<

Cours Modélisation et vérification des systèmes informatiques
Exercices
Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (II)
par Dominique Méry
4 décembre 2025

Exercice 1 *Soit le contrat suivant :*

variables X, Y, Z
requires $x_0 >= 0 \wedge y_0 >= 0 \wedge z_0 >= 0 Rootslst \wedge z_0 = 25 \wedge y_0 = x_0+1$
ensures $z_f = 100$;

begin
$0 : x^2+y^2 = z \wedge z = 25;$
$(X, Y, Z) := (X+3, Y+4, Z+75);$
$1 : x^2+y^2 = z;$
end

Question 1.1 *Traduire ce contrat avec le langage PlusCal et proposer une validation pour que ce contrat soit valide.*

Question 1.2 *Traduire ce contrat en ACSL et vérifier qu'il est valide ou non. S'il est non valide, proposer une correction de la pré-condition et/ou de la postcondition.*

Exercice 2 *Définir une fonction* maxpointer *(gex1.c) calculant la valeur du maximum du ciontenu de deux adresses avec son contrat.*

```
int max_ptr ( int *p, int *q ) {
if ( *p >= *q ) return *p ;
return *q ; }
```

Exercice 3 *Définir une fonction* abs *(gex2.c) calculant la valeur absolue d'un nombre entier avec son contrat.*

```
#include <limits.h>
int abs (int x) {
  if (x >= 0) return x ;
  return -x;}
```

Exercice 4 *Etudier les fonctions pour la vérification de l'appel de abs et max (max-abs.c,max-abs1.c,max-abs2.c)*

```
int abs ( int x );
int max ( int x, int y );
// returns maximum of absolute values of x and y
int max_abs( int x, int y ) {
x=abs(x); y=abs(y);
return max(x,y);
}
```

Exercice 5 **Question 5.1** *Soit la fonction suivante calculant le reste de la division de a par b. Vérifier la correction de cet algorithme.*

```
int rem(int a, int b) {
  int r = a;
  while (r >= b) {
    r = r - b;
  };
  return r;
}
```

Il faut utiliser une variable ghost.

Question 5.2 *Soit la fonction suivante calculant la fonction fact. Vérifier la correction de cet algorithme. Pour vérifier cette fonction, il est important de définir la fonction mathématique Fact avec ses propriétés.*

```
/*@ axiomatic Fact {
  @ logic integer Fact(integer n);
  @ axiom Fact_1: Fact(1) == 1;
  @ axiom Fact_rec: \forall integer n; n > 1 ==> Fact(n) == n * Fact(n-1);
  @ } */

int fact(int n) {
  int y = 1;
  int x = n;
  while (x != 1) {
    y = y * x;
    x = x - 1;
  };
  return y;
```

Question 5.3 *Annoter les fonctions suivantes en vue de montrer leur correction.*

```
 int max (int a, int b) {
  if (a >= b) return a;
  else return b;
}

int indice_max (int t[], int n) {
  int r = 0;
  for (int i = 1; i < n; i++)
    if (t[i] > t[r]) r = i;
  return r;
}


int valeur_max (int t[], int n) {
  int r = t[0];

  for (int i = 1; i < n; i++)
    if (t[i] > r) r = t[i];
  return r;
}
```

'La solution est donnée dans le fichier gex4-3.c.

Reprise

Exercice 6 *Pour chaque question, montrer que l' annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit*
$\forall x, y, , x', y'. P_\ell(x, y) \ \wedge \ cond_{\ell,\ell'}(x, y) \ \wedge \ (x', y') = f_{\ell,\ell'}(x, y) \Rightarrow P_{\ell'}(x', y')$
Pour cela, on utilisera l'environnement Frama-c.

Question 6.1

$\ell_1 : x = 10 \ \wedge \ y = z{+}x \ \wedge z = 2{\cdot}x$
$y := z{+}x$
$\ell_2 : x = 10 \ \wedge \ y = x{+}2{\cdot}10$

Question 6.2

$\ell_1 : x = 1 \ \wedge \ y = 12$
$x := 2{\cdot}y$
$\ell_2 : x = 1 \ \wedge \ y = 24$

Question 6.3

$\ell_1 : x = 11 \ \wedge \ y = 13$
$z := x; x := y; y := z;$
$\ell_2 : x = 26/2 \ \wedge \ y = 33/3$

Exercice 7 *(6 points)*
Evaluer la validité de chaque annotation dans les questions suivent.

Question 7.1

$\ell_1 : x = 64 \ \wedge \ y = x{\cdot}z \ \wedge z = 2{\cdot}x$
$Y := X{\cdot}Z$
$\ell_2 : \ y{\cdot}z = 2{\cdot}x{\cdot}x{\cdot}z$

Question 7.2

$\ell_1 : x = 2 \ \wedge \ y = 4$
$Z := X{\cdot}Y{+}3{\cdot}Y{\cdot}Y{+}3{\cdot}X{\cdot}Y{\cdot}Y{+}X^6$
$\ell_2 : \ z = 6{\cdot}(x{+}y)^2$

Question 7.3

$\ell_1 : x = z \ \wedge \ y = x{\cdot}z$
$Z := X{\cdot}Y{+}3{\cdot}Y{\cdot}Y{+}3{\cdot}X{\cdot}Y{\cdot}Y{+}Y{\cdot}X{\cdot}Z{\cdot}Z{\cdot}X;$
$\ell_2 : \ z = (x{+}y)^3$

Soit l'annotation suivante :

$\ell_1 : x = 1 \wedge y = 2$
$X := Y{+}2$
$\ell_2 : x{+}y \geq m$

où m est un entier ($m \in \mathbb{Z}$).

Question 7.4 *Ecrire la condition de vérification correspondant à cette annotation en upposant que X et Y sont deux variables entières.*

Question 7.5 *Etudier la validité de cette condition de vérification selon la valeur de* m.

Exercice 8 *gex7.c*

VARIABLES N, V, S, I

$$pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \stackrel{def}{=} \begin{cases} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0-1 \longrightarrow \mathbb{Z} \\ s_0 \in \mathbb{Z} \wedge i_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

REQUIRES $\left(\begin{array}{l} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0-1 \longrightarrow \mathbb{Z} \end{array}\right)$

ENSURES $\left(\begin{array}{l} s_f = \bigcup_{k=0}^{n_0-1} v_0(k) \\ n_f = n_0 \\ v_f = v_0 \end{array}\right)$

$\ell_0 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ (n, v, s, i) = (n_0, v_0, s_0, i_0) \end{array}\right)$

$S := V(0)$

$\ell_1 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{0} v(k) \\ (n, v, i) = (n_0, v_0, i_0) \end{array}\right)$

$I := 1$

$\ell_2 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i = 1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array}\right)$

WHILE $I < N$ ***DO***

$\ell_3 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 1..n-1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array}\right)$

$S := S \oplus V(I)$

$\ell_4 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i} v(k) \wedge i \in 1..n-1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array}\right)$

$I := I+1$

$\ell_5 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 2..n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array}\right)$

OD;

$\ell_6 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{n-1} v(k) \wedge i = n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array}\right)$

La notation $\bigcup_{k=0}^{n} v(k)$ *désigne la valeur maximale de la suite* $v(0) \ldots v(n)$*. On suppose que l'opérateur* $\oplus$ *est défini comme suit* $a \oplus b = max(a, b)$.

Question 8.1 *Ecrire une solution contractuelle de cet algorithme.*

Question 8.2 *Que faut-il faire pour vérifier que cet algorithme est bien annoté et qu'il est partiellement correct en utilisant TLA*$^+$ *? Expliquer simplement les éléments à mettre en œuvre et les propriétés de sûreté à vérifier.*

Question 8.3 *Ecrire un module TLA*$^+$ *permettant de vérifier l'algorithme annoté à la fois pour la correction partielle et l'absence d'erreurs à l'exécution.*

Exercice 9 *gex8.c*

On considère le petit programme se trouvant à droite de cette colonne. Nous allons poser quelques questions visant à compléter les parties marquées en gras et visant à définir la relation de calcul.
On notera $pre(n_0, x_0, b_0)$ *l'expression suivante* $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ *et* $in(n, b, n_0, x_0, b_0)$ *l'expression* $n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$.

Question 9.1 *Ecrire un algorithme avec le contrat et vérifier le .*

VARIABLES N, X, B
REQUIRES $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$
ENSURES $\left(\begin{array}{l} n_0 < b_0 \Rightarrow x_f = (n_0+b_0)^2 \\ n_0 \geq b_0 \Rightarrow x_f = b_0 \\ n_f = n_0 \\ b_f = b_0 \end{array} \right.$
BEGIN
$\ell_0 : n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge x = x_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$
$X := N;$
$\ell_1 : x = n \wedge in(n, b, n_0, x_0, b_0)$
IF $X < B$ ***THEN***
ℓ_2 :
$X := X{\cdot}X{+}2{\cdot}B{\cdot}X{+}B{\cdot}B;$
ℓ_3 :
ELSE
ℓ_4 :
$X := B;$
ℓ_5 :
FI
ℓ_6 :
END

Exercice 10 *Soit le petit programme suivant :*

Listing 1 – f91

```
#include <limits.h>

/*@ requires  INT_MIN <= x-10;
    requires x-10 <= INT_MAX;
    assigns  \nothing;
  ensures 100 < x ==> \result  == x -10;
  ensures x <= 100 ==> \result == 91;
*/
int f1(int x)
{ if (x > 100)
    { return(x-10);
    }
  else
    { return(f1(f1(x+11)));
    }
}


/*@ requires  INT_MIN <= x-10;
    requires x-10 <= INT_MAX;
    assigns  \nothing;
  ensures 100 < x ==> \result  == x -10;
  ensures x <= 100 ==> \result == 91;
*/


int f2(int x)
{ if (x > 100)
    { return(x-10);
```

```
    }
  else
    { return(91);
    }
}


/*@    requires  INT_MIN <= n-10;
     requires n-10 <= INT_MAX;
  assigns  \nothing;
  ensures  \result  == 1;
*/

int f(int n){
  int r1,r2,r;
  r1 = f1(n);
  r2 = f2(n);
  if (r1 == r2)
    { r = 1;
    }
  else
    { r = 0;
    };
  return r;
 }
```

On veut montrer que les deux fonctions f1 et f2 sont équivalentes avec frama-c en montrant qu'elles vérifient le même contrat;

Exercice 11 *Soit le petit programme suivant :*

Listing 2 – qpower2.c

```
#include <limits.h>
/*@ axiomatic auxmath {
  @ axiom  rule1: \forall int n; n >0 ==> n*n == (n-1)*(n-1)+2*n+1;
  @ } */

/*@  requires  0 <= x;
      requires x <= INT_MAX;
      requires x*x <= INT_MAX;
  assigns \nothing;
      ensures \result == x*x;
*/
int power2(int x)
{int   r,k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
  r=0;k=0;cv=0;cw=0;or=0;ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
      /*@ loop invariant cv == k*k;
         @ loop invariant k  <= x;
         @ loop invariant cw  == 2*k;
         @ loop invariant  4*cv  == cw*cw;
         @ loop assigns k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
          @ loop variant x-k;
*/
  while (k<x)
         {
           ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
           k=ok+1;
```

```
            cv=ocv+ocw+1;
            cw=ocw+2;

        }
  r=cv;
  return(r);
}


/*@  requires  0 <= x;
     decreases x;
  assigns \nothing;

     ensures \result == x*x
;
*/
int p(int x)
{
  int r;
  if (x==0)
        {
          r=0;

        }
  else
        {
          r= p(x-1)+2*x+1;

        }
  return(r);
}


/*@   requires  0 <= n;
  assigns \nothing;
   ensures \result == 1;
*/

int check(int n){
  int r1,r2,r;
  r1 = power2(n);
  r2 = p(n);
  if (r1 != r2)
    { r = 0;
    }
  else
    { r = 1;
    };
  return r;
 }
```

On veut montrer que les deux fonctions p et power2 sont équivalentes avec frama-c en montrant qu'elles vérifient le même contrat;