
Cours MALG & MOVEX

Modélisation, spécification et vérification (II)

Dominique Méry
Telecom Nancy, Université de Lorraine
(4 mars 2025 at 10:10 A.M.)

Année universitaire 2024-2025

① Transition Systems

- Overview of Transition Systems as Modelling Tool
- Expression of transition systems
- Main concepts of discrete transition system
- Expression of discrete transition systems

② Transition system in action with TLA/TLA⁺

- GCD
- Simple Access Control
- TLA / TLA⁺

③ Summation of the n first integers

④ Principe(s) d'induction

⑤ Méthode de preuves de propriétés d'invariance

① Transition Systems

Overview of Transition Systems as Modelling Tool

Expression of transition systems

Main concepts of discrete transition system

Expression of discrete transition systems

② Transition system in action with TLA/TLA⁺

GCD

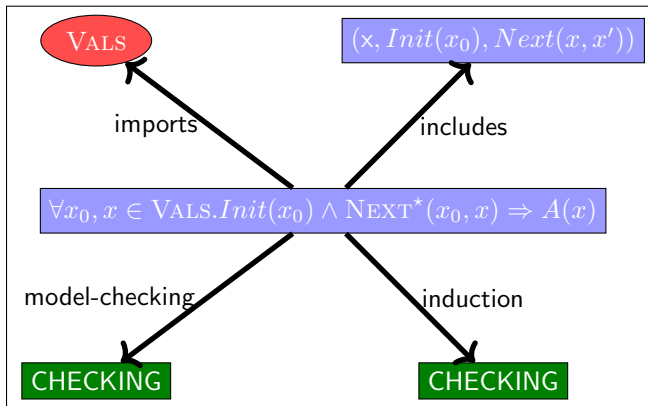
Simple Access Control

TLA / TLA⁺

③ Summation of the n first integers

④ Principe(s) d'induction

⑤ Méthode de preuves de propriétés d'invariance



Transition system

A transition system \mathcal{ST} is given by a set of states Σ , a set of initial states $Init$ and a binary relation \mathcal{R} on Σ .

- ▶ The set of terminal states $Term$ defines specific states, identifying particular states associated with a termination state and this set can be empty, in which case the transition system does not terminate.

event

A transformation is caused by an event that updates a temperature from a sensor, or a computer updating a computer variable, or an actuator sending a signal to a controlled entity.

An observation of a system S is based on the following points :

- ▶ a state $s \in \Sigma$ allows you to observe elements and reports on these elements, such as the number of people in the meeting room or the capacity of the room : $s(np)$ and $s(cap)$ are two positive integers.
- ▶ a relationship between two states s and s' observes a transformation of the state s into a state s' and we will note $s \xrightarrow{R} s'$ which expresses the observation of a relationship R :
 $R = s(np) \in 0..s(cap)-1 \wedge s'(np) = s(np)+1 \wedge s'(cap) = s(cap)$ is an expression of R observing that one more person has entered the room.
- ▶ a trace $s_0 \xrightarrow{R_0} s_1 \xrightarrow{R_1} s_2 \xrightarrow{R_2} s_3 \xrightarrow{R} \dots \xrightarrow{R_{i-1}} s_i \xrightarrow{R_i} \dots$ is a trace generated by the different observations $R_0, \dots R_p, \dots$

- ▶ observing changes of state that correspond either to physical or biological phenomena or to artefactual structures such as a program, a service or a platform.
- ▶ An observation generally leads to the identification of a few possible transformations of the observed state, and the closed-model hypothesis follows naturally.
- ▶ One consequence is that there are visible transformations and invisible transformations.
- ▶ These invisible transformations of the state are expressed by an identity relation called event skip (or stuttering [?]).
- ▶ A modelling produces a closed model with a skip event modelling what is not visible in the observed state.

- ▶ a language of assertions \mathcal{L} (or a language of formulae) is supposed to be given : $\mathcal{P}(\Sigma)$ (the set of parts of Σ)
- ▶ $\varphi(s)$ (or $s \in \hat{\varphi}$) means that φ is true in s .
- ▶ Properties of a system S which interest us are the state properties expressing that *nothing bad can happen*.
- ▶ Examples : *the number of people in the meeting room is always smaller than the maximum allowed by law* or *the computer variable storing the number of wheel revolutions is sufficient and no overflow will happen*.
- ▶ Safety properties : the partial correctness (PC) of an algorithm A with respect to its pre/post specifications (PC), the absence of errors at runtime (RTE) ...
- ▶ Properties are expressed in the language \mathcal{L} whose elements are combined by logical connectors or by instantiations of variable values in the computer sense called flexible.

- ▶ hypothesis : a system S is modelled by a set of states Σ , and $\Sigma \stackrel{def}{=} \text{Var} \longrightarrow D$ where Var is the variable (or list of variables) of the system S and D is the domain of possible values of variables.
- ▶ The interpretation of a formula P in a state $s \in \Sigma$ is denoted $\llbracket P \rrbracket(s)$ or sometimes $s \in \hat{P}$.
- ▶ A distinction is made between flexible variable symbols x and logical variable symbols v , and constant symbols c are used.

- ① $\llbracket \mathbf{x} \rrbracket(s) = s(\mathbf{x}) = x : x$ is the value of the variable \mathbf{x} in s .
- ② $\llbracket \mathbf{x} \rrbracket(s') = s'(\mathbf{x}) = x' : x'$ is the value of the variable \mathbf{x} in s' .
- ③ $\llbracket c \rrbracket(s)$ is the value of c in s , in other words the value of the constant c in s .
- ④ $\llbracket \varphi(x) \wedge \psi(x) \rrbracket(s) = \llbracket \varphi(x) \rrbracket(s)$ et $\llbracket \psi(x) \rrbracket(s)$ where *and* is the classical interpretation of symbol \wedge according to the truth table.
- ⑤ $\llbracket \mathbf{x} = 6 \wedge y = \mathbf{x} + 8 \rrbracket(s) \stackrel{def}{=} \llbracket \mathbf{x} \rrbracket(s) = \llbracket 6 \rrbracket(s)$ **and** $\llbracket y \rrbracket(s) = \llbracket x \rrbracket(s) + \llbracket 8 \rrbracket(s) = (x = 6$ **and** $y = x + 8$ where y is a logical variable distinct of \mathbf{x} and where $\llbracket \mathbf{x} \rrbracket(s) = s(\mathbf{x}) = x$.

- ▶ $\llbracket x \rrbracket(s)$ is the value of x in s and its value will be distinguished by the font used : x is the `tt` font of \LaTeX and x is the math font of \LaTeX .
- ▶ Using the name of the variable x as its current value, i.e. x and $\llbracket x \rrbracket(s')$ is the value of x in s' and will be noted x' .
- ▶ The transition relation as a relation linking the state of the variables in s and the state of the variables in s' using the prime notation as defined by L. Lamport for TLA.
- ▶ Types of variable depending on whether we are talking about the computer variable, its value or whether we are defining constants such as np , the number of processes, or π , which designates the constant π .
- ▶ a current observation refers to a current state for both enduring and perdurant information data in the sense of the Dines Bjørner.

flexible variable

A flexible variable x is a name related to a perdurant information according to a state of the (current observed) system :

- ▶ x is the current value of x in other words the value at the observation time of x .
- ▶ x' is the next value of x in other words the value at the next observation time of x .
- ▶ x_0 is the initial value of x in other words the value at the initial observation time of x .

A logical variable x is a name related to an endurant entity designated by this name.

state property of a system

Let be a system S whose flexible variables x are the elements of $\mathcal{Var}(S)$. A property $P(x)$ of S is a logical expression involving ,freely the flexible variables x and whose interpretation is the set of values of the domain of x : $P(x)$ is true in x , if the value x satisfies $P(x)$.

For each property $P(x)$, we can associate a subset of D denoted \hat{P} and, in this case, $P(x)$ is true in x . is equivalent to $x \in \hat{P}$.

Examples of property

- ▶ $P_1(x) \stackrel{def}{=} x \in 18..22 : x$ is a value between 18 and 22 and $\hat{P}_1 = \{18, 19, 20, 21, 22\}$.
- ▶ $P_2(p) \stackrel{def}{=} p \subset PEOPLE \wedge card(p) \leq n : p$ is a set of persons and that set has at most n elements and $\hat{P}_2 = \{p_1 \dots p_n\}$. In this example, we use a logical variable n and a name for a constant $PEOPLE$.

basic set of a system S

The list of symbols s_1, s_2, \dots, s_p corresponds to the list of basic set symbols in the D domain of S and $s_1 \cup \dots \cup s_p \subseteq D$.

constants of system S

The list of symbols c_1, c_2, \dots, c_q corresponds to the list of symbols for the constants of S .

Examples of constant and set

- ▶ *fred* is a constant and is linked to the set *PEOPLE* using the expression $fred \in PEOPLE$ which means that *fred* is a person from *PEOPLE*.
- ▶ *aut* is a constant which is used to express the table of authorisations associated with the use of vehicles. the expression $aut \subseteq PEOPLE \times CARS$ where *CARS* denotes a set of cars.

axiom of system S

An axiom $ax(s,c)$ of S is a logical expression describing a constant or constants of S and can be defined as an expression depending on symbols of constants expressing a set-theoretical expression using symbols of sets and symbols of constants already defined.

Examples of axiom

- ▶ $ax1(fred \in PEOPLE) : fred \text{ is a person from the set } PEOPLE$
- ▶ $ax2(suc \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \wedge (!i.i \in \mathbb{N} \Rightarrow suc(i) = i+1)) : The \text{ function } suc \text{ is the total function which associates any natural } i \text{ with its successor. successor}$
- ▶ $ax3(\forall A.A \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in \mathbb{N} \wedge suc[A] \subseteq A \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq A) : This \text{ axiom states the induction property for natural numbers. It is an instantiation of the fixed-point theorem.}$
- ▶ $ax4(\forall x.x = 2 \Rightarrow x+2 = 1) : This \text{ axiom poses an obvious problem of consistency and care should be taken not to use this kind of statement as axiom.}$

.....

⊠ Definition(axiomatics for S)

The list of axioms of S is called the axiomatics of S and is denoted $AX(S, s, c)$ where s denotes the basic sets and c denotes the constants of S.

.....

.....

⊠ Definition(theorem for S)

A property $P(s, c)$ is a theorem for S, if $AX(S, s, c) \vdash P(s, c)$ is a valid sequent.

Theorems for S are denoted by $TH(S, s, c)$.

.....

Let s, s' be two states of S ($s, s' \in \mathcal{Var}(S) \longrightarrow \mathbf{VALS}$). $s \xrightarrow{R} s'$ will be written as a relation $R(x, x')$ where x and x' designate values of x before and after the observation of R.

.....

⊠ Definition(event)

Let $\mathcal{Var}(S)$ be the set of flexible variables of S. Let s be the basis sets and c the constants of S. An event e for S is a relational expression of the form $R(s, c, x, x')$ denoted $RA(e)(s, c, x, x')$.

.....

⊠ Definition(event-based model of a system)

Let $\mathcal{Var}(S)$ be the set of flexible variables of S denoted x . Let s be the list of basis sets of the system S . Let c be the list of constants of the system S . Let D be a domain containing sets s . An event-based model for a system S is defined by

$$(AX(s, c), x, \text{VALS}, \text{Init}(x), \{e_0, \dots, e_n\})$$

where

- ▶ $AX(s, c)$ is an axiomatic theory defining the sets, constants and static properties of these elements.
- ▶ $\text{Init}(x)$ defines the possible initial values of x .
- ▶ $\{e_0, \dots, e_n\}$ is a finite set of events of S and e_0 is a particular event present in each event-based model defined by $BA(e_0)(x, x') = (x' = x)$.

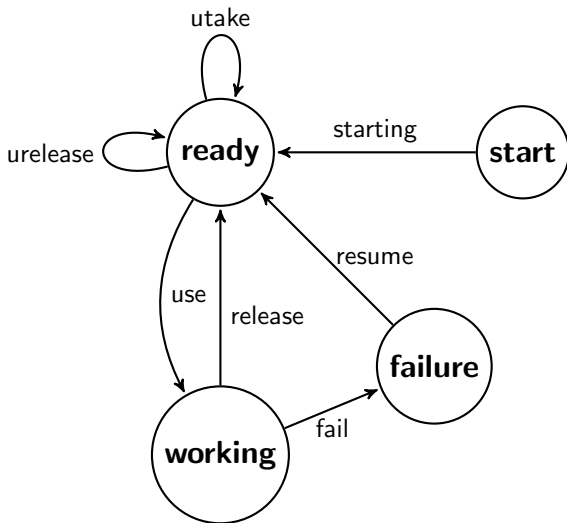
The event-based model is denoted

$$EM(s, c, x, \text{VALS}, \text{Init}(x) \{e_0, \dots, e_n\}) = (AX(s, c), x, \text{VALS}, \text{Init}(x), \{e_0, \dots, e_n\}).$$

-

A property $P(x)$ is a safety property for the system S , if

.....



- ▶ there is an implicit control variable $pc \in \{\mathbf{start}, \mathbf{ready}, \mathbf{working}, \mathbf{failure}\}$ expressing the current visited state.

```
ℓ0[Q := 0];  
ℓ1[R := X];  
IF ℓ5[Y > 0]  
    WHILE ℓ2[R ≥ Y]  
        ℓ3[Q := Q + 1];  
        ℓ4[R := R - Y]  
    ENDWHILE  
ELSE  
    ℓ6[skip]  
ENDIF
```



A small system as an automaton

$x \leq 5, x := x+1$



A small system as an automaton

$$x \leq 5, x := x+1$$

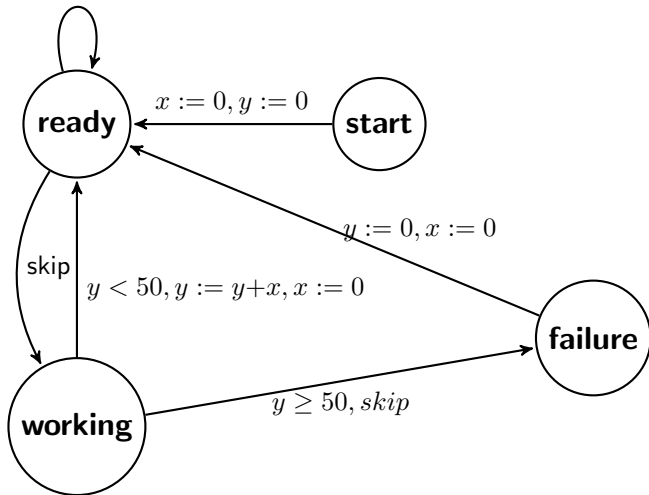

► safety1 : $0 \leq x \leq 5$

A small system as an automaton

$$x \leq 5, x := x+1$$


► safety1 : $0 \leq x \leq 5$ et ...

A small system as an automaton

$$x \leq 5, x := x+1$$


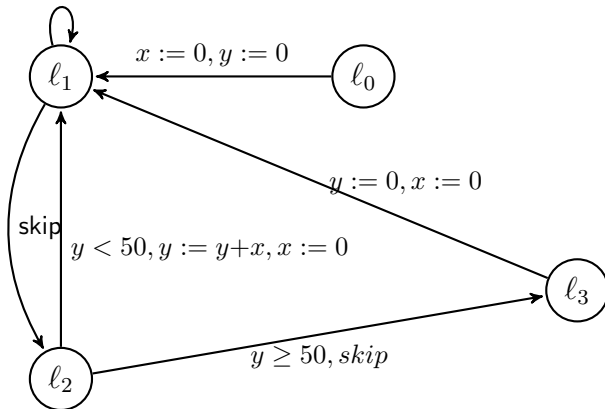
► safety1 : $0 \leq x \leq 5$ et ... safety2 : $0 \leq y \leq 56$

A small system as an automaton

$x \leq 5, x := x+1$



A small system as an automaton

$$x \leq 5, x := x+1$$


- ▶ $\text{safety1} : 0 \leq x \leq 5$ et $\text{safety2} : 0 \leq y \leq 56$
- ▶ $\text{skip} = x := x, y := y$
- ▶ $\text{skip} = \text{TRUE}, x := x, y := y = \text{TRUE}, \text{skip}$

Transition between two control states



Transition between two control states



Transition between two control states



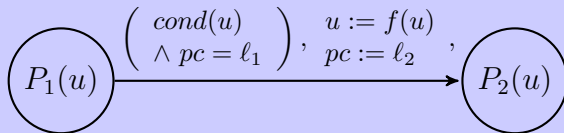
Transition between two control states



Transition between two control states



Transition between two predicates



Un modèle relationnel \mathcal{MS} pour un système S est une structure

$$(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$$

où

- ▶ $Th(s, c)$ est une théorie définissant les ensembles, les constantes et les propriétés statiques de ces éléments.
- ▶ X est une liste de variables flexibles.
- ▶ $VALS$ est un ensemble de valeurs possibles pour X .
- ▶ $\{r_0, \dots, r_n\}$ est un ensemble fini de relations reliant les valeurs avant x et les valeurs après x' .
- ▶ $INIT(x)$ définit l'ensemble des valeurs initiales de X .
- ▶ la relation r_0 est la relation $Id[VALS]$, identité sur $VALS$.

.....

☒ Definition

Soit $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel d'un système \mathcal{S} . La relation NEXT associée à ce modèle est définie par la disjonction des relations r_i :

$$NEXT \stackrel{def}{=} r_0 \vee \dots \vee r_n$$

.....

pour une variable x , nous définissons les valeurs suivantes :

- ▶ x est la valeur courante de la variable X.
- ▶ x' est la valeur suivante de la variable X.
- ▶ x_0 ou \underline{x} sont la valeur initiale de la variable X.
- ▶ \bar{x} ou x_f est la valeur finale de la variable X, quand cette notion a du sens.

.....

⊠ Definition(assertion)

Soit $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel M d'un système \mathcal{S} . Une propriété A est une propriété assertionnelle de sûreté pour le système \mathcal{S} , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

.....

.....

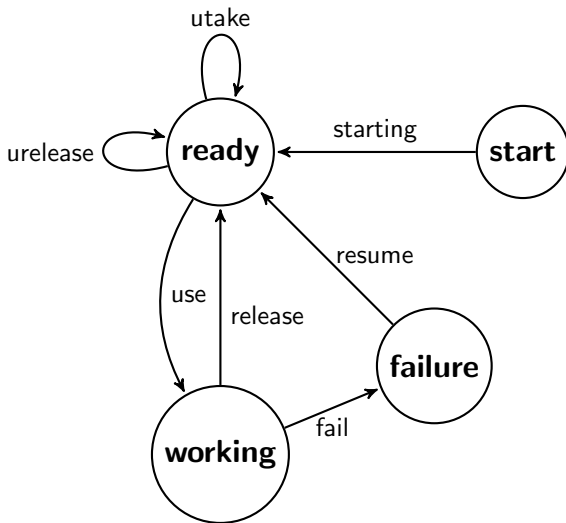
⊠ Definition(relation)

Soit $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel M d'un système \mathcal{S} . Une propriété R est une propriété relationnelle de sûreté pour le système \mathcal{S} , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x).$$

.....

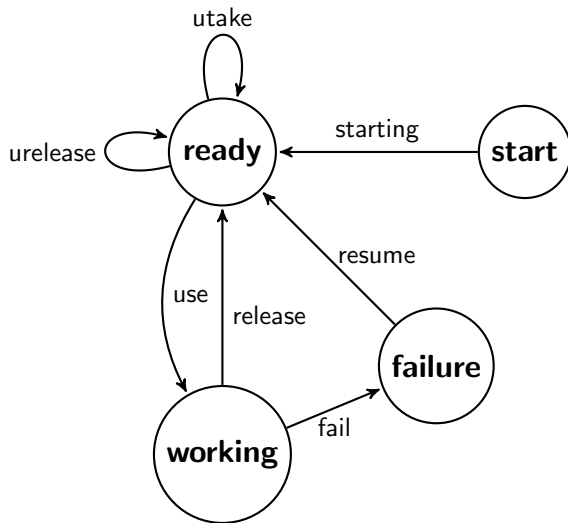
- ▶ P. et R. Cousot développent une étude complète des propriétés d'invariance et de sûreté en mettant en évidence correspondances entre les différentes méthodes ou systèmes proposées par Turing, Floyd, Hoare, Wegbreit, Manna ... et reformulent les principes d'induction utilisés pour définir ces méthodes de preuve (voir les deux cubes des 16 principes).



```
 $\ell_0$   $[Q := 0];$   
 $\ell_1$   $[R := X];$   
IF  $\ell_5 [Y > 0]$   
    WHILE  $\ell_2 [R \geq Y]$   
         $\ell_3 [Q := Q + 1];$   
         $\ell_4 [R := R - Y]$   
    ENDWHILE  
ELSE  
     $\ell_6 [skip]$   
ENDIF
```



- ▶ Un automate a des états de contrôle : compteur ordinal d'un programme
- ▶ Un automate a des étiquettes : événements, actions, ...
- ▶ Un automate peut aussi avoir des variables explicites qui sont modifiées par des actions
- ▶ Un automate décrit des exécutions possibles qui sont des chemins suivant les informations de l'automate.



$x \leq 5, x := x+1$



$x \leq 5, x := x+1$



► safety1 : $0 \leq x \leq 5$

Un petit système en tant qu'automate

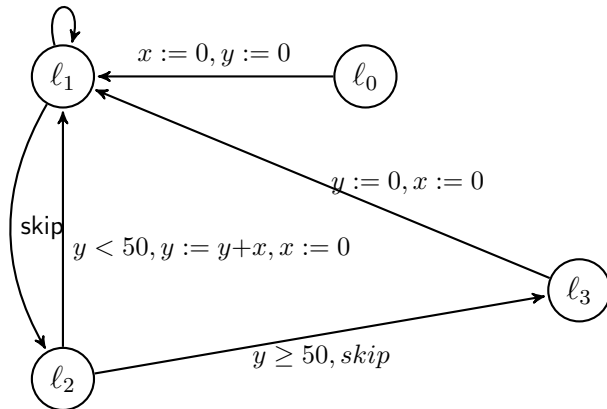
$$x \leq 5, x := x+1$$


► safety1 : $0 \leq x \leq 5$ et ...

$$x \leq 5, x := x+1$$


► safety1 : $0 \leq x \leq 5$ et ... safety2 : $0 \leq y \leq 56$

$x \leq 5, x := x+1$



$x \leq 5, x := x+1$



- ▶ $\text{safety1} : 0 \leq x \leq 5$ et $\text{safety2} : 0 \leq y \leq 56$
- ▶ $\text{skip} = x := x, y := y$
- ▶ $\text{skip} = \text{TRUE}, x := x, y := y = \text{TRUE}, \text{skip}$

Transition entre deux états de contrôle



Transition entre deux états de contrôle



Transition entre deux états de contrôle



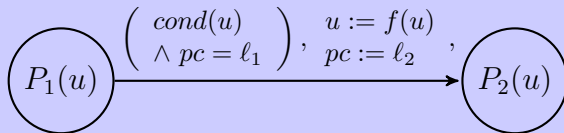
Transition entre deux états de contrôle



Transition entre deux états de contrôle



Transition entre deux prédicats



MODULE *pgcd*

EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANT *a, b*

VARIABLES *x, y*

Init $\triangleq x = a \wedge y = b$

a1 $\triangleq x > y \wedge x' = x - y \wedge y' = y$

a2 $\triangleq x < y \wedge y' = y - x \wedge x' = x$

over $\triangleq x = y \wedge x' = x \wedge y' = y$

Next $\triangleq a_1 \vee a_2 \vee over$

test $\triangleq x \neq y$

```

----- MODULE pgcd -----
EXTENDS Naturals,TLC
CONSTANTS a,b
VARIABLES  x,y

-----
Init == x=a /\ y=b
-----

a1 == x > y /\ x'=x-y /\ y'=y
a2 == x < y /\ y'=y-x /\ x'=x
over == x=y /\ x'=x /\ y'=y
-----

Next == a1 \/ a2 \/ over
-----

test == x # y
=====

```


MODULE *ex1*

modules de base importables

EXTENDS *Naturals, TLC*

un système contrôle l'accès à une salle dont la capacité est de 19 personnes ; écrire un modèle de ce système en vérifiant la propriété de sûreté

VARIABLES np

Première tentative

$$\text{entrer} \triangleq np' = np + 1$$
$$\text{sortir} \triangleq np' = np - 1$$
$$\text{next} \triangleq \text{entrer} \vee \text{sortir}$$
$$\text{init} \triangleq np = 0$$

Seconde tentative

$$\text{entrer}_2 \triangleq np < 19 \wedge np' = np + 1$$
$$\text{next}_2 \triangleq \text{entrer}_2 \vee \text{sortir}$$

Troisième tentative

$$\textit{sortir}_2 \triangleq np > 0 \wedge np' = np - 1$$

$$\textit{next}_3 \triangleq \textit{entrer}_2 \vee \textit{sortir}_2$$

$$\textit{safety}_1 \triangleq np \leq 19$$

$$\textit{question}_1 \triangleq np \neq 6$$

Soit $(Th(s, c), x, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel M d'un système \mathcal{S} . Une propriété A est une propriété de sûreté pour le système \mathcal{S} , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

Soit $(Th(s, c), x, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel M d'un système \mathcal{S} . Une propriété A est une propriété de sûreté pour le système \mathcal{S} , si

$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$

- ▶ x est une variable ou une liste de variable : VARIABLES x
- ▶ $Init(x)$ est une variable ou une liste de variable : `init == Init(x)`

Soit $(Th(s, c), x, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel M d'un système \mathcal{S} . Une propriété A est une propriété de sûreté pour le système \mathcal{S} , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

- ▶ x est une variable ou une liste de variable : `VARIABLES x`
- ▶ $Init(x)$ est une variable ou une liste de variable : `init == Init(x)`
- ▶ $NEXT^*(x_0, x)$ est la définition de la relation définissant ce que fait le système : `Next == a1 \/\ a2 \/\ \/\ an`

- ▶ TLA (Temporal Logic of Actions) sert à exprimer des formules en logique temporelle : $\Box P$ ou *toujours P*
- ▶ TLA⁺ est un langage permettant de déclarer des constantes, des variables et des définitions :
 - `<def> == <expression>` : une définition `<def>` est la donnée d'une expression `<expression>` qui utilise des éléments définis avant ou dans des modules qui *étendent* ce module.
 - Une variable `x` est soit sous la forme `x` soit sous la forme `x'` : `x'` est la valeur de `x` après.
 - Un module a un nom et rassemble des définitions et il peut être une extension d'autres modules.
 - `[f EXCEPT! [i]=e]` est la fonction `f` où seule la valeur en `i` a changé et vaut `e`.
- ▶ Une configuration doit être définie pour évaluer une spécification

- ▶ Limitation des actions :

$$\begin{aligned} \text{nom} &\triangleq \\ &\wedge \text{cond}(v, w) \\ &\wedge v' = e(v, w) \\ &\wedge w' = w \end{aligned}$$

- ▶ $e(v, w)$ doit être codable en Java.
- ▶ Modules standards : Naturals, Integers, TLC ...

- ▶ Téléchargez l'application le site de Microsoft pour votre ordinateur.
- ▶ Ecrivez des modèles et testez les !
- ▶ Limitations par les domaines des variables.



Permettre un raisonnement symbolique quel que soit l'ensemble des états

Annotation versus commentaire de programmes ou d'algorithmes

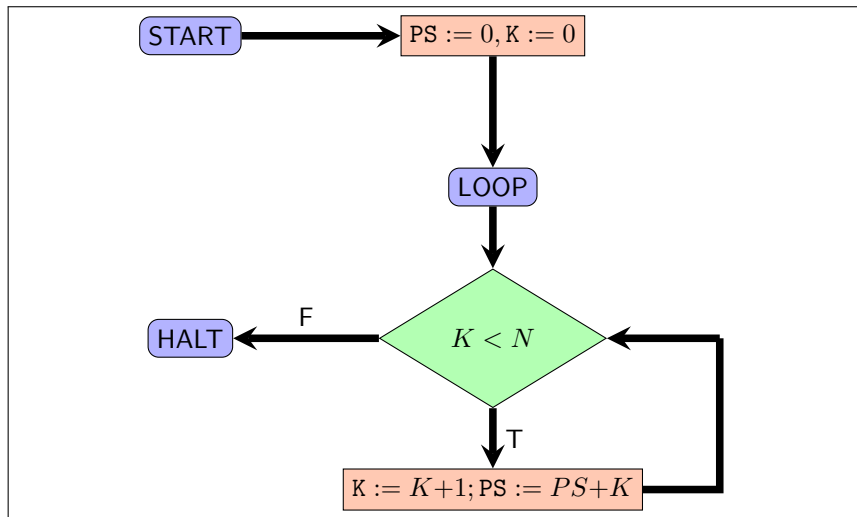
- ▶ Un programme ou un algorithme peuvent être annotés ou commentés.
- ▶ Un commentaire est une information pertinente destinée à être vue ou lue et qui a une importance relative dans l'esprit du concepteur.
- ▶ Un commentaire indique une information sur les données, sur les variables et donc sur l'état supposé du programme à l'exécution.
- ▶ Un commentaire est une annotation du texte du code qui nous permet de communiquer une information sémantique :
 - *à ce point, la variable k est plus petite sur n*
 - *l'indice e fait référence à une adresse licite de t et cette valeur est toujours positive*
 - *la somme des variables est positive*
- ▶ Les annotations peuvent être systématisées et obéir à une syntaxe spécifique définissant le langage d'annotations ;

```
/*@ assert l1:  z >= 3 && y == 3; */
z = z +y;
/*@ assert l2:  z >= 6 && y == 3; */
```

Calculer la somme des n premiers entiers (v0)

```
int fS(int n) {  
    int ps = 0;  
    int k = 0;  
    while (k < n) {  
        k = k + 1;  
        ps = ps + k;  
    };  
    return ps;  
}
```

Calculer la somme des n premiers entiers (flowchart)



Calculer la somme des n premiers entiers (v0)

```
// pre n>=0;
// post ps == n*(n+1) / 2;
```

```
int fS(int n) {
    int ps = 0;
    int k = 0;
    while (k < n) {
        k = k + 1;
        ps = ps + k;
    };
    return ps;
}
```

```
int main()
{

}
```

Calculer la somme des n premiers entiers (v0)

```
// pre  $n \geq 0$ ;  
// post  $ps == n * (n + 1) / 2$ ;
```

```
int fS(int n) {  
    int ps = 0;  
    int k = 0;  
    while (k < n) {  
        //  $ps = k * (k + 1) / 2$ ;  
        k = k + 1;  
        ps = ps + k;  
    };  
    //  $ps = n * (n + 1) / 2$ ;  
    return ps;  
}
```

```
int main()  
{
```

Calculer la somme des n premiers entiers (v0)

```
#include <stdio.h>

int fS(int n) {
    int ps = 0;
    int k = 0;
    while (k < n) {
        k = k + 1;
        ps = ps + k;
    };
    return ps;
}

int main()
{
    int z = 3;
    printf("Value of z=%d is %d\n", z, fS(z));
    return 0;
}
```


- ▶ $\forall n \in \mathbb{N} : S(n) = \sum_{k=0}^n k$
- ▶ $\left[\begin{array}{l} IS(0) = 0 \\ n \geq 0, IS(n+1) = IS(n) + n \end{array} \right.$
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N} : S(n) = IS(n)$
- ▶
 - base 0 : $S(0) = 0$
 - induction $k+1$: $S(k+1) = S(k) + k + 1$
 - step $k+1$: $S(k+1) = S(k) + k + 1$
- ▶ $S(k) = ps$: current value of ps is $S(k)$
- ▶ $S(k-1) = ops$: current value of ops is $S(k-1)$
- ▶ step $k+1$: $ps = ops + k + 1$

Calculer la somme des n premiers entiers (v1)

```
#include <stdio.h>

int fS(int n) {
    int ps = 0;
    int k = 0;
    int ok=k, ops = 0;
    while (k < n) {
        ok=k;ops=ps;
        k = ok + 1;
        ps = ops + k;
    };
    return ps;
}

int main()
{
    int    z = 3;
    printf(" Value - for - z=%d - is -%d\n" , z , fS(z));
    return 0;
}
```

Calculer la somme des n premiers entiers (v2)

```
int fS(int n) {
    int ps = 0;
    int k = 0;
    int ok=k, ops = 0;
    while (k < n) {
        /*@ assert 0 <= k && k <= n
           && ps == S(k) && ops == S(ok);    */
        ok=k;ops=ps;
        k = ok + 1;
        ps = ops + k;
        /*@ assert 0 <= k && k <= n && ps == S(k)
           && ops == S(ok);    */
    };
    return ps;
}
```

Calculer la somme des n premiers entiers

```
/*@ axiomatic S {  
  @ logic integer S(integer n);  
  @ axiom S_0: S(0) == 0;  
  @ axiom S_i: \forall integer i; i > 0 => S(i) == S(i-1)+i;  
  @ } */  
  
/*@ requires n >= 0;  
  assigns \nothing ;  
  ensures \result == S(n);  
*/  
int fS(int n) {  
  int ps = 0;  
  int k = 0;  
  int ok=k, ops=ps;  
  /*@ loop invariant 0 <= k && k <= n && ps == S(k) && ops == S(ok) ;  
    loop assigns ps, k, ops, ok;  
  */  
  while (k < n) {  
    /*@ assert I0: 0 <= k && k <= n && ps == S(k) && ops == S(ok);   */  
    ops=ps; ok=k;  
    k = ok + 1;  
    ps = ops + k;  
    /*@ assert I1: 0 <= k && k <= n && ps == S(k) && ops == S(ok);   */  
  };  
  /*@ assert ps == S(n);   */  
  return ps;  
}
```


- ▶ Définition des fonctions mathématiques nécessaires pour exprimer le calcul de la somme des n premiers nombres entiers.
- ▶ Expression des résultats intermédiaires appelés *sommes partielles*
- ▶ Relation entre la preuve par induction et la forme du corps de l'itération.
- ▶ Induction et calcul sont liés.

- ▶ Définition des fonctions mathématiques nécessaires pour exprimer le calcul de la somme des n premiers nombres entiers.
- ▶ Expression des résultats intermédiaires appelés *sommes partielles*
- ▶ Relation entre la preuve par induction et la forme du corps de l'itération.
- ▶ Induction et calcul sont liés.

$$x_0 \xrightarrow{P} x \quad (1)$$

$$x_0 \xrightarrow{\star} x \quad (2)$$

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow x \quad (3)$$

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow x_n \xrightarrow{step} x \quad (4)$$

Soit $(Th(s, c), x, VALS, Init(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel M d'un système S.

Une propriété $A(x)$ est une propriété de sûreté pour le système S, si et seulement s'il existe une propriété d'état $I(x)$, telle que :

$$\forall x, x' \in VALS : \begin{cases} (1) \text{ } Init(x) \Rightarrow I(x) \\ (2) \text{ } I(x) \Rightarrow A(x) \\ (3) \text{ } I(x) \wedge NEXT(x, x') \Rightarrow I(x') \end{cases}$$

La propriété $I(x)$ est appelée un invariant inductif de S et est une propriété de sûreté particulière plus forte que les autres propriétés de sûreté.

- ▶ P. et R. Cousot développent une étude complète des propriétés d'invariance et de sûreté en mettant en évidence correspondances entre les différentes méthodes ou systèmes proposées par Turing, Floyd, Hoare, Wegbreit, Manna ... et reformulent les principes d'induction utilisés pour définir ces méthodes de preuve (voir les deux cubes des 16 principes).
- ▶ Deux types de principes sont proposés : assertionnel et relationnel.
- ▶ Nous utilisons l'expression de propriété de sûreté, alors que généralement il s'agit d'une propriété d'invariance (\square propriété) et d'invariant au lieu d'invariant inductif.

.....

⊠ Definition(assertion)

Soit $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel M d'un système \mathcal{S} . Une propriété A est une propriété assertionnelle de sûreté pour le système \mathcal{S} , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

.....

.....

⊠ Definition(relation)

Soit $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel M d'un système \mathcal{S} . Une propriété R est une propriété relationnelle de sûreté pour le système \mathcal{S} , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x).$$

.....

Complétude et correction

$$\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

si, et seulement si,

il existe $I \in \mathcal{P}(\text{VALS})$

$$\forall x_0, x, x' \in \text{VALS} : \begin{cases} (1) \text{Init}(x_0) \Rightarrow I(x_0) \\ (2) I(x) \Rightarrow A(x) \\ (3) I(x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow I(x') \end{cases}$$

si, et seulement si,

$$\exists i \in \mathcal{P}(\text{VALS}). \begin{cases} (1) \text{Init} \subseteq i \\ (2) i \subseteq A \\ (3) \forall x, x' \in \text{VALS}. i(x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow i(x') \end{cases}$$

- ▶ La propriété invariante I est définie par
$$I(x) \stackrel{def}{=} \exists x_0 \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x)$$
- ▶ La propriété invariante R est définie par
$$R(x_0, x) \stackrel{def}{=} \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x)$$

.....

⊠ Definition(assertion)

Soit $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel M d'un système \mathcal{S} . Une propriété A est une propriété assertionnelle de sûreté pour le système \mathcal{S} , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$$

.....

.....

⊠ Definition(relation)

Soit $(Th(s, c), X, VALS, INIT(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel M d'un système \mathcal{S} . Une propriété R est une propriété relationnelle de sûreté pour le système \mathcal{S} , si

$$\forall x_0, x \in VALS. Init(x_0) \wedge NEXT^*(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x).$$

.....

Complétude et correction

$\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow A(x).$

si, et seulement si,

il existe $I \in \mathcal{P}(\text{VALS})$

$$\forall x_0, x, x' \in \text{VALS} : \begin{cases} (1) \text{Init}(x_0) \Rightarrow I(x_0) \\ (2) I(x) \Rightarrow A(x) \\ (3) I(x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow I(x') \end{cases}$$

- L'absence d'erreurs à l'exécution est caractérisée comme une propriété assertionnelle, puisqu'elle porte sur le fait qu'un état est sans erreurs à l'exécution si les calculs sont définis en cet état.
principe

Principe assertionnel de sûreté ou d'invariance

$$\exists I(x) \in \mathcal{P}(\text{VALS}). \left[\begin{array}{l} \forall x, x' \in \text{VALS}. \\ (1) \text{ Init}(x) \Rightarrow I(x) \\ (2) I(x) \Rightarrow A(x) \\ (3) I(x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow I(x') \end{array} \right.$$

Principe relationnel de sûreté ou d'invariance

$$\exists IR(x_0, x) \in \mathcal{P}(\text{VALS} \times \text{VALS}). \left[\begin{array}{l} \forall x_0, x, x' \in \text{VALS}. \\ (1) \text{ Init}(x_0) \Rightarrow IR(x_0, x_0) \\ (2) IR(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x) \\ (3) IR(x_0, x) \wedge \text{NEXT}(x, x') \Rightarrow IR(x_0, x') \end{array} \right.$$

Un programme P *remplit* un contrat $(pre, post)$:

- ▶ P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- ▶ x_0 satisfait pre : $pre(x_0)$ and x_f satisfait $post$: $post(x_0, x_f)$
- ▶ $pre(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow post(x_0, x_f)$

```
requires  $pre(x_0)$   
< ensures  $post(x_0, x_f)$   
variables  $X$   
[  
  begin  
    0 :  $P_0(x_0, x)$   
    instruction0  
    ...  
     $i$  :  $P_i(x_0, x)$   
    ...  
    instruction $f-1$   
     $f$  :  $P_f(x_0, x)$   
  end
```

- ▶ $pre(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- ▶ $pre(x_0) \wedge P_f(x_0, x) \Rightarrow post(x_0, x)$
- ▶ conditions de vérification pour toutes les paires $\ell \longrightarrow \ell'$

- ▶ On considère un langage de programmation classique noté `PROGRAMS`
- ▶ et nous supposons que ce langage de programmation dispose de l'affectation, de la conditionnelle, de l'itération bornée, de l'itération non-bornée, de variables simples ou structurées comme les tableaux et de la définition de constantes.
- ▶ On se donne un programme `P` de `PROGRAMS` ; ce programme comprend
 - des variables notées globalement v ,
 - des constantes notées globalement pc ,
 - des types associés aux variables notés globalement `VALS` et identifiés à un ensemble de valeurs possibles des variables,
 - des instructions suivant un ordre défini par la syntaxe du langage de programmation.

- ▶ on définit un ensemble de points de contrôle `LOCATIONS`
- ▶ pour chaque programme ou algorithme `P`, `LOCATIONS` est un ensemble fini de valeurs et une variable cachée notée `pc` parcourt cet ensemble selon l'enchaînement.
- ▶ l'espace des valeurs possibles `VALS` est un produit cartésien de la forme `LOCATIONS × MEMORY`
- ▶ les variables x du système se décomposent en deux entités indépendantes $x = (pc, v)$ avec comme conditions $pc \in \text{LOCATIONS}$ et $v \in \text{MEMORY}$.

$$x = (pc, v) \wedge pc \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \quad (5)$$

On considère un programme `P` annoté ; on se donne un modèle relationnel

$\mathcal{MP} = (Th(s, c), x, \text{VALS}, \text{INIT}(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ où

- ▶ $Th(s, c)$ est une théorie définissant les ensembles, les constantes et les propriétés statiques de ce programme
- ▶ x est une liste de variables flexibles et x comprend une partie contrôle et une partie mémoire.
- ▶ `LOCATIONS × MEMORY` est un ensemble de valeurs possibles pour x .
- ▶ $\{r_0, \dots, r_n\}$ est un ensemble fini de relations reliant les valeurs avant x et les valeurs après x' et conformes à la relation de succession \longrightarrow entre les points de contrôle.
- ▶ $\text{INIT}(x)$ définit l'ensemble des valeurs initiales de (pc_0, v) et $x = (pc_0, v)$ avec $pre(v)$ qui caractérise les valeurs initiales de v au point initial.

On suppose qu'il existe un graphe sur l'ensemble des valeurs de contrôle définissant la relation de flux et nous notons cette structure $(\text{LOCATIONS}, \longrightarrow)$.

.....

☒ Definition

$$\ell_1 \longrightarrow \ell_2 \stackrel{\text{def}}{=} pc = \ell_1 \wedge pc' = \ell_2$$

.....

☒ Definition(Annotation d'un point de contrôle)

Soit une structure $(\text{LOCATIONS}, \longrightarrow)$ et une étiquette $\ell \in \text{LOCATIONS}$. Une annotation d'un point de contrôle ℓ est un prédicat $P_\ell(v)$ (version assertionnelle) ou $P_\ell(v_0, v)$ (version relationnelle).



$P_\ell(v_0, v)$ exprime une relation entre la valeur initiale de V notée v_0 et v la valeur courante de V au point ℓ et donc $P_\ell(v_0, v) \Rightarrow pre(v_0)$ précise que v_0 est une valeur initiale.

- ▶ Les étiquettes ℓ appartiennent à LOCATIONS : $\ell \in \text{LOCATIONS}$.
- ▶ Les variables v appartiennent à MEMORY : $v \in \text{MEMORY}$.
- ▶ $pre(v_0)$ spécifie les valeurs initiales de v .
- ▶ Chaque fois que le contrôle est en ℓ , v satisfait $P_\ell(v)$:
 $pc = \ell \Rightarrow P_\ell(v_0, v)$.
- ▶ A tout état (ℓ, v) du programme, la propriété suivante est vraie mais doit être prouvée :

$$J(\ell_0, v_0, pc, v) \stackrel{def}{=} \left[\begin{array}{l} \wedge pc \in \text{LOCATIONS} \\ \wedge v \in \text{MEMORY} \\ \dots \\ \wedge pc = \ell \Rightarrow P_\ell(v_0, v) \\ \dots \end{array} \right]$$

- ▶ $J(\ell_0, v_0, pc, v)$ est un invariant construit à partir des annotations produites mais il faut montrer que cet invariant permet de vérifier les trois conditions du principe d'induction.



ℓ_0 désigne l'étiquette marquant le début de l'algorithme et ℓ_f est la fin du programme. On pourra utiliser simplement 0 et f.

$$x = (pc, v) \text{ et } J(\ell_0, v_0, pc, v) \stackrel{def}{=} \left[\begin{array}{l} \wedge pc \in \text{LOCATIONS} \\ \wedge v \in \text{MEMORY} \\ \dots \\ \wedge pc = \ell \Rightarrow P_\ell(v_0, v) \\ \dots \end{array} \right.$$

Soit $(Th(s, c), x, \text{VALS}, \text{INIT}(x), \{r_0, \dots, r_n\})$ un modèle relationnel pour ce programme. Une propriété $A(x_0, x)$ est une propriété de sûreté pour P , si $\forall x_0, x \in \text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY}. \text{Init}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{\text{NEXT}} x \Rightarrow A(x)$.

On sait que cette propriété implique qu'il existe une propriété d'état $I(x_0, x)$ telle que les trois propriétés sont vérifiées mais on applique cette vérification pour J :

$\forall x_0, x, x' \in \text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY} :$

- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ INIT}(x_0) \Rightarrow J(x_0, x_0) \\ (2) J(x_0, x) \Rightarrow A(x_0, x) \\ (3) \forall i \in \{0, \dots, n\} : J(x_0, x) \wedge x \ r_i \ x' \Rightarrow J(x_0, x') \end{array} \right.$$



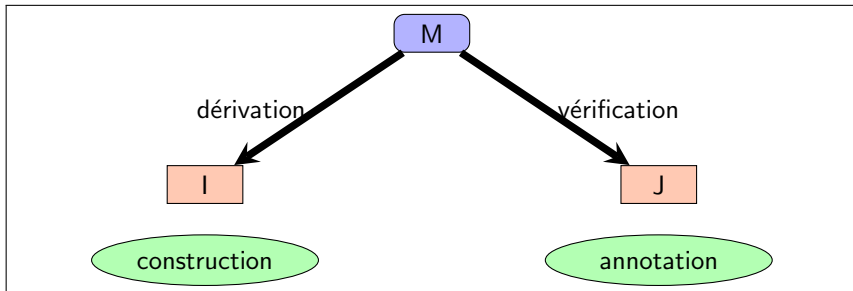
$\forall i \in \{0, \dots, n\} : J(x_0, x) \wedge x \ r_i \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$ est équivalent à $J(x_0, x) \wedge (\exists i \in \{0, \dots, n\} : x \ r_i \ x') \Rightarrow J(x_0, x')$

- ▶ Application de la correction du principe relationnel d'induction : si on vérifie les trois propriétés, alors A est une propriété de sûreté pour le modèle en question (vérification).
- ▶ Si on veut montrer que A est une propriété de sûreté, alors on doit utiliser l'invariant pour construire des annotations pour le modèle (dérivation).



Utilisation du principe relationnel d'induction (RI)

- ▶ $\text{VALS} = \text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY}$
- ▶ $J(pc_0, v_0, pc, v) \stackrel{def}{=} \exists x_0, x \in \text{VALS}. I(x_0, x) \wedge x = (pc, v) \wedge x_0 = (pc_0, v_0)$ (deduction)
- ▶ $I(x_0, x) \stackrel{def}{=} \exists pc_0, pc \in \text{LOCATIONS}, v_0, v \in \text{MEMORY}. J(pc_0, v_0, pc, v) \wedge x = (pc, v) \wedge x_0 = (pc_0, v_0)$ (induction)



Utilisation du principe assertionnel d'induction (AI)

- ▶ $\text{VALS} = \text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY}$
- ▶ $J(pc, v) \stackrel{def}{=} \exists x \in \text{VALS}. I(x) \wedge x = (pc, v)$ (deduction)
- ▶ $I(x) \stackrel{def}{=} \exists pc \in \text{LOCATIONS}, v \in \text{MEMORY}. J(pc, v) \wedge x = (pc, v)$ (induction)



- (1) $\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow A(x) \ (I(x))$
- (2) $\forall x_0, x \in \text{VALS}. \text{Init}(x_0) \wedge \text{NEXT}^*(x_0, x) \Rightarrow R(x_0, x) \ (IR(x))$

Relations et définitions

$x = (\ell, v)$, $x_0 = (\ell_0, v_0)$, $I(x)$, $IR(x_0, x)$ et les annotations $P_\ell(v)$, $RP_\ell(v_0, v)$ sont liées ainsi :

- ▶ $I(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$
- ▶ $P_\ell(v) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge I(x))$
- ▶ $IR(x_0, x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists \ell, v, v_0. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge RP_\ell(v_0, v))$
- ▶ $RP_\ell(v_0, v) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x, x_0. (x, x_0 \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge IR(x_0, x))$

La transformation est fondée la relation de transition définie pour chaque couple d'étiquettes de contrôle qui se suivent est exprimée très simplement par la forme relationnelle suivante :

$$x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{\text{def}}{=} (pc = \ell \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$$

- ▶ La transition de ℓ à ℓ' est possible, quand la condition $cond_{\ell,\ell'}(v)$ est vraie pour V et quand le contrôle est en ℓ ($pc = \ell$).
- ▶ Quand la transition est observée, les variables V sont transformées comme suit $v' = f_{\ell,\ell'}(v)$.
- ▶ La définition de la transition n'exprime aucune hypothèse liée à une stratégie d'exécution comme l'équité par exemple.
- ▶ $cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v)$ est une expression où les expressions $cond_{\ell,\ell'}(v)$ et $v' = f_{\ell,\ell'}(v)$ posent des questions de définition :
 - $DOM(\ell, \ell')(v) \stackrel{def}{=} DEF(cond_{\ell,\ell'}(v))(v) \wedge DEF(f_{\ell,\ell'}(v))$
 - $DEF(E(X))(x)$, signifie que l'expression $E(X)$ est définie pour x la valeur courante de X .
- ▶ Certaines transitions peuvent conduire à des catastrophes :
 - $DEF(X+1)(x) \stackrel{def}{=} x+1 \in D$ où D est le domaine de codage de X par exemple $D = -2^{31} \dots 2^{31}-1$ pour un codage sur 32 bits.
 - $DEF(T(I+1) < V)(t, x, v) \stackrel{def}{=} i+1 \in dom(t) \wedge v \in D \wedge t(i+1) \in D$

$$\begin{aligned}\ell &: P_\ell(v_0, v) \\ V &:= f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' &: P_{\ell'}(v_0, v)\end{aligned}$$

Traduction

- ▶ $(pc = \ell \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶ $cond_{\ell, \ell'}(v) \stackrel{def}{=} TRUE$

$$\begin{aligned}\ell_1 &: P_{\ell_1}(v_0, v) \\ \textbf{WHILE } B(V) \textbf{ DO} \\ &\ell_2 : P_{\ell_2}(v_0, v) \\ &\dots \\ &\ell_3 : P_{\ell_3}(v_0, v) \\ \textbf{END} \\ \ell_4 &: P_{\ell_4}(v_0, v)\end{aligned}$$

Traduction

$$\left\{ \begin{array}{l} pc = \ell_1 \wedge b(v) \wedge v' = v \wedge pc' = \ell_2 \\ pc = \ell_1 \wedge \neg b(v) \wedge v' = v \wedge pc' = \ell_4 \\ pc = \ell_3 \wedge b(v) \wedge v' = v \wedge pc' = \ell_2 \\ pc = \ell_3 \wedge \neg b(v) \wedge v' = v \wedge pc' = \ell_4 \end{array} \right.$$

Un programme P *remplit* un contrat $(pre, post)$:

- ▶ P transforme une variable v à partir d'une valeur initiale v_0 et produisant une valeur finale v_f : $v_0 \xrightarrow{P} v_f$
- ▶ v_0 satisfait pre : $pre(v_0)$ and v_f satisfait $post$: $post(v_0, v_f)$
- ▶ $pre(v_0) \wedge v_0 \xrightarrow{P} v_f \Rightarrow post(v_0, v_f)$

requires $pre(v_0)$

ensures $post(v_0, v_f)$

variables V

begin

$0 : P_0(v_0, v)$

instruction₀

...

$i : P_i(v_0, v)$

...

instruction _{$f-1$}

$f : P_f(v_0, v)$

end

- ▶ $pre(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_0(v_0, v)$
- ▶ $pre(v_0) \wedge P_f(v_0, v) \Rightarrow post(v_0, v)$
- ▶ conditions sur les transitions ℓ, ℓ' à définir à partir des principes d'induction.

```
variables  $U, V$   
requires  $u_0, v_0 \in \mathbb{N}$   
ensures  $u_f + v_f = u_0 + v_0$   
begin  
  0 :  $u = u_0 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N}$   
   $U := U + 2$   
  1 :  $u = u_0 + 2 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N}$   
   $V := V - 2$   
  2 :  $u = u_0 + 2 \wedge v = v_0 - 2 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N}$   
end
```


- ▶ Application de la correction du principe relationnel d'induction : si on vérifie les trois propriétés, alors A est une propriété de sûreté pour le modèle en question (vérification).
- ▶ Si on veut montrer que A est une propriété de sûreté, alors on doit utiliser l'invariant pour construire des annotations pour le modèle (dérivation).



► $x = (pc, u, v)$

► $J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \stackrel{def}{=} \left[\begin{array}{l} \wedge pc \in \{0, 1, 2\} \\ \wedge u, v \in \mathbb{Z} \\ \wedge pc = 0 \Rightarrow u = u_0 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \\ \wedge pc = 1 \Rightarrow u = u_0 + 2 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \\ \wedge pc = 2 \Rightarrow u = u_0 + 2 \wedge v = v_0 - 2 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \end{array} \right.$

► $A(0, u_0, v_0, pc, u, v) \stackrel{def}{=} (pc = 2 \Rightarrow u + v = u_0 + v_0 - 2 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N})$

$\forall pc, u, v, pc', u', v' \in \{0, 1, 2\} \times \mathbb{Z} :$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ INIT}(0, u_0, v_0) \Rightarrow J(0, u_0, v_0, 0, u_0, v_0) \\ (2) J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \Rightarrow A(0, u_0, v_0, pc, u, v) \\ (3) \forall i \in \{0, \dots, n\} : J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \wedge x \text{ } r_i \text{ } pc', u', v' \Rightarrow J(0, u_0, v_0, pc', u', v') \end{array} \right.$$

- 1 $\text{INIT}(0, u_0, v_0,) \Rightarrow J(0, u_0, v_0, 0, u_0, v_0) :$
 $pc = 0 \wedge u = u_0 \wedge v = v_0 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow J(0, u_0, v_0, 0, u_0, v_0) :$
- 2 $J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \Rightarrow A(0, u_0, v_0, pc, u, v)$
 $J(pc, u, v) \Rightarrow (pc = 2 \Rightarrow u+v = u_0+v_0-2 \wedge u_0, v_0 \in \mathbb{N})$
- 3 $\forall i \in \{0, \dots, n\} : J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \wedge x \ r_i \ pc', u', v' \Rightarrow$
 $J(0, u_0, v_0, pc', u', v')$
 $\left[\begin{array}{l} r01(pc, u, v, pc', u', v') \stackrel{def}{=} pc = 0 \wedge u' = u+2 \wedge pc' = 1 \wedge v' = v \\ r12(pc, u, v, pc', u', v') \stackrel{def}{=} pc = 1 \wedge v' = v-2 \wedge pc' = 2 \wedge u' = u \end{array} \right.$
 - $J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \wedge r01(pc, u, v, pc', u', v') \Rightarrow J(pc', u', v')$
 - $J(0, u_0, v_0, pc, u, v) \wedge r12(pc, u, v, pc', u', v') \Rightarrow J(0, u_0, v_0, pc', u', v')$

ification 1 $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \longrightarrow [A \wedge B]$

ification 2 $[A \wedge (B = C) \wedge D \Rightarrow E \wedge (B = F) \wedge G] \longrightarrow [A \wedge (B = C) \wedge D \Rightarrow E \wedge (C = F) \wedge G]$

ification 3 $[A \wedge (B = C) \wedge D \Rightarrow E \wedge (F = F) \wedge G] \longrightarrow [A \wedge (B = C) \wedge D \Rightarrow E \wedge TRUE \wedge G]$

ification 4 $[A \Rightarrow B \wedge TRUE \wedge C] \longrightarrow [A \Rightarrow B \wedge C]$



ification 5 $[A \wedge (B = C \Rightarrow U) \wedge (B = D \wedge B = C \Rightarrow V) wedge C \neq D \wedge E] \longrightarrow [A \wedge B = C \wedge U \wedge C \neq D \wedge E]$

$$J(pc, u, v) \wedge r01(pc, u, v, pc', u', v') \Rightarrow J(pc', u', v') \quad \mathbf{(1)}$$

Le modèle relationnel $M(P)$ pour le programme P annoté est donc défini comme suit :

$$M(P) \stackrel{def}{=} (Th(s, c), (pc, v), \text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY}, \text{Init}(\ell, v), \{r_{\ell, \ell'} \mid \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} \wedge \ell \longrightarrow \ell'\}).$$

La définition de $\text{Init}(x)$ est dépendante de la précondition de P :

$$\text{Init}(x) \stackrel{def}{=} .x = (\ell_0, v) \wedge \mathbf{pre}(P)(v).$$

Conditions initiales

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- ▶ $\forall x_0 \in \text{VALS} : \text{Init}(x_0) \Rightarrow J(x_0, x_0)$
- ▶ $\forall v \in \text{MEMORY}. \mathbf{pre}(P)(v) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_{\ell_0}(v_0, v)$

- ▶ Les relations r_i correspondent aux transitions satisfaisant $\ell \longrightarrow \ell'$ et on associe à chaque r_i la relation $r_{\ell,\ell'}$
 - ▶ $x \ r_{\ell,\ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶ $J(x_0, x) \stackrel{def}{=} \exists v_0, \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v_0, v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v_0, v))$
- ▶ $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x_0, x. (x_0, x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$

Pas d'induction

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- ▶ $\forall i \in \{0, \dots, n\} : J(x_0, x) \wedge x \ r_i \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶ $\forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} : \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow P_\ell(v_0, v) \wedge cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$

► $J(x_0, n x) \wedge x \text{ r}_{\ell, \ell'} x' \Rightarrow J(x_0, x')$

- ▶ $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶ $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$

- ▶ $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶ $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶ $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$

- ▶ $J(x_0, x) \wedge x \text{ r}_{\ell, \ell'} x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶ $x \text{ r}_{\ell, \ell'} x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶ $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$
- ▶ $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$

- ▶ $J(x_0nx) \wedge x \ r_{\ell,\ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶ $x \ r_{\ell,\ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶ $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$
- ▶ $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- ▶ $J(x_0nx) \equiv pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v)$

- ▶ $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶ $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶ $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_{\ell}(v))$
- ▶ $P_{\ell}(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- ▶ $J(x_0 n x) \equiv pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v)$
- ▶ $J(x_0, x') \equiv pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell') \Rightarrow pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v')$

- ▶ $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶ $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶ $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$
- ▶ $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- ▶ $J(x_0 n x) \equiv pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v)$
- ▶ $J(x_0, x') \equiv pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v'))$
- ▶ $pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \text{ (Tautologie)})$

- ▶ $J(x_0nx) \wedge x \ r_{\ell,\ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶ $x \ r_{\ell,\ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶ $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_\ell(v))$
- ▶ $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- ▶ $J(x_0nx) \equiv pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v)$
- ▶ $J(x_0, x') \equiv pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v'))$
- ▶ $pc = \ell \wedge P_\ell(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \text{ (Tautologie)})$
- ▶ $pc = \ell \wedge P_\ell(v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell,\ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell,\ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$

- ▶ $J(x_0 n x) \wedge x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \Rightarrow J(x_0, x')$
- ▶ $x \ r_{\ell, \ell'} \ x' \stackrel{def}{=} (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell')$
- ▶ $I(x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \wedge P_{\ell}(v))$
- ▶ $P_{\ell}(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \wedge x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0, x))$
- ▶ $J(x_0 n x) \equiv pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v)$
- ▶ $J(x_0, x') \equiv pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \wedge P_{\ell'}(v_0, v'))$
- ▶ $pc = \ell \wedge P_{\ell}(v_0, v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow pc = \ell' \text{ (Tautologie)})$
- ▶ $pc = \ell \wedge P_{\ell}(v) \wedge (pc = \ell \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \wedge pc' = \ell' \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$
- ▶ $P_{\ell}(v_0, v) \wedge cond_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$

- ▶ $J(x_0, x) \stackrel{def}{=} \exists \ell, v, v_0. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v, v_0 \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \text{wedgex}_0 = (\ell_0, v_0) \wedge P_\ell(v_0, v))$
- ▶ $P_\ell(v_0, v) \stackrel{def}{=} \exists x. (x, x_0 \in \text{VALS} \wedge x = (\ell, v) \text{wedgex}_0 = (\ell_0, v_0) \wedge J(x_0), x)$
- ▶ $J(x_0, x) \Rightarrow A(x_0, x)$
- ▶ $\exists \ell, v, v_0. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v, v_0 \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \text{wedgex}_0 = (\ell_0, v_0) \wedge P_\ell(v_0, v)) \Rightarrow A(x_0, x)$
- ▶ $\forall \ell, v, v_0. (\ell \in \text{LOCATIONS} \wedge v, v_0 \in \text{MEMORY} \wedge x = (\ell, v) \text{wedgex}_0 = (\ell_0, v_0) \wedge P_\ell(v_0, v)) \Rightarrow A(x_0, x)$
- ▶ $\forall \ell \in \text{LOCATIONS}, v, v_0 \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \Rightarrow A(\ell_0, v_0, \ell, v)$

Conclusion

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- ▶ $J(x_0, x) \Rightarrow A(x_0, x)$
- ▶ $\forall \ell \in \text{LOCATIONS}, v, v_0 \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \Rightarrow A(\ell_0, v_0, \ell, v)$

Les conditions de vérification suivantes sont équivalentes :

► $\forall x_0, x, x' \in \text{LOCATIONS} \times \text{MEMORY} :$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ INIT}(x_0) \Rightarrow J(x_0, x_0) \\ (2) J(x_0, x) \Rightarrow A(x_0, x) \\ (3) \forall i \in \{0, \dots, n\} : J(x_0, x) \wedge x \text{ r}_i x' \Rightarrow J(x_0, x') \end{array} \right.$$

► $\forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY} :$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ pre(P)}(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_{\ell_0}(v_0, v) \\ (2) \forall \ell \in \text{LOCATIONS}. P_{\ell}(v_0, v) \Rightarrow A(\ell_0, v_0, \ell, v) \\ (3) \forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} : \\ \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow P_{\ell}(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v') \end{array} \right.$$

- ▶ Le programme est annoté.
- ▶ Les annotations définissent un invariant à vérifier selon les conditions de vérification.
- ▶ $A(\ell, v)$ est l'énoncé de la propriété de sûreté à vérifier.

Méthode relationnelle de correction de propriétés de sûreté

Soit $A(\ell_0, v_0, \ell, v)$ une propriété d'un programme P . Soit une famille d'annotations famille de propriétés $\{P_\ell(v_0, v) : \ell \in \text{LOCATIONS}\}$ pour ce programme. Si les conditions suivantes sont vérifiées :
alors $A(\ell_0, v_0, \ell, v)$ est une propriété de sûreté pour le programme P .

.....

☒ Definition Condition de vérification

L'expression $P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$ où ℓ, ℓ' sont deux étiquettes liées par la relation \longrightarrow , est appelée une condition de vérification.

.....

Floyd and Hoare

- ▶ $\forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY}. \forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS}. \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow$
 $P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$ est équivalent à
 $\forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS}. \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow \forall v' \in$
 $\text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v \mapsto f_{\ell, \ell'}(v))$
- ▶ $\forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY}. \forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS}. \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow$
 $P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$ est équivalent à
 $\forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS}. \ell \longrightarrow \ell' \Rightarrow \forall v' \in$
 $\text{MEMORY}. (\exists v \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v)) \Rightarrow$
 $P_{\ell'}(v_0, v')$

Nous pouvons resumer les deux formes possibles de l'affectation suivante :

$$\blacktriangleright \forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$$

$$\begin{array}{l} \ell : P_\ell(v_0, v) \\ V := f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' : P_{\ell'}(v_0, v) \end{array}$$

Nous pouvons resumer les deux formes possibles de l'affectation suivante :

- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{TRUE} \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$

$$\begin{aligned} \ell &: P_\ell(v_0, v) \\ V &:= f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' &: P_{\ell'}(v_0, v) \end{aligned}$$

Nous pouvons resumer les deux formes possibles de l'affectation suivante :

- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{TRUE} \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$

$$\begin{aligned} \ell &: P_\ell(v_0, v) \\ V &:= f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' &: P_{\ell'}(v_0, v) \end{aligned}$$

Nous pouvons resumer les deux formes possibles de l'affectation suivante :

- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{TRUE} \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $\forall v \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v \mapsto f_{\ell, \ell'}(v))$
(l'axiomatique de Hoare).

$$\begin{aligned} \ell &: P_\ell(v_0, v) \\ V &:= f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' &: P_{\ell'}(v_0, v) \end{aligned}$$

Nous pouvons resumer les deux formes possibles de l'affectation suivante :

$$\begin{aligned}\ell &: P_\ell(v_0, v) \\ V &:= f_{\ell, \ell'}(V) \\ \ell' &: P_{\ell'}(v_0, v)\end{aligned}$$

- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge \text{TRUE} \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $\forall v, v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
- ▶ $\forall v \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v \mapsto f_{\ell, \ell'}(v))$
(l'axiomatique de Hoare).
- ▶ $\forall v \in \text{MEMORY}. (\exists v' \in \text{MEMORY}. P_\ell(v_0, v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v)) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v')$
correspond à la règle d'affectation de Floyd.

```
ℓ1 : Pℓ1(v0, v)
WHILE   B(v)  DO
    ℓ2 : Pℓ2(v0, v)
    ...
    ℓ3 : Pℓ3(v0, v)
END
ℓ4 : Pℓ4(v0, v)
```

Pour la structure d'itération, les conditions de vérification sont les suivantes :

- ▶ $P_{\ell_1}(v_0, v) \wedge B(v) \Rightarrow P_{\ell_2}(v_0, v)$
- ▶ $P_{\ell_1}(v_0, v) \wedge \neg B(v) \Rightarrow P_{\ell_4}(v_0, v)$
- ▶ $P_{\ell_3}(v_0, v) \wedge B(v) \Rightarrow P_{\ell_2}(v_0, v)$
- ▶ $P_{\ell_3}(v_0, v) \wedge \neg B(v) \Rightarrow P_{\ell_4}(v_0, v)$

```
 $\ell_1 : P_{\ell_1}(v_0, v)$   
IF  $B(v)$  THEN  
   $\ell_2 : P_{\ell_2}(v_0, v)$   
  ...  
   $\ell_3 : P_{\ell_3}(v_0, v)$   
ELSE  
   $m_2 : P_{\ell_2}(v_0, v)$   
  ...  
   $m_3 : P_{\ell_3}(v_0, v)$   
FI  
 $\ell_4 : P_{\ell_4}(v_0, v)$ 
```

Pour la structure de conditionnelle, les conditions suivantes :

- ▶ $P_{\ell_1}(v_0, v) \wedge B(v) \Rightarrow P_{\ell_2}(v_0, v)$
- ▶ $P_{\ell_3}(v_0, v) \Rightarrow P_{\ell_4}(v_0, v)$
- ▶ $P_{\ell_1}(v_0, v) \wedge \neg B(v) \Rightarrow P_{m_2}(v_0, v)$
- ▶ $P_{m_3}(v_0, v) \Rightarrow P_{\ell_4}(v_0, v)$

Soit v une variable d'état de P . **pre**(P)(v) est la précondition de P pour v ; elle caractérise les valeurs initiales de v . **post**(P)(v_0, v) est la postcondition de P pour v ; elle caractérise les valeurs finales de v en relation avec la valeur initiale v_0

Exemple

- 1 **pre**(P)(x, y, z)= $x, y, z \in \mathbb{N}$ et **post**(P)(x_0, y_0, z_0, x, y, z)= $z = x_0 \cdot y_0$
- 2 **pre**(Q)(x, y, z)= $x, y, z \in \mathbb{N}$ et
post(Q)(x_0, y_0, z_0, x, y, z)= $z = x_0 + y_0$

$$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{r}, \underline{q}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{r}, \bar{q}.$$

$$\mathbf{pre}(P)(\underline{x}, \underline{y}, \underline{r}, \underline{q}) \wedge (\underline{x}, \underline{y}, \underline{r}, \underline{q}) \xrightarrow{P} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}, \bar{q}) \\ \Rightarrow \mathbf{post}(P)(\underline{x}, \underline{y}, \underline{r}, \underline{q}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{r}, \bar{q})$$

La correction partielle vise à établir qu'un programme P est partiellement correct par rapport à sa précondition et à sa postcondition.

- ▶ la spécification des données de P **pre**(P)(v_0)
- ▶ la spécification des résultats de P **post**(P)(v_0, v)
- ▶ une famille d'annotations de propriétés $\{P_\ell(v_0, v) : \ell \in \text{LOCATIONS}\}$ pour ce programme.
- ▶ une propriété de sûreté définissant la correction partielle $pc = \ell_f \Rightarrow \mathbf{post}(P)(v_0, v_f)$ où ℓ_f est l'étiquette marquant la fin du programme P

.....

☒ Definition

Le programme P est partiellement correct par rapport à **pre**(P)(v_0) et **post**(P)(v_0, v), si la propriété $pc = \ell_f \Rightarrow \mathbf{post}(P)(v_0, v)$ est une propriété de sûreté pour ce programme.

.....

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- ▶ $\forall v_0, v \in \text{MEMORY} : \mathbf{pre}(P)(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_{\ell_0}(v_0, v)$
- ▶ $\forall v_0, v \in \text{MEMORY} : P_{\ell_f}(v_0, v) \Rightarrow \mathbf{post}(P)(v_0, v)$
- ▶ $\forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} : \ell \longrightarrow \ell' : \forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY}. (P_{\ell}(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$,

alors le programme P est partiellement correct par rapport à $\mathbf{pre}(P)(v_0)$ et $\mathbf{post}(P)(v_0, v)$.

- ▶ La correction partielle indique que si le programme termine normalement, alors la postcondition est vérifiée par les variables courantes.
- ▶ La sémantique du contrat est donc assez simple à donner :

▶ $\text{pre}(v_0) \wedge v_0 \xrightarrow{P} v_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f)$
(expression de la correction partielle)

▶ $pc_0 = \ell_0 \wedge \text{pre}(v_0) \wedge (pc_0, v_0) \xrightarrow{\text{NEXT}^*} (pc, v) \wedge pc = \ell_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f)$
(big-step semantics et small-step semantics equivalence)

▶ $pc_0 = \ell_0 \wedge \text{pre}(v_0) \wedge (pc_0, v_0) \xrightarrow{\text{NEXT}^*} (pc, v) \Rightarrow (pc = \ell_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f))$
(implication and conjunction property)

▶ $\text{Init}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{\text{NEXT}^*} x \Rightarrow \text{PC}(x_0, x)$
 $(\text{Init}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} pc_0 = \ell_0 \wedge \text{pre}(v_0)$
 $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\ell_0, v_0) \text{ and } x \stackrel{\text{def}}{=} (pc, v)$
 $\text{PC}(x_0, x) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 = (\ell_0, v_0) \wedge x = (pc, v) \Rightarrow (pc = \ell_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f))$



Partial correctness is a safety property and the relational method for safety properties is applied.

Un programme P *remplit* un contrat $(pre, post)$:

- ▶ P transforme une variable v à partir d'une valeur initiale v_0 et produisant une valeur finale v_f : $v_0 \xrightarrow{P} v_f$
- ▶ v_0 satisfait pre : $pre(v_0)$ and v_f satisfait $post$: $post(v_0, v_f)$
- ▶ $pre(v_0) \wedge v_0 \xrightarrow{P} v_f \Rightarrow post(v_0, v_f)$

requires $pre(v_0)$

ensures $post(v_0, v_f)$

variables V

begin

$0 : P_0(v_0, v)$

instruction₀

...

$i : P_i(v_0, v)$

...

instruction _{$f-1$}

$f : P_f(v_0, v)$

end

▶ $pre(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_0(v_0, v)$

▶ $pre(v_0) \wedge P_f(v_0, v) \Rightarrow post(v_0, v)$

▶ Pour toute paire d'étiquettes ℓ, ℓ' telle que $\ell \longrightarrow \ell'$, on vérifie que, pour toutes valeurs

$v, v' \in \text{MEMORY}$

$$\left(\begin{array}{l} P_\ell(v_0, v) \\ \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \\ \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v') \end{array} \right),$$

An Early Program Proof by Alan Turing

Turing, A. M. 1949. "Checking a Large Routine." In Report of a Conference on High Speed Automatic Calculating Machines, Univ. Math. Lab., Cambridge, pp. 67-69.

- ▶ Turing se pose une question fondamentale de la correction des routines ou programmes en 1949.
- ▶ Il s'agit sans doute (Jones!) de la méthode d'annotation et d'induction sur les programmes qui sera finalisée par Floyd en 1967.

Méthode de Floyd

- ▶ Au point 0, $pre(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- ▶ Annotations : au point i , l'assertion $P_i(x_0, x)$ est vraie.
- ▶ Au point final f , $pre(x_0) \wedge P_f(x_0, x) \Rightarrow post(x_0, x)$

- ▶ La transition à exécuter est celle allant de ℓ à ℓ' et caractérisée par la condition ou garde $cond_{\ell,\ell'}(v)$ sur v et une transformation de la variable v , $v' = f_{\ell,\ell'}(v)$.
- ▶ Une condition d'absence d'erreur est définie par $\mathbf{DOM}(\ell, \ell')(v)$ pour la transition considérée. $\mathbf{DOM}(\ell, \ell')(v)$ signifie que la transition $\ell \longrightarrow \ell'$ est possible et ne conduit pas à une erreur.
- ▶ Une erreur est un débordement arithmétique, une référence à un élément de tableau qui n'existe pas, une référence à un pointeur nul, ...

exemple

- 1 La transition correspond à une affectation de la forme $x := x+y$ ou $y := x+y$:
$$\mathbf{DOM}(x+y)(x, y) \stackrel{def}{=} \mathbf{DOM}(x)(x, y) \wedge \mathbf{DOM}(y)(x, y) \wedge x+y \in int$$
- 2 La transition correspond à une affectation de la forme $x := x+1$ ou $y := x+1$:
$$\mathbf{DOM}(x+1)(x, y) \stackrel{def}{=} \mathbf{DOM}(x)(x, y) \wedge x+2 \in int$$

Définition RTE

L'absence d'erreurs à l'exécution vise à établir qu'un programme P ne va pas produire des erreurs durant son exécution par rapport à sa précondition et à sa postcondition.

- ▶ la spécification des données de P **pre**(P)(v)
- ▶ la spécification des résultats de P **post**(P)(v_0, v)
- ▶ une famille d'annotations de propriétés $\{P_\ell(v) : \ell \in \text{LOCATIONS}\}$ pour ce programme.
- ▶ une propriété de sûreté définissant l'absence d'erreurs à l'exécution :

$$\bigwedge_{\ell \in \text{LOCATIONS} - \{\text{output}\}, n \in \text{LOCATIONS}, \ell \longrightarrow n} (\mathbf{DOM}(\ell, n)(v))$$

.....

☒ Definition

Le programme P ne produira pas d'erreurs à l'exécution par rapport à **pre**(P)(v) et **post**(P)(v_0, v), si la propriété

$$\bigwedge_{\ell \in \text{LOCATIONS} - \{\text{output}\}, n \in \text{LOCATIONS}, \ell \longrightarrow n} (\mathbf{DOM}(\ell, n)(v))$$
 est une propriété de sûreté pour ce programme.

RTE = Run Time Error

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- ▶ $\forall v_0, v \in \text{MEMORY} : \mathbf{pre}(P)(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_{\ell_0}(v_0, v)$
- ▶ $\forall m \in \text{LOCATIONS} - \{\ell_f\}, n \in \text{LOCATIONS}, \forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY} : m \longrightarrow n : \mathbf{pre}(P)(v_0) \wedge P_m(v_0, v) \Rightarrow \mathbf{DOM}(m, n)(v)$
- ▶ $\forall \ell, \ell' \in \text{LOCATIONS} : \ell \longrightarrow \ell' : \forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY}. (P_\ell(v_0, v) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v'))$,

alors le programme P ne produira pas d'erreurs à l'exécution par rapport à $\mathbf{pre}(P)(v_0)$ et $\mathbf{post}(P)(v_0, v)$.

- ▶ On doit d'abord vérifier la correction partielle puis renforcer les assertions de la correction partielle par des conditions de domaine.
- ▶ On peut donc en déduire un contrat qui intègre aussi la vérification de l'absence d'erreurs à l'exécution.

Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :

- ▶ P transforme une variable v à partir d'une valeur initiale v_0 et produisant une valeur finale $v_f : v_0 \xrightarrow{P} v_f$
- ▶ v_0 satisfait pre : $\text{pre}(v_0)$ and v_f satisfait post : $\text{post}(v_0, v_f)$
- ▶ $\text{pre}(v_0) \wedge v_0 \xrightarrow{P} v_f \Rightarrow \text{post}(v_0, v_f)$
- ▶ \mathbb{D} est le domaine RTE de V

requires $\text{pre}(v_0)$
 ensures $\text{post}(v_0, v_f)$
 variables V

```
begin
  0 :  $P_0(v_0, v)$ 
  instruction0
  ...
  i :  $P_i(v_0, v)$ 
  ...
  instructionf-1
  f :  $P_f(v_0, v)$ 
end
```

- ▶ $\text{pre}(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow P_0(v_0, v)$
- ▶ $\text{pre}(x_0) \wedge P_f(v_0, v) \Rightarrow \text{post}(v_0, v)$
- ▶ Pour toute paire d'étiquettes ℓ, ℓ' telle que $\ell \longrightarrow \ell'$, on vérifie que, pour toutes valeurs $v, v' \in \text{MEMORY}$

$$\left(\begin{array}{c} P_\ell(v_0, v) \\ \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(v) \wedge v' = f_{\ell, \ell'}(v) \\ \Rightarrow P_{\ell'}(v_0, v') \end{array} \right),$$
- ▶ $\forall m \in \text{LOCATIONS} - \{\ell_f\}, n \in \text{LOCATIONS}, \forall v_0, v, v' \in \text{MEMORY} :$
 $m \longrightarrow n :$
 $\text{pre}(v_0) \wedge P_m(v_0, v) \Rightarrow \text{DOM}(m, n)(v)$