

Cours MOdélisation, Vérification et Expérimentations  
Exercices  
Structures partiellement ordonnées, treillis complets, points-fixes (I)  
par Dominique Méry  
23 mai 2025

Nous supposons que les opérations suivantes sont définies pour une collection  $A_0, \dots, A_i \dots i \in \mathbb{N}$  de parties de l'ensemble  $E$  :

- $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{e \in E \mid \exists i \in \mathbb{N} : e \in A_i\}$
- $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{e \in E \mid \forall i \in \mathbb{N} : e \in A_i\}$

Ces deux définitions sont correctes et légales. Elles définissent en compréhension deux ensembles.

**Exercice 1** Montrer que les structures suivantes sont des structures partiellement ordonnées inductives :

**Question 1.1**  $(\mathbb{P}(E), \subseteq)$  avec  $E$  un ensemble quelconque.

**Question 1.2**  $(E^\perp, \sqsubseteq)$  tel que

1.  $E^\perp = E \cup \perp$  (et  $\perp \notin E$ )
2.  $\sqsubseteq \subseteq E \times E$  : soit  $x \in E$  et  $y \in E$   $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow (x = \perp \vee x = y)$

**Question 1.3** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. Montrer que la structure  $(A \leftrightarrow B, \sqsubseteq)$  est une structure partiellement ordonnée inductive.

**Exercice 2** On rappelle qu'une fonction continue au sens de la topologie de Scott est monotone croissante. Indiquer et montrer si les fonctionnelles suivantes sont monotones et / ou continues).

1.  $(F_1(f))(x) \hat{=} \text{if } (\forall y \in \mathbb{Z}. f(y) = y) \text{ then } f(x) \text{ else } \perp$
2.  $(F_2(f))(x) \hat{=} \text{if } x \notin \text{dom}(f) \text{ then } 0 \text{ else } \perp$
3.  $(F_3(f))(x) \hat{=} \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } f(x+1)$

$\perp$  est une expression qui signifie que c'est une valeur indéfinie.

**Question 2.1**  $(F_1(f))(x) \hat{=} \text{if } (\forall y \in \mathbb{Z}. f(y) = y) \text{ then } f(x) \text{ else } \perp$

**Question 2.2**  $(F_2(f))(x) \hat{=} \text{if } x \notin \text{dom}(f) \text{ then } 0 \text{ else } \perp$

**Question 2.3**  $(F_3(f))(x) \hat{=} \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } f(x+1)$



**Exercice 3** Déterminer les points-fixes des fonctionnelles suivantes et leur plus petit point-fixe, s'ils existent. On travaille dans  $\mathbb{Z}$ .

1.  $F_1(f)(x) \hat{=} \text{if } f(x) \equiv 0 \text{ then } 1 \text{ else } 0$  et expliquer si le programme *f1* a du sens et ce qu'il calcule :
2.  $F_2(f)(x) \hat{=} \text{if } f(x) \equiv 0 \text{ then } 0 \text{ else } 1$
3.  $F_3(f)(x) \hat{=} \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } f(x+1)$

**Exercice 4** Soit  $E = \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ , soit la fonctionnelle  $\tau \in E \leftrightarrow E$  définie par :

$$(\tau(F))(x) \hat{=} \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x \cdot F(x-1)$$

1. Calculer  $\tau(\emptyset)$ ,  $\tau^2(\emptyset) = \tau(\tau(\emptyset))$ ,  $\tau^3(\emptyset)$ . En déduire  $\tau^i(\emptyset)$  et le démontrer par récurrence.
2. En déduire le plus petit point fixe.

**Question 4.1** Calculer  $\tau(\emptyset)$ ,  $\tau^2(\emptyset) = \tau(\tau(\emptyset))$ ,  $\tau^3(\emptyset)$ . En déduire  $\tau^i(\emptyset)$  et le démontrer par récurrence.

**Question 4.2** En déduire le plus petit point fixe.

**Exercice 5** Soit la fonctionnelle  $\tau \in (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F})$  :

$$(F(f))(x) \hat{=} \text{if } x > 100 \text{ then } x-10 \text{ else } f(f(x+11))$$

**Question 5.1** Montrez que  $\mu F \sqsubseteq g$  avec

$$g(x) \hat{=} \text{if } x > 100 \text{ then } x-10 \text{ else } 91$$

**Question 5.2** Ecrire une fonction C calculant cette fonction et étudier sa correction.

**Exercice 6** On considère une fonction f5 définie par le code C suivant :

```
int f5(int x)
{ if (x==0)
  { return (0); }
  else
  { if (x > 0)
    { return (2-f5(1-x)); }
    else
    { /* x < 0 */
      return (f5(-x)); }
    }
}
```

**Question 6.1** Traduire cette définition en une définition fonctionnelle qui précisera le domaine du problème.

**Question 6.2** Soient les définitions suivantes où  $\mathcal{F}$  désigne la fonctionnelle définie dans la question précédente :

$$\begin{aligned} - \mathcal{F}^{2n} &= \{(p, v_p) | 0 \leq p < n \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(p, v_p) | 0 > p \geq -(n-1) \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(n, g(n))\} \\ - \mathcal{F}^{2n+1} &= \{(p, v_p) | 0 \leq p < n \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(p, v_p) | 0 > p \geq -(n-1) \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(n, g(n)), (-n, g(-n))\} \end{aligned}$$

Montrer qu'elles sont correctes en utilisant une récurrence.

**Question 6.3** En déduire que  $\mu \mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup \mathcal{F}^3 \cup \dots \cup \mathcal{F}^{2n} \cup \mathcal{F}^{2n+1} \dots$

**Question 6.4** Montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathcal{F}^{2p} \cup \mathcal{F}^{2p+1}$

**Question 6.5** Montrer que  $\mu \mathcal{F}$  vérifie la propriété  $\mu \mathcal{F} \sqsubseteq g$  où  $g(x) = \text{if odd}(x) \text{ then } 2 \text{ else } 0$  fi

**Question 6.6** En déduire que  $\mu \mathcal{F} = g$ .

**Exercice 7** Soit la fonction définie comme suit :  $F(f)(x) = \begin{cases} \text{if } x = p \text{ then } p \\ \text{else if } x = q \text{ then } q \\ \text{else } f(x+p+q) \\ \text{fi} \end{cases}$ .

On suppose que  $p$  et  $q$  sont deux constantes non nulles entières positives distinctes et que  $F$  est une fonction partielle ( $\in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$ ). On se place dans le cadre de la topologie de Scott sur l'espace  $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$ ,  $\sqsubseteq$  où  $f \sqsubseteq g$  signifie que  $f$  est moins définie que  $g$  (ou  $\text{graph}(f) \subseteq \text{graph}(g)$ ).

**Question 7.1** Expliquez clairement pourquoi l'équation  $F(f) = f$  admet un plus petit point-fixe.

**Question 7.2** Ecrire une fonction  $C$  calculant le plus petit point-fixe  $\mu F$  de  $F$ .

**Question 7.3** 1. Calculer  $\mu F(p)$ ,  $\mu F(q)$ ,  $\mu F(-p)$ ,  $\mu F(-q)$ .  
2. Calculer pour  $k$  entier naturel,  $\mu F(-(k+1) \cdot p - k \cdot q)$  et  $\mu F(-(k+1) \cdot q - k \cdot p)$

**Question 7.4** Donnez une expression simplifiée de la fonction  $\mu F$ . Pour cela, on pourra utiliser la caractérisation de  $\mu F$  par le théorème du point-fixe pour les fonctions continues au sens de Scott.

**Exercice 8** (invariant inductif)

On rappelle les définitions suivantes. Un modèle relationnel  $\mathcal{MS}$  pour un système  $S$  est une structure

$$(Th(s, c), x, \text{VALS}, \text{INIT}(x), \{r_0, \dots, r_n\})$$

où

- $Th(s, c)$  est une théorie définissant les ensembles, les constantes et les propriétés statiques de ces éléments.
- $x$  est une liste de variables flexibles.
- $\text{VALS}$  est un ensemble de valeurs possibles pour  $x$ .
- $\{r_0, \dots, r_n\}$  est un ensemble fini de relations reliant les valeurs avant  $x$  et les valeurs après  $x'$ .
- $\text{INIT}(x)$  définit l'ensemble des valeurs initiales de  $x$ .

On note  $\text{NEXT} \stackrel{\text{def}}{=} r_0 \vee \dots \vee r_n$ . Une propriété  $S$  est une propriété de sûreté pour le système  $S$ , si  $\forall y, x \in \text{VALS}. \text{Init}(y) \wedge \text{NEXT}^*(y, x) \Rightarrow x \in S$ . On définit la fonction suivante  $F$  sur  $\mathcal{P}(\text{VALS})$  à valeurs dans  $\mathcal{P}(\text{VALS})$  :  $F(X) = \text{Init} \cup \text{Next}[X]$  où  $\text{Next}[X]$  est l'ensemble des états accessibles à partir de  $X$  par  $\text{Next}$ . On rappelle aussi que  $x$  peut être une variable ou une liste de variables ;  $\text{VALS}$  est donc un ensemble de valeurs ou de tuples de valeurs correspondant à  $x$ .

**Question 8.1** Montrer que  $(\mathcal{P}(\text{VALS}), \subseteq, \emptyset, \cup, \cap)$  est un treillis complet.

**Question 8.2** Montrer que  $F$  est croissante monotone.

**Question 8.3** Montrer que  $F$  admet un plus petit point-fixe noté  $\mu F$ .

**Question 8.4** Montrer que  $\mu F$  est un invariant inductif de  $F$  et que c'est le plus petit.

**Question 8.5** Montrer que, pour toute propriété de sûreté  $S$ ,  $\mu F \subseteq S$ .

**Question 8.6** On suppose que  $\text{VALS}$  est finie. Montrer qu'il existe un algorithme pour vérifier qu'une propriété  $S$  est une propriété de sûreté pour un système donné défini comme ci-dessus.

**Exercice 9 Question 9.1** Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.

```
/*@ requires z == exp1 ;
   ensures \result == exp2;
*/

int q2(int x, int y, int z){

    /*@ assert B(x, y, z) ; */
    x = y+1;
    /*@ assert A(x, y, z); */
```

```

y = x + z;
/*@ assert y == 3 + x ; */
return y;
}

```

En utilisant l'opérateur *wp*, proposer des assertions pour  $A(x, y, z)$  et  $B(x, y, z)$  et des valeurs pour les expressions *expr1* et *expr2*, afin que le contrat soit correct.

**Question 9.2** Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.

```

/*@ requires A(x,y,z) ;
   ensures \result == 6 ;
*/

int q2(int x, int y, int z){

    /* @ assert B(x,y,z) ; */
    x = y+1;
    /* @ assert C(x,y,z); */
    y = x + z;
    /* @ assert D(x,y,z); */
    return y;
}

```

En utilisant l'opérateur *wp*, proposer des assertions pour  $A(x, y, z)$ ,  $B(x, y, z)$ ,  $C(x, y, z)$  et  $D(x, y, z)$ , afin que le contrat soit correct.

**Question 9.3** Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.

```

/*@ requires A;
   ensures \result == 0;
   assigns \nothing;
*/

int f(int c) {
    //@ assert 49 == 49 && 2*c == 2*c && 49+2*c+1 == (c+1)*(c+1);
    int x = 49;
    //@ assert x == 49 && 2*c == 2*c && x+2*c+1 == (c+1)*(c+1);
    int z = 2*c;
    //@ assert x == 49 && z == 2*c && x+z+1 == (c+1)*(c+1);
    int y = (2*c+1)*(2*c+1);
    /* @ assert B;
    //@ assert x == 49 && z == 2*c && x+z+1 == (c+1)*(c+1);
    y = x+z+1;
    //@ assert x == 49 && z == 2*c && y == (c+1)*(c+1);
    return (0);
}

```

En utilisant l'opérateur *wp*, proposer des assertions pour *A* et *B*, afin que le contrat soit correct.

**Question 9.4** Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.

```

/*@ requires A(x,y,z) ;
   ensures \result == 12 ;
*/

int q2(int x, int y, int z){

    /* @ assert B(x,y,z) ; */

```

```

x = y+z;
/* @ assert C(x,y,z); */
y = x + 1;
/* @ assert D(x,y,z); */
return y;
}

```

En utilisant l'opérateur *wp*, proposer des assertions pour  $A(x, y, z)$ ,  $B(x, y, z)$ ,  $C(x, y, z)$  et  $D(x, y, z)$ , afin que le contrat soit correct.

**Question 9.5** Soit le petit programme suivant annoté mais incomplet.

```

33/*@ requires A;
ensures \result == 0;
    assigns \nothing;
*/

int f(int c) {
    //@ assert (2*c == 14 ==> 49 == 49 && 2*c == 2*c && 49+2*c +1 == (c+1)*(c+1))
    && (2*c != 14 ==> 49 == 49 && 2*c == 2*c && 49+1== 50);
    if
        int x = 49;
        int z = 2*c;

        //@ assert (z == 14 ==> x == 49 && z == 2*c && x+z+1 == (c+1)*(c+1));
        //@ assert (z != 14 ==> x == 49 && z == 2*c && x+1== 50);

        //@ assert (z == 14 ==> x == 49 && z == 2*c && x+z+1 == (c+1)*(c+1))
        && (z != 14 ==> x == 49 && z == 2*c && x+1== 50);
        if z == 14
        {
            //@ assert x == 49 && z == 2*c && x+z+1 == (c+1)*(c+1);
            int y = (2*c+1)*(2*c+1);
            //@ assert B
        ;    //@ assert x == 49 && z == 2*c && x+z+1 == (c+1)*(c+1);
            y= x+z+1;
            //@ assert x == 49 && z == 2*c && y == (c+1)*(c+1);

        }
        else
        {
            //@ assert C;
            //@ assert x == 49 && z == 2*c && x+1== 50;
            y= x+1;
            //@ assert x == 49 && z == 2*c && y == 50;

        }
        //@ assert (x == 49 && z == 2*c && y == (c+1)*(c+1)) || (x == 49 && z ==
        2*c && y == 50);

        return (0);
    }
}

```

En utilisant l'opérateur *wp*, proposer des assertions pour  $A$  et  $B$ , afin que le contrat soit correct.