

&lt;

Cours Modélisation et vérification des systèmes informatiques  
 Exercices  
 Modélisation d'algorithmes en PlusCal (II)  
 par Dominique Méry  
 4 décembre 2025

**Exercice 1** (Vérification de l'annotation de l'algorithme du calcul du maximum d'une liste)  
*appex5\_1.tla*

**Question 1.1** Ecrire un module  $TLA^+$  contenant une définition PlusCal de cet algorithme.

**Question 1.2** Ecrire la propriété à vérifier pour la correction partielle.

**Question 1.3** Ecrire la propriété à vérifier pour l'absence d'erreurs à l'exécution.

Vérification **precondition** :  $\left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0 .. n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$

**postcondition** :  $\left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j. j \in 0 .. n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

**local variables** :  $i \in \mathbb{Z}$

$m := f(0);$

$i := 1;$

**while**  $i < n$  **do**

**if**  $f(i) > m$  **then**

$m := f(i);$

  ;

$i++;$

;

**Algorithme 1:** Algorithme du maximum d'une liste non annotée

**Exercice 2** Exponentiation *appex5\_2.tla*

Soit l'algorithme annoté calculant la puissance  $z = x_1^{x_2}$ .

— *Precondition* :  $x_1 \in \mathbb{N} \wedge x_2 \in \mathbb{N}$

— *Postcondition* :  $z = x_1^{x_2}$

On suppose que  $x_1$  et  $x_2$  sont des constantes.

**Question 2.1** Ecrire un module  $TLA/TLA^+$  permettant de valider les conditions de vérification et, en particulier, de montrer la correction partielle.

**Question 2.2** Modifier la machine pour prendre en compte l'absence d'erreurs à l'exécution.

**Exercice 3** (*appex5\_3.tla*)

On considère l'algorithme suivant :

/\* algorithme de calcul du maximum avec une boucle while de l'exercice ?? \*/

**precondition** :  $\left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$

**postcondition** :  $\left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

**local variables** :  $i \in \mathbb{Z}$

$\ell_0 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge \dots \right\}$

$m := f(0);$

$\ell_1 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge m = f(0) \right\}$

$i := 1;$

$\ell_2 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i = 1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$

**while**  $i < n$  **do**

$\ell_3 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$

**if**  $f(i) > m$  **then**

$\ell_4 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \wedge \right.$

$f(i) > m \}$

$m := f(i);$

$\ell_5 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$

;

$\ell_6 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$

$i++;$

$\ell_7 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$

;

$\ell_8 : \left\{ \left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right) \wedge i = n \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \right\}$

**Algorithme 2:** Algorithme du maximum d'une liste annoté

**precondition** :  $x_1 \in \mathbb{N} \wedge x_2 \in \mathbb{N} \wedge x_1 \neq 0$   
**postcondition** :  $z = x_1^{x_2}$   
**local variables** :  $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z}$

$\ell_0 : \{y_1, y_2, y_3, z \in \mathbb{Z}\}$   
 $y_1 := x_1; y_2 := x_2; y_3 := 1;$   
 $\ell_1 : \{y_1 = x_1 \wedge y_2 = x_2 \wedge y_3 = 1 \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$   
 $\ell_{11} : \{y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$   
**while**  $y_2 \neq 0$  **do**  
     $\ell_2 : \{y_2 \neq 0 \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$   
    **if**  $\text{impair}(y_2)$  **then**  
         $\ell_3 : \{\text{impair}(y_2) \wedge y_2 \neq 0 \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$   
         $y_2 := y_2 - 1;$   
         $\ell_4 : \{y_2 \geq 0 \wedge \text{pair}(y_2) \wedge y_3 \cdot y_1 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$   
         $y_3 := y_3 \cdot y_1;$   
         $\ell_5 : \{y_2 \geq 0 \wedge \text{pair}(y_2) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$   
    ;  
     $\ell_6 : \{y_2 \geq 0 \wedge \text{pair}(y_2) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$   
     $y_1 := y_1 \cdot y_1;$   
     $\ell_7 : \{y_2 \geq 0 \wedge \text{pair}(y_2) \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2 \text{ div } 2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$   
     $y_2 := y_2 \text{ div } 2;$   
     $\ell_8 : \{y_2 \geq 0 \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$   
;  
 $\ell_9 : \{y_2 = 0 \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$   
 $z := y_3;$   
 $\ell_{10} : \{y_2 = 0 \wedge y_3 \cdot y_1^{y_2} = x_1^{x_2} \wedge y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z} \wedge z = x_1^{x_2}\}$

**Algorithme 3:** Version solution annotée

```

START
{ $x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0$ }
 $(y_1, y_2, y_3) \leftarrow (x_1, 0, x_2)$ ;
while  $y_3 \leq y_1$  do  $y_3 \leftarrow 2y_3$ ;
while  $y_3 \neq x_2$  do
  begin  $(y_2, y_3) \leftarrow (2y_2, y_3/2)$ ;
  end; if  $y_3 \leq y_1$  do  $(y_1, y_2) \leftarrow (y_1 - y_3, y_2 + 1)$ 
 $(z_1, z_2) \leftarrow (y_1, y_2)$ 
{ $0 \leq z_1 < x_2 \wedge x_1 = z_2x_2 + z_1$ }
HALT

```

**Question 3.1** Montrer que cet algorithme est aprtiellement correct par rapport à sa précondition et à sa postcondition qu'il faudra énoncer. Pour cela, on traduira cet algorithme sous forme d'un module à partir du langage PlusCal.

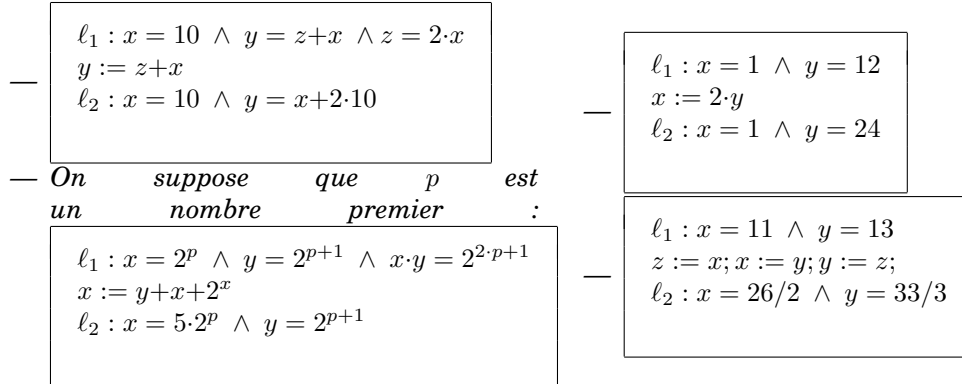
**Question 3.2** Montrer qu'il est sans erreur à l'exécution.

**Exercice 4** annotation

Montrer que chaque annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit

$\forall x, y, x', y'. P_\ell(x, y) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(x, y) \wedge (x', y') = f_{\ell, \ell'}(x, y) \Rightarrow P_{\ell'}(x', y')$

Pour cela, on utilisera une machine et un ciontexte Event-B.



**Exercice 5** (Vérification de l'annotation de l'algorithme du calcul du maximum d'une liste)  
 Vérifier l'annotation de l'algorithme de calcul du maximum d'une liste **??**. On se donne l'annotation et on demande de construire une machine permettant de vérifier cette annotation.

**Exercice 6** (Annotation du calcul de la racine carrée entière appex5\_6.tla)

L'algorithme annoté **??** calcule la racine carrée entière d'un nombre entier. Vérifier les annotations par un mdodèle Event-B.

Vérification **precondition** :  $\left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0 \dots n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$

**postcondition** :  $\left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j. j \in 0 \dots n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

**local variables** :  $i \in \mathbb{Z}$

$m := f(0);$

$i := 1;$

**while**  $i < n$  **do**

**if**  $f(i) > m$  **then**

$m := f(i);$

    ;

$i++;$

;

**Algorithme 4:** Algorithme du maximum d'une liste non annotée

variables  $X, Y_1, Y_2, Y_3, Z$

requires

$x0 \in \mathbb{N}$

$y10 \in \text{Int}$

$y20 \in \text{Int}$

$y30 \in \text{Int}$

$z0 \in \text{Int}$

ensures

$zf \cdot zf \leq x < (zf+1) \cdot (zf+1)$

$xf = x0$

$zf = y1f$

$y2f = y1f+1$

$y3f = 2 \cdot y1f+1$

**begin**

$\ell_0 : \{x \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z} \wedge y1 \in \mathbb{Z} \wedge y2 \in \mathbb{Z} \wedge y3 \in \mathbb{Z}\}$

$(Y_1, Y_2, Y_3) := (0, 1, 1);$

$\ell_1 : \{y2 = (y1+1) \cdot (y1+1) \wedge y3 = 2 \cdot y1+1 \wedge y1 \cdot y1 \leq x\}$

**While**  $(Y_2 \leq X)$

$\ell_2 : \{y2 = (y1+1) \cdot (y1+1) \wedge y3 = 2 \cdot y1+1 \wedge y2 \leq x\}$

$(Y_1, Y_2, Y_3) := (Y_1+1, Y_2+Y_3+2, Y_3+2);$

$\ell_3 : \{y2 = (y1+1) \cdot (y1+1) \wedge y3 = 2 \cdot y1+1 \wedge y1 \cdot y1 \leq x\}$

**od**;

$\ell_4 : \{y2 = (y1+1) \cdot (y1+1) \wedge y3 = 2 \cdot y1+1 \wedge y1 \cdot y1 \leq x \wedge x < y2\}$

$Z := Y_1;$

$\ell_5 : \{y2 = (y1+1) \cdot (y1+1) \wedge y3 = 2 \cdot y1+1 \wedge y1 \cdot y1 \leq x \wedge x < y2 \wedge z = y1 \wedge z \cdot z \leq x \wedge x < (z+1) \cdot (z+1)\}$

**end**

**Exercice 7** Soient les contrats suivants. Pour chaque contrat, évaluer sa validité avec le calcul des wps.

/\* algorithme de calcul du maximum avec une boucle while de l'exercice ?? \*/

**precondition** :  $\left( \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$

**postcondition** :  $\left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

**local variables** :  $i \in \mathbb{Z}$

$\ell_0 : \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right\} \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge \dots$

$m := f(0);$

$\ell_1 : \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right\} \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge m = f(0)$

$i := 1;$

$\ell_2 : \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right\} \wedge i = 1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

**while**  $i < n$  **do**

$\ell_3 : \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right\} \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

**if**  $f(i) > m$  **then**

$\ell_4 : \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right\} \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right) \wedge$

$f(i) > m$

$m := f(i);$

$\ell_5 : \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right\} \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

;

$\ell_6 : \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right\} \wedge i \in \mathbb{Z} \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

$i++;$

$\ell_7 : \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right\} \wedge i \in 1..n-1 \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f[0..i-1]) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..i-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

;

$\ell_8 : \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \wedge \\ n \neq 0 \wedge \\ f \in 0..n-1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right\} \wedge i = n \wedge \left( \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \wedge \\ m \in \text{ran}(f) \wedge \\ (\forall j. j \in 0..n-1 \Rightarrow f(j) \leq m) \end{array} \right)$

**Algorithme 5:** Algorithme du maximum d'une liste annoté

**Question 7.1**

```
requires ...
ensures  $z_f = 100 \wedge x_f + y_f = 12 \wedge x_f + x_0 = 4$ ;
variables  $x, y, z$ 
begin
  /·@assert;·/
   $x = x + 1$ ;
  /·@assert;·/
   $y = x + y + 2$ ;
  /·@assert;·/
   $z = x + y$ ;
  /·@assert;·/
end
```

La version ACSL est la suivante

Listing 1 – td51.c

```
struct data {
    unsigned x;
    unsigned y;
    unsigned z;
};

/*@
  @ ensures \result.z == 100 && \result.x + \result.y == 12 && \result.x + x0 == 4;
  */

struct data exemple(int x0, int y0, int z0)
{
    int x=x0;
    int y=y0;
    int z=z0;
    //@ assert x == x0;
    x = x + 1;
    y=x+y+2;
    z = x +y;
    struct data r;
    r.x = x; r.y=y; r.z=z;
    return r;
}
```

### Question 7.2

```

requires  $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ 
ensures  $z_f = \max(x_0, y_0)$ 
variables  $x, y, z$ 
begin
  /·@assert;·/
  IF  $x < y$  THEN
    /·@assert;·/
     $z := y$ ;
    /·@assert;·/
  ELSE
    /·@assert;·/
     $z := x$ ;
    /·@assert;·/
  FI;
  /·@assert;·/
end

```

La version ACSL est la suivante

Listing 2 – td52.c

```

/*@ requires  $x_0 \geq 0 \ \&\& \ y_0 \geq 0$ ;
   @ ensures ( $\backslash result == x_0 \ || \ \backslash result == y_0$ )  $\ \&\& \ \backslash result \geq x_0 \ \&\& \ \backslash result \geq y_0$ ;
   */

exemple(int x0, int y0)
{
  int x=x0;
  int y=y0;
  int z;
  //@ assert  $x == x_0 \ \&\& \ y == y_0$ ;
  if (  $x < y$  )
  {
     $z = y$ ;
  }
  else
  {
     $z=x$ ;
  };
  return z;
}

```

### Exercice 8 td58.c

On suppose que *val* est une valeur entière. Vérifier l'annotation suivante :

Listing 3 – td51.c

```

#define v 3
/*@ requires  $val == v$ ;
   */

int exemple(int val)
{
  int c = val ;
  //@ assert  $c == 2$ ;
  int x;
  //@ assert  $c == 2$ ;
   $x = 3 * c$  ;
}

```



```

    //@ assert x == 6;
    return(0);
}

```

### Exercice 9 *td59.c*

Vérifier l'annotation suivante :

Listing 4 – td59.c

```

int exemple()
{
    int a = 42; int b = 37;
    int c = a+b;
    l1: b == 37 ;
    a -= c;
    b += a;
    l2: b == 0 && c == 79;
    return(0);
}

```

### Exercice 10 Vérifier l'annotation suivante :

Listing 5 – td510.c

```

int main()
{
    int z;
    int a = 4;
    //@ assert a == 4 ;
    int b = 3;
    //@ assert b == 3 && a == 4;
    int c = a+b;
    //@ assert b == 3 && c == 7 && a == 4 ;
    a += c;
    b += a;
    //@ assert a == 11 && b == 14 && c == 7 ;
    //@ assert a +b == 25 ;
    z = a*b;
    //@ assert a == 11 && b == 14 && c == 7 && z == 154;
    return(0);
}

```

### Exercice 11 Vérifier l'annotation suivante :

Listing 6 – td511.c

```

int main()
{
    int a = 4;
    int b = 3;
    int c = a+b;
    a += c;
    b += a;
    //@ assert a == 11 && b == 14 && c == 7 ;
    return(0);
}

```