

---

# Cours MALG & MOVEX

## MOVEX2

## Modélisation synchrone

---

Dominique Méry  
Telecom Nancy, Université de Lorraine  
(22 avril 2025 at 7:47 A.M.)

---

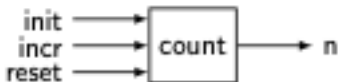
Année universitaire 2024-2025

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes
- 10 Contrats

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flûts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)



- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flûts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

(Flût de données)

## Listing 2 – count.lus

```
node COUNT (init,incr:int;reset:bool) returns (n: int);  
let  
  n = init →  
    (if reset then init else pre(n) +incr);  
tel;
```

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique.



- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique.

(Flôt de données)

## Listing 4 – dataflow1.lus

```
— count
node count(x,y:int) returns (r: int);
let
    r = 5*(x+y);
tel
```

- ▶ production : Un flôt d'entrées produit un flôt (flux) de sorties :

$$flot \in input^N \rightarrow output^N$$

$$flot(i_0, i_1, \dots, i_n) = (o_0, o_1, \dots, o_n)$$

- ▶ réaction :

$$flot \in input \times state \rightarrow output \times state$$

$$flot(in, s_t) = (out, s_{t+1})$$

Le code engendré correspond à la fonction de cycle.

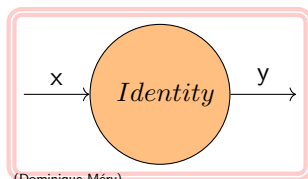
### Forme générale d'un module LUSTRE

```
node  $f(x_1 : \alpha_1, \dots, x_n : \alpha_n)$  returns  $(y_1 : \beta_1, \dots, y_m : \beta_m)$   
var  $z_1 : \gamma_1, \dots, z_k : \gamma_k$ ;  
let  
   $z_1 = \delta_1; \dots; z_k = \delta_k$ ;  
   $y_1 = \epsilon_1; \dots; y_m = \epsilon_m$ ;  
  assert  $P_1; \dots; \text{assert } P_l$ ;  
tel
```

### Node Identity

```
node  $I(x : int)$  returns  $(y : int)$   
let  
   $y = x$   
assert  $x = y$ ;  
tel
```

- ▶ Copie de la stream  $x$  vers la stream  $y$ .
- ▶  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$
- ▶ recopie
- ▶  $y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots)$



- ▶ Un programme LUSTRE est une liste de modules appelés des nœuds.
- ▶ Tous les nœuds fonctionnent de manière synchrone.
- ▶ Les communications sont réalisées via les inputs et les outputs.
- ▶ Les équations doivent avoir des solutions et ne sont pas des affectations.

- ▶ Toutes les variables, constantes et expressions sont des streams.
- ▶ Les opérations classiques sont étendues sur les streams :
  - $x = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$
  - $y = (1, 2, 3, 4, \dots)$
  - $x+y = (1, 3, 5, 7, \dots)$
- ▶ Chaque stream correspond à une horloge.

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

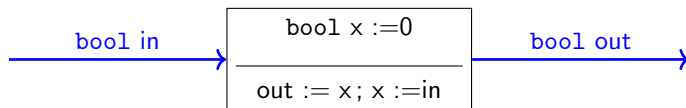
## Synchronous Reactive Component (R. Alur)

A Synchronous Reactive Component  $C$  is defined by :

- ▶ a finite set  $I$  of typed input variables defining the set of  $Q_I$  of inputs.
  - ▶ a finite set  $O$  of typed output variables defining the set of  $Q_O$  of outputs.
  - ▶ a finite set  $S$  of typed state variables defining the set of  $Q_S$  of states.
  - ▶ an initialisation  $Init$  defining the set  $\llbracket Init \rrbracket \subseteq Q_S$  of initial states
  - ▶ a reaction description  $React$  defining the set  $\llbracket React \rrbracket$  of reactions of the form  $s \xrightarrow{i/o} s'$  where  $i \in Q_I, o \in Q_O, s, s' \in Q_S$ .
- 
- ▶ an execution of a synchronous reactive component  $C$  is a sequence :  
$$s_0 \xrightarrow{i_1/o_1} s_1 \xrightarrow{i_2/o_2} \dots s \xrightarrow{i/o} s' \dots$$



## A simple example I



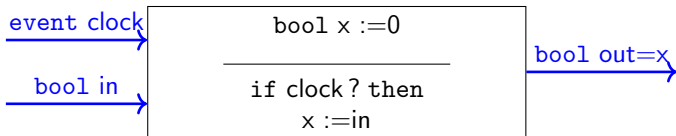
▶  $0 \xrightarrow{1/0} 1;$

▶  $0 \xrightarrow{1/0} 1$

▶  $1 \xrightarrow{0/1} 0;$

▶  $1 \xrightarrow{1/1} 1;$

## A simple example II



▶  $0 \xrightarrow{(1, \perp)/0} 0;$

▶  $0 \xrightarrow{(1, \top)/1} 1;$

▶  $1 \xrightarrow{(0, \perp)/1} 1;$

▶  $1 \xrightarrow{(1, \perp)/1} 1;$

▶  $1 \xrightarrow{(0, \top)/0} 0;$

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

- ▶ Development Tools for Critical Reactive Systems using the Synchronous Approach The Verimag Reactive Tool Box
- ▶ Compilation of LUSTRE program into C programs.

- ▶ Automatic analysis of LUSTRE programs
- ▶ SMT-based tools
- ▶ k-induction

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

(Sommutation)

## Listing 5 – sum.lus

```
— the current value of Sum(X) is the sum of all values of X up to now
node sum (X: int) returns (S: int);
let
  S = X → X + (pre S);
tel
```

—		0	1	2	3	4	5	...
—		<hr/>						
—	X =	5,	3,	-1,	2,	7,	8,	...
—	S =	5,	8,	7,	9,	16,	24,	...

(Fibonacci)

### Listing 6 – fibo.lus

---

— This node produces the Fibonacci series: 1,1,2,3,5,8,13,21,...

---

```
node fibo(_:bool) returns(Fib: int);  
let  
  Fib = 1 => pre (1 => Fib + pre Fib);  
tel
```



(Opérations)

### Listing 7 – operations.lus

```
— operations over nodes
node op (X: int;Y:int) returns (S,P,POLY,POLY2: int;TEST: bool);
let

  S = X + Y;
  P = X*Y;
  POLY = X*X + 2*X*Y + Y*Y;
  POLY2 = S*S;
  TEST = (POLY = POLY2);
  check TEST;

tel
```

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

- ▶ Toutes les expressions sont des streams.
- ▶ Les opérateurs d'horloge modifient la temporalité des streams et le résultat est stream :
  - `pre s` pour toute stream `s`.
  - `s1 - > s2` *s1 suivi de s2*.
  - `s1 when s2` *échantillonnage*
  - `current s` pour toute stream `s`.

- ▶  $\llbracket \sigma \rrbracket \stackrel{def}{=} (\sigma_0, \sigma_1, \dots)$
- ▶  $\llbracket \text{pre}(\sigma) \rrbracket \stackrel{def}{=} (\perp, \sigma_0, \sigma_1, \dots)$
- ▶  $\llbracket \sigma - > \tau \rrbracket \stackrel{def}{=} (\sigma_0, \tau_1, \tau_2, \dots)$
- ▶  $\llbracket \sigma \text{ when } \varphi \rrbracket \stackrel{def}{=} (\sigma_{t_0}, \tau_{t_1}, \tau_{t_2}, \dots)$  où la suite des  $t_i$  est la suite des instants validant  $\varphi$  dans la suite  $\sigma$ .
- ▶  $\llbracket \text{current}(\sigma \text{ when } \varphi) \rrbracket \stackrel{def}{=} (\perp, \dots, \perp, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_2}, \dots)$

(Horloge)

### Listing 8 – clock1.lus

```
node clock1(b: bool) returns (y: int);  
var n:int;  
var e:bool;  
var f:int;  
let  
  n = 0  $\rightarrow$  pre(n)+1;  
  e = true  $\rightarrow$  not pre(e);  
  f = current ( n when e);  
  y = current ( n when e) div 2;  
tel
```



current n'est pas supporté.

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE**
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

## Semantical Concepts for Reactive Programming

	4	4	4	...	4	...
▶	x	$x_0$	$x_1$	...	$x_n$	...
	y	$y_0$	$y_1$	...	$y_n$	...
	x+y	$x_0+y_0$	$x_1+y_1$	...	$x_n+y_n$	...

▶	x	$x_0$	$x_1$	...	$x_n$	...
	pre x	<i>NIL</i>	$x_0$	...	$x_{n-1}$	...

	<b>x</b>	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_n$	$\dots$
▶	<b>y</b>	$y_0$	$y_1$	$\dots$	$y_n$	$\dots$
	<b>x-&gt;y</b>	$x_0$	$y_1$	$\dots$	$y_n$	$\dots$

►  $\text{nat} = 0 \rightarrow (1 + \text{pre nat})$

h	true	false	true	true	false
x	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_n$	$\dots$
x when h	$x_0$	—	$x_2$	$x_3$	—

- ▶ Un programme LUSTRE s'appelle un nœud ou NODE.
- ▶ Un programme LUSTRE dénote une suite infinie de valeurs comme suit :  $(x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots)$
- ▶ Deux opérateurs sur les programmes :
  - **pre**
  - $\longrightarrow$
- ▶  $\forall n \geq 0. CUP_{n+1} = CUP_n + 1$  s'écrira  
 $CUP = 0 \longrightarrow (1 + \text{pre}(CUP))$
- ▶ et produira la suite  $(0 \ 1 \ 2 \ \dots)$ .
- ▶  $FIB = 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow (\text{pre}(FIB) + \text{pre}(\text{pre}(FIB)))$



```
node  EDGE( $X : \text{bool}$ )  returns  ( $Y : \text{bool}$ )  
let  
     $Y = \text{false} \rightarrow X \text{ and not pre}(X)$   
tel
```

désigne la suite  $(\text{false}, x_1 \wedge \neg x_0, x_2 \wedge \neg x_1, \dots)$

### Counter

$C = 0 \rightarrow \text{pre}(C)+1$  renvoie la suite des naturels

$C = 0 \rightarrow \text{if } X \text{ then pre}(C)+1 \text{ else pre}(C)$

compte le nombre d'occurrences de  $X$  qui sont vraies.

On ignore la valeur initiale

$PC = 0 \rightarrow \text{pre}(C)$

$C = \text{if } X \text{ then } PC+1 \text{ else } PC$



```
nodeCOUNTER(init, incr : int; X, reset : bool) returns (C : int)  
let  
  PC = init - > pre C  
  C = if reset then init  
      else if X then (PC+incr)  
      else PC;  
tel
```

- ▶ *odds* = *COUNTER*(0, 2, *true*, *true* - > *false*) **définit les entiers impairs.**

► Deux opérateurs sur les programmes :

- $\text{pre}$
- $\longrightarrow$

**T**

►  $X \text{ when } B$

►  $\text{current } X$

►  $\text{assert}$

- $\text{assert not } (x \text{ and } y)$
- $\text{assert } (\text{true} - > \text{not}(x \text{ and } \text{pre}(x)))$

```
node COUNTER(init,incr:int; X,reset:bool) returns (C:int)
let
  PC=init-> pre C
  C = if reset then init
      else if X then (PC+incr)
      else PC;
tel
```

- ▶  $odds = COUNTER(0, 2, true, true \rightarrow false)$  définit les entiers impairs.

► Deux opérateurs sur les programmes :

- **pre**
- $\longrightarrow$

►  $X \text{ when } B$  : filtre de  $X$  quand la valeur de  $B$  est vraie.

►  $\text{current } X$  : interpolation de  $X$

►  $\text{and}, \text{not}, \text{or}, \text{xor}, \dots$  sont des opérateurs booléens sur les streams.

►  $\text{assert}$

- $\text{assert not } (x \text{ and } y)$
- $\text{assert } (\text{true} -> \text{not}(x \text{ and } \text{pre}(x)))$

► réutilisation de nœuds

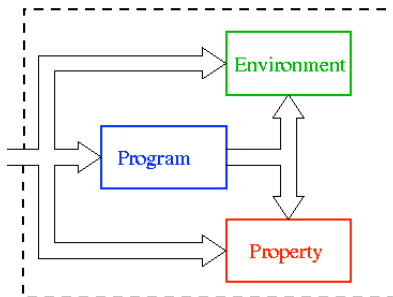
```
node FALLING_EDGE(X:bool) returns (Y:bool)
let
  Y= EDGE(not X);
tel
```

- ▶ Soit  $f$  une fonction du temps à valeurs réelles et on souhaite l'intégrer selon la méthode des trapèzes.
- ▶ Deux valeurs sont reçues par le programme  $F_n = f(x_n)$  et  $x_{n+1} = x_n + STEP_{n+1}$
- ▶ Calcul de  $Y$  :  $Y_{n+1} = Y_n + (F_n + F_{n+1}) \cdot STEP_{n+1} / 2$
- ▶ La valeur de  $Y$  est une donnée

```
node integration(F,STEP,init:real) returns (Y:real)
let
  Y= init -> pre(Y)+ ((F + pre(F))*STEP)/2.0;
tel
```

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

- ▶ Description de la propriété à vérifier et les hypothèses de l'environnement
- ▶ Un observateur d'une propriété de sûreté est un programme qui utilise comme entrée les entrées-sorties du programme à vérifier et décide en émettant un signal à chaque instant si la propriété est violée ou non





- ```
state = SWITCH1(change,change,true)
```

- ▶ Transformer un signal en niveau par un switch qui est utilisé comme suit :

- deux signaux possibles en entrée set et reset
- une valeur initiale initial
- toute occurrence de set fait passer le niveau à true
- toute occurrence de reset fait passer le niveau à false
- quand aucun des signaux n'apparaît, le niveau ne change pas

- ▶ 

```
node SWITCH(set,reset,initial: bool) returns (level:bool)
let
    level = initial -> if set and not pre(level) then true
                        else if reset then false
                        else pre(level);
tel
```

- ▶ **Vérification :**

```
node verification(set,reset,initial: bool) returns (ok:bool)
let
    level = SWITCH(set,reset,initial);
    level1 = SWITCH(set,reset,initial);
    ok = (level = level1);
    assert not(set and reset)
tel
```

(power2 avec vérification)

### Listing 9 – power2prop.lus

```
— power2(_) contains all the square numbers in increasing order
— where  $0^2 = 0$ 
—  $(n+1)^2 = n^2 + 2*n + 1$ 
node power2(_ : bool) returns (P: int);
var W: int;
var P2: int;
var PROP: bool;
var N: int;
let
  — all the natural even numbers
  W = 1  $\Rightarrow$  (pre W) + 2;
  P = 0  $\Rightarrow$  (pre P) + (pre W);
  N = 0  $\Rightarrow$  (pre N)+1;
  P2 = N*N;
  PROP = P2 = P;
  check PROP;
tel
```

Application de la k-induction : `kind2 --enable BMC --enable IND`

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

()

## Listing 10 – kindsession2/power2.lus

```
— power2(.) contains all the square numbers in increasing order
— where  $0^2 = 0$ 
—  $(n+1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1$ 
node power2() returns (P: int);
var W: int;
let
  — all the natural even numbers
  W = 1  $\Rightarrow$  (pre W) + 2;
  P = 0  $\Rightarrow$  (pre P) + (pre W);
tel
```

()

## Listing 12 – kindsession2/power2.lus

```
— power2(.) contains all the square numbers in increasing order
— where  $0^2 = 0$ 
—  $(n+1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1$ 
node power2() returns (P: int);
var W: int;
let
  — all the natural even numbers
  W = 1  $\Rightarrow$  (pre W) + 2;
  P = 0  $\Rightarrow$  (pre P) + (pre W);
tel
```

(--enable BMC --enable IND)

## Listing 13 – kindsession2/power2prop.lus

```
— power2(.) contains all the square numbers in increasing order
— where  $0^2 = 0$ 
—  $(n+1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1$ 
include "power2.lus"
node power2prop() returns (P: int);
var P2, PP2, N: int;
var PROP: bool;
let
  PP2 = power2();
  N = 0  $\Rightarrow$  (pre N) + 1;
  P2 = N * N;
  PROP = P2 = PP2;
  check PROP;
tel
```

()

## Listing 14 – kindsession2/greycounter.lus

```
node greycounter (reset: bool) returns (out: bool);
var a, b: bool;
let
  a = false  $\Rightarrow$  (not reset and not pre b);
  b = false  $\Rightarrow$  (not reset and pre a);
  out = a and b;
tel
```

()

## Listing 15 – kindsession2/intcounter.lus

```
node intcounter (reset: bool; const max: int) returns (out: bool);
var t: int;
let
  t = 0  $\Rightarrow$  if reset or pre t = max then 0 else pre t + 1;
  out = t = 2;
tel
```

(Valid property)

## Listing 16 – kindsession2/ex1.lus

```
/* include */
include "greycounter.lus"

/* include */
include "intcounter.lus"

node top (reset: bool) returns (OK, OK2: bool);
var b, d: bool;
let
  b = greycounter(reset);
  d = intcounter(reset, 3);
  OK = b = d;
  —%PROPERTY OK;
tel
```



(Invalid property)

## Listing 17 – kindsession2/ex2.lus

```
/* include */
include "greycounter.lus"

/* include */
include "intcounter.lus"

node top (reset: bool) returns (OK, OK2: bool);
var b, d: bool;
let
  b = greycounter(reset);
  d = intcounter(reset, 3);
  OK = b = d;
  OK2 = not d;
  — %PROPERTY OK;
  — %PROPERTY OK2;
tel
```

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE

## 9 Sommaire sur les points-fixes

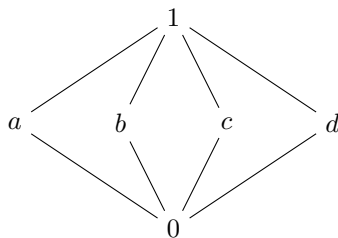
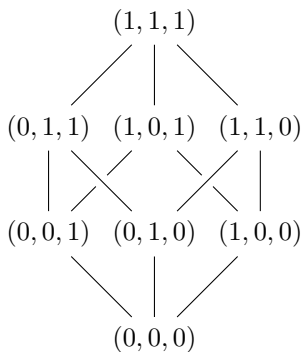
.....

### ☒ Definition

Un treillis complet  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$  est un treillis satisfaisant les propriétés suivantes :

- ① Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne supérieure notée  $\sqcup A$ .
  - ② Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne inférieure notée  $\sqcap A$ .
- .....

- ▶ Un treillis complet  $(L, \sqsubseteq, )$  peut être défini par les éléments suivants  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$
- ▶ Un treillis est une structure munie d'un ordre partiel et telle que deux éléments ont une borne supérieure et une inférieure dans le treillis :  $(L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap)$ 
  - $a \sqcup b$  existe et est la borne supérieure des deux éléments  $a$  et  $b$ .
  - $a \sqcap b$  existe et est la borne inférieure des deux éléments  $a$  et  $b$ .



Pour une fonction  $f$  définie sur un treillis  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$  et à valeurs dans  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$ .

### Définition

- ▶ on appelle pré-point-fixe de  $f$ , tout élément  $x$  de  $L$  satisfaisant la propriété  $f(x) \sqsubseteq x$
- ▶ on appelle post-point-fixe de  $f$ , tout élément  $x$  de  $L$  satisfaisant  $x \sqsubseteq f(x)$ .
- ▶  $PostFIX(f) = \{x | x \in L \wedge x \sqsubseteq f(x)\}$  : l'ensemble des post-points-fixes de  $f$ .
- ▶  $PreFIX(f) = \{x | x \in L \wedge f(x) \sqsubseteq x\}$  : l'ensemble des pré-points-fixes de  $f$ .
- ▶  $FIX(f) = \{x | x \in L \wedge f(x) = x\}$  : l'ensemble des points-fixes de  $f$ .

### Théorème de Knaster-Tarski (I)

Soit  $f$  une fonction monotone croissante sur un treillis complet  $(T, \perp, \top, \vee, \wedge)$ . Alors il existe un plus petit point fixe et un plus grand point fixe pour  $f$ .

- ▶  $\mu f$  désigne le plus petit point fixe de  $f$ .
- ▶  $\nu f$  désigne le plus grand point fixe de  $f$ .
- ▶  $\mu f$  vérifie les propriétés suivantes :  $f(\mu f) = \mu f$  et  $\forall x \in T. f(x) \sqsubseteq x \Rightarrow \mu f \sqsubseteq x$  ( $\mu f$  est la borne inférieure des prépoints fixes de  $f$  ou  $\bigwedge(Pre(f))$ ).
- ▶  $\nu f$  vérifie les propriétés suivantes :  $f(\nu f) = \nu f$  et  $\forall x \in T. x \sqsubseteq f(x) \Rightarrow x \sqsubseteq \nu f$  ( $\nu f$  est la borne supérieure des postpoints fixes de  $f$  ou  $\bigvee(Post(f))$ ).

Posons  $y = \bigwedge \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$  et montrons que  $y$  est un point fixe de  $f$  et que  $y$  est le plus petit point fixe de  $f$ .

①  $f(y) \sqsubseteq y$

- Pour tout  $x$  de  $\{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$ ,  $y \sqsubseteq x$
- $f(y) \sqsubseteq f(x)$  (par monotonie de  $f$ ).
- $f(x) \sqsubseteq x$  (par définition de  $x$ ).
- $f(y) \sqsubseteq x$  (par déduction).
- $f(y) \sqsubseteq \bigwedge \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$  (par définition de la borne inférieure,  $f(y)$  est un minorant).
- $f(y) \sqsubseteq y$

②  $y \sqsubseteq f(y)$

- $f(y) \sqsubseteq y$  (par le cas 1)
- $f(f(y)) \sqsubseteq f(y)$  (par monotonie de  $f$ )
- $f(y) \in \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- $y \sqsubseteq f(y)$  (par définition de la borne inférieure)

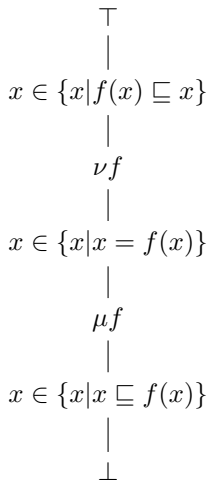
③ Conclusion :  $f(y) = y$  ou  $y \in FIX(f)$ .

- ▶  $f(y) = y$  et  $z$  tel que  $f(z) = z$ 
  - $f(z) = z$  (par hypothèse sur  $z$ )
  - $f(z) \sqsubseteq z$  (par affaiblissement de l'égalité)
  - $z \in \{x | f(x) \sqsubseteq x\}$  (par définition de cet ensemble)
  - $y \sqsubseteq z$  (par construction)
- ▶  $y$  est le plus petit point fixe de  $f$ .

### lfp(f) et gfp(f)

- ▶  $\mu f = lfp(f) = \bigwedge \{x | f(x) \sqsubseteq x\}$
  - ▶  $\nu f = gfp(f) = \bigvee \{x | x \sqsubseteq f(x)\}$
- 
- ▶  $lfp(f)$  signifie *least fixed-point*
  - ▶  $gfp(f)$  signifie *greatest fixed-point*





- ▶  $\top = \sqcup \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $gfp(f) = \nu f = \sqcup \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$
- ▶  $lfp(f) = \mu f = \sqcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $\perp = \sqcap \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$

►  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)

- ▶  $x \in pre(f)$  **si, et seulement si**,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  **si, et seulement si**,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  **si, et seulement si**,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )
- ▶  $f(\mu f) \in pre(f)$  (définition des pré-points-fixes)

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )
- ▶  $f(\mu f) \in pre(f)$  (définition des pré-points-fixes)
- ▶  $\mu f \leq f(\mu f)$  (définition de  $\mu f$ )
- ▶  $\mu f = f(\mu f)$  (définition de  $\mu f$  et propriété précédente)



## Version constructive du théorème de Knaster-Tarski

Soit  $f$  une fonction monotone croissante sur un treillis complet  $(T, \perp, \top, \vee, \wedge)$ . Alors

- 1 La structure formée des points fixes de  $f$  sur  $T$ ,  $(fp(f), \sqsubseteq)$  est un treillis complet non-vide.

$$(fp(f) = \{x \in T : f(x) = x\})$$

- 2  $lfp(f) \stackrel{def}{=} \bigvee_{\alpha} f^{\alpha}$  est le plus petit point fixe de  $f$  où :

$$\left\{ \begin{array}{lll} & f^0 & \stackrel{def}{=} \perp \\ \alpha \text{ ordinal successeur} & f^{\alpha+1} & \stackrel{def}{=} f(f^{\alpha}) \\ \alpha \text{ ordinal limite} & f^{\alpha} & \stackrel{def}{=} \bigvee_{\beta < \alpha} f^{\beta} \end{array} \right.$$

- 3  $gfp(f) \stackrel{def}{=} \bigwedge_{\alpha} f_{\alpha}$  est le plus grand point fixe de  $f$  où

$$\left\{ \begin{array}{lll} & f_0 & \stackrel{def}{=} \top \\ \alpha \text{ ordinal successeur} & f_{\alpha+1} & \stackrel{def}{=} f(f_{\alpha}) \\ \alpha \text{ ordinal limite} & f_{\alpha} & \stackrel{def}{=} \bigwedge_{\beta < \alpha} f_{\beta} \end{array} \right.$$

## Computing the least fixed-point over a finite lattice

**INPUT**  $F \in T \longrightarrow T$

**OUTPUT**  $result = \mu.F$

**VARIABLES**  $x, y \in T, i \in \mathbb{N}$

$\ell_0 : \{x, y \in T\}$

$x := \perp;$

$y := \perp;$

$i := 0;$

$\ell_{11} : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T) \wedge i = 0\};$

**WHILE**  $i \leq Card(T)$

$\ell_1 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$

$x := F(x);$

$\ell_2 : \{x, y \in T \wedge x = F^{i+1} \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$

$y := x \sqcup y;$

$\ell_3 : \{x, y \in T \wedge x = F^{i+1} \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i+1} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$

$i := i+1;$

$\ell_4 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)+1\};$

**OD**;

$\ell_5 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i = Card(T)+1\};$

$result := y;$

$\ell_6 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i = Card(T)+1 \wedge result = y\};$

- ▶ Identify the safety property  $S$  to check.
- ▶ Run the algorithm for computing  $\mu F$ .
- ▶ Check that  $\mu F \subseteq S$  or  $\bar{S} \cap \mu F = \emptyset$ .
- ▶ Check that  $BUG \cap \mu F = \emptyset$ , when  $BUG$  is a set of states that you identify as *bad states*.

## Problem

- ▶ The general case is either infinite or large ... approximations of  $\mu F$ .
- ▶ Computing over abstract finite domain
- ▶ How to compute when it is not decidable?
- ▶ Develop a framework for defining sound abstractions of software systems under analysis.

- ▶  $S$  is the set of states
- ▶  $(\mathcal{P}(S \times S), \subseteq)$  is a complete lattice.
- ▶  $R \subseteq S \times S$  is a binary relation over  $S$  simulating the computation or the transition as  $Next(x, x')$ .
- ▶  $F \in \mathcal{P}(S \times S) \rightarrow \mathcal{P}(S \times S)$  is defined by the following expression :
  - $X \subseteq S \times S$
  - $I = \{(s, s) | s \in S\}$
  - $F(X) = I \cup R; X$

### Transitive closure of R

- ▶  $F$  is a monotonous function.
- ▶  $F$  has a least-fixed point denoted  $\mu F$ .
- ▶  $\mu F = R^*$
- ▶  $\forall n \in \mathbb{N} : F^{n+1}(\emptyset) = \bigcup_{i=0}^n$
- ▶  $\bigcup_{n \geq 0} F^n = R^*$

- ▶  $G \subseteq S$  is the set of Good states.
- ▶  $I \subseteq S$  is the set of initial states.
- ▶  $\forall s_0, s \in S : s_0 \in I \wedge R^*(s_0, s) \Rightarrow s \in G$  (Expression of safety of  $G$ )
- ▶  $\forall s \in S : (\exists s_0. s_0 \in I \wedge R^*(s_0, s)) \Rightarrow s \in G$
- ▶  $R^*[I] \subset G$
- ▶  $R^*[I] = \bigcup_{n \geq 0} F^n[I] = \bigcup_{n \geq 0} G^n$
- ▶  $\bigcup_{n \geq 0} G^n \subseteq G$  (Expression de la safety)

## Techniques for checking

$\bigcup_{n \geq 0} G^n \subseteq G$  is checked using at least two possible techniques :

- ▶ Bounded Model Checking
- ▶ k-Induction
- ▶ ...

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

(simple contrat)

### Listing 18 – kindsession2/contract0.lus

```
node g () returns ();
(*@contract
  assume true;
  guarantee true;
*)
const n = 7;
var t : int;
let
  t = n;

tel;
```

(simple contrat)

### Listing 19 – kindsession2/contract1.lus

```
contract countSpec(trigger: bool; val: int) returns (count: int ; error: bool) ;

let
  assume val >= 0;
  var initVal: int = val => pre(initVal);
  var once: bool = trigger or (false => pre once) ;
  guarantee count >= 0 ;

mode still_zero (
  require not once ;
  ensure count = initVal ;
) ;

mode gt (
  require not ::still_zero ;
  ensure count > 0 ;
) ;
tel
```



### assumes

An assumption over a node  $n$  is a constraint one must respect in order to use  $n$  legally. It cannot depend on outputs of  $n$  in the current state, but referring to outputs under a `pre` is fine.

The idea is that it does not make sense to ask the caller to respect some constraints over the outputs of  $n$ , as the caller has no control over them other than the inputs it feeds  $n$  with.

The assumption may however depend on previous values of the outputs produced by  $n$ . Assumptions are given with the `assume` keyword, followed by any legal Boolean expression :



