

<

Cours Modélisation et vérification des systèmes informatiques

Exercices

Modélisation d'algorithmes en PlusCal (II)

par Dominique Méry

4 décembre 2025

Exercice 1 (*Vérification de l'annotation de l'algorithme du calcul du maximum d'une liste*)
appex5_1.tla

Question 1.1 Ecrire un module TLA⁺ contenant une définition PlusCal de cet algorithme.

Question 1.2 Ecrire la propriété à vérifier pour la correction partielle.

Question 1.3 Ecrire la propriété à vérifier pour l'absence d'erreurs à l'exécution.

Vérification **precondition** : $\left(\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0 .. n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$

postcondition : $\left(\begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0 .. n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

local variables : $i \in \mathbb{Z}$

```

 $m := f(0);$ 
 $i := 1;$ 
while  $i < n$  do
  if  $f(i) > m$  then
     $m := f(i);$ 
  endif
   $i := i + 1;$ 
endwhile
;
```

Algorithme 1: Algorithme du maximum d'une liste non annotée

Exercice 2 Exponentiation *appex5_2.tla*

Soit l'algorithme annoté calculant la puissance $z = x_1^{x_2}$.

— Precondition : $x_1 \in \mathbb{N} \wedge x_2 \in \mathbb{N}$

— Postcondition : $z = x_1^{x_2}$

On suppose que x_1 et x_2 sont des constantes.

Question 2.1 Ecrire un module TLA/TLA⁺ permettant de valider les conditions de vérification et, en particulier, de montrer la correction partielle.

Question 2.2 Modifier la machine pour prendre en compte l'absence d'erreurs à l'exécution.

Exercice 3 (*appex5_3.tla*)

On considère l'algorithme suivant :

```

/* algorithme de calcul du maximum avec une boucle while de l'exercice ?? */
precondition :  $\left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$ 
postcondition :  $\left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$ 
local variables :  $i \in \mathbb{Z}$ 

 $\ell_0 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge ... \right\}$ 
 $m := f(0);$ 
 $\ell_1 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge m = f(0) \right\}$ 
 $i := 1;$ 
 $\ell_2 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i = 1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 
while  $i < n$  do
   $\ell_3 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 
  if  $f(i) > m$  then
     $\ell_4 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \wedge \right.$ 
     $f(i) > m \}$ 
     $m := f(i);$ 
     $\ell_5 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 
  ;
   $\ell_6 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 
   $i++;$ 
   $\ell_7 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 
;
 $\ell_8 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i = n \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 

```

Algorithme 2: Algorithme du maximum d'une liste annoté

```

precondition :  $x_1 \in \mathbb{N} \wedge x_2 \in \mathbb{N} \wedge x_1 \neq 0$ 
postcondition :  $z = x_1^{x_2}$ 
local variables :  $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z}$ 

 $\ell_0 : \{y_1, y_2, y_3, z \in \mathbb{Z}\}$ 
 $y_1 := x_1; y_2 := x_2; y_3 := 1;$ 
 $\ell_1 : \{y_1 = x_1 \wedge y_2 = x_2 \wedge y_3 = 1 \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$ 
 $\ell_{11} : \{y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$ 
while  $y_2 \neq 0$  do
     $\ell_2 : \{y_2 \neq 0 \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$ 
    if  $impair(y_2)$  then
         $\ell_3 : \{impair(y_2) \wedge y_2 \neq 0 \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$ 
         $y_2 := y_2 - 1;$ 
         $\ell_4 : \{y_2 \geq 0 \wedge pair(y_2) \wedge y_3 \cdot y_1 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$ 
         $y_3 := y_3 \cdot y_1;$ 
         $\ell_5 : \{y_2 \geq 0 \wedge pair(y_2) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$ 
    
```

 \vdots
 $\ell_6 : \{y_2 \geq 0 \wedge pair(y_2) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
 $y_1 := y_1 \cdot y_1;$
 $\ell_7 : \{y_2 \geq 0 \wedge pair(y_2) \wedge y_3 \cdot y_1 \cdot y_1^{y_2} \text{ div } 2 = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
 $y_2 := y_2 \text{ div } 2;$
 $\ell_8 : \{y_2 \geq 0 \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
 \vdots
 $\ell_9 : \{y_2 = 0 \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
 $z := y_3;$
 $\ell_{10} : \{y_2 = 0 \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z} \wedge z = x_1^{x_2}\}$

Algorithme 3: Version solution annotée

```

9) START
     $\{x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0\}$ 
     $(y_1, y_2, y_3) \leftarrow (x_1, 0, x_2);$ 
    while  $y_3 \leq y_1$  do  $y_3 \leftarrow 2y_3;$ 
    while  $y_3 \neq x_2$  do
        begin  $(y_2, y_3) \leftarrow (2y_2, y_3/2);$ 
        end; if  $y_3 \leq y_1$  do  $(y_1, y_2) \leftarrow (y_1 - y_3, y_2 + 1)$ 
     $(z_1, z_2) \leftarrow (y_1, y_2)$ 
     $\{0 \leq z_1 < x_2 \wedge x_1 = z_2x_2 + z_1\}$ 
    HALT

```

Question 3.1 Montrer que cet algorithme est apriiellement correct par rapport à sa précondition et à sa postcondition qu'il faudra énoncer. Pour cela, on traduira cet algorithme sous forme d'un module à partir du langage PlusCal.

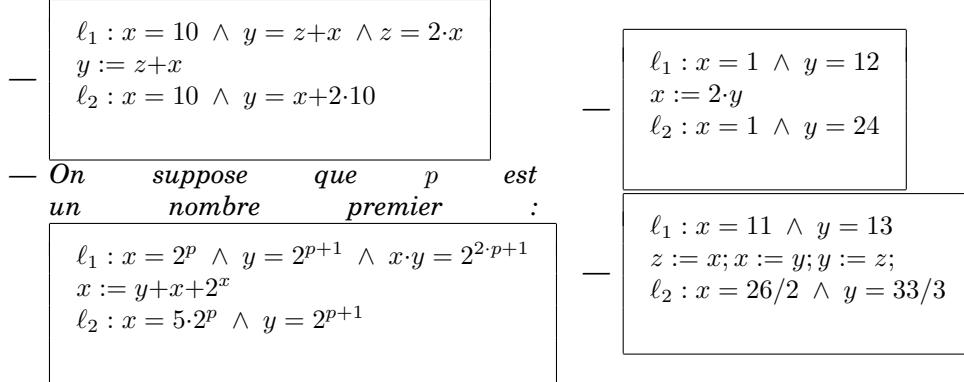
Question 3.2 Montrer qu'il est sans erreur à l'exécution.

Exercice 4 annotation

Montrer que chaque annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit

$$\forall x, y, x', y'. P_\ell(x, y) \wedge cond_{\ell, \ell'}(x, y) \wedge (x', y') = f_{\ell, \ell'}(x, y) \Rightarrow P_{\ell'}(x', y')$$

Pour cela, on utilisera une machine et un contexte Event-B.



Exercice 5 (Vérification de l'annotation de l'algorithme du calcul du maximum d'une liste)
Vérifier l'annotation de l'algorithme de calcul du maximum d'une liste **??**. On se donne l'annotation et on demande de construire une machine permettant de vérifier cette annotation.

Exercice 6 (Annotation du calcul de la racine carrée entière appex5_6.tla)

L'algorithme annoté **??** calcule la racine carrée entière d'un nombre entier. Vérifier les annotations par un mdodèle Event-B.

Vérification **precondition** : $\left(\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$

postcondition : $\left(\begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

local variables : $i \in \mathbb{Z}$

```

 $m := f(0);$ 
 $i := 1;$ 
while  $i < n$  do
  if  $f(i) > m$  then
     $m := f(i);$ 
  ;
   $i++;$ 
;

```

Algorithme 4: Algorithme du maximum d'une liste non annotée

variables X, Y_1, Y_2, Y_3, Z

requires

$x0 \in \mathbb{N}$
$y10 \in \text{Int}$
$y20 \in \text{Int}$
$y30 \in \text{Int}$
$z0 \in \text{Int}$

ensures

$zf \cdot zf \leq x < (zf+1) \cdot (zf+1)$
$xf = x0$
$zf = y1f$
$y2f = y1f+1$
$y3f = 2 \cdot y1f+1$
begin
$\ell_0 : \{x \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z} \wedge y1 \in \mathbb{Z} \wedge y2 \in \mathbb{Z} \wedge y3 \in \mathbb{Z}\}$
$(Y_1, Y_2, Y_3) := (0, 1, 1);$
$\ell_1 : \{y2 = (y1+1) \cdot (y1+1) \wedge y3 = 2 \cdot y1+1 \wedge y1 \cdot y1 \leq x\}$
While ($Y_2 \leq X$)
$\ell_2 : \{y2 = (y1+1) \cdot (y1+1) \wedge y3 = 2 \cdot y1+1 \wedge y2 \leq x\}$
$(Y_1, Y_2, Y_3) := (Y_1+1, Y_2+Y_3+2, Y_3+2);$
$\ell_3 : \{y2 = (y1+1) \cdot (y1+1) \wedge y3 = 2 \cdot y1+1 \wedge y1 \cdot y1 \leq x\}$
od ;
$\ell_4 : \{y2 = (y1+1) \cdot (y1+1) \wedge y3 = 2 \cdot y1+1 \wedge y1 \cdot y1 \leq x \wedge x < y2\}$
$Z := Y_1;$
$\ell_5 : \{y2 = (y1+1) \cdot (y1+1) \wedge y3 = 2 \cdot y1+1 \wedge y1 \cdot y1 \leq x \wedge x < y2 \wedge z = y1 \wedge z \leq x \wedge x < (z+1) \cdot (z+1)\}$
end

Exercice 7 Soient les contrats suivants. Pour chaque contrat, évaluer sa validité avec le calcul des wps.

```

/* algorithme de calcul du maximum avec une boucle while de l'exercice ?? */
precondition :  $\left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$ 
postcondition :  $\left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$ 
local variables :  $i \in \mathbb{Z}$ 

 $\ell_0 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge ... \right\}$ 
 $m := f(0);$ 
 $\ell_1 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge m = f(0) \right\}$ 
 $i := 1;$ 
 $\ell_2 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i = 1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 
while  $i < n$  do
   $\ell_3 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 
  if  $f(i) > m$  then
     $\ell_4 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \wedge \right.$ 
     $f(i) > m \}$ 
     $m := f(i);$ 
     $\ell_5 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 
  ;
   $\ell_6 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 
   $i++;$ 
   $\ell_7 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 
;
 $\ell_8 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i = n \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0..n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$ 

```

Algorithme 5: Algorithme du maximum d'une liste annoté

Question 7.1

```
requires ...
ensures  $z_f = 100 \wedge x_f + y_f = 12 \wedge x_f + x_0 = 4$ ;
variables  $x, y, z$ 
begin
  /.*@assert;.*/
   $x = x + 1;$ 
  /.*@assert;.*/
   $y = x + y + 2;$ 
  /.*@assert;.*/
   $z = x + y;$ 
  /.*@assert;.*/
end
```

La version ACSL est la suivante

Listing 1 – td51.c

```
struct data {
    unsigned x;
    unsigned y;
    unsigned z;
};

/*@
 * ensures \result.z == 100 && \result.x+\result.y == 12 && \result.x + x0==4;
 */

struct data exemple(int x0, int y0, int z0)
{
    int x=x0;
    int y=y0;
    int z=z0;
    /*@ assert x == x0;
     x = x + 1;
     y=x+y+2;
     z = x +y;
     struct data r;
     r.x = x;r.y=y;r.z=z;
     return r;
}
```

```

requires  $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ 
ensures  $z_f = \max(x_0, y_0)$ 
variables  $x, y, z$ 
begin
  /·@assert;·/
  IF  $x < y$  THEN
    /·@assert;·/
     $z := y;$ 
    /·@assert;·/
  ELSE
    /·@assert;·/
     $z := x;$ 
    /·@assert;·/
  Fl;
  /·@assert;·/
end

```

Question 7.2

La version ACSL est la suivante

Listing 2 – td52.c

```

/*@ requires  $x0 \geq 0 \&& y0 \geq 0;$ 
 @ ensures ( $\text{\result} == x0 \mid\mid \text{\result} == y0$ )  $\&& \text{\result} \geq x0 \&& \text{\result} \geq y0$ ;
 */

example(int x0, int y0)
{
  int x=x0;
  int y=y0;
  int z;
  // assert x == x0 && y == y0;
  if (x < y)
  {
    z = y;
  }
  else
  {
    z=x;
  };
  return z;
}

```

Exercice 8 td58.c

On suppose que val est une valeur entière. Vérifier l'annotation suivante :

Listing 3 – td51.c

```

#define v 3
/*@ requires val == v;
 */

int exemple(int val)
{
  int c = val ;
  // assert c == 2;
  int x;
  // assert c == 2;
  x = 3 * c ;
}

```

```

//@ assert x == 6;
return(0);
}

```

Exercice 9 *td59.c*

Vérifier l'annotation suivante :

Listing 4 – td59.c

```

int exemple()
{
    int a = 42; int b = 37;
    int c = a+b;
l1:   b == 37 ;
    a -= c;
    b += a;
l2:   b == 0 && c == 79;
    return(0);
}

```

Exercice 10 Vérifier l'annotation suivante :

Listing 5 – td510.c

```

int main()
{
    int z;
    int a = 4;
//@ assert a == 4 ;
    int b = 3;
//@ assert b == 3 && a == 4;
    int c = a+b;
//@ assert b == 3 && c == 7 && a == 4 ;
    a += c;
    b += a;
//@ assert a == 11 && b == 14 && c == 7 ;
//@ assert a +b == 25 ;
    z = a*b;
//@ assert a == 11 && b == 14 && c == 7 && z == 154;
    return(0);
}

```

Exercice 11 Vérifier l'annotation suivante :

Listing 6 – td511.c

```

int main()
{
    int a = 4;
    int b = 3;
    int c = a+b;
    a += c;
    b += a;
//@ assert a == 11 && b == 14 && c == 7 ;
    return(0);
}

```