
Cours MALG & MOVEX

MOVEX2

Modélisation synchrone

Dominique Méry
Telecom Nancy, Université de Lorraine

Année universitaire 2023-2024

- ① Modélisation synchrone (I)
- ② Synchronous Model
- ③ Tools for Synchronous Modelling
- ④ Exemples de programmes LUSTRE
- ⑤ Modélisation synchrone (II)
- ⑥ Le langage LUSTRE
- ⑦ Vérification de programmes LUSTRE
- ⑧ Propriétés des programmes LUSTRE
- ⑨ Sommaire sur les points-fixes
- ⑩ Contrats

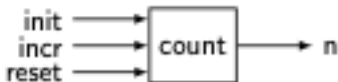
- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes
- 10 Contrats

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes
- 10 Contrats

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flûts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flûts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)



- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

1. *Journal of the American Medical Association*, 2000; 283: 2689-2696.

- ▶ LUSTRE est un langage synchrone à flûts de données.
- ▶ LUSTRE est la base de SCADE un environnement de développement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- ▶ LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique.

(Flût de données)

Listing 4 – dataflow1.lus

```

— count
node count(x,y:int) returns (r: int);
let
    r = 5*(x+y);
tel

```

- ▶ production : Un flôt d'entrées produit un flôt (flux) de sorties :

$$flot \in input^N \rightarrow output^N$$

$$flot(i_0, i_1, \dots i_n) = (o_0, o_1, \dots o_n)$$

- ▶ réaction :

$$flot \in input \times state \rightarrow output \times state$$

$$flot(in, s_t) = (out, s_{t+1})$$

Le code engendré correspond à la fonction de cycle.

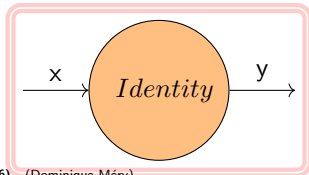
Forme générale d'un module LUSTRE

```
node  $f(x_1 : \alpha_1, \dots, x_n : \alpha_n)$  returns  $(y_1 : \beta_1, \dots, y_m : \beta_m)$   
var  $z_1 : \gamma_1, \dots, z_k : \gamma_k$ ;  
let  
   $z_1 = \delta_1; \dots; z_k = \delta_k$ ;  
   $y_1 = \epsilon_1; \dots; y_m = \epsilon_m$ ;  
  assert  $P_1; \dots; \text{assert } P_l$ ;  
tel
```

Node Identity

```
node  $I(x : int)$  returns  $(y : int)$   
let  
   $y = x$   
assert  $x = y$ ;  
tel
```

- ▶ Copie de la stream x vers la stream y .
- ▶ $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$
- ▶ recopie
- ▶ $y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots)$



- ▶ Un programme LUSTRE est une liste de modules appelés des nœuds.
- ▶ Tous les nœuds fonctionnent de manière synchrone.
- ▶ Les communications sont réalisées via les inputs et les outputs.
- ▶ Les équations doivent avoir des solutions et ne sont pas des affectations.

- ▶ Toutes les variables, constantes et expressions sont des streams.
- ▶ Les opérations classiques sont étendues sur les streams :
 - $x = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$
 - $y = (1, 2, 3, 4, \dots)$
 - $x+y = (1, 3, 5, 7, \dots)$
- ▶ Chaque stream correspond à une horloge.

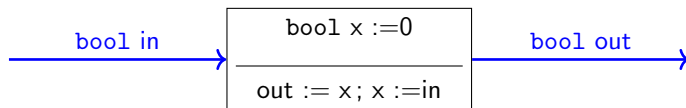
- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

Synchronous Reactive Component (R. Alur)

A Synchronous Reactive Component C is defined by :

- ▶ a finite set I of typed input variables defining the set of Q_I of inputs.
 - ▶ a finite set O of typed output variables defining the set of Q_O of outputs.
 - ▶ a finite set S of typed state variables defining the set of Q_S of states.
 - ▶ an initialisation $Init$ defining the set $\llbracket Init \rrbracket \subseteq Q_S$ of initial states
 - ▶ a reaction description $React$ defining the set $\llbracket React \rrbracket$ of reactions of the form $s \xrightarrow{i/o} s'$ where $i \in Q_I, o \in Q_O, s, s' \in Q_S$.
-
- ▶ an execution of a synchronous reactive component C is a sequence :
$$s_0 \xrightarrow{i_1/o_1} s_1 \xrightarrow{i_2/o_2} \dots s \xrightarrow{i/o} s' \dots$$

A simple example I



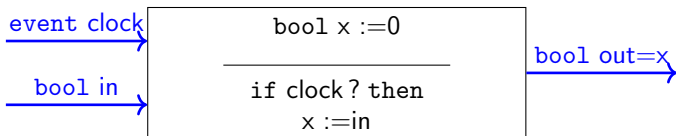
▶ $0 \xrightarrow{1/0} 1;$

▶ $0 \xrightarrow{1/0} 1$

▶ $1 \xrightarrow{0/1} 0;$

▶ $1 \xrightarrow{1/1} 1;$

A simple example II



▶ $0 \xrightarrow{(1, \perp)/0} 0;$

▶ $0 \xrightarrow{(1, \top)/1} 1;$

▶ $1 \xrightarrow{(0, \perp)/1} 1;$

▶ $1 \xrightarrow{(1, \perp)/1} 1;$

▶ $1 \xrightarrow{(0, \top)/0} 0;$

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

- ▶ Development Tools for Critical Reactive Systems using the Synchronous Approach The Verimag Reactive Tool Box
- ▶ Compilation of LUSTRE program into C programs.

- ▶ Automatic analysis of LUSTRE programs
- ▶ SMT-based tools
- ▶ k-induction

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

(Sommutation)

Listing 5 – sum.lus

```
— the current value of Sum(X) is the sum of all values of X up to now
node sum (X: int) returns (S: int);
let
  S = X → X + (pre S);
tel
```

```
—      0   1   2   3   4   5   ...
—      —————
—  X =  5,  3, -1,  2,  7,  8, ...
—  S =  5,  8,  7,  9, 16, 24, ...
```

(Fibonacci)

Listing 6 – fibo.lus

— This node produces the Fibonacci series: 1,1,2,3,5,8,13,21,...

```
node fibo(_:bool) returns(Fib: int);  
let  
  Fib = 1 => pre (1 => Fib + pre Fib);  
tel
```

(Opérations)

Listing 7 – operations.lus

```
— operations over nodes
node op (X: int;Y:int) returns (S,P,POLY,POLY2:int;TEST:bool);
let
  S = X + Y;
  P = X*Y;
  POLY = X*X + 2*X*Y + Y*Y;
  POLY2 = S*S;
  TEST = (POLY = POLY2);
  check TEST;

tel
```

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

- ▶ $\llbracket \sigma \rrbracket \stackrel{def}{=} (\sigma_0, \sigma_1, \dots)$
- ▶ $\llbracket \text{pre}(\sigma) \rrbracket \stackrel{def}{=} (\perp, \sigma_0, \sigma_1, \dots)$
- ▶ $\llbracket \sigma - > \tau \rrbracket \stackrel{def}{=} (\sigma_0, \tau_1, \tau_2, \dots)$
- ▶ $\llbracket \sigma \text{ when } \varphi \rrbracket \stackrel{def}{=} (\sigma_{t_0}, \tau_{t_1}, \tau_{t_2}, \dots)$ où la suite des t_i est la suite des instants validant φ dans la suite σ .
- ▶ $\llbracket \text{current}(\sigma \text{ when } \varphi) \rrbracket \stackrel{def}{=} (\perp, \dots, \perp, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_2}, \dots)$

(Horloge)

Listing 8 – clock1.lus

```
node clock1(b: bool) returns (y: int);  
var n:int;  
var e:bool;  
var f:int;  
let  
  n = 0  $\rightarrow$  pre(n)+1;  
  e = true  $\rightarrow$  not pre(e);  
  f = current ( n when e);  
  y = current ( n when e) div 2;  
tel
```



current n'est pas supporté.

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE**
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

Semantical Concepts for Reactive Programming

	4	4	4	...	4	...
▶	x	x_0	x_1	...	x_n	...
	y	y_0	y_1	...	y_n	...
	x+y	x_0+y_0	x_1+y_1	...	x_n+y_n	...

▶	x	x_0	x_1	...	x_n	...
	pre x	<i>NIL</i>	x_0	...	x_{n-1}	...

	x	x_0	x_1	\dots	x_n	\dots
▶	y	y_0	y_1	\dots	y_n	\dots
	x->y	x_0	y_1	\dots	y_n	\dots

► $\text{nat} = 0 \rightarrow (1 + \text{pre nat})$

h	true	false	true	true	false
x	x_0	x_1	\dots	x_n	\dots
x when h	x_0	—	x_2	x_3	—

- ▶ Un programme LUSTRE s'appelle un nœud ou NODE.
- ▶ Un programme LUSTRE dénote une suite infinie de valeurs comme suit : $(x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots)$
- ▶ Deux opérateurs sur les programmes :
 - **pre**
 - \longrightarrow
- ▶ $\forall n \geq 0. CUP_{n+1} = CUP_n + 1$ s'écrira
 $CUP = 0 \longrightarrow (1 + \text{pre}(CUP))$
- ▶ et produira la suite $(0 \ 1 \ 2 \ \dots)$.
- ▶ $FIB = 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow (\text{pre}(FIB) + \text{pre}(\text{pre}(FIB)))$

```
node  EDGE( $X : \text{bool}$ )  returns  ( $Y : \text{bool}$ )  
let  
     $Y = \text{false} \rightarrow X \text{ and not pre}(X)$   
tel
```

désigne la suite $(\text{false}, x_1 \wedge \neg x_0, x_2 \wedge \neg x_1, \dots)$

Counter

$C = 0 \rightarrow \text{pre}(C)+1$ renvoie la suite des naturels

$C = 0 \rightarrow \text{if } X \text{ then pre}(C)+1 \text{ else pre}(C)$

compte le nombre d'occurrences de X qui sont vraies.

On ignore la valeur initiale

$PC = 0 \rightarrow \text{pre}(C)$

$C = \text{if } X \text{ then } PC+1 \text{ else } PC$



```
nodeCOUNTER(init, incr : int; X, reset : bool) returns (C : int)  
let  
  PC = init - > pre C  
  C = if reset then init  
      else if X then (PC+incr)  
      else PC;  
tel
```

- ▶ *odds* = *COUNTER*(0, 2, *true*, *true* - > *false*) **définit les entiers impairs.**

▶ Deux opérateurs sur les programmes :

- pre
- \longrightarrow

T

▶ $X \text{ when } B$

▶ $\text{current } X$

▶ assert

- $\text{assert not } (x \text{ and } y)$
- $\text{assert } (\text{true} - > \text{not}(x \text{ and } \text{pre}(x)))$

```
node COUNTER(init,incr:int; X,reset:bool) returns (C:int)
let
  PC=init-> pre C
  C = if reset then init
      else if X then (PC+incr)
      else PC;
tel
```

- ▶ $odds = COUNTER(0, 2, true, true \rightarrow false)$ définit les entiers impairs.

► Deux opérateurs sur les programmes :

- **pre**
- \longrightarrow

► *X when B* : filtre de *X* quand la valeur de *B* est vraie.

► *current X* : interpolation de *X*

► *and, not, or, xor, ...* sont des opérateurs booléens sur les streams.

► *assert*

- *assert not (x and y)*
- *assert (true -> not(x and pre(x)))*

► réutilisation de nœuds

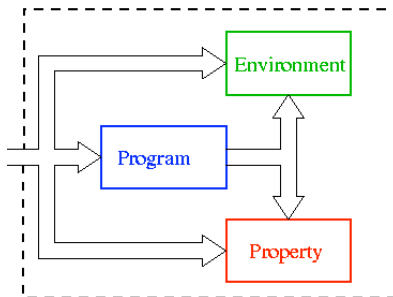
```
node FALLING_EDGE(X:bool) returns (Y:bool)
let
  Y= EDGE(not X);
tel
```

- ▶ Soit f une fonction du temps à valeurs réelles et on souhaite l'intégrer selon la méthode des trapèzes.
- ▶ Deux valeurs sont reçues par le programme $F_n = f(x_n)$ et $x_{n+1} = x_n + STEP_{n+1}$
- ▶ Calcul de Y : $Y_{n+1} = Y_n + (F_n + F_{n+1}) \cdot STEP_{n+1} / 2$
- ▶ La valeur de Y est une donnée

```
node integration(F,STEP,init:real) returns (Y:real)
let
  Y= init -> pre(Y)+ ((F + pre(F))*STEP)/2.0;
tel
```


- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

- ▶ Description de la propriété à vérifier et les hypothèses de l'environnement
- ▶ Un observateur d'une propriété de sûreté est un programme qui utilise comme entrée les entrées-sorties du programme à vérifier et décide en émettant un signal à chaque instant si la propriété est violée ou non



- ```
state = SWITCH1(change,change,true)
```

- ▶ Transformer un signal en niveau par un switch qui est utilisé comme suit :

- deux signaux possibles en entrée set et reset
- une valeur initiale initial
- toute occurrence de set fait passer le niveau à true
- toute occurrence de reset fait passer le niveau à false
- quand aucun des signaux n'apparaît, le niveau ne change pas

- ▶ 

```
node SWITCH(set,reset,initial: bool) returns (level:bool)
let
 level = initial -> if set and not pre(level) then true
 else if reset then false
 else pre(level);
tel
```

- ▶ **Vérification :**

```
node verification(set,reset,initial: bool) returns (ok:bool)
let
 level = SWITCH(set,reset,initial);
 level1 = SWITCH(set,reset,initial);
 ok = (level = level1);
 assert not(set and reset)
```

tel

(power2 avec vérification)

## Listing 9 – power2prop.lus

```
— power2(_) contains all the square numbers in increasing order
— where $0^2 = 0$
— $(n+1)^2 = n^2 + 2*n + 1$
node power2(_ : bool) returns (P: int);
var W: int;
var P2: int;
var PROP: bool;
var N: int;
let
 — all the natural even numbers
 W = 1 \Rightarrow (pre W) + 2;
 P = 0 \Rightarrow (pre P) + (pre W);
 N = 0 \Rightarrow (pre N)+1;
 P2 = N*N;
 PROP = P2 = P;
 check PROP;
tel
```

Application de la k-induction : `kind2 --enable BMC --enable IND`

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes

()

## Listing 10 – kindsession2/power2.lus

```
— power2(.) contains all the square numbers in increasing order
— where $0^2 = 0$
— $(n+1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1$
node power2() returns (P: int);
var W: int;
let
 — all the natural even numbers
 W = 1 \Rightarrow (pre W) + 2;
 P = 0 \Rightarrow (pre P) + (pre W);
tel
```

()

## Listing 12 – kindsession2/power2.lus

```
— power2(.) contains all the square numbers in increasing order
— where $0^2 = 0$
— $(n+1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1$
node power2() returns (P: int);
var W: int;
let
 — all the natural even numbers
 W = 1 \Rightarrow (pre W) + 2;
 P = 0 \Rightarrow (pre P) + (pre W);
tel
```

(--enable BMC --enable IND)

## Listing 13 – kindsession2/power2prop.lus

```
— power2(.) contains all the square numbers in increasing order
— where $0^2 = 0$
— $(n+1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1$
include "power2.lus"
node power2prop() returns (P: int);
var P2, PP2, N: int;
var PROP: bool;
let
 PP2 = power2();
 N = 0 \Rightarrow (pre N) + 1;
 P2 = N * N;
 PROP = P2 = PP2;
 check PROP;
tel
```



()

## Listing 14 – kindsession2/greycounter.lus

```
node greycounter (reset: bool) returns (out: bool);
var a, b: bool;
let
 a = false \Rightarrow (not reset and not pre b);
 b = false \Rightarrow (not reset and pre a);
 out = a and b;
tel
```

()

## Listing 15 – kindsession2/intcounter.lus

```
node intcounter (reset: bool; const max: int) returns (out: bool);
var t: int;
let
 t = 0 \Rightarrow if reset or pre t = max then 0 else pre t + 1;
 out = t = 2;
tel
```

(Valid property)

## Listing 16 – kindsession2/ex1.lus

```
/* include */
include "greycounter.lus"

/* include */
include "intcounter.lus"

node top (reset: bool) returns (OK, OK2: bool);
var b, d: bool;
let
 b = greycounter(reset);
 d = intcounter(reset, 3);
 OK = b = d;
 —%PROPERTY OK;
tel
```

(Invalid property)

## Listing 17 – kindsession2/ex2.lus

```
/* include */
include "greycounter.lus"

/* include */
include "intcounter.lus"

node top (reset: bool) returns (OK, OK2: bool);
var b, d: bool;
let
 b = greycounter(reset);
 d = intcounter(reset, 3);
 OK = b = d;
 OK2 = not d;
 — %PROPERTY OK;
 — %PROPERTY OK2;
tel
```

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE

## 9 Sommaire sur les points-fixes

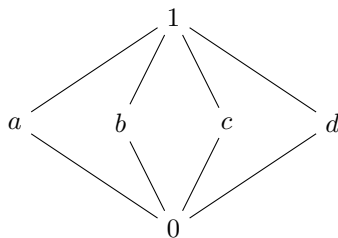
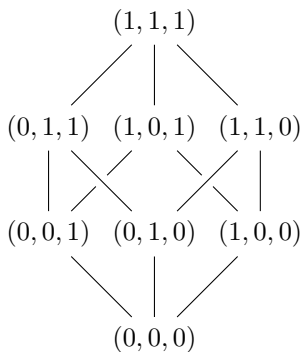
.....

### ☒ Definition

Un treillis complet  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$  est un treillis satisfaisant les propriétés suivantes :

- ① Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne supérieure notée  $\sqcup A$ .
  - ② Pour toute partie  $A$  de  $L$ , il existe une borne inférieure notée  $\sqcap A$ .
- .....

- ▶ Un treillis complet  $(L, \sqsubseteq, )$  peut être défini par les éléments suivants  $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$
- ▶ Un treillis est une structure munie d'un ordre partiel et telle que deux éléments ont une borne supérieure et une inférieure dans le treillis :  $(L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap)$ 
  - $a \sqcup b$  existe et est la borne supérieure des deux éléments  $a$  et  $b$ .
  - $a \sqcap b$  existe et est la borne inférieure des deux éléments  $a$  et  $b$ .





### Théorème de Knaster-Tarski (I)

Soit  $f$  une fonction monotone croissante sur un treillis complet  $(T, \perp, \top, \bigvee, \bigwedge)$ . Alors il existe un plus petit point fixe et un plus grand point fixe pour  $f$ .

- ▶  $\mu f$  désigne le plus petit point fixe de  $f$ .
- ▶  $\nu f$  désigne le plus grand point fixe de  $f$ .
- ▶  $\mu f$  vérifie les propriétés suivantes :  $f(\mu f) = \mu f$  et  $\forall x \in T. f(x) \sqsubseteq x \Rightarrow \mu f \sqsubseteq x$  ( $\mu f$  est la borne inférieure des prépoints fixes de  $f$  ou  $\bigwedge(Pre(f))$ ).
- ▶  $\nu f$  vérifie les propriétés suivantes :  $f(\nu f) = \nu f$  et  $\forall x \in T. x \sqsubseteq f(x) \Rightarrow x \sqsubseteq \nu f$  ( $\nu f$  est la borne supérieure des postpoints fixes de  $f$  ou  $\bigvee(Post(f))$ ).



Posons  $y = \bigwedge \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$  et montrons que  $y$  est un point fixe de  $f$  et que  $y$  est le plus petit point fixe de  $f$ .

①  $f(y) \sqsubseteq y$

- Pour tout  $x$  de  $\{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$ ,  $y \sqsubseteq x$
- $f(y) \sqsubseteq f(x)$  (par monotonie de  $f$ ).
- $f(x) \sqsubseteq x$  (par définition de  $x$ ).
- $f(y) \sqsubseteq x$  (par déduction).
- $f(y) \sqsubseteq \bigwedge \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$  (par définition de la borne inférieure,  $f(y)$  est un minorant).
- $f(y) \sqsubseteq y$

②  $y \sqsubseteq f(y)$

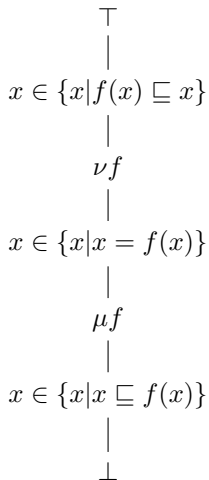
- $f(y) \sqsubseteq y$  (par le cas 1)
- $f(f(y)) \sqsubseteq f(y)$  (par monotonie de  $f$ )
- $f(y) \in \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- $y \sqsubseteq f(y)$  (par définition de la borne inférieure)

③ Conclusion :  $f(y) = y$  ou  $y \in FIX(f)$ .

- ▶  $f(y) = y$  et  $z$  tel que  $f(z) = z$ 
  - $f(z) = z$  (par hypothèse sur  $z$ )
  - $f(z) \sqsubseteq z$  (par affaiblissement de l'égalité)
  - $z \in \{x | f(x) \sqsubseteq x\}$  (par définition de cet ensemble)
  - $y \sqsubseteq z$  (par construction)
- ▶  $y$  est le plus petit point fixe de  $f$ .

### $\text{lfp}(f)$ et $\text{gfp}(f)$

- ▶  $\mu f = \text{lfp}(f) = \bigwedge \{x | f(x) \sqsubseteq x\}$
  - ▶  $\nu f = \text{gfp}(f) = \bigvee \{x | x \sqsubseteq f(x)\}$
- 
- ▶  $\text{lfp}(f)$  signifie *least fixed-point*
  - ▶  $\text{gfp}(f)$  signifie *greatest fixed-point*



- ▶  $\top = \sqcup \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $gfp(f) = \nu f = \sqcup \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$
- ▶  $lfp(f) = \mu f = \sqcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$
- ▶  $\perp = \sqcap \{x \mid x \sqsubseteq f(x)\}$

►  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)

- ▶  $x \in \text{pre}(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in \text{pre}(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )

- ▶  $x \in pre(f)$  **si, et seulement si**,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )



- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )
- ▶  $f(\mu f) \in pre(f)$  (définition des pré-points-fixes)

- ▶  $x \in pre(f)$  si, et seulement si,  $f(x) \leq x$  (définition)
- ▶  $\forall a \in pre(f). \mu f \leq a$  (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- ▶  $\forall a \in pre(f). f(\mu f) \leq f(a) \leq a$  (croissance de  $f$  et propriété de  $a$ )
- ▶  $f(\mu f) \leq \mu f$  (application pour  $a = \mu f$ )
- ▶  $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$  (croissance de  $f$ )
- ▶  $f(\mu f) \in pre(f)$  (définition des pré-points-fixes)
- ▶  $\mu f \leq f(\mu f)$  (définition de  $\mu f$ )
- ▶  $\mu f = f(\mu f)$  (définition de  $\mu f$  et propriété précédente)

### Version constructive du théorème de Knaster-Tarski

Soit  $f$  une fonction monotone croissante sur un treillis complet  $(T, \perp, \top, \vee, \wedge)$ . Alors

- 1 La structure formée des points fixes de  $f$  sur  $T$ ,  $(fp(f), \sqsubseteq)$  est un treillis complet non-vide.

$$(fp(f) = \{x \in T : f(x) = x\})$$

- 2  $lfp(f) \stackrel{def}{=} \bigvee_{\alpha} f^{\alpha}$  est le plus petit point fixe de  $f$  où :

$$\left\{ \begin{array}{lll} & f^0 & \stackrel{def}{=} \perp \\ \alpha \text{ ordinal successeur} & f^{\alpha+1} & \stackrel{def}{=} f(f^{\alpha}) \\ \alpha \text{ ordinal limite} & f^{\alpha} & \stackrel{def}{=} \bigvee_{\beta < \alpha} f^{\beta} \end{array} \right.$$

- 3  $gfp(f) \stackrel{def}{=} \bigwedge_{\alpha} f_{\alpha}$  est le plus grand point fixe de  $f$  où

$$\left\{ \begin{array}{lll} & f_0 & \stackrel{def}{=} \top \\ \alpha \text{ ordinal successeur} & f_{\alpha+1} & \stackrel{def}{=} f(f_{\alpha}) \\ \alpha \text{ ordinal limite} & f_{\alpha} & \stackrel{def}{=} \bigwedge_{\beta < \alpha} f_{\beta} \end{array} \right.$$

## Computing the least fixed-point over a finite lattice

```
INPUT $F \in T \longrightarrow T$
OUTPUT $result = \mu.F$
VARIABLES $x, y \in T, i \in \mathbb{N}$
 $\ell_0 : \{x, y \in T\}$
 $x := \perp;$
 $y := \perp;$
 $i := 0;$
 $\ell_{11} : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T) \wedge i = 0\};$
WHILE $i \leq Card(T)$
 $\ell_1 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$
 $x := F(x);$
 $\ell_2 : \{x, y \in T \wedge x = F^{i+1} \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$
 $y := x \sqcup y;$
 $\ell_3 : \{x, y \in T \wedge x = F^{i+1} \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i+1} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$
 $i := i+1;$
 $\ell_4 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)+1\};$
OD;
 $\ell_5 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i = Card(T)+1\};$
 $result := y;$
 $\ell_6 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0; k=i} F^k \wedge i = Card(T)+1 \wedge result = y\};$
```

- ▶ Identify the safety property  $S$  to check.
- ▶ Run the algorithm for computing  $\mu F$ .
- ▶ Check that  $\mu F \subseteq S$  or  $\bar{S} \cap \mu F = \emptyset$ .
- ▶ Check that  $BUG \cap \mu F = \emptyset$ , when  $BUG$  is a set of states that you identify as *bad states*.

## Problem

- ▶ The general case is either infinite or large ... approximations of  $\mu F$ .
- ▶ Computing over abstract finite domain
- ▶ How to compute when it is not decidable?
- ▶ Develop a framework for defining sound abstractions of software systems under analysis.

- ▶  $S$  is the set of states
- ▶  $(\mathcal{P}(S \times S), \subseteq)$  is a complete lattice.
- ▶  $R \subseteq S \times S$  is a binary relation over  $S$  simulating the computation or the transition as  $Next(x, x')$ .
- ▶  $F \in \mathcal{P}(S \times S) \rightarrow \mathcal{P}(S \times S)$  is defined by the following expression :
  - $X \subseteq S \times S$
  - $I = \{(s, s) | s \in S\}$
  - $F(X) = I \cup R; X$

### Transitive closure of R

- ▶  $F$  is a monotonous function.
- ▶  $F$  has a least-fixed point denoted  $\mu F$ .
- ▶  $\mu F = R^*$
- ▶  $\forall n \in \mathbb{N} : F^{n+1}(\emptyset) = \bigcup_{i=0}^n$
- ▶  $\bigcup_{n \geq 0} F^n = R^*$

- ▶  $G \subseteq S$  is the set of Good states.
- ▶  $I \subseteq S$  is the set of initial states.
- ▶  $\forall s_0, s \in S : s_0 \in I \wedge R^*(s_0, s) \Rightarrow s \in G$  (Expression of safety of  $G$ )
- ▶  $\forall s \in S : (\exists s_0. s_0 \in I \wedge R^*(s_0, s)) \Rightarrow s \in G$
- ▶  $R^*[I] \subset G$
- ▶  $R^*[I] = \bigcup_{n \geq 0} F^n[I] = \bigcup_{n \geq 0} G^n$
- ▶  $\bigcup_{n \geq 0} G^n \subseteq G$  (Expression de la safety)

## Techniques for checking

$\bigcup_{n \geq 0} G^n \subseteq G$  is checked using at least two possible techniques :

- ▶ Bounded Model Checking
- ▶ k-Induction
- ▶ ...

- 1 Modélisation synchrone (I)
- 2 Synchronous Model
- 3 Tools for Synchronous Modelling
- 4 Exemples de programmes LUSTRE
- 5 Modélisation synchrone (II)
- 6 Le langage LUSTRE
- 7 Vérification de programmes LUSTRE
- 8 Propriétés des programmes LUSTRE
- 9 Sommaire sur les points-fixes



(simple contrat)

### Listing 18 – kindsession2/contract0.lus

```
node g () returns ();
(*@contract
 assume true;
 guarantee true;
*)
const n = 7;
var t : int;
let
 t = n;

tel;
```

(simple contrat)

### Listing 19 – kindsession2/contract1.lus

```
contract countSpec(trigger: bool; val: int) returns (count: int ; error: bool) ;

let
 assume val >= 0;
 var initVal: int = val => pre(initVal);
 var once: bool = trigger or (false => pre once) ;
 guarantee count >= 0 ;

mode still_zero (
 require not once ;
 ensure count = initVal ;
) ;

mode gt (
 require not ::still_zero ;
 ensure count > 0 ;
) ;
tel
```

### assumes

An assumption over a node  $n$  is a constraint one must respect in order to use  $n$  legally. It cannot depend on outputs of  $n$  in the current state, but referring to outputs under a `pre` is fine.

The idea is that it does not make sense to ask the caller to respect some constraints over the outputs of  $n$ , as the caller has no control over them other than the inputs it feeds  $n$  with.

The assumption may however depend on previous values of the outputs produced by  $n$ . Assumptions are given with the `assume` keyword, followed by any legal Boolean expression :



