

Cours MOdélisation, Vérification et Expérimentations
Exercices
Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (I)
par Dominique Méry
3 avril 2025

Exercice 1 *Nous vous donnons des annotations que vous devez analyser avec Frama-c.*

Listing 1 – annotation3.c

Question 1.1 */*@ requires a >= 0 && b >= 0 ;
@ assigns \nothing;
@ ensures \result == \old(a)+\old(b)-2;*

```
/*@/  
int annotation(int a,int b)  
{  
    int x,y,z;  
    x = a;  
    /*@ assert l1: x == a; */  
    y = b;  
    /*@ assert l2: x == a && y == b; */  
    z = a+b-2;  
    /*@ assert l3: x == a && y == b && z==a+b-1; */  
    return(z); // \result = z  
}
```

Listing 2 – annotation4.c

Question 1.2 */*@ requires a >= 0 ;
@ assigns \nothing;
@ ensures \result == 0;*

```
/*@/  
int annotation(int a)  
{  
    int x;  
    x = a;  
    return(x);  
}
```

Exercice 2 *Soit le petit programme suivant*

Listing 3 – td61.c

```
void ex(void) {  
    int x=2,y=4,z,a=1;  
  
    //@ assert x <= y;  
    x = x*x;  
    //@ assert x == a*y;  
    y = 2*x;  
  
    z = x + y;
```

```
//@ assert z == x+y && x* y >= 8;
}
```

Analyser la correction des annotations avec *Frama-c* et trouver a pour que cela soit correctement analysé.

Exercice 3 Soit le petit programme suivant

Listing 4 – td62.c

```
void ex(void) {
    int x0,y0,z0;
    int x=x0,y=x0,z=x0*x0;
    //@ assert l1: x == y && z == x*y;
    x = x*x;
    //@ assert l2: x == y*y && z == x;
    y = x;
    //@ assert l3: x + y + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0);
    z = x + y + 2*z;

    //@ assert z == (x0+x0)*(x0+x0);
}
```

Analyser la correction des annotations avec *Frama-c*.

TD6

Exercice 4 Soit le petit programme suivant

Listing 5 – td63.c

```
#include <limits.h>
// returns the maximum of x and y
/*@
    ensures \result >= x && \result >= y && (\result == x || \result == y);
*/
int max ( int x, int y ) {

    if ( x >=y )
    {
        //@ assert x>= y;
        return x ;
        //@ assert x>= y;
    }

    //@ assert x< y;
    return y ;
    //@ assert x< y;
}
```

Analyser la correction des annotations avec *Frama-c*.

Exercice 5 La définition structurelle des transformateurs de prédicats est rappelée dans le tableau ci-dessous :

S	$wp(S)(P)$
$X := E(X,D)$	$P[e(x,d)/x]$
SKIP	P
$S_1; S_2$	$wp(S_1)(wp(S_2)(P))$
IF B S_1 ELSE S_2 FI	$(B \Rightarrow wp(S_1)(P)) \wedge (\neg B \Rightarrow wp(S_2)(P))$

- Axiome d'affectation : $\{P(e/x)\} X := E(X) \{P\}$.
- Axiome du saut : $\{P\} skip \{P\}$.

- Règle de composition : Si $\{P\}\mathbf{S}_1\{R\}$ et $\{R\}\mathbf{S}_2\{Q\}$, alors $\{P\}\mathbf{S}_1;\mathbf{S}_2\{Q\}$.
- Si $\{P \wedge B\}\mathbf{S}_1\{Q\}$ et $\{P \wedge \neg B\}\mathbf{S}_2\{Q\}$, alors $\{P\}\mathbf{if\ B\ then\ S_1\ then\ S_2\ fi}\{Q\}$.
- Si $\{P \wedge B\}\mathbf{S}\{P\}$, alors $\{P\}\mathbf{while\ B\ do\ S\ od}\{P \wedge \neg B\}$.
- Règle de renforcement / affaiblissement : Si $P' \Rightarrow P$, $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$, $Q \Rightarrow Q'$, alors $\{P'\}\mathbf{S}\{Q'\}$.

Question 5.1 Simplifier les expressions suivantes :

1. $WP(X := X + Y + 7)(x + y = 6)$
2. $WP(X := X + Y)(x < y)$

Question 5.2 On rappelle que $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ est défini par l'implication $O \Rightarrow WP(S)(Q)$. Pour chaque point énuméré ci-dessous, monter que la propriété $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ est valide ou pas en utilisant la définition suivante :

$$\{P\}\mathbf{S}\{Q\} = P \Rightarrow WP(S)(Q)$$

1. $\{x + y = 7\}\mathbf{X := Y + X}\{2 \cdot x + y = 6\}$
2. $\{x < y\}\mathbf{IF\ x \neq y\ THEN\ x := 5\ ELSE\ x := 8\ FI}\{x \in \{5, 8\}\}$

Question 5.3 Utiliser frama-c pour vérifier les éléments suivants :

1. $\{x + y = 7\}\mathbf{X := Y + X}\{2 \cdot x + y = 6\}$
2. $\{x < y\}\mathbf{IF\ x \neq y\ THEN\ x := 5\ ELSE\ x := 8\ FI}\{x \in \{5, 8\}\}$

Exercice 6 td65.c

Soit le petit programme suivant dans un fichier :

Listing 6 – td65.c

```
/*@
  assigns  \nothing;
*/
void swap1(int a, int b) {
  int x = a;
  int y = b;
  //@ assert x == a && y == b;
  int tmp;
  //@ assert y == b && x == a;
  tmp = x;
  //@ assert y == b && tmp == a;
  x = y;
  //@ assert x == b && tmp == a;
  y = tmp;
  //@ assert x == b && y == a;
}
```

Question 6.1 Utiliser l'outil frama-c-gui avec la commande `$frama-c-gui ex1.c` et cliquer sur le lien `ex1.c` apparaissant sur la gauche. A partir du fichier source, une fenêtre est créée et vous découvrirez le texte du fichier.

Question 6.2 Cliquer à droite sur le mot-clé `assert` et cliquer sur `Prove annotation by WP`. Les boutons deviennent vert.

Question 6.3

```
void swap2(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    //@ assert x == a && y == b;
    int tmp;
    tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
    //@ assert x == a && y == a;
}
```

Répétez les mêmes suites d'opérations mais avec le programme suivant dans ex2.c.

Question 6.4 Ajoutez une précondition pour que les preuves soient possibles.

Question 6.5 Soit le nouvel algorithme avec un contrat qui établit ce que l'on attend de cet algorithme

```
/*@
requires \valid(a);
requires \valid(b);
ensures P: *a == \old(*b);
ensures Q: *b == \old(*a);
*/
void swap3(int
           *a, int *b) {
    int tmp;
    tmp = *a;
    *a = *b;
    *b = tmp;
}
```

Recommencer les opérations précédentes et observer ce qui a été utilisé comme outils de preuve.

MOVEX2-1

MALG2-1

Exercice 7 Etudier la correction de l'algorithme suivant en complétant l'invariant de boucle :

Listing 7 – td66.c

```
/*@
requires 0 <= n;
ensures \result == n * n;
*/
int f(int n) {
    int i = 0;
    //@ assert i=0
    int s = 0;
    //@ loop invariant ...;
    @ loop assigns ...; */
    while (i < n) {
        i++;
        s += 2 * i - 1;
    };
    return s;
}
```

Exercice 8

On rappelle que l'annotation suivante du listing 8 est correcte, si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $pre(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow A(v_0, v)$
- $pre(v_0) \wedge B(v_0, v) \Rightarrow post(v_0, v)$
- $A(v_0, v) \Rightarrow wp(v = f(v))(B(v_0, v))$ où $wp(v = f(v))(B(v_0, v))$ est définie par $B(v_0, v)[f(v)/v]$.

Dans le cas de frama-c, la valeur initiale d'une variable v est notée $\backslash at(v, Pre)$ et aussi $\backslash old(v)$. Nous utiliserons la notation v_0 dans cet exercice.

Listing 8 – contrat

```
requires pre(v)
ensures post(\old(v), v)
type1 truc(type2 v)
/*@ assert A(v0, v); */
v = f(v);
/*@ assert B(v0, v); */
return val;
```

Soient les annotations suivantes. Les variables sont supposées de type *int*.

Question 8.1 anq81.c

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 64 \wedge y = x \cdot z \wedge z = 2 \cdot x \\ Y := X \cdot Z \\ \ell_2 : y \cdot z = 2 \cdot x \cdot x \cdot z \end{aligned}$$

b

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant Frama-c

Question 8.2 anq82.c

Soient trois constantes n, m, p

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 3^n \wedge y = 3^p \wedge z = 3^m; \\ T := 8 \cdot X \cdot Y \cdot Z; \\ \ell_2 : t = (y+z)^3 \wedge y = x; \end{aligned}$$

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant Frama-c. On prendra soin de discuter sur les valeurs de m, n, p et notamment de donner une condition sur ces valeurs pour que cel soit correcte.

Exercice 9 td68.c

Listing 9 – qpower2.c

```
#include <limits.h>
/*@ axiomatic auxmath {
  @ axiom rule1: \forallall int n; n > 0 ==> n*n == (n-1)*(n-1)+2*n-1;
  @ } */

/*@ requires 0 <= x;
    requires x <= INT_MAX;
    requires x*x <= INT_MAX;
    assigns \nothing;
    ensures \result == x*x;
*/
int power2(int x)
{ int r, k, cv, cw, or, ok, ocv, ocw;
  r=0; k=0; cv=0; cw=0; or=0; ok=k; ocv=cv; ocw=cw;
```

```

    /*@ loop invariant cv == k*k;
       @ loop invariant k  <= x;
       @ loop invariant cw == 2*k;
       @ loop invariant 4*cv == cw*cw;
       @ loop assigns k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
       @ loop variant x-k;
    */
    while (k<x)
    {
        ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
        k=ok+1;
        cv=ocv+ocw+1;
        cw=ocw+2;

    }
    r=cv;
    return(r);
}

```

```

/*@ requires 0 <= x;
   requires x <= INT_MAX;
   requires x*x <= INT_MAX;
   assigns \nothing;
   ensures \result == x*x;
*/
int npower2(int x)
{int r,k,cv,cw;
  r=0;k=0;cv=0;cw=0;
  /*@ loop invariant cv == k*k;
     @ loop invariant k  <= x;
     @ loop invariant cw == 2*k;
     @ loop invariant 4*cv == cw*cw;
     @ loop assigns k,cv,cw;
     @ loop variant x-k;
  */
  while (k<x)
  {
      k=k+1;
      cv=cv+cw+1;
      cw=cw+2;

  }
  r=cv;
  return(r);
}

```

```

/*@ requires 0 <= x;

   decreases x;
   assigns \nothing;

   ensures \result == x*x
;
*/

```

```

int p(int x)
{
    int r;
    if (x==0)
    {
        r=0;

    }
    else
    {
        r= p(x-1)+2*x-1;

    }
    return(r);
}

/*@   requires  0 <= n;
       requires n*n <= INT_MAX;
       assigns  \nothing;
       ensures  \result == 1;
*/

int check(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power2(n);
    r2 = p(n);
    if (r1 != r2)
    { r = 0;
    }
    else
    { r = 1;
    };
    return r;
}

```

```

/*@   requires  0 <= n;
       requires n*n <= INT_MAX;
       assigns  \nothing;
       ensures  \result == 1;
*/

int check2(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power2(n);
    r2 = npower2(n);
    if (r1 != r2)
    { r = 0;
    }
    else
    { r = 1;
    };
    return r;
}

```

```
}
```

Listing 10 – mainpower2.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int power2(int x)
{
    int r, k, cv, cw, or, ok, ocv, ocw;
    r=0; k=0; cv=0; cw=0; or=0; ok=k; ocv=cv; ocw=cw;
    while (k<x)
    {
        ok=k; ocv=cv; ocw=cw;
        k=ok+1;
        cv=ocv+ocw+1;
        cw=ocw+2;
    }
    r=cv;
    return(r);
}

int p(int x)
{
    int r;
    if (x==0)
    {
        r=0;
    }
    else
    {
        r= p(x-1)+2*x-1;
    }
    return(r);
}

int check(int n){
    int r1, r2, r;
    r1 = power2(n);
    r2 = p(n);
    if (?? == ??)
    {
        r = ??;
    }
    else
    {
        r = ??;
    };
    return r;
}

int main()
{
    int val1, val2, val3, num;
    printf("Enter_a_number:_");
    scanf("%d", &num);
    val1 = power2(num);
    val2 = p(num);
}
```



```

    val3 = check(num);
    printf("Et le résultat pour n=%d: %d %d %d\n", num, val1, val2, val3);
    return 0;
}

```

Soit le fichier `qpower2.c` qui est partiellement complété et qui permet de calculer le carré d'un nombre naturel. L'exercice vise à compléter les points d'interrogation puis de simplifier le résultat et de montrer l'équivalence de deux fonctions. Le fichier `mainpower2.c` peut être compilé pour que vous puissiez faire des expérimentations sur les valeurs calculées.

Question 9.1 Compléter le fichier `qpower2.c` et produire le fichier `power2.c` qui est vérifié avec `fraama-c`.

Question 9.2 Simplifier la fonction itérative en supprimant les variables commençant par la lettre `o`. Puis vérifier les fonctions obtenues avec `frama-c`.

Question 9.3 En fait, vous avez montré que les deux fonctions étaient équivalentes. Expliquez pourquoi en quelques lignes.

MALG2-2

Exercice 10 `td71.c`

Soit le contrat suivant :

```

variables X, Y, Z
requires  $x_0 \geq 0 \wedge y_0 \geq 0 \wedge z_0 \geq 0 \wedge z_0 = 25 \wedge y_0 = x_0 + 1$ 
ensures  $z_f = 100$ ;
begin
  0 :  $x^2 + y^2 = z \wedge z = 25$ ;
  (X, Y, Z) := (X+3, Y+4, Z+75);
  1 :  $x^2 + y^2 = z$ ;
end

```

Question 10.1 Traduire ce contrat avec le langage `PlusCal` et proposer une validation pour que ce contrat soit valide.

Question 10.2 Traduire ce contrat en `ACSL` et vérifier qu'il est valide ou non. S'il est non valide, proposer une correction de la pré-condition et / ou de la postcondition.

Exercice 11 `anq11.c`

Définir une fonction `maxpointer` (`gex1.c`) calculant la valeur du `maxiSquaremum` du contenu de deux adresses avec son contrat.

```

int max_ptr ( int *p, int *q ) {
  if ( *p >= *q ) return *p ;
  return *q ; }

```

Exercice 12 `anq12.c`

Définir une fonction `abs` (`anq12.c`) calculant la valeur absolue d'un nombre entier avec son contrat.

```
#include <limits.h>
int abs (int x) {
    if (x >= 0) return x ;
    return -x;}
```

Exercice 13 *max-abs.c, max-abs1.c*

Etudier les fonctions pour la vérification de l'appel de abs et max.

```
int abs ( int x );
int max ( int x, int y );
// returns maximum of absolute values of x and y
int max_abs( int x, int y ) {
    x=abs(x); y=abs(y);
    return max(x,y);
}
```

Exercice 14 Question 14.1 *Soit la fonction suivante calculant le reste de la division de a par b. Vérifier la correction de cet algorithme.*

```
int rem(int a, int b) {
    int r = a;
    while (r >= b) {
        r = r - b;
    };
    return r;
}
```

Il faut utiliser une variable ghost.

Question 14.2 *Annoter les fonctions suivantes en vue de montrer leur correction.*

```
int max (int a, int b) {
    if (a >= b) return a;
    else return b;
}

int indice_max (int t[], int n) {
    int r = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++)
        if (t[i] > t[r]) r = i;
    return r;
}
```

```
int valeur_max (int t[], int n) {
    int r = t[0];

    for (int i = 1; i < n; i++)
        if (t[i] > r) r = t[i];
    return r;
}
```

La solution est donnée dans le fichier gex4-3.c.

Exercice 15 Pour chaque question, montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit

$$\forall x, y, x', y'. P_\ell(x, y) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(x, y) \wedge (x', y') = f_{\ell, \ell'}(x, y) \Rightarrow P_{\ell'}(x', y')$$

Pour cela, on utilisera l'environnement **Frama-c**.

Question 15.1

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 10 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x \\ y := z+x \\ \ell_2 : x = 10 \wedge y = x+2 \cdot 10 \end{aligned}$$

Question 15.2

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 1 \wedge y = 12 \\ x := 2 \cdot y \\ \ell_2 : x = 1 \wedge y = 24 \end{aligned}$$

Question 15.3

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 11 \wedge y = 13 \\ z := x; x := y; y := z; \\ \ell_2 : x = 26/2 \wedge y = 33/3 \end{aligned}$$

Exercice 16 Evaluer la validité de chaque annotation dans les questions suivantes.

Question 16.1

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 64 \wedge y = x \cdot z \wedge z = 2 \cdot x \\ Y := X \cdot Z \\ \ell_2 : y \cdot z = 2 \cdot x \cdot x \cdot z \end{aligned}$$

Question 16.2

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 2 \wedge y = 4 \\ Z := X \cdot Y + 3 \cdot Y \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y \cdot Y + X^6 \\ \ell_2 : z = 6 \cdot (x+y)^2 \end{aligned}$$

Question 16.3

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = z \wedge y = x \cdot z \\ Z := X \cdot Y + 3 \cdot Y \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y \cdot Y + Y \cdot X \cdot Z \cdot Z \cdot X; \\ \ell_2 : z = (x+y)^3 \end{aligned}$$

Soit l'annotation suivante :

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 1 \wedge y = 2 \\ X := Y+2 \\ \ell_2 : x+y \geq m \end{aligned}$$

où m est un entier ($m \in \mathbb{Z}$).

Question 16.4 Ecrire la condition de vérification correspondant à cette annotation en supposant que X et Y sont deux variables entières.

Question 16.5 Etudier la validité de cette condition de vérification selon la valeur de m .

Exercice 17 *gex7.c*

 VARIABLES N, V, S, I

$$pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \stackrel{def}{=} \begin{cases} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0-1 \longrightarrow \mathbb{Z} \\ s_0 \in \mathbb{Z} \wedge i_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$REQUIRES \left(\begin{array}{l} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0-1 \longrightarrow \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

$$ENSURES \left(\begin{array}{l} s_f = \bigcup_{k=0}^{n_0-1} v_0(k) \\ n_f = n_0 \\ v_f = v_0 \end{array} \right)$$

$$\ell_0 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ (n, v, s, i) = (n_0, v_0, s_0, i_0) \end{array} \right)$$

$$S := V(0)$$

$$\ell_1 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^0 v(k) \\ (n, v, i) = (n_0, v_0, i_0) \end{array} \right)$$

$$I := 1$$

$$\ell_2 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i = 1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

 WHILE $I < N$ DO

$$\ell_3 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 1..n-1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

$$S := S \oplus V(I)$$

$$\ell_4 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^i v(k) \wedge i \in 1..n-1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

$$I := I+1$$

$$\ell_5 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 2..n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

OD;

$$\ell_6 : \left(\begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{n-1} v(k) \wedge i = n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

La notation $\bigcup_{k=0}^n v(k)$ désigne la valeur maximale de la suite $v(0) \dots v(n)$. On suppose que l'opérateur \oplus est défini comme suit $a \oplus b = \max(a, b)$.

Question 17.1 Ecrire une solution contractuelle de cet algorithme.

Question 17.2 Que faut-il faire pour vérifier que cet algorithme est bien annoté et qu'il est partiellement correct en utilisant TLA^+ ? Expliquer simplement les éléments à mettre en œuvre et les propriétés de sûreté à vérifier.

Question 17.3 Ecrire un module TLA^+ permettant de vérifier l'algorithme annoté à la fois pour la correction partielle et l'absence d'erreurs à l'exécution.

Exercice 18 *gex8.c*

On considère le petit programme se trouvant à droite de cette colonne. Nous allons poser quelques questions visant à compléter les parties marquées en gras et visant à définir la relation de calcul.

On notera $pre(n_0, x_0, b_0)$ l'expression suivante $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ et $in(n, b, n_0, x_0, b_0)$ l'expression $n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$.

Question 18.1 Ecrire un algorithme avec le contrat et vérifier le .

```

VARIABLES  $N, X, B$ 
REQUIRES  $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ 
ENSURES  $\left( \begin{array}{l} n_0 < b_0 \Rightarrow x_f = (n_0 + b_0)^2 \\ n_0 \geq b_0 \Rightarrow x_f = b_0 \\ n_f = n_0 \\ b_f = b_0 \end{array} \right)$ 

BEGIN
 $\ell_0 : n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge x = x_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$ 
 $X := N;$ 
 $\ell_1 : x = n \wedge in(n, b, n_0, x_0, b_0)$ 
IF  $X < B$  THEN
 $\ell_2 :$ 
 $X := X \cdot X + 2 \cdot B \cdot X + B \cdot B;$ 
 $\ell_3 :$ 
ELSE
 $\ell_4 :$ 
 $X := B;$ 
 $\ell_5 :$ 
FI
 $\ell_6 :$ 
END

```

Exercice 19 Soit le petit programme suivant :

Listing 11 – f91

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int f1(int x)
{ if (x > 100)
  { return(x-10);
  }
  else
  { return(f1(f1(x+11)));
  }
}

int f2(int x)
{ if (x > 100)
  { return(x-10);
  }
  else
  { return(91);
  }
}

int mc91tail(int n, int c)
{ if (c != 0) {
  if (n > 100) {
    return mc91tail(n-10, c-1);
  }
  else
  {

```

```

        return mc91tail(n+11,c+1);
    }
}
else
    { return n;}
}

int mc91(int n)
{
    return mc91tail(n,1);
}

int main()
{
    int val1,val2,val3,num;
    printf("Enter_a_number:_");
    scanf("%d", &num);
    // Computes the square root of num and stores in root.
    val1 = f1(num);
    val2 = f2(num);
    val3 = mc91(num);
    printf("Et_le_résultat_de_f1(%d)=%d_et_la_vérification:_%d_et_....%d\n", num,
    return 0;
}

```

On veut montrer que les deux fonctions $f1$ et $f2$ sont équivalentes avec frama-c en montrant qu'elles vérifient le même contrat ;

Exercice 20 Utiliser frama-c pour vérifier ou non les annotations suivantes :

Question 20.1

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 10 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x \\ y := z+x \\ \ell_2 : x = 10 \wedge y = x+2 \cdot 10 \end{aligned}$$

Question 20.2

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 1 \wedge y = 12 \\ x := 2 \cdot y \\ \ell_2 : x = 1 \wedge y = 24 \end{aligned}$$

Question 20.3

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 11 \wedge y = 13 \\ z := x; x := y; y := z; \\ \ell_2 : x = 26/2 \wedge y = 33/3 \end{aligned}$$

Question 20.4

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 3 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x \\ y := z+x \\ \ell_2 : x = 3 \wedge y = x+6 \end{aligned}$$

Question 20.5

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 2^4 \wedge y = 2^{345} \wedge x \cdot y = 2^{350} \\ x := y + x + 2^x \\ \ell_2 : x = 2^{56} \wedge y = 2^{345} \end{aligned}$$

Question 20.6

$$\begin{aligned} \ell_1 : x = 1 \wedge y = 12 \\ x := 2 \cdot y + x \\ \ell_2 : x = 1 \wedge y = 25 \end{aligned}$$

Exercice 21 Traduire ce contrat dans le langage ACSL et vérifier le contrat.

```
variables x
requires
  x0 ∈ ℕ
ensures
  xf ∈ ℕ
begin
  ℓ0 : { x = x0 ∧ x0 ∈ ℕ }
  While (0 < x)
  ℓ1 : { 0 < x ≤ x0 ∧ x0 ∈ ℕ }
  x := x - 1;
  ℓ2 : { 0 ≤ x ≤ x0 ∧ x0 ∈ ℕ }
od;
ℓ4 : { x = 0 }
end
```

Exercice 22 Utiliser frama-c pour vérifier le contrat suivant :

Variables : F, N, M, I

Requires : $\left(\begin{array}{l} n_0 \in \mathbb{N} \wedge \\ n_0 \neq 0 \wedge \\ f_0 \in 0 \dots n_0 - 1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$

Ensures : $\left(\begin{array}{l} m_f \in \mathbb{N} \wedge \\ m_f \in \text{ran}(f_0) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0 \dots n_0 - 1 \Rightarrow f_0(j) \leq m_f) \end{array} \right)$

```
M := F(0);
I := 1;
while I < N do
  if F(I) > M then
    M := F(I);
  ;
  I++;
;
b
```

Algorithme 1: Algorithme du maximum d'une liste non annotée

Exercice 23

Utiliser frama-c pour vérifier le contrat suivant :

Soit l'algorithme annoté suivant se trouvant à la page suivante et les pré et postconditions définies pour cet algorithme comme suit : On suppose que x_1 et x_2 sont des constantes.

Exercice 24 Soit la fonction suivante utilisée dans un programme

Listing 12 – mainpower.c

```
#include <stdio.h>
#include <limits.h>
int power(int x)
{
    int r, cz, cv, cu, cw, ct, k;
    cz=0;cv=0;cw=1;ct=3;cu=0;k=0;
    while (k<x)
    {
        printf("%d_%d_%d_cz=%d_%d\n",cu,cv,cw,cz,ct);
        cz=cz+cv+cw;
        cv=cv+ct;
        ct=ct+6;
        cw=cw+3;
        cu=cu+1;
        k=k+1;}
    r=cz;
    return(r);
}

int p(int x)
{
    int r;
    if (x==0)
    {
        r=0;
    }
    else
    {
        r= p(x-1)+3*(x-1)*(x-1) + 3*(x-1)+1;
    }
    return(r);
}

int check(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power(n);
    r2 = p(n);
    if (r1 != r2)
    {
        r = 0;
    }
    else
    {
        r = 1;
    };
    return r;
}
```


Variables : X1,X2,Y1,Y2,Y3,Z

Requires : $x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0$

Ensures : $z_f = x1_0^{x2_0}$

$\ell_0 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, y1, y2, y3, z) = (x1_0, x2_0, y1_0, y2_0, y3_0, z_0)\}$

$(y1, y2, y3) := (x1, x2, 1);$

$\ell_1 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2}\}$

while $y2 \neq 0$ **do**

$\ell_2 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 < y2 \leq x2\}$

if $\text{impair}(y2)$ **then**

$\ell_3 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 < y2 \leq x2 \wedge \text{impair}(y2)\}$

$y2 := y2 - 1;$

$\ell_4 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge \text{pair}(y2)\}$

$y3 := y3 \cdot y1;$

$\ell_5 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge \text{pair}(y2)\}$

;

$\ell_6 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge \text{pair}(y2)\}$

$y1 := y1 \cdot y1;$

$\ell_7 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2 \text{ div } 2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge \text{pair}(y2)\}$

$y2 := y2 \text{ div } 2;$

$\ell_8 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2\}$

;

$\ell_9 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge y2 = 0\}$

$z := y3;$

$\ell_{10} : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2) = (x1_0, x2_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge y2 = 0 \wedge z = x1^{x2}\}$

Algorithme 2: Algorithme de l'exponentiation indienne annoté

```
int main () {  
  
    int counter;  
    for( counter=0; counter<5; counter++ ) {  
        int v,r;  
        printf("Enter_a_natural_number:");  
        scanf("%d", &v);  
        r = power(v);  
        printf ("Power_: %d---->_%d\n", v,r);  
    }  
}
```

Question 24.1 *Compiler ce programme et tester son exécution afin d'en dégager ses fonctionnalités.*

Question 24.2 *Annoter les fonctions principales.*

Question 24.3 *Vérifiez sa correction partielle et totale.*