

Cours MOdélisation, Vérification et Expérimentations
Exercices
Structures partiellement ordonnées, treillis complets, points-fixes (I)
par Dominique Méry
6 mai 2025

Nous supposons que les opérations suivantes sont définies pour une collection $A_0, \dots, A_i \dots i \in \mathbb{N}$ de parties de l'ensemble E :

- $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{e \in E \mid \exists i \in \mathbb{N} : e \in A_i\}$
- $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{e \in E \mid \forall i \in \mathbb{N} : e \in A_i\}$

Ces deux définitions sont correctes et légales. Elles définissent en compréhension deux ensembles.

Exercice 1 Montrer que les structures suivantes sont des structures partiellement ordonnées inductives :

Question 1.1 $(\mathbb{P}(E), \subseteq)$ avec E un ensemble quelconque.

Question 1.2 (E^\perp, \sqsubseteq) tel que

1. $E^\perp = E \cup \perp$ (et $\perp \notin E$)
2. $\sqsubseteq \subseteq E \times E$: soit $x \in E$ et $y \in E$ $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow (x = \perp \vee x = y)$

Question 1.3 Soient A et B deux ensembles. Montrer que la structure $(A \leftrightarrow B, \sqsubseteq)$ est une structure partiellement ordonnée inductive.

Exercice 2 On rappelle qu'une fonction continue au sens de la topologie de Scott est monotone croissante. Indiquer et montrer si les fonctionnelles suivantes sont monotones et / ou continues).

1. $(F_1(f))(x) \hat{=} \text{if } (\forall y \in \mathbb{Z}. f(y) = y) \text{ then } f(x) \text{ else } \perp$
2. $(F_2(f))(x) \hat{=} \text{if } x \notin \text{dom}(f) \text{ then } 0 \text{ else } \perp$
3. $(F_3(f))(x) \hat{=} \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } f(x+1)$

\perp est une expression qui signifie que c'est une valeur indéfinie.

Question 2.1 $(F_1(f))(x) \hat{=} \text{if } (\forall y \in \mathbb{Z}. f(y) = y) \text{ then } f(x) \text{ else } \perp$

Question 2.2 $(F_2(f))(x) \hat{=} \text{if } x \notin \text{dom}(f) \text{ then } 0 \text{ else } \perp$

Question 2.3 $(F_3(f))(x) \hat{=} \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } f(x+1)$



Exercice 3 Déterminer les points-fixes des fonctionnelles suivantes et leur plus petit point-fixe, s'ils existent. On travaille dans \mathbb{Z} .

1. $F_1(f)(x) \hat{=} \text{if } f(x) \equiv 0 \text{ then } 1 \text{ else } 0$ et expliquer si le programme `f1` a du sens et ce qu'il calcule :
2. $F_2(f)(x) \hat{=} \text{if } f(x) \equiv 0 \text{ then } 0 \text{ else } 1$
3. $F_3(f)(x) \hat{=} \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } f(x+1)$

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$, soit la fonctionnelle $\tau \in E \leftrightarrow E$ définie par :

$$(\tau(F))(x) \hat{=} \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x \cdot F(x-1)$$

1. Calculer $\tau(\emptyset)$, $\tau^2(\emptyset) = \tau(\tau(\emptyset))$, $\tau^3(\emptyset)$. En déduire $\tau^i(\emptyset)$ et le démontrer par récurrence.
2. En déduire le plus petit point fixe.

Question 4.1 Calculer $\tau(\emptyset)$, $\tau^2(\emptyset) = \tau(\tau(\emptyset))$, $\tau^3(\emptyset)$. En déduire $\tau^i(\emptyset)$ et le démontrer par récurrence.

Question 4.2 En déduire le plus petit point fixe.

Exercice 5 Soit la fonctionnelle $\tau \in (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F})$:

$$(F(f))(x) \hat{=} \text{if } x > 100 \text{ then } x-10 \text{ else } f(f(x+11))$$

Question 5.1 Montrez que $\mu F \sqsubseteq g$ avec

$$g(x) \hat{=} \text{if } x > 100 \text{ then } x-10 \text{ else } 91$$

Question 5.2 Ecrire une fonction C calculant cette fonction et étudier sa correction.

Exercice 6 On considère une fonction f5 définie par le code C suivant :

```
int f5(int x)
{ if (x==0)
  { return (0); }
  else
  { if (x > 0)
    { return (2-f5(1-x)); }
    else
    { /* x < 0 */
      return (f5(-x)); }
    }
}
```

Question 6.1 Traduire cette définition en une définition fonctionnelle qui précisera le domaine du problème.

Question 6.2 Soient les définitions suivantes où \mathcal{F} désigne la fonctionnelle définie dans la question précédente :

$$\begin{aligned} - \mathcal{F}^{2n} &= \{(p, v_p) | 0 \leq p < n \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(p, v_p) | 0 > p \geq -(n-1) \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(n, g(n))\} \\ - \mathcal{F}^{2n+1} &= \{(p, v_p) | 0 \leq p < n \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(p, v_p) | 0 > p \geq -(n-1) \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(n, g(n)), (-n, g(-n))\} \end{aligned}$$

Montrer qu'elles sont correctes en utilisant une récurrence.

Question 6.3 En déduire que $\mu \mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup \mathcal{F}^3 \cup \dots \cup \mathcal{F}^{2n} \cup \mathcal{F}^{2n+1} \dots$

Question 6.4 Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{F}^{2p} \cup \mathcal{F}^{2p+1}$

Question 6.5 Montrer que $\mu \mathcal{F}$ vérifie la propriété $\mu \mathcal{F} \sqsubseteq g$ où $g(x) = \text{if odd}(x) \text{ then } 2 \text{ else } 0$ fi

Question 6.6 En déduire que $\mu \mathcal{F} = g$.

Exercice 7 Soit la fonction définie comme suit : $F(f)(x) = \begin{cases} \text{if } x = p \text{ then } p \\ \text{else if } x = q \text{ then } q \\ \text{else } f(x+p+q) \\ \text{fi} \end{cases}$.

On suppose que p et q sont deux constantes non nulles entières positives distinctes et que F est une fonction partielle ($\in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$). On se place dans le cadre de la topologie de Scott sur l'espace $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$, \sqsubseteq où $f \sqsubseteq g$ signifie que f est moins définie que g (ou $\text{graph}(f) \subseteq \text{graph}(g)$).

Question 7.1 Expliquez clairement pourquoi l'équation $F(f) = f$ admet un plus petit point-fixe.

Question 7.2 Ecrire une fonction C calculant le plus petit point-fixe μF de F .

Question 7.3 1. Calculer $\mu F(p)$, $\mu F(q)$, $\mu F(-p)$, $\mu F(-q)$.
2. Calculer pour k entier naturel, $\mu F(-(k+1) \cdot p - k \cdot q)$ et $\mu F(-(k+1) \cdot q - k \cdot p)$

Question 7.4 Donnez une expression simplifiée de la fonction μF . Pour cela, on pourra utiliser la caractérisation de μF par le théorème du point-fixe pour les fonctions continues au sens de Scott.

Exercice 8 (invariant inductif)

On rappelle les définitions suivantes. Un modèle relationnel \mathcal{MS} pour un système S est une structure

$$(Th(s, c), x, \text{VALS}, \text{INIT}(x), \{r_0, \dots, r_n\})$$

où

- $Th(s, c)$ est une théorie définissant les ensembles, les constantes et les propriétés statiques de ces éléments.
- x est une liste de variables flexibles.
- VALS est un ensemble de valeurs possibles pour x .
- $\{r_0, \dots, r_n\}$ est un ensemble fini de relations reliant les valeurs avant x et les valeurs après x' .
- $\text{INIT}(x)$ définit l'ensemble des valeurs initiales de x .

On note $\text{NEXT} \stackrel{\text{def}}{=} r_0 \vee \dots \vee r_n$. Une propriété S est une propriété de sûreté pour le système S , si $\forall y, x \in \text{VALS}. \text{Init}(y) \wedge \text{NEXT}^*(y, x) \Rightarrow x \in S$. On définit la fonction suivante F sur $\mathcal{P}(\text{VALS})$ à valeurs dans $\mathcal{P}(\text{VALS})$: $F(X) = \text{Init} \cup \text{Next}[X]$ où $\text{Next}[X]$ est l'ensemble des états accessibles à partir de X par Next . On rappelle aussi que x peut être une variable ou une liste de variables ; VALS est donc un ensemble de valeurs ou de tuples de valeurs correspondant à x .

Question 8.1 Montrer que $(\mathcal{P}(\text{VALS}), \subseteq, \emptyset, \cup, \cap)$ est un treillis complet.

Question 8.2 Montrer que F est croissante monotone.

Question 8.3 Montrer que F admet un plus petit point-fixe noté μF .

Question 8.4 Montrer que μF est un invariant inductif de F et que c'est le plus petit.

Question 8.5 Montrer que, pour toute propriété de sûreté S , $\mu F \subseteq S$.

Question 8.6 On suppose que VALS est finie. Montrer qu'il existe un algorithme pour vérifier qu'une propriété S est une propriété de sûreté pour un système donné défini comme ci-dessus.

Exercice 9 Question 9.1 Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.

```
/*@ requires z == exp1 ;
   ensures \result == exp2;
*/

int q2(int x, int y, int z){

    /*@ assert B(x, y, z) ; */
    x = y+1;
    /*@ assert A(x, y, z); */
```

```

y = x + z;
/*@ assert y == 3 + x ; */
return y;
}

```

En utilisant l'opérateur *wp*, proposer des assertions pour $A(x, y, z)$ et $B(x, y, z)$ et des valeurs pour les expressions *expr1* et *expr2*, afin que le contrat soit correct.

Question 9.2 Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.

```

/*@ requires A(x,y,z) ;
    ensures \result == 6 ;
*/

int q2(int x, int y, int z){

    /* @ assert B(x,y,z) ; */
    x = y+1;
    /* @ assert C(x,y,z); */
    y = x + z;
    /* @ assert D(x,y,z); */
    return y;
}

```

En utilisant l'opérateur *wp*, proposer des assertions pour $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$ et $D(x, y, z)$, afin que le contrat soit correct.

Question 9.3 Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.

```

/*@ requires A;
    ensures \result == 0;
    assigns \nothing;
*/

int f(int c) {
    int x = 49;
    int z = 2*c;
    int y = (2*c+1)*(2*c+1);
    //@ assert B;
    y= x+z+1;
    //@ assert x == 49 && z == 2*c && y == (c+1)*(c+1);
    return (0);
}

```

En utilisant l'opérateur *wp*, proposer des assertions pour *A* et *B*, afin que le contrat soit correct.

Question 9.4 Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.

```

/*@ requires A(x,y,z) ;
    ensures \result == 12 ;
*/

int q2(int x, int y, int z){

    /* @ assert B(x,y,z) ; */
    x = y+z;
    /* @ assert C(x,y,z); */
    y = x + 1;
    /* @ assert D(x,y,z); */

```

```
return y;  
}
```

En utilisant l'opérateur *wp*, proposer des assertions pour $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$ et $D(x, y, z)$, afin que le contrat soit correct.

Question 9.5 Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.

```
33/*@ requires A;  
   ensures \result == 0;  
   assigns \nothing;  
*/  
  
int f(int c) {  
    int x = 49;  
    int z = 2*c;  
    int y = (2*c+1)*(2*c+1);  
    //@ assert B;  
    y= x+z+1;  
    //@ assert x == 49 && z == 2*c && y == (c+1)*(c+1);  
    return (0);  
}
```

En utilisant l'opérateur *wp*, proposer des assertions pour A et B , afin que le contrat soit correct.