UNIVERSITÉ DE LORRAINE

TELECOM nancy
Ingénieurs du numérique • Inspiring your digital future

Cours Modélisation et Vérification des Systèmes Informatiques (MVSI)

Sémantique des langages de programmation et applications à l'analyse des programmes

Dominique Méry
Telecom Nancy, Université de Lorraine

Année universitaire 2024-2025

Plan

Sommaire

Current Summary

Vérification du contrat : ce qui est la technique

Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :

- P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- x_0 satisfait pre : pre(x_0) and x_f satisfait post : post(x_0, x_f)
- pre$(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow$ post(x_0, x_f)

requires $pre(x_0)$
ensures $post(x_0, x_f)$
variables X

begin
$0 : P_0(x_0, x)$
$\texttt{instruction}_0$
...
$i : P_i(x_0, x)$
...
$\texttt{instruction}_{f-1}$
$f : P_f(x_0, x)$
end

- $pre(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- $P_f(x_0, x) \Rightarrow post(x_0, x)$
- conditions de vérification pour toutes les paires $\ell \longrightarrow \ell'$

Vérification du contrat

Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :

- P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- x_0 satisfait pre : pre(x_0) and x_f satisfait post : post(x_0, x_f)
- pre$(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow$ post(x_0, x_f)

requires $pre(x_0)$
ensures $post(x_0, x_f)$
variables X

begin
$0 : P_0(x_0, x)$
instruction$_0$
...
$i : P_i(x_0, x)$
...
instruction$_{f-1}$
$f : P_f(x_0, x)$
end

- $pre(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- $pre(x_0) \wedge P_f(x_0, x) \Rightarrow post(x_0, x)$
- Pour toute paire d'étiquettes ℓ, ℓ' telle que $\ell \longrightarrow \ell'$, on vérifie que, pour toutes valeurs $x, x' \in \text{MEMORY}$

$$\left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} pre(x_0) \wedge P_\ell(x_0, x)) \\ \wedge cond_{\ell,\ell'}(x) \wedge x' = f_{\ell,\ell'}(x) \end{array} \right) \\ \Rightarrow P_{\ell'}(x_0, x') \end{array} \right),$$

Méthode de vérification pour RTE

Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :

- P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- x_0 satisfait pre : pre(x_0) and x_f satisfait post : post(x_0, x_f)
- pre$(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow$ post(x_0, x_f) et $\mathbb{D}$ est le domaine RTE de X

requires $pre(x_0)$
ensures $post(x_0, x_f)$
variables X
begin
$0 : P_0(x_0, x)$
$\texttt{instruction}_0$
...
$i : P_i(x_0, x)$
...
$\texttt{instruction}_{f-1}$
$f : P_\ell(x_0, x)$
end

- $pre(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- $pre(x_0) \wedge P_f(x_0, x) \Rightarrow post(x_0, x)$
- Pour toute paire d'étiquettes ℓ, ℓ' telle que $\ell \longrightarrow \ell'$, on vérifie que, pour toutes valeurs $x, x' \in \textsc{Memory}$
$$\left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} pre(x_0) \wedge P_\ell(x_0, x)) \\ \wedge cond_{\ell,\ell'}(x) \wedge x' = f_{\ell,\ell'}(x) \end{array} \right) \\ \Rightarrow P_{\ell'}(x_0, x') \end{array} \right),$$
- Pour toute paire d'étiquettes m, n tell e que $m \longrightarrow n$, on vérifie que, $\forall x, x' \in \textsc{Memory} : pre(x_0) \wedge P_m(x_0, x) \Rightarrow \mathbf{DOM}(m, n)(x)$

Point d'étape

- $\forall x_0, x \in \textsc{Vals}. Init(x_0) \wedge \textsc{Next}^\star(x_0, x) \Rightarrow A(x)$
- $\forall x \in \textsc{Vals}.(\exists x_0.x_0 \in \textsc{Vals} \wedge Init(x_0) \wedge \textsc{Next}^\star(x_0, x)) \Rightarrow A(x).$
- $\textsc{reachable}(M) = \{u | u \in \textsc{Vals} \wedge (\exists x_0.x_0 \in \textsc{Vals} \wedge Init(x_0) \wedge \textsc{Next}^\star(x_0, u))\}$ est l'ensemble des états accessibles à partir des états initiaux.
- Model Checking : on doit montrer l'inclusion $\textsc{reachable}(M) \subseteq \{u | u \in \textsc{Vals} \wedge A(u)\}$.
- Preuves : définir un invariant $\mathrm{I}(\ell, v) \equiv \bigvee_{\ell \in \textsc{Locations}} \left(\bigvee_{v \in \textsc{Memory}} P_\ell(v) \right)$ avec la famille d'annotations $\{P_\ell(v) : \ell \in \textsc{Locations}\}$ et démontrer les conditions de vérification.
- Analyse automatique :
  - Mécaniser la vérification des conditions de vérification
  - Calculer $\textsc{reachable}(M)$
  - Calculer une valeur approchée de $\textsc{reachable}(M)$

$(\mathcal{P}(\textsc{Vals}), \subseteq) \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} (D, \sqsubseteq)$
$\alpha(\textsc{reachable}(M)) \sqsubseteq A$ ssi $\textsc{reachable}(M) \sqsubseteq \gamma(A)$
Si $\gamma(A) \subseteq \{u | u \in \textsc{Vals} \wedge A(u)\}$, alors
$\textsc{reachable}(M) \subseteq \{u | u \in \textsc{Vals} \wedge A(u)\}$

- Mécaniser la vérification des conditions de vérification
- Calculer $\textsc{reachable}(M)$ comme un point-fixe.
- Calculer une valeur approchée de $\textsc{reachable}(M)$

$$(\mathcal{P}(\textsc{Vals}), \subseteq) \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} (D, \sqsubseteq)$$
$$\alpha(\textsc{reachable}(M)) \sqsubseteq A \text{ ssi } \textsc{reachable}(M) \sqsubseteq \gamma(A)$$

Si A vérifie $\gamma(A) \subseteq \{u | u \in \textsc{Vals} \wedge A(u)\}$, alors
$\textsc{reachable}(M) \subseteq \{u | u \in \textsc{Vals} \wedge A(u)\}$

Triptych of Software/System Engineering

Software/System development *ideally* proceeds in three phases according to Dines Børner : :

$$\mathcal{D}, \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}$$

- First, a phase of **domain engineering** $\mathcal{D}$: an analysis of the application domain leads to a description of that domain.
- Second, a phase of **requirements engineering** $\mathcal{R}$: an analysis of the domain description leads to a prescription of requirements to software for that domain. ¡bloc
- Third, a phase of **software/system design** $\mathcal{S}$: an analysis of the requirements prescription leads to software for that domain.

Triptych of Software/System Engineering

Software/System development *ideally* proceeds in three phases according to Dines Børner : :

$$\mathcal{D}, \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}$$

Pre/Post Specification

- $\mathcal{R}$: pre/post.
- $\mathcal{D}$: integers, reals, ...
- $\mathcal{S}$: algorithm, program, ...

Triptych of Software/System Engineering

Software/System development *ideally* proceeds in three phases according to Dines Børner : :

$$\mathcal{D}, \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}$$

Pre/Post Specification

- $\mathcal{R}$: pre/post.
- $\mathcal{D}$: integers, reals, ...
- $\mathcal{S}$: algorithm, program, ...

- Semantical relationship
- Verification by induction principle

Triptych of Software/System Engineering

Software/System development *ideally* proceeds in three phases according to Dines Børner : :

$$\mathcal{D}, \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}$$

System Modelling

- $\mathcal{R}$: safety properties in Event-B
- $\mathcal{D}$: theories, context in Event-B
- $\mathcal{S}$: machines for reactive systems

Triptych of Software/System Engineering

Software/System development *ideally* proceeds in three phases according to Dines Børner : :

$$\mathcal{D}, \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}$$

System Modelling

- $\mathcal{R}$: safety properties in Event-B
- $\mathcal{D}$: theories, context in Event-B
- $\mathcal{S}$: machines for reactive systems

- Checking proof obligations
- Refinement of models

Triptych of Software/System Engineering

Software/System development *ideally* proceeds in three phases according to Dines Børner : :

$$\mathcal{D}, \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}$$

- First, a phase of **domain engineering** $\mathcal{D}$: an analysis of the application domain leads to a description of that domain.
- Second, a phase of **requirements engineering** $\mathcal{R}$: an analysis of the domain description leads to a prescription of requirements to software for that domain.
- Third, a phase of **software/system design** $\mathcal{S}$: an analysis of the requirements prescription leads to software for that domain.

J. Piaget. *Logique et Connaissance scientifique.* La Pléiade, encyclopaedia.

If we refer to whom is talking, or more generally to the language users, this investigation is attributed to the **pragmatics**.
If we make an abstraction of the language users and if we analyze the expressions and their meanings only, we are in the area of the **semantics**.
Finally, if we make an abstraction of the meanings to analyze the relations between expressions, we are dealing with **syntax**.
These three elements constitute the science of the language or semiotics.

Correction des annotations

Listing 1 – annotation

```
#include <limits.h>
/*@ requires x < INT_MAX &&  x >= INT_MIN ;
requires y < INT_MAX;
     requires y >= INT_MIN ;
requires z < INT_MAX;
     requires z >= INT_MIN ;
requires  z+x*x+2*x*(y+3) < INT_MAX;
     requires  z+x*x+2*x*(y+3) >= INT_MIN ;
requires  z+x*x < INT_MAX;
     requires  z+x*x >= INT_MIN ;
     requires x == y + 3 && z  == (y+3)*(y+3);
@*/

int funny(int x,int y, int z) {
    //@ assert x == y + 3 && z  == (y+3)*(y+3);
    z=z+x*x+2*x*(y+3);
    //@ assert  z  == (y+3+x)*(y+3+x);

    return 0;
}
```

Etrange spécification

Listing 2 – calcul d'une moyenne

```
/*@
  requires a < 0 && a > 0;
  ensures \false;
*/
void afunnyfun(int a){ }
```

Gestion des overflows

Listing 3 – calcul d'une moyenne

```
#include <stdio.h>
#include <limits.h>



/*@
    requires  INT_MIN <= a && a <= INT_MAX;
    requires  INT_MIN <= b && b <= INT_MAX;
    requires  INT_MIN <= a+b && a+b <= INT_MAX;
    ensures   INT_MIN <= \result && \result <= INT_MAX;
 */

int average(int a,int b)
{
  return((a+b)/2);
}

int main()
{
  int x,y;
  x=INT_MAX;y=0;
//@ assert INT_MIN <= x && x <= INT_MAX;
//@ assert INT_MIN <= y && y <= INT_MAX;
//@ assert INT_MIN <= x+y && x+y <= INT_MAX;
  printf("Average of for %d and %d is %d\n",x,y,
         average(x,y));
  return 0;
}
```

Current Summary

Implicite versus explicite

- Ecrire $101 = 5$ peut avoir une signification

Implicite versus explicite

- Ecrire *101* $= 5$ peut avoir une signification
- Le code du nombre n est *101* à gauche du symbole $=$ et le code du nombre n est sa représentation en base 10 à droite.
- $n_{10} = 5$ et $n_2 = 101$
- Vérification : $base(2, 10, 101) = 1.2^2 + 0.2 + 1.2^0 = 5_{10}$

Example : description of static behaviour

- A train moving at absolute speed $spd1$
- A person walking in this train with relative speed $spd2$
  - One may compute the absolute speed of the person
- Modelling
  - Syntax. Classical expressions
    - Type $Speed = Float$
    - $spd1, spd2 : Speed$
    - $AbsoluteSpeed = spd1 + spd2$
  - Semantics
    - If $spd1 = 25.6$ and $spd2 = 24.4$ then $AbsoluteSpeed = 50.0$
    - If $spd1 =$ "val" and $spd2 = 24.4$ then exception raised
  - Pragmatics
    - What if $spd1 is$ given in mph (miles per hour) and $spd2$ in km/s (kilometers per second) ?
    - What if $spd1$ is a relative speed ?

Des sémantiques pour des langages de programmation

- La sémantique décrit le sens des objets définis par la syntaxe.
- La sémantique permet d'éviter l'ambiguïté des éléments d'un langage.
- Exemples
  - L'objet *123* désigne le nombre 123 en base dix.
  - L'objet *x+12+8* désigne la somme des valeurs de la variable *x* et des deux nombres écrits en base dix *12* et *8*.
- Styles de sémantique
  - Sémantique Opérationnelle : la sémantique du programme est décrite par une relation de transition qui décrit les différents étas du programme et la relation de transition est définie par des *opérations* ou des *actions*.
  - Sémantique Dénotationnelle : la sémantique du programme est une fonction *calculant* le résultat à partir de la donnée.
  - Sémantique Axiomatique : le programme est caractérisé par des axiomes et des règles d'inférences comme par exemple la logique de HOARE.

Current Summary

- Sémantique à petits pas (small steps) :
  - Définition d'une relation notée $\underset{\text{sos}}{\longrightarrow}$ sur l'ensemble des configurations de la forme (S, s) où S est une instruction ou un programme ou une instruction et s est un état ou de la forme s où s est un état.
  - Transitions de type 1 : $(S, s) \underset{\text{sos}}{\longrightarrow} (S', s')$
  - Transitions de type 2 : $(S, s) \underset{\text{sos}}{\longrightarrow} s'$
- Sémantique naturelle ou à grands pas (*big step*) :
  - Définition d'une relation notée $\underset{\text{nat}}{\longrightarrow}$ sur l'ensemble des configurations de la forme (S, s) où S est une instruction ou un programme ou une instruction et s est un état ou de la forme s où s est un état.
  - Transitions uniquement de ce type : $(S, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s'$

Cadre pour la sémantique opérationnelle

- Un état s est un élément de $STATES = V \to \mathbb{Z}$ et $STATES$ est l'ensemble des états.
- $\mathcal{E}$ est une fonction associant à toute expression arithmétique une fonction permettant de donner la valeur de cette expression en un état donné : $\mathcal{E} \in EXPR \to (STATES \to \mathbb{Z})$:
  - $\mathcal{E}(x)(s) = s(x)$ où $x \in V$ et $s \in STATES$.
  - $\mathcal{E}(constant)(s) = constant$.
  - $\mathcal{E}(e1\ op\ e2)(s) = \mathcal{E}(e1)(s)\ \mathbf{op}\ \mathcal{E}(e2)(s)$.
- $\mathcal{B}$ est une fonction associant à toute expression booléenne une fonction permettant de donner la valeur de cette expression en un état donné : $\mathcal{B} \in BEXPR \to (STATES \to BOOL)$:
  - $\mathcal{B}(ff)(s) = FALSE$
  - $\mathcal{B}(tt)(s) = TRUE$
  - $\mathcal{B}(e1\ relop\ e2)(s) = \mathcal{E}(e1)(s)\ \mathbf{relop}\ \mathcal{E}(e2)(s)$.
  - $\mathcal{B}(b1\ bop\ b2)(s) = \mathcal{B}(b1)(s)\ \mathbf{bop}\ \mathcal{B}(b2)(s)$.

Règles de définition selon la syntaxe

- Si $\mathcal{E}(e)(s)$ est la valeur de l'expression e en s, alors $(x := e, s) \underset{\text{SOS}}{\longrightarrow} s[x \mapsto \mathcal{E}(e)(s)]$
- $(skip, s) \underset{\text{SOS}}{\longrightarrow} s$
- Si $(S_1, s) \underset{\text{SOS}}{\longrightarrow} (S'_1, s')$, alors $(S_1; S_2, s) \underset{\text{SOS}}{\longrightarrow} (S'_1; S_2, s')$.
- Si $(S_1, s) \underset{\text{SOS}}{\longrightarrow} s'$, alors $(S_1; S_2, s) \underset{\text{SOS}}{\longrightarrow} (S_2, s')$.
- Si $\mathcal{B}(b)(s) = TRUE$, alors $(\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \textbf{ fi}, s) \underset{\text{SOS}}{\longrightarrow} (S_1, s)$.
- Si $\mathcal{B}(b)(s) = FALSE$, alors $(\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \textbf{ fi}, s) \underset{\text{SOS}}{\longrightarrow} (S_2, s)$.
- $(\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od}, s) \underset{\text{SOS}}{\longrightarrow}$ $(\textbf{if } b \textbf{ then } S; \textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od else } skip \textbf{ fi}, s)$

Règles de définition selon la syntaxe

- Si $\mathcal{E}(e)(s)$ est la valeur de l'expression e en s, alors $(x := e, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s[x \mapsto \mathcal{E}(e)(s)]$
- $(skip, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s$
- Si $(S_1, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s'$ et $(S_2, s') \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s"$, alors $(S_1; S_2, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s"$.
- Si $(S_1, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s'$ et $\mathcal{B}(b)(s) = TRUE$, alors $(\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \textbf{ fi}, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s'$.
- Si $(S_2, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s'$ et $\mathcal{B}(b)(s) = FALSE$, alors $(\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \textbf{ fi}, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s'$.
- Si $(S, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s'$ et $(\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od}, s') \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s"$ et $\mathcal{B}(b)(s) = TRUE$, alors $(\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od}, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s"$.
- Si $\mathcal{B}(b)(s) = FALSE$, alors $(\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od}, s) \underset{\text{nat}}{\longrightarrow} s$.

Fonctions sémantiques associées aux instructions

Fonction sémantique $\mathcal{S}_{sos}$:

- $\mathcal{S}_{sos} \in STATS \rightarrow (STATES \nrightarrow STATES)$:
- $\mathcal{S}_{sos}(S)(s) \stackrel{def}{=} \begin{cases} s' \ si \ (S,s) \xrightarrow[\text{sos}]{\star} s' \\ indefinie \ sinon \end{cases}$

Fonction sémantique $\mathcal{S}_{nat}$:

- $\mathcal{S}_{nat} \in STATS \rightarrow (STATES \nrightarrow STATES)$:
- $\mathcal{S}_{nat}(S)(s) \stackrel{def}{=} \begin{cases} s' \ si \ (S,s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s' \\ indefinie \ sinon \end{cases}$

Equivalence pour les instructions de STATS

Pour toute instruction S de STATS, pour tout état s de STATES, $\mathcal{S}_{sos}(S)(s) = \mathcal{S}_{nat}(S)(s)$

Preuve

- Montrons que si $(S, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s'$, alors $(S, s) \xrightarrow[\text{sos}]{\star} s'$.
- Montrons que si $(S, s) \xrightarrow[\text{sos}]{\star} s'.$, alors $(S, s) \xrightarrow[\text{nat}]{} s'$.

Current Summary

Motivations

- Fondement des langages de programmation.
- Outils mathématiques permettant de raisonner sur les objets de la programmation.
- Liaison entre les programmes et les spécifications : le raffinement
- Préservation de la sémantique d'un langage de programmation dans un langage de plus bas niveau par compilation : correction du compilateur.

Langage de programmation

Une notation pour des instructions comme par exemple C, PASCAL, SHELL,

- Syntaxe : Structure et forme des sentences
- Sémantique : Association d'un sens aux sentences comme par exeple des nombres, des fonctions, des actions d'une machine, ...
- Pragmatique : Utilisation effective du langage comme par exemple les domaines d'applications, les performances, ...

Des éléments spécifiques pour chaque programme d'une machine.

Mise en œuvre

- Un module d'analyse syntaxique : lecture du texte fourni, vérification de la syntaxe, génération de la représentation interne.
- Un module d'évaluation : évaluation du texte fourni en donnée du texte analysé en un texte résultat ; cela définit la sémantique du langage.

La mise en œvre d'un langage est une activité pragmatique.

Interprétation versus compilation

- Interprétation : Exécution du programme
  L'interprète définit le sens par ses actions.
- Compilation : Transformation d'un programme écrit dans un langage L en un texte équivalent d'un langage L2 (langage machine en général).
  Le compilateur préserve le sens par équivalence.

Spécifications formelles des langages

- Syntaxe sous BNF (Backus Naur Form)
  - Correspondance entre la BNF et l'analyseur syntaxique.
  - Générateur d'analysuer à partir de spécification du langage.
- Sémantique :
  - Opérationnelle.
  - Axiomatique
  - Dénotationnelle

- Le sens d'un programme est un objet mathématique.
- Chaque construction du langage est associée à un objet mathématique par une fonction de valuation. Le sens d'une structure est appelée une dénotation.

$$\mathcal{M}(P) = D \tag{1}$$

P est un programme
$\mathcal{M}$ est une fonction de valuation.
D est une dénotation ou une valeur sémantique de dénotation.

Fonction de valuation

- Domaine : Structure syntaxique abstraite du langage
- Codomaine : Objets des domaines sémantiques.
- Définition structurelle : le sens d'un arbre est défini à partir du sens de ses sous-arbres.

Une fonction de valuation sémantique associe une syntaxe abstraite à des objets d'un domaine sémantique.

Langage des nombres binaires

- Syntaxe abstraite :
  - Domaines syntaxiques : $B \in Nombre{-}binaire$, $D \in Chiffre{-}binaire$
  - Règles syntaxiques : $B ::= BD|D$, $D ::= 0|1$

Sens des sentences terminales

- Sous-arbre : $\begin{array}{c} D \\ | \\ 0 \end{array}$
- Sens : $\mathcal{D}(\begin{array}{c} D \\ | \\ 0 \end{array}) = zero$
- Notation : $\mathcal{D}[\![0]\!] = zero$

Fonction de valuation : $\begin{array}{l} \mathcal{D}[\![0]\!] = zero \\ \mathcal{D}[\![1]\!] = un \end{array}$

Sens des sentences non-terminales

- Sous-arbre : $\begin{array}{c} B \\ | \\ D \\ | \\ 1 \end{array}$
- Sens : $\mathcal{B}(\begin{array}{c} B \\ | \\ D \\ \Delta \end{array}) = \mathcal{D}(\begin{array}{c} D \\ \Delta \end{array})$
- Notation : $\mathcal{B}[\![D]\!] = \mathcal{D}[\![D]\!]$

Fonction de valuation : $\begin{array}{l} \mathcal{B}[\![D]\!] = \mathcal{D}[\![D]\!] \\ \mathcal{B}[\![BD]\!] = (\mathcal{B}[\![B]\!]\ fois\ deux)\ plus\ \mathcal{D}[\![D]\!] \end{array}$

Définition de la sémantique

Syntaxe abstraite

$B \in Nombre{-}binaire$

$D \in Chiffre{-}binaire B ::= BD|D$

$D ::= 0|1$

Algèbres sémantiques

Nombres naturels :

Domaine Nat $= \mathbb{N}$

Opérations zero, un deux, trois, . . . : Nat

plus, fois : Nat $\times$ Nat $\rightarrow$ Nat

Définition de la sémantique

Fonctions de valuation

$\mathcal{B} : Nombre{-}binaire \rightarrow Nat$

$\mathcal{B}[\![D]\!] = \mathcal{D}[\![D]\!]$

$\mathcal{B}[\![BD]\!] = (\mathcal{B}[\![B]\!]\ fois\ deux)\ plus\ \mathcal{D}[\![D]\!]$

$\mathcal{D} : Chiffre{-}binaire \rightarrow Nat$

$\mathcal{D}[\![0]\!] = zero$

$\mathcal{D}[\![1]\!] = un$

¡

- **Syntaxe**
  τ ::= `bool` | `nat` % types de données
  θ ::= `exp`$[\tau]$ | `comm` % types des textes de commandes
- tout nom de type τ dénote un ensemble non vide $[\![\tau]\!]$ de valeurs possibles :
  - $[\![\texttt{bool}]\!] = \{true, false\}$
  - $[\![\texttt{nat}]\!] = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$
- $[\![\texttt{exp}[\tau]]\!] = \texttt{States} \longrightarrow [\![\tau]\!]$
  $[\![\texttt{comm}]\!] = \texttt{States} \nrightarrow \texttt{States}$ (fonction partielle)
  où `States` est l'ensemble des états,
  par exemple $\texttt{States} = Variable \longrightarrow Nat$

- Equations sémantiques :
  $[\![\bullet]\!]_{\mathtt{exp}[\tau]} : \mathtt{exp}[\tau] \longrightarrow [\![\mathtt{exp}(\tau)]\!]$
  $[\![\bullet]\!]_{\mathtt{comm}} : \mathtt{comm} \longrightarrow [\![\mathtt{comm}]\!]$

- $[\![C_0; C_1]\!]_{\texttt{comm}} = [\![C_1]\!] \circ [\![C_0]\!]$
- $[\![\texttt{for } N \texttt{ do } C]\!]_{\texttt{comm}} = [\![C]\!]^{[\![N]\!]}$
- Application à des démonstrations de propriétés sur les commandes :
  - $\texttt{C} \equiv \texttt{C}'$ si, et seulement si, $[\![\texttt{C}]\!] = [\![\texttt{C}']\!]$
  - $\texttt{for } 0 \texttt{ do C} \equiv \texttt{SKIP}$
  - $(\texttt{C}; \texttt{C}); \texttt{C} \equiv \texttt{C}; (\texttt{C}; \texttt{C})$
- Affectation :
  $[\![I := E]\!]_{\texttt{comm}} = \lambda s \in \texttt{States}.s[I \mapsto [\![E]\!]_{\texttt{exp}}(s)]$

Observation

$\texttt{while B do C} \equiv_{comm} \texttt{if B then C; while B do C}$

- Vue par les commandes ou instructions
  - $C_0 = \texttt{diverge}$ (instruction ou comande qui ne terline jamais)
  - $\forall i \in \mathbb{N} : \texttt{C}_{i+1} = \texttt{if B then C;C}^i$
  - $\forall i \in \mathbb{N} : \texttt{C}_{i+1}(s) = \texttt{si } [\![B]\!](s) \textit{ alors } ([\![\texttt{C}]\!]; \texttt{C}_i)(s) \textit{ sinon } s$
- Vue par les fonctions sémantiques :
  - $c_0 = \varnothing$ où $[\![C_0]\!] = c_0$
  - $\forall i \in \mathbb{N} : c_i = [\![C_i]\!]$
  - $\forall i \in \mathbb{N} : \texttt{c}_{i+1}(s) = \texttt{si } [\![bb]\!](s) \textit{ alors } ([\![\texttt{C}]\!]; \texttt{c}_i)(s) \textit{ sinon } s$
  - $\forall i \in Nat : graphe(c_i) \subseteq graphe(c_{i+1}) \texttt{ et} c_i = [\![C_i]\!]$
- $[\![\texttt{while B do C}]\!] = c_\infty$ où
  $graphe(c_\infty) = graphe(c_0) \cup \ldots \cup graphe(c_i) \cup$
- $[\![\texttt{while B do C}]\!] = \mu W$
  où $W(f) = \lambda s \in \texttt{States}.\ \texttt{si } [\![B]\!](s) \textit{ alors } f([\![\texttt{C}]\!](s)) \textit{ sinon } s$

Un exemple simple

- $w \stackrel{def}{=}$

$$\begin{array}{l}\textbf{while } \mathrm{x} > 0 \textbf{ do} \\ \quad \mathrm{x} := \mathrm{x}{-}1 \\ \textbf{od}\end{array}$$

- $[\![\mathrm{x} := \mathrm{x}{-}1]\!](s) = f(s) = s[x \mapsto x{-}1]$
-
  - $S = \{s | s \in \{x\} \to \mathbb{Z}\}$
  - $\forall i.i \in \mathbb{Z} \Rightarrow s_i \in S$
  - $\forall s.s \in S \Rightarrow \exists i \in \mathbb{Z}.s = s_i$
- $w_0 = \varnothing$
- $w_1(s) = if(s(x) > 0, w_0(f(s)), s) : w_1 = \{s_i \mapsto s_i | i \in \mathbb{Z} \wedge i \leq 0\}$
- $w_2(s) = if(s(x) > 0, w_1(f(s)), s) :$
  $w_2 = \{s_i \mapsto s_i | i \in \mathbb{Z} \wedge i \leq 0\} \cup \{s_j \mapsto s_0 | j \in 0..1$
- $\ldots$
- $w_{k+1}(s) = if(s(x) > 0, w_k(f(s)), s) :$
  $w_2 = \{s_i \mapsto s_i | i \in \mathbb{Z} \wedge i \leq 0\} \cup \{s_j \mapsto s_0 | j \in 0..k\}$
- $\ldots$
- $w = w_0 \cup w_1 \cup \ldots \cup w_k \cup = \{s_i \mapsto s_i | i \in \mathbb{Z} \wedge i \leq 0\} \cup \{s_i \mapsto 0 | i \in \mathbb{Z} \wedge i > 0\}$

Current Summary

Equivalence pour les instructions de STATS

Pour toute instruction S de STATS, pour tout état s de STATES,
$\mathcal{S}_{sos}(S)(s) = \mathcal{S}_{nat}(S)(s) = \mathcal{D}(S)(s)$

- La sémantique opérationnelle est une sémantique liée à une fonction d'interprétation et de calcul du programme évalué.
- La sémantique dénotationnelle est une expression fonctionnelle du programme ;

1

Current Summary

Current Subsection Summary

Exemple de ACSL/Frama-c : annotation

Listing 4 – annotation

```
int main(void){
    int x,y,z,u;
  x = 1;
  /*@  assert x == 1; */
  y = 2;
  /*@ assert x == 1 && y == 2; */
  z = x *y;
  /*@  assert x == 1 && y == 2 && z == 2; */
  u = z;
  /*@  assert x == 1 && y == 2 && z == 2 && u == 2; */
  return 0;
  }
```

Exemple de ACSL/Frama-c : procedure

Listing 5 – difference de deux nombres

```
/*@
     assigns \result;
     ensures \result == (a - b);
*/
static int difference(int a, int b) {
     return a-b;
}
```

Exemple de ACSL/Frama-c : procedure

Listing 6 – swap

```
/*@
     requires \valid(a) && \valid(b);
     assigns *a, *b;
     ensures *a == \old(*b);
     ensures *b == \old(*a);
*/
static void swap(int* a, int* b) {
     int temp;
     temp = (*a);
     (*a) = (*b);
     (*b) = temp;
}
```

Exemple de ACSL/Frama-c : call

Listing 7 – call

```
/*@
    assigns \result;
    ensures \result == (a - b);
*/
static int difference(int a, int b) {
    return a-b;
}

/*@
    requires \valid(a) && \valid(b);
    assigns *a, *b;
    ensures *a == \old(*b);
    ensures *b == \old(*a);
*/
static void swap(int* a, int* b) {
    int temp;
    temp = (*a);
```

Intuition

- Un programme P *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :
  - STATES est l'ensemble de tous les états de P : $STATES = \mathsf{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ où X désigne les variables de P.
  - s_0 et s_f deux états de STATES : $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$ signifie que P est exécuté à partir d'un état s_0 et produit un état s_f.
  - Pour un état s de P courant, on notera $s(X) = x$ pour distinguer la valeur de la variable X et sa valeur courante en s :

Intuition

- Un programme P *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :
  - STATES est l'ensemble de tous les états de P : $STATES = \mathsf{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ où X désigne les variables de P.
  - s_0 et s_f deux états de STATES : $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$ signifie que P est exécuté à partir d'un état s_0 et produit un état s_f.
  - Pour un état s de P courant, on notera $s(X) = x$ pour distinguer la valeur de la variable X et sa valeur courante en s :

$$s_0(X) = x_0,\ s_f(X) = x_f,\ s'(X) = x'$$

Intuition

- Un programme P *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :
  - STATES est l'ensemble de tous les états de P : $STATES = \mathsf{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ où X désigne les variables de P.
  - s_0 et s_f deux états de STATES : $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$ signifie que P est exécuté à partir d'un état s_0 et produit un état s_f.
  - Pour un état s de P courant, on notera $s(X) = x$ pour distinguer la valeur de la variable X et sa valeur courante en s :
    $$s_0(X) = x_0,\ s_f(X) = x_f,\ s'(X) = x'$$
  - $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$ définit la relation suivante sur l'ensemble des valeurs :
    $$x_0 \xrightarrow{\mathsf{P}} x_f$$

Intuition

- Un programme P *produit* des résultats à partir de données en accord avec une sémantique :
  - STATES est l'ensemble de tous les états de P : $STATES = \mathsf{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ où X désigne les variables de P.
  - s_0 et s_f deux états de STATES : $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$ signifie que P est exécuté à partir d'un état s_0 et produit un état s_f.
  - Pour un état s de P courant, on notera $s(X) = x$ pour distinguer la valeur de la variable X et sa valeur courante en s :
    $$s_0(X) = x_0,\ s_f(X) = x_f,\ s'(X) = x'$$
  - $\mathcal{D}(P)(s_0) = s_f$ définit la relation suivante sur l'ensemble des valeurs :
    $$x_0 \xrightarrow{\mathsf{P}} x_f$$
- Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :
  - P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{\mathsf{P}} x_f$
  - x_0 satisfait pre : $\mathsf{pre}(x_0)$
  - x_f satisfait post : $\mathsf{post}(x_0, x_f)$
  - $\mathsf{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{\mathsf{P}} x_f \Rightarrow \mathsf{post}(x_0, x_f)$

Vérification du contrat

Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :

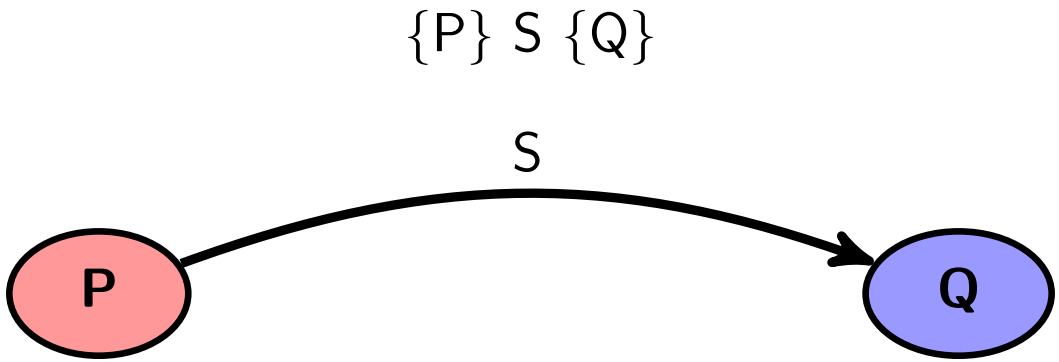
- P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- x_0 satisfait pre : $pre(x_0)$
- x_f satisfait post : $post(x_0, x_f)$
- $pre(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow post(x_0, x_f)$

requires $pre(x_0)$
ensures $post(x_0, x_f)$
variables X

begin
$0 : P_0(x_0, x)$
$\texttt{instruction}_0$
$\ldots$
$i : P_i(x_0, x)$
$\ldots$
$\texttt{instruction}_{f-1}$
$f : P_f(x_0, x)$
end

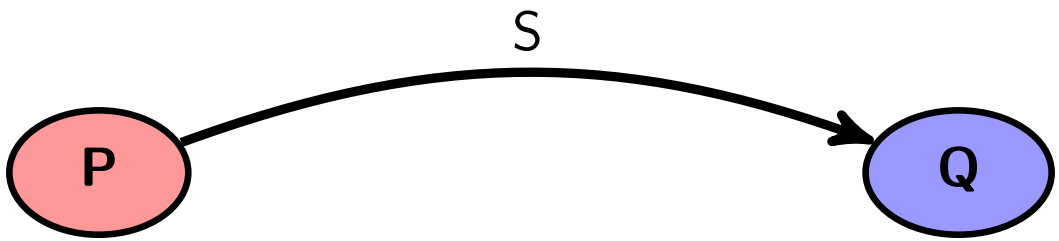
- $pre(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- $P_f(x_0, x) \Rightarrow post(x_0, x)$
- conditions de vérification pour toutes les paires $\ell \longrightarrow \ell'$

Asserted Program {P} S {Q}



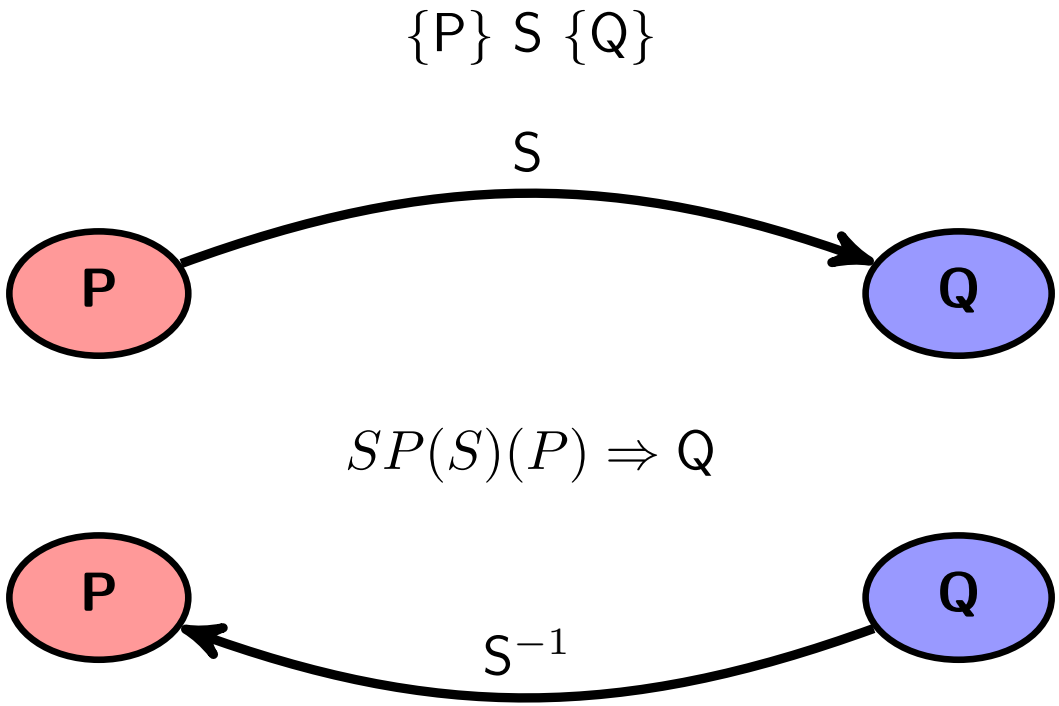
Asserted Program {P} S {Q}

{P} S {Q}



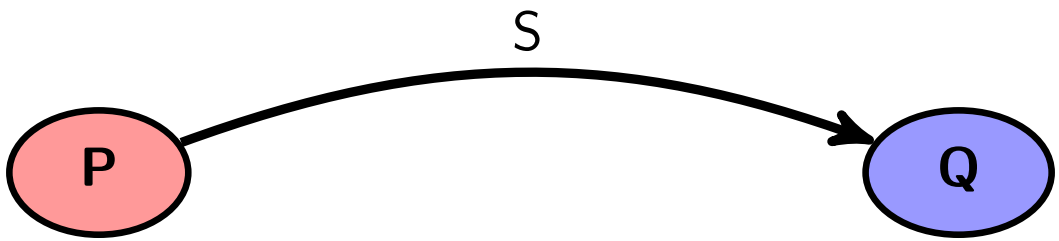
$$SP(S)(P) \Rightarrow \mathsf{Q}$$

Asserted Program {P} S {Q}

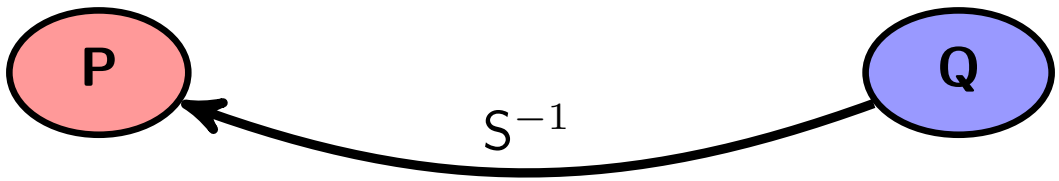


Asserted Program {P} S {Q}

{P} S {Q}



$$SP(S)(P) \Rightarrow \mathsf{Q}$$



$$P \Rightarrow WP(S)(\mathsf{Q})$$

Current Subsection Summary

Opérateur WP

Soit STATES l'ensemble des états sur l'ensemble X des variables. Soit S une instruction de programme sur X. Soit A une partie de STATES.
$s \in WP(S)(A)$, si la condition suivante est vérifiée :

$$\left(\begin{array}{l} \forall t \in STATES : \mathcal{D}(P)(s) = t \Rightarrow t \in A \\ \wedge \\ \exists t \in STATES : \mathcal{D}(P)(s) = t \end{array} \right)$$

- $WP(X := X{+}1)(A) = \{s \in STATES | s[X \mapsto s(X) \oplus 1] \in A\}$
- $WP(X := Y{+}1)(A) = \{s \in STATES | s[X \mapsto s(Y) \oplus 1] \in A\}$
- $WP(while\ X > 0\ do\ X := X{-}1\ od)(A) = \{s \in STATES | (s(X) \leq 0) \vee (s(X) \in A \wedge s(X) < 0)\}$
- $WP(while\ x > 0\ do\ x := x{+}1\ od)(A) = \{s \in STATES | (s(X) \in A \wedge s(X) \leq 0)\}$
- $WP(while\ x > 0\ do\ x := x{+}1\ od)(\varnothing) = \varnothing$
- $WP(while\ x > 0\ do\ x := x{+}1\ od)(STATES) = \{s \in STATES | s(X) \leq 0\}$

Propriétés

- WP est une fonction monotone pour l'inclusion d'ensembles de STATES.
- $WP(S)(\varnothing) = \varnothing$
- $WP(S)(A \cap B) = WP(S)(A) \cap WP(S)(B)$
- $WP(S)(A) \cup WP(S)(B) \subseteq WP(S)(A \cup B)$
- Si S est déterministe, $WP(S)(A \cup B) = WP(S)(A) \cup WP(S)(B)$

- WP est un opérateur avec le profil suivant

  pour toute instruction S du langage de programmation,
  $$WP(S) \in \mathcal{P}(STATES) \nrightarrow \mathcal{P}(STATES)$$
- $(\mathcal{P}(STATES), \subseteq)$ est un treillis complet.
- $(Pred, \Rightarrow)$ est une structure où
  - (1) $Pred$ est une *extension* du langage d'expressions booléennes
  - (2) $Pred$ est une *intension* introduite comme un langage d'assertions
  - $\Rightarrow$ est l'implication
  - $s \in A$ correspond une assertion P vraie en s notée $P(s)$.

Définition structurelle des transformateurs de prédicats

- S est une instruction de STATS.
- T est le type ou les types des variables et D est la constante ou les constantes Définie(s).
- P est un prédicat du langage Pred
- X est une variable de programme
- $E(X, D)$ (resp. $B(X, D)$) est une expression arithmétique (resp. booléenne) dépendant de X et de D.
- x est la valeur de X (X contient la valeur x).
- $e(x, d)$ (resp. $b(x, d)$) est l'expression arithmétique (resp. booléenne) du langage Pred associée à l'expression $E(X, D)$ (resp. $B(X, D)$) du langage des expressions arithmétiques (resp. booléennes) du langage de programmation Prog
- $b(x, d)$ est l'expression arithmétique du langage Pred associée à l'expression $E(X, D)$ du langage des expressions arithmétiques du langage de programmation Prog

Définition structurelle des transformateurs de prédicats

S	wp(S)(P)
X :=E(X,D)	$P[e(x,d)/x]$
SKIP	P
$S_1;S_2$	$wp(S_1)(wp(S_2)(P))$
IF B S_1 ELSE S_2 FI	$(B \Rightarrow wp(S_1)(P)) \wedge (\neg B \Rightarrow wp(S_2)(P))$
WHILE B DO S OD	$\mu.(\lambda X.(B \Rightarrow wp(S)(X)) \wedge (\neg B \Rightarrow P))$

- $wp(X := X{+}5)(x \geq 8) \stackrel{def}{=} x{+}5 \geq 8 \cong x \geq 3$
- $wp(\text{WHILE } x > 1 \text{ DO } X := X{+}1 \text{ OD})(x = 4) = FALSE$
- $wp(\text{WHILE } x > 1 \text{ DO } X := X{+}1 \text{ OD})(x = 0) = x = 0$

Propriétés pour les prédicats

S est une instruction et P et Q sont des prédicats.

- Loi du miracle exclu : $wp(S)(FALSE) = FALSE$
- Distributivité de la conjonction :
  $wp(S)(P) \wedge wp(S)(Q) = wp(S)(P \wedge Q)$
- Distributivité de la disjonction :
  $wp(S)(P) \vee wp(S)(Q) \Rightarrow wp(S)(P \vee Q)$
- Si S est déterministe, alors $wp(S)(P) \vee wp(S)(Q) = wp(S)(P \vee Q)$

Current Summary

Axiomatisation de la Logique de Hoare

⊠ Definition(Axiomes et règles d'inférence)

- Axiome d'affectation : $\{P(e/x)\}$**X :=E(X)**$\{P\}$.
- Axiome du saut : $\{P\}$**skip**$\{P\}$.
- Règle de composition : Si $\{P\}\mathbf{S}_1\{R\}$ et $\{R\}\mathbf{S}_2\{Q\}$, alors $\{P\}\mathbf{S}_1$ **;**$\mathbf{S}_2\{Q\}$.
- Si $\{P \wedge B\}\mathbf{S}_1\{Q\}$ et $\{P \wedge \neg B\}\mathbf{S}_2\{Q\}$, alors $\{P\}$**if B then** $\mathbf{S}_1$ **then** $\mathbf{S}_2$ **fi**$\{Q\}$.
- Si $\{P \wedge B\}\mathbf{S}\{P\}$, alors $\{P\}$**while B do S od**$\{P \wedge \neg B\}$.
- Règle de renforcement/affaiblissement : Si $P' \Rightarrow P$, $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$, $Q \Rightarrow Q'$, alors $\{P'\}\mathbf{S}\{Q'\}$.

Exemple de preuve $\{x = 1\}\mathbf{Z := X; X := Y; Y := Z}\{y = 1\}$

- (1) $x = 1 \Rightarrow (z = 1)[x/z]$ (propriété logique)
- (2) $\{(z = 1)[x/z]\}\mathbf{Z := X}\{z = 1\}$ (axiome d'affectation)
- (3) $\{x = 1\}\mathbf{Z := X}\{z = 1\}$ (Règle de renforcement/affaiblissement avec (1) et (2))
- (4) $z = 1 \Rightarrow (z = 1)[y/x]$ (propriété logique)
- (5) $\{(z = 1)[y/x]\}\mathbf{X := Y}\{z = 1\}$ (axiome d'affectation)
- (6) $\{z = 1\}\mathbf{X := Y}\{z = 1\}$ (Règle de renforcement/affaiblissement avec (4) et (5))
- (7) $z = 1 \Rightarrow (y = 1)[z/y]$ (propriété logique)
- (8) $\{(z = 1)[x/z]\}\mathbf{Y := Z}\{y = 1\}$ (axiome d'affectation)
- (9) $\{z = 1\}\mathbf{Y := Z}\{y = 1\}$ (Règle de renforcement/affaiblissement avec (7) et (8))
- (10) $\{x = 1\}\mathbf{Z := X; X := Y;}\{z = 1\}$ (Règle de composition avec 3 et 6)
- (11) $\{x = 1\}\mathbf{Z := X; X := Y; Y := Z}\{y = 1\}$ (Règle de composition avec 11 et 9)

⊠ Definition
$\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ est défini par $\forall s,t \in STATES : P(s) \wedge \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t)$

☺ PropertyCorrection du système axiomatique des programmes commentés

- S'il existe une preuve construite avec les règles précédentes de $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$, alors $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ est valide.
- Si $\{P'\}\mathbf{S}\{Q'\}$ est valide et si le langage d'assertions est suffisamment expressif, alors il existe une preuve construite avec les règles précédentes de $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$.

⊠ Definition
Un langage d'assertions est la donnée d'un ensemble de prédicats et d'opérateurs de composition comme la disjonction et la conjonction ; il est muni d'une relation d'ordre partielle appelée implication. On le notera $(\textsc{Pred}, \Rightarrow, \mathbf{false}, \mathbf{true}, \wedge, \vee)$: $(\textsc{Pred}, \Rightarrow, \mathbf{false}, \mathbf{true}, \wedge, \vee)$ est un treillis complet

Introduction de wlp

- $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$
- $\forall s,t \in STATES : P(s) \wedge \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t)$
- $\forall s \in STATES : P(s) \Rightarrow (\forall t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t))$

Définition de wlp

$wlp(S)(Q) \stackrel{def}{=} (\forall t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t))$

$wlp(S)(Q) \equiv \overline{(\exists t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \wedge \overline{Q}(t))}$

Lien entre wp et wlp

- $loop(S) \equiv \overline{(\exists t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t}$ (ensemble des états qui ne permettent pas à S de terminer)
- $wp(S)(Q) \equiv wlp(S)(Q) \wedge \overline{loop(S)}$

Définition de wlp

⊠ Definition

$$WLP(S)(P) = \nu\lambda X.((B \wedge wlp(BS)(X)) \vee (\neg B \wedge P))$$

☺ Property

- Si $P \Rightarrow Q$, then $wlp(S)(P) \Rightarrow wlp(S)(Q)$.

Axiomatisation de la Logique de Hoare

⊠ Definitiontriplets de Hoare

$$\{P\}\mathbf{S}\{Q\} \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wlp(S)(Q)$$

Axiomatisation de la Logique de Hoare

⊠ Definitiontriplets de Hoare

$\{P\}\mathbf{S}\{Q\} \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wlp(S)(Q)$

⊠ Definition(Axiomes et règles d'inférence)

- Axiome d'affectation : $\{P(e/x)\}$**X :=E(X)**$\{P\}$.
- Axiome du saut : $\{P\}$**skip**$\{P\}$.
- Règle de composition : Si $\{P\}\mathbf{S}_1\{R\}$ et $\{R\}\mathbf{S}_2\{Q\}$, alors $\{P\}$**if B then S$_1$ then S$_2$ fi**$\{Q\}$.
- Si $\{P \wedge B\}\mathbf{S}_1\{Q\}$ et $\{P \wedge \neg B\}\mathbf{S}_2\{Q\}$, alors $\{P\}$**if B then S$_1$ then S$_2$ fi**$\{Q\}$.
- Si $\{P \wedge B\}\mathbf{S}\{P\}$, alors $\{P\}$**while B do S od**$\{P \wedge \neg B\}$.
- Règle de renforcement/affaiblissement : Si $P' \Rightarrow P$, $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$, $Q \Rightarrow Q'$, alors $\{P'\}\mathbf{S}\{Q'\}$.

Vérification

- $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$
- $\forall s \in STATES.P(s) \Rightarrow wlp(S)(Q)(s)$
- $\forall s \in STATES.P(s) \Rightarrow (\forall t \in STATES : \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t))$
- $\forall s, t \in STATES.P(s) \wedge \mathcal{D}(S)(s) = t \Rightarrow Q(t))$
- Correction : Si on a construit une preuve de $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ avec les règles de la logique de Hoare, alors $P \Rightarrow wlp(S)(Q)$
- Complétude sémantique : Si $P \Rightarrow wlp(S)(Q)$, alors on peut construire une preuve de $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ avec les règles de la logique de Hoare si on peut exprimer $wlp(S)(P)$ dans le langae d'assertions.

Logique de Hoare Correction Totale

⊠ Definitiontriplets de Hoare Correction Totale

$[P]\mathbf{S}[Q] \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wp(S)(Q)$

⊠ Definitiontriplets de Hoare Correction Totale

$[P]\mathbf{S}[Q] \stackrel{def}{=} P \Rightarrow wp(S)(Q)$

⊠ Definition(Axiomes et règles d'inférence)

- Axiome d'affectation : $[P(e/x)]$**X :=E(X)**$[P]$.
- Axiome du saut : $[P]$**skip**$[P]$.
- Règle de composition : Si $[P]\mathbf{S}_1[R]$ et $[R]\mathbf{S}_2[Q]$, alors $[P]$**if B then S$_1$ then S$_2$ fi**$[Q]$.
- Si $[P \wedge B]\mathbf{S}_1[Q]$ et $[P \wedge \neg B]\mathbf{S}_2[Q]$, alors $[P]$**if B then S$_1$ then S$_2$ fi**$[Q]$.
- Si $[P(n+1)]\mathbf{S}[P(n)]$, $P(n+1) \Rightarrow b$, $P(0) \Rightarrow \neg b$, alors $[\exists n \in \mathbb{N}.P(n)]$**while B do S od**$[P(0)]$.
- Règle de renforcement/affaiblissement : Si $P' \Rightarrow P$, $[P]\mathbf{S}[Q]$, $Q \Rightarrow Q'$, alors $[P']\mathbf{S}[Q']$.

Correction

:
Si $[P]\mathbf{S}[Q]$ est dérivé selon les règles ci-dessus, alors $P\wp(S)5Q)$.

- $[P(e/x)]$**X :=E(X)**$[P]$ est valide : $wp(X := E)(P)/x = P(e/x)$.
- $[\exists n \in \mathbb{N}.P(n)]$**while B do S od**$[P(0)]$: si s est un état de P(n) alors au bout de n boucles on atteint un état s_f tel que P(0) est vrai en s_f.

Complétude

:
Si $P \Rightarrow wp(S)(Q)$, alors il existe une preuve de $[P]\mathbf{S}[Q]$ construites avec les règles ci-dessus,

- $P \Rightarrow wp(X := E(X))(Q) : P \Rightarrow Q(e/x)$ et $[Q(e/x)]\mathbf{X := E(X)}[Q]$ constituent une preuve.
- $P \Rightarrow wp(while)(Q)$:
  - On construit la suite de $P(n)$ en définissant $P(n) = W_n$.
  - On vérifie que cela vérifie la règle du while.

Current Summary

Vérification du contrat (I)

Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :

- P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- x_0 satisfait pre : pre(x_0) and x_f satisfait post : post(x_0, x_f)
- pre$(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow$ post(x_0, x_f)

requires $pre(x_0)$
ensures $post(x_0, x_f)$
variables X

begin
$0 : P_0(x_0, x)$
instruction$_0$
...
$i : P_i(x_0, x)$
...
instruction$_{f-1}$
$f : P_f(x_0, x)$
end

- $pre(x_0) \wedge x = x_0 \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- $pre(x_0) \wedge P_f(x_0, x) \Rightarrow post(x_0, x)$
- Pour toute paire d'étiquettes ℓ, ℓ' telle que $\ell \longrightarrow \ell'$, on vérifie que, pour toutes valeurs $x, x' \in \text{MEMORY}$

$$\left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} pre(x_0) \wedge P_\ell(x_0, x)) \\ \wedge cond_{\ell,\ell'}(x) \wedge x' = f_{\ell,\ell'}(x) \end{array} \right) \\ \Rightarrow P_{\ell'}(x_0, x') \end{array} \right),$$

Vérification du contrat (II)

Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :

- P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- x_0 satisfait pre : $\text{pre}(x_0)$ and x_f satisfait post : $\text{post}(x_0, x_f)$
- $\text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$

requires $pre(x_0)$
ensures $post(x_0, x_f)$
variables X

begin
$0 : P_0(x_0, x)$
$\texttt{instruction}_0$
...
$i : P_i(x_0, x)$
...
$\texttt{instruction}_{f-1}$
$f : P_f(x_0, x)$
end

- $\forall x_f, x_0.\text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- $\forall x_f, x_0.\text{pre}(x_0) \Rightarrow (x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f))$
- $\forall x_0.\text{pre}(x_0) \Rightarrow \forall x_f.(x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f))$
- $\forall x_0.\text{pre}(x_0) \Rightarrow \forall x.(x_0 \xrightarrow{P} x \Rightarrow \text{post}(x_0, x))$
- $\forall x_0.\text{pre}(x_0) \Rightarrow WLP(P)(\text{post}(x_0, x))$

Correction partielle par calcul des WLPs

Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :

- P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- x_0 satisfait pre : pre(x_0) and x_f satisfait post : post(x_0, x_f)
- pre$(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow$ post(x_0, x_f)
- $\forall x_0.$pre$(x_0) \Rightarrow WLP(P)($post$(x_0, x))$

Correction partielle par calcul des WLPs

Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :

- P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- x_0 satisfait pre : $\text{pre}(x_0)$ and x_f satisfait post : $\text{post}(x_0, x_f)$
- $\text{pre}(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow \text{post}(x_0, x_f)$
- $\forall x_0.\text{pre}(x_0) \Rightarrow WLP(P)(\text{post}(x_0, x))$
- WLP n'est pas calculable.
- Utilisation de la logique de HOARE comme support du calcul de WLP.

Vérification du contrat (III)

Un programme P *remplit* un contrat (pre,post) :

- P transforme une variable x à partir d'une valeur initiale x_0 et produisant une valeur finale x_f : $x_0 \xrightarrow{P} x_f$
- x_0 satisfait pre : pre(x_0) and x_f satisfait post : post(x_0, x_f)
- pre$(x_0) \wedge x_0 \xrightarrow{P} x_f \Rightarrow$ post(x_0, x_f)

requires $pre(x_0)$
ensures $post(x_0, x_f)$
variables X

begin
/·@assert $P_0(x_0, x)$·/
T;
/·@loop invariant $I(x_0, x)$·/
`while` $B(x)$ do
  S
od
/·@assert $P_f(x_0, x)$·/
end

- $x = x_0 \wedge$ pre$(x_0) \Rightarrow WLP(T)(I(x_0, x))$
- $I(x_0, x) \wedge B(x) \Rightarrow WLP(S)(I(x_0, x))$
- $I(x_0, x) \wedge \neg B(x) \Rightarrow P_f(x_0, x)$

Vérification du contrat (IV)

requires $pre(x_0)$
ensures $post(x_0, x_f)$
variables X

begin
/·@assert $P_0(x_0, x)$·/
$S1$;
$S2$;
/·@assert $P_f(x_0, x)$·/
end

- $x =$
  $x_0 \wedge \mathsf{pre}(x_0) \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- $P_0(x_0, x) \Rightarrow$
  $WLP(T1; T2)(P_f(x_0, x))$

Vérification du contrat (V)

requires $pre(x_0)$
ensures $post(x_0, x_f)$
variables X

```
begin
/·@assert P0(x0, x)·/
if B(x) do
  S1
else
  S2
elfi
/·@assert Pf(x0, x)·/
end
```

- $x = x_0 \wedge \mathsf{pre}(x_0) \Rightarrow P_0(x_0, x)$
- $$P_0(x_0, x) \Rightarrow B(x) \wedge WLP(S1)(P_f(x_0, x)) \vee B(x) \wedge WLP(S2)(P_f(x_0, x$$

Current Summary

Conclusion et Perspectives

- Trois notions importantes : syntaxe, sémantique et pragmatique
- La sémantique est le fondement des langages de programmation.
- La sémantique permet de donner une vue cohérente des programmes et des spécifications.
- Développement de techniques et d'outils de vérification et de validation de systèmes.