

---

# Cours MALG & MOVEX

## Modélisation, spécification et vérification

---

Dominique Méry  
Telecom Nancy, Université de Lorraine  
(4 mars 2025 at 10:10 A.M.)

---

Année universitaire 2024-2025

---

- ① Prolégomènes
- ② Modélisation de programmes et de systèmes logiciels
- ③ Modélisation relationnelle
- ④ Modélisation relationnelle en action
  - Exemple du PGCD
  - Exemple de la modélisation d'un dispositif de comptage
  - Logique TLA et langage  $TLA^+$
- ⑤ Summation of the  $n$  first integers
- ⑥ Principe(s) d'induction
- ⑦ Méthode de preuves de propriétés d'invariance
- ⑧ Exemples de correction partielle (affectation simple)
- ⑨ Annotation et vérification outillée avec TLA/ $TLA^+$ 
  - Vérification avec TLA et ses outils
- ⑩ Le langage PlusCal
  - Defining processes in PlusCal
  - Macros and Procedures
- ⑪ Conclusion et limites

- ① Prolégomènes
- ② Modélisation de programmes et de systèmes logiciels
- ③ Modélisation relationnelle
- ④ Modélisation relationnelle en action
  - Exemple du PGCD
  - Exemple de la modélisation d'un dispositif de comptage
  - Logique TLA et langage TLA<sup>+</sup>
- ⑤ Summation of the  $n$  first integers
- ⑥ Principe(s) d'induction
- ⑦ Méthode de preuves de propriétés d'invariance
- ⑧ Exemples de correction partielle (affectation simple)
- ⑨ Annotation et vérification outillée avec TLA/TLA<sup>+</sup>
  - Vérification avec TLA et ses outils
- ⑩ Le langage PlusCal
  - Defining processes in PlusCal
  - Macros and Procedures
- ⑪ Conclusion et limites



- ▶  $\mathcal{R}$  : exigences du système.

- ▶  $\mathcal{R}$  : exigences du système.
- ▶  $\mathcal{D}$  : domaine du problème.

- ▶  $\mathcal{R}$  : exigences du système.
- ▶  $\mathcal{D}$  : domaine du problème.
- ▶  $\mathcal{S}$  : système répondant aux spécifications.

- ▶  $\mathcal{R}$  : exigences du système.
- ▶  $\mathcal{D}$  : domaine du problème.
- ▶  $\mathcal{S}$  : système répondant aux spécifications.

$\mathcal{D}, \mathcal{S}$  SATISFAIT  $\mathcal{R}$



- ▶  $\mathcal{R}$  : exigences du système.
- ▶  $\mathcal{D}$  : domaine du problème.
- ▶  $\mathcal{S}$  : système répondant aux spécifications.

$\mathcal{D}, \mathcal{S}$  SATISFAIT  $\mathcal{R}$

- ▶  $\mathcal{R}$  : pre/post.
- ▶  $\mathcal{D}$  : entiers, réels, ...
- ▶  $\mathcal{S}$  : code, procédure, programme, ...

A program  $P$  satisfies a (pre,post) contract :

- ▶  $P$  transforms a variable  $v$  from initial values  $v_0$  and produces a final value  $v_f : v_0 \xrightarrow{P} v_f$
- ▶  $v_0$  satisfies pre :  $\text{pre}(v_0)$  and  $v_f$  satisfies post :  $\text{post}(v_0, v_f)$
- ▶  $\text{pre}(v_0) \wedge v_0 \xrightarrow{P} v_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f)$
- ▶  $\mathbb{D}$  est le domaine RTE de  $V$

requires  $\text{pre}(v_0)$   
 ensures  $\text{post}(v_0, v_f)$   
 variables  $X$

```
begin
  0 :  $P_0(v_0, v)$ 
  instruction0
  ...
  i :  $P_i(v_0, v)$ 
  ...
  instructionf-1
  f :  $P_f(v_0, v)$ 
end
```

- ▶  $\text{pre}(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_0(v_0, v)$
- ▶  $\text{pre}(v_0) \wedge P_f(v_0, v) \Rightarrow \text{post}(v_0, v)$
- ▶ For any pair of labels  $\ell, \ell'$  such that  $\ell \longrightarrow \ell'$ , one verifies that, pour any values  $v, v' \in \text{MEMORY}$ 

$$\left( \begin{array}{l} \text{pre}(v_0) \wedge P_\ell(v_0, v) \\ \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \end{array} \right) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$$
- ▶ For any pair of labels  $m, n$  such that  $m \longrightarrow n$ , one verifies that,  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}$  :
$$\text{pre}(v_0) \wedge P_m(v_0, v) \Rightarrow \text{DOM}(m, n)(v)$$

## Example of an annotation


---

```
VARIABLES  $X$   
REQUIRES ...  
ENSURES ...  
WHILE  $0 < X$  DO  
   $X := X - 1;$   
OD;
```

## Example of an annotation

---

```
VARIABLES  $X$   
REQUIRES ...  
ENSURES ...  
WHILE  $0 < X$  DO  
   $X := X - 1;$   
OD;
```



## Example of an annotation

---

```
VARIABLES  $X$   
REQUIRES ...  
ENSURES ...  
WHILE  $0 < X$  DO  
   $X := X - 1$ ;  
OD;
```

→ →

## Example of an annotation

---

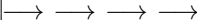
```
VARIABLES  $X$   
REQUIRES ...  
ENSURES ...  
WHILE  $0 < X$  DO  
   $X := X - 1;$   
OD;
```

→ → →

## Example of an annotation

---

```
VARIABLES  $X$   
REQUIRES ...  
ENSURES ...  
WHILE  $0 < X$  DO  
   $X := X - 1$ ;  
OD;
```



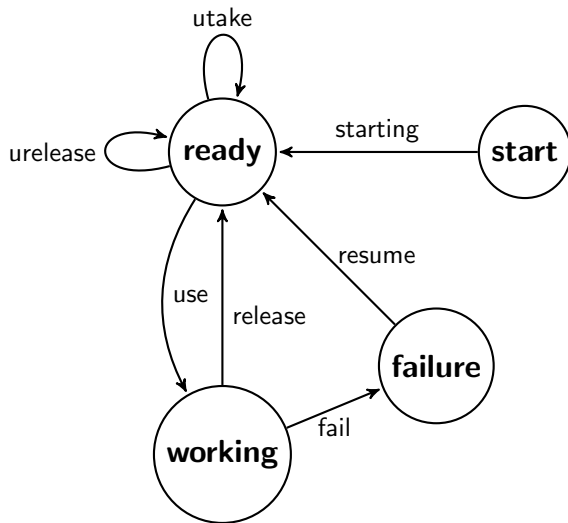
## Example of an annotation

```
VARIABLES  $X$   
REQUIRES ...  
ENSURES ...  
WHILE  $0 < X$  DO  
   $X := X - 1;$   
OD;
```

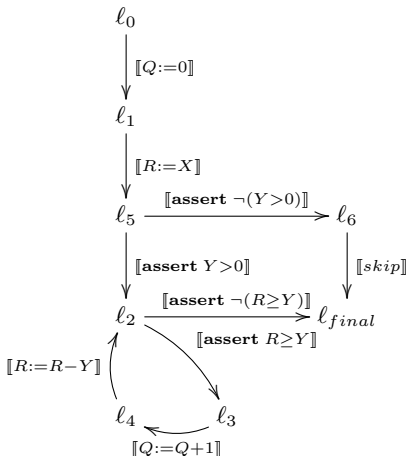
→ → → →

```
CM3ONTRACT  $EX$   
VARIABLES  $X(int)$   
REQUIRES  $x_0 \in \mathbb{N}$   
ENSURES  $x_f = 0$   
   $\ell_0 : \{ x = x_0 \wedge x_0 \in \mathbb{N} \}$   
WHILE  $0 < X$  DO  
   $\ell_1 : \{ 0 < x \leq x_0 \wedge x_0 \in \mathbb{N} \}$   
   $X := X - 1;$   
   $\ell_2 : \{ 0 \leq x \leq x_0 \wedge x_0 \in \mathbb{N} \}$   
OD;  
   $\ell_3 : \{ x = 0 \}$ 
```





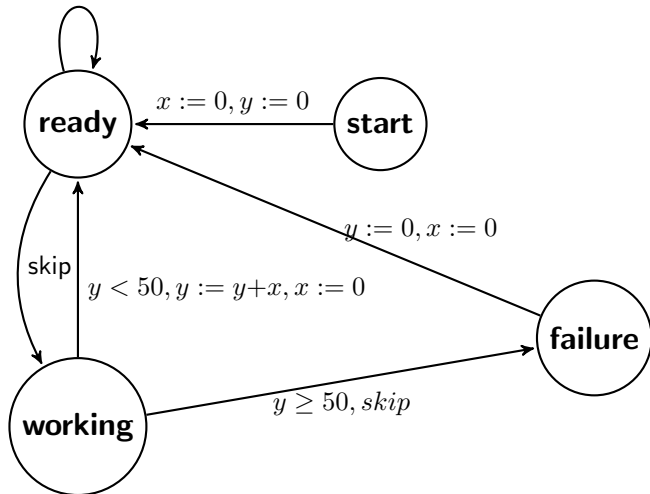
```
ℓ0[Q := 0];  
ℓ1[R := X];  
IF ℓ5[Y > 0]  
    WHILE ℓ2[R ≥ Y]  
        ℓ3[Q := Q + 1];  
        ℓ4[R := R - Y]  
    ENDWHILE  
ELSE  
    ℓ6[skip]  
ENDIF
```



- ▶ Un automate a des états de contrôle : compteur ordinal d'un programme
- ▶ Un automate a des étiquettes : événements, actions, ...
- ▶ Un automate peut aussi avoir des variables explicites qui sont modifiées par des actions
- ▶ Un automate décrit des exécutions possibles qui sont des chemins suivant les informations de l'automate.



$x \leq 5, x := x+1$



## Un petit système en tant qu'automate

$$x \leq 5, x := x+1$$


► safety1 :  $0 \leq x \leq 5$

## Un petit système en tant qu'automate

$$x \leq 5, x := x+1$$


► safety1 :  $0 \leq x \leq 5$  et ...

## Un petit système en tant qu'automate

$$x \leq 5, x := x+1$$


► safety1 :  $0 \leq x \leq 5$  et ... safety2 :  $0 \leq y \leq 56$



$x \leq 5, x := x+1$



$x \leq 5, x := x+1$



- ▶  $\text{safety1} : 0 \leq x \leq 5$  et  $\text{safety2} : 0 \leq y \leq 56$
- ▶  $\text{skip} = x := x, y := y$
- ▶  $\text{skip} = \text{TRUE}, x := x, y := y = \text{TRUE}, \text{skip}$

### Transition entre deux états de contrôle



### Transition entre deux états de contrôle



### Transition entre deux états de contrôle



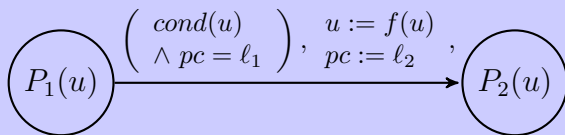
### Transition entre deux états de contrôle



### Transition entre deux états de contrôle



### Transition entre deux prédicats





.....

☒ Definition

Soit  $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel d'un système  $\mathcal{S}$ . La relation NEXT associée à ce modèle est définie par la disjonction des relations  $r_i$  :

$$NEXT \stackrel{def}{=} r_0 \vee \dots \vee r_n$$

.....

pour une variable  $x$ , nous définissons les valeurs suivantes :

- ▶  $x$  est la valeur courante de la variable X.
- ▶  $x'$  est la valeur suivante de la variable X.
- ▶  $x_0$  ou  $\underline{x}$  sont la valeur initiale de la variable X.
- ▶  $\bar{x}$  ou  $x_f$  est la valeur finale de la variable X, quand cette notion a du sens.

.....

### ⊗ Definition(assertion)

Soit  $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel  $M$  d'un système  $\mathcal{S}$ . Une propriété  $A$  est une propriété assertionnelle de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

.....

.....

### ⊗ Definition(relation)

Soit  $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel  $M$  d'un système  $\mathcal{S}$ . Une propriété  $R$  est une propriété relationnelle de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x).$$

.....



- ▶ P. et R. Cousot développent une étude complète des propriétés d'invariance et de sûreté en mettant en évidence correspondances entre les différentes méthodes ou systèmes proposées par Turing, Floyd, Hoare, Wegbreit, Manna ... et reformulent les principes d'induction utilisés pour définir ces méthodes de preuve (voir les deux cubes des 16 principes).

### MODULE *pgcd*

EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANNOTATNTS  $a, b$

VARIABLES  $x, y$

$Init \triangleq x = a \wedge y = b$

$a1 \triangleq x > y \wedge x' = x - y \wedge y' = y$

$a2 \triangleq x < y \wedge y' = y - x \wedge x' = x$

$over \triangleq x = y \wedge x' = x \wedge y' = y$

$Next \triangleq a1 \vee a2 \vee over$

$test \triangleq x \neq y$

```
----- MODULE pgcd -----  
EXTENDS Naturals,TLC  
CONSTANTS a,b  
VARIABLES  x,y  
  
-----  
Init == x=a /\ y=b  
-----  
  
a1 == x > y /\ x'=x-y /\ y'=y  
a2 == x < y /\ y'=y-x /\ x'=x  
over == x=y /\ x'=x /\ y'=y  
-----  
Next == a1 \/ a2 \/ over  
-----  
test == x # y  
=====
```

test

MODULE *ex1*

modules de base importables

EXTENDS *Naturals*, *TLC*

un système contrôle l'accès à une salle dont la capacité est de 19 personnes ; écrire  
un modèle de ce système en vérifiant la propriété de sûreté

VARIABLES *np*

## Exemple de modélisation TLA<sup>+</sup>

### Première tentative

$$\text{entrer} \triangleq np' = np + 1$$
$$\text{sortir} \triangleq np' = np - 1$$
$$next \triangleq entrer \vee sortir$$
$$init \triangleq np = 0$$

Seconde tentative

$$\text{entrer}_2 \triangleq np < 19 \wedge np' = np + 1$$
$$\text{next}_2 \triangleq \text{entrer}_2 \vee \text{sortir}$$

Troisième tentative

$$\text{sortir}_2 \triangleq np > 0 \wedge np' = np - 1$$

$$\text{next}_3 \triangleq \text{entrer}_2 \vee \text{sortir}_2$$

$$\text{safety}_1 \triangleq np \leq 19$$

$$\text{question}_1 \triangleq np \neq 6$$

```

----- MODULE ex1-----
(* modules de base importables *)
EXTENDS Naturals,TLC
-----

(* un syst\`eme contr\`ole l'acc\`es \`a une salle dont la capacit\`e est de 19 personnes
VARIABLES np
-----

(* Premi\`ere tentative *)
entrer == np '=np +1
sortir == np'=np-1
next == entrer \/ sortir
init == np=0\fora
-----

(* Seconde tentative *)
entrer2 == np<19 /\ np'=np+1
next2 == entrer2 \/ sortir
-----

(* Troisi\`eme tentative *)
sortir2 == np>0 /\ np'=np-1
next3 == entrer2 \/ sortir2
-----

safety1 == np \leq 19
question1 == np # 6
=====

```



Soit  $(Th(s, c), x, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel  $M$  d'un système  $\mathcal{S}$ . Une propriété  $A$  est une propriété de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

Soit  $(Th(s, c), x, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel  $M$  d'un système  $\mathcal{S}$ . Une propriété  $A$  est une propriété de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$

►  $x$  est une variable ou une liste de variable : VARIABLES  $x$

Soit  $(Th(s, c), x, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel  $M$  d'un système  $\mathcal{S}$ . Une propriété  $A$  est une propriété de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$

- ▶  $x$  est une variable ou une liste de variable : `VARIABLES x`
- ▶  $Init(x)$  est une variable ou une liste de variable : `init == Init(x)`



Soit  $(Th(s, c), x, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel  $M$  d'un système  $\mathcal{S}$ . Une propriété  $A$  est une propriété de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

- ▶  $x$  est une variable ou une liste de variable : `VARIABLES x`
- ▶  $Init(x)$  est une variable ou une liste de variable : `init == Init(x)`
- ▶  $NEXT^*(x_0, x)$  est la définition de la relation définissant ce que fait le système : `Next == a1 \/\ a2 \/\ .... \/\ an`
- ▶  $A(x)$  est une expression logique définissant une propriété de sûreté à vérifier sur toutes les configurations du modèle : `Safety == A(x)`

- ▶ TLA (Temporal Logic of Actions) sert à exprimer des formules en logique temporelle :  $\Box P$  ou *toujours P*
- ▶ TLA<sup>+</sup> est un langage permettant de déclarer des constantes, des variables et des définitions :
  - $\langle \text{def} \rangle == \langle \text{expression} \rangle$  : une définition  $\langle \text{def} \rangle$  est la donnée d'une expression  $\langle \text{expression} \rangle$  qui utilise des éléments définis avant ou dans des modules qui *étendent* ce module.
  - Une variable  $x$  est soit sous la forme  $x$  soit sous la forme  $x'$  :  $x'$  est la valeur de  $x$  après.
  - Un module a un nom et rassemble des définitions et il peut être une extension d'autres modules.
  - $[f \text{ EXCEPT! } [i]=e]$  est la fonction  $f$  où seule la valeur en  $i$  a changé et vaut .
- ▶ Une configuration doit être définie pour évaluer une spécification

- ▶ Limitation des actions :

$$\begin{aligned} \text{nom} &\triangleq \\ &\wedge \text{cond}(v, w) \\ &\wedge v' = e(v, w) \\ &\wedge w' = w \end{aligned}$$

- ▶  $e(v, w)$  doit être codable en Java.
- ▶ Modules standards : Naturals, Integers, TLC ...

- ▶ Téléchargez l'application le site de Microsoft pour votre ordinateur.
- ▶ Ecrivez des modèles et testez les !
- ▶ Limitations par les domaines des variables.



**Permettre un raisonnement symbolique quel que soit l'ensemble des états**



- ▶ Un programme ou un algorithme peuvent être annotés ou commentés.
- ▶ Un commentaire est une information pertinente destinée à être vue ou lue et qui a une importance relative dans l'esprit du concepteur.
- ▶ Un commentaire indique une information sur les données, sur les variables et donc sur l'état supposé du programme à l'exécution.
- ▶ Un commentaire est une annotation du texte du code qui nous permet de communiquer une information sémantique :
  - *à ce point, la variable  $k$  est plus petite sur  $n$*
  - *l'indice  $e$  fait référence à une adresse licite de  $t$  et cette valeur est toujours positive*
  - *la somme des variables est positive*
- ▶ Les annotations peuvent être systématisées et obéir à une syntaxe spécifique définissant le langage d'annotations ;

```
/*@ assert l1:  z >= 3 && y == 3; */  
z = z + y;  
/*@ assert l2:  z >= 6 && y == 3; */
```

## Calculer la somme des n premiers entiers (v0)

---

```
int fS(int n) {  
    int ps = 0;  
    int k = 0;  
    while (k < n) {  
        k = k + 1;  
        ps = ps + k;  
    };  
    return ps;  
}
```

## Calculer la somme des $n$ premiers entiers (flowchart)



### Calculer la somme des n premiers entiers (v0)

```
// pre n>=0;
// post ps == n*(n+1) / 2;
```

```
int fS(int n) {
    int ps = 0;
    int k = 0;
    while (k < n) {
        k = k + 1;
        ps = ps + k;
    };
    return ps;
}
```

```
int main()
{

}
```

## Calculer la somme des $n$ premiers entiers (v0)

```
// pre  $n \geq 0$ ;  
// post  $ps == n * (n + 1) / 2$ ;
```

```
int fS(int n) {  
    int ps = 0;  
    int k = 0;  
    while (k < n) {  
        //  $ps = k * (k + 1) / 2$ ;  
        k = k + 1;  
        ps = ps + k;  
    };  
    //  $ps = n * (n + 1) / 2$ ;  
    return ps;  
}
```

```
int main()  
{
```

### Calculer la somme des n premiers entiers (v0)

```
#include <stdio.h>

int fS(int n) {
    int ps = 0;
    int k = 0;
    while (k < n) {
        k = k + 1;
        ps = ps + k;

    };
    return ps;
}

int main()
{
    int z = 3;
    printf(" Value for z=%d is %d\n" ,z , fS(z));
    return 0;
}
```



- ▶  $\forall n \in \mathbb{N} : S(n) = \sum_{k=0}^n k$
- ▶  $\left[ \begin{array}{l} IS(0) = 0 \\ n \geq 0, IS(n+1) = IS(n) + n \end{array} \right.$
- ▶  $\forall n \in \mathbb{N} : S(n) = IS(n)$
- ▶
  - base 0 :  $S(0) = 0$
  - induction  $k+1$  :  $S(k+1) = S(k) + k + 1$
  - step  $k+1$  :  $S(k+1) = S(k) + k + 1$
- ▶  $S(k) = ps$  : current value of ps is  $S(k)$
- ▶  $S(k-1) = ops$  : current value of ops is  $S(k-1)$
- ▶ step  $k+1$  :  $ps = ops + k + 1$



## Calculer la somme des n premiers entiers (v1)

```
#include <stdio.h>

int fS(int n) {
    int ps = 0;
    int k = 0;
    int ok=k, ops = 0;
    while (k < n) {
        ok=k;ops=ps;
        k = ok + 1;
        ps = ops + k;
    };
    return ps;
}

int main()
{
    int    z = 3;
    printf(" Value - for - z=%d - is -%d\n" , z , fS(z));
    return 0;
}
```

### Calculer la somme des n premiers entiers (v2)

```
int fS(int n) {
    int ps = 0;
    int k = 0;
    int ok=k, ops = 0;
    while (k < n) {
        /*@ assert 0 <= k && k <= n
           && ps == S(k) && ops == S(ok);    */
        ok=k;ops=ps;
        k = ok + 1;
        ps = ops + k;
        /*@ assert 0 <= k && k <= n && ps == S(k)
           && ops == S(ok);    */
    };
    return ps;
}
```

# Calculer la somme des n premiers entiers

```
/*@ axiomatic S {  
  @ logic integer S(integer n);  
  @ axiom S_0: S(0) == 0;  
  @ axiom S_i: \forall integer i; i > 0 ==> S(i) == S(i-1)+i;  
  @ } */  
  
/*@ requires n >= 0;  
  assigns \nothing ;  
  ensures \result == S(n);  
*/  
int fS(int n) {  
  int ps = 0;  
  int k = 0;  
  int ok=k, ops=ps;  
  /*@ loop invariant 0 <= k && k <= n && ps == S(k) && ops == S(ok) ;  
    loop assigns ps, k, ops, ok;  
  */  
  while (k < n) {  
    /*@ assert I0: 0 <= k && k <= n && ps == S(k) && ops == S(ok); */  
    ops=ps; ok=k;  
    k = ok + 1;  
    ps = ops + k;  
    /*@ assert I1: 0 <= k && k <= n && ps == S(k) && ops == S(ok); */  
  };  
  /*@ assert ps == S(n); */  
  return ps;  
}
```

- ▶ Définition des fonctions mathématiques nécessaires pour exprimer le calcul de la somme des  $n$  premiers nombres entiers.
- ▶ Expression des résultats intermédiaires appelés *sommes partielles*
- ▶ Relation entre la preuve par induction et la forme du corps de l'itération.
- ▶ Induction et calcul sont liés.

- ▶ Définition des fonctions mathématiques nécessaires pour exprimer le calcul de la somme des  $n$  premiers nombres entiers.
- ▶ Expression des résultats intermédiaires appelés *sommes partielles*
- ▶ Relation entre la preuve par induction et la forme du corps de l'itération.
- ▶ Induction et calcul sont liés.

$$x_0 \xrightarrow{P} x \quad (1)$$

$$x_0 \xrightarrow{\star} x \quad (2)$$

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow x \quad (3)$$

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow x_n \xrightarrow{step} x \quad (4)$$



Soit  $(Th(s, c), x, VALS, Init(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel M d'un système S.

Une propriété  $A(x)$  est une propriété de sûreté pour le système S, si et seulement s'il existe une propriété d'état  $I(x)$ , telle que :

$$\forall x, x' \in VALS : \begin{cases} (1) \text{ } Init(x) \Rightarrow I(x) \\ (2) \text{ } I(x) \Rightarrow A(x) \\ (3) \text{ } I(x) \wedge NEXT(x, x') \Rightarrow I(x') \end{cases}$$

La propriété  $I(x)$  est appelée un invariant inductif de S et est une propriété de sûreté particulière plus forte que les autres propriétés de sûreté.

Soit une propriété  $I(x)$  telle que :

$$\forall x, x' \in \text{VALS} : \begin{cases} (1) \text{ Init}(x) \Rightarrow I(x) \\ (2) I(x) \Rightarrow A(x) \\ (3) I(x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow I(x') \end{cases}$$

Alors  $A(x)$  est une propriété de sûreté pour le système  $S$  modélisé par  $M$ .

Soient  $x$  et  $x' \in \text{VALS}$  tels que  $\text{INIT}(x) \wedge \text{NEXT}(x, x')$ .

- ▶ On peut construire une suite telle que :

$$(x = x_0) \xrightarrow{\text{NEXT}} x_1 \xrightarrow{\text{NEXT}} x_2 \xrightarrow{\text{NEXT}} \dots \xrightarrow{\text{NEXT}} (x_i = x').$$

- ▶ L'hypothèse (1) nous permet de déduire  $I(x_0)$ .
- ▶ L'hypothèse (3) nous permet de déduire  $I(x_1), I(x_2), I(x_3), \dots, I(x_i)$ . En utilisant l'hypothèse (2) pour  $x'$ , nous en déduisons que  $x'$  satisfait  $A$ .



$$\forall x_0, x \cdot x, y \in \text{VALS} \wedge \text{Init}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow[\text{Next}]{\star} x \Rightarrow A(x)$$

PROUVONS QUE : il existe une propriété  $I(x)$  telle que :

$$\forall x, x' \in \text{VALS} : \begin{cases} (1) \text{Init}(x) \Rightarrow I(x) \\ (2) I(x) \Rightarrow A(x) \\ (3) I(x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow I(x') \end{cases}$$

- ▶ Nous considérons la propriété suivante :

$$I(x) \hat{=} \exists x_0 \in \text{VALS} \cdot \text{Init}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow[\text{Next}]{\star} x.$$

- ▶  $I(x)$  exprime que la valeur  $x$  est accessible à partir d'une valeur initiale  $x_0$ .
- ▶ Les trois propriétés sont simples à vérifier pour  $I(x)$ .  $I(x)$  est appelé le plus fort invariant de l'algorithme  $\mathcal{A}$ .

- ▶ P. et R. Cousot développent une étude complète des propriétés d'invariance et de sûreté en mettant en évidence correspondances entre les différentes méthodes ou systèmes proposées par Turing, Floyd, Hoare, Wegbreit, Manna ... et reformulent les principes d'induction utilisés pour définir ces méthodes de preuve (voir les deux cubes des 16 principes).
- ▶ Deux types de principes sont proposés : assertionnel et relationnel.
- ▶ Nous utilisons l'expression de propriété de sûreté, alors que généralement il s'agit d'une propriété d'invariance ( $\square$  propriété) et d'invariant au lieu d'invariant inductif.

.....

### ⊠ Definition(assertion)

Soit  $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel  $M$  d'un système  $\mathcal{S}$ . Une propriété  $A$  est une propriété assertionnelle de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

.....

.....

### ⊠ Definition(relation)

Soit  $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel  $M$  d'un système  $\mathcal{S}$ . Une propriété  $R$  est une propriété relationnelle de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x).$$

.....







.....

### ⊠ Definition(assertion)

Soit  $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel  $M$  d'un système  $\mathcal{S}$ . Une propriété  $A$  est une propriété assertionnelle de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

.....

.....

### ⊠ Definition(relation)

Soit  $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  un modèle relationnel  $M$  d'un système  $\mathcal{S}$ . Une propriété  $R$  est une propriété relationnelle de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x).$$

.....

- ▶  $\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x)$  (R) est une propriété relationnelle de sûreté.
- ▶ Soit  $y = (x_0, x)$ ,  $y_0 = (x_0, x_0)$ , et
$$\text{NEXT}R(y, y') \stackrel{\text{def}}{=} \text{NEXT}(x, x') \wedge y = (x_0, x) \wedge y' = (x_0, x')$$
- ▶ (R) est réécrit comme suit :
$$\forall y_0, y \in \text{VALS} \times \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge y_0 = (x_0, x_0) \wedge \text{NEXT}R^*(y_0, y) \Rightarrow R(y) \text{ (R)}$$
- ▶ Par la propriété de correction et de complétude
- ▶ il existe une propriété d'état  $IR(y)$ , telle que :

$$\forall y_0, y \in \text{VALS} \times \text{VALS}. \begin{cases} (1) \text{Init}(x_0) \wedge y_0 = (x_0, x_0) \Rightarrow IR(y) \\ (2) IR(y) \Rightarrow R(y) \\ (3) IR(y) \wedge \text{NEXT}R(y, y') \Rightarrow IR(y') \end{cases}$$

- ▶ il existe une propriété relationnelle  $IR(x_0, x)$ , telle que :

$$\forall x_0, x \in \text{VALS}. \begin{cases} (1) \text{Init}(x_0) \wedge \Rightarrow IR(x_0, x) \\ (2) IR(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x) \\ (3) IR(x_0, x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow IR(x_0, x') \end{cases}$$

**On obtient donc deux types de principes d'induction selon les propriétés de sûreté.**



### Complétude et correction

$\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$

si, et seulement si,

il existe  $I \in \mathcal{P}(\text{VALS})$

$$\forall x_0, x, x' \in \text{VALS} : \begin{cases} (1) \text{Init}(x_0) \Rightarrow I(x_0) \\ (2) I(x) \Rightarrow A(x) \\ (3) I(x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow I(x') \end{cases}$$

- L'absence d'erreurs à l'exécution est caractérisée comme une propriété assertionnelle, puisqu'elle porte sur le fait qu'un état est sans erreurs à l'exécution si les calculs sont définis en cet état.  
principe

### Complétude et correction

$$\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow A(x_0, x).$$

si, et seulement si,

il existe  $R \in \mathcal{P}(\text{VALS} \times \text{VALS})$

$$\forall x_0, x, x' \in \text{VALS} : \begin{cases} (1) \text{Init}(x_0) \Rightarrow R(x_0, x_0) \\ (2) R(x_0, x) \Rightarrow A(x_0, x) \\ (3) R(x_0, x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow R(x_0, x') \end{cases}$$

- La correction partielle est caractérisée comme une relation entre l'état initial et l'état courant.

### Principe assertionnel de sûreté ou d'invariance

$$\exists I(x) \in \mathcal{P}(\text{VALS}). \left[ \begin{array}{l} \forall x, x' \in \text{VALS}. \\ (1) \text{ Init}(x) \Rightarrow I(x) \\ (2) I(x) \Rightarrow A(x) \\ (3) I(x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow I(x') \end{array} \right.$$

### Principe relationnel de sûreté ou d'invariance

$$\exists IR(x_0, x) \in \mathcal{P}(\text{VALS} \times \text{VALS}). \left[ \begin{array}{l} \forall x_0, x, x' \in \text{VALS}. \\ (1) \text{ Init}(x_0) \Rightarrow IR(x_0, x_0) \\ (2) IR(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x) \\ (3) IR(x_0, x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow IR(x_0, x') \end{array} \right.$$

Un programme  $P$  *remplit* un contrat  $(pre, post)$  :

- ▶  $P$  transforme une variable  $x$  à partir d'une valeur initiale  $x_0$  et produisant une valeur finale  $x_f$  :  $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- ▶  $x_0$  satisfait  $pre$  :  $pre(x_0)$  and  $x_f$  satisfait  $post$  :  $post(x_0, x_f)$
- ▶  $pre(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow post(x_0, x_f)$

requires  $pre(x_0)$

ensures  $post(x_0, x_f)$

variables  $X$

begin

$0 : P_0(x_0, x)$

instruction<sub>0</sub>

...

$i : P_i(x_0, x)$

...

instruction <sub>$f-1$</sub>

$f : P_f(x_0, x)$

end

▶  $pre(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$

▶  $pre(x_0) \wedge P_f(x_0, x) \Rightarrow post(x_0, x)$

▶ conditions de vérification pour toutes les paires  $\ell \longrightarrow \ell'$

- ▶ On considère un langage de programmation classique noté `PROGRAMS`
- ▶ et nous supposons que ce langage de programmation dispose de l'affectation, de la conditionnelle, de l'itération bornée, de l'itération non-bornée, de variables simples ou structurées comme les tableaux et de la définition de constantes.
- ▶ On se donne un programme `P` de `PROGRAMS` ; ce programme comprend
  - des variables notées globalement  $v$ ,
  - des constantes notées globalement  $pc$ ,
  - des types associés aux variables notés globalement `VALS` et identifiés à un ensemble de valeurs possibles des variables,
  - des instructions suivant un ordre défini par la syntaxe du langage de programmation.

- ▶ on définit un ensemble de points de contrôle  $\text{LOCATIONS}$
- ▶ pour chaque programme ou algorithme  $P$ .  $\text{LOCATIONS}$  est un ensemble fini de valeurs et une variable cachée notée  $pc$  parcourt cet ensemble selon l'enchaînement.
- ▶ l'espace des valeurs possibles  $\text{VALS}$  est un produit cartésien de la forme  $\text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY}$
- ▶ les variables  $x$  du système se décomposent en deux entités indépendantes  $x = (pc, v)$  avec comme conditions  $pc \in \text{LOCATIONS}$  et  $v \in \text{MEMORY}$ .

$$x = (pc, v) \wedge pc \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \quad (5)$$

On considère un programme  $P$  annoté; on se donne un modèle relationnel

$\mathcal{MP} = (Th(s, c), x, \text{VALS}, \text{INIT}(x), \{r_0, \dots, r_n\})$  où

- ▶  $Th(s, c)$  est une théorie définissant les ensembles, les constantes et les propriétés statiques de ce programme
- ▶  $x$  est une liste de variables flexibles et  $x$  comprend une partie contrôle et une partie mémoire.
- ▶  $\text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY}$  est un ensemble de valeurs possibles pour  $x$ .
- ▶  $\{r_0, \dots, r_n\}$  est un ensemble fini de relations reliant les valeurs avant  $x$  et les valeurs après  $x'$  et conformes à la relation de succession  $\longrightarrow$  entre les points de contrôle.
- ▶  $\text{INIT}(x)$  définit l'ensemble des valeurs initiales de  $(pc_0, v)$  et  $x = (pc_0, v)$  avec  $pre(v)$  qui caractérise les valeurs initiales de  $v$  au point initial.

On suppose qu'il existe un graphe sur l'ensemble des valeurs de contrôle définissant la relation de flux et nous notons cette structure  $(\text{LOCATIONS}, \longrightarrow)$ .

.....  
☒ Definition

$$\ell_1 \longrightarrow \ell_2 \stackrel{\text{def}}{=} pc = \ell_1 \wedge pc' = \ell_2$$

.....

☒ Definition(Annotation d'un point de contrôle)

Soit une structure  $(\text{LOCATIONS}, \longrightarrow)$  et une étiquette  $\ell \in \text{LOCATIONS}$ . Une annotation d'un point de contrôle  $\ell$  est un prédicat  $P_\ell(v)$  (version assertionnelle) ou  $P_\ell(v_0, v)$  (version relationnelle).



**$P_\ell(v_0, v)$  exprime une relation entre la valeur initiale de  $V$  notée  $v_0$  et  $v$  la valeur courante de  $V$  au point  $\ell$  et donc  $P_\ell(v_0, v) \Rightarrow pre(v_0)$  précise que  $v_0$  est une valeur initiale.**

- ▶ Les étiquettes  $\ell$  appartiennent à **LOCATIONS** :  $\ell \in \text{LOCATIONS}$ .
- ▶ Les variables  $v$  appartiennent à **MEMORY** :  $v \in \text{MEMORY}$ .
- ▶  $pre(v_0)$  spécifie les valeurs initiales de  $v$ .
- ▶ Chaque fois que le contrôle est en  $\ell$ ,  $v$  satisfait  $P_\ell(v)$  :  
 $pc = \ell \Rightarrow P_\ell(v_0, v)$ .
- ▶ A tout état  $(\ell, v)$  du programme, la propriété suivante est vraie mais doit être prouvée :

$$J(\ell_0, v_0, pc, v) \stackrel{def}{=} \left[ \begin{array}{l} \wedge pc \in \text{LOCATIONS} \\ \wedge v \in \text{MEMORY} \\ \dots \\ \wedge pc = \ell \Rightarrow P_\ell(v_0, v) \\ \dots \end{array} \right]$$

- ▶  $J(\ell_0, v_0, pc, v)$  est un invariant construit à partir des annotations produites mais il faut montrer que cet invariant permet de vérifier les trois conditions du principe d'induction.



$\ell_0$  désigne l'étiquette marquant le début de l'algorithme et  $\ell_f$  est la fin du programme. On pourra utiliser simplement 0 et f.



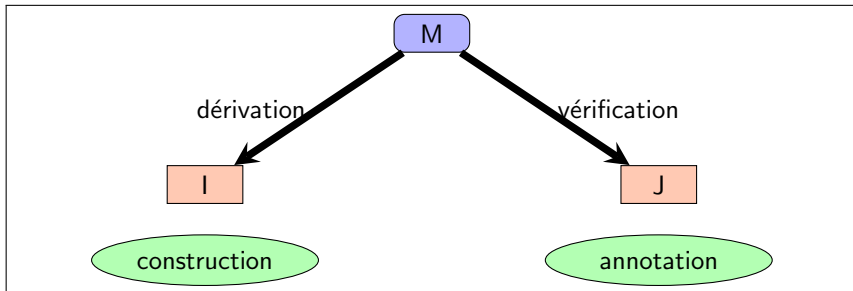


- ▶ Application de la correction du principe relationnel d'induction : si on vérifie les trois propriétés, alors  $A$  est une propriété de sûreté pour le modèle en question (vérification).
- ▶ Si on veut montrer que  $A$  est une propriété de sûreté, alors on doit utiliser l'invariant pour construire des annotations pour le modèle (dérivation).



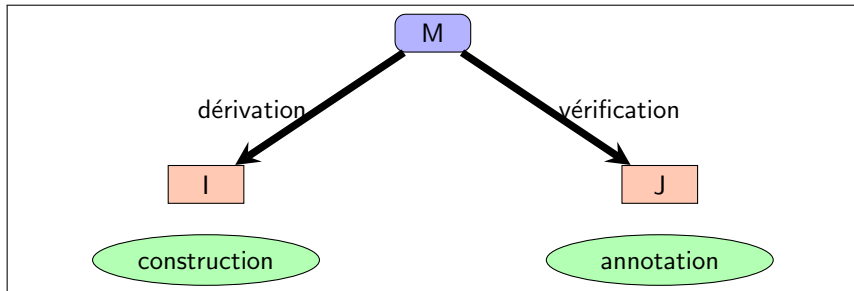
## Utilisation du principe relationnel d'induction (RI)

- ▶  $\text{VALS} = \text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY}$
- ▶  $J(pc_0, v_0, pc, v) \stackrel{def}{=} \exists x_0, x \in \text{VALS}. I(x_0, x) \wedge x = (pc, v) \wedge x_0 = (pc_0, v_0)$  (deduction)
- ▶  $I(x_0, x) \stackrel{def}{=} \exists pc_0, pc \in \text{LOCATIONS}, v_0, v \in \text{MEMORY}. J(pc_0, v_0, pc, v) \wedge x = (pc, v) \wedge x_0 = (pc_0, v_0)$  (induction)



## Utilisation du principe assertionnel d'induction (AI)

- ▶  $\text{VALS} = \text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY}$
- ▶  $J(pc, v) \stackrel{def}{=} \exists x \in \text{VALS}. I(x) \wedge x = (pc, v)$  (deduction)
- ▶  $I(x) \stackrel{def}{=} \exists pc \in \text{LOCATIONS}, v \in \text{MEMORY}. J(pc, v) \wedge x = (pc, v)$  (induction)



- $$\begin{aligned} (1) \quad & \forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow A(x) \text{ (I}(x)) \\ (2) \quad & \forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x) \text{ (IR}(x)) \end{aligned}$$

## Relations et définitions

$x = (\ell, v)$ ,  $x_0 = (\ell_0, v_0)$ ,  $I(x)$ ,  $IR(x_0, x)$  et les annotations  $P_\ell(v)$ ,  $RP_\ell(v_0, v)$  sont liées ainsi :

- $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$
- $P_\ell(v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge I(x))$
- $IR(x_0, x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v, v_0. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge RP_\ell(v_0, v))$
- $RP_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x, x_0. (x, x_0 \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge IR(x_0, x))$

La transformation est fondée la relation de transition définie pour chaque couple d'étiquettes de contrôle qui se suivent est exprimée très simplement par la forme relationnelle suivante :

$$x \text{ } r_{\ell, \ell'} \text{ } x' \stackrel{\text{def}}{=} (pc = \ell \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$$

- ▶ La transition de  $\ell$  à  $\ell'$  est possible, quand la condition  $cond_{\ell,\ell'}(v)$  est vraie pour  $V$  et quand le contrôle est en  $\ell$  ( $pc = \ell$ ).
- ▶ Quand la transition est observée, les variables  $V$  sont transformées comme suit  $v' = f_{\ell,\ell'}(v)$ .
- ▶ La définition de la transition n'exprime aucune hypothèse liée à une stratégie d'exécution comme l'équité par exemple.
- ▶  $cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v)$  est une expression où les expressions  $cond_{\ell,\ell'}(v)$  et  $v' = f_{\ell,\ell'}(v)$  posent des questions de définition :
  - $DOM(\ell, \ell')(v) \stackrel{def}{=} DEF(cond_{\ell,\ell'}(v))(v) \wedge DEF(f_{\ell,\ell'}(v))$
  - $DEF(E(X))(x)$ , signifie que l'expression  $E(X)$  est définie pour  $x$  la valeur courante de  $X$ .
- ▶ Certaines transitions peuvent conduire à des catastrophes :
  - $DEF(X+1)(x) \stackrel{def}{=} x+1 \in D$  où  $D$  est le domaine de codage de  $X$  par exemple  $D = -2^{31} \dots 2^{31}-1$  pour un codage sur 32 bits.
  - $DEF(T(I+1) < V)(t, x, v) \stackrel{def}{=} i+1 \in dom(t) \wedge v \in D \wedge t(i+1) \in D$

$$\begin{aligned}\ell &: P_\ell(v_0, v) \\ V &:= f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' &: P_{\ell'}(v_0, v)\end{aligned}$$

Traduction

- ▶  $(pc = \ell \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶  $cond_{\ell, \ell'}(v) \stackrel{def}{=} TRUE$

$$\begin{aligned}\ell_1 &: P_{\ell_1}(v_0, v) \\ \textbf{WHILE } B(V) \textbf{ DO} \\ &\ell_2 : P_{\ell_2}(v_0, v) \\ &\dots \\ &\ell_3 : P_{\ell_3}(v_0, v) \\ \textbf{END} \\ \ell_4 &: P_{\ell_4}(v_0, v)\end{aligned}$$

Traduction

$$\left\{ \begin{array}{l} pc = \ell_1 \wedge b(v) \wedge v' = v \wedge pc' = \ell_2 \\ pc = \ell_1 \wedge \neg b(v) \wedge v' = v \wedge pc' = \ell_4 \\ pc = \ell_3 \wedge b(v) \wedge v' = v \wedge pc' = \ell_2 \\ pc = \ell_3 \wedge \neg b(v) \wedge v' = v \wedge pc' = \ell_4 \end{array} \right.$$

Un programme  $P$  *remplit* un contrat  $(pre, post)$  :

- ▶  $P$  transforme une variable  $v$  à partir d'une valeur initiale  $v_0$  et produisant une valeur finale  $v_f$  :  $v_0 \xrightarrow{P} v_f$
- ▶  $v_0$  satisfait  $pre$  :  $pre(v_0)$  and  $v_f$  satisfait  $post$  :  $post(v_0, v_f)$
- ▶  $pre(v_0) \wedge v_0 \xrightarrow{P} v_f \Rightarrow post(v_0, v_f)$

requires  $pre(v_0)$

ensures  $post(v_0, v_f)$

variables  $V$

begin

$0 : P_0(v_0, v)$

instruction<sub>0</sub>

...

$i : P_i(v_0, v)$

...

instruction <sub>$f-1$</sub>

$f : P_f(v_0, v)$

end

- ▶  $pre(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_0(v_0, v)$
- ▶  $pre(v_0) \wedge P_f(v_0, v) \Rightarrow post(v_0, v)$
- ▶ conditions sur les transitions  $\ell, \ell'$  à définir à partir des principes d'induction.



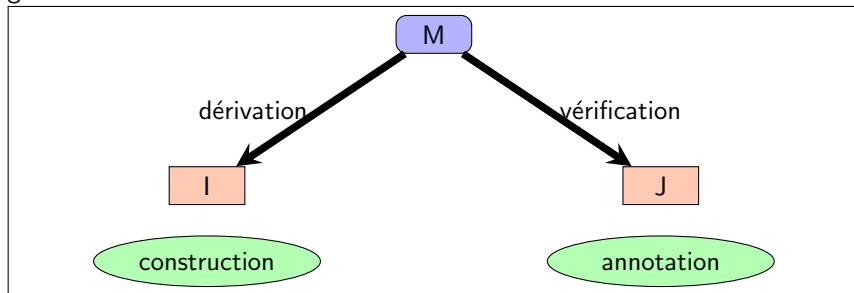
```
variables  $U, V$   
requires  $u_0, v_0 \in \mathbb{N}$   
ensures  $u_f + v_f = u_0 + v_0$   
begin  
  0 :  $u = u_0 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N}$   
   $U := U + 2$   
  1 :  $u = u_0 + 2 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N}$   
   $V := V - 2$   
  2 :  $u = u_0 + 2 \wedge v = v_0 - 2 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N}$   
end
```



- ▶ Application de la correction du principe relationnel d'induction : si on vérifie les trois propriétés, alors  $A$  est une propriété de sûreté pour le modèle en question (vérification).
- ▶ Si on veut montrer que  $A$  est une propriété de sûreté, alors on doit utiliser l'invariant pour construire des annotations pour le modèle (dérivation).

- ▶ Si on veut montrer que  $A$  est une propriété de sûreté, alors on doit utiliser l'invariant pour construire des annotations pour le modèle (dérivation).

gebe



►  $x = (pc, u, v)$

►  $J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \stackrel{def}{=} \left[ \begin{array}{l} \wedge pc \in \{0, 1, 2\} \\ \wedge u, v \in \mathbb{Z} \\ \wedge pc = 0 \Rightarrow u = u_0 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \\ \wedge pc = 1 \Rightarrow u = u_0 + 2 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \\ \wedge pc = 2 \Rightarrow u = u_0 + 2 \wedge v = v_0 - 2 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \end{array} \right.$

►  $A(0, u_0, v_0, pc, u, v) \stackrel{def}{=} (pc = 2 \Rightarrow u + v = u_0 + v_0 - 2 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N})$

$\forall pc, u, v, pc', u', v' \in \{0, 1, 2\} \times \mathbb{Z} :$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ INIT}(0, u_0, v_0) \Rightarrow J(0, u_0, v_0, 0, u_0, v_0) \\ (2) J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \Rightarrow A(0, u_0, v_0, pc, u, v) \\ (3) \forall i \in \{0, \dots, n\} : J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \wedge x \text{ } r_i \text{ } pc', u', v' \Rightarrow J(0, u_0, v_0, pc', u', v') \end{array} \right.$$

- 1  $\text{INIT}(0, u_0, v_0, ) \Rightarrow J(0, u_0, v_0, 0, u_0, v_0) :$   
 $pc = 0 \wedge u = u_0 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow J(0, u_0, v_0, 0, u_0, v_0) :$
- 2  $J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \Rightarrow A(0, u_0, v_0, pc, u, v)$   
 $J(pc, u, v) \Rightarrow (pc = 2 \Rightarrow u+v = u_0+v_0-2 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N})$
- 3  $\forall i \in \{0, \dots, n\} : J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \wedge x \ r_i \ pc', u', v' \Rightarrow$   
 $J(0, u_0, v_0, pc', u', v')$   
 $\left[ \begin{array}{l} r01(pc, u, v, pc', u', v') \stackrel{def}{=} pc = 0 \wedge u' = u+2 \wedge pc' = 1 \wedge v' = v \\ r12(pc, u, v, pc', u', v') \stackrel{def}{=} pc = 1 \wedge v' = v-2 \wedge pc' = 2 \wedge u' = u \end{array} \right.$ 
  - $J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \wedge r01(pc, u, v, pc', u', v') \Rightarrow J(pc', u', v')$
  - $J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \wedge r12(pc, u, v, pc', u', v') \Rightarrow J(0, u_0, v_0, pc', u', v')$

**Axiom 1**  $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \longrightarrow [A \wedge B]$

**Axiom 2**  $[A \wedge (B = C) \wedge D \Rightarrow E \wedge (B = F) \wedge G] \longrightarrow [A \wedge (B = C) \wedge D \Rightarrow E \wedge (C = F) \wedge G]$

**Simplification 3**  $[A \wedge (B = C) \wedge D \Rightarrow E \wedge (F = F) \wedge G] \longrightarrow [A \wedge (B = C) \wedge D \Rightarrow E \wedge TRUE \wedge G]$

**Definition 4**  $[A \Rightarrow B \wedge TRUE \wedge C] \longrightarrow [A \Rightarrow B \wedge C]$



**Verification 5**  $[A \wedge (B = C \Rightarrow U) \wedge (B = D \wedge B = C \Rightarrow V) \text{wedge} C \neq D \wedge E] \longrightarrow [A \wedge B = C \wedge U \wedge C \neq D \wedge E]$

$$J(pc, u, v) \wedge r01(pc, u, v, pc', u', v') \Rightarrow J(pc', u', v') \quad \textbf{(1)}$$


---

$$\left( \begin{array}{l} \wedge pc \in \{0, 1, 2\} \\ \wedge u, v \in \mathbb{Z} \\ \wedge pc = 0 \Rightarrow u = u_0 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \\ \wedge pc = 1 \Rightarrow u = u_0 + 2 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \\ \wedge pc = 2 \Rightarrow u = u_0 + 2 \wedge v = v_0 - 2 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge \left( \begin{array}{l} \wedge pc = 0 \\ \wedge u' = u + 2 \\ \wedge pc' = 1 \\ \wedge v' = v \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{l} \wedge pc' \in \{0, 1, 2\} \\ \wedge u', v' \in \mathbb{Z} \\ \wedge pc' = 0 \Rightarrow u' = u_0 \wedge v' = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \\ \wedge pc' = 1 \Rightarrow u' = u_0 + 2 \wedge v' = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \\ \wedge pc' = 2 \Rightarrow u' = u_0 + 2 \wedge v' = v_0 - 2 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \end{array} \right)$$

Utilisation de TLA Toolbox pour vérifier ces éléments : cours1.tla

Le modèle relationnel  $M(P)$  pour le programme  $P$  annoté est donc défini comme suit :

$$M(P) \stackrel{def}{=} (Th(s, c), (pc, v), \text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY}, \text{Init}(\ell, v), \{r_{\ell, \ell'} \mid \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} \wedge \ell \longrightarrow \ell'\}).$$

La définition de  $\text{Init}(x)$  est dépendante de la précondition de  $P$  :

$$\text{Init}(x) \stackrel{def}{=} .x = (\ell_0, v) \wedge \mathbf{pre}(P)(v).$$

### Conditions initiales

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- ▶  $\forall x_0 \in \text{VALS} : \text{Init}(x_0) \Rightarrow J(x_0, x_0)$
- ▶  $\forall v \in \text{MEMORY}. \mathbf{pre}(P)(v) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_{\ell_0}(v_0, v)$



- ▶ Les relations  $r_i$  correspondent aux transitions satisfaisant  $\ell \longrightarrow \ell'$  et on associe à chaque  $r_i$  la relation  $r_{\ell,\ell'}$ 
  - ▶  $x \ r_{\ell,\ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶  $J(x_0, x) \stackrel{def}{=} \exists v_0, \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v_0, v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v_0, v))$
- ▶  $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x_0, x. (x_0, x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$

## Pas d'induction

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- ▶  $\forall i \in \{0, \dots, n\} : J(x_0, x) \wedge x \ r_i \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶  $\forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} : \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow P_\ell(v_0, v) \wedge cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$

►  $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$

- ▶  $J(x_0, n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶  $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$

- ▶  $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶  $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶  $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$

- ▶  $J(x_0, x) \wedge x \text{ r}_{\ell, \ell'} x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶  $x \text{ r}_{\ell, \ell'} x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶  $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$
- ▶  $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$

- ▶  $J(x_0nx) \wedge x \ r_{\ell,\ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶  $x \ r_{\ell,\ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶  $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$
- ▶  $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- ▶  $J(x_0nx) \equiv pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v)$

- ▶  $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶  $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶  $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_{\ell}(v))$
- ▶  $P_{\ell}(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- ▶  $J(x_0 n x) \equiv pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v)$
- ▶  $J(x_0, x') \equiv pc = \ell' \wedge P_{\ell}(v_0, v')$

- ▶  $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶  $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶  $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_{\ell}(v))$
- ▶  $P_{\ell}(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- ▶  $J(x_0 n x) \equiv pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v)$
- ▶  $J(x_0, x') \equiv pc = \ell' \wedge P_{\ell}(v_0, v')$
- ▶  $pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell') \Rightarrow pc = \ell' \wedge P_{\ell}(v_0, v')$



- $J(x_0 n x) \wedge x \text{ r}_{\ell, \ell'} x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- $x \text{ r}_{\ell, \ell'} x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$
- $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- $J(x_0 n x) \equiv pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v)$
- $J(x_0, x') \equiv pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v')$
- $pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v'))$
- $pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \text{ (Tautologie)})$

- ▶  $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶  $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶  $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$
- ▶  $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- ▶  $J(x_0 n x) \equiv pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v)$
- ▶  $J(x_0, x') \equiv pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v'))$
- ▶  $pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \text{ (Tautologie)})$
- ▶  $pc = \ell \wedge P_\ell(v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$

- ▶  $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶  $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶  $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_{\ell}(v))$
- ▶  $P_{\ell}(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- ▶  $J(x_0 n x) \equiv pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v)$
- ▶  $J(x_0, x') \equiv pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v'))$
- ▶  $pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \text{ (Tautologie)})$
- ▶  $pc = \ell \wedge P_{\ell}(v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$
- ▶  $P_{\ell}(v_0, v) \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$

- ▶  $J(x_0, x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v, v_0. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v, v_0 \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \text{wedgex}_0 = (\ell_0, v_0) \wedge P_\ell(v_0, v))$
- ▶  $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x, x_0 \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \text{wedgex}_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0), x)$
- ▶  $J(x_0, x) \Rightarrow A(x_0, x)$
- ▶  $\exists \ell, v, v_0. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v, v_0 \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \text{wedgex}_0 = (\ell_0, v_0) \wedge P_\ell(v_0, v)) \Rightarrow A(x_0, x)$
- ▶  $\forall \ell, v, v_0. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v, v_0 \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \text{wedgex}_0 = (\ell_0, v_0) \wedge P_\ell(v_0, v)) \Rightarrow A(x_0, x)$
- ▶  $\forall \ell \in \text{LOCATIONS}, v, v_0 \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \Rightarrow A(\ell_0, v_0, \ell, v)$

## Conclusion

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- ▶  $J(x_0, x) \Rightarrow A(x_0, x)$
- ▶  $\forall \ell \in \text{LOCATIONS}, v, v_0 \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \Rightarrow A(\ell_0, v_0, \ell, v)$

Les conditions de vérification suivantes sont équivalentes :

►  $\forall x_0, x, x' \in \text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ INIT}(x_0) \Rightarrow J(x_0, x_0) \\ (2) J(x_0, x) \Rightarrow A(x_0, x) \\ (3) \forall i \in \{0, \dots, n\} : J(x_0, x) \wedge x \text{ r}_i x' \Rightarrow J(x_0, x') \end{array} \right.$$

►  $\forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ pre(P)}(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_{\ell_0}(v_0, v) \\ (2) \forall \ell \in \text{LOCATIONS}. P_{\ell}(v_0, v) \Rightarrow A(\ell_0, v_0, \ell, v) \\ (3) \forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} : \\ \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow P_{\ell}(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v') \end{array} \right.$$

- ▶ Le programme est annoté.
- ▶ Les annotations définissent un invariant à vérifier selon les conditions de vérification.
- ▶  $A(\ell, v)$  est l'énoncé de la propriété de sûreté à vérifier.

### Méthode relationnelle de correction de propriétés de sûreté

Soit  $A(\ell_0, v_0, \ell, v)$  une propriété d'un programme  $P$ . Soit une famille d'annotations famille de propriétés  $\{P_\ell(v_0, v) : \ell \in \text{LOCATIONS}\}$  pour ce programme. Si les conditions suivantes sont vérifiées :  
alors  $A(\ell_0, v_0, \ell, v)$  est une propriété de sûreté pour le programme  $P$ .

.....

### ☒ Definition Condition de vérification

L'expression  $P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$  où  $\ell, \ell'$  sont deux étiquettes liées par la relation  $\longrightarrow$ , est appelée une condition de vérification.

.....

## Floyd and Hoare

- ▶  $\forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY}. \forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS}. \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow$   
 $P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$  est équivalent à  
 $\forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS}. \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow \forall v' \in$   
 $\text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v \mapsto f_{\ell, \ell'}(v))$
- ▶  $\forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY}. \forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS}. \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow$   
 $P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$  est équivalent à  
 $\forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS}. \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow \forall v' \in$   
 $\text{MEMORY}. (\exists v \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v)) \Rightarrow$   
 $P_{\ell'}(v_0, v')$

Nous pouvons resumer les deux formes possibles de l'affectation suivante :

$$\blacktriangleright \forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$$

$$\begin{array}{l} \ell : P_\ell(v_0, v) \\ V := f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' : P_{\ell'}(v_0, v) \end{array}$$



Nous pouvons resumer les deux formes possibles de l'affectation suivante :

- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{TRUE} \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$

$$\begin{aligned} \ell &: P_\ell(v_0, v) \\ V &:= f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' &: P_{\ell'}(v_0, v) \end{aligned}$$

Nous pouvons resumer les deux formes possibles de l'affectation suivante :

- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{TRUE} \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$

$$\begin{aligned} \ell &: P_\ell(v_0, v) \\ V &:= f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' &: P_{\ell'}(v_0, v) \end{aligned}$$

Nous pouvons resumer les deux formes possibles de l'affectation suivante :

- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{TRUE} \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $\forall v \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v \mapsto f_{\ell, \ell'}(v))$   
(l'axiomatique de Hoare).

$$\begin{aligned} \ell &: P_\ell(v_0, v) \\ V &:= f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' &: P_{\ell'}(v_0, v) \end{aligned}$$

Nous pouvons resumer les deux formes possibles de l'affectation suivante :

$$\begin{array}{l} \ell : P_\ell(v_0, v) \\ V := f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' : P_{\ell'}(v_0, v) \end{array}$$

- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{TRUE} \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶  $\forall v \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v \mapsto f_{\ell, \ell'}(v))$   
(l'axiomatique de Hoare).
- ▶  $\forall v \in \text{MEMORY}. (\exists v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v)) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$   
correspond à la règle d'affectation de Floyd.

```
 $\ell_1 : P_{\ell_1}(v_0, v)$   
WHILE  $B(v)$  DO  
   $\ell_2 : P_{\ell_2}(v_0, v)$   
  ...  
   $\ell_3 : P_{\ell_3}(v_0, v)$   
END  
 $\ell_4 : P_{\ell_4}(v_0, v)$ 
```

Pour la structure d'itération, les conditions de vérification sont les suivantes :

- ▶  $P_{\ell_1}(v_0, v) \wedge B(v) \Rightarrow P_{\ell_2}(v_0, v)$
- ▶  $P_{\ell_1}(v_0, v) \wedge \neg B(v) \Rightarrow P_{\ell_4}(v_0, v)$
- ▶  $P_{\ell_3}(v_0, v) \wedge B(v) \Rightarrow P_{\ell_2}(v_0, v)$
- ▶  $P_{\ell_3}(v_0, v) \wedge \neg B(v) \Rightarrow P_{\ell_4}(v_0, v)$

```
 $\ell_1 : P_{\ell_1}(v_0, v)$   
IF  $B(v)$  THEN  
   $\ell_2 : P_{\ell_2}(v_0, v)$   
  ...  
   $\ell_3 : P_{\ell_3}(v_0, v)$   
ELSE  
   $m_2 : P_{\ell_2}(v_0, v)$   
  ...  
   $m_3 : P_{\ell_3}(v_0, v)$   
FI  
 $\ell_4 : P_{\ell_4}(v_0, v)$ 
```

Pour la structure de conditionnelle, les conditions suivantes :

- ▶  $P_{\ell_1}(v_0, v) \wedge B(v) \Rightarrow P_{\ell_2}(v_0, v)$
- ▶  $P_{\ell_3}(v_0, v) \Rightarrow P_{\ell_4}(v_0, v)$
- ▶  $P_{\ell_1}(v_0, v) \wedge \neg B(v) \Rightarrow P_{m_2}(v_0, v)$
- ▶  $P_{m_3}(v_0, v) \Rightarrow P_{\ell_4}(v_0, v)$

Soit  $v$  une variable d'état de  $P$ .  $\mathbf{pre}(P)(v)$  est la précondition de  $P$  pour  $v$  ; elle caractérise les valeurs initiales de  $v$ .  $\mathbf{post}(P)(v_0, v)$  est la postcondition de  $P$  pour  $v$  ; elle caractérise les valeurs finales de  $v$  en relation avec la valeur initiale  $v_0$

### Exemple

- 1  $\mathbf{pre}(P)(x, y, z) = x, y, z \in \mathbb{N}$  et  $\mathbf{post}(P)(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = z = x_0 \cdot y_0$
- 2  $\mathbf{pre}(Q)(x, y, z) = x, y, z \in \mathbb{N}$  et  
 $\mathbf{post}(Q)(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = z = x_0 + y_0$

$$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{r}, \underline{q}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{r}, \bar{q}.$$

$$\mathbf{pre}(P)(\underline{x}, \underline{y}, \underline{r}, \underline{q}) \wedge (\underline{x}, \underline{y}, \underline{r}, \underline{q}) \xrightarrow{P} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}, \bar{q}) \\ \Rightarrow \mathbf{post}(P)(\underline{x}, \underline{y}, \underline{r}, \underline{q}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{r}, \bar{q})$$

La correction partielle vise à établir qu'un programme  $P$  est partiellement correct par rapport à sa précondition et à sa postcondition.

- ▶ la spécification des données de  $P$  **pre**( $P$ )( $v_0$ )
- ▶ la spécification des résultats de  $P$  **post**( $P$ )( $v_0, v$ )
- ▶ une famille d'annotations de propriétés  $\{P_\ell(v_0, v) : \ell \in \text{LOCATIONS}\}$  pour ce programme.
- ▶ une propriété de sûreté définissant la correction partielle  $pc = \ell_f \Rightarrow \mathbf{post}(P)(v_0, v_f)$  où  $\ell_f$  est l'étiquette marquant la fin du programme  $P$

.....

### ☒ Definition

Le programme  $P$  est partiellement correct par rapport à **pre**( $P$ )( $v_0$ ) et **post**( $P$ )( $v_0, v$ ), si la propriété  $pc = \ell_f \Rightarrow \mathbf{post}(P)(v_0, v)$  est une propriété de sûreté pour ce programme.

.....



Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- ▶  $\forall v_0, v \in \text{MEMORY} : \mathbf{pre}(P)(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_{\ell_0}(v_0, v)$
- ▶  $\forall v_0, v \in \text{MEMORY} : P_{\ell_f}(v_0, v) \Rightarrow \mathbf{post}(P)(v_0, v)$
- ▶  $\forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} : \ell \longrightarrow \ell' : \forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY}. (P_{\ell}(v_0, v) \wedge \mathit{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$ ,

alors le programme  $P$  est partiellement correct par rapport à  $\mathbf{pre}(P)(v_0)$  et  $\mathbf{post}(P)(v_0, v)$ .

- ▶ La correction partielle indique que si le programme termine normalement, alors la postcondition est vérifiée par les variables courantes.
- ▶ La sémantique du contrat est donc assez simple à donner :

▶  $\text{pre}(v_0) \wedge v_0 \xrightarrow{P} v_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f)$   
(expression de la correction partielle)

▶  $pc_0 = \ell_0 \wedge \text{pre}(v_0) \wedge (pc_0, v_0) \xrightarrow{\text{NEXT}^*} (pc, v) \wedge pc = \ell_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f)$   
(big-step semantics et small-step semantics equivalence)

▶  $pc_0 = \ell_0 \wedge \text{pre}(v_0) \wedge (pc_0, v_0) \xrightarrow{\text{NEXT}^*} (pc, v) \Rightarrow (pc = \ell_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f))$   
(implication and conjunction property)

▶  $\text{Init}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{\text{NEXT}^*} x \Rightarrow \text{PC}(x_0, x)$   
$$\begin{aligned} & (\text{Init}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} pc_0 = \ell_0 \wedge \text{pre}(v_0) \\ & x_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\ell_0, v_0) \text{ and } x \stackrel{\text{def}}{=} (pc, v) \\ & \text{PC}(x_0, x) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge x = (pc, v) \Rightarrow (pc = \ell_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f)) \end{aligned}$$



**Partial correctness is a safety property and the relational method for safety properties is applied.**

Un programme  $P$  *remplit* un contrat  $(pre, post)$  :

- ▶  $P$  transforme une variable  $v$  à partir d'une valeur initiale  $v_0$  et produisant une valeur finale  $v_f$  :  $v_0 \xrightarrow{P} v_f$
- ▶  $v_0$  satisfait  $pre$  :  $pre(v_0)$  and  $v_f$  satisfait  $post$  :  $post(v_0, v_f)$
- ▶  $pre(v_0) \wedge v_0 \xrightarrow{P} v_f \Rightarrow post(v_0, v_f)$

requires  $pre(v_0)$

ensures  $post(v_0, v_f)$

variables  $V$

begin

$0 : P_0(v_0, v)$

instruction<sub>0</sub>

...

$i : P_i(v_0, v)$

...

instruction <sub>$f-1$</sub>

$f : P_f(v_0, v)$

end

▶  $pre(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_0(v_0, v)$

▶  $pre(v_0) \wedge P_f(v_0, v) \Rightarrow post(v_0, v)$

▶ Pour toute paire d'étiquettes  $\ell, \ell'$  telle que  $\ell \longrightarrow \ell'$ , on vérifie que, pour toutes valeurs

$v, v' \in \text{MEMORY}$

$$\left( \begin{array}{l} P_\ell(v_0, v) \\ \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \\ \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v') \end{array} \right),$$

### An Early Program Proof by Alan Turing

Turing, A. M. 1949. "Checking a Large Routine." In Report of a Conference on High Speed Automatic Calculating Machines, Univ. Math. Lab., Cambridge, pp. 67-69.

- ▶ Turing se pose une question fondamentale de la correction des routines ou programmes en 1949.
- ▶ Il s'agit sans doute (Jones!) de la méthode d'annotation et d'induction sur les programmes qui sera finalisée par Floyd en 1967.

### Méthode de Floyd

- ▶ Au point 0,  $pre(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- ▶ Annotations : au point  $i$ , l'assertion  $P_i(x_0, x)$  est vraie.
- ▶ Au point final  $f$ ,  $pre(x_0) \wedge P_f(x_0, x) \Rightarrow post(x_0, x)$

- ▶ La transition à exécuter est celle allant de  $\ell$  à  $\ell'$  et caractérisée par la condition ou garde  $cond_{\ell, \ell'}(v)$  sur  $v$  et une transformation de la variable  $v$ ,  $v' = f_{\ell, \ell'}(v)$ .
- ▶ Une condition d'absence d'erreur est définie par  $\mathbf{DOM}(\ell, \ell')(v)$  pour la transition considérée.  $\mathbf{DOM}(\ell, \ell')(v)$  signifie que la transition  $\ell \longrightarrow \ell'$  est possible et ne conduit pas à une erreur.
- ▶ Une erreur est un débordement arithmétique, une référence à un élément de tableau qui n'existe pas, une référence à un pointeur nul, ...

### exemple

- 1 La transition correspond à une affectation de la forme  $x := x+y$  ou  $y := x+y$  :  
$$\mathbf{DOM}(x+y)(x, y) \stackrel{def}{=} \mathbf{DOM}(x)(x, y) \wedge \mathbf{DOM}(y)(x, y) \wedge x+y \in int$$
- 2 La transition correspond à une affectation de la forme  $x := x+1$  ou  $y := x+1$  :  
$$\mathbf{DOM}(x+1)(x, y) \stackrel{def}{=} \mathbf{DOM}(x)(x, y) \wedge x+2 \in int$$

### Définition RTE

L'absence d'erreurs à l'exécution vise à établir qu'un programme  $P$  ne va pas produire des erreurs durant son exécution par rapport à sa précondition et à sa postcondition.

- ▶ la spécification des données de  $P$  **pre**( $P$ )( $v$ )
- ▶ la spécification des résultats de  $P$  **post**( $P$ )( $v_0, v$ )
- ▶ une famille d'annotations de propriétés  $\{P_\ell(v) : \ell \in \text{LOCATIONS}\}$  pour ce programme.
- ▶ une propriété de sûreté définissant l'absence d'erreurs à l'exécution :

$$\bigwedge_{\ell \in \text{LOCATIONS} - \{\text{output}\}, n \in \text{LOCATIONS}, \ell \longrightarrow n} (\mathbf{DOM}(\ell, n)(v))$$

.....

#### ☒ Definition

Le programme  $P$  ne produira pas d'erreurs à l'exécution par rapport à **pre**( $P$ )( $v$ ) et **post**( $P$ )( $v_0, v$ ), si la propriété

$$\bigwedge_{\ell \in \text{LOCATIONS} - \{\text{output}\}, n \in \text{LOCATIONS}, \ell \longrightarrow n} (\mathbf{DOM}(\ell, n)(v))$$
 est une propriété de sûreté pour ce programme.

### RTE = Run Time Error

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- ▶  $\forall v_0, v \in \text{MEMORY} : \mathbf{pre}(P)(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_{\ell_0}(v_0, v)$
- ▶  $\forall m \in \text{LOCATIONS} - \{\ell_f\}, n \in \text{LOCATIONS}, \forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY} : m \longrightarrow n : \mathbf{pre}(P)(v_0) \wedge P_m(v_0, v) \Rightarrow \mathbf{DOM}(m, n)(v)$
- ▶  $\forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} : \ell \longrightarrow \ell' : \forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY}. (P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$ ,

alors le programme  $P$  ne produira pas d'erreurs à l'exécution par rapport à  $\mathbf{pre}(P)(v_0)$  et  $\mathbf{post}(P)(v_0, v)$ .

- ▶ On doit d'abord vérifier la correction partielle puis renforcer les assertions de la correction partielle par des conditions de domaine.
- ▶ On peut donc en déduire un contrat qui intègre aussi la vérification de l'absence d'erreurs à l'exécution.

Un programme  $P$  *remplit* un contrat (pre,post) :

- ▶  $P$  transforme une variable  $v$  à partir d'une valeur initiale  $v_0$  et produisant une valeur finale  $v_f$  :  $v_0 \xrightarrow{P} v_f$
- ▶  $v_0$  satisfait pre :  $\text{pre}(v_0)$  and  $v_f$  satisfait post :  $\text{post}(v_0, v_f)$
- ▶  $\text{pre}(v_0) \wedge v_0 \xrightarrow{P} v_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f)$
- ▶  $\mathbb{D}$  est le domaine RTE de  $V$

requires  $\text{pre}(v_0)$   
 ensures  $\text{post}(v_0, v_f)$   
 variables  $V$

```
begin
  0 :  $P_0(v_0, v)$ 
  instruction0
  ...
  i :  $P_i(v_0, v)$ 
  ...
  instructionf-1
  f :  $P_f(v_0, v)$ 
end
```

- ▶  $\text{pre}(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_0(v_0, v)$
- ▶  $\text{pre}(x_0) \wedge P_f(v_0, v) \Rightarrow \text{post}(v_0, v)$
- ▶ Pour toute paire d'étiquettes  $\ell, \ell'$  telle que  $\ell \longrightarrow \ell'$ , on vérifie que, pour toutes valeurs  $v, v' \in \text{MEMORY}$ 

$$\left( \begin{array}{c} P_\ell(v_0, v) \\ \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \\ \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v') \end{array} \right),$$
- ▶  $\forall m \in \text{LOCATIONS} - \{\ell_f\}, n \in \text{LOCATIONS}, \forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY} :$   
 $m \longrightarrow n :$   
 $\text{pre}(v_0) \wedge P_m(v_0, v) \Rightarrow \text{DOM}(m, n)(v)$



$$pre(v_0) \wedge v = v_0 \wedge v_f = f(v) \Rightarrow post(v_0, v_f) \quad (I)$$

requires  $pre(v_0)$   
ensures  $post(v_0, v_f)$   
variables  $V$

begin  
   $0 : P_0(v_0, v)$   
   $V := f(V)$   
   $f : P_f(v_0, v)$   
end

Liste des conditions à vérifier pour prouver  
(I)

- ▶  $v = v_0 \wedge pre(v_0) \Rightarrow P_0(v_0, v)$
- ▶  $pre(v_0) \wedge P_0(v_0, v) \wedge v' = f(v) \Rightarrow P_f(v_0, v')$
- ▶  $pre(v_0) \wedge P_f(v_0, v) \Rightarrow post(v_0, v)$
- ▶ (I) et (II) sont équivalents et (II) est la définition de l'invariance de  $A(x_0, x) \stackrel{def}{=} (x_0 = (0, v_0) \wedge x = (f, v) \Rightarrow post(v_0, v))$ .

$$\begin{aligned} & x_0 = (0, v_0) \wedge pre(v_0) \wedge x_0 \xrightarrow{[V := f(V)]} x \\ & \Rightarrow \\ & (x_0 = (0, v_0) \wedge x = (f, v) \Rightarrow post(v_0, v)) \end{aligned} \quad (II)$$

$$v = v_0 \wedge pre(v_0) \wedge v_f = g(f(v)) \Rightarrow post(v_0, v_f) \quad (I)$$

requires  $pre(v_0)$   
ensures  $post(v_0, v_f)$   
variables  $V$

```
begin  
  0 :  $P_0(v_0, v)$   
   $V := f(V)$   
  1 :  $P_1(v_0, v)$   
   $V := g(V)$   
   $f : P_f(v_0, v)$   
end
```

Liste des conditions à vérifier pour prouver (I)

- ▶  $v = v_0 \wedge pre(v_0) \Rightarrow P_0(v_0, v)$
- ▶  $pre(v_0) \wedge P_0(v_0, v) \wedge v' = f(v) \Rightarrow P_1(v_0, v')$
- ▶  $pre(v_0) \wedge P_1(v_0, v) \wedge v' = g(v) \Rightarrow P_f(v_0, v')$
- ▶  $pre(v_0) \wedge P_f(v_0, v) \Rightarrow post(v_0, v)$
- ▶ (I) et (II) sont équivalents et (II) est la définition de l'invariance de  $A(x_0, x) \stackrel{def}{=} (x = (f, v) \Rightarrow post(v_0, v))$ .

$$x_0 = (0, v_0) \wedge pre(v_0) \wedge x_0 \xrightarrow{[V := f(V); V := g(V)]} x \Rightarrow (x = (f, v) \Rightarrow post(v_0, v)) \quad (II)$$

## Méthode de correction de propriétés de sûreté

Soit  $A(\ell_0, v_0, \ell, v)$  une propriété d'un programme  $P$ . Soit une famille d'annotations famille de propriétés  $\{P_\ell(v_0, v) : \ell \in \text{LOCATIONS}\}$  pour ce programme. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$\forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY} :$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ pre}(P)(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_\ell(v_0, v) \\ (2) \forall \ell \in \text{LOCATIONS}. P_\ell(v_0, v) \Rightarrow A(\ell_0, v_0, \ell, v) \\ (3) \forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} : \\ \quad \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v') \end{array} \right. ,$$

alors  $A(\ell_0, v_0, \ell, v)$  est une propriété de sûreté pour le programme  $P$ .

- 1 Définir la précondition  $\text{pre}(P)(v_0, v)$
- 2 Annoter le programme avec des prédicats  $P_\ell(v_0, v)$  où  $\ell \in \text{LOCATIONS}$
- 3 Vérifier que  $\text{pre}(P)(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_\ell(v)$  où  $\ell \in \text{INPUTS}$  (ensemble des points d'entrée).
- 4 Vérifier que  $P_\ell(v_0, v) \Rightarrow A(\ell, v)$  où  $\ell \in \text{LOCATIONS}$
- 5 Pour chaque paire de points de contrôle  $(\ell, \ell')$  telle que  $\ell \longrightarrow \ell'$  (successifs), vérifier que  $(P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$ .

- 1 Vérifier que  $\mathbf{pre}(P)(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_\ell(v_0, v)$  où  $\ell \in \text{INPUTS}$   
(ensemble des points d'entrée).
- 2 Vérifier que  $P_\ell(v_0, v) \Rightarrow A(\ell_0, v_0, \ell, v)$  où  $\ell \in \text{LOCATIONS}$
- 3 Pour chaque paire de points de contrôle  $(\ell, \ell')$  telle que  $\ell \longrightarrow \ell'$   
(successifs), vérifier que  
 $(P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$ .

- 1 Vérifier que  $\mathbf{pre}(P)(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_\ell(v_0, v)$  où  $\ell \in \text{INPUTS}$  (ensemble des points d'entrée).
- 2 Vérifier que  $P_\ell(v_0, v) \Rightarrow A(\ell_0, v_0, \ell, v)$  où  $\ell \in \text{LOCATIONS}$
- 3 Pour chaque paire de points de contrôle  $(\ell, \ell')$  telle que  $\ell \longrightarrow \ell'$  (successifs), vérifier que  $(P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$ .

### Exemples de propriétés de sûreté

- ▶ Correction partielle :  $A_1(\ell_0, v_0, \ell, v) \stackrel{\text{def}}{=} \ell = \ell_f \Rightarrow \mathbf{post}(P)(v_0, v)$
- ▶ Absence d'erreurs à l'exécution :  
 $A_2(\ell_0, v_0, \ell, v) \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{\ell', \ell \rightarrow \ell'} \mathbf{DOM}(\ell, \ell')(v)$

- ▶ Les vérifications sont longues et nombreuses
- ▶ Les vérifications sont parfois élémentaires et assez faciles à prouver
- ▶ Approche par vérification algorithmique via TLA et ses outils
- ▶ Approche par mécanisation du raisonnement symbolique via Event-B et ses outils

$$\begin{array}{l} l0 : v = 3 \\ v := v+2; \\ l1 : v = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} l0 : v = 3 \\ v := v+2; \\ l1 : v = 5 \end{array}$$

- ▶ Annotation du code
- ▶ Traduction de l'invariant à vérifier
- ▶ Expression de la propriété de correction partielle
- ▶ Vérification de la propriété



$l0 : v = 3$   
 $v := v + 2;$   
 $l1 : v = 5$

- ▶ Annotation du code
- ▶ Traduction de l'invariant à vérifier
- ▶ Expression de la propriété de correction partielle
- ▶ Vérification de la propriété

```
-----MODULE an0-----
EXTENDS Integers, TLC
-----

CONSTANTS v0,pc0
VARIABLES v,pc
-----

(* extra definitions *)
min == -2^{31}
max == 2^{31}-1
D == min..max
-----

(* precondition pre(x0,y0,z0,pc0) *)
pre(fv) == fv=3
ASSUME pre(v0)
-----

(* initial conditions *)
Init == pc = "l0" /\ v=3
-----

(* actions *)
skip == UNCHANGED <<pc,v>>
al0l1 == pc="l0" /\ TRUE /\ pc'="l1" /\ v'=v+2
-----

(* next relation *)
Next == skip \/ al0l1
-----

(* invariant properties *)
i ==
  /\ pc \in {"l0","l1"}
  /\ pc="l0" => v=3
  /\ pc="l1" => v=5
-----

(* safety properties *)
suretecorrectionpartielle == pc="l1" => v=5
sureteabsencederreurs == v \in D /\ v+2 \in D
-----

tocheck == i
=====
```

- ▶ Le programme ou l'algorithme est annoté à des points de contrôle  $\ell \in \text{LOCATIONS}$  et à chaque point de contrôle  $\ell$  se trouve une assertion  $P_\ell(v_0, v)$ .

- ▶ Le programme ou l'algorithme est annoté à des points de contrôle  $\ell \in \text{LOCATIONS}$  et à chaque point de contrôle  $\ell$  se trouve une assertion  $P_\ell(v_0, v)$ .
- ▶ Si les deux points de contrôle  $\ell, \ell'$  définissent un calcul élémentaire, alors on définit une action  $\mathcal{E}(\ell, \ell')$  comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\ell, \ell') &\triangleq \\ &\wedge c = \ell \\ &\wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \\ &\wedge c' = \ell' \\ &\wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v)\end{aligned}$$

- ▶ Le programme ou l'algorithme est annoté à des points de contrôle  $\ell \in \text{LOCATIONS}$  et à chaque point de contrôle  $\ell$  se trouve une assertion  $P_\ell(v_0, v)$ .
- ▶ Si les deux points de contrôle  $\ell, \ell'$  définissent un calcul élémentaire, alors on définit une action  $\mathcal{E}(\ell, \ell')$  comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\ell, \ell') &\triangleq \\ &\wedge c = \ell \\ &\wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \\ &\wedge c' = \ell' \\ &\wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v)\end{aligned}$$

- $v$  est la variable de l'état mémoire ou la liste des variables de l'état mémoire ;  $v$  inclut les variables locales et les variables résultat.
- $c$  est une nouvelle variable qui modélise le flot de contrôle de type LOCATIONS.
- $\mathcal{E}(\ell, \ell')$  simule le calcul débutant en  $\ell$  et terminant en  $\ell'$  ;  $v$  est mise à jour.

$$\begin{aligned} i &\triangleq \\ &\quad \wedge c \in \text{LOCATIONS} \\ &\quad \wedge v \in \text{Type} \\ &\quad \dots \\ &\quad \wedge c = \ell \Rightarrow P_\ell(v_0, v) \\ &\quad \wedge c = \ell' \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v) \\ &\quad \dots \\ \text{safty} &\triangleq S(c, v_0, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i &\triangleq \\ &\wedge c \in \text{LOCATIONS} \\ &\wedge v \in \text{Type} \\ \dots \\ &\wedge c = \ell \Rightarrow P_\ell(v_0, v) \\ &\wedge c = \ell' \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v) \\ \dots \\ \text{safety} &\triangleq S(c, v_0, v) \end{aligned}$$

- ▶ *Type* est le type des variables  $v$  et est un ensemble de valeurs possibles.
- ▶ L'annotation donne gratuitement les conditions satisfaites par  $v$  quand le contrôle est en  $\ell$ , (resp. en  $\ell'$ ).
- ▶  $S(c, v_0, v)$  est une propriété de sûreté à vérifier et est un théorème dans le cas de *Event-B*.

# Méthode de vérification exhaustive ou algorithmique

---

- ▶ La relation de transition  $Next$  est définie par :

$$Next \triangleq \dots \vee \mathcal{E}(\ell, \ell') \vee \dots$$



- ▶ La relation de transition  $Next$  est définie par :

$$Next \triangleq \dots \vee \mathcal{E}(\ell, \ell') \vee \dots$$

- ▶ Les conditions initiales des variables sont à définir par un prédicat  $Init$

- ▶ Définition d'un langage algorithmique simple.
- ▶ Commentaire spécifique dans entre (\* et \*)  
--algorithm nom { definitions }
- ▶ Génération d'une spécification TLA<sup>+</sup> avec introduction d'une nouvelle variable pc modélisant le contrôle.
- ▶ L'outil ToolBox dispose d'une fonctionnalité de traduction.

## Exemple (I)

---

```
----- MODULE exemple -----
EXTENDS Naturals, Integers, TLC
CONSTANTS x0,y0,z0,min,max,undef
-----

(* precondition *)
ASSUME x0 = y0 + 3*z0
-----

(*
--algorithm ex {
    variables x=x0,
               y = y0,
               z=z0;

{
10: assert x = y + 3*z /\ /\ y=y0 /\ z=z0 ;
    x := y+3*z;
11: assert x = y0+3*z0 /\ y=y0 /\ z=z0 ;
}
}

*)
```

## Exemple (II)

---

```
----- MODULE exemple -----  
  
-----  
ISDEF(X,Y) == X # undef => X \in Y  
DD(X) == X # undef => X \in min..max  
-----  
  
i ==  
  /\ pc \in {"l0","l1","Done"}  
  /\ ISDEF(x,Int) /\ ISDEF(x,Int) /\ ISDEF(z,Int)  
  /\ pc = "l0" => x = y + 3*z  
  /\ pc = "l1" => x+y+z \geq y  
post ==      x = y0+3*z0 /\ y=y0 /\ z=z0  
  
safetyrte == DD(x) /\ DD(y) /\ DD(z)  
safetypc == pc="Done" => post  
=====
```



## Example 1

---

```
process pro = "test"  
begin  
  print<<" test">>;  
end process
```

- ▶ A multiprocess algorithm contains one or more processes.
- ▶ A process begins in one of two ways :
  - defining a set of processes : `process ( ProcName  $\in$  IdSet )`
  - defining one process with an identifier `process ( ProcName = Id )`
- ▶ `self` designates the current process





```
—algorithm ex_process {  
  variables  
    input = <<>>, output = <<>>,  
    msgChan = <<>>, ackChan = <<>>,  
    newChan = <<>>;  
  macro Send(m, chan) {  
    chan := Append(chan, m);  
  }  
  macro Recv(v, chan) {  
    await chan # <<>>;  
    v := Head(chan);  
    chan := Tail(chan);  
  }  
}
```

\* Processes S and R

```
} \* end algorithm
```

## Defining processes S and R

```

—algorithm ex_process {
  variables
    input = <<>>, output = <<>>,
    msgChan = <<>>, ackChan = <<>>,
    newChan = <<>>;
  /* defining macros
  process (Sender = "S")
    variables msg;
    {
    sending:  Send("Hello", msgChan);
    printing: print <<"Sender", input>>;
    }; /* end Sender process block
  process (Receiver = "R")
    {
    waiting:  Recv(msg, msgChan);
    adding:   output := Append(output, msg);
    printing: print <<"Receiver", output>>;
    }; /* end Receiver process block
  } /* end algorithm

```





- ▶  $\mathcal{R}$  : exigences du système.

- ▶  $\mathcal{R}$  : exigences du système.
- ▶  $\mathcal{D}$  : domaine du problème.

- ▶  $\mathcal{R}$  : exigences du système.
- ▶  $\mathcal{D}$  : domaine du problème.
- ▶  $\mathcal{S}$  : système répondant aux spécifications.

- ▶  $\mathcal{R}$  : exigences du système.
- ▶  $\mathcal{D}$  : domaine du problème.
- ▶  $\mathcal{S}$  : système répondant aux spécifications.

$\mathcal{D}, \mathcal{S}$  SATISFAIT  $\mathcal{R}$



- ▶  $\mathcal{R}$  : exigences du système.
- ▶  $\mathcal{D}$  : domaine du problème.
- ▶  $\mathcal{S}$  : système répondant aux spécifications.

$\mathcal{D}, \mathcal{S}$  SATISFAIT  $\mathcal{R}$

- ▶  $\mathcal{R}$  : pre/post.
- ▶  $\mathcal{D}$  : entiers, réels, ...
- ▶  $\mathcal{S}$  : code, procédure, programme, ...

$$\mathcal{D}, \text{ALG} \quad \text{SATISFAIT} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{pre}(\text{ALG})(v) \\ \mathbf{post}(\text{ALG})(v_0, v) \end{array} \right.$$

|                                     |
|-------------------------------------|
| $\mathcal{D}$                       |
| <hr/>                               |
| $\mathbf{pre}(\text{ALG})(v)$       |
| $\mathbf{post}(\text{ALG})(v_0, v)$ |
| <hr/>                               |
| $\text{ALG}$                        |



$$\mathcal{D}, \text{ALG} \quad \text{SATISFAIT} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{pre}(\text{ALG})(v) \\ \mathbf{post}(\text{ALG})(v_0, v) \end{array} \right.$$



### Vérification de conditions de vérification

|                                     |
|-------------------------------------|
| $\mathcal{D}$                       |
| $\mathbf{pre}(\text{ALG})(v)$       |
| $\mathbf{post}(\text{ALG})(v_0, v)$ |
| ALG                                 |

- Vérification des conditions de vérification avec un model-checker par exploration de tous les états.

$$\mathcal{D}, \text{ALG} \quad \text{SATISFAIT} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{pre}(\text{ALG})(v) \\ \mathbf{post}(\text{ALG})(v_0, v) \end{array} \right.$$



### Vérification de conditions de vérification

|                                     |
|-------------------------------------|
| $\mathcal{D}$                       |
| $\mathbf{pre}(\text{ALG})(v)$       |
| $\mathbf{post}(\text{ALG})(v_0, v)$ |
| ALG                                 |

- ▶ Vérification des conditions de vérification avec un model-checker par exploration de tous les états.
- ▶ Vérification des conditions de vérification avec un outil de preuve formelle.



- ▶ Vérifier les énoncés de la forme  $\Gamma \vdash P$  (séquents)

- ▶ Vérifier les énoncés de la forme  $\Gamma \vdash P$  (séquents)
- ▶ Énoncer ou calculer les invariants d'un modèle :  $\text{REACHABLE}(M)$ .



- ▶ Vérifier les énoncés de la forme  $\Gamma \vdash P$  (séquents)
- ▶ Énoncer ou calculer les invariants d'un modèle :  $\text{REACHABLE}(M)$ .
- ▶  $\text{TLA}^+$  versus Event-B
  - Plate-formes :  $\text{TLA}^+$  avec TLAPS et Toolbox, Event-B avec Rodin
  - Langage de la théorie des ensembles avec quelques différences
  - Fonctionnalités des outils
    - ▶ Éditeurs de modèles :  $\text{TLA}^+$  et Event-B
    - ▶ Model-Checking :  $\text{TLA}^+$  et Event-B
    - ▶ Assistant de preuve : Event-B
    - ▶ Animateur et Model-Checker ProB

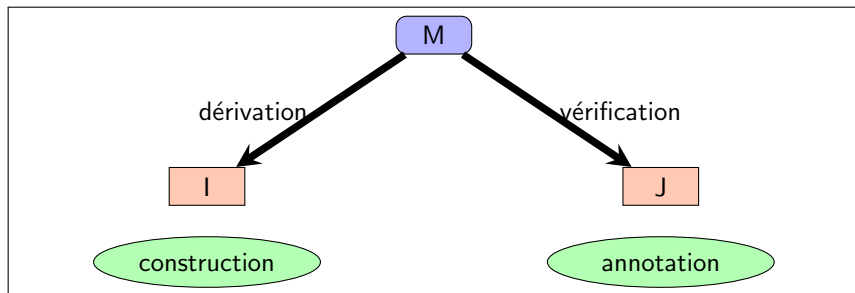
- ▶ Vérifier les énoncés de la forme  $\Gamma \vdash P$  (séquents)
- ▶ Enoncer ou calculer les invariants d'un modèle :  $\text{REACHABLE}(M)$ .
- ▶  $\text{TLA}^+$  versus Event-B
  - Plate-formes :  $\text{TLA}^+$  avec TLAPS et Toolbox, Event-B avec Rodin
  - Langage de la théorie des ensembles avec quelques différences
  - Fonctionnalités des outils
    - ▶ Editeurs de modèles :  $\text{TLA}^+$  et Event-B
    - ▶ Model-Checking :  $\text{TLA}^+$  et Event-B
    - ▶ Assistant de preuve : Event-B
    - ▶ Animateur et Model-Checker ProB
- ▶ Développement d'outils symboliques comme les solveurs SMT ou des procédures de décision

- ▶ TLA<sup>+</sup> et TLA Toolbox : logique temporelle, théorie des ensembles, calcul des prédicats, model-checker
- ▶ Event-B et Rodin : théorie des ensembles, assistant de preuve, model-checker, animateur
- ▶ B et Event-B et ProB : théorie des ensembles, model-checker, animateur, validation
- ▶ Promela et SPIN : logique temporelle, model-checking
- ▶ C et Frama-C : analyse sémantique des programmes, assistants de preuve, solveurs SMT.
- ▶ Spec# et Rise4fun : pre/post, contrats
- ▶ PAT : cadre générique pour créer son propre model-checker (classique, temps réel, probabiliste, stochastique)
- ▶ C et cppcheck : analyse statique de programmes C ou C++



## Vérification à faire mais comment automatiquement ?

- ▶ Application de la correction du principe d'induction : si on vérifie les trois propriétés, alors  $A$  est une propriété de sûreté pour le modèle en question : outil de vérification.
- ▶ Si on veut montrer que  $A$  est une propriété de sûreté, alors on doit utiliser l'invariant pour induire des annotations pour le modèle : outil de dérivation.



- ▶  $\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow A(x)$
- ▶  $\forall x \in \text{VALS}. (\exists x_0. x_0 \in \text{VALS} \wedge \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x)) \Rightarrow A(x).$
- ▶  $\text{REACHABLE}(M) = \{u | u \in \text{VALS} \wedge (\exists x_0. x_0 \in \text{VALS} \wedge \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, u))\}$  est l'ensemble des états accessibles à partir des états initiaux.
- ▶ Model Checking : on doit montrer l'inclusion  $\text{REACHABLE}(M) \subseteq \{u | u \in \text{VALS} \wedge A(u)\}.$
- ▶ Preuves : définir un invariant  $I(\ell, v) \equiv \bigvee_{\ell \in \text{LOCATIONS}} \left( \bigvee_{v \in \text{MEMORY}} P_\ell(v) \right)$  avec la famille d'annotations  $\{P_\ell(v) : \ell \in \text{LOCATIONS}\}$  et démontrer les conditions de vérification.
- ▶ Analyse automatique :
  - Mécaniser la vérification des conditions de vérification
  - Calculer  $\text{REACHABLE}(M)$
  - Calculer une valeur approchée de  $\text{REACHABLE}(M)$

$$(\mathcal{P}(\text{VALS}), \subseteq) \xleftrightarrow[\alpha]{\gamma} (D, \sqsubseteq)$$

$$\alpha(\text{REACHABLE}(M)) \sqsubseteq A \text{ ssi } \text{REACHABLE}(M) \subseteq \gamma(A)$$

Si  $\gamma(A) \subseteq \{u | u \in \text{VALS} \wedge A(u)\}$ , alors

$$\text{REACHABLE}(M) \subseteq \{u | u \in \text{VALS} \wedge A(u)\}$$

- ▶ Mécaniser la vérification des conditions de vérification
- ▶ Calculer  $\text{REACHABLE}(M)$  comme un point-fixe.
- ▶ Calculer une valeur approchée de  $\text{REACHABLE}(M)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(\text{VALS}), \subseteq) &\xleftrightarrow[\alpha]{\gamma} (D, \subseteq) \\ \alpha(\text{REACHABLE}(M)) &\subseteq A \text{ ssi } \text{REACHABLE}(M) \subseteq \gamma(A) \end{aligned}$$

Si  $A$  vérifie  $\gamma(A) \subseteq \{u | u \in \text{VALS} \wedge A(u)\}$ , alors  
 $\text{REACHABLE}(M) \subseteq \{u | u \in \text{VALS} \wedge A(u)\}$

## Method for verifying program properties

correctness and Run Time Errors

A program  $P$  satisfies a (pre,post) contract :

- ▶  $P$  transforms a variable  $v$  from initial values  $v_0$  and produces a final value  $v_f : v_0 \xrightarrow{P} v_f$
- ▶  $v_0$  satisfies pre :  $\text{pre}(v_0)$  and  $v_f$  satisfies post :  $\text{post}(v_0, v_f)$
- ▶  $\text{pre}(v_0) \wedge v_0 \xrightarrow{P} v_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f)$
- ▶  $\mathbb{D}$  est le domaine RTE de  $V$

requires  $\text{pre}(v_0)$

ensures  $\text{post}(v_0, v_f)$

variables  $V$

begin

0 :  $P_0(v_0, v)$

instruction<sub>0</sub>

...

$i : P_i(v_0, v)$

...

instruction <sub>$f-1$</sub>

$f : P_f(v_0, v)$

end

▶  $\text{pre}(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_0(v_0, v)$

▶  $\text{pre}(x_0) \wedge P_f(v_0, v) \Rightarrow \text{post}(v_0, v)$

▶ For any pair of labels  $\ell, \ell'$   
such that  $\ell \longrightarrow \ell'$ , one verifies that, pour  
any values  $v, v' \in \text{MEMORY}$

$$\left( \begin{array}{l} P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \\ \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \end{array} \right) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$$

▶ For any pair of labels  $m, n$   
such that  $m \longrightarrow n$ , one verifies that,  
 $\forall v, v' \in \text{MEMORY} :$

$$\text{pre}(v_0) \wedge P_m(v_0, v) \Rightarrow \text{DOM}(m, n)(v)$$



## Summary of concepts

