

<

Cours Modélisation et vérification des systèmes informatiques

Exercices (avec les corrections)

Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (I)

par Dominique Méry

8 décembre 2025

Exercice 1 La définition structurelle des transformateurs de prédicats est rappelée dans le tableau ci-dessous :

S	$wp(S)(P)$
$X := E(X, D)$	$P[e(x, d)/x]$
SKIP	P
$S_1; S_2$	$wp(S_1)(wp(S_2)(P))$
$\text{IF } B \text{ } S_1 \text{ ELSE } S_2 \text{ FI}$	$(B \Rightarrow wp(S_1)(P)) \wedge (\neg B \Rightarrow wp(S_2)(P))$

- Axiome d'affectation : $\{P(e/x)\}X := E(X)\{P\}$.
- Axiome du saut : $\{P\}\text{skip}\{P\}$.
- Règle de composition : Si $\{P\}S_1\{R\}$ et $\{R\}S_2\{Q\}$, alors $\{P\}S_1; S_2\{Q\}$.
- Si $\{P \wedge B\}S_1\{Q\}$ et $\{P \wedge \neg B\}S_2\{Q\}$, alors $\{P\}\text{if } B \text{ then } S_1 \text{ then } S_2 \text{ fi}\{Q\}$.
- Si $\{P \wedge B\}S\{P\}$, alors $\{P\}\text{while } B \text{ do } S \text{ od}\{P \wedge \neg B\}$.
- Règle de renforcement / affaiblissement : Si $P' \Rightarrow P$, $\{P\}S\{Q\}$, $Q \Rightarrow Q'$, alors $\{P'\}S\{Q'\}$.

Question 1.1 Simplifier les expressions suivantes :

1. $WP(X := X + Y + 7)(x + y = 6)$
2. $WP(X := X + Y)(x < y)$

Question 1.2 On rappelle que $\{P\}S\{Q\}$ est défini par l'implication $O \Rightarrow WP(S)(Q)$. Pour chaque point énuméré ci-dessous, montrer que la propriété $\{P\}S\{Q\}$ est valide ou pas en utilisant la définition suivante :

$$\{P\}S\{Q\} = P \Rightarrow WP(S)(Q)$$

1. $\{x + y = 7\}X := Y + X\{2 \cdot x + y = 6\}$
2. $\{x < y\}\text{IF } x \neq y \text{ THEN } x := 5 \text{ ELSE } x := 8 \text{ FI}\{x \in \{5, 8\}\}$

Question 1.3 Utiliser frama-c pour vérifier les éléments suivants :

1. $\{x + y = 7\}X := Y + X\{2 \cdot x + y = 6\}$
2. $\{x < y\}\text{IF } x \neq y \text{ THEN } x := 5 \text{ ELSE } x := 8 \text{ FI}\{x \in \{5, 8\}\}$

Exercice 2 Soit le petit programme suivant

Listing 1 – ex59.c

```
void ex(void) {
    int x1=1,x2,x3;
    /*@ assert x1 == 1;
    x2 = x1 + 1;
    x3 = x2 + 1;
    /*@ assert x3 == x1+2 ;
}
```

Analyser la correction des annotations avec Frama-c et trouver a pour que cela soit correctement analysé.

Une annotation est développée en appliquant la règle du wp sur les affectations.

Listing 2 – td60a.c

```
void ex(void) {
    int x1=1,x2,x3;
    /*@ assert x1 == 1;
    // =>
    /*@ assert x1+1+1 == x1+2 ;
    x2 = x1 + 1;
    /*@ assert x2 +1 == x1+2 ;
    x3 = x2 + 1;
    /*@ assert x3 == x1+2 ;
}
```

Exercice 3 Soit le petit programme suivant

Listing 3 – td60.c

```
void ex(void) {
    int x=2,y=4,z;

    /*@ assert x <= y;
    z = x + y;
    /*@ assert z == x+y ;
}
```

Analyser la correction des annotations avec Frama-c et trouver a pour que cela soit correctement analysé.

Une annotation est développée en appliquant la règle du wp sur les affectations.

Listing 4 – td60a.c

```
void ex(void) {
    int x=2,y=4;

    /*@ assert x <= y;
    z = x + y;
    /*@ assert z == x+y ;
}
```

Exercice 4 Soit le petit programme suivant

Listing 5 – td61.c

```
void ex(void) {
    int x=2,y=4,z,a=1;

    /*@ assert x <= y;
    x = x*x;
    /*@ assert x == a*y;
    y = 2*x;

    z = x + y;

    /*@ assert z == x+y && x* y >= 8;
}
```

Analyser la correction des annotations avec Frama-c et trouver a pour cela soit correctement analysé.

Une annotation est développée en appliquant la règle du wp sur les affectations.

Listing 6 – td61.c

```
void ex(void) {
    /*@ assert 2 <= 4;
int x=2,y=4,z,a=1;

    /*@ assert x <= y;
    // =>
    /*@ assert x*x == a*y;
x = x*x;
    /*@ assert x == a*y;
    // =>
    /*@ assert x+2*x == x+2*x && x* 2*x >= 8;
y = 2*x;
    /*@ assert x+y == x+y && x* y >= 8;
z = x + y;

    /*@ assert z == x+y && x* y >= 8;
}
```

Exercice 5 Soit le petit programme suivant

Listing 7 – td62.c

```
void ex(void) {
    int x0,y0,z0;
    int x=x0,y=x0,z=x0*x0;
    /*@ assert l1: x == y && z == x*y;
x = x*x;
    /*@ assert l2: x == y*y && z == x;
y = x;
    /*@ assert l3: x + y + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0);
z = x + y + 2*z;

    /*@ assert z == (x0+x0)*(x0+x0);
}
```

Analyser la correction des annotations avec Frama-c.

Exercice 6 Soit le petit programme suivant

Listing 8 – td63.c

```
#include <limits.h>
// returns the maximum of x and y
/*@
    ensures \result >= x && \result >= y && (\result == x || \result == y);
*/
int max ( int x, int y ) {

    if ( x >= y )
    {
        /*@ assert x >= y;
```

```

    return x ;
    /*@ assert x>= y;
}
    /*@ assert x< y;
return y ;
    /*@ assert x< y;
}

```

Analyser la correction des annotations avec Frama-c.

Exercice 7 td65.c

Soit le petit programme suivant dans un fichier :

Listing 9 – td65.c

```

/*@
  assigns \nothing;
*/
void swap1(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    /*@ assert x == a && y == b;
    int tmp;
    /*@ assert y == b && x == a;
    tmp = x;
    /*@ assert y == b && tmp == a;
    x = y;
    /*@ assert x == b && tmp == a;
    y = tmp;
    /*@ assert x == b && y == a;
}

```

Question 7.1 Utiliser l'outil *frama-c-gui* avec la commande `$frama-c-gui ex1.c` et cliquer sur le lien `ex1.c` apparaissant sur la gauche. A partir du fichier source, une fenêtre est créée et vous découvrez le texte du fichier.

Question 7.2 Cliquer à droite sur le mot-clé `assert` et cliquer sur *Prove annotation by WP*. Les boutons deviennent vert.

Question 7.3

```

void swap2(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    /*@ assert x == a && y == b;
    int tmp;
    tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
    /*@ assert x == a && y == a;
}

```

Répétez les mêmes suites d'opérations mais avec le programme suivant dans `ex2.c`.

Question 7.4 Ajoutez une précondition pour que les preuves soient possibles.

◊– Solution de la question 7.4 _____

```

/*@ requires a==b;
*/
void swap2(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    /*@ assert x == a && y == b;
    int tmp;
    tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
    /*@ assert x == a && y == a;
}

```

Fin 7.4

Question 7.5 Soit le nouvel algorithme avec un contrat qui établit ce que l'on attend de cet algorithme

```

/*@
requires \valid(a);
requires \valid(b);
ensures P: *a == \old(*b);
ensures Q: *b == \old(*a);
*/
void swap3(int
            *a, int *b) {
    int tmp;
    tmp = *a;
    *a = *b;
    *b = tmp;
}

```

Recommencer les opérations précédentes et observer ce qui a été utilisé comme outils de preuve.

Exercice 8 Etudier la correction de l'algorithme suivant en complétant l'invariant de boucle :

Listing 10 – td66.c

```

/*@
requires} 0 <= n;
ensures \result == n * n;
*/
int f(int n) {
    int i = 0;
/*@ assert i=0
    int s = 0;
    /*@ loop invariant ...
       @ loop assigns ...; */
    while (i < n) {
        i++;
        s += 2 * i - 1;
    };
    return s;
}

```

Listing 11 – td66c.c

```

/*@
  requires 0 <= n;
  ensures \result == n * n;
*/
int f(int n) {
    int i = 0;
    /*@ assert i==0;
    int s = 0;
    /*@ assert s == i*i && 0 <= i && i <= n;

    /*@ loop invariant i * i == s && 0 <= i && i <= n;
       @ loop assigns i, s;
       @ loop variant n-i; */
    while (i < n) {
        i++;
        s += 2 * i - 1;
    }
    /*@ assert i==n && s == n*n;
    return s;
}

```

Exercice 9

On rappelle que l'annotation suivante du listing 12 est correcte , si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\text{pre}(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow A(v_0, v)$
- $\text{pre}(v_0) \wedge B(v_0, v) \Rightarrow \text{post}(v_0, v)$
- $A(v_0, v) \Rightarrow \text{wp}(v = f(v))(B(v_0, v))$ où $\text{wp}(v = f(v))(B(v_0, v))$ est définie par $B(v_0, v)[f(v)/v]$.

Dans le cas de frama-c, la valeur initiale d'une variable v est notée $\text{at}(v, \text{Pre})$ et aussi $\text{old}(v)$. Nous utiliserons la notation v_0 dans cet exercice.

Listing 12 – contrat

```

requires pre(v)
ensures post(\old(v), v)
type1 truc(type2 v)
  /*@ assert A(v0, v); */
  v = f(v);
  /*@ assert B(v0, v); */
return val;

```

Soient les annotations suivantes. Les variables sont supposées de type integer.

Question 9.1

$$\begin{aligned} \ell_1 : & x = 64 \wedge y = x \cdot z \wedge z = 2 \cdot x \\ Y := & X \cdot Z \\ \ell_2 : & y \cdot z = 2 \cdot x \cdot x \cdot z \end{aligned}$$

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant Frama-c

Listing 13 – td71.c

```

/*@
  requires x0>=0 && y0 >= 0 && z0 >= 0 && z0 == 25 && y0==x0+1 && x0*x0 + y0*y0 ==
  ensures \result == 100;
*/
int f(int x0, int y0, int z0) {

```

```

int x = x0;
int y = y0;
int z = z0;
/*@ assert x*x + y*y == z && z == 25 ;*/
x = x +3;
y = y +4;
z = z + 75;
/*@ assert x*x + y*y == z ; */
return z;
}

```

Question 9.2 Soient trois constantes n, m, p

$$\begin{aligned}\ell_1 : x = 3^n \wedge y = 3^p \wedge z = 3^m; \\ T := 8 \cdot X \cdot Y \cdot Z; \\ \ell_2 : t = (y+z)^3 \wedge y = x;\end{aligned}$$

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant Frama-c. On prendra soin de discuter sur les valeurs de m, n, p et notamment de donner une condition sur ces valeurs pour que cel soit correcte.

Listing 14 – td68.c

Exercice 10 // `#include <limits.h>`

```

/*@ axiomatic auxmath {
    @ axiom rule1: \forall int n; n >0 ==> n*n == (n-1)*(n-1)+2*n+1;
    @ } */

/*@ requires 0 <= x;
ensures \result == x*x;
*/
int power2(int x)
{int r, k, cv, cw, or, ok, ocv, ocw;
r=0;k=0;cv=0;cw=0;or=0;ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
/*@ loop invariant cv == k*k;
    @ loop invariant k <= x;
    @ loop invariant cw == 2*k;
    @ loop invariant 4*cv == cw*cw;
    @ loop assigns k, cv, cw, or, ok, ocv, ocw; */
while (k < x)
{
    ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
    k=ok+1;
    cv=ocv+ocw+1;
    cw=ocw+2;

    }
r=cv;
return (r);
}

/*@ requires 0 <= x;
ensures \result == x*x;
*/
int p(int x)

```

```

{
    int r;
    if (x==0)
    {
        r=0;
    }
    else
    {
        r= p(x-1)+2*x+1;
    }
    return(r);
}

/*@ requires 0 <= n;
ensures \result == 1;
*/
int check(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power2(n);
    r2 = p(n);
    if (r1 != r2)
    {
        r = 0;
    }
    else
    {
        r = 1;
    };
    return r;
}

```

Soit le fichier `qpower2.c` qui est partiellement complété et qui permet de calculer le carré d'un nombre naturel. L'exercice vise à compléter les points d'interrogation puis de simplifier le résultat et de montrer l'équivalence de deux fonctions. Le fichier `mainpower2.c` peut être compilé pour que vous puissiez faire des expérimentations sur les valeurs calculées.

Question 10.1 Compléter le fichier `qpower2.c` et produire le fichier `power2.c` qui est vérifié avec `fraama-c`.

Question 10.2 a Simplifier la fonction itérative en supprimant les variables commençant par la lettre `o`. Puis vérifier les fonctions obtenues avec `frama-c`.

Question 10.3 En fait, vous avez montré que les deux fonctions étaient équivalentes. Expliquez pourquoi en quelques lignes.