Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations
Exercices (avec les corrections)
Sémantique des langages de programmation
par Dominique Méry
22 mai 2025

Exercices sur Frama-c et wp

Exercice 1 **Question 1.1** *Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.*

```
/*@ requires  A(x,y,z) ;
  ensures \result == 49 ;
*/

int q6(int x,int y, int z){

   z = y*(x+y);
   y = x*y;
   x=x*x;
   z = z+x+y;
/*@  assert  z == 49; */

  return z;
  }
```

En utilisant l'opérateur wp, proposer des assertions pour $A(x, y, z)$, afin que le contrat soit correct.

◇– **Solution de la question 1.1**

`A(x,y,z)` *est défini par* `y*(x`*y)+x*x+x*y == 49+.*

```
/*@ requires  A(x,y,z) ;
  ensures \result == 49 ;
*/

int q6(int x,int y, int z){
   /*@  assert y*(x+y)+x*x+x*y == 49; */
  z =y*(x+y);
   /*@  assert  z+x*x+x*y == 49; */
   y = x*y;
   /*@  assert  z+x*x+y == 49; */
   x=x*x;
   /*@  assert  z+x+y == 49; */
   z = z+x+y;
/*@  assert  z == 49; */

  return z;
  }
```

Fin 1.1

Question 1.2 *Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.*

```
/*@ requires  A(x,y,z);
  ensures \result == 144 ;
*/

int q6(int x,int y, int z){
  int  u;
```

```
  u = x+y+z;
  x=x*x;
  /*@ assert  x == 9;*/
  y=y*y;
 /*@ assert  y == 16;*/
  z=z*z;
  u = u*u;
    return u;
  }
```

En utilisant l'opérateur wp, proposer une assertion pour A, afin que le contrat soit correct. Les annotations indiquées sont correctes et font partie des données du problème.

◇— Solution de la question 1.2

L'assertion A(x,y,z) peut Ãªtre simplement `x*x  == 9 &&   y*y == 16 &&   (x`*y+z)* (x+y+z) == 144+.*

```
        /*@ requires  A(x,y,z);
  ensures \result == 144 ;
*/

int q6(int x,int y, int z){
 /*@ assert x*x  == 9 &&   y*y  == 16 &&   (x+y+z)* (x+y+z) == 144;*/
  int  u;
  /*@ assert  x*x  == 9 &&   y*y  == 16 &&   (x+y+z)* (x+y+z) == 144;*/
  u = x+y+z;
  /*@ assert  x*x  == 9 &&   y*y  == 16 &&   u*u == 144;*/
  x=x*x;
  /*@ assert  x == 9 &&   y*y  == 16 &&   u*u == 144;*/
  y=y*y;
 /*@ assert  y == 16 &&   u*u == 144;*/
 z=z*z;
 /*@ assert  u*u == 144;*/
  u = u*u;
 /*@ assert  u == 144;*/
    return u;
  }
```

Fin 1.2

Exercice 2 *Nous étudions ce petit algorithme qui calcule quelque chose et nous avons exécuté cet algorithme de 0 et 10 pour obtenir la suite suivante :*

```
   0 --> 0,1 --> 1,2 --> 3,3 --> 7,4 --> 15,5 --> 31,6 --> 63,7 --> 127,8 --> 255,
```

```
#ifndef _A_H
#define _A_H
// Definition of the  mathematical function mathpower2
/*@ axiomatic mathpower {
  @ logic integer mathpower(integer n,integer m);
  @ axiom mathpower_0: \forall integer n; n >= 0 ==> mathpower(n,0) == 1;
  @ axiom mathpower_in: \forall integer n,m; n >= 0 && m >= 0
  ==> mathpower(n,m+1) == mathpower(n,m)*n;
  @ } */


int inv1(int x);
#endif
```

```
#include <limits.h>
#include <qmathiinv1.h>

int inv1(int x)
{ int u=0;
  int k=0;
  while (k  < x)
    { u=2*u+1;
      k=k+1;
    };
  return(u);
    }
```

Si on utilise la fonction power2, on obtient la suite suivante :

```
0 --> 1,1 --> 2,2 --> 4,3 --> 8,4 --> 16,5 --> 32,6 --> 64,7 --> 128,8 --> 256,9 --
```

Question 2.1 *On comprend que l'algorithme calcule la suite u_n d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n - 1$. En particulier, $u_0 = 0$.*
Donner une définition de u_{n+1} en fonction de u_n en calculant le rapport $\frac{u_{n+1}+1}{u_n+1}$

Question 2.2 *Ecrire un contrat pour cette algorithme en précisant la clause* requires *et la clause* ensures*.*

Question 2.3 *Proposer un invariant de boucle en vous aidant de la suite u_n et monter qu'il est correct pur cette preuve de correction.*

Question 2.4 *Exprimer la terminaison de cet algorithme et justifier qu'il termine pour la précondition choisie.*

Exercice 3 *On dit que S1 est équivalent à S2 et on note $S1 \equiv S2$, si pour touts les états s et s', $(S1, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$ si, et seulement si, $(S2, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$.*

Question 3.1 *Montrer que* **while** b **do** S **od** $\equiv$ **if** b **then** S; **while** b **do** S **od else** $skip$ **fi**

Question 3.2 *Etendre la fonction sémantique pour l'instruction* **repeat** S **until** b .

Question 3.3 *Montrer que* **repeat** S **until** b $\equiv$ S; **if** b **then** $skip$ **else repeat** S **until** b **fi**

Exercice 4 *On rappelle que $wp(X := E)(P(x)) = P[e(x)/x]$ et que $\{A(x)\}X := E\{B(x)\}$ est définie par $A \Rightarrow wp(X := E)(B)$. On peut assez naturellement appliquer cette définition pour*

$\ell_1 : A(x)$ $X := E(X)$ $\ell_2 : B(x)$

Montrer la correction des triplets suivants et vérifier avec Frama-C en examinant les conditions de vérification engendrées :

—

$\ell_1 : x = 10 \ \wedge \ y = z+x \ \wedge z = 2\cdot x$ $y := z+x$ $\ell_2 : x = 10 \ \wedge \ y = x+2\cdot 10$

— $\ell_1 : x = 1 \ \wedge \ y = 12$
$x := 2 \cdot y$
$\ell_2 : x = 1 \ \wedge \ y = 24$

— $\ell_1 : x = 11 \ \wedge \ y = 13$
$z := x; x := y; y := z;$
$\ell_2 : x = 26/2 \ \wedge \ y = 33/3$

— $\ell_1 : x = 9 \ \wedge \ y = z+x$
$y := x+9$
$\ell_2 : x = 9 \ \wedge \ y = x+9$

— $\ell_1 : x = 1 \ \wedge \ y = 3 \ \wedge \ x+y = 12$
$x := y+x$
$\ell_2 : x = 567 \ \wedge \ y = 34$

Exercice 5 *Calculer wp(S)(P) dans les cas suivants :*

1. $wp(X := E(X); Y := F(X))(P(x, y))$
2. $wp(X := Y, Y := X)(P(x, y))$
3. $wp(while\ TRUE\ do\ X := E(X)\ od)(P(x, y))$
4. $wp(while\ FALSE\ do\ X := E(X)\ od)(P(x, y))$
5. $wp(while \times < 20\ do\ X := X+1\ od)(TRUE)$

Sémantique naturelle et sémantique SOS

Exercice 6

$$
\begin{array}{lcl}
n & ::= & 0 \mid 1 \mid n0 \mid n1 \\
e & ::= & n \mid x \mid e1+e2 \mid e1-e2 \mid e1 \cdot e2 \\
b & ::= & tt \mid ff \mid e1 = e2 \mid e1 \neq e2 \mid e1 \leq e2 \mid e1 \geq e2 \mid e1 < e2 \mid e1 > e2 \mid \neg\ b \mid b1\ \&\&\ b2 \\
S & ::= & x := e \mid skip \mid S1; S2 \mid (\textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ S_1\ \textbf{else}\ S_2\ \textbf{fi} \mid \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S\ \textbf{od}
\end{array}
$$

Question 6.1 *Définir une fonction sémantique pour la catégorie syntaxique des chaines numériques NUM à valeurs dans $\mathbb{Z}$: $\mathcal{N} \in NUM \longrightarrow \mathbb{Z}$.*

Question 6.2 *Evaluer les valeurs suivantes :*

— $\mathcal{N}(11)$
— $\mathcal{N}(101)$
— $\mathcal{N}(0100)$

Question 6.3 *Montrer que $\mathcal{N}$ est bien définie pour toutes les expressions.*

Exercice 7 *On définit lénsemble des états $States = Var \longrightarrow \mathbb{Z}$ où Var est lénsemble des variables.*

Question 7.1 *Une expression arithmétique $e \in Exp$ est évaluée dans un état ar la fonction sémantique $\mathcal{E} \in Exp \longrightarrow (States \longrightarrow \mathbb{Z})$.*
Définir $\mathcal{E}$ par induction sur la syntaxe.

Question 7.2 *Soit* $s \in States$ *tel que* $s(x) = 2$ *et* $s(y) = 3$ *où* $x, y \in Var$ *et* $s \in States$.
Evaluer les expressions suivantes en s *:* $x{+}y{+}101$, $x{\cdot}y$.

Question 7.3 *Une expression logique* $b \in Bexp$ *est évaluée dans un état ar la fonction sémantique* $\mathcal{B} \in Bexp \longrightarrow (States \longrightarrow \mathbb{B})$.
Définir $\mathcal{B}$ *par induction sur la syntaxe.*

Question 7.4 *Soit* $s \in States$ *tel que* $s(x) = 2$ *et* $s(y) = 3$ *où* $x, y \in Var$ *et* $s \in States$.
Evaluer les expressions suivantes en s *:* $x = y$, $x \neq y$, $x \leq y$, $x < y$ && $x{+}{-}6 \leq y$.

Question 7.5 *On étend le langage des expressions logiques par les deux constructions* $b1 \Rightarrow b2$ *et* $b1 \Leftrightarrow b2$. *Ce langage est noté* $Bexp1$.
Montrer que pour tout expression $b \in Bexp1$, *il existe une expression* $b' \in Bexpt$ *telle que* $\mathcal{B}(b) = \mathcal{B}(b')$.

Exercice 8 *Nous définissons deux opérations substitution et mise à jour. Ces deux opérations seront utilisées plus tard dans léxpression de la sémantique des instructions :*

— *la notation de substitution* $e[x \mapsto e1]$ *qui est la substitution de* x *par* $e1$ *dans* e.
— *la mise à jour pour un état* s *et on la note* $s[x \mapsto v]$ *qui est le nouvel état obtenu par mise à jour de la valeur de* x *pour* s.

Question 8.1 *Ecrire une définition inductive de* $e[x \mapsto f]$.

◇— **Solution de la question 8.1**

On définit cette substitution par induction sur la syntaxe des expressions e *:*

$$
\boxed{
\begin{array}{lcl}
n[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & n \\
x[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & f \\
y[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & y \\
(e1{+}e2)[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & e1[x \mapsto f] \oplus e2[x \mapsto f] \\
(e1{\cdot}e2)[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & e1[x \mapsto f] \otimes e2[x \mapsto f] \\
(e1\ op\ e2)[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & e1[x \mapsto f]\ \mathbf{op}\ e2[x \mapsto f]
\end{array}
}
$$

Dans cette écriture, nous utilisons les symboles $\oplus$, $\otimes$ *et* **op** *pour signifier les opérateurs arithmétiques dans lénsemble* $\mathbb{Z}$ *et qui sont les opérateurs du monde des mathématiques.*

Fin 8.1

Question 8.2 *Définir la mise à jour pour un état* s *et on la note* $s[x \mapsto v]$ *qui est le nouvel état obtenu par mise à jour de la valeur de* x *pour* s.

◇— **Solution de la question 8.2**

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
s[x \mapsto v](x) \stackrel{def}{=} v \\
s[x \mapsto v](y) \stackrel{def}{=} y
\end{array}
}
$$

x *et* y *sont deux noms distincts.*

Fin 8.2

Question 8.3 *Montrer que* $s[x \mapsto v][y \mapsto w] = s[y \mapsto w][x \mapsto v]$ *et que* $s[x \mapsto v][\mapsto w] = s[x \mapsto v]$.

Question 8.4 *Montrer que* $\mathcal{E}(e[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(e)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s)$.

◇– **Solution de la question 8.4**

$$\textbf{Cas e = n} \begin{cases} \mathcal{E}(n[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(n)(s) = n \\ \mathcal{E}(n)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s) = n \\ \mathcal{E}(n[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(n)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s)]) \end{cases}$$

$$\textbf{Cas e = x} \begin{cases} \mathcal{E}(x[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(f)(s) \\ \mathcal{E}(x)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s)]) = \mathcal{E}(f)(s) \\ \mathcal{E}(x[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(x)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s) \end{cases}$$

$$\textbf{Cas e = y} \begin{cases} \mathcal{E}(y[x \mapsto f])(s) = s(y) \\ \mathcal{E}(y)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s)]) = s(y) \\ \mathcal{E}(y[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(y)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s) \end{cases}$$

$$\textbf{Cas e = e1+e2} \begin{cases} \mathcal{E}(e[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(e1[x \mapsto f])(s) \oplus \mathcal{E}(e2[x \mapsto f])(s) \\ \mathcal{E}(e1[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(e1)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)])(hypothsed'inductionstructurelle) \\ \mathcal{E}(e2[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(e2)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)])(hypothsed'inductionstructurelle) \\ \mathcal{E}(e1[x \mapsto f])(s) \oplus \mathcal{E}(e2[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(e1)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)]) \oplus \mathcal{E}(e2)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)]) \\ \mathcal{E}(e1)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)]) \oplus \mathcal{E}(e2)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)]) = \mathcal{E}(e1+e2)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)]) \end{cases}$$

$$(e1 \cdot e2)[x \mapsto f] \quad \stackrel{def}{=} \quad e1[x \mapsto f] \otimes e2[x \mapsto f]$$

$$(e1\ op\ e2)[x \mapsto f] \quad \stackrel{def}{=} \quad e1[x \mapsto f]\ \mathbf{op}\ e2[x \mapsto f]$$

Fin 8.4

Question 8.5 *Définir la substitution pour les expressions booléennes $b[x \mapsto e]$ où b est une expression booléenne de BExp et e est une expression arithmétqiue de Exp.*

Question 8.6
Montrer que $\mathcal{E}(b[x \mapsto e])(s) = \mathcal{E}(b)(s[x \mapsto \mathcal{E}(e)(s)$.

◇– **Solution de la question 8.6**

Cette question n'est pas corrigé et fait partie des exercices qui pourraient être proposés ors de la prochaine évaluation.

Fin 8.6

Exercice 9
On rappelle les règles définissant la sémantique naturelle du langage de programmation $\mathcal{PL}$

Règles de définition selon la syntaxe

- *Axiome Ass* $(x := e, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s[x \mapsto \mathcal{E}(e)(s)]$
- *Axiome Skip* $(skip, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s$
- *Règle Comp Si* $(S_1, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$ *et* $(S_2, s') \underset{nat}{\longrightarrow} s"$*, alors* $(S_1; S_2, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s"$.
- *Règle Iftt Si* $(S_1, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$ *et* $\mathcal{B}(b)(s) = TRUE$*, alors* $(\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \textbf{ fi}, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$.
- *Règle Ifff Si* $(S_2, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$ *et* $\mathcal{B}(b)(s) = FALSE$*, alors* $(\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \textbf{ fi}, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$.
- *Règle Whilett] Si* $(S, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$ *et* $(\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od}, s') \underset{nat}{\longrightarrow} s"$ *et* $\mathcal{B}(b)(s) = TRUE$*, alors* $(\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od}, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s"$.
- *Règle Whieff] Si* $\mathcal{B}(b)(s) = FALSE$*, alors* $(\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od}, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s$.

Question 9.1 *Soit s tel que $s(u) = 0$ et $s(v) = 1$.*

- *Evaluer (u :=11 ;v :=u+100 ;u :=u+v,s) en sémantique naturelle.*
- *Evaluer (w :=u ;u :=v ;v :=w,s) en sémantique naturelle.*

◇– **Solution de la question 9.1**

Une évaluation est une suite d'application des règles ci-dessus.

- $(u := 11, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s[u \mapsto \mathcal{E}(11)(s)]$

(1) $(u := 11, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s[x \mapsto 3]$

— $(v := u{+}100, s[u \mapsto 3]) \underset{nat}{\longrightarrow} s[u \mapsto 3][v \mapsto \mathcal{E}(u{+}100)(s[u \mapsto 3])]$

(2) $(v := u{+}100, s[u \mapsto 3]) \underset{nat}{\longrightarrow} s[u \mapsto 3][v \mapsto 7]$

(3) $(u := u{+}v, s[u \mapsto 3][v \mapsto 7]) \underset{nat}{\longrightarrow} s[u \mapsto 3][v \mapsto 7][u \mapsto 10]$

(4) $(u := 11; v := u{+}100, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s[u \mapsto 3][v \mapsto 7]$ *par le point 1 et le point 2 et l'application de la règle 2.*

(final) $(u := 3; v := u{+}4; u := u{+}v, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s[u \mapsto 3][v \mapsto 7][u \mapsto 10]$ *par le point 3 et le point 4 et l'application de la règle 2.*

On procède de même pour l'autre suite d'instructions qui est laissée en guise de révision pour l'épreuve écrite.

Fin 9.1