

Cours Algorithmique des systèmes parallèles et distribués
Exercices

Série 1 Modélisation, programmation et vérification en TLA⁺
par Dominique Méry
2 février 2026

Modélisation et vérification avec TLA⁺

Exercice 1 (*disapp_td1_ex1.tla*)

Question 1.1 Modéliser sous forme d'un module TLA⁺ le réseau de Petri de la figure 1. Donner une instantiation possible des constantes. Préciser les conditions initiales correspondant à un système avec cinq (5) processeurs et deux (2) bus.

Question 1.2 On désire analyser le comportement de ce réseau et, pour cela, on souhaite savoir si la place p5 contiendra au moins un jeton. Expliquer comment on doit procéder pour obtenir une réponse en un temps fini. Préciser le message donné par le système TLAPS.

Question 1.3 Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ?

Question 1.4 Enoncez trois propriétés de sûreté de ce réseau établissant une relation entre au moins deux places.

```
----- MODULE disapp_td1_ex1 -----
(* Petri-net for the multiprocessor system *)
EXTENDS Naturals ,TLC
CONSTANTS Places ,P,B
VARIABLES M
-----
(* Auxiliary Definitions *)
K == [p \in Places |-> IF p \in {"p3"} THEN 1 ELSE 0 ]
TOKENS==1..20
-----
TypeOK == M \in [Places |-> SUBSET TOKENS]
-----
t1 ==
  /\ M["p1"] \geq 1 /\ M["p3"]+1 \leq K["p3"]
  /\ M= [[M EXCEPT!["p3"] = M["p3"]+1] EXCEPT![ "p1"] = M["p1"] - 1]
t2 ==
  /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1
  /\ M=[[M EXCEPT!["p3"] = M["p3"]-1]]
```

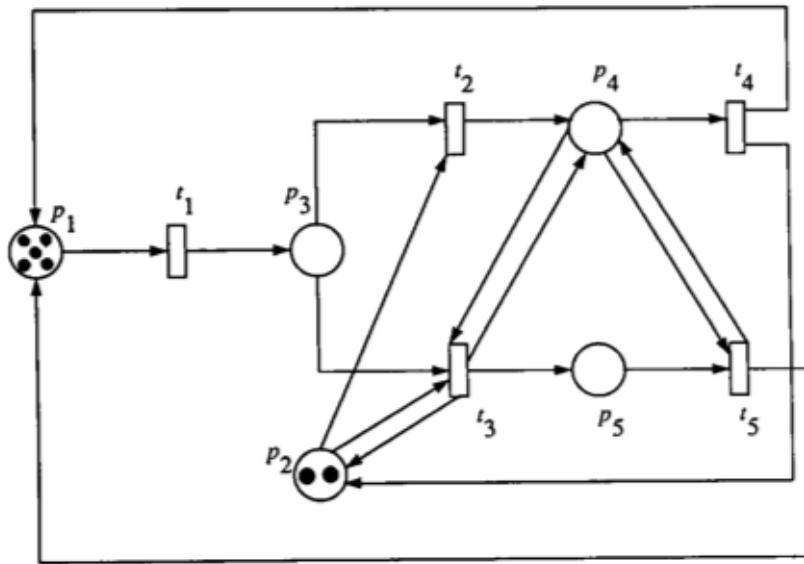


Fig. 14. A Petri-net model of a multiprocessor system, where tokens in p_1 represent active processors, p_2 available buses, p_3 , p_4 , and p_5 processors waiting for, having access to, queued for common memories, respectively.

FIGURE 1 – Réseau de Petri

```

EXCEPT!["p2"] = M["p2"] - 1
EXCEPT!["p4"] = M["p4"] + 1

t3 == 
  /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1 /\ M["p4"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p3"] = M["p3"] - 1]
            EXCEPT!["p5"] = M["p5"] + 1]

t4 == 
  /\ M["p4"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p4"] = M["p4"] - 1]
            EXCEPT!["p2"] = M["p2"] + 1]
            EXCEPT!["p1"] = M["p1"] + 1]

t5 == 
  /\ M["p4"] \geq 1 /\ M["p5"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p5"] = M["p5"] - 1]
            EXCEPT!["p1"] = M["p1"] + 1]

```

```

Init == M = [p \in Places |->
             IF p \in {"p1"} THEN P
             ELSE IF p \in {"p2"}
             THEN B ELSE 0 ]

```

```
Next == t1 \wedge t2 \wedge t3 \wedge t4 \wedge t5
```

```
Petri == Init \wedge [] [Next]_<<M>>
```

```
I0 == \A p \in Places : M[p] \geq 0
```

```

I1 == 0 \leq M["p3"] /\ M["p3"] \leq 1
I2 == M["p1"] \leq 5 /\ M["p2"] \leq 2
I3 == \A p \in {"p5"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 5
I4 == \A p \in {"p4"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 2
I == M["p2"] + M["p5"] \leq 2

```

```

AP4 == M[ " p4 " ] = 0
AP5 == M[ " p5 " ] = 0
Test == I0 /\ I1 /\ I2 /\ I3 /\ I4
=====

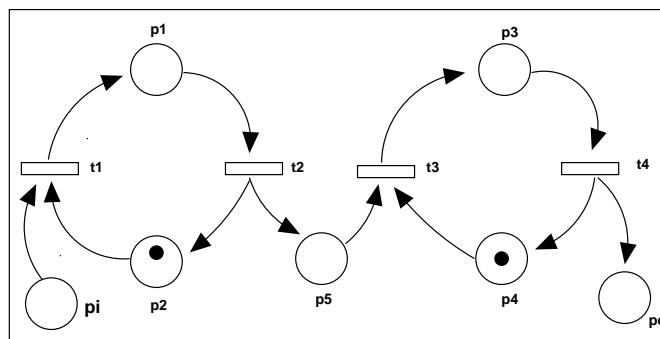
```

Exercice 2 (disapp_td1_ex2.tla)

Un réseau de Petri est un uple $R=(S,T,F,K,M,W)$ tel que

- S est l'ensemble (fini) des places.
 - T est l'ensemble (fini) des transitions.
 - $S \cap T = \emptyset$
 - F est la relation du flôt d'exécution : $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
 - K représente la capacité de chaque place : $K : S \rightarrow \text{Nat}$.
 - M représente le initial marquage chaque place :
 - $M : S \rightarrow \text{Nat}$ et vérifie la condition $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$. - W représente le poids de chaque arc : $W : F \rightarrow \text{Nat}$
 - un marquage M pour R est une fonction de S dans Nat :
 - $M : S \rightarrow \text{Nat}$ et respectant la condition $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$. - une transition t de T est activable à partir de M un marquage de R si
 1. $\forall s \in \{s' \in S \mid (s',t) \in F\} : M(s) \geq W(s,t)$.
 2. $\forall s \in \{s' \in S \mid (t,s') \in F\} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.
 - Pour chaque transition t de T , $\text{Pre}(t)$ est l'ensemble des places conduisant à t et $\text{Post}(t)$ est l'ensemble des places pointées par un lien depuis t :
 $\text{Pre}(t) = \{s' \in S : (s',t) \in F\}$ et $\text{Post}(t) = \{s' \in S : (t,s') \in F\}$
 - Soit une transition t de T activable à partir de M un marquage de R :
 1. $\forall s \in \{s' \in S \mid (s',t) \in F\} : M(s) \geq W(s,t)$.
 2. $\forall s \in \{s' \in S \mid (t,s') \in F\} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.
 - un nouveau marquage M' est défini à partir de M par : $\forall s \in S$,
- $$M'(s) = \begin{cases} M(s) - W(s,t), & \text{SI } s \in \text{PRE}(t) - \text{POST}(t) \\ M(s) + W(t,s), & \text{SI } s \in \text{POST}(t) - \text{PRE}(t) \\ M(s) - W(s,t) + W(t,s), & \text{SI } s \in \text{PRE}(t) \cap \text{POST}(t) \\ M(s), & \text{SINON} \end{cases}$$

On considère le réseau suivant :



MODULE *petri10*

EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANTS *Places, N, Q, B*

VARIABLES M

$t1 \triangleq$
 $t2 \triangleq$
 $t3 \triangleq$
 $t4 \triangleq$

$Init1 \triangleq M = [p \in Places \mapsto \text{IF } p \in \{ "p4", "p2" \} \text{ THEN } 1 \text{ ELSE }$
 $\quad \quad \quad \text{IF } p = "p1" \text{ THEN } N \text{ ELSE } 0]$

$Next \triangleq t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4$

Question 2.1 Traduire ce réseau en un module TLA⁺ dont le squelette est donné dans le texte. Pour cela, on donnera la définition des quatre transitions $t1, t2, t3, t4$. On ne tiendra pas compte de la capacité des places : les places ont une capacité d'au plus un jeton, sauf la place p_i qui peut contenir N jetons, la place p_5 peut contenir au plus B jetons et la place p_0 peut contenir au plus Q .

Question 2.2 Donner une relation liant les places p_0, p_1, p_3, p_5, p_i et la valeur N . Justifiez votre réponse.

Question 2.3 Si on suppose que la place p_0 peut contenir au plus Q jetons, donnez une condition sur Q pour que tous les jetons de p_i soient consommés un jour. Justifiez votre réponse.

Question 2.4 Expliquez ce que modélise ce réseau de Petri.

◊ Solution de l'exercice 2

----- MODULE *disapp_td1_ex2* -----

EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANTS *Places, N, Q, B*

VARIABLES M

$t11 ==$
 $\quad \quad \quad \wedge M["p1"] \leq 1 \wedge M["p5"] \leq 1$
 $\quad \quad \quad \wedge M' = [[M \text{ EXCEPT! } ["p1"] = @-1] \text{ EXCEPT! } ["p5"] = @-1] \text{ EXCEPT! } ["p2"] = @+1]$

$t1 ==$
 $\quad \quad \quad \wedge M["p2"] = 1 \wedge M["pi"] \leq 1$
 $\quad \quad \quad \wedge M' = [[M \text{ EXCEPT! } ["p1"] = 1] \text{ EXCEPT! } ["pi"] = M["pi"] - 1] \text{ EXCEPT! } ["p2"] = 0]$

$t2 ==$

```

/\ M["p1"] = 1 /\ M["p5"] < B
/\ M= [[[M EXCEPT!["p1"]=0] EXCEPT!["p5"]=M["p5"]+1] EXCEPT!["p2"]=1]

t3 ==
/\ M["p5"] \geq 1 /\ M["p4"] = 1
/\ M= [[[M EXCEPT!["p3"] = 1] EXCEPT!["p5"] = M["p5"] - 1] EXCEPT!["p4"] = 0]

t4 ==
/\ M["p3"] = 1 /\ M["po"] < Q
/\ M= [[[M EXCEPT!["p3"] = M["p3"] - 1] EXCEPT!["po"] = M["po"] + 1] EXCEPT!["p4"]

-----
Init1 == M = [p \in Places |> IF p \in {"p4", "p2"} THEN 1 ELSE
              IF p = "pi" THEN N ELSE 0]

Init == Init1

Next == t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4 \vee M=M

Petri == Init /\ [] [Next]_<<M>>

TypeInvariant == \A p \in Places : M[p] \geq 0

Inv1 == M["pi"] + M["p5"] + M["po"] + M["p1"] + M["p3"] = N
Inv2 == M["po"] \leq Q

Inv4 == M["pi"] + M["p5"] + M["po"] + M["p2"] + M["p4"] = N+2
Inv5 == M["p3"] + M["p4"] + M["p1"] + M["p2"] = 2

Inv3 == M["po"] # Q
Inv == TypeInvariant /\ Inv1 /\ Inv2 /\ Inv5
Test == Inv3
=====
```

Fin 2