

Cours Algorithmique des systèmes parallèles et distribués
Exercices

Série 1 Modélisation, programmation et vérification en TLA⁺

par Dominique Méry

5 janvier 2026

Modélisation et vérification avec TLA⁺

Exercice 1 (*disapp_td1_ex1.tla*)

Question 1.1 Modéliser sous forme d'un module TLA⁺ le réseau de Petri de la figure 1. Donner une instantiation possible des constantes. Préciser les conditions initiales correspondant à un système avec cinq (5) processeurs et deux (2) bus.

Question 1.2 On désire analyser le comportement de ce réseau et, pour cela, on souhaite savoir si la place p_5 contiendra au moins un jeton. Expliquer comment on doit procéder pour obtenir une réponse en un temps fini. Préciser le message donné par le système TLAPS.

Question 1.3 Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ?

Question 1.4 Enoncez trois propriétés de sûreté de ce réseau établissant une relation entre au moins deux places.

```
----- MODULE disapp_td1_ex1 -----
(* Petri-net for the multiprocessor system *)
EXTENDS Naturals ,TLC
CONSTANTS Places ,IPlaces ,FPlaces ,P,B
VARIABLES M
-----
(* Auxiliary Definitions *)
K == [p \in FPlaces |-> IF p \in {"p3"} THEN 1 ELSE 0 ]
TOKENS==1..20
-----
TypeOK == M \in [Places |-> SUBSET TOKENS]
-----
t1 ==
  /\ M["p1"] \geq 1 /\ M["p3"]+1 \leq K["p3"]
  /\ M=[ [M EXCEPT!["p3"] = M["p3"]+1] EXCEPT!["p1"] = M["p1"] - 1]
-----
t2 ==
  /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1
  /\ M=[ [M EXCEPT!["p3"] = M["p3"]-1]
```

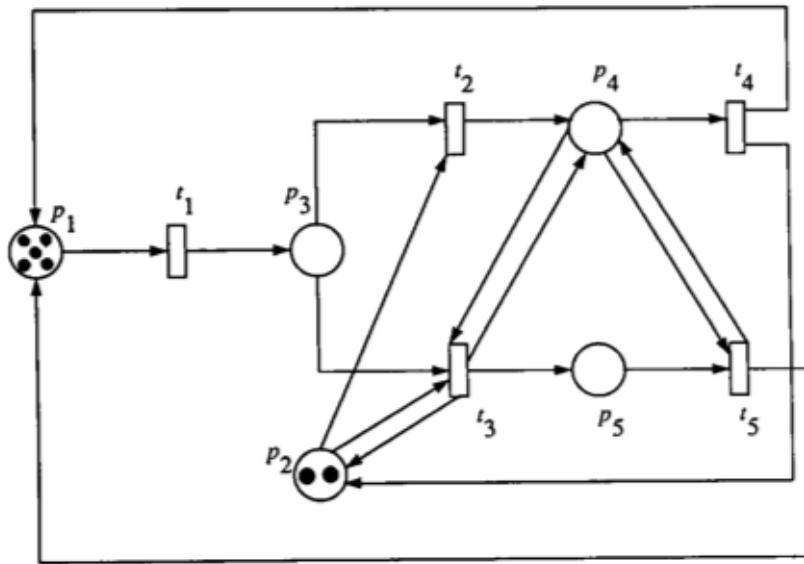


Fig. 14. A Petri-net model of a multiprocessor system, where tokens in p_1 represent active processors, p_2 available buses, p_3 , p_4 , and p_5 processors waiting for, having access to, queued for common memories, respectively.

FIGURE 1 – Réseau de Petri

```

EXCEPT!["p2"] = M["p2"] - 1
EXCEPT!["p4"] = M["p4"] + 1

t3 == 
  /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1 /\ M["p4"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p3"] = M["p3"] - 1]
            EXCEPT!["p5"] = M["p5"] + 1]

t4 == 
  /\ M["p4"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p4"] = M["p4"] - 1]
            EXCEPT!["p2"] = M["p2"] + 1]
            EXCEPT!["p1"] = M["p1"] + 1]

t5 == 
  /\ M["p4"] \geq 1 /\ M["p5"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p5"] = M["p5"] - 1]
            EXCEPT!["p1"] = M["p1"] + 1]

```

```

Init == M = [p \in Places |->
             IF p \in {"p1"} THEN P
             ELSE IF p \in {"p2"}
             THEN B ELSE 0 ]

```

```
Next == t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4 \vee t5
```

```
Petri == Init /\ [] [Next]_<<M>>
```

```
I0 == \A p \in Places : M[p] \geq 0
```

```
I1 == 0 \leq M["p3"] /\ M["p3"] \leq 1
I2 == M["p1"] \leq 5 /\ M["p2"] \leq 2
I3 == \A p \in {"p5"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 5
I4 == \A p \in {"p4"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 2
```

```

AP4 == M[ " p4 " ] = 0
AP5 == M[ " p5 " ] = 0
Test == I0 /\ I1 /\ I2 /\ I3 /\ I4
=====

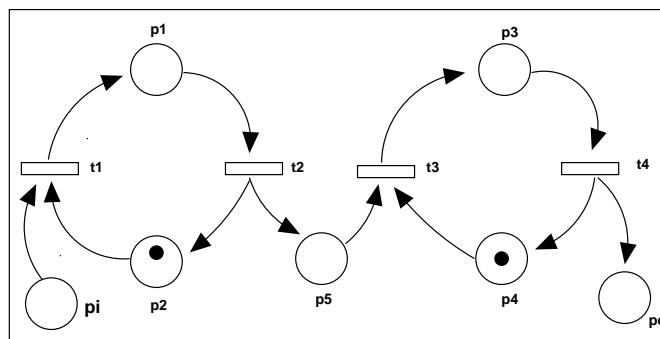
```

Exercice 2 (disapp_td1_ex2.tla)

Un réseau de Petri est un uple $R=(S,T,F,K,M,W)$ tel que

- S est l'ensemble (fini) des places.
 - T est l'ensemble (fini) des transitions.
 - $S \cap T = \emptyset$
 - F est la relation du flôt d'exécution : $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
 - K représente la capacité de chaque place : $K : S \rightarrow \text{Nat}$.
 - M représente le initial marquage chaque place :
 - $M : S \rightarrow \text{Nat}$ et vérifie la condition $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$. - W représente le poids de chaque arc : $W : F \rightarrow \text{Nat}$
 - un marquage M pour R est une fonction de S dans Nat :
 - $M : S \rightarrow \text{Nat}$ et respectant la condition $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$. - une transition t de T est activable à partir de M un marquage de R si
 1. $\forall s \in \{s' \in S \mid (s',t) \in F\} : M(s) \geq W(s,t)$.
 2. $\forall s \in \{s' \in S \mid (t,s') \in F\} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.
 - Pour chaque transition t de T , $\text{Pre}(t)$ est l'ensemble des places conduisant à t et $\text{Post}(t)$ est l'ensemble des places pointées par un lien depuis t :
 $\text{Pre}(t) = \{s' \in S : (s',t) \in F\}$ et $\text{Post}(t) = \{s' \in S : (t,s') \in F\}$
 - Soit une transition t de T activable à partir de M un marquage de R :
 1. $\forall s \in \{s' \in S \mid (s',t) \in F\} : M(s) \geq W(s,t)$.
 2. $\forall s \in \{s' \in S \mid (t,s') \in F\} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.
 - un nouveau marquage M' est défini à partir de M par : $\forall s \in S$,
- $$M'(s) = \begin{cases} M(s) - W(s,t), & \text{SI } s \in \text{PRE}(t) - \text{POST}(t) \\ M(s) + W(t,s), & \text{SI } s \in \text{POST}(t) - \text{PRE}(t) \\ M(s) - W(s,t) + W(t,s), & \text{SI } s \in \text{PRE}(t) \cap \text{POST}(t) \\ M(s), & \text{SINON} \end{cases}$$

On considère le réseau suivant :



MODULE *petri10*

EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANTS *Places, N, Q, B*

VARIABLES M

$t1 \triangleq$
 $t2 \triangleq$
 $t3 \triangleq$
 $t4 \triangleq$

$Init1 \triangleq M = [p \in Places \mapsto \text{IF } p \in \{ "p4", "p2" \} \text{ THEN } 1 \text{ ELSE }$
 $\quad \quad \quad \text{IF } p = "p1" \text{ THEN } N \text{ ELSE } 0]$

$Next \triangleq t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4$

Question 2.1 Traduire ce réseau en un module TLA⁺ dont le squelette est donné dans le texte. Pour cela, on donnera la définition des quatre transitions $t1, t2, t3, t4$. On ne tiendra pas compte de la capacité des places : les places ont une capacité d'au plus un jeton, sauf la place p_i qui peut contenir N jetons, la place p_5 peut contenir au plus B jetons et la place p_0 peut contenir au plus Q .

Question 2.2 Donner une relation liant les places p_0, p_1, p_3, p_5, p_i et la valeur N . Justifiez votre réponse.

Question 2.3 Si on suppose que la place p_0 peut contenir au plus Q jetons, donnez une condition sur Q pour que tous les jetons de p_i soient consommés un jour. Justifiez votre réponse.

Question 2.4 Expliquez ce que modélise ce réseau de Petri.

◊ Solution de l'exercice 2

----- MODULE *disapp_td1_ex2* -----

EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANTS *Places, N, Q, B*

VARIABLES M

$t11 ==$
 $\quad \quad \quad \wedge M["p1"] \leq 1 \wedge M["p5"] \leq 1$
 $\quad \quad \quad \wedge M' = [[M \text{ EXCEPT! } ["p1"] = @-1] \text{ EXCEPT! } ["p5"] = @-1] \text{ EXCEPT! } ["p2"] = @+1]$

$t1 ==$
 $\quad \quad \quad \wedge M["p2"] = 1 \wedge M["pi"] \leq 1$
 $\quad \quad \quad \wedge M' = [[M \text{ EXCEPT! } ["p1"] = 1] \text{ EXCEPT! } ["pi"] = M["pi"] - 1] \text{ EXCEPT! } ["p2"] = 0]$

$t2 ==$

```

/\ M["p1"] = 1 /\ M["p5"] < B
/\ M= [[[M EXCEPT!["p1"]=0] EXCEPT!["p5"]=M["p5"]+1] EXCEPT!["p2"]=1]

t3 ==
/\ M["p5"] \geq 1 /\ M["p4"] = 1
/\ M= [[[M EXCEPT!["p3"] = 1] EXCEPT!["p5"] = M["p5"] - 1] EXCEPT!["p4"] = 0]

t4 ==
/\ M["p3"] = 1 /\ M["po"] < Q
/\ M= [[[M EXCEPT!["p3"] = M["p3"] - 1] EXCEPT!["po"] = M["po"] + 1] EXCEPT!["p4"]

-----
Init1 == M = [p \in Places |> IF p \in {"p4", "p2"} THEN 1 ELSE
              IF p = "pi" THEN N ELSE 0]

Init == Init1

Next == t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4 \vee M=M

Petri == Init /\ [] [Next]_<<M>>

TypeInvariant == \A p \in Places : M[p] \geq 0

Inv1 == M["pi"] + M["p5"] + M["po"] + M["p1"] + M["p3"] = N
Inv2 == M["po"] \leq Q

Inv4 == M["pi"] + M["p5"] + M["po"] + M["p2"] + M["p4"] = N+2
Inv5 == M["p3"] + M["p4"] + M["p1"] + M["p2"] = 2

Inv3 == M["po"] # Q
Inv == TypeInvariant /\ Inv1 /\ Inv2 /\ Inv5
Test == Inv3
=====
```

Fin 2