Cours Algorithmique des systèmes parallèles et distribués
Exercices
Série 1 Modélisation, programmation et vérification en TLA$^+$
par Dominique Méry
29 janvier 2026

## Modélisation et vérification avec TLA$^+$

---

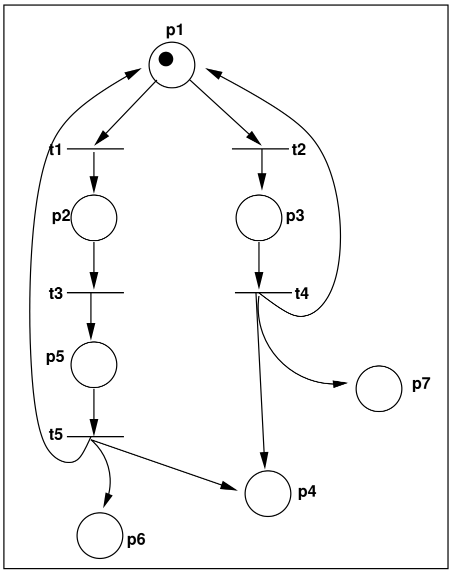
RAPPELS
Un réseau de Petri est un uple R=(S,T,F,K,M,W) tel que

- S est l'ensemble (fini) des places.
- T est l'ensemble (fini) des transitions.
- $S \cap T = \varnothing$
- F est la relation du flôt d'exécution : $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
- K représente la capacité de chaque place : $K \in S \rightarrow Nat$.
- M représente le initial marquage chaque place :
  $M \in S \rightarrow Nat$ et vérifie la condition $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$.
- W représente le poids de chaque arc : $W \in F \rightarrow Nat$
- un marquage M pour R est une fonction de S dans Nat :
  $M \in S \rightarrow Nat$ et respectant la condition $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$.
- une transition t de T est activable à partir de M un marquage de R si
  1. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (s',t) \in F \} : M(s) \geq W(s,t)$.
  2. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (t,s') \in F \} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.
- Pour chaque transition t de T, Pre(t) est l'ensemble des places conduisant à t et Post(t) est l'ensemble des places pointées par un lien depuis t :
  $Pre(t) = \{ s' \in S : (s',t) \in F \}$ et $Post(t) = \{ s' \in S : (t,s') \in F \}$
- Soit une transition t de T activable à partir de M un marquage de R :
  1. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (s',t) \in F \} : M(s) \geq W(s,t)$.
  2. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (t,s') \in F \} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.
- un nouveau marquage M' est défini à partir de M par : ' $\forall s \in S$,

$$M'(s) = \begin{cases} \text{M(S)}-\text{W(S,T), SI S} \in \text{PRE(T) - POST(T)} \\ \text{M(S)}+\text{W(T,S), SI S} \in \text{POST(T) - PRE(T)} \\ \text{M(S)}-\text{W(S,T)}+\text{W(T,S), SI S} \in \text{PRE(T)}\cap\text{POST(T)} \\ \text{M(S), SINON} \end{cases}$$

---

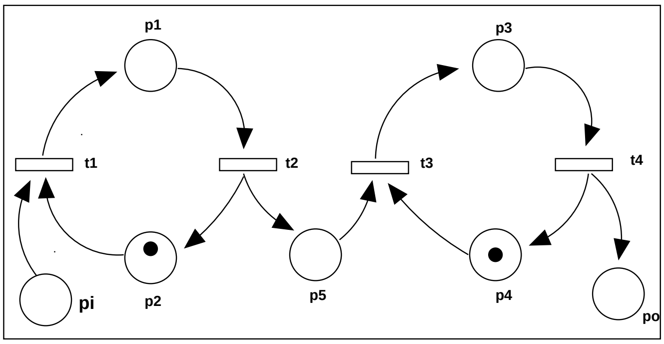
**Exercice 1** *(petri13.tla)*
*Soit le réseau de Petri suivant :*




**Question 1.1** *Modéliser ce réseau de Petri avec TLA$^+$.*

**Question 1.2** *Etudier ce réseau en proposant et en vérifiant des invariants Ã l'aide des outils.*

**Exercice 2** *(petri10.tla)*
*On considère le réseau suivant :*




**Question 2.1** *Traduire ce réseau en un module TLA$^+$.. Pour cela, on donnera la définition des quatre transitions $t1$, $t2$, $t3$,$t4$. On ne tiendra pas compte de la capacité des places : les places ont une capacité d'au plus un jeton, sauf la place pi qui peut contenir $N$ jetons, la place p5 peut contenir au plus B jetons et la place po peut contenir au plus $Q$.*

**Question 2.2** *Donner une relation liant les places po,p1,p3,p5,pi et la valeur $N$. Justifier la réponse.*

**Question 2.3** *Si on suppose que la place po peut contenir au plus $Q$ jetons, donnez une condition sur $Q$ pour que tous les jetons de pi soient consommés un jour. Justifier la réponse.*

**Question 2.4** *Expliquer ce que modélise ce réseau de Petri.*

**Exercice 3** *(petri14.tla)*
*La figure 1 est un réseau de Petri modélisant le système des philosophes qui mangent des spaghetti.*

**Question 3.1** *Traduire le réseau de Petri sous la forme d'un module TLA.*

**Question 3.2** *Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ? Expliquezr votre réponse.*

**Question 3.3** *Proposer une propriété TLA pour répondre à la question suivante, en donnant des explications.*
*Est-ce que deux philosophes voisins peuvent manger en même temps ?*

**Exercice 4** *(disapp_td1_ex1.tla)*

**Question 4.1** *Modéliser sous forme d'un module TLA$^+$ le réseau de Petri de la figure 2. Donner une instanciation possible des constantes. Préciser les conditions initiales correspondant à un système avec cinq (5) processeurs et deux (2) bus.*

**Question 4.2** *On désire analyser le comportement de ce réseau et, pour cela, on souhaite savoir si la place $p5$ contiendra au moins un jeton. Expliquer comment on doit procéder pour obtenir une réponse en un temps fini. Préciser le message donné par le système TLAPS.*

**Question 4.3** *Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ?*

**Question 4.4** *Enoncez trois propriétés de sûreté de ce réseau établissant une relation entre au moins deux places.*

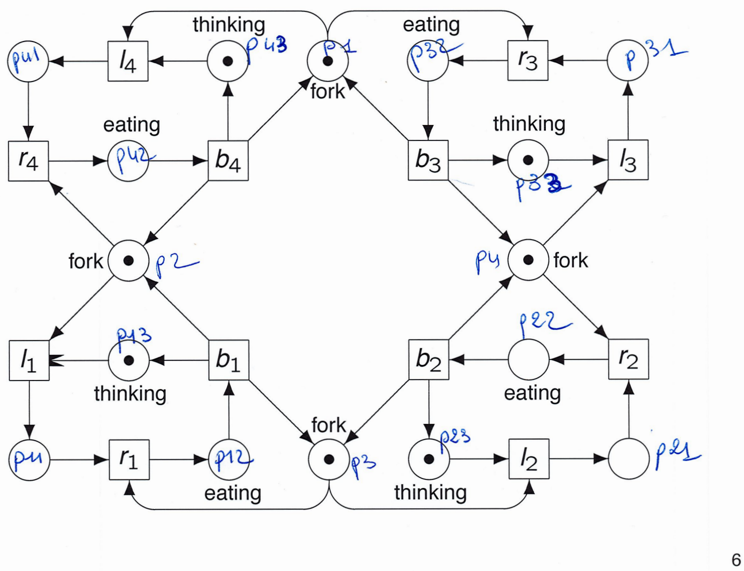



FIGURE 1 – Réseau de Petri

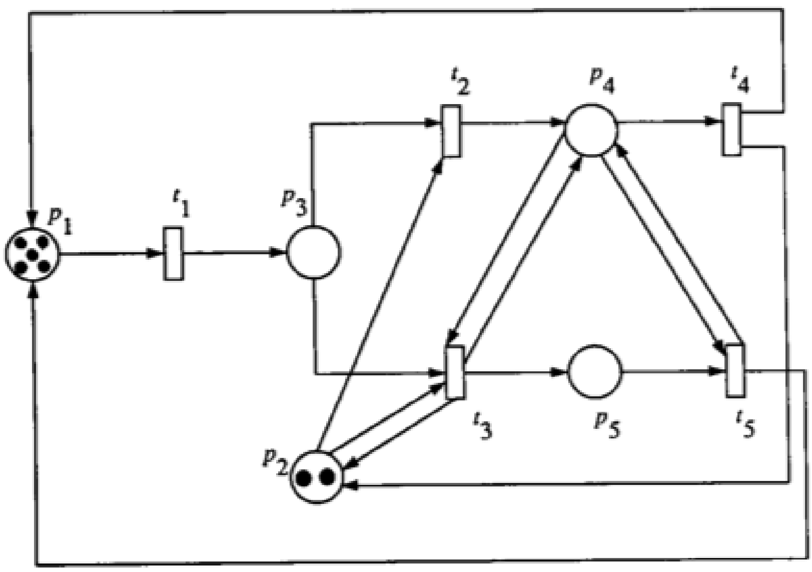



**Fig. 14.** A Petri-net model of a multiprocessor system, where tokens in $p_1$ represent active processors, $p_2$ available buses, $p_3$, $p_4$, and $p_5$ processors waiting for, having access to, queued for common memories, respectively.

FIGURE 2 – Réseau de Petri