélisation de petri10

$$Init1 \stackrel{def}{=} M = [p \in Places | -> IF\ p\ \in\ "p4","p2" THEN\ 1\ ELSE\ IF\ p$$

$$Init \stackrel{def}{=} Init1$$

$$Next \stackrel{def}{=} t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4$$

$$Petri \stackrel{def}{=} Init \wedge \Box[Next]_{<M>}$$

$$TypeInvariant \stackrel{def}{=} \forall p \in Places : M[p] \geq 0$$

$$Inv1 \stackrel{def}{=} M["pi"]+M["p5"]+M["po"]+M["p1"]+M["p3"] = N$$

$$Inv2 \stackrel{def}{=} M["po"] \# Q$$

$$Inv3 \stackrel{def}{=} M["p5"] \# 1$$

$$Inv \stackrel{def}{=} TypeInvariant$$

Choix de modélisation

- Donner le ≪ quoi ≫ : spécification de ce que fait le protocole

Choix de modélisation

- Donner le « quoi » : spécification de ce que fait le protocole
  - envoi d'un message m par un processus P à un processus Q

Choix de modélisation

- Donner le ≪ quoi ≫ : spécification de ce que fait le protocole
  - envoi d'un message m par un processus P à un processus Q
  - décomposition en plusieurs phases

Choix de modélisation

- Donner le « quoi » : spécification de ce que fait le protocole
  - envoi d'un message m par un processus P à un processus Q
  - décomposition en plusieurs phases
- Donner le « comment » : simulation du protocole par des événements et des phases des couches plus basses

Section Courante

]

Définir un module en TLA$^+$

- Définir les données : chaines, nombres, ensembles, fonctions
- Définir les actions : relatioin entre des variables non primées et primées
- Définir le système : donner ses conditions initiales et la relation de transition
- Définir les propriétés : sûreté, non-blocage, accessibilité

Le langage TLA$^+$

1. L'entité de structuration syntaxique est le MODULE dont le nom *name* est utilisé comme identificatuer du fichier en ajoutant le suffixe *.tla*
2. Un module peut étendre d'autres modules par la directive EXTENDS indiquant que toiut ce qui est dans ces modules est utilisable dans le module courant
3. Un module peut déclarer des constantes par la directive CONSTANTS et ces constantes sont instanciées dans un modèle.
4. Un module peut déclarer des variables dites flexibles par la directive VARIABLES et chaque variable X a deux références possibles x valeur courante et x' valeur suivante
5. Un module peur définir une entité en indiquant son nom *name* et une expression *expr* comportant des éléments déjà définis :
`name == expr`

Conventions pour l'outil TLC

- Toute action est écrite sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l} name \stackrel{def}{=} \\ \qquad \wedge\ G(x,y,u) \\ \qquad \wedge\ u' = f(u) \\ \qquad \wedge\ y' = y \end{array}}$$

- y est une variable qui n'est pas modifiée
- f est une fonction calculable ou codable
- x est une coinstante

Un exemple simple et complet

```
-------------------- MODULE pgcd -----------------
EXTENDS Naturals,TLC
CONSTANTS a,b
VARIABLES  x,y
-----------------------------------
Init == x=a /\ y=b
-----------------------------------
a1 == x > y /\ x'=x-y /\ y'=y
a2 == x < y /\ y'=y-x /\ x'=x
over == x=y /\ x'=x /\ y'=y
------------------------------------
Next == a1 \/ a2 \/ over
------------------------------------
test == x # y
prop == x \geq 0
prop2 == x+y \leq a+b
=============================================
```

Section Courante

]

Etat courant

The TLA$^+$ Toolbox

https://github.com/tlaplus/

The TLA$^+$ tools require Java 11+ to run and the tla2tools.jar file contains multiple TLA$^+$ tools.
You add tla2tools.jar to your CLASSPATH environment variable.
Running java -jar tla2tools.jar is aliased to java -cp tla2tools.jar tlc2.TLC.

- `java -cp tla2tools.jar tla2sany.SANY -help` : The TLA$^+$ parser.
- `java -cp tla2tools.jar tlc2.TLC -help` : The TLA$^+$ model checker
- `java -cp tla2tools.jar pcal.trans -help` : The PlusCal-to-TLA$^+$ translator
- `java -cp tla2tools.jar tla2tex.TLA -help` : The TLA$^+$-to-LaTeX translator

Defining constants and properties ton check

Listing 1 – cours0.tla

```
---------------------- MODULE cours0 ----------------------
EXTENDS Integers, Naturals, TLC
CONSTANTS x0, y0
VARIABLES  x, y
------------------------------------------------------------
ASSUME x0 \in Nat /\ y0 \in Nat
Init == x=x0 /\ y=y0
------------------------------------------------------------
(* actions *)
finger ==
    /\ y # 0
    /\ x'=x+1
    /\ y'=y-1
over == y=0 /\ x'=x /\ y'=y
------------------------------------------------------------
Next == finger \/ over
------------------------------------------------------------
(* Safety properties to be verified *)
TypeOK ==
       /\ x \in Int
       /\ y \in Int
Inv  ==
     /\ x \geq x0 /\ x <= x0+y0
     /\  0 <= y /\ y  <=y0
     /\ x+y = x0+y0
P1 == [] Inv
P2 == [] (0 <= y /\ y <= y0)
Q1 == y # 0

============================================================
```

Defining constants and properties ton check

Listing 2 – cours0.tla

```
------------------------ MODULE cours0 ------------------------
EXTENDS Integers, Naturals,TLC
CONSTANTS x0,y0
VARIABLES  x,y
---------------------------------------------------------------
ASSUME x0 \in Nat /\ y0 \in Nat
Init == x=x0 /\ y=y0
---------------------------------------------------------------
(* actions *)
finger ==
    /\ y # 0
    /\ x'=x+1
    /\ y'=y-1
over == y=0 /\ x'=x /\ y'=y
---------------------------------------------------------------
Next == finger \/ over
---------------------------------------------------------------
(* Safety properties to be verified *)
TypeOK ==
       /\ x \in Int
       /\ y \in Int
Inv  ==
     /\ x \geq x0 /\ x <= x0+y0
     /\  0 <= y /\ y  <=y0
     /\ x+y = x0+y0
P1 == [] Inv
P2 == [] (0 <= y /\ y <= y0)
Q1 == y # 0

===============================================================
```

The balls y are moved towards the balls x, as long as there are any left.

Defining models for TLC model checking

Listing 3 – cours0.cfg

```
\* SPECIFICATION
\* Uncomment the previous line and provide the specification name if it's declared
\* in the specification file. Comment INIT / NEXT parameters if you use SPECIFICATION.

CONSTANTS
    greeting = "Hello"
    x0 = 5
    y0 = 9

INIT Init
NEXT Next

PROPERTY
\* Uncomment the previous line and add property names
P1
P2

INVARIANT
\* Uncomment the previous line and add invariant names
TypeOK
Inv
```

Defining models for TLC model checking

Listing 4 – cours0.cfg

```
\* SPECIFICATION
\* Uncomment the previous line and provide the specification name if it's declared
\* in the specification file. Comment INIT / NEXT parameters if you use SPECIFICATION.

CONSTANTS
    greeting = "Hello"
    x0 = 5
    y0 = 9

INIT Init
NEXT Next

PROPERTY
\* Uncomment the previous line and add property names
P1
P2

INVARIANT
\* Uncomment the previous line and add invariant names
TypeOK
Inv
```

- Setting constants
- Adding temporal properties as $[]P$ or $\Box P$.
- Adding invariant properties as Inv.

Etat courant

The Symbolic Model Checker for TLA$^+$

Apalache is a symbolic model checker for TLA$^+$ designed by Igor Kopnov and it can be got from the website https://apalache-mc.org.
Apalache translates TLA+ into the logic supported by SMT solvers such as Microsoft Z3. Currently, Apalache supports four approaches of analyzing TLA+ specifications :

- Randomized symbolic execution to reason about some executions up to length k,
- Bounded model checking to reason about all executions up to length k, and
- Inductiveness checking to reason about all executions of all lengths.
- Write your own exploration scripts over symbolic actions, including the feedback from the implementation.

Section Courante

]

Etat courant

TLA/TLA$^+$

- Definition of a simple algorithmic language.
- Specific comment in between (* and *)
  `--algorithm name { definitions }`
- Generation of a TLA$^+$ specification with introduction of a new variable pc modelling control.
- The ToolBox tool has a translation feature.

Exemple

Listing 5 – courspluscal0.tla

```
------------------------ MODULE courspluscal0 ------------------------
EXTENDS Naturals, Integers, TLC
CONSTANTS x0, y0, z0
----------------------------------------------------------------------
(* precondition *)
ASSUME x0 = y0 + 3*z0
----------------------------------------------------------------------
(*
--algorithm ex {
  variables x=x0,
            y = y0,
            z=z0;

{
l0: assert x = y + 3*z /\ y=y0 /\ z=z0 ;
    x := y+3*z;
l1: assert x = y0+3*z0 /\ y=y0 /\ z=z0 ;
}
}
*)
\* BEGIN TRANSLATION (chksum(pcal) = "cd0610de" /\ chksum(tla) = "2c474478")
VARIABLES x, y, z, pc

vars == << x, y, z, pc >>

Init == (* Global variables *)
        /\ x = x0
        /\ y = y0
        /\ z = z0
        /\ pc = "l0"

l0 == /\ pc = "l0"
      /\ Assert(x = y + 3*z /\ y=y0 /\ z=z0,
                "Failure of assertion at line 15, column 5.")
      /\ x' = y+3*z
      /\ pc' = "l1"
      /\ UNCHANGED << y, z >>
```

Exemple

Listing 6 – courspluscal0.tla

```
---------------------------- MODULE courspluscal0 ----------------------------
EXTENDS Naturals, Integers, TLC
CONSTANTS x0,y0,z0
-----------------------------------------------------------------------------
(* precondition *)
ASSUME x0 = y0 + 3*z0
-----------------------------------------------------------------------------
(*
--algorithm ex {
  variables x=x0,
            y = y0,
            z=z0;

{
l0: assert x = y + 3*z /\ y=y0 /\ z=z0 ;
    x := y+3*z;
l1: assert x = y0+3*z0 /\ y=y0 /\ z=z0 ;
}
}
*)
\* BEGIN TRANSLATION (chksum(pcal) = "cd0610de" /\ chksum(tla) = "2c474478")
VARIABLES x, y, z, pc

vars == << x, y, z, pc >>

Init == (* Global variables *)
        /\ x = x0
        /\ y = y0
        /\ z = z0
        /\ pc = "l0"

l0 == /\ pc = "l0"
      /\ Assert(x = y + 3*z /\ y=y0 /\ z=z0,
                "Failure of assertion at line 15, column 5.")
      /\ x' = y+3*z
      /\ pc' = "l1"
      /\ UNCHANGED << y, z >>
```

Structure of a PlusCal algorithm

```
—algorithm Exemple
variables x = 0;

begin
   x := x + 1;
end algorithm
```

Variables and assignments

- Declaration in the `variables`
- Assignment with `:=`
- Implicit types (integers, sets, sequences)

Boucles et conditions

```
while (x < 10) do
  if (x % 2 = 0) then
    x := x + 1;
  else
    x := x + 2;
  end if;
end while;
```

Advantages of PlusCal

- Better readability than TLA$^+$ expressions.
- Automatic verification made possible by model checking
- Suitable for distributed systems and our lectures on distributed algorithms.
- Based on solid mathematical foundations

Limitations

- Not an execution language
- TLA$^+$ learning curve
- Specific tools required

Macros and procedures in PlusCal

- Macros and procedures allow you to make the code simpler
- Improving the readability and the modularity
- Points
  - **Macro** : reusable code fragment in the algorithm
  - **Procedure** : function that can be called with arguments
- Syntax similar to an imperative language

Macros et Procedures

```
macro Name(var1, ...)
begin
 \* something to write
end macro;
```

```
procedure Name(arg1, ...)
variables var1 = ... \* not
\in, only =
begin
  Label:
  \* something
  return;
end procedure;
```

Example 1 : simple macro

```
--algorithm ExMacro
variables x = 0;

macro incrX()
begin
  x := x + 1;
end macro;

begin
  l0: assert (x = 0);
  l1: incrX();
  l2: incrX();
  l3: assert (x = 2);

end algorithm;
```

- File pluscalcours2.tla
- The macro `incrX` increments the variable x
- Called twice, x is equal to 2 at the end

Example2 : Procedure with parameter

```
--algorithm ExProcedure
variables x   = 1;

define
  Op(p) == 2*p
end define;

procedure test(v)
variables w = 1
begin
   l8:  v:=v+w;
   l9:return;
end procedure;

begin
   l0:assert (x = 1);
   call test(x);
   nl:call test(x);
   l3:assert (x = 1);
    x := Op(x);
   l4:assert (x = 2);
   end algorithm;
```

- File pluscalcours1.tla

Summation

```
---------------------- MODULE pluscalcours3 ----------------------
EXTENDS Integers, TLC
------------------------------------------------------------------
CONSTANTS x0 (* x0 is the input *), intmin, intmax
------------------------------------------------------------------
(* notations *)
typeInt(u) == u \in Int (* u is an integer *)
DD(X) == intmin \leq X /\ X \leq intmax
sum(u) == (u*(u+1)) \div 2
pre(X) == X \geq 0
------------------------------------------------------------------
(* Checking calling conditions *)
ASSUME pre(x0)
------------------------------------------------------------------


(*
--algorithm sum {
variables ps=0,k=0,r,x=x0;
{
inloop: while (k < x) {
      k := k + 1;
      ps := ps + k+1;
   };
 outloop: r := ps;
}
```

Etat courant

General form for processes

```
---- MODULE module_name ----
\* TLA+ code

(* --algorithm algorithm_name
variables global_variables

process p_name = ident
variables local_variables
begin
  \* pluscal code
end process

process p_group \in  set
variables local_variables
begin
  \* pluscal code
end process

end algorithm; *)
```

Exemple 1 pluscalconcurrent.tla

```
--algorithm ExConcurrent1
variables x = 0;
process (P \in {1,2})
variables localx;
begin
   l1:localx:=self;
   l2:x:=x+localx;
   l3:await x = 3;
end process;

end algorithm;
```

Example 1

```
process pro = "test"
begin
  print<<"test">>;
end process
```

Process in PlusCal

- A multiprocess algorithm contains one or more processes.
- A process begins in one of two ways :
  - defining a set of processes : `process ( ProcName` $\in$ `IdSet )`
  - defining one process with an identifier `process ( ProcName = Id )`
- `self` designates the current procees

A process S sends a message to a process R

```
—algorithm ex_process {
  variables
    input = <<>>, output = <<>>,
    msgChan = <<>>, ackChan = <<>>,
    newChan = <<>>;
\* defining macros
  process (Sender = "S")
  {

  }; \* end Sender process block
  process (Receiver = "R")
  {

  }; \* end Receiver process block

} \* end algorithm
```

receiving prilmitives

```
—algorithm ex_process {
  variables
    input = <<>>, output = <<>>,
    msgChan = <<>>, ackChan = <<>>,
    newChan = <<>>;
  macro Send(m, chan) {
    chan := Append(chan, m);
  }
  macro Recv(v, chan) {
    await chan # <<>>;
    v := Head(chan);
    chan := Tail(chan);
  }

* Processes S and R

} \* end algorithm
```

Defining processes S and R

```
—algorithm ex_process {
  variables
    input = <<>>, output = <<>>,
    msgChan = <<>>, ackChan = <<>>,
    newChan = <<>>;
\* defining macros
  process (Sender = "S")
  variables msg;
  {
  sending:  Send("Hello", msgChan);
  printing:   print <<"Sender", input>>;
  }; \* end Sender process block
  process (Receiver = "R")
  {
  waiting: Recv(msg, msgChan);
  adding: output := Append(output, msg);
  printing:  print <<"Receiver", output>>;
  }; \* end Receiver process block
} \* end algorithm
```

Etat courant

Macros et Procedures

```
macro Name(var1, ...)
begin
 \* something to write
end macro;

procedure Name(arg1, ...)
variables var1 = ... \* not  \in, only =
begin
  Label:
  \* something
  return;
end procedure;
```

Concurrency in PlusCal

- Use of `process`
- Concurrent execution
- Synchronisation with `await`

Example of a concurrent process

```
process (P \in {1,2})
begin
  await x = 0;
  x := P;
end process
```

Section Courante

]

Commentaires finaux

- Importance de l'abstraction
- Raffiner la vue des modèles
- Intégration du temps
- Intégration des probabilités