

Cours Modélisation et vérification des systèmes informatiques
 Exercices (avec les corrections)
 Modélisation TLA⁺ (2)
 par Dominique Méry
 1^{er} décembre 2025

Exercice 1 Soit le réseau de Petri de la figure 1.

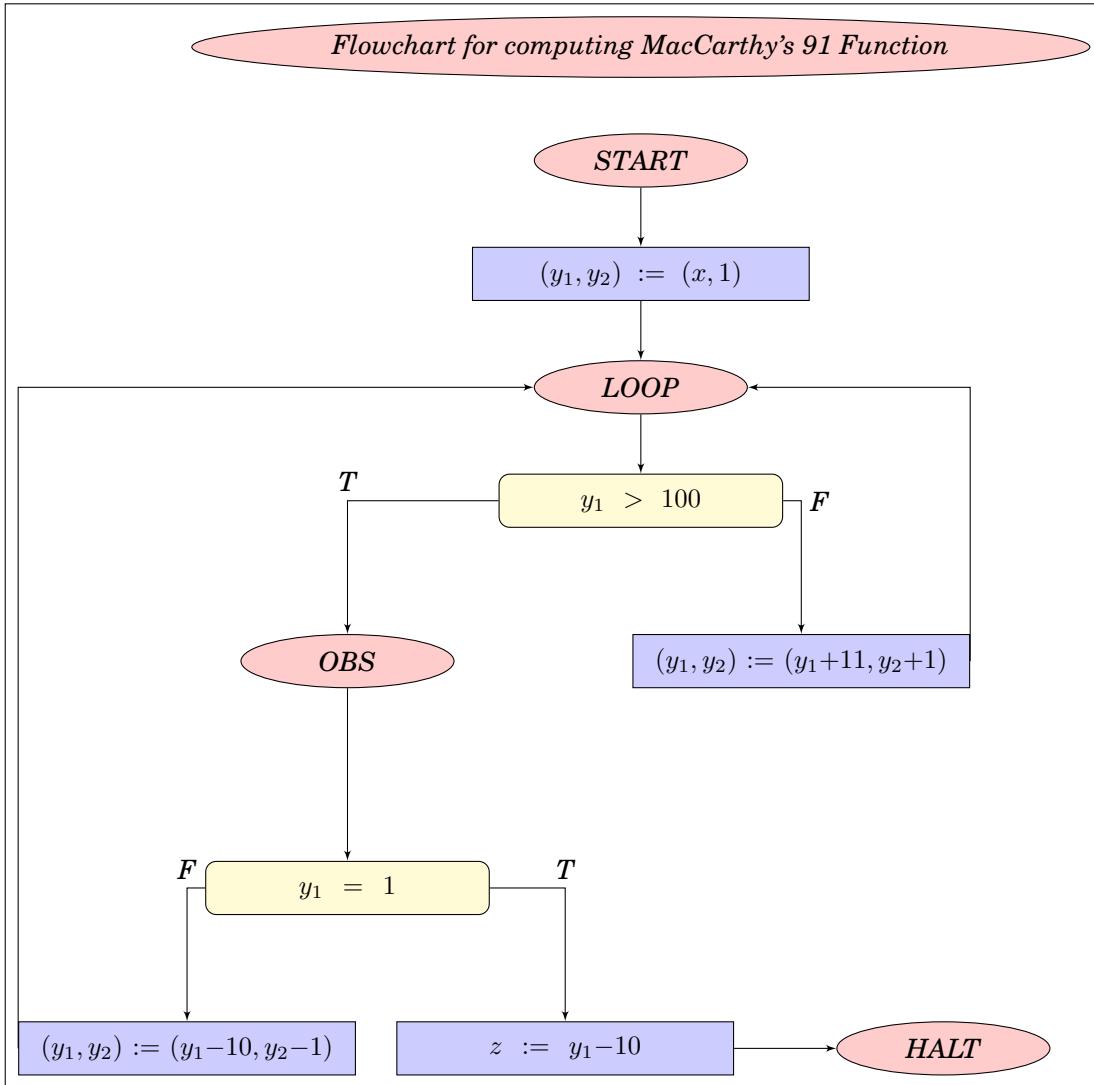
Question 1.1 Déterminer les conditions initiales.

Question 1.2 Déterminer les relations modélisant les transitions.

Question 1.3 Valider les propriétés et les hypothèses que vous pourrez faire sur ce réseau de Petri.

Le fichier appex2_1.tla donne les détails de la modélisation avec TLA+.

Exercice 2 Soit l'organigramme suivant proposé par Z. Manna dans son ouvrage *Mathematical Theory of Computation*.



Question 2.1 Construire un module TLA⁺ modélisant les différents pas de calcul.

Question 2.2 Evaluer l'algorithme en posant des questions de sûreté suivantes :

1. l'algorithme est partiellement correct.
2. l'algorithme n'a pas d'erreurs à l'exécution.

Le fichier `appex2_2.tla` donne les détails de la modélisation avec TLA+.

Exercice 3 Soit le schéma suivant définissant un calcul déterminant si un nombre entier naturel est premier ou non.

Consider the flowchart program (Fig. 3-19) over the integers for deciding whether or not a given integer x is a prime number. Prove that it is totally correct wrt $\varphi(x)$: $x \geq 2$ and $\psi(x, z)$: $z \equiv \text{prime}(x)$, where $\text{prime}(x)$ is true if and only if x is a prime number; that is $\forall k [2 \leq k < x \Rightarrow \text{rem}(x, k) \neq 0]$.

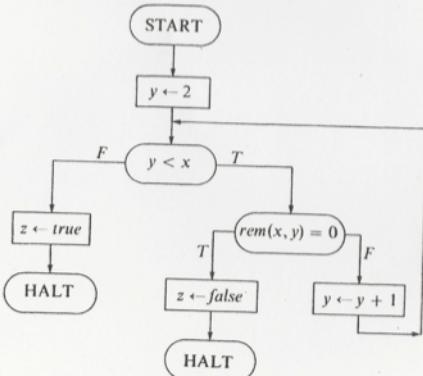


Figure 3-19 Flowchart program for deciding whether or not x is a prime number.

Question 3.1 Ecrire un modèle TLA modélisant ce schéma de calcul.

Question 3.2 Ecrire un invariant à partir d'annotations que vous définirez après avoir défini des points de contrôle.

Question 3.3 Vérifier la correction partielle

Question 3.4 Vérifier l'absence d'erreurs à l'exécution.

Le fichier appex2_3.tla donne les détails de la modélisation avec TLA+.

Exercice 4 Le module *truc* permet de résoudre un problème très classique en informatique : trouver un chemin entre un sommet *input* et des sommets *output* supposés être des sommets de sortie.

Question 4.1 Pour trouver un chemin de *input* à l'un des sommets de *output*, il faut poser une question de sûreté à notre système de vérification. Donner une question de sûreté à poser permettant de trouver un chemin de *input* vers un sommet de *output*.

Question 4.2 On désire utiliser cette technique pour trouver un chemin dans un labyrinthe. Un labyrinthe est représenté par une matrice carrée de taille n . On définit ensuite pour chaque élément $\langle\langle i, j \rangle\rangle$ de la matrice les voisins communiquant à l'aide de la fonction *lab* qui associe à $\langle\langle i, j \rangle\rangle$ les éléments qui peuvent être atteints en un coup. Par exemple, le mouvement possible à partir de $\langle\langle 1, 1 \rangle\rangle$ est $\langle\langle 2, 1 \rangle\rangle$, ou le mouvement possible à partir de $\langle\langle 2, 1 \rangle\rangle$ est $\langle\langle 2, 2 \rangle\rangle$ ou $\langle\langle 1, 1 \rangle\rangle$, ou le mouvement possible à partir de $\langle\langle 2, 2 \rangle\rangle$ est $\langle\langle 2, 3 \rangle\rangle$ ou $\langle\langle 3, 2 \rangle\rangle$ ou $\langle\langle 2, 1 \rangle\rangle$, ...

```

lab == [⟨⟨x, y⟩⟩ \in (nodes \ X nodes) | ->
        IF x=1 /\ y=1 THEN {⟨⟨2, 1⟩⟩} ELSE
        IF x=2 /\ y=1 THEN {⟨⟨2, 2⟩⟩}
        IF x=1 /\ y=2 THEN {} ELSE
        IF x=2 /\ y=2 THEN {⟨⟨3, 2⟩⟩, ⟨⟨2, 3⟩⟩} ELSE
        ELSE {}
      ]
  
```

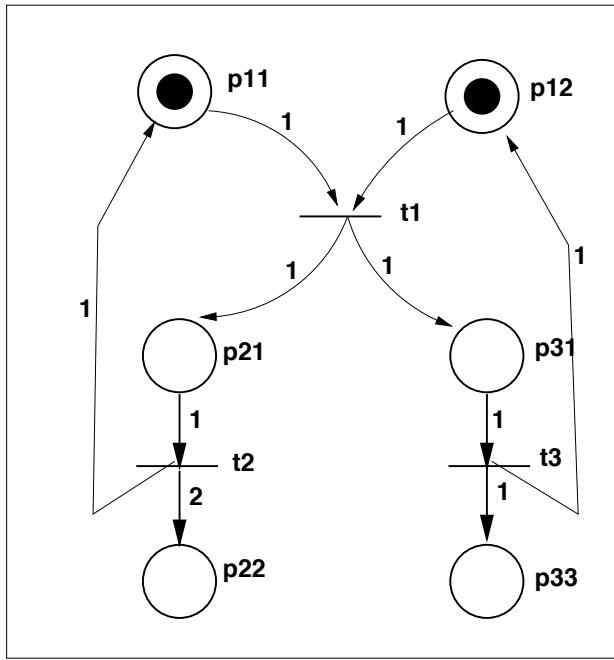


FIGURE 1 – Réseau de Petri

Modifier le module truc pour traiter ce problème et donner la question à poser pour trouver une sortie.

MODULE *truc*

```

EXTENDS Integers, TLC
VARIABLES p
CONSTANTS input, output

n  $\triangleq$  10
nodes  $\triangleq$  1..n
l  $\triangleq$  [i  $\in$  1..n  $\mapsto$  IF i = 1 THEN {4, 5} ELSE
          IF i = 2 THEN {6, 7, 10} ELSE
          IF i = 4 THEN {7, 8} ELSE
          IF i = 5 THEN {} ELSE
          IF i = 6 THEN {4} ELSE
          IF i = 7 THEN {5} ELSE
          IF i = 8 THEN {5, 2} ELSE
          {}]
]
```

```

Init  $\triangleq$  p = 1
M(i)  $\triangleq$   $\wedge$  i  $\in$  l[p]
 $\wedge$  p' = i
Next  $\triangleq$   $\exists$  i  $\in$  1..n : M(i)
```

Le fichier `appex2_4.tla` donne les détails de la modélisation avec TLA+.

MODULE *Naturals*

A dummy module that defines the operators that are defined by the real *Naturals* module.

$$\begin{aligned}
 Nat &\triangleq \{ \} \\
 a+b &\triangleq \{a, b\} \\
 a-b &\triangleq \{a, b\} \\
 a\cdot b &\triangleq \{a, b\} \\
 a^b &\triangleq \{a, b\} \\
 a < b &\triangleq a = b \\
 a > b &\triangleq a = b \\
 a \leq b &\triangleq a = b \\
 a \geq b &\triangleq a = b \\
 a \% b &\triangleq \{a, b\} \\
 a \div b &\triangleq \{a, b\} \\
 a .. b &\triangleq \{a, b\}
 \end{aligned}$$

MODULE *TLC*

LOCAL INSTANCE *Naturals*
 LOCAL INSTANCE *Sequences*

$$\begin{aligned}
 Print(out, val) &\triangleq val \\
 PrintT(out) &\triangleq \text{TRUE} \\
 Assert(val, out) &\triangleq \text{IF } val = \text{TRUE} \text{ THEN } \text{TRUE} \\
 &\quad \text{ELSE CHOOSE } v : \text{TRUE} \\
 JavaTime &\triangleq \text{CHOOSE } n : n \in \text{Nat} \\
 TLCGet(i) &\triangleq \text{CHOOSE } n : \text{TRUE} \\
 TLCSet(i, v) &\triangleq \text{TRUE}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d :> e &\triangleq [x \in \{d\} \mapsto e] \\
 f @\!@ g &\triangleq [x \in (\text{DOMAIN } f) \cup (\text{DOMAIN } g) \mapsto \\
 &\quad \text{IF } x \in \text{DOMAIN } f \text{ THEN } f[x] \text{ ELSE } g[x]] \\
 Permutations(S) &\triangleq \\
 &\{f \in [S \rightarrow S] : \forall w \in S : \exists v \in S : f[v] = w\}
 \end{aligned}$$

In the following definition, we use Op as the formal parameter rather than \prec because TLC Version 1 can't handle infix formal parameters.

$$\begin{aligned}
 SortSeq(s, Op(_, _)) &\triangleq \\
 \text{LET } Perm &\triangleq \text{CHOOSE } p \in Permutations(1 .. Len(s)) : \\
 &\quad \forall i, j \in 1..Len(s) : \\
 &\quad \quad (i < j) \Rightarrow Op(s[p[i]], s[p[j]]) \vee (s[p[i]] = s[p[j]]) \\
 \text{IN } &[i \in 1..Len(s) \mapsto s[Perm[i]]]
 \end{aligned}$$

$$RandomElement(s) \triangleq \text{CHOOSE } x \in s : \text{TRUE}$$

$$Any \triangleq \text{CHOOSE } x : \text{TRUE}$$

$$ToString(v) \triangleq (\text{CHOOSE } x \in [a : v, b : STRING] : \text{TRUE}).b$$

$$TLCEval(v) \triangleq v$$

FIGURE 2 – Modules *Naturals.tla* et *TLC.tla*

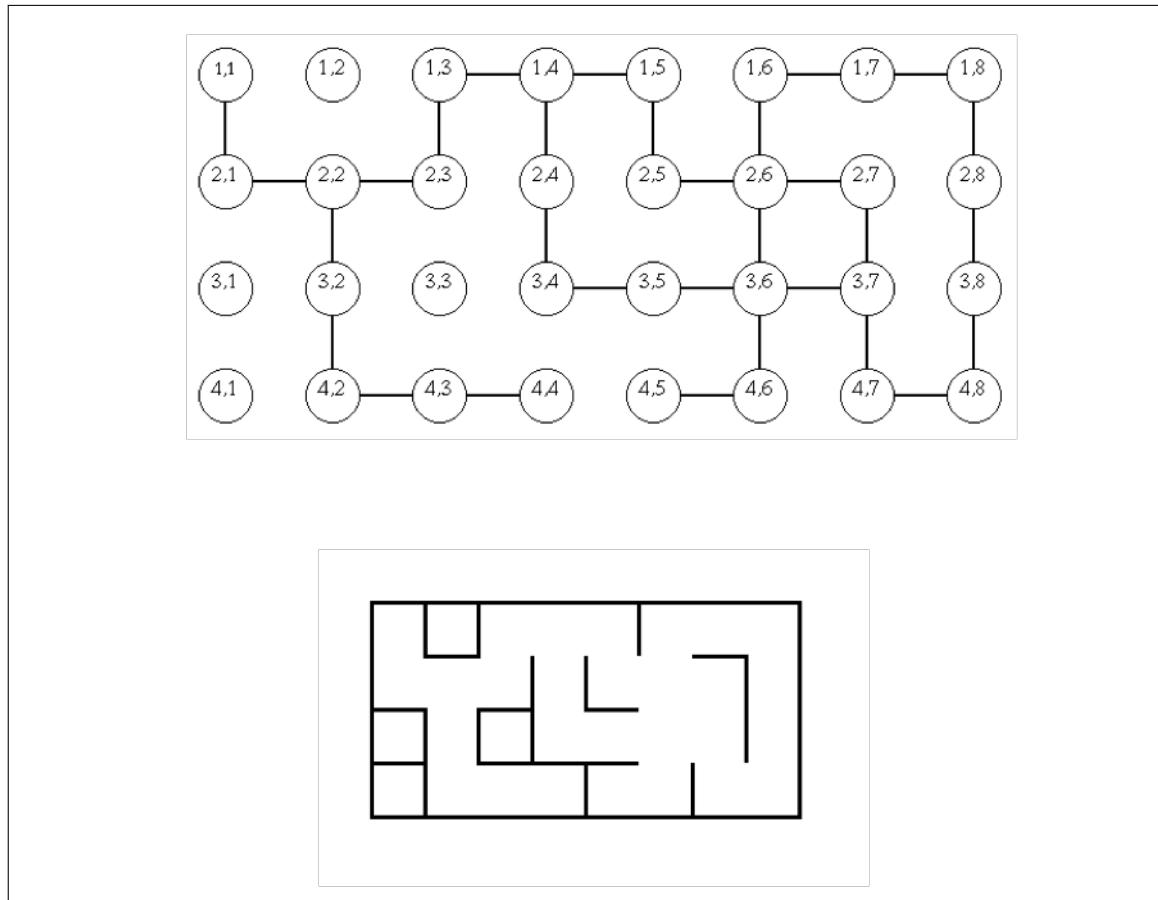


FIGURE 3 – Labyrinthe