

---

# Cours MALG & MOVEX

## Théorie du Point-Fixe et ses Applications

---

Dominique Méry  
Telecom Nancy, Université de Lorraine

---

**Année universitaire 2023-2024**

- ① Introduction
- ② Structures Partiellement  
Ordonnées Inductives (CPO)
- ③ TOP MALG2
- ④ Point-fixe pour une fonction  
continue au sens de Scott
- ⑤ Treillis
- ⑥ Théorèmes du point-fixe de  
Knaster-Tarski
- ⑦ Applications
  - Théorème du point-fixe de la  
théorie des fonctions  
récursives
  - Lemme de Arden
  - Grammaires algébriques
  - Définition inductive
- ⑧ Conclusion

- 1 Introduction
- 2 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 3 TOP MALG2
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- 7 Applications
  - Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives
  - Lemme de Arden
  - Grammaires algébriques
  - Définition inductive
- 8 Conclusion

## 1 Introduction

### 3 TOP MALG2

## 5 Treillis

## 7 Applications

## Lemme de Arden

Grammaires algébriques

### Définition inductive

## 8 Conclusion

Un modèle ensembliste MK pour un système  $\mathcal{S}$  est une structure  $(\Sigma, \text{INIT}, \longrightarrow)$  où

- ▶  $\Sigma$  est l'ensemble de tous les états.
- ▶  $\text{INIT} \subseteq \Sigma$  définit l'ensemble des états initiaux de  $\mathcal{S}$ .
- ▶  $\longrightarrow$  est une relation binaire

Soit un modèle ensembliste MK pour  $\mathcal{S}$ .

$\text{REACHABLE}(\text{MK}) = \{u \mid u \in \Sigma \wedge \exists s \in \Sigma. (s \in \text{INIT} \wedge s \xrightarrow{*} u)\}$  est l'ensemble de tous les états accessibles pour le modèle ensembliste MK.

### Propriété de sûreté

Une propriété  $A$  est une propriété de sûreté pour le système  $\mathcal{S}$ , si

$$\forall i, s \in \Sigma. i \in \text{INIT} \wedge i \xrightarrow{*} s \Rightarrow s \in A.$$

Soit une propriété de sûreté  $A$  pour MK :

$$\blacktriangleright \forall i, s \in \Sigma. i \in \text{INIT} \wedge i \xrightarrow{*} s \Rightarrow s \in A.$$

si, et seulement si,

$$\blacktriangleright \text{REACHABLE}(\text{MK}) \subseteq A$$

$\text{REACHABLE}(\text{MK})$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\blacktriangleright \text{INIT} \subseteq \text{REACHABLE}(\text{MK})$$

$$\blacktriangleright \longrightarrow [\text{REACHABLE}(\text{MK})] \subseteq \text{REACHABLE}(\text{MK}) \quad (\longrightarrow [U]) \text{ est l'ensemble des éléments en relation à } U \text{ par } \longrightarrow).$$

$$\blacktriangleright \forall U. \left( \begin{array}{c} U \subseteq \Sigma \\ \text{INIT} \subseteq U \\ \wedge \\ \longrightarrow [U] \subseteq U \end{array} \right) \Rightarrow \text{REACHABLE}(\text{MK}) \subseteq U$$

$$\longrightarrow [U] = \{v | v \in \Sigma \wedge \exists u. (u \in U \wedge u \longrightarrow v)\}$$

### Principe de la vérification exhaustive

Soit une propriété de sûreté  $A$  pour MK :

$$\blacktriangleright \forall i, s \in \Sigma. i \in \text{INIT} \wedge i \xrightarrow{*} s \Rightarrow s \in A.$$

si, et seulement si,

$$\blacktriangleright \text{REACHABLE}(\text{MK}) \subseteq A$$

$$\blacktriangleright \text{REACHABLE}(\text{MK}) = \text{INIT} \cup \longrightarrow [\text{REACHABLE}(\text{MK})]$$

$$\text{REACHABLE}(\text{MK}) = \text{FP}(\text{REACHABLE}(\text{MK}))$$

où pour toute partie  $U$  de  $\Sigma$ ,  $U = \text{FP}(U)$

$$\blacktriangleright \text{pour toute partie } U \text{ de } \Sigma, \text{FP}(U) = \text{Init} \cup \longrightarrow [U]$$

- ▶ Résoudre des équations de la forme suivante :

$$X = \mathcal{F}(X)$$

- ▶ Donner ou, mieux encore, calculer les solutions, quand elles existent
  - Problème de l'existence de solution selon des hypothèses.
  - Problème de calculer la valeur d'une solution



### Théorème du point fixe de Picard

Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet, et  $f : E \longrightarrow E$  une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe  $k \in [0, 1[$  tel que pour tout  $(x, y) \in E$ ,  $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ . Alors  $f$  possède un unique point fixe  $\ell$ . De plus, toute suite définie par  $u_0 \in I$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , converge vers cet unique point fixe, et on a les estimations suivantes :

- ▶  $d(u_n, \ell) \leq k^n \times d(u_0, \ell)$
- ▶  $d(u_n, \ell) \leq k/(1-k) \times d(u_n, u_{n-1})$

```
struct liste {  
    int val;  
    struct liste *next  
}  
  
int longueur(struct liste *l)  
{  
    if (l == NIL) {return(0);}   
    else {return(1 + longueur(l -> next));}
```

```
#include <stdio.h>
int f (int x, int y)
{ int i;
  if (x==y)
    {i = y+1;return(i);}
  else
    {i=f(x, f(x-1,y+1));return(i);}
}
int main ()
{
  int a = 2;
  int b = 2;
  printf(" Valeur:%d\n" ,f(a,b));
}
```

```
fun A(0,y) = y + 1
| A(x,0) = A(x-1,1)
| A(x,y) = A(x-1,A(x,y-1));
val A = fn : int * int -> int
```

### Propriété à prouver

▶  $\forall (x,y) \in \text{nat} \times \text{nat} : (x,y) \in \text{Domaine}(A)$

ou

▶  $\forall (x,y) \in \text{nat} \times \text{nat} : P(x,y)$  avec  
 $P(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} ((x,y) \in \text{domaine}(A)).$



- ▶ La définition d'une fonction s'identifie à la notion de terminaison ou de correction totale des programmes impératifs.
- ▶ La description fonctionnelle d'un programme impératif pose des problèmes de définition d'une fonction pour chaque programme et donc d'une fonctionnelle générale définie pour le langage de programmation de manière structurelle.
- ▶ Question : Que signifie l'écriture suivante ?  
$$f(x, y) = \text{if } x = y \text{ then } y+1 \text{ else } f(x, f(x-1, y+1)) \text{ fi}$$
- ▶ Typage, domaines, calculs etc

- ① Introduction
- ② Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- ③ TOP MALG2
- ④ Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- ⑤ Treillis
- ⑥ Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- ⑦ Applications
  - Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives
  - Lemme de Arden
  - Grammaires algébriques
  - Définition inductive
- ⑧ Conclusion

Une structure partiellement ordonnée  $(X, \sqsubseteq)$  est définie par un ensemble  $X$  et une relation d'ordre partiel  $\sqsubseteq$ .

### Relation d'ordre partiel $\sqsubseteq$

- ▶  $\sqsubseteq \subseteq X \times X$
- ▶  $\{(a, a) | a \in X\} \subseteq \sqsubseteq$  (réflexivité)
- ▶  $\forall (a, b). ((a \in X \wedge b \in X \wedge (a \sqsubseteq b) \wedge (b \sqsubseteq a)) \Rightarrow (a = b))$   
(anti-symétrie)
- ▶  $(\sqsubseteq; \sqsubseteq) \subseteq \sqsubseteq$  (transitivité)



Soit une structure partiellement ordonnée  $(X, \sqsubseteq)$ . Soit une fonction totale  $F$  sur  $X$  à valeurs dans  $X$ . On dit que  $fp \in X$  est un point-fixe de  $F$ , si  $F(fp) = fp$ .

### Point-fixe $fp$ de $F$

- ▶  $fp \in X$
- ▶  $F \in X \longrightarrow X \quad F(fp) = fp$

### Structure partiellement ordonnée inductive (ou CPO)

Une structure partiellement ordonnée inductive (ou un CPO Complete Partially Ordered Set) est une structure partiellement ordonnée  $(D, \sqsubseteq)$  telle que :

- ①  $D$  admet un plus petit élément noté  $\perp_D : \forall d \in D. \perp_D \sqsubseteq d$ .
- ② tout ensemble dirigé  $X$  de  $D$  ( $X$  est dirigé, si  $X$  est non-vide et si  $\forall x, y \in X. \exists z \in X. [x \sqsubseteq z \text{ et } y \sqsubseteq z]$ ) admet une borne supérieure dans  $D$ .

### Chaîne (ou structure totalement ordonnée)

Une structure partiellement ordonnée inductive est une chaîne, si :

$$\forall d, d' \in D, d \sqsubseteq d' \text{ ou } d' \sqsubseteq d.$$

- 1 Introduction
- 2 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 3 TOP MALG2**
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- 7 Applications
  - Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives
  - Lemme de Arden
  - Grammaires algébriques
  - Définition inductive
- 8 Conclusion

### Propriété de réduction aux chaines (théorème)

Une structure partiellement ordonnée inductive (ou un CPO Complete Partially Ordered Set, ou une structure partiellement ordonnée complète (inductive)) est une structure partiellement ordonnée  $(D, \sqsubseteq)$  telle que :

- 1  $D$  admet un plus petit élément noté  $\perp_D : \forall d \in D. \perp_D \sqsubseteq d$ .
- 2 toute chaîne  $C$  de  $D$  admet une borne supérieure dans  $D$ .

- ▶ Montrer qu'une structure est une structure partiellement ordonnée inductive revient à ne montrer la propriété que pour les chaînes de la structure.
- ▶ La démonstration utilise l'axiome du choix qui permet de construire une chaîne à partir d'un ensemble dirigé.

### Flat CPO

Soit  $D$  un ensemble et  $\perp$  un élément qui n'est pas élément de  $D$ . On définit l'ordre partiel sur  $D \cup \{\perp\} \sqsubseteq$  comme suit :

$$\forall d \in D \cup \{\perp\}. d \sqsubseteq d$$

$$\forall d \in D \cup \{\perp\}. \perp \sqsubseteq d$$

On notera  $D^\perp = D \cup \{\perp\}$ .  $(D^\perp, \sqsubseteq)$  est un CPO.

### Ensemble des fonctions partielles $A \rightarrowtail B$

Soit  $A$  un ensemble et  $B$  un autre ensemble. On notera  $\mathfrak{F}(A, B)$  ou  $A \rightarrowtail B$  l'ensemble des fonctions de  $A$  dans  $B$ .

$f \sqsubseteq g$  si, et seulement si,  $(\text{dom}(f) \subseteq \text{dom}(g))$  et  $(\forall x \in \text{dom}(f). f(x) = g(x))$ .

### Propriété de $(A \rightarrowtail B, \sqsubseteq)$

$(A \rightarrowtail B, \sqsubseteq)$  est une structure partiellement ordonnée inductive où  $\perp_{A \rightarrowtail B}$  est la fonction définie nulle part.

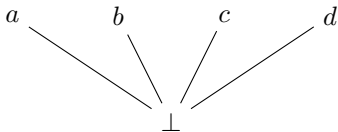
### Ensemble des parties d'un ensemble

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble des parties de  $E$ .  $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$  est une structure partiellement ordonnée inductive.

Soit  $(A, \sqsubseteq)$  une structure partiellement ordonnée et  $D \subseteq A$ .

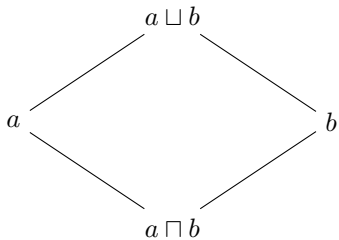
- ▶  $x$  est un majorant de  $D$ , si  $\forall d \in D : d \sqsubseteq x$
- ▶  $x$  est un minorant de  $D$ , si  $\forall d \in D : x \sqsubseteq d$
- ▶ La borne supérieure d'une partie de  $D$  est le plus petit des majorants.
- ▶ La borne inférieure d'une partie de  $D$  est le plus grand des minorants.
- ▶  $x \sqcup y$  est la borne supérieure de  $\{x, y\}$ , lorsqu'elle existe.
- ▶  $x \sqcap y$  est la borne inférieure de  $\{x, y\}$ , lorsqu'elle existe.
- ▶  $Sup(D) = \sqcup D = \vee D$  : borne supérieure de  $D$  quand elle existe.
- ▶  $Min(D) = \sqcap D = \wedge D$  : borne inférieure de  $D$  quand elle existe.





►  $D = \{a, b, c, d\}$

►  $D^\perp = \{a, b, c, d\}$



## ✓ Illustration ds notations

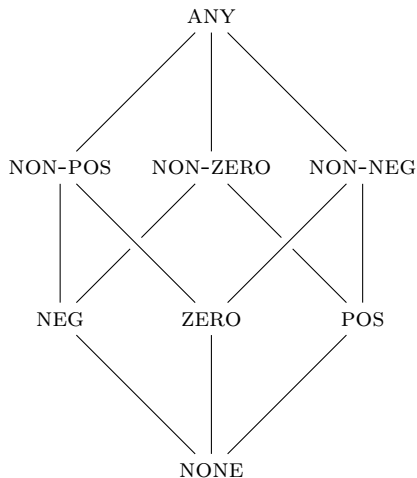
---



## ✓ Illustration ds notations

---





- ▶ ANY désigne l'ensemble des entiers
- ▶ NON-POS désigne l'ensemble des entiers négatifs ou nuls
- ▶ POS désigne l'ensemble des entiers positifs non nuls.
- ▶ ZERO est l'ensemble contenant uniquement 0.

- ▶ Une fonction  $f$  de  $(D_1, \sqsubseteq)$ , dans  $(D_2, \sqsubseteq)$  est monotone croissante, si :

$$\forall d, d' \in D_1, d \sqsubseteq_1 d' \Rightarrow f(d) \sqsubseteq_2 f(d')$$

- ▶ Un ouvert  $O$  de  $D$  est une partie de  $D$  satisfaisant :
  - ① Si  $x \in O$  et  $x \sqsubseteq y$ , alors  $y \in O$ .
  - ② Si  $X$  est une partie dirigée de  $D$  telle que  $\sqcup X \in O$ , alors  $X \cap O \neq \emptyset$ .

- ▶ Une fonction  $f$  est continue pour une topologie donnée, si l'image réciproque de tout ouvert  $O$  est un ouvert : si  $O$  est un ouvert,  $f^{-1}(O)$  est un ouvert.
- ▶ Théorème : Soit  $f$  une fonction définie de  $(D, \sqsubseteq)$  dans  $(D', \sqsubseteq')$ .  $f$  est continue pour la topologie de Scott si, et seulement si, pour tout ensemble dirigé  $X$  de  $D$ ,  $f(\sqcup X) = \sqcup f(X)$ .
- ▶ Une première conséquence du choix de la topologie de Scott est que toute fonction continue est monotone.

- 1 Introduction
- 2 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 3 TOP MALG2
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- 7 Applications
  - Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives
  - Lemme de Arden
  - Grammaires algébriques
  - Définition inductive
- 8 Conclusion







- $x \stackrel{def}{=} \bigvee_{i \geq 0} f^i$  où  $\forall i \in \text{nat}^* : f^{i+1} = f(f^i)$  et  $f^0 = \perp_D$  :  
 $x$  existe car  $(D, \sqsubseteq)$  est une structure inductive.

►  $x \stackrel{def}{=} \bigvee_{i \geq 0} f^i$  où  $\forall i \in \text{nat}^* : f^{i+1} = f(f^i)$  et  $f^0 = \perp_D$  :  
 $x$  existe car  $(D, \sqsubseteq)$  est une structure inductive.

►  $x$  est un point-fixe de  $f$  :

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{\text{definition}}{=} f\left(\bigvee_{i \geq 0} f^i\right) \stackrel{\text{continuite}}{=} \bigvee_{i \geq 0} f(f^i) \\ &\bigvee_{i \geq 0} f(f^i) \stackrel{\text{definition de la suite}}{=} \bigvee_{i \geq 0} f^{i+1} \stackrel{\text{renommage}}{=} \\ &\bigvee_{j > 0} f^j \stackrel{\text{propriete de } \perp_D}{=} \perp_D \sqcup \bigvee_{j > 0} f^j = x \end{aligned}$$

►  $x \stackrel{def}{=} \bigvee_{i \geq 0} f^i$  où  $\forall i \in \text{nat}^* : f^{i+1} = f(f^i)$  et  $f^0 = \perp_D$  :  
 $x$  existe car  $(D, \sqsubseteq)$  est une structure inductive.

►  $x$  est un point-fixe de  $f$  :

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{\text{definition}}{=} f\left(\bigvee_{i \geq 0} f^i\right) \stackrel{\text{continuite}}{=} \bigvee_{i \geq 0} f(f^i) \\ &\bigvee_{i \geq 0} f(f^i) \stackrel{\text{definition de la suite}}{=} \bigvee_{i \geq 0} f^{i+1} \stackrel{\text{renommage}}{=} \\ &\bigvee_{j > 0} f^j \stackrel{\text{propriete de } \perp_D}{=} \perp_D \sqcup \bigvee_{j > 0} f^j = x \end{aligned}$$

►  $x$  est le plus petit point-fixe de  $F$ .

Soit  $y$  un autre point-fixe de  $f$  :

- $\perp_D \sqsubseteq y$
- Si  $\forall j \in \{0, \dots, i-1\} : f^j \sqsubseteq y$ , alors  $f^i \sqsubseteq y$ .
- $\forall j \in \text{nat} : f^j \sqsubseteq y$

D'où  $x \sqsubseteq y$ .

□

## Un exemple de fonction

---

```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x <0 */
        return(f5(-x));}
      }
}
```

```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x <0 */
        return(f5(-x));}
      }
}
```

- ▶ Déterminer l'espace du problème :  
 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ Définir la fonctionnelle définissant l'équation du problème :  
 $\mathcal{F} \in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$





```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x <0 */
        return(f5(-x));}
      }
}
```

- ▶ Déterminer l'espace du problème :  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ Définir la fonctionnelle définissant l'équation du problème :  $\mathcal{F} \in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$
- ▶  $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$  est un CPO pour l'ordre *moins défini que*.
- ▶  $\mathcal{F}$  est continue pour la topologie de Scott

```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x <0 */
       return(f5(-x));}
    }
}
```

- ▶ Déterminer l'espace du problème :  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ Définir la fonctionnelle définissant l'équation du problème :  $\mathcal{F} \in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$
- ▶  $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$  est un CPO pour l'ordre *moins défini que*.
- ▶  $\mathcal{F}$  est continue pour la topologie de Scott
- ▶  $f5$  satisfait l'équation  $\mathcal{F}(f5) = f5$

```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if (x > 0)
      {return(2-f5(1-x));}
      else
      {/* x <0 */
        return(f5(-x));}
      }
}
```

- ▶ Déterminer l'espace du problème :  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ Définir la fonctionnelle définissant l'équation du problème :  $\mathcal{F} \in (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$
- ▶  $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$  est un CPO pour l'ordre *moins défini que*.
- ▶  $\mathcal{F}$  est continue pour la topologie de Scott
- ▶  $f5$  satisfait l'équation  $\mathcal{F}(f5) = f5$

$\mathcal{F}(f)(x) = \text{if } (x == 0) \text{ then } 0 \text{ elseif } (x > 0) \text{ then } 2 - f(1 - x) \text{ else } f(-x) \text{ fi}$
---

# Développer la solution par itération

---

►  $\mathcal{F}^0 = \{\}$

▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$

▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$



- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^4) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^4) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^6 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^5) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^4) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^6 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^5) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^7 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^6) = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^4) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^6 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^5) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^7 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^6) = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$
- ▶ ...

- ▶  $\mathcal{F}^0 = \{\}$
- ▶  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^0) = \{(0, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^1) = \{(0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3) = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^4) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^6 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^5) = \{(-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$
- ▶  $\mathcal{F}^7 = \mathcal{F}(\mathcal{F}^6) = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$
- ▶ ...
- ▶  $g(x) = \text{if } \text{odd}(x) \text{ then } 2 \text{ else } 0 \text{ fi}$  est solution de cette équation et  $\mu\mathcal{F} \sqsubseteq g$  mais on doit montrer que  $\mu\mathcal{F} = g$

- ▶ Un prédicat  $P$  sur un ensemble inductif  $(D, \sqsubseteq)$  (CPO) est admissible, si, pour tout ensemble dirigé  $A$  de  $D$ , si, pour tout  $a$  de  $A$   $P(a)$ , alors  $P(\bigvee A)$ .
- ▶ Principe d'induction du point fixe :  
Soit  $(D, \sqsubseteq)$  une structure inductive,  $P$  un prédicat admissible sur  $D$ ,  
 $F$  une fonction continue de  $D$  dans  $D$ .  
Si
  - ①  $P(\perp_D)$
  - ② Soit  $d \in D$  tel que  $P(d)$  :

$\vdots$

$P(F(d)).$

Alors  $P(\mu F)$ .

- ▶  $P(x)$  défini par  $x = a$  est admissible.
- ▶  $P(x)$  défini par  $x \sqsubseteq a$  est admissible.
- ▶ Si  $f_i$  et  $g_i$  sont deux suites de fonctions continues sur un CPO  $(D, \sqsubseteq)$ , alors  $\bigwedge_i f_i(x) \sqsubseteq g_i(x)$  est un prédicat admissible.

### Fonction 91 de McCarthy

- ▶  $F(f)(x) = \text{si } 100 < x \text{ alors } x-10 \text{ sinon } f(f(x+11))$  *fi* et  $g(x) = \text{si } 100 < x \text{ then } x-10 \text{ sinon } 91$  *fi*. Montrez que  $\mu F \sqsubseteq g$ .



- ▶  $F(f)(x) = \text{si } x > 100 \text{ alors } x-10 \text{ sinon } f(f(x+11)) \text{ fi}$
- ▶ et  $g(x) = \text{si } x > 100 \text{ then } x-10 \text{ sinon } 91 \text{ fi.}$
- ▶ On peut montrer que  $\mu f \sqsubseteq g$ .
- ▶ Puis on peut en déduire que  $\mu f = g$ , en montrant que la fonction  $\mu f$  est totale.

$\mathcal{F}(f)(x) = \text{if } (x == 0) \text{ then } 0 \text{ elseif } (x > 0) \text{ then } 2 - f(1-x) \text{ else } f(-x) \text{ fi}$

- ▶  $g(x) = \text{if } \text{odd}(x) \text{ then } 2 \text{ else } 0 \text{ fi}$  est solution de cette équation
- ▶ Utilisation de  $P(f) \stackrel{\text{def}}{=} f \sqsubseteq g$
- ▶ Montrer que  $\text{dom}(\mu f) = \mathbb{N}$  :
  - $\mathcal{F}^{2n} = \{(p, v_p) | 0 \leq p < n \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(p, v_p) | 0 > p \geq -(n-1) \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(n, g(n))\}$
  - $\mathcal{F}^{2n+1} = \{(p, v_p) | 0 \leq p < n \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(p, v_p) | 0 > p \geq -(n-1) \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(n, g(n)), (-n, g(-n))\}$
  - $\mu \mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup \mathcal{F}^3 \cup \dots \cup \mathcal{F}^{2n} \cup \mathcal{F}^{2n+1} \dots$
  - Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathcal{F}^{2p} \cup \mathcal{F}^{2p+1}$  par construction de cette suite.

- 1 Introduction
- 2 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 3 TOP MALG2
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- 7 Applications
  - Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives
  - Lemme de Arden
  - Grammaires algébriques
  - Définition inductive
- 8 Conclusion

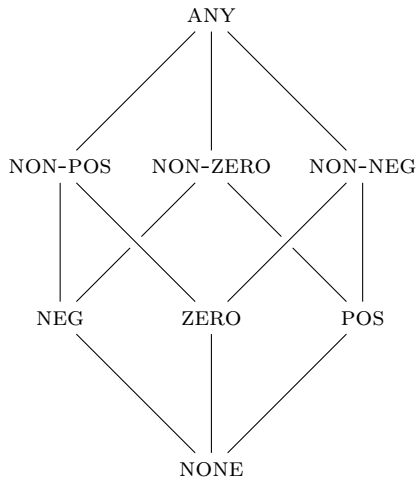
### ☒ Definition

Un treillis complet  $(L, \sqsubseteq)$  est un treillis satisfaisant les propriétés suivantes :

- 1 Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne supérieure notée  $\sqcup A$ .
- 2 Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne inférieure notée  $\sqcap A$ .

### ☼ Exemple

- 1 Un exemple simple est la structure  $(\mathcal{P}(E), \subseteq, \emptyset, \cup, E, \cap)$  associée à l'ensemble des parties d'un ensemble  $E$ .
- 2 Treillis des signes est un treillis complet  
 $Signs =$   
 $\{\text{NONE}, \text{ZERO}, \text{NON-ZERO}, \text{ANY}, \text{POS}, \text{NEG}, \text{NON-NEG}, \text{NON-POS}\}$   
 $(Signs, \sqsubseteq)$
- 3 Treillis des intervalles
  - $\mathbb{I}(\mathbb{Z}) = \{\perp\} \cup \{[l, u] \mid l \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, u \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, l \leq u\}$
  - $[l_1, u_1] \sqsubseteq [l_2, u_2]$  si, et seulement si,  $l_2 \leq l_1$  et  $u_1 \leq u_2$ .
  - $(\mathbb{I}(\mathbb{Z}), \sqsubseteq)$  est un treillis complet



- ▶ ANY désigne l'ensemble des entiers
- ▶ NON-POS désigne l'ensemble des entiers négatifs ou nuls
- ▶ POS désigne l'ensemble des entiers positifs non nuls.
- ▶ ZERO est l'ensemble contenant uniquement 0.

- ▶  $\mathbb{I}(\mathbb{Z}) = \{\perp\} \cup \{[l, u] \mid l \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, u \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, l \leq u\}$
- ▶  $[l_1, u_1] \sqsubseteq [l_2, u_2]$  si, et seulement si,  $l_2 \leq l_1$  et  $u_1 \leq u_2$ .
- ▶  $(\mathbb{I}(\mathbb{Z}), \sqsubseteq)$  est une structure partiellement ordonnée.
- ▶
  - 1  $[l_1, u_1] \sqcup [l_2, u_2] = [\min(l_1, l_2), \max(u_1, u_2)]$
  - 2  $[l_1, u_1] \sqcap [l_2, u_2] = \begin{cases} [\max(l_1, l_2), \min(u_1, u_2)] \\ \perp, \text{ si } \max(l_1, l_2) > \min(u_1, u_2) \end{cases}$
- ▶  $(\mathbb{I}(\mathbb{Z}), \sqcup)$  est un treillis complet.

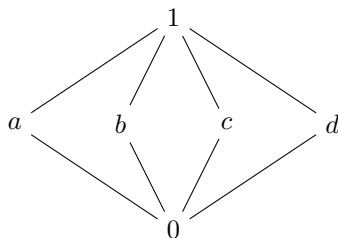
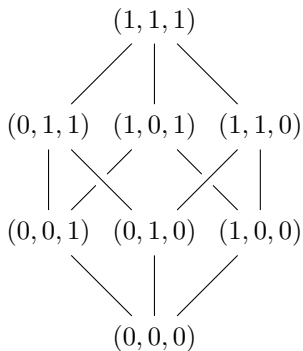
.....

### ☒ Definition

Un treillis complet  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$  est un treillis satisfaisant les propriétés suivantes :

- ① Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne supérieure notée  $\sqcup A$ .
  - ② Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne inférieure notée  $\sqcap A$ .
- .....

- ▶ Un treillis complet  $(L, \sqsubseteq, )$  peut être défini par les éléments suivants  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$
- ▶ Un treillis est une structure munie d'un ordre partiel et telle que deux éléments ont une borne supérieure et une inférieure dans le treillis :  $(L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap)$ 
  - $a \sqcup b$  existe et est la borne supérieure des deux éléments  $a$  et  $b$ .
  - $a \sqcap b$  existe et est la borne inférieure des deux éléments  $a$  et  $b$ .





- 1 Introduction
- 2 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 3 TOP MALG2
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- 7 Applications
  - Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives
  - Lemme de Arden
  - Grammaires algébriques
  - Définition inductive
- 8 Conclusion

Pour une fonction  $f$  définie sur un treillis  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$  et à valeurs dans  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$ .

### Définition

- ▶ on appelle pré-point-fixe de  $f$ , tout élément  $x$  de  $L$  satisfaisant la propriété  $f(x) \sqsubseteq x$
- ▶ on appelle post-point-fixe de  $f$ , tout élément  $x$  de  $L$  satisfaisant  $x \sqsubseteq f(x)$ .
- ▶  $PostFIX(f) = \{x | x \in L \wedge x \sqsubseteq f(x)\}$  : l'ensemble des post-points-fixes de  $f$ .
- ▶  $PreFIX(f) = \{x | x \in L \wedge f(x) \sqsubseteq x\}$  : l'ensemble des pré-points-fixes de  $f$ .
- ▶  $FIX(f) = \{x | x \in L \wedge f(x) = x\}$  : l'ensemble des points-fixes de  $f$ .

### Théorème de Knaster-Tarski (I)

Soit  $f$  une fonction monotone croissante sur un treillis complet  $(T, \perp, \top, \bigvee, \bigwedge)$ . Alors il existe un plus petit point fixe et un plus grand point fixe pour  $f$ .

- ▶  $\mu f$  désigne le plus petit point fixe de  $f$ .
- ▶  $\nu f$  désigne le plus grand point fixe de  $f$ .
- ▶  $\mu f$  vérifie les propriétés suivantes :  $f(\mu f) = \mu f$  et  $\forall x \in T. f(x) \sqsubseteq x \Rightarrow \mu f \sqsubseteq x$  ( $\mu f$  est la borne inférieure des prépoints fixes de  $f$  ou  $\bigwedge(Pre(f))$ ).
- ▶  $\nu f$  vérifie les propriétés suivantes :  $f(\nu f) = \nu f$  et  $\forall x \in T. x \sqsubseteq f(x) \Rightarrow x \sqsubseteq \nu f$  ( $\nu f$  est la borne supérieure des postpoints fixes de  $f$  ou  $\bigvee(Post(f))$ ).

Posons  $y = \bigwedge \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$  et montrons que  $y$  est un point fixe de  $f$  et que  $y$  est le plus petit point fixe de  $f$ .

①  $f(y) \sqsubseteq y$

- Pour tout  $x$  de  $\{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$ ,  $y \sqsubseteq x$
- $f(y) \sqsubseteq f(x)$  (par monotonie de  $f$ ).
- $f(x) \sqsubseteq x$  (par définition de  $x$ ).
- $f(y) \sqsubseteq x$  (par déduction).
- $f(y) \sqsubseteq \bigwedge \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$  (par définition de la borne inférieure,  $f(y)$  est un minorant).
- $f(y) \sqsubseteq y$

②  $y \sqsubseteq f(y)$

- $f(y) \sqsubseteq y$  (par le cas 1)
- $f(f(y)) \sqsubseteq f(y)$  (par monotonie de  $f$ )
- $f(y) \in \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- $y \sqsubseteq f(y)$  (par définition de la borne inférieure)

③ Conclusion :  $f(y) = y$  ou  $y \in FIX(f)$ .

- ▶  $f(y) = y$  et  $z$  tel que  $f(z) = z$ 
  - $f(z) = z$  (par hypothèse sur  $z$ )
  - $f(z) \sqsubseteq z$  (par affaiblissement de l'égalité)
  - $z \in \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$  (par définition de cet ensemble)
  - $y \sqsubseteq z$  (par construction)
- ▶  $y$  est le plus petit point fixe de  $f$ .

### $\text{lfp}(f)$ et $\text{gfp}(f)$

- ▶  $\mu f = \text{lfp}(f) = \bigwedge \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
  - ▶  $\nu f = \text{gfp}(f) = \bigvee \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$
- 
- ▶  $\text{lfp}(f)$  signifie *least fixed-point*
  - ▶  $\text{gfp}(f)$  signifie *greatest fixed-point*

$$\begin{array}{c} \top \\ | \\ x \in \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\} \\ | \\ \nu f \\ | \\ x \in \{x \mid x = f(x)\} \\ | \\ \mu f \\ | \\ x \in \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\} \\ | \\ \perp \end{array}$$

- ▶  $\top = \sqcup \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $gfp(f) = \nu f = \sqcup \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$
- ▶  $lfp(f) = \mu f = \sqcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $\perp = \sqcap \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$

►  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)

- ▶  $x \in pre(f)$  **si, et seulement si**,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)



- ▶  $x \in pre(f)$  **si, et seulement si**,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  **si, et seulement si**,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )
- ▶  $f(\mu f) \in pre(f)$  (définition des pré-points-fixes)

- ▶  $x \in pre(f)$  **si, et seulement si**,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )
- ▶  $f(\mu f) \in pre(f)$  (définition des pré-points-fixes)
- ▶  $\mu f \leq f(\mu f)$  (définition de  $\mu f$ )
- ▶  $\mu f = f(\mu f)$  (définition de  $\mu f$  et propriété précédente)

## Version constructive du théorème de Knaster-Tarski

Soit  $f$  une fonction monotone croissante sur un treillis complet  $(T, \perp, \top, \vee, \wedge)$ . Alors

- 1 La structure formée des points fixes de  $f$  sur  $T$ ,  $(fp(f), \sqsubseteq)$  est un treillis complet non-vide.

$$fp(f) = \{x \in T : f(x) = x\}$$

- 2  $lfp(f) \stackrel{def}{=} \bigvee_{\alpha} f^{\alpha}$  est le plus petit point fixe de  $f$  où :

$$\left\{ \begin{array}{lll} & f^0 & \stackrel{def}{=} \perp \\ \alpha \text{ ordinal successeur} & f^{\alpha+1} & \stackrel{def}{=} f(f^{\alpha}) \\ \alpha \text{ ordinal limite} & f^{\alpha} & \stackrel{def}{=} \bigvee_{\beta < \alpha} f^{\beta} \end{array} \right.$$

- 3  $gfp(f) \stackrel{def}{=} \bigwedge_{\alpha} f_{\alpha}$  est le plus grand point fixe de  $f$  où

$$\left\{ \begin{array}{lll} & f_0 & \stackrel{def}{=} \top \\ \alpha \text{ ordinal successeur} & f_{\alpha+1} & \stackrel{def}{=} f(f_{\alpha}) \\ \alpha \text{ ordinal limite} & f_{\alpha} & \stackrel{def}{=} \bigwedge_{\beta < \alpha} f_{\beta} \end{array} \right.$$

- 1 Introduction
- 2 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 3 TOP MALG2
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

## 7 Applications

- Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives
- Lemme de Arden
- Grammaires algébriques
- Définition inductive

## 8 Conclusion

- 1 Introduction
- 2 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 3 TOP MALG2
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

### 7 Applications

Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives

Lemme de Arden

Grammaires algébriques

Définition inductive

### 8 Conclusion



- ▶  $\mathcal{F}$  est la classe de toutes les fonctions
- ▶ La théorie des fonctions récursives concerne l'étude des fonctions dites **calculables**.
- ▶ Une méthode de calcul  $\mathcal{M}$  est définie par une syntaxe permettant de représenter les données et un ensemble de règles de transformations sur les données : le modèle des machines de Turing  $\mathcal{T}$ , le modèle des grammaires  $\mathcal{G}$ , le modèle des Unlimited Register Machines URM  $\mathcal{U}$ , le modèle d'un langage de programmation  $\mathcal{P}$ , ...
- ▶ Une partielle fonction  $f \in A \rightarrow B$  est calculable, s'il existe une procédure effective ou automatisée  $P$  selon la méthode  $\mathcal{M}$  telle que

$$\forall a \in \text{dom}(f) : \forall b \in B : f(a) = b \Leftrightarrow a \xrightarrow{P} b \quad (1)$$

- ▶ La classe des fonctions calculables est notée  $\mathcal{C}$ .

## Source bibliographique

*Les deux formes de la thèse de Church-Turing et l'épistémologie du calcul* par Maël Pégny

## Deux formes de la thèse

- ▶ forme algorithmique : toute fonction calculable par un algorithme est calculable par une machine de Turing :

## Theorem

(équivalence des modèles de calcul)  $\mathcal{C} = \mathcal{R} = \mathcal{T} = \mathcal{R} = \mathcal{G}$

- ▶ forme empirique : toute fonction calculable par une machine est calculable par une machine de Turing.

### Question

*L'ensemble des fonctions calculables par une machine est-il identique à l'ensemble des fonctions calculables par un algorithme ?*

*S'il existait une fonction calculable par une machine sans être calculable par un algorithme, il existerait un problème mathématique qui serait soluble par un dispositif empirique, sans être soluble par aucune méthode mathématique a priori.*

- $\mathcal{F}$  est la classe des fonctions partielles sur l'ensemble des naturels  $\mathbb{N}$  : si  $f \in \mathcal{F}$ , alors il existe  $n$  et  $m$  tels que  $\text{dom}(f) \subseteq \mathbb{N}^n$  et  $\text{ran}(f) \subseteq \mathbb{N}^m$ .
- $(\mathcal{F}, \sqsubseteq)$  est une structure partiellement ordonnée inductive où  $\sqsubseteq$  est la relation *moins définie que*

$$f \sqsubseteq g \text{ si, et seulement si, } \begin{cases} \text{dom}(f) \subseteq \text{dom}(g) \\ \forall x \in \text{dom}(f) : f(x) = g(x) \end{cases}$$

### Opérateur récursif sur $\mathcal{F}$ ,

Soient  $\mathcal{F}_i = \mathbb{N}^i \rightarrow \mathbb{N}$  et  $f \in \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$  une fonction partielle. On dit que  $f$  est récursif, s'il existe une fonction calculable  $h(z, x)$  telle que pour toute fonction  $g \in \mathcal{F}_m$ , pour tout  $x$  de  $\mathbb{N}^n$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $h(z, x) = y$  si, et seulement si, il existe une fonction à domaine fini  $g \sqsubseteq f$  satisfaisant  $h(\dot{g}, x) = y$

$\dot{g}$  est la valeur associée à  $g$  et définie par

$$\dot{g} = \begin{cases} \prod_{i \in \text{dom}(g)} p_{<x>}^{g(x)+1} & \text{si } \text{dom}(g) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \text{dom}(g) = \emptyset \end{cases}$$

.....

☺ Théorème

Soient  $\mathcal{F}_i = \mathbb{N}^i \rightarrow \mathbb{N}$  et  $f \in \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$  une fonction partielle.  
 $f$  est récursif si, et seulement si,

- ①  $f$  est continue pour l'ordre  $\sqsubseteq$ .
- ② la fonction  $h$  définie par : 
$$\begin{cases} h(\dot{g}, x) = f(g)(x) & \text{si } g \in \mathcal{F}_m \\ h(z, x) & \text{indefinie} \end{cases}$$
 est calculable.

.....

☺ Théorème

Soit  $f \in \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_m$  un opérateur récursif. Alors il existe un élément  $x$  de  $\mathcal{F}_m$  tel que

$$\begin{cases} f(x) = x \\ \forall y \in \mathcal{F}_m : (f(y) = y) \Rightarrow (x \sqsubseteq y) \end{cases} \quad \text{et } x \text{ est calculable.}$$

---

- 1 Introduction
- 2 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 3 TOP MALG2
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- 7 Applications**

Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives

Lemme de Arden

Grammaires algébriques

Définition inductive

- 8 Conclusion

- ▶ Soit l'ensemble des parties de  $\Sigma^*$  munies des opérations classiques des ensembles et l'opération de concaténation.
- ▶ La fonction  $\mathcal{F}$  définie sur cet ensemble à valeur dans le même ensemble associe à tout ensemble un ensemble obtenu par application des opérations ensemblistes et de la concaténation :  
$$\mathcal{F}(X) = A.X \cup B$$
- ▶  $(\mathcal{P}(\Sigma^*), \emptyset, \Sigma^*, \cup, \cap)$  est un treillis complet.
- ▶  $\mathcal{F}$  admet un plus petit point fixe qui est le langage régulier caractérisé par l'expression régulière  $a^*b$

- 1 Introduction
- 2 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 3 TOP MALG2
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

### 7 Applications

Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives

Lemme de Arden

Grammaires algébriques

Définition inductive

### 8 Conclusion



- ▶ Soit une grammaire algébrique  $G = (N, T, P, S)$  définissant un langage sur  $T$ .
- ▶ On définit pour cette grammaire un opérateur sur  $T^*$  l'ensemble des mots finis sur  $T$ , noté  $\mathcal{F}_G$  comme suit :
  - $N = \{X_1, \dots, X_n\}$
  - $S = X_1$  et  $X = (X_1, \dots, X_n)$ .
  - $\mathcal{F}_G(X)$  est construit par application des règles de  $P$  pour chaque non terminal  $X_i$
  - Si  $X_i \rightarrow v_1 + \dots + v_p$ , on obtient l'ensemble par remplacement des  $X_k$  dans les  $v_p$ .
- ▶ Exemple :
  - $N = \{X, Y, Z\}$
  - $T = \{a, b\}$
  - $P = \{X \rightarrow aYZb, Y \rightarrow aY, Z \rightarrow Zb, Y \rightarrow a, Z \rightarrow b\}$
  - $$F(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} aYZb \\ aY \cup \{a\} \\ Zb \cup \{b\} \end{pmatrix}$$

- ▶  $F$  est monotone croissante sur  $(\{X, Y, Z, a, b\}^*)^3$ .
- ▶ 
$$\begin{pmatrix} X = aYZb \\ Y = aY \cup \{a\} \\ Z = Zb \cup \{b\} \end{pmatrix}$$
- ▶  $\mu F$  est le plus petit point fixe.
- ▶  $L(G) = \pi_1^3(\mu F)$

- 1 Introduction
- 2 Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- 3 TOP MALG2
- 4 Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- 5 Treillis
- 6 Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski

### 7 Applications

Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives  
Lemme de Arden  
Grammaires algébriques  
Définition inductive

### 8 Conclusion

- ▶ L'ensemble  $\mathcal{EVEN}$  des nombres naturels pairs est le plus petit ensemble stable par application des règles suivantes :
  - ①  $0 \in \mathcal{EVEN}$
  - ② Si  $n \in \mathcal{EVEN}$ , alors  $n+2 \in \mathcal{EVEN}$
- ▶ Opérateur induit :  $\mathcal{F}(X) = \{0\} \cup \{n+2 \mid n \in X\}$
- ▶  $\mathcal{F} \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{N})$
- ▶  $\mathcal{F}(\mathcal{EVEN}) = \mathcal{EVEN}$  et  $\mathcal{EVEN} = \mu\mathcal{F}$ .

- ▶ Une définition inductive  $\mathcal{I}$  est une structure  $(U, \mathcal{F}, \perp, \sqcup)$  où
  - $U$  est un ensemble appelé l'univers
  - $\mathcal{R}$  est un ensemble de règles de la forme **Si**  $P$ , **alors**  $C$  où  $P \subseteq U$  et  $C \in U$ .
  - $\perp \in U$
  - $\sqcup \in \mathbb{P}(\mathbb{P}(U)) \longrightarrow \mathbb{P}(U)$
- ▶ Pour une définition inductive, on peut dériver un opérateur induit  $\mathcal{F}$  :  
$$\mathcal{F}(X) = \{c \in U \mid \exists P \subseteq X : \textbf{Si } P, \textbf{ alors } C \in \mathcal{R}\}$$
- ▶  $\mathcal{F}_1(X) = \{0\} \cup \{n+3 \in \mathbb{N} \mid n \in X\}$
- ▶  $\mathcal{F}_2(X) = \text{Init} \cup \{u \in U \mid \exists s. s \xrightarrow{*} u \wedge s \in X\}$

$$\forall A. A \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in A \wedge \text{suc}[A] \subseteq A \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq A$$

- ▶  $0 \in A$
- ▶ Pas d'induction
  - Hypothèse  $n \in A$
  - Conclusion  $\text{suc}(n) \in A$
- ▶ Conclusion  $\forall n. n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in A$

Soit la propriété suivante à démontrer  $\forall n. n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in P(n)$  :

- ①  $A \stackrel{\text{def}}{=} \{n | n \in \mathbb{N} \wedge P(n)\}$
- ②
  - $0 \in A$
  - Pas d'induction
    - ▶ Hypothèse  $n \in A$
    - ▶ Conclusion  $\text{suc}(n) \in A$
  - Conclusion  $\forall n. n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in A$

- ① Introduction
- ② Structures Partiellement Ordonnées Inductives (CPO)
- ③ TOP MALG2
- ④ Point-fixe pour une fonction continue au sens de Scott
- ⑤ Treillis
- ⑥ Théorèmes du point-fixe de Knaster-Tarski
- ⑦ Applications
  - Théorème du point-fixe de la théorie des fonctions récursives
  - Lemme de Arden
  - Grammaires algébriques
  - Définition inductive
- ⑧ Conclusion

- ▶ Théorèmes de point-fixe :
  - Théorème de Kleene pour les fonctions récursives ou calculables
  - Définition d'un langage par un système d'équations
  - Calcul de ces points-fixes
- ▶ Applications de ces résultats :
  - Analyse des structures inductives
  - Sémantique des langages de programmation
  - Fondements de l'analyse sémantique des langages de programmation et techniques d'analyse automatisée