

Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations  
Exercices  
Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (I)  
par Dominique Méry  
15 janvier 2026

**Exercice 1** Nous vous donnons des annotations que vous devez analyser avec *Frama-c*.

Listing 1 – annotation3.c

**Question 1.1**

```
/*@ requires a >= 0 && b >= 0 ;
 @ assigns \nothing;
 @ ensures \result == \old(a)+\old(b)-2;

 /**
int annotation(int a,int b)
{
    int x,y,z;
    x = a;
    /*@ assert l1: x == a; */
    y = b;
    /*@ assert l2: x == a && y == b; */
    z = a+b-2;
    /*@ assert l3: x == a && y == b && z==a+b-1; */
    return(z); // \result = z
}
```

Listing 2 – annotation4.c

**Question 1.2**

```
/*@ requires a >= 0 ;
 @ assigns \nothing;
 @ ensures \result == 0;
 /**
int annotation(int a)
{
    int x;
    x = a;
    return(x);
}
```

**Exercice 2** Soit le petit programme suivant

Listing 3 – td61.c

```
void ex(void) {
    int x=2,y=4,z,a=1;

    /*@ assert x <= y;
    // =>
    /*@ assert x*x == a*y;
    x = x*x;
    /*@ assert x == a*y && x* 2*x >= 8;
    y = 2*x;
```

```

z = x + y;
//@ assert z == x+y && x*y >= 8;
}

```

*Analyser le correction des annotations avec Frama-c et trouver a pour cela soit correctement analysé.*

**Exercice 3** Soit le petit programme suivant

Listing 4 – td62.c

```

void ex(void) {
    int x0,y0,z0;
    int x=x0,y=x0,z=x0*x0;
    //@ assert l1: x == y && z == x*y;

    // =>

    x = x*x;
    //@ assert l2: x == y*y && z == x;

    //=>

    // assert x + x + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0) && x + x + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0);
    y = x;
    //@ assert l3: x + y + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0) && x + y + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0);

    // =>
    //@ assert x + y + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0);
    z = x + y + 2*z;
    //@ assert z == (x0+x0)*(x0+x0);
}

```

*Analyser la correction des annotations avec Frama-c.*

## TD6

**Exercice 4** Soit le petit programme suivant

Listing 5 – td63.c

```

#include <limits.h>
// returns the maximum of x and y
/*@
    ensures \result >= x && \result >= y && (\result == x || \result == y);
*/
int max ( int x, int y ) {

    if ( x >=y )
    {
        //@ assert x>= y;
        return x ;
        //@ assert x>= y;
    }
    //@ assert x< y;
    return y ;
    //@ assert x< y;
}

```

*Analyser la correction des annotations avec Frama-c.*

**Exercice 5** La définition structurelle des transformateurs de prédictats est rappelée dans le tableau ci-dessous :

$S$	$wp(S)(P)$
$X := E(X, D)$	$P[e(x, d)/x]$
$\text{SKIP}$	$P$
$S_1; S_2$	$wp(S_1)(wp(S_2)(P))$
$\text{IF } B \text{ } S_1 \text{ ELSE } S_2 \text{ FI}$	$(B \Rightarrow wp(S_1)(P)) \wedge (\neg B \Rightarrow wp(S_2)(P))$

- Axiome d'affectation :  $\{P(e/x)\}X := E(X)\{P\}$ .
- Axiome du saut :  $\{P\}\text{skip}\{P\}$ .
- Règle de composition : Si  $\{P\}S_1\{R\}$  et  $\{R\}S_2\{Q\}$ , alors  $\{P\}S_1; S_2\{Q\}$ .
- Si  $\{P \wedge B\}S_1\{Q\}$  et  $\{P \wedge \neg B\}S_2\{Q\}$ , alors  $\{P\}\text{if } B \text{ then } S_1 \text{ then } S_2 \text{ fi}\{Q\}$ .
- Si  $\{P \wedge B\}S\{P\}$ , alors  $\{P\}\text{while } B \text{ do } S \text{ od}\{P \wedge \neg B\}$ .
- Règle de renforcement / affaiblissement : Si  $P' \Rightarrow P$ ,  $\{P\}S\{Q\}$ ,  $Q \Rightarrow Q'$ , alors  $\{P'\}S\{Q'\}$ .

**Question 5.1** Simplifier les expressions suivantes :

1.  $WP(X := X + Y + 7)(x + y = 6)$
2.  $WP(X := X + Y)(x < y)$

**Question 5.2** On rappelle que  $\{P\}S\{Q\}$  est défini par l'implication  $O \Rightarrow WP(S)(Q)$ . Pour chaque point énuméré ci-dessous, montrer que la propriété  $\{P\}S\{Q\}$  est valide ou pas en utilisant la définition suivante :

$$\{P\}S\{Q\} = P \Rightarrow WP(S)(Q)$$

1.  $\{x + y = 7\}X := Y + X\{2 \cdot x + y = 6\}$
2.  $\{x < y\}\text{IF } x \neq y \text{ THEN } x := 5 \text{ ELSE } x := 8 \text{ FI}\{x \in \{5, 8\}\}$

**Question 5.3** Utiliser frama-c pour vérifier les éléments suivants :

1.  $\{x + y = 7\}X := Y + X\{2 \cdot x + y = 6\}$
2.  $\{x < y\}\text{IF } x \neq y \text{ THEN } x := 5 \text{ ELSE } x := 8 \text{ FI}\{x \in \{5, 8\}\}$

**Exercice 6** td65.c

Soit le petit programme suivant dans un fichier :

Listing 6 – td65.c

```
/*@
  assigns  \nothing;
*/
void swap1(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    // assert x == a && y == b;
    int tmp;
    // assert y == b && x == a;
    tmp = x;
    // assert y == b && tmp == a;
    x = y;
    // assert x == b && tmp == a;
    y = tmp;
    // assert x == b && y == a;
}
```

**Question 6.1** Utiliser l'outil frama-c-gui avec la commande `$frama-c-gui ex1.c` et cliquer sur le lien `ex1.c` apparaissant sur la gauche. A partir du fichier source, une fenêtre est créée et vous découvrez le texte du fichier.

**Question 6.2** Cliquer à droite sur le mot-clé *assert* et cliquer sur *Prove annotation by WP*. Les boutons deviennent vert.

**Question 6.3**

```
void swap2(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    //@ assert x == a && y == b;
    int tmp;
    tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
    //@ assert x == a && y == a;
}
```

Répétez les mêmes suites d'opérations mais avec le programme suivant dans ex2.c.

**Question 6.4** Ajoutez une précondition pour que les preuves soient possibles.

**Question 6.5** Soit le nouvel algorithme avec un contrat qui établit ce que l'on attend de cet algorithme

```
/*@
requires \valid(a);
requires \valid(b);
ensures P: *a == \old(*b);
ensures Q: *b == \old(*a);
*/
void swap3(int
           *a, int *b) {
    int tmp;
    tmp = *a;
    *a = *b;
    *b = tmp;
}
```

Recommencer les opérations précédentes et observer ce qui a été utilisé comme outils de preuve.

## MOVEX2-1

### MALG2-1

**Exercice 7** Etudier la correction de l'algorithme suivant en complétant l'invariant de boucle :

Listing 7 – td66.c

```
/*@
requires} 0 <= n;
ensures \result == n * n;
*/
int f(int n) {
    int i = 0;
/*@ assert i=0
    int s = 0;
/*@ loop invariant ...;
    @ loop assigns ...; */
    while (i < n) {
        i++;
```

```

    s += 2 * i - 1;
}
return s;
}

```

### Exercice 8

On rappelle que l'annotation suivante du listing 8 est correcte , si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\text{pre}(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow A(v_0, v)$
- $\text{pre}(v_0) \wedge B(v_0, v) \Rightarrow \text{post}(v_0, v)$
- $A(v_0, v) \Rightarrow \text{wp}(v = f(v))(B(v_0, v))$  où  $\text{wp}(v = f(v))(B(v_0, v))$  est définie par  $B(v_0, v)[f(v)/v]$ .

Dans le cas de *frama-c*, la valeur initiale d'une variable  $v$  est notée  $\text{\textbackslash}at(v, Pre)$  et aussi  $\text{\textbackslash}old(v)$ . Nous utiliserons la notation  $v_0$  dans cet exercice.

Listing 8 – contrat

```

requires pre(v)
ensures post(\old(v), v)
type1 truc(type2 v)
  /*@ assert A(v0, v); */
  v = f(v);
  /*@ assert B(v0, v); */
return val;

```

Soient les annotations suivantes. Les variables sont supposées de type int.

#### Question 8.1 anq81.c

$\ell_1 : x = 64 \wedge y = x \cdot z \wedge z = 2 \cdot x$ $Y := X \cdot Z$ $\ell_2 : y \cdot z = 2 \cdot x \cdot x \cdot z$	$b$
---	-----

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant *Frama-c*

#### Question 8.2 anq82.c

Soient trois constantes  $n, m, p$

$\ell_1 : x = 3^n \wedge y = 3^p \wedge z = 3^m;$ $T := 8 \cdot X \cdot Y \cdot Z;$ $\ell_2 : t = (y+z)^3 \wedge y = x;$	$b$
--	-----

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant *Frama-c*. On prendra soin de discuter sur les valeurs de  $m, n, p$  et notamment de donner une condition sur ces valeurs pour que cel soit correcte.

### Exercice 9 td68.c

Listing 9 – qpower2.c

Listing 10 – mainpower2.c

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int power2(int x)
{
    int r, k, cv, cw, or, ok, ocv, ocw;
    r=0;k=0;cv=0;cw=0;or=0;ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
    while (k<x)

```

```

    {
        ok=k; ocv=cv ;ocw=cw ;
        k=ok+1;
        cv=ocv+ocw+1;
        cw=ocw+2;

    }
    r=cv ;
    return(r);
}

int p(int x)
{
    int r;
    if (x==0)
    {
        r=0;

    }
    else
    {
        r= p(x-1)+2*x-1;

    }
    return(r);
}

int check(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power2(n);
    r2 = p(n);
    if (?? == ??)
    {
        r = ??;
    }
    else
    {
        r = ??;
    };
    return r;
}
int main()
{
    int val1 ,val2 ,val3 ,num;
    printf("Enter_a_number:_");
    scanf("%d" , &num);
    val1 = power2(num);
    val2 = p(num);
    val3 = check(num);
    printf("Et_le_rÃ©sultat_pour_n=%d:_%d_%d_%d\n" , num, val1 ,val2 ,val3 );
    return 0;
}

```

Soit le fichier `qpower2.c` qui est partiellement complété et qui permet de calculer le carré d'un nombre naturel. L'exercice vise à compléter les points d'interrogation puis de simplifier le résultat et de montrer l'équivalence de deux fonctions. Le fichier `mainpower2.c` peut être compilé pour que vous puissiez faire des expérimentations sur les valeurs calculées.

**Question 9.1** Compléter le fichier `qpower2.c` et produire le fichier `power2.c` qui est vérifié avec `fraama-c`.

**Question 9.2** Simplifier la fonction itérative en supprimant les variables commençant par la lettre `o`. Puis vérifier les fonctions obtenues avec `frama-c`.

**Question 9.3** En fait, vous avez montré que les deux fonctions étaient équivalentes. Expliquez pourquoi en quelques lignes.

## MALG2-2

**Exercice 10** `td71.c`

Soit le contrat suivant :

```
variables X, Y, Z
requires x0 >= 0 ∧ y0 >= 0 ∧ z0 >= 0 ∧ z0 = 25 ∧ y0 = x0+1
ensures zf = 100;
begin
  0 : x2+y2 = z ∧ z = 25;
  (X, Y, Z) := (X+3, Y+4, Z+75);
  1 : x2+y2 = z;
end
```

**Question 10.1** Traduire ce contrat avec le langage PlusCal et proposer une validation pour que ce contrat soit valide.

**Question 10.2** Traduire ce contrat en ACSL et vérifier qu'il est valide ou non. S'il est non valide, proposer une correction de la pré-condition et/ou de la postcondition.

**Exercice 11** `anq11.c`

Définir une fonction `maxpointer` (`gex1.c`) calculant la valeur du `maxISquareum` du contenu de deux adresses avec son contrat.

```
int max_ptr ( int *p, int *q ) {
if ( *p >= *q ) return *p ;
return *q ; }
```

**Exercice 12** `anq12.c`

Définir une fonction `abs` (`anq12.c`) calculant la valeur absolue d'un nombre entier avec son contrat.

```
#include <limits.h>
int abs (int x) {
  if (x >= 0) return x ;
  return -x; }
```

**Exercice 13** `max-abs.c`, `max-abs1.c`

Etudier les fonctions pour la vérification de l'appel de `abs` et `max`.

```

int abs ( int x );
int max ( int x, int y );
// returns maximum of absolute values of x and y
int max_abs( int x, int y ) {
    x=abs(x); y=abs(y);
    return max(x,y);
}

```

**Exercice 14 Question 14.1** Soit la fonction suivante calculant le reste de la division de  $a$  par  $b$ . Vérifier la correction de cet algorithme.

```

int rem(int a, int b) {
    int r = a;
    while (r >= b) {
        r = r - b;
    };
    return r;
}

```

Il faut utiliser une variable ghost.

**Question 14.2** Annoter les fonctions suivantes en vue de montrer leur correction.

```

int max (int a, int b) {
    if (a >= b) return a;
    else return b;
}

int indice_max (int t[], int n) {
    int r = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++)
        if (t[i] > t[r]) r = i;
    return r;
}

```

```

int valeur_max (int t[], int n) {
    int r = t[0];

    for (int i = 1; i < n; i++)
        if (t[i] > r) r = t[i];
    return r;
}

```

La solution est donnée dans le fichier gex4-3.c.

**Exercice 15** Pour chaque question, montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit

$\forall x, y, , x', y'. P_\ell(x, y) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(x, y) \wedge (x', y') = f_{\ell, \ell'}(x, y) \Rightarrow P_{\ell'}(x', y')$   
Pour cela, on utilisera l'environnement Frama-c.

**Question 15.1**

$\ell_1 : x = 10 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x$ $y := z+x$ $\ell_2 : x = 10 \wedge y = x+2 \cdot 10$
--

**Question 15.2**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 1 \wedge y = 12 \\ & x := 2 \cdot y \\ \ell_2 : & x = 1 \wedge y = 24\end{aligned}$$

**Question 15.3**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 11 \wedge y = 13 \\ & z := x; x := y; y := z; \\ \ell_2 : & x = 26/2 \wedge y = 33/3\end{aligned}$$

**Exercice 16** Evaluer la validité de chaque annotation dans les questions suivent.

**Question 16.1**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 64 \wedge y = x \cdot z \wedge z = 2 \cdot x \\ & Y := X \cdot Z \\ \ell_2 : & y \cdot z = 2 \cdot x \cdot x \cdot z\end{aligned}$$

**Question 16.2**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 2 \wedge y = 4 \\ & Z := X \cdot Y + 3 \cdot Y \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y \cdot Y + X^6 \\ \ell_2 : & z = 6 \cdot (x+y)^2\end{aligned}$$

**Question 16.3**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = z \wedge y = x \cdot z \\ & Z := X \cdot Y + 3 \cdot Y \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y \cdot Y + Y \cdot X \cdot Z \cdot Z \cdot X; \\ \ell_2 : & z = (x+y)^3\end{aligned}$$

Soit l'annotation suivante :

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 1 \wedge y = 2 \\ & X := Y + 2 \\ \ell_2 : & x + y \geq m\end{aligned}$$

où  $m$  est un entier ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

**Question 16.4** Ecrire la condition de vérification correspondant à cette annotation en supposant que  $X$  et  $Y$  sont deux variables entières.

**Question 16.5** Etudier la validité de cette condition de vérification selon la valeur de  $m$ .

**Exercice 17** gex7.c

<b>VARIABLES</b> $N, V, S, I$	
	$pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0-1 \longrightarrow \mathbb{Z} \\ s_0 \in \mathbb{Z} \wedge i_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$
	$REQUIRES \begin{cases} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0-1 \longrightarrow \mathbb{Z} \end{cases}$
	$ENSURES \begin{cases} s_f = \bigcup_{k=0}^{n_0-1} v_0(k) \\ n_f = n_0 \\ v_f = v_0 \end{cases}$
	$\ell_0 : \begin{cases} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ (n, v, s, i) = (n_0, v_0, s_0, i_0) \end{cases}$
	$S := V(0)$
	$\ell_1 : \begin{cases} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^0 v(k) \\ (n, v, i) = (n_0, v_0, i_0) \end{cases}$
	$I := 1$
	$\ell_2 : \begin{cases} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i = 1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{cases}$
	$WHILE I < N DO$
	$\ell_3 : \begin{cases} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 1..n-1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{cases}$
	$S := S \oplus V(I)$
	$\ell_4 : \begin{cases} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^i v(k) \wedge i \in 1..n-1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{cases}$
	$I := I + 1$
	$\ell_5 : \begin{cases} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 2..n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{cases}$
	$OD;$
	$\ell_6 : \begin{cases} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{n-1} v(k) \wedge i = n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{cases}$

La notation  $\bigcup_{k=0}^n v(k)$  désigne la valeur maximale de la suite  $v(0) \dots v(n)$ . On suppose que l'opérateur  $\oplus$  est défini comme suit  $a \oplus b = \max(a, b)$ .

**Question 17.1** Ecrire une solution contractuelle de cet algorithme.

**Question 17.2** Que faut-il faire pour vérifier que cet algorithme est bien annoté et qu'il est partiellement correct en utilisant TLA<sup>+</sup>? Expliquer simplement les éléments à mettre en œuvre et les propriétés de sûreté à vérifier.

**Question 17.3** Ecrire un module TLA<sup>+</sup> permettant de vérifier l'algorithme annoté à la fois pour la correction partielle et l'absence d'erreurs à l'exécution.

### Exercice 18 gex8.c

On considère le petit programme se trouvant à droite de cette colonne. Nous allons poser quelques questions visant à compléter les parties marquées en gras et visant à définir la relation de calcul.

On notera  $pre(n_0, x_0, b_0)$  l'expression suivante  $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$  et  $in(n, b, n_0, x_0, b_0)$  l'expression  $n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$ .

**Question 18.1** Ecrire un algorithme avec le contrat et vérifier le .

**VARIABLES**  $N, X, B$   
**REQUIRES**  $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$   
**ENSURES**  $\begin{cases} n_0 < b_0 \Rightarrow x_f = (n_0+b_0)^2 \\ n_0 \geq b_0 \Rightarrow x_f = b_0 \\ n_f = n_0 \\ b_f = b_0 \end{cases}$   
**BEGIN**  
 $\ell_0 : n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge x = x_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$   
 $X := N;$   
 $\ell_1 : x = n \wedge in(n, b, n_0, x_0, b_0)$   
**IF**  $X < B$  **THEN**  
 $\ell_2 :$   
 $X := X \cdot X + 2 \cdot B \cdot X + B \cdot B;$   
 $\ell_3 :$   
**ELSE**  
 $\ell_4 :$   
 $X := B;$   
 $\ell_5 :$   
**FI**  
 $\ell_6 :$   
**END**

**Exercice 19** Soit le petit programme suivant :

Listing 11 – f91

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int f1(int x)
{ if (x > 100)
  { return(x-10);
  }
else
  { return(f1(f1(x+11)));
  }
}

int f2(int x)
{ if (x > 100)
  { return(x-10);
  }
else
  { return(91);
  }
}

int mc91tail(int n, int c)
{if (c != 0) {
  if (n > 100) {
    return mc91tail(n-10,c-1);
  }
else
  {
```

```

        return mc91tail(n+11,c+1);
    }
}
else
{
    return n;
}

int mc91(int n)
{
    return mc91tail(n, 1);
}

int main()
{
    int val1, val2, val3, num;
    printf("Enter_a_number: ");
    scanf("%d", &num);
    // Computes the square root of num and stores in root.
    val1 = f1(num);
    val2 = f2(num);
    val3 = mc91(num);
    printf("Et_le_rÃ©sultat_f1(%d)=%d et_la_vÃ©rification : %d et ..... %d\n", num,
    return 0;
}

```

On veut montrer que les deux fonctions  $f1$  et  $f2$  sont équivalentes avec frama-c en montrant qu'elles vérifient le même contrat;

**Exercice 20** Utiliser frama-c pour vérifier ou non les annotations suivantes :

**Question 20.1**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 10 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x \\ & y := z+x \\ \ell_2 : & x = 10 \wedge y = x+2 \cdot 10\end{aligned}$$

**Question 20.2**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 1 \wedge y = 12 \\ & x := 2 \cdot y \\ \ell_2 : & x = 1 \wedge y = 24\end{aligned}$$

**Question 20.3**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 11 \wedge y = 13 \\ & z := x; x := y; y := z; \\ \ell_2 : & x = 26/2 \wedge y = 33/3\end{aligned}$$

**Question 20.4**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 3 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x \\ & y := z+x \\ \ell_2 : & x = 3 \wedge y = x+6\end{aligned}$$

**Question 20.5**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 2^4 \wedge y = 2^{345} \wedge x \cdot y = 2^{350} \\ x := & y + x + 2^x \\ \ell_2 : & x = 2^{56} \wedge y = 2^{345}\end{aligned}$$

**Question 20.6**

$$\begin{aligned}\ell_1 : & x = 1 \wedge y = 12 \\ x := & 2 \cdot y + x \\ \ell_2 : & x = 1 \wedge y = 25\end{aligned}$$

**Exercice 21** Traduire ce contrat dans le langage ACSL et vérifier le contrat.

```
variables x
requires
  x0 ∈ ℕ
ensures
  xf ∈ ℕ
begin
  ℓ0 : { x = x0 ∧ x0 ∈ ℕ }
  While (0 < x)
    ℓ1 : { 0 < x ≤ x0 ∧ x0 ∈ ℕ }
    x := x - 1;
    ℓ2 : { 0 ≤ x ≤ x0 ∧ x0 ∈ ℕ }
  od;
  ℓ4 : { x = 0 }
end
```

**Exercice 22** Utiliser frama-c pour vérifier le contrat suivant :

**Variables** : F,N,M,I

**Requires** :  $\left( \begin{array}{l} n_0 \in \mathbb{N} \wedge \\ n_0 \neq 0 \wedge \\ f_0 \in 0..n_0-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$

**Ensures** :  $\left( \begin{array}{l} m_f \in \mathbb{N} \wedge \\ m_f \in \text{ran}(f_0) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..n_0-1 \Rightarrow f_0(j) \leq m_f) \end{array} \right)$

```
M := F(0);
I := 1;
while I < N do
  if F(i) > M then
    M := F(I);
  ;
  I++;
;
b
```

**Algorithme 1:** Algorithme du maximum d'une liste non annotée

**Exercice 23**

Utiliser frama-c pour vérifier ke contrat suivant :

Soit l'algorithme annoté suivant se trouvant à la page suivante et les pré et postconditions définies pour cet algorithme comme suit : On suppose que  $x_1$  et  $x_2$  sont des constantes.

**Exercice 24** Soit la fonction suivante utilisée dans un programme

Listing 12 – mainpower.c

```
#include <stdio.h>
#include <limits.h>
int power(int x)
{int r, cz, cv, cu, cw, ct, k;
cz=0;cv=0;cw=1;ct=3;cu=0;k=0;
while (k<x)
{
    printf("%d %d %d %d\n", cu, cv, cw, cz);
    cz=cz+cv+cw;
    cv=cv+ct;
    ct=ct+6;
    cw=cw+3;
    cu=cu+1;
    k=k+1;
}
r=cz;
return(r);
}

int p(int x)
{
    int r;
    if (x==0)
    {
        r=0;
    }
    else
    {
        r= p(x-1)+3*(x-1)*(x-1) + 3*(x-1)+1;
    }
    return(r);
}

int check(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power(n);
    r2 = p(n);
    if (r1 != r2)
    {
        r = 0;
    }
    else
    {
        r = 1;
    };
    return r;
}
```

**Variables :** X1,X2,Y1,Y2,Y3,Z

**Requires :**  $x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0$

**Ensures :**  $z_f = x_{10}^{x_{20}}$

$\ell_0 : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z) = (x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0)\}$   
 $(y_1, y_2, y_3) := (x_1, x_2, 1);$

$\ell_1 : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2, z) = (x_{10}, x_{20}, z_0) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2}\}$

**while**  $y_2 \neq 0$  **do**

$\ell_2 : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2, z) = (x_{10}, x_{20}, z_0) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge 0 < y_2 \leq x_2\}$

**if**  $impair(y_2)$  **then**

$\ell_3 : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2, z) = (x_{10}, x_{20}, z_0) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge 0 < y_2 \leq x_2 \wedge impair(y_2)\}$

$y_2 := y_2 - 1;$

$\ell_4 : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2, z) = (x_{10}, x_{20}, z_0) \wedge y_3 \cdot y_1 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge 0 \leq y_2 \leq x_2 \wedge pair(y_2)\}$

$y_3 := y_3 \cdot y_1;$

$\ell_5 : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2, z) = (x_{10}, x_{20}, z_0) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge 0 \leq y_2 \leq x_2 \wedge pair(y_2)\}$

;

$\ell_6 : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2, z) = (x_{10}, x_{20}, z_0) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge 0 \leq y_2 \leq x_2 \wedge pair(y_2)\}$

$y_1 := y_1 \cdot y_1;$

$\ell_7 : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2, z) = (x_{10}, x_{20}, z_0) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} \text{ div } 2 = x_1^{x_2} \wedge 0 \leq y_2 \leq x_2 \wedge pair(y_2)\}$

$y_2 := y_2 \text{ div } 2;$

$\ell_8 : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2, z) = (x_{10}, x_{20}, z_0) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge 0 \leq y_2 \leq x_2\}$

;

$\ell_9 : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2, z) = (x_{10}, x_{20}, z_0) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_2 = 0\}$

$z := y_3;$

$\ell_{10} : \{x_{10} \in \mathbb{N} \wedge x_{20} \in \mathbb{N} \wedge x_{10} \neq 0 \wedge y_{10}, y_{20}, y_{30}, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x_1, x_2) = (x_{10}, x_{20}) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_2 = 0 \wedge z = x_1^{x_2}\}$

**Algorithme 2:** Algorithme de l'exponentiation indienne annoté

```
int main () {  
    int counter;  
    for( counter=0; counter<5; counter++ ) {  
        int v,r;  
        printf("Enter a natural number:");  
        scanf("%d", &v);  
        r = power(v);  
        printf ("Power : %d ----> %d\n", v, r);  
    };  
}
```

**Question 24.1** Compiler ce programme et tester son exécution afin de dégager ses fonctionnalités.

**Question 24.2** Annoter les fonctions principales.

**Question 24.3** Vérifiez sa correction partielle et totale.