

Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations
Exercices
Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (I)
par Dominique Méry
18 décembre 2025

Exercice 1 *Nous vous donnons des annotations que vous devez analyser avec Frama-c.*

Listing 1 – annotation3.c

Question 1.1 */*@ requires a >= 0 && b >= 0 ;
@ assigns \nothing;
@ ensures \result == \old(a)+\old(b)-2;*

```
/*@/  
int annotation(int a,int b)  
{  
    int x,y,z;  
    x = a;  
    /*@ assert l1: x == a; */  
    y = b;  
    /*@ assert l2: x == a && y == b; */  
    z = a+b-2;  
    /*@ assert l3: x == a && y == b && z==a+b-1; */  
    return(z); // \result = z  
}
```

Listing 2 – annotation4.c

Question 1.2 */*@ requires a >= 0 ;
@ assigns \nothing;
@ ensures \result == 0;*

```
/*@/  
int annotation(int a)  
{  
    int x;  
    x = a;  
    return(x);  
}
```

Exercice 2 *Soit le petit programme suivant*

Listing 3 – td61.c

```
void ex(void) {  
  
    int x=2,y=4,z,a=1;  
  
    /*@ assert x <= y;  
    // =>  
    /*@ assert x*x == a*y;  
    x = x*x;  
    /*@ assert x == a*y && x* 2*x >= 8;  
    y = 2*x;
```

```

    z = x + y;
    //@ assert z == x+y && x* y >= 8;
}

```

Analyser la correction des annotations avec *Frama-c* et trouver a pour que cela soit correctement analysé.

Exercice 3 Soit le petit programme suivant

Listing 4 – td62.c

```

void ex(void) {
    int x0,y0,z0;
    int x=x0,y=x0,z=x0*x0;
    //@ assert l1: x == y && z == x*y;

    // =>

    x = x*x;
    //@ assert l2: x == y*y && z == x;

    //=>

    // assert x + x + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0) &&& x + x + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0);
    y = x;
    //@ assert l3: x + y + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0) &&& x + y + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0);

    // =>
    //@ assert x + y + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0);
    z = x + y + 2*z;
    //@ assert z == (x0+x0)*(x0+x0);
}

```

Analyser la correction des annotations avec *Frama-c*.

TD6

Exercice 4 Soit le petit programme suivant

Listing 5 – td63.c

```

#include <limits.h>
// returns the maximum of x and y
/*@
    ensures \result >= x && \result >= y && (\result == x || \result == y);
*/
int max ( int x, int y ) {

    if ( x >=y )
    {
        //@ assert x>= y;
        return x ;
        //@ assert x>= y;
    }

    //@ assert x< y;
    return y ;
    //@ assert x< y;
}

```

Analyser la correction des annotations avec *Frama-c*.

Exercice 5 La définition structurelle des transformateurs de prédicats est rappelée dans le tableau ci-dessous :

S	$wp(S)(P)$
$X := E(X, D)$	$P[e(x, d)/x]$
SKIP	P
$S_1; S_2$	$wp(S_1)(wp(S_2)(P))$
IF B S_1 ELSE S_2 FI	$(B \Rightarrow wp(S_1)(P)) \wedge (\neg B \Rightarrow wp(S_2)(P))$

- Axiome d'affectation : $\{P(e/x)\} X := E(X) \{P\}$.
- Axiome du saut : $\{P\} \text{skip} \{P\}$.
- Règle de composition : Si $\{P\} S_1 \{R\}$ et $\{R\} S_2 \{Q\}$, alors $\{P\} S_1; S_2 \{Q\}$.
- Si $\{P \wedge B\} S_1 \{Q\}$ et $\{P \wedge \neg B\} S_2 \{Q\}$, alors $\{P\} \text{if } B \text{ then } S_1 \text{ then } S_2 \text{ fi} \{Q\}$.
- Si $\{P \wedge B\} S \{P\}$, alors $\{P\} \text{while } B \text{ do } S \text{ od} \{P \wedge \neg B\}$.
- Règle de renforcement / affaiblissement : Si $P' \Rightarrow P$, $\{P\} S \{Q\}$, $Q \Rightarrow Q'$, alors $\{P'\} S \{Q'\}$.

Question 5.1 Simplifier les expressions suivantes :

1. $WP(X := X+Y+7)(x+y=6)$
2. $WP(X := X+Y)(x < y)$

Question 5.2 On rappelle que $\{P\} S \{Q\}$ est défini par l'implication $O \Rightarrow WP(S)(Q)$. Pour chaque point énuméré ci-dessous, monter que la propriété $\{P\} S \{Q\}$ est valide ou pas en utilisant la définition suivante :

$$\{P\} S \{Q\} = P \Rightarrow WP(S)(Q)$$

1. $\{x+y = 7\} X := Y+X \{2 \cdot x+y = 6\}$
2. $\{x < y\} \text{IF } x \neq y \text{ THEN } x := 5 \text{ ELSE } x := 8 \text{ FI} \{x \in \{5, 8\}\}$

Question 5.3 Utiliser frama-c pour vérifier les éléments suivants :

1. $\{x+y = 7\} X := Y+X \{2 \cdot x+y = 6\}$
2. $\{x < y\} \text{IF } x \neq y \text{ THEN } x := 5 \text{ ELSE } x := 8 \text{ FI} \{x \in \{5, 8\}\}$

Exercice 6 td65.c

Soit le petit programme suivant dans un fichier :

Listing 6 – td65.c

```

/*@
  assigns  \nothing;
*/
void swap1(int a, int b) {
  int x = a;
  int y = b;
  //@ assert x == a && y == b;
  int tmp;
  //@ assert y == b && x == a;
  tmp = x;
  //@ assert y == b && tmp == a;
  x = y;
  //@ assert x == b && tmp == a;
  y = tmp;
  //@ assert x == b && y == a;
}

```

Question 6.1 Utiliser l'outil frama-c-gui avec la commande `$frama-c-gui ex1.c` et cliquer sur le lien `ex1.c` apparaissant sur la gauche. A partir du fichier source, une fenêtre est créée et vous découvrez le texte du fichier.

Question 6.2 Cliquer à droite sur le mot-clé `assert` et cliquer sur *Prove annotation by WP*. Les boutons deviennent vert.

Question 6.3

```
void swap2(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    //@ assert x == a && y == b;
    int tmp;
    tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
    //@ assert x == a && y == a;
}
```

Répétez les mêmes suites d'opérations mais avec le programme suivant dans `ex2.c`.

Question 6.4 Ajoutez une précondition pour que les preuves soient possibles.

Question 6.5 Soit le nouvel algorithme avec un contrat qui établit ce que l'on attend de cet algorithme

```
/*@
requires \valid(a);
requires \valid(b);
ensures P: *a == \old(*b);
ensures Q: *b == \old(*a);
*/
void swap3(int
           *a, int *b) {
    int tmp;
    tmp = *a;
    *a = *b;
    *b = tmp;
}
```

Recommencer les opérations précédentes et observer ce qui a été utilisé comme outils de preuve.

MOVEX2-1

MALG2-1

Exercice 7 Etudier la correction de l'algorithme suivant en complétant l'invariant de boucle :

Listing 7 – `td66.c`

```
/*@
requires 0 <= n;
ensures \result == n * n;
*/
int f(int n) {
    int i = 0;
    //@ assert i=0
    int s = 0;
    //@ loop invariant ...;
    @ loop assigns ...; */
    while (i < n) {
        i++;
    }
```

```

    s += 2 * i - 1;
};
return s;
}

```

Exercice 8

On rappelle que l'annotation suivante du listing 8 est correcte, si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $pre(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow A(v_0, v)$
- $pre(v_0) \wedge B(v_0, v) \Rightarrow post(v_0, v)$
- $A(v_0, v) \Rightarrow wp(v = f(v))(B(v_0, v))$ où $wp(v = f(v))(B(v_0, v))$ est définie par $B(v_0, v)[f(v)/v]$.

Dans le cas de frama-c, la valeur initiale d'une variable v est notée $\backslash at(v, Pre)$ et aussi $\backslash old(v)$. Nous utiliserons la notation v_0 dans cet exercice.

Listing 8 – contrat

```

requires pre(v)
ensures post(\old(v), v)
type1 truc(type2 v)
/*@ assert A(v0, v); */
v = f(v);
/*@ assert B(v0, v); */
return val;

```

Soient les annotations suivantes. Les variables sont supposées de type int.

Question 8.1 anq81.c

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 64 \wedge y = x \cdot z \wedge z = 2 \cdot x \\ Y := X \cdot Z \\ \ell_2 : y \cdot z = 2 \cdot x \cdot x \cdot z \end{aligned}$$

b

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant Frama-c

Question 8.2 anq82.c

Soient trois constantes n, m, p

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 3^n \wedge y = 3^p \wedge z = 3^m; \\ T := 8 \cdot X \cdot Y \cdot Z; \\ \ell_2 : t = (y+z)^3 \wedge y = x; \end{aligned}$$

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant Frama-c. On prendra soin de discuter sur les valeurs de m, n, p et notamment de donner une condition sur ces valeurs pour que cel soit correcte.

Exercice 9 td68.c

Listing 9 – qpowers2.c

Listing 10 – mainpowers2.c

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

```

```

int power2(int x)
{int r, k, cv, cw, or, ok, ocv, ocw;
 r=0;k=0;cv=0;cw=0;or=0;ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
 while (k<x)

```

```
        {
            ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
            k=ok+1;
            cv=ocv+ocw+1;
            cw=ocw+2;
        }
        r=cv;
        return(r);
    }

    int p(int x)
    {
        int r;
        if (x==0)
        {
            r=0;
        }
        else
        {
            r= p(x-1)+2*x-1;
        }
        return(r);
    }

    int check(int n){
        int r1,r2,r;
        r1 = power2(n);
        r2 = p(n);
        if (?? == ??)
        { r = ??;
        }
        else
        { r = ??;
        };
        return r;
    }
    int main()
    {
        int val1,val2,val3,num;
        printf("Enter a number:");
        scanf("%d", &num);
        val1 = power2(num);
        val2 = p(num);
        val3 = check(num);
        printf("Et le résultat pour n=%d: %d %d %d\n", num, val1, val2, val3);
        return 0;
    }
```

Soit le fichier `qpower2.c` qui est partiellement complété et qui permet de calculer le carré d'un nombre naturel. L'exercice vise à compléter les points d'interrogation puis de simplifier le résultat et de montrer l'équivalence de deux fonctions. Le fichier `mainpower2.c` peut être compilé pour que vous puissiez faire des expérimentations sur les valeurs calculées.

Question 9.1 Compléter le fichier `qpower2.c` et produire le fichier `power2.c` qui est vérifié avec `fraama-c`.

Question 9.2 Simplifier la fonction itérative en supprimant les variables commençant par la lettre `o`. Puis vérifier les fonctions obtenues avec `frama-c`.

Question 9.3 En fait, vous avez montré que les deux fonctions étaient équivalentes. Expliquez pourquoi en quelques lignes.

MALG2-2

Exercice 10 `td71.c`

Soit le contrat suivant :

```
variables X, Y, Z
requires  $x_0 \geq 0 \wedge y_0 \geq 0 \wedge z_0 \geq 0 \wedge z_0 = 25 \wedge y_0 = x_0 + 1$ 
ensures  $z_f = 100$ ;
begin
  0 :  $x^2 + y^2 = z \wedge z = 25$ ;
  (X, Y, Z) := (X+3, Y+4, Z+75);
  1 :  $x^2 + y^2 = z$ ;
end
```

Question 10.1 Traduire ce contrat avec le langage `PlusCal` et proposer une validation pour que ce contrat soit valide.

Question 10.2 Traduire ce contrat en `ACSL` et vérifier qu'il est valide ou non. S'il est non valide, proposer une correction de la pré-condition et / ou de la postcondition.

Exercice 11 `anq11.c`

Définir une fonction `maxpointer` (`gex1.c`) calculant la valeur du `maxiSquaremum` du contenu de deux adresses avec son contrat.

```
int max_ptr ( int *p, int *q ) {
  if ( *p >= *q ) return *p ;
  return *q ; }
```

Exercice 12 `anq12.c`

Définir une fonction `abs` (`anq12.c`) calculant la valeur absolue d'un nombre entier avec son contrat.

```
#include <limits.h>
int abs (int x) {
  if (x >= 0) return x ;
  return -x; }
```

Exercice 13 `max-abs.c`, `max-abs1.c`

Etudier les fonctions pour la vérification de l'appel de `abs` et `max`.

```
int abs ( int x );
int max ( int x, int y );
// returns maximum of absolute values of x and y
int max_abs( int x, int y ) {
x=abs(x); y=abs(y);
return max(x,y);
}
```

Exercice 14 Question 14.1 Soit la fonction suivante calculant le reste de la division de a par b . Vérifier la correction de cet algorithme.

```
int rem(int a, int b) {
    int r = a;
    while (r >= b) {
        r = r - b;
    };
    return r;
}
```

Il faut utiliser une variable ghost.

Question 14.2 Annoter les fonctions suivantes en vue de montrer leur correction.

```
int max (int a, int b) {
    if (a >= b) return a;
    else return b;
}

int indice_max (int t[], int n) {
    int r = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++)
        if (t[i] > t[r]) r = i;
    return r;
}
```

```
int valeur_max (int t[], int n) {
    int r = t[0];

    for (int i = 1; i < n; i++)
        if (t[i] > r) r = t[i];
    return r;
}
```

La solution est donnée dans le fichier gex4-3.c.

Exercice 15 Pour chaque question, montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit

$\forall x, y, x', y'. P_\ell(x, y) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(x, y) \wedge (x', y') = f_{\ell, \ell'}(x, y) \Rightarrow P_{\ell'}(x', y')$
 Pour cela, on utilisera l'environnement **Frama-c**.

Question 15.1

```
ℓ1 : x = 10 ∧ y = z+x ∧ z = 2·x
y := z+x
ℓ2 : x = 10 ∧ y = x+2·10
```


Question 15.2

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 1 \wedge y = 12 \\ x := 2 \cdot y \\ \ell_2 : x = 1 \wedge y = 24 \end{aligned}$$

Question 15.3

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 11 \wedge y = 13 \\ z := x; x := y; y := z; \\ \ell_2 : x = 26/2 \wedge y = 33/3 \end{aligned}$$

Exercice 16 Evaluer la validité de chaque annotation dans les questions suivantes.

Question 16.1

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 64 \wedge y = x \cdot z \wedge z = 2 \cdot x \\ Y := X \cdot Z \\ \ell_2 : y \cdot z = 2 \cdot x \cdot x \cdot z \end{aligned}$$

Question 16.2

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 2 \wedge y = 4 \\ Z := X \cdot Y + 3 \cdot Y \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y \cdot Y + X^6 \\ \ell_2 : z = 6 \cdot (x+y)^2 \end{aligned}$$

Question 16.3

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = z \wedge y = x \cdot z \\ Z := X \cdot Y + 3 \cdot Y \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y \cdot Y + Y \cdot X \cdot Z \cdot Z \cdot X; \\ \ell_2 : z = (x+y)^3 \end{aligned}$$

Soit l'annotation suivante :

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 1 \wedge y = 2 \\ X := Y + 2 \\ \ell_2 : x + y \geq m \end{aligned}$$

où m est un entier ($m \in \mathbb{Z}$).

Question 16.4 Ecrire la condition de vérification correspondant à cette annotation en supposant que X et Y sont deux variables entières.

Question 16.5 Etudier la validité de cette condition de vérification selon la valeur de m .

Exercice 17 *gex7.c*

VARIABLES N, V, S, I

$$pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \stackrel{def}{=} \begin{cases} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0-1 \longrightarrow \mathbb{Z} \\ s_0 \in \mathbb{Z} \wedge i_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$REQUIRES \left(\begin{array}{l} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0-1 \longrightarrow \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

$$ENSURES \left(\begin{array}{l} s_f = \bigcup_{k=0}^{n_0-1} v_0(k) \\ n_f = n_0 \\ v_f = v_0 \end{array} \right)$$

$$\ell_0 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ (n, v, s, i) = (n_0, v_0, s_0, i_0) \end{array} \right)$$

$$S := V(0)$$

$$\ell_1 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^0 v(k) \\ (n, v, i) = (n_0, v_0, i_0) \end{array} \right)$$

$$I := 1$$

$$\ell_2 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i = 1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

WHILE $I < N$ **DO**

$$\ell_3 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 1..n-1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

$$S := S \oplus V(I)$$

$$\ell_4 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^i v(k) \wedge i \in 1..n-1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

$$I := I+1$$

$$\ell_5 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 2..n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

OD;

$$\ell_6 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{n-1} v(k) \wedge i = n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

La notation $\bigcup_{k=0}^n v(k)$ désigne la valeur maximale de la suite $v(0) \dots v(n)$. On suppose que l'opérateur \oplus est défini comme suit $a \oplus b = \max(a, b)$.

Question 17.1 Ecrire une solution contractuelle de cet algorithme.

Question 17.2 Que faut-il faire pour vérifier que cet algorithme est bien annoté et qu'il est partiellement correct en utilisant TLA^+ ? Expliquer simplement les éléments à mettre en œuvre et les propriétés de sûreté à vérifier.

Question 17.3 Ecrire un module TLA^+ permettant de vérifier l'algorithme annoté à la fois pour la correction partielle et l'absence d'erreurs à l'exécution.

Exercice 18 *gex8.c*

On considère le petit programme se trouvant à droite de cette colonne. Nous allons poser quelques questions visant à compléter les parties marquées en gras et visant à définir la relation de calcul.

On notera $pre(n_0, x_0, b_0)$ l'expression suivante $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ et $in(n, b, n_0, x_0, b_0)$ l'expression $n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$.

Question 18.1 Ecrire un algorithme avec le contrat et vérifier le .

<p>VARIABLES N, X, B</p> <p>REQUIRES $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$</p> <p>ENSURES $\left(\begin{array}{l} n_0 < b_0 \Rightarrow x_f = (n_0 + b_0)^2 \\ n_0 \geq b_0 \Rightarrow x_f = b_0 \\ n_f = n_0 \\ b_f = b_0 \end{array} \right)$</p> <p>BEGIN</p> <p>$\ell_0 : n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge x = x_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$</p> <p>$X := N;$</p> <p>$\ell_1 : x = n \wedge in(n, b, n_0, x_0, b_0)$</p> <p>IF $X < B$ THEN</p> <p>$\ell_2 :$</p> <p>$X := X \cdot X + 2 \cdot B \cdot X + B \cdot B;$</p> <p>$\ell_3 :$</p> <p>ELSE</p> <p>$\ell_4 :$</p> <p>$X := B;$</p> <p>$\ell_5 :$</p> <p>FI</p> <p>$\ell_6 :$</p> <p>END</p>
--

Exercice 19 Soit le petit programme suivant :

Listing 11 – f91

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int f1(int x)
{ if (x > 100)
  { return(x-10);
  }
  else
  { return(f1(f1(x+11)));
  }
}

int f2(int x)
{ if (x > 100)
  { return(x-10);
  }
  else
  { return(91);
  }
}

int mc91tail(int n, int c)
{ if (c != 0) {
  if (n > 100) {
    return mc91tail(n-10, c-1);
  }
  else
  {
```

```

        return mc91tail(n+11,c+1);
    }
}
else
    { return n;}
}

int mc91(int n)
{
    return mc91tail(n,1);
}

int main()
{
    int val1,val2,val3,num;
    printf("Enter_a_number:_");
    scanf("%d", &num);
    // Computes the square root of num and stores in root.
    val1 = f1(num);
    val2 = f2(num);
    val3 = mc91(num);
    printf("Et_le_résultat_de_f1(%d)=%d_et_la_vérification:_%d_et_....%d\n", num,
    return 0;
}

```

On veut montrer que les deux fonctions $f1$ et $f2$ sont équivalentes avec frama-c en montrant qu'elles vérifient le même contrat ;

Exercice 20 Utiliser frama-c pour vérifier ou non les annotations suivantes :

Question 20.1

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 10 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x \\ y := z+x \\ \ell_2 : x = 10 \wedge y = x+2 \cdot 10 \end{aligned}$$

Question 20.2

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 1 \wedge y = 12 \\ x := 2 \cdot y \\ \ell_2 : x = 1 \wedge y = 24 \end{aligned}$$

Question 20.3

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 11 \wedge y = 13 \\ z := x; x := y; y := z; \\ \ell_2 : x = 26/2 \wedge y = 33/3 \end{aligned}$$

Question 20.4

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 3 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x \\ y := z+x \\ \ell_2 : x = 3 \wedge y = x+6 \end{aligned}$$

Question 20.5

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 2^4 \wedge y = 2^{345} \wedge x \cdot y = 2^{350} \\ x := y + x + 2^x \\ \ell_2 : x = 2^{56} \wedge y = 2^{345} \end{aligned}$$

Question 20.6

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 1 \wedge y = 12 \\ x := 2 \cdot y + x \\ \ell_2 : x = 1 \wedge y = 25 \end{aligned}$$

Exercice 21 Traduire ce contrat dans le langage ACSL et vérifier le contrat.

```
variables x
requires
  x0 ∈ ℕ
ensures
  xf ∈ ℕ
begin
  ℓ0 : { x = x0 ∧ x0 ∈ ℕ }
  While (0 < x)
  ℓ1 : { 0 < x ≤ x0 ∧ x0 ∈ ℕ }
  x := x - 1;
  ℓ2 : { 0 ≤ x ≤ x0 ∧ x0 ∈ ℕ }
od;
ℓ4 : { x = 0 }
end
```

Exercice 22 Utiliser frama-c pour vérifier le contrat suivant :

Variables : F, N, M, I

Requires : $\left(\begin{array}{l} n_0 \in \mathbb{N} \wedge \\ n_0 \neq 0 \wedge \\ f_0 \in 0 .. n_0 - 1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$

Ensures : $\left(\begin{array}{l} m_f \in \mathbb{N} \wedge \\ m_f \in \text{ran}(f_0) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0 .. n_0 - 1 \Rightarrow f_0(j) \leq m_f) \end{array} \right)$

```
M := F(0);
I := 1;
while I < N do
  if F(I) > M then
    M := F(I);
  ;
  I++;
;
b
```

Algorithme 1: Algorithme du maximum d'une liste non annotée

Exercice 23

Utiliser frama-c pour vérifier le contrat suivant :

Soit l'algorithme annoté suivant se trouvant à la page suivante et les pré et postconditions définies pour cet algorithme comme suit : On suppose que x_1 et x_2 sont des constantes.

Exercice 24 Soit la fonction suivante utilisée dans un programme

Listing 12 – mainpower.c

```
#include <stdio.h>
#include <limits.h>
int power(int x)
{
    int r, cz, cv, cu, cw, ct, k;
    cz=0;cv=0;cw=1;ct=3;cu=0;k=0;
    while (k<x)
    {
        printf("%d_%d_%d_cz=%d_%d\n",cu,cv,cw,cz,ct);
        cz=cz+cv+cw;
        cv=cv+ct;
        ct=ct+6;
        cw=cw+3;
        cu=cu+1;
        k=k+1;}
    r=cz;
    return(r);
}

int p(int x)
{
    int r;
    if (x==0)
    {
        r=0;
    }
    else
    {
        r= p(x-1)+3*(x-1)*(x-1) + 3*(x-1)+1;
    }
    return(r);
}

int check(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power(n);
    r2 = p(n);
    if (r1 != r2)
    {
        r = 0;
    }
    else
    {
        r = 1;
    };
    return r;
}
```

Variables : X1,X2,Y1,Y2,Y3,Z

Requires : $x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0$

Ensures : $z_f = x1_0^{x2_0}$

$\ell_0 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, y1, y2, y3, z) = (x1_0, x2_0, y1_0, y2_0, y3_0, z_0)\}$

$(y1, y2, y3) := (x1, x2, 1);$

$\ell_1 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2}\}$

while $y2 \neq 0$ **do**

$\ell_2 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 < y2 \leq x2\}$

if $impair(y2)$ **then**

$\ell_3 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 < y2 \leq x2 \wedge impair(y2)\}$

$y2 := y2 - 1;$

$\ell_4 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$

$y3 := y3 \cdot y1;$

$\ell_5 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$

;

$\ell_6 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$

$y1 := y1 \cdot y1;$

$\ell_7 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2 \div 2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$

$y2 := y2 \div 2;$

$\ell_8 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2\}$

;

$\ell_9 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge y2 = 0\}$

$z := y3;$

$\ell_{10} : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2) = (x1_0, x2_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge y2 = 0 \wedge z = x1^{x2}\}$

Algorithme 2: Algorithme de l'exponentiation indienne annoté

```
int main () {  
  
    int counter;  
    for( counter=0; counter<5; counter++ ) {  
        int v,r;  
        printf("Enter_a_natural_number:");  
        scanf("%d", &v);  
        r = power(v);  
        printf ("Power_: %d---->%d\n", v,r);  
    }  
}
```

Question 24.1 Compiler ce programme et tester son exécution afin d'en dégager ses fonctionnalités.

Question 24.2 Annoter les fonctions principales.

Question 24.3 Vérifiez sa correction partielle et totale.