Cours Algorithmique des systèmes parallèles et distribués
Exercices
Série 1 Modélisation, programmation et vérification en TLA$^+$
par Dominique Méry
29 janvier 2026

Modélisation et vérification avec TLA$^+$

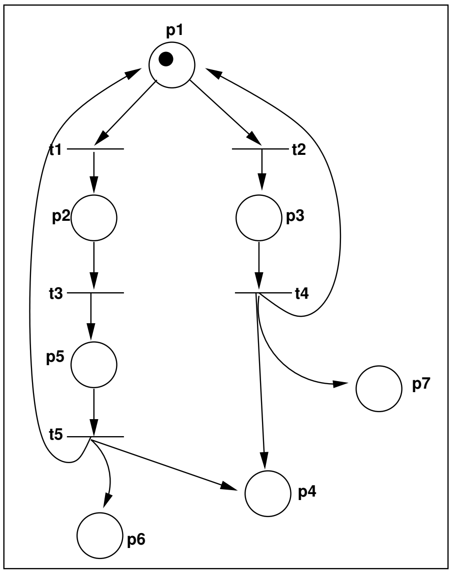
RAPPELS

Un réseau de Petri est un uple R=(S,T,F,K,M,W) tel que

- — S est l'ensemble (fini) des places.
- — T est l'ensemble (fini) des transitions.
- — $S \cap T = \varnothing$
- — F est la relation du flôt d'exécution : $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
- — K représente la capacité de chaque place : $K \in S \rightarrow Nat$.
- — M représente le initial marquage chaque place :
  $M \in S \rightarrow Nat$ et vérifie la condition $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$.
- — W représente le poids de chaque arc : $W \in F \rightarrow Nat$
- — un marquage M pour R est une fonction de S dans Nat :
  $M \in S \rightarrow Nat$ et respectant la condition $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$.
- — une transition t de T est activable à partir de M un marquage de R si
  1. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (s',t) \in F \} : M(s) \geq W(s,t)$.
  2. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (t,s') \in F \} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.
- — Pour chaque transition t de T, Pre(t) est l'ensemble des places conduisant à t et Post(t) est l'ensemble des places pointées par un lien depuis t :
  $Pre(t) = \{ s' \in S : (s',t) \in F \}$ et $Post(t) = \{ s' \in S : (t,s') \in F \}$
- — Soit une transition t de T activable à partir de M un marquage de R :
  1. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (s',t) \in F \} : M(s) \geq W(s,t)$.
  2. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (t,s') \in F \} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.
- — un nouveau marquage M' est défini à partir de M par : ' $\forall s \in S$,

$$M'(s) = \begin{cases} \text{M(S)}-\text{W(S,T), SI S} \in \text{PRE(T) - POST(T)} \\ \text{M(S)}+\text{W(T,S), SI S} \in \text{POST(T) - PRE(T)} \\ \text{M(S)}-\text{W(S,T)}+\text{W(T,S), SI S} \in \text{PRE(T)}\cap\text{POST(T)} \\ \text{M(S), SINON} \end{cases}$$

Exercice 1 *(petri13.tla)*
Soit le réseau de Petri suivant :



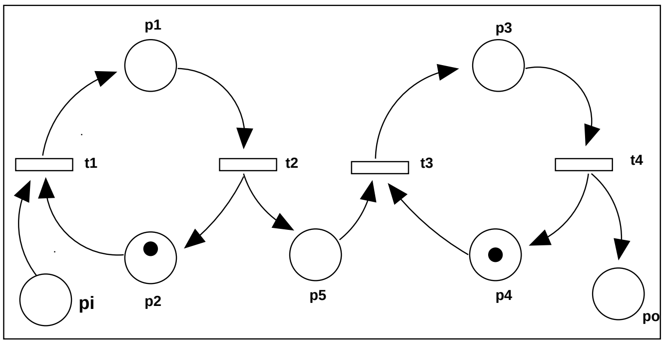
Question 1.1 *Modéliser ce réseau de Petri avec TLA$^+$.*

Question 1.2 *Etudier ce réseau en proposant et en vérifiant des invariants Ã l'aide des outils.*

```
-------------------------------- MODULE petri13 -----------
EXTENDS Naturals ,TLC
------------------------------
VARIABLES M
---------------------------------
CONSTANT Places ,N
--------------------------------------
TypeOK == M \in [Places -> Nat]
----------------------------------------
\* condition de t1
t1 ==
        /\ M["p1"] \geq 1
        /\  M' = [[M  EXCEPT! ["p1"] = @-1] EXCEPT!["p2"] = @+1]

t2 ==
        /\ M["p1"] \geq 1
        /\  M' = [[M  EXCEPT! ["p1"] = @-1] EXCEPT!["p3"] = @+1]

t3 ==
        /\ M["p2"] \geq 1
        /\  M' = [[M  EXCEPT! ["p2"] = @-1] EXCEPT!["p5"] = @+1]
```

```
t4 ==
        /\ M["p3"] \geq 1 /\ M["p4"] < N
        /\  M' = [[[[ M EXCEPT! ["p1"] = @+1] EXCEPT! ["p7"] = @+1] EXCEPT!["p4"] =

t5 ==
       /\ M["p5"] \geq 1 /\ M["p4"] < N
        /\  M' = [[[[M  EXCEPT! ["p1"] = @+1] EXCEPT!["p6"] = @+1]
EXCEPT!["p4"] = @+1] EXCEPT!["p5"] = @-1]

----------------------
(* defining the systrem *)
Init ==  M = [p \in Places |-> IF p \in {"p1"} THEN 1 ELSE 0]
Next == t1 \/ t2 \/ t3 \/ t4 \/ t5
--------------------------------------------
(* analysiong properties of nthe system *)
P1 == M["p4"] = M["p6"]+M["p7"]
P2 == M["p1"] + M["p2"]+M["p3"]+M["p5"] =1
===========================================================================

\* SPECIFICATION
\* Uncomment the previous line and provide the specification name if it's declared
\* in the specification file. Comment INIT / NEXT parameters if you use SPECIFICATIO

CONSTANTS
    greeting = "Hello"
    Places = {"p1","p2","p3","p4","p5","p6","p7"}
    intmax = 100000

INIT Init
NEXT Next

\* PROPERTY
\* Uncomment the previous line and add property names

INVARIANT
\* Uncomment the previous line and add invariant names
P1
P2
```

Exercice 2 *(petri10.tla)*
On considère le réseau suivant :



Question 2.1 *Traduire ce réseau en un module TLA$^+$.. Pour cela, on donnera la définition des quatre transitions $t1$, $t2$, $t3$,$t4$. On ne tiendra pas compte de la capacité des places : les places ont une capacité d'au plus un jeton, sauf la place pi qui peut contenir N jetons, la place p5 peut contenir au plus B jetons et la place po peut contenir au plus Q.*

Question 2.2 *Donner une relation liant les places po,p1,p3,p5,pi et la valeur N. Justifier la réponse.*

Question 2.3 *Si on suppose que la place po peut contenir au plus Q jetons, donnez une condition sur Q pour que tous les jetons de pi soient consommés un jour. Justifier la réponse.*

Question 2.4 *Expliquer ce que modélise ce réseau de Petri.*

◇— **Solution de l'exercice 2**

```
--------------------------------- MODULE petri13 -----------
EXTENDS Naturals ,TLC
------------------------------
VARIABLES M
---------------------------------
CONSTANT Places ,N
--------------------------------------
TypeOK == M \in [Places -> Nat]
----------------------------------------
\* condition de t1
t1 ==
        /\ M["p1"] \geq 1
        /\  M' = [[M  EXCEPT! ["p1"] = @-1] EXCEPT!["p2"] = @+1]

t2 ==
        /\ M["p1"] \geq 1
        /\  M' = [[M  EXCEPT! ["p1"] = @-1] EXCEPT!["p3"] = @+1]
```

```
t3 ==
        /\ M["p2"] \geq 1
        /\  M' = [[M  EXCEPT! ["p2"] = @-1] EXCEPT!["p5"] = @+1]

t4 ==
        /\ M["p3"] \geq 1 /\ M["p4"] < N
        /\  M' = [[[[ M EXCEPT! ["p1"] = @+1] EXCEPT! ["p7"] = @+1] EXCEPT!["p4"] =

t5 ==
       /\ M["p5"] \geq 1 /\ M["p4"] < N
        /\  M' = [[[[M  EXCEPT! ["p1"] = @+1] EXCEPT!["p6"] = @+1]
EXCEPT!["p4"] = @+1] EXCEPT!["p5"] = @-1]

-----------------------
(* defining the systrem *)
Init ==  M = [p \in Places |-> IF p \in {"p1"} THEN 1 ELSE 0]
Next == t1 \/ t2 \/ t3 \/ t4 \/ t5
----------------------------------------------
(* analysiong properties of nthe system *)
P1 == M["p4"] = M["p6"]+M["p7"]
P2 == M["p1"] + M["p2"]+M["p3"]+M["p5"] =1
=============================================================================

\* SPECIFICATION
\* Uncomment the previous line and provide the specification name if it's declared
\* in the specification file. Comment INIT / NEXT parameters if you use SPECIFICATIO

CONSTANTS
    greeting = "Hello"
    Places = {"p1","p2","p3","p4","p5","p6","p7"}
    intmax = 100000

INIT Init
NEXT Next

\* PROPERTY
\* Uncomment the previous line and add property names

INVARIANT
\* Uncomment the previous line and add invariant names
P1
P2
```

Fin 2

Exercice 3 *(petri14.tla)*
La figure 1 est un réseau de Petri modélisant le système des philosophes qui mangent des spaghetti.

Question 3.1 *Traduire le réseau de Petri sous la forme d'un module TLA.*

Question 3.2 *Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ? Expliquezr votre réponse.*

Question 3.3 *Proposer une propriété TLA pour répondre à la question suivante, en donnant des explications.*
Est-ce que deux philosophes voisins peuvent manger en même temps ?

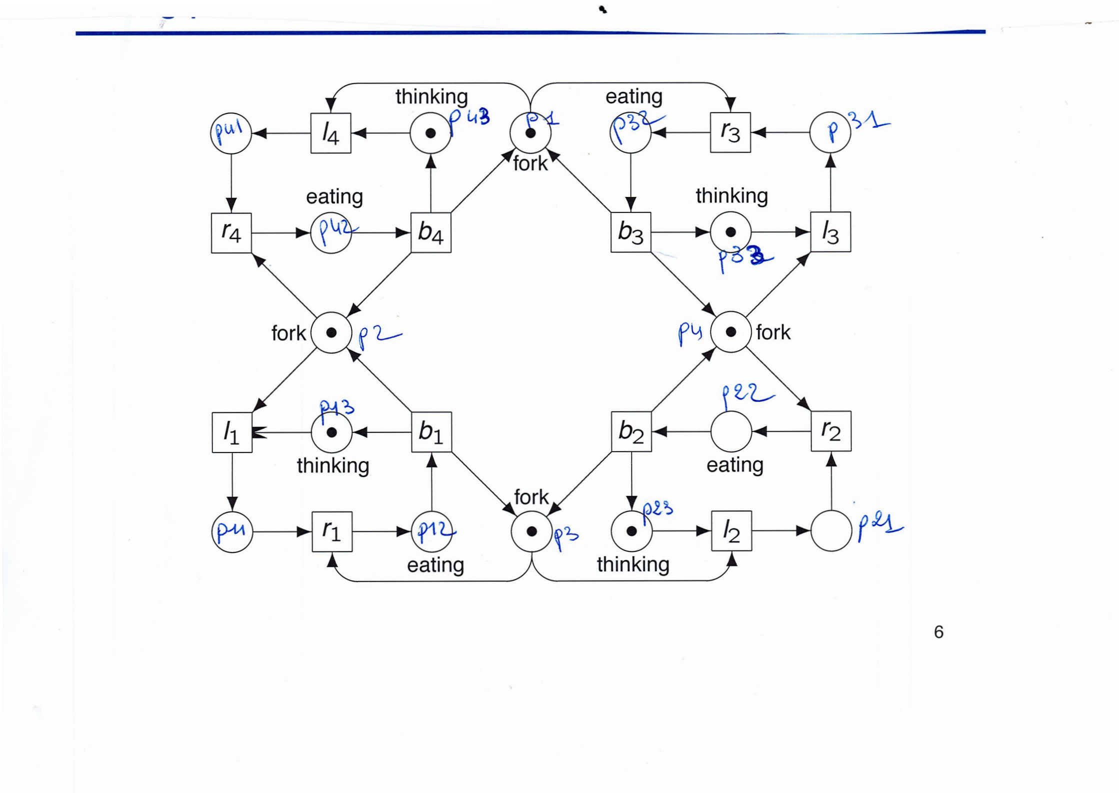


FIGURE 1 – Réseau de Petri

```
-------------------- MODULE petri14 -----------------
EXTENDS Naturals, TLC
```

```
------------------------
CONSTANTS  Places (* d\'esigne l'ensemble des places du r\'eseau de Petri
*)
------------------------
VARIABLES  M  (*  la variable d'\'etat  indiquant o\`u se trouvent les jetons *)
------------------------
ASSUME
   Places \subseteq {"p1", "p11","p12","p13", "p2", "p21", "p22", "p23",
   "p3", "p31", "p32", "p33", "p4", "p41", "p42", "p43"}
------------------------
l1 ==
     M["p2"] >= 1 /\ M' =  [ [[M EXCEPT!["p2"]=M["p2"]-1] EXCEPT!["p11"]=M["p11"]+1



------------------------
Init ==  M = [p \in Places |-> IF p \in {"p1", "p2", "p3", "p4", "p13", "p23", "p33
Next ==
    \/ l1
------------------------


=============================================================================

`


\* SPECIFICATION
\* Uncomment the previous line and provide the specification name if it's declared
\* in the specification file. Comment INIT / NEXT parameters if you use SPECIFICATIO

CONSTANTS
    greeting = "Hello"
    Places = {"p1", "p11","p12","p13", "p2", "p21", "p22", "p23", "p3", "p31", "p32

INIT Init
NEXT Next

\* PROPERTY
\* Uncomment the previous line and add property names

\* INVARIANT
\* Uncomment the previous line and add invariant names
```

Exercice 4 *(disapp_td1_ex1.tla)*

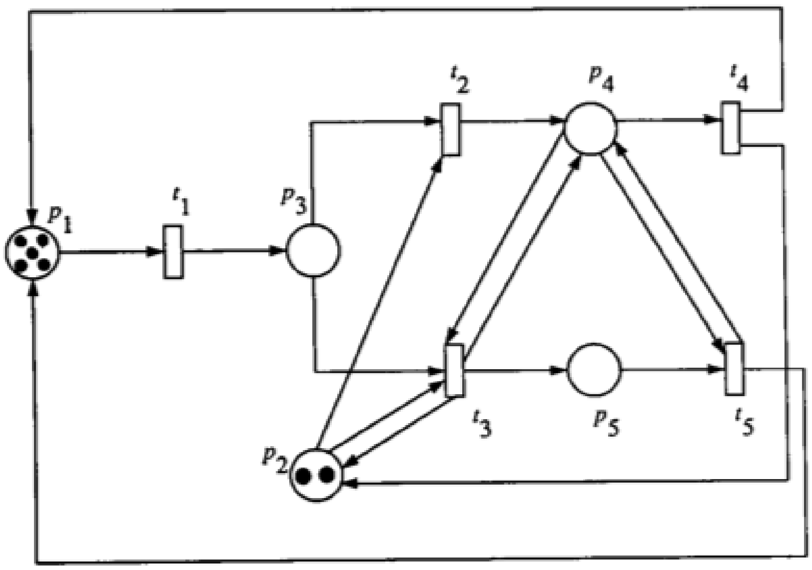


Fig. 14. A Petri-net model of a multiprocessor system, where tokens in p_1 represent active processors, p_2 available buses, p_3, p_4, and p_5 processors waiting for, having access to, queued for common memories, respectively.

FIGURE 2 – Réseau de Petri

Question 4.1 *Modéliser sous forme d'un module TLA$^+$ le réseau de Petri de la figure 2. Donner une instanciation possible des constantes. Préciser les conditions initiales correspondant à un système avec cinq (5) processeurs et deux (2) bus.*

Question 4.2 *On désire analyser le comportement de ce réseau et, pour cela, on souhaite savoir si la place* $p5$ *contiendra au moins un jeton. Expliquer comment on doit procéder pour obtenir une réponse en un temps fini. Préciser le message donné par le système TLAPS.*

Question 4.3 *Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ?*

Question 4.4 *Enoncez trois propriétés de sûreté de ce réseau établissant une relation entre au moins deux places.*

```
-------------------------------- MODULE petri15 --------------------------------
(* Petri-net for the multiprocessor system *)
```

```
EXTENDS Naturals ,TLC
CONSTANTS Places ,P,B
VARIABLES  M
-------------------------------
(* Assumptions over  Places namely Stellen *)
K == [p \in FPlaces |-> IF p \in {"p3"} THEN 1     ELSE 0 ]

TypeOK == M \in Places --> Nat
------------------------------------------------------------------------------------
t1 ==
    /\ M["p1"] \geq 1 /\ M["p3"]+1 \leq K["p3"]
    /\ M'=  [[M EXCEPT!["p3"]=M["p3"]+1] EXCEPT!["p1"]=M["p1"]-1]

t2 ==
    /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1
    /\ M'=[[[M  EXCEPT!["p3"]=M["p3"]-1]
                EXCEPT!["p2"]=M["p2"]-1]
                EXCEPT!["p4"]=M["p4"]+1]


t3 ==
    /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1 /\ M["p4"] \geq 1
    /\ M'=[[M   EXCEPT!["p3"]=M["p3"]-1]
                EXCEPT!["p5"]=M["p5"]+1]

t4 ==
    /\ M["p4"] \geq 1
    /\ M'=[[[M  EXCEPT!["p4"]=M["p4"]-1]
                EXCEPT!["p2"]=M["p2"]+1]
                EXCEPT!["p1"]=M["p1"]+1]


t5 ==
    /\ M["p4"] \geq 1 /\ M["p5"] \geq 1
    /\ M'=[[M   EXCEPT!["p5"]=M["p5"]-1]
                EXCEPT!["p1"]=M["p1"]+1]

------------------------------------------------------------------------------------


Init ==  M = [p \in Places |->
            IF p \in {"p1"} THEN P
            ELSE IF p \in {"p2"}
            THEN B  ELSE 0 ]
```

```
Next == t1 \/ t2 \/ t3 \/ t4 \/ t5

Petri == Init /\ [][Next]_<<M>>


I0 == \A p \in Places : M[p] \geq 0


I1 == 0 \leq M["p3"] /\ M["p3"] \leq 1
I2 == M["p1"] \leq 5 /\ M["p2"] \leq 2
I3 == \A p \in {"p5"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 5
I4 == \A p \in {"p4"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 2


AP4 == M["p4"] = 0
AP5 == M["p5"] = 0
Test == I0 /\ I1 /\ I2 /\ I3 /\ I4
================================================================================
```