Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations
Exercices
Structures partiellement ordonnées, treillis complets, points-fixes (I)
par Dominique Méry
24 avril 2025

Exercice 1 *Montrer que les structures suivantes sont des structures partiellement ordonnées inductives :*

Question 1.1 $(\mathbb{P}(E), \subseteq)$ *avec* E *un ensemble quelconque.*

Question 1.2 $(E^{\perp}, \sqsubseteq)$ *tel que*

1. $E^{\perp} = E \cup \perp$ *(et* $\perp \notin E$*)*
2. $\sqsubseteq \subseteq E \times E$ *: soit* $x \in E$ *et* $y \in E$ $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow (x = \perp \vee x = y)$

Question 1.3 *Soient* A *et* B *deux ensembles. Montrer que la structure* $(A \mathrel{+\!\!\!\!\to} B, \sqsubseteq)$ *est une structure partiellement ordonnée inductive.*

Exercice 2 *On rappelle qu'une fonction continue au sens de la topologie de Scott est monotone croissante. Indiquer et montrer si les fonctionnelles suivantes sont monotones et/ou continues).*

1. $(F_1(f))(x) \widehat{=}$ if $(\forall y \in \mathbb{Z}. f(y) = y)$ then $f(x)$ else $\perp$
2. $(F_2(f))(x) \widehat{=}$ if $x \notin dom(f)$ then 0 else $\perp$
3. $(F_3(f))(x) \widehat{=}$ if $x = 0$ then 1 else $f(x+1)$

$\perp$ *est une expression qui signifie que cést une valeur indéfinie.*

Question 2.1 $(F_1(f))(x) \widehat{=}$ if $(\forall y \in \mathbb{Z}. f(y) = y)$ then $f(x)$ else $\perp$

Question 2.2 $(F_2(f))(x) \widehat{=}$ if $x \notin dom(f)$ then 0 else $\perp$

Question 2.3 $(F_3(f))(x) \widehat{=}$ if $x = 0$ then 1 else $f(x+1)$

Exercice 3 *Déterminer les points-fixes des fonctionnelles suivantes et leur plus petit point-fixe, s'ils existent. On travaille dans* $\mathbb{Z}$*.*

1. $F_1(f)(x) \widehat{=}$ if $f(x) \equiv 0$ then 1 else 0 *et expliquer si le programme f1 a du sens et ce qu'il calcule :*
2. $F_2(f)(x) \widehat{=}$ if $f(x) \equiv 0$ then 0 else 1
3. $F_3(f)(x) \widehat{=}$ if $x = 0$ then 1 else $f(x+1)$

Question 3.1 $F_1(f)(x) \widehat{=}$ if $f(x) \equiv 0$ then 1 else 0

Question 3.2 $F_2(f)(x) \widehat{=}$ if $f(x) = 0$ then 0 else 1

Question 3.3 $F_3(f)(x) \widehat{=}$ if $x = 0$ then 1 else $f(x+1)$

Exercice 4 *Soit* $E = \mathbb{N} \mathrel{+\!\!\!\!\to} \mathbb{N}$*, soit la fonctionnelle* $\tau \in E \mathrel{+\!\!\!\!\to} E$ *définie par :*

$$(\tau(F))(x) \widehat{=} \text{ if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x \cdot F(x-1)$$

1. *Calculer* $\tau(\varnothing)$*,* $\tau^2(\varnothing) = \tau(\tau(\varnothing))$*,* $\tau^3(\varnothing)$*. En déduire* $\tau^i(\varnothing)$ *et le démontrer par récurrence.*
2. *En déduire le plus petit point fixe.*

Question 4.1 *Calculer $\tau(\varnothing)$, $\tau^2(\varnothing) = \tau(\tau(\varnothing))$, $\tau^3(\varnothing)$. En déduire $\tau^i(\varnothing)$ et le démontrer par récurrence.*

Question 4.2 *En déduire le plus petit point fixe.*

Exercice 5 *Soit la fonctionnelle $\tau \in (\mathbb{N} \nrightarrow \mathbb{N}) \nrightarrow (\mathbb{N} \nrightarrow \mathbb{N})$:*

$$(F(f))(x) \mathrel{\widehat{=}} \text{ if } x > 100 \text{ then } x{-}10 \text{ else } f(f(x{+}11))$$

Question 5.1 *Montrez que $\mu F \sqsubseteq g$ avec*

$$g(x) \mathrel{\widehat{=}} \text{ if } x > 100 \text{ then } x{-}10 \text{ else } 91$$

Question 5.2 *Ecrire une fonction C calculant cette fonction et étudier sa correction.*

Exercice 6 *On considère une fonction $f5$ définie par le code C suivant :*

```
int f5(int x)
{if (x==0)
    { return(0);}
  else
    { if   (x > 0)
        {return(2-f5(1-x));}
      else
        {/* x <0 */
          return(f5(-x));}
    }
}
```

Question 6.1 *Traduire cette définition en une définition fonctionnelle qui précisera le domaine du problème.*

Question 6.2 *Soient les définitions suivantes où $\mathcal{F}$ désigne la fonctionnelle définie dans la question précédente :*

- $\mathcal{F}^{2n} = \{(p, v_p) | 0 \leq p < n \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(p, v_p) | 0 > p \geq -(n{-}1) \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(n, g(n))\}$
- $\mathcal{F}^{2n+1} = \{(p, v_p) | 0 \leq p < n \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(p, v_p) | 0 > p \geq -(n{-}1) \wedge v_p = g(p)\} \cup \{(n, g(n)), (-n, g(-n))\}$

Montrer qu'elles sont correctes en utilisant une récurrence.

Question 6.3 *En déduire que $\mu\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup \mathcal{F}^3 \cup \ldots \cup \mathcal{F}^{2n} \cup \mathcal{F}^{2n+1} \ldots$*

Question 6.4 *Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{F}^{2p} \cup \mathcal{F}^{2p+1}$*

Question 6.5 *Montrer que $\mu\mathcal{F}$ vérifie la propriété $\mu\mathcal{F} \sqsubseteq g$ où $g(x) = \textbf{if } odd(x) \textbf{ then } 2 \textbf{ else } 0 \textbf{ fi}$*

Question 6.6 *En déduire que $\mu\mathcal{F} = g$.*

Exercice 7 *Soit la fonction définie comme suit :* $F(f)(x) = \begin{cases} \textbf{if } x = p \textbf{ then } p \\ \textbf{else if } x = q \textbf{ then } q \\ \textbf{else } f(x{+}p{+}q) \\ \textbf{fi} \end{cases}$.

On suppose que p et q sont deux constantes non nulles entières positives distinctes et que F est une fonction partielle ($\in (\mathbb{Z} \nrightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \nrightarrow \mathbb{Z})$). On se place dans le cadre de la topologie de Scott sur léspace $(\mathbb{Z} \nrightarrow \mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z} \nrightarrow \mathbb{Z}), \sqsubseteq)$ où $f \sqsubseteq g$ signifie que f est moins définie que g (ou $graph(f) \subseteq graph(g)$).

Question 7.1 *Expliquez clairement pourquoi l'équation $F(f) = f$ admet un plus petit point-fixe.*

Question 7.2 *Ecrire une fonction C calculant le plus petit point-fixe μF de F.*

Question 7.3 1. *Calculer $\mu F(p)$, $\mu F(q)$, $\mu F(-p)$, $\mu F(-q)$.*
2. *Calculer pour k entier naturel, $\mu F(-(k+1)\cdot p - k\cdot q)$ et $\mu F(-(k+1)\cdot q - k\cdot p)$*

Question 7.4 *Donnez une expression simplifiée de la fonction μF. Pour cela, on pourra utiliser la caractérisation de μF par le théorème du point-fixe pour les fonctions continues au sens de Scott.*

Exercice 8 *On rappelle les définitions suivantes. Un modèle relationnel $\mathcal{MS}$ pour un système $\mathcal{S}$ est une structure*

$$(Th(s,c), x, \textsc{Vals}, \textsc{Init}(x), \{r_0, \ldots, r_n\})$$

où

— $Th(s,c)$ *est une théorie définissant les ensembles, les constantes et les propriétés statiques de ces éléments.*
— x *est une liste de variables flexibles.*
— $\textsc{Vals}$ *est un ensemble de valeurs possibles pour x.*
— $\{r_0, \ldots, r_n\}$ *est un ensemble fini de relations reliant les valeurs avant x et les valeurs après x'.*
— $\textsc{Init}(x)$ *définit lénsemble des valeurs initiales de x.*

On note $\textsc{Next} \stackrel{def}{=} r_0 \vee \ldots \vee r_n$. Une propriété S est une propriété de sûreté pour le système $\mathcal{S}$, si $\forall y, x \in \textsc{Vals}.Init(y) \wedge \textsc{Next}^\star(y,x) \Rightarrow x \in S$. On définit la fonction suivante F sur $\mathcal{P}(\textsc{Vals})$ à valeurs dans $\mathcal{P}(\textsc{Vals})$: $F(X) = Init \cup Next[X]$ où $Next[X]$ est lénsemble des états accessibles à partir de X par $Next$. On rappelle aussi que x peut être une variable ou une liste de variables ; $\textsc{Vals}$ est donc un ensemble de valeurs ou de tuples de valeures correspondant à x.

Question 8.1 *Montrer que $(\mathcal{P}(\textsc{Vals}), \subseteq, \varnothing, \cup, \cap)$ est un treillis complet.*

Question 8.2 *Montrer que F est croissante monotone.*

Question 8.3 *Montrer que F admet un plus petit point-fixe noté μF.*

Question 8.4 *Montrer que μF est un invariant inductif de F et que cést le plus petit.*

Question 8.5 *Montrer que, pour toute propriété de sûreté S, $\mu F \subseteq S$.*

Question 8.6 *On suppose que $\textsc{Vals}$ est finie. Montrer qu'il existe un algorithme pour vérifier qu'une propriété S est une propriété de sûreté pour un système donné défini comme ci-dessus.*