

Cours Algorithmique des systèmes parallèles et distribués
Exercices
Série :5 Algorithmes répartis
par Dominique Méry
14 janvier 2026

Exercice 1 Soit le fichier *exieee.tla* contenant la description de l'élection du leader dans un graphe connexe acyclique.

```

----- MODULE ieee -----
EXTENDS Naturals

VARIABLES
    nb, sn, bm, bt, ba, root, msg, ack, tr, cnt, con
-----
NODES == {1, 2, 3, 4}

(* le noeud i sait qu'il est le leader, puisque tous ses voisins sont ses enfant
election(i) ==
  /\ i \in NODES
  /\ nb[i]=sn[i]
    /\ root'=[root EXCEPT! [i]= TRUE]
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bm,bt,ba,msg,ack,tr,cnt,con>>
-----
(* le noeud x envoie un message au noeud y, si le message n'est pas déjà envoyé
(* si $x$ n'a pas déjà envoyé un message d'accord pour être le parent de
sending_msg(x,y) ==
  /\ x \notinin bm
  /\ y \notinin ba[x]
  /\ nb[x]=sn[x] \cup {y}
    /\ msg' = msg \cup {<<x,y>>}
  /\ bm' = bm \cup {x}
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bt,ba,root,ack,tr,cnt,con>>
-----
(* x a envoyé un message à y; y n'a pas encore envoyé son accord à $x$; y n'a pas
(* de message à x pour lui demander d'être le chef.
sending_ack(x,y) ==
  /\ <<x,y>> \in msg
  /\ x \notinin ba[y]
  /\ y \notinin bm
    /\ ba'=[ba EXCEPT! [y]= @ \cup {x}]
  /\ ack' = ack \cup {<<x,y>>}
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bm,bt,root,msg,tr,cnt,con>>
-----
```

```

progress(x,y) ==
/\ <<x,y>> \in ack
/\ x \notinin bt
    /\ tr'=tr \cup {<<x,y>>}
/\ bt' = bt \cup {x}
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bm,ba,root,msg,ack,cnt,con>>

recv_cnf(x,y) ==
/\ <<x,y>> \in tr
/\ x \notinin sn[y]
    /\ sn'=[sn EXCEPT! [y]= @ \cup {x}]
    /\ UNCHANGED <<nb,bm,bt,ba,root,msg,ack,tr,cnt,con>>

decontention(x,y) ==
/\ <<x,y>> \in cnt
/\ <<y,x>> \in cnt
    /\ msg'=msg - cnt
    /\ bm'= bm - {x,y}
    /\ cnt'={}
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bt,ba,root,ack,tr,con>>

contention(x,y) ==
/\ con = 0
/\ <<x,y>> \in msg
/\ <<x,y>> \notinin ack
/\ x \notinin ba[y]
/\ y \in bm
    /\ cnt'=cnt\cup {<<x,y>>}
/\ con'= 1
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bm,bt,ba,root,msg,ack,tr>>

solvecon(x,y) ==
/\ con = 1
/\ <<x,y>> \in msg
/\ x \notinin ba[y]
/\ y \in bm
    /\ ba'=[ba EXCEPT! [y]= @ \cup {x}]
/\ ack' = ack \cup {<<x,y>>}
    /\ UNCHANGED <<nb,sn,bm,bt,root,msg,tr,cnt,con>>

```

```

-----
(* modélisation *)
Init ==
  /\ nb = [i \in NODES | -> IF i=1 THEN {2,3} ELSE IF i = 3 THEN {1,4} ELSE IF i =
  /\ sn = [i \in NODES | -> {}]
  /\ bm = {}
  /\ bt = {}
  /\ ack = {}
  /\ ba = [i \in NODES | -> {}]
  /\ root = [i \in NODES | -> FALSE]
  /\ msg = {}
  /\ cnt = {}
  /\ tr = {}
  /\ con = 0
Next ==
  /\ \E i \in NODES: election(i)
  /\ \E x,y \in NODES: sending_msg(x,y)
  /\ \E x,y \in NODES: sending_ack(x,y)
  /\ \E x,y \in NODES: progress(x,y)
  /\ \E x,y \in NODES: rcv_cnf(x,y)
  /\ \E x,y \in NODES: contention(x,y)
  /\ \E x,y \in NODES: decontention(x,y)
  /\ \E x,y \in NODES: solvecon(x,y)

```

Question 1.1 Montrer que ce modèle TLA vérifie les propriétés attendues de l'élection.

Question 1.2 Montrer que les invariants de présentation de la solution sont vérifiés.

Question 1.3 Modifier l'algorithme pour résoudre la contention en considérant un choix entre deux nœuds x et y au exemple le plus petit.

Question 1.4 Traduire cette dernière version en utilisant le langage PlusCal.

Exercice 2 Soit le fichier `exdijkstra.tla` contenant la description de l'autostabilisation dans un anneau.

```

-----MODULE exdijkstra-----  

EXTENDS Naturals  

CONSTANTS  

    N,M  

VARIABLES  

    V  

-----  

DOMAINE == 0 .. N  

IMAGE == 0 .. M  

-----  

(* actions *)  

  

NToZero ==  

    /\ V[0] = V[N]  

    /\ V' = [V EXCEPT! [0] = (V[0] + 1) % (M+1)]  

  

Others(I) ==  

    /\ I \in 0..N  

    /\ I # N  

    /\ V[I+1] # V[I]  

    /\ V' = [V EXCEPT ![I+1] = V[I]]  

  

-----  

Init == V = [i \in 0..N |-> (IF i # N THEN 9 ELSE 0)]  

Next == NToZero /\ (\E I \in 0..N-1: Others(I))  

  

Prop1 == (V[0] = V[N]) => (\A i \in 1..N-1: V[i+1] = V[i])  

  

Prop2 ==  

    \/\ (\E i,j \in 0..N-1: i # j /\ V[i+1] # V[i] /\ V[j+1] # V[j])  

    \/\ (V[0] = V[N] /\ (\E i \in 0..N-1: V[i+1] # V[i]))  

  

Prop == Prop2  

  

test == Prop2  

  

  

(* /\ ( (V[I+1] # V[I]) /\ (I \in 1..N) ) => (V[0] # V[N]) /\ ( \A i \in 1..N  

=====

```

Question 2.1 Compléter le module et vérifier des propriétés attendues comme la stabilité.

Question 2.2 Traduire ce module en un module PlusCal qui définit cet algorithme.