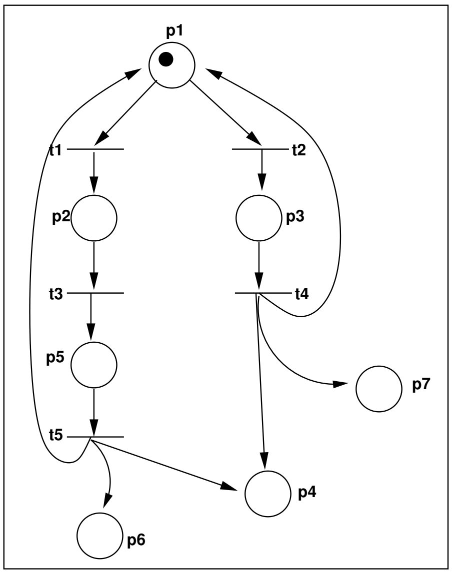
Cours Algorithmique des systèmes parallèles et distribués
Exercices
Série 1 Modélisation, programmation et vérification en TLA$^+$
par Dominique Méry
20 janvier 2026

Modélisation et vérification avec TLA$^+$

Exercice 1 *Soit le rÃ©seau de Petri suivant :*



Question 1.1 *ModÃ©liser ce rÃ©seau de Petri avec TLA$^+$.*

Question 1.2 *Etudier ce rÃ©seau en proposant et en vÃ©rifiant des invariants en utilisant les outils.*

Exercice 2 *(disapp_td1_ex2.tla)*
Un réseau de Petri est un uple R=(S,T,F,K,M,W) tel que

- — *S est l'ensemble (fini) des places.*
- — *T est l'ensemble (fini) des transitions.*
- — $S \cap T = \varnothing$
- — *F est la relation du flÔt d'exécution :* $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
- — *K représente la capacité de chaque place :* $K \in S \rightarrow Nat$.
- — *M représente le initial marquage chaque place :*
  $M \in S \rightarrow Nat$ *et vérifie la condition* $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$.
- — *W représente le poids de chaque arc :* $W \in F \rightarrow Nat$

— *un marquage M pour R est une fonction de S dans Nat :*
$M \in S \rightarrow Nat$ et respectant la condition $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$.

— *une transition t de T est activable à partir de M un marquage de R si*

1. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (s',t) \in F \} : M(s) \geq W(s,t)$.
2. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (t,s') \in F \} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.

— *Pour chaque transition t de T, Pre(t) est l'ensemble des places conduisant à t et Post(t) est l'ensemble des places pointées par un lien depuis t :*
$Pre(t) = \{ s' \in S : (s',t) \in F \}$ et $Post(t) = \{ s' \in S : (t,s') \in F \}$

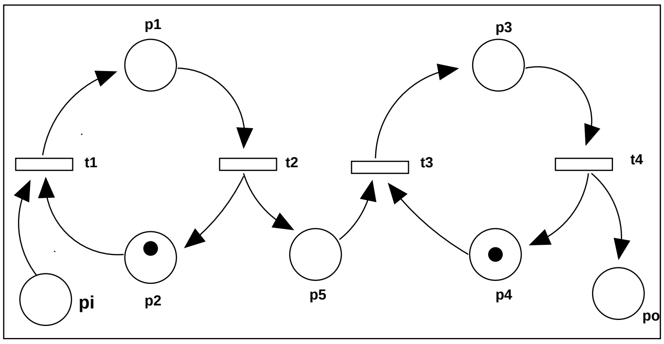
— *Soit une transition t de T activable à partir de M un marquage de R :*

1. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (s',t) \in F \} : M(s) \geq W(s,t)$.
2. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (t,s') \in F \} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.

— *un nouveau marquage M' est défini à partir de M par : ' $\forall s \in S$,*

$$M'(s) = \begin{cases} \text{M(S)}-\text{W(S,T), SI S} \in \text{PRE(T) - POST(T)} \\ \text{M(S)}+\text{W(T,S), SI S} \in \text{POST(T) - PRE(T)} \\ \text{M(S)}-\text{W(S,T)}+\text{W(T,S), SI S} \in \text{PRE(T)}\cap\text{POST(T)} \\ \text{M(S), SINON} \end{cases}$$

On considère le réseau suivant :



MODULE *petri*10

EXTENDS *Naturals*, *TLC*
CONSTANTS *Places*, *N*, *Q*, *B*
VARIABLES *M*

$t1 \triangleq$
$t2 \triangleq$
$t3 \triangleq$
$t4 \triangleq$
$Init1 \triangleq \quad M = [p \in Places \mapsto \text{IF } p \in \{\text{"p4"}, \text{"p2"}\} \text{ THEN } 1 \text{ ELSE}$
$\qquad \text{IF } p = \text{"pi"} \text{ THEN } N \text{ ELSE } 0]$

$Next \triangleq t1 \lor t2 \lor t3 \lor t4$

Question 2.1 *Traduire ce réseau en un module TLA$^+$ dont le squelette est donné dans le texte. Pour cela, on donnera la définition des quatre transitions* $t1$, $t2$, $t3$,$t4$. *On ne tiendra pas compte de la capacité des places : les places ont une capacité d'au plus un jeton, sauf la place pi qui peut contenir* N *jetons, la place p5 peut contenir au plus B jetons et la place po peut contenir au plus* Q.

Question 2.2 *Donner une relation liant les places po,p1,p3,p5,pi et la valeur* N. *Justifiez votre réponse.*

Question 2.3 *Si on suppose que la place po peut contenir au plus* Q *jetons, donnez une condition sur* Q *pour que tous les jetons de pi soient consommés un jour. Justifiez votre réponse.*

Question 2.4 *Expliquez ce que modélise ce réseau de Petri.*

Exercice 3 *petri2023.tla*
La figure 1 est un réseau de Petri modélisant le système des philosophes qui mangent des spaghetti.

Question 3.1 *Traduire le réseau de Petri sous la forme d'un module TLA, en utilisant le fichier petri2023.tla. En particulier, il faut compléter l'initialisation.*

Question 3.2 *Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ? Expliquez votre réponse.*

Question 3.3 *Proposer une propriété TLA pour répondre à la question suivante, en donnant des explications.*
Est-ce que deux philosophes voisins peuvent manger en même temps ?

```
------------------- MODULE examen2023q1 -----------------
EXTENDS Naturals,TLC
CONSTANTS  Places (* d\'esigne l'ensemble des places du r\'eseau de Petri  *)

VARIABLES  M  (*  la variable d'\'etat  indiquant o\`u se trouvent les jetons *)
------------------------
ASSUME
   Places \subseteq {"p11","p12","p13", ...}
------------------------
l1 ==
r1 ==
b1 ==
......

Init ==  M = [p \in Places |-> IF p \in {"p1","p2","p3","p4"} THEN 1 ELSE IF .... ]
Next == t1 \/ t2    \/ t3   \/ t4    \/ t5
```

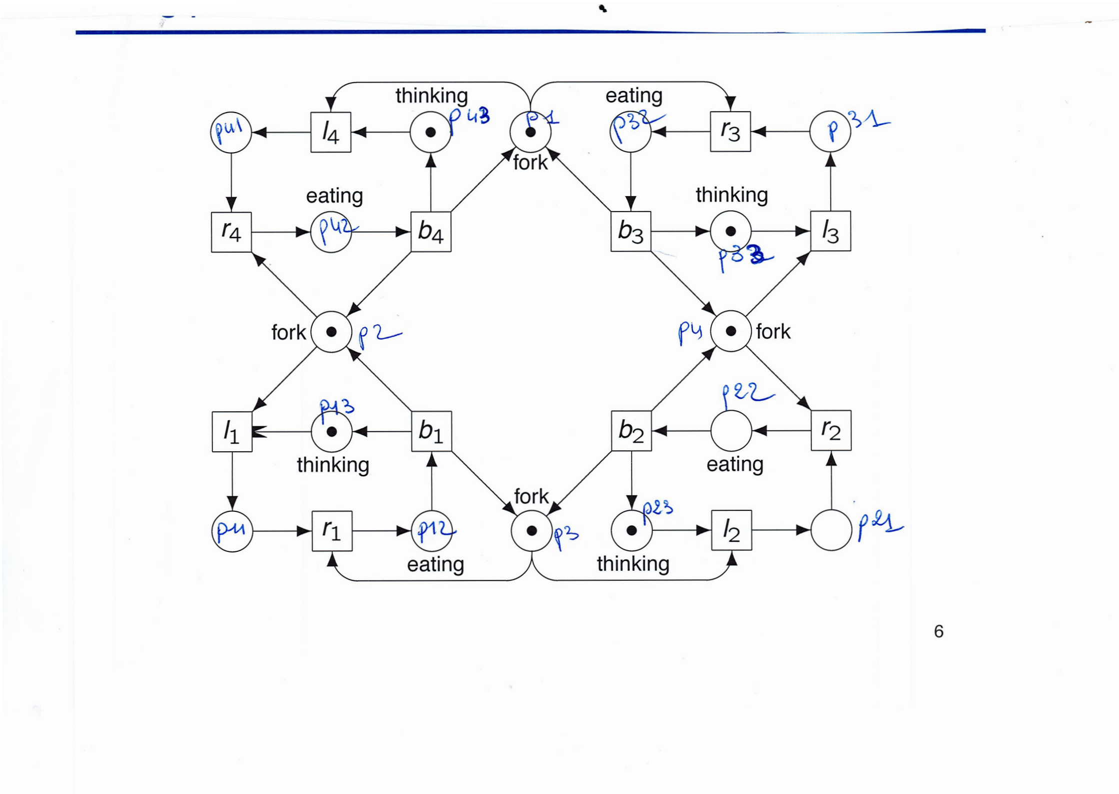


FIGURE 1 – Réseau de Petri

==

Exercice 4 *(disapp_td1_ex1.tla)*

Question 4.1 *Modéliser sous forme d'un module TLA$^+$ le réseau de Petri de la figure 2. Donner une instanciation possible des constantes. Préciser les conditions initiales correspondant à un système avec cinq (5) processeurs et deux (2) bus.*

Question 4.2 *On désire analyser le comportement de ce réseau et, pour cela, on souhaite savoir si la place $p5$ contiendra au moins un jeton. Expliquer comment*

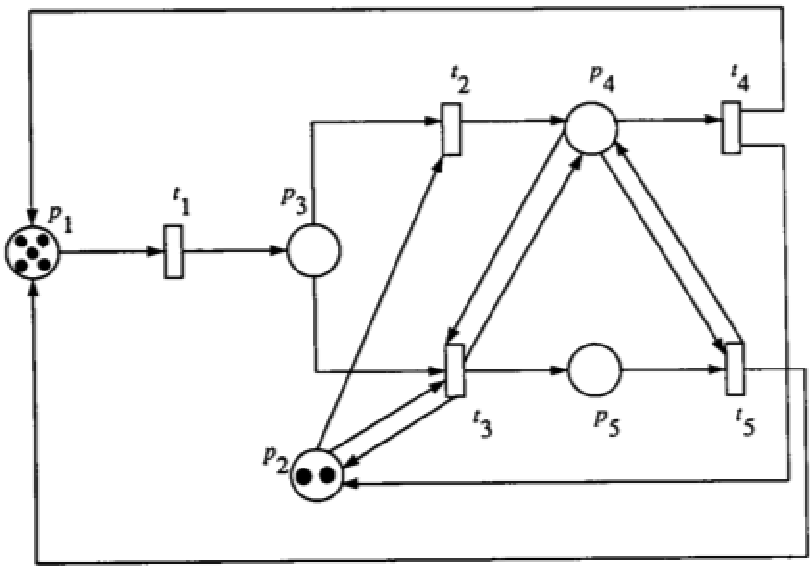


Fig. 14. A Petri-net model of a multiprocessor system, where tokens in p_1 represent active processors, p_2 available buses, p_3, p_4, and p_5 processors waiting for, having access to, queued for common memories, respectively.

FIGURE 2 – Réseau de Petri

on doit procéder pour obtenir une réponse en un temps fini. Préciser le message donné par le système TLAPS.

Question 4.3 *Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ?*

Question 4.4 *Enoncez trois propriétés de sûreté de ce réseau établissant une relation entre au moins deux places.*