Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations
Exercices
Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (I)
par Dominique Méry
5 mars 2025

TD5

Exercice 1 *Soit le petit programme suivant*

Listing 1 – td61.c

```
void ex(void) {
  int x=2,y=4,z,a=1;

  //@ assert x <= y;
  x = x*x;
  //@ assert x == a*y;
  y = 2*x;

  z = x + y;

  //@ assert z == x+y && x* y >= 8;
}
```

Analyser le correction des annotations avec Frama-c et trouver a pour que cela soit correctement analysé.

Exercice 2 *Soit le petit programme suivant*

Listing 2 – td62.c

```
void ex(void) {
  int x0,y0,z0;
  int x=x0,y=x0,z=x0*x0;

  //@ assert x == y && z == x*y;
  x = x*x;
  //@ assert x == y*y && z == x;
  y = x;
  z = x + y + 2*z;

  //@ assert z == (x0+x0)*(x0+x0);
}
```

Analyser la correction des annotations avec Frama-c.

Exercice 3 *Soit le petit programme suivant*

Listing 3 – td63.c

```
#include <limits.h>
// returns the maximum of x and y
/*@
    ensures \result >= x && \result >= y && (\result == x || \result == y);
 */
int max ( int x, int y ) {

  if ( x >=y )
```

```
    {
        //@ assert  x>= y;
      return x ;
       //@ assert  x>= y;
    }
        //@ assert  x< y;
  return y ;
        //@ assert  x< y;
}
```

Analyser la correction des annotations avec Frama-c.

Exercice 4 *La définition structurelle des transformateurs de prédicats est rappelée dans le tableau ci-dessous :*

S	*wp(S)(P)*
X :=E(X,D)	$P[e(x,d)/x]$
SKIP	P
$\mathrm{S}_1;\mathrm{S}_2$	$wp(\mathrm{S}_1)(wp(\mathrm{S}_2)(P))$
IF B S_1 ELSE S_2 FI	$(B \Rightarrow wp(S_1)(P)) \wedge (\neg B \Rightarrow wp(S_2)(P))$

- *Axiome d'affectation :* $\{P(e/x)\}$***X :=E(X)***$\{P\}$.
- *Axiome du saut :* $\{P\}$***skip***$\{P\}$.
- *Règle de composition : Si* $\{P\}\boldsymbol{S}_1\{R\}$ *et* $\{R\}\boldsymbol{S}_2\{Q\}$*, alors* $\{P\}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{;}\boldsymbol{S}_2\{Q\}$.
- *Si* $\{P \wedge B\}\boldsymbol{S}_1\{Q\}$ *et* $\{P \wedge \neg B\}\boldsymbol{S}_2\{Q\}$*, alors* $\{P\}$***if B then*** $\boldsymbol{S}_1$ ***then*** $\boldsymbol{S}_2$ ***fi***$\{Q\}$.
- *Si* $\{P \wedge B\}\boldsymbol{S}\{P\}$*, alors* $\{P\}$***while B do S od***$\{P \wedge \neg B\}$.
- *Règle de renforcement/affaiblissement : Si* $P' \Rightarrow P$, $\{P\}\boldsymbol{S}\{Q\}$, $Q \Rightarrow Q'$*, alors* $\{P'\}\boldsymbol{S}\{Q'\}$.

Question 4.1 *Simplifier les expressions suivantes :*

1. *WP(X :=X+Y+7)(x+y=6)*
2. *WP(X :=X+Y)(x<y)*

Question 4.2 *On rappelle que* $\{P\}\boldsymbol{S}\{Q\}$ *est défini par l'implication* $O \Rightarrow WP(S)(Q)$*. Pour chaque point énuméré ci-dessous, monter que la propriété* $\{P\}\boldsymbol{S}\{Q\}$ *est valide ou pas en utilisant la définition suivante :*

$$\{P\}\boldsymbol{S}\{Q\} = \boldsymbol{P} \Rightarrow \textit{WP(S)(Q)}$$

1. $\{x+y = 7\}$***X :=Y+X***$\{2\cdot x+y = 6\}$
2. $\{x < y\}$**IF** $\boldsymbol{x \neq y}$ **THEN** ***x := 5*** **ELSE** ***x := 8*** **FI**$\{x \in \{5,8\}\}$

Question 4.3 *Utiliser frama-c pour vérifier les éléments suivants :*

1. $\{x+y = 7\}$***X :=Y+X***$\{2\cdot x+y = 6\}$
2. $\{x < y\}$**IF** $\boldsymbol{x \neq y}$ **THEN** ***x := 5*** **ELSE** ***x := 8*** **FI**$\{x \in \{5,8\}\}$

Exercice 5 *td65.c*
Soit le petit programme suivant dans un fichier :

Listing 4 – td65.c

```
/*@
  assigns  \nothing;
*/
void swap1(int a, int b) {
  int x = a;
  int y = b;
  //@ assert x == a && y == b;
  // ==> ?
```

```
  //@ assert y == b && x == a;
  int tmp;
  //@ assert y == b && x == a;
  tmp = x;
  //@ assert y == b && tmp == a;
  x = y;
  //@ assert x == b && tmp == a;
  y = tmp;
  //@ assert x == b && y == a;
}
```

Question 5.1 *Utiliser l'outil frama-c-gui avec la commande* `$frama-c-gui ex1.c` *et cliquer sur le lien ex1.c apparaissant sur la gauche. A partir du fichier source, une fenêtre est créée et vous découvrez le texte du fichier.*

Question 5.2 *Cliquer à droite sur le mot-clé assert et cliqur sur Prove annotation by WP. Les boutons deviennent vert.*

Question 5.3

```
void swap2(int a, int b) {
  int x = a;
  int y = b;
  //@ assert x == a && y == b;
  int tmp;
  tmp = x;
  x = y;
  y = tmp;
  //@ assert x == a && y == a;
}
```

Répétez les mêmes suites d'opérations mais avec le programme suivant dans ex2.c.

Question 5.4 *Ajoutez une précondition pour que les preuves soient possibles.*

Question 5.5 *Soit le nouvel algorithme avec un contrat qui établit ce que l'on attend de cet algorithme*

```
  /*@
  requires \valid(a);
  requires \valid(b);
  ensures P: *a == \old(*b);
  ensures Q: *b == \old(*a);
 */
void swap3(int
          *a, int *b) {
  int tmp;
  tmp = *a;
  *a = *b;
  *b = tmp;
}
```

Recommencer les opérations précédentes et observer ce qui a été utilisé comme outils de preuve.

Exercice 6 *Etudier la correction de l'algorithme suivant en complétant l'invariant de boucle :*

Listing 5 – td66.c

```
  /*@
  requires} 0 <= n;
  ensures \result == n * n;
*/
int f(int n) {
  int i = 0;
/*@ assert i=0
  int s = 0;
  /*@ loop invariant ...;
    @ loop assigns ...; */
  while (i < n) {
    i++;
    s += 2 * i - 1;
  };
  return s;
}
```

Exercice 7

On rappelle que l'annotation suivante du listing 6 est correcte , si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $pre(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow A(v_0, v)$
- $pre(v_0) \wedge B(v_0, v) \Rightarrow post(v_0, v)$
- $A(v_0, v) \Rightarrow wp(v = f(v))(B(v_0, v)$ *où* $wp(v = f(v))(B(v_0, v))$ *est définie par* $B(v_0, v)[f(v)/v]$.

Dans le cas de frama-c, la valeur initiale d'une variable v est notée $\backslash at(v, Pre)$ *et aussi* $\backslash old(v)$ *. Nous utiliserons la notation* v_0 *dans cet exercice.*

Listing 6 – contrat

```
requires pre(v)
ensures post(\old(v),v)
type1 truc(type2 v)
  /*@ assert A(v0,v); */
  v = f(v);
  /*@  assert  B(v0,v);      */
return  val;
```

Soient les annotations suivantes. Les variables sont supposées de type integer.

Question 7.1

$$
\begin{array}{l}
\ell_1 : x = 64 \ \wedge \ y = x \cdot z \ \wedge z = 2 \cdot x \\
Y := X \cdot Z \\
\ell_2 : \ y \cdot z = 2 \cdot x \cdot x \cdot z
\end{array}
$$

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant Frama-c

Listing 7 – td71.c

```
  /*@
  requires x0>=0 && y0 >= 0 && z0 >= 0 && z0 == 25 &&  y0==x0+1 &&   x0*x0 + y0*y0
  ensures \result == 100;
*/
int f(int x0,int y0,int z0) {
  int x = x0;
  int y = y0;
    int z = z0;
```

```
    /*@ assert   x*x + y*y == z &&     z == 25 ;*/
   x = x +3;
y = y +4;
z = z + 75;
/*@ assert  x*x + y*y == z ; */
  return z;
}
```

Question 7.2 *Soient trois constantes n,m,p*

$$\ell_1 : x = 3^n \wedge y = 3^p \wedge z = 3^m;$$
$$T := 8{\cdot}X{\cdot}Y{\cdot}Z;$$
$$\ell_2 :\ t = (y{+}z)^3 \wedge y = x;$$

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant Frama-c. On prendra soin de discuter sur les valeurs de m,n,p et notamment de donner une condition sur ces valeurs pour que cel soit correcte.

Listing 8 – td68.c

Exercice 8

```
// #include <limits.h>
/*@ axiomatic auxmath {
  @ axiom  rule1: \forall int n; n >0 ==> n*n == (n-1)*(n-1)+2*n+1;
  @ } */

/*@  requires  0 <= x;
     ensures \result == x*x;
*/
int power2(int x)
{int   r,k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
  r=0;k=0;cv=0;cw=0;or=0;ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
      /*@ loop invariant cv == k*k;
          @ loop invariant k  <= x;
          @ loop invariant cw  == 2*k;
          @ loop invariant  4*cv  == cw*cw;
          @ loop assigns k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw; */
  while (k<x)
        {
          ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
          k=ok+1;
          cv=ocv+ocw+1;
          cw=ocw+2;

        }
  r=cv;
  return(r);
}


/*@  requires  0 <= x;
     ensures \result == x*x;
*/
int p(int x)
{
  int r;
  if (x==0)
```

```
        {
          r=0;

        }
  else
        {
          r= p(x-1)+2*x+1;

        }
  return(r);
}


/*@    requires   0 <= n;
   ensures \result == 1;
*/

int check(int n){
  int r1,r2,r;
  r1 = power2(n);
  r2 = p(n);
  if (r1 != r2)
    { r = 0;
    }
  else
    { r = 1;
    };
  return r;
 }
```

Soit le fichier `qpower2.c` *qui est pariellement complété et qui permet de calculer le carré d'un nombre naturel. L'exercice vise à compléter les points d'interrogation puis de simplifier le résultat et de montrer l'équivalence de deux fonctions. Le fichier* `mainpower2.c` *peut être compilé pour que vous puissiez faire des experimentations sur les valeurs calculées.*

Question 8.1 *Compléter le fichier* `qpower2.c` *et produire le fichier* `power2.c` *qui est vérifié avec fraama-c.*

Question 8.2 *a Simplifier la fonction itérative en supprimant les variables commençant par la lettre* `o`*. Puis vérifier les fonctions obtenues avec frama-c.*

Question 8.3 *En fait, vous avez montré que les deux fonctions étaient équivalentes. Expliquez pourquoi en quelques lignes.*

Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations Exercices Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (II) par Dominique Méry 5 mars 2025

Exercice 9 *Soit le contrat suivant :*

variables X, Y, Z
requires $x_0 >= 0 \wedge y_0 >= 0 \wedge z_0 >= 0 Rootslst \wedge z_0 = 25 \wedge y_0 = x_0+1$
ensures $z_f = 100$;
begin
$0 : x^2+y^2 = z \wedge z = 25$;
$(X, Y, Z) := (X+3, Y+4, Z+75)$;
$1 : x^2+y^2 = z$;
end

Question 9.1 *Traduire ce contrat avec le langage PlusCal et proposer une validation pour que ce contrat soit valide.*

Question 9.2 *Traduire ce contrat en ACSL et vérifier qu'il est valide ou non. S'il est non valide, proposer une correction de la pré-condition et/ou de la postcondition.*

Exercice 10 *Définir une fonction* maxpointer *(gex1.c) calculant la valeur du maximum du ciontenu de deux adresses avec son contrat.*

```
int max_ptr ( int *p, int *q ) {
if ( *p >= *q ) return *p ;
return *q ; }
```

Exercice 11 *Définir une fonction* abs *(gex2.c) calculant la valeur absolue d'un nombre entier avec son contrat.*

```
#include <limits.h>
int abs (int x) {
  if (x >= 0) return x ;
  return -x;}
```

Exercice 12 *Etudier les fonctions pour la vérification de l'appel de abs et max (max-abs.c,max-abs1.c,max-abs2.c)*

```
int abs ( int x );
int max ( int x, int y );
// returns maximum of absolute values of x and y
int max_abs( int x, int y ) {
x=abs(x); y=abs(y);
return max(x,y);
}
```

Exercice 13 **Question 13.1** *Soit la fonction suivante calculant le reste de la division de a par b. Vérifier la correction de cet algorithme.*

```
int rem(int a, int b) {
  int r = a;
  while (r >= b) {
    r = r - b;
  };
  return r;
}
```

Il faut utiliser une variable ghost.

Question 13.2 *Soit la fonction suivante calculant la fonction fact. Vérifier la correction de cet algorithme. Pour vérifier cette fonction, il est important de définir la fonction mathématique Fact avec ses propriétés.*

```
/*@ axiomatic Fact {
  @ logic integer Fact(integer n);
  @ axiom Fact_1: Fact(1) == 1;
  @ axiom Fact_rec: \forall integer n; n > 1 ==> Fact(n) == n * Fact(n-1);
  @ } */

int fact(int n) {
  int y = 1;
  int x = n;
  while (x != 1) {
    y = y * x;
    x = x - 1;
  };
  return y;
```

Question 13.3 *Annoter les fonctions suivantes en vue de montrer leur correction.*

```
 int max (int a, int b) {
  if (a >= b) return a;
  else return b;
}

int indice_max (int t[], int n) {
  int r = 0;
  for (int i = 1; i < n; i++)
    if (t[i] > t[r]) r = i;
  return r;
}



int valeur_max (int t[], int n) {
  int r = t[0];

  for (int i = 1; i < n; i++)
    if (t[i] > r) r = t[i];
  return r;
}
```

'La solution est donnée dans le fichier gex4-3.c.

Reprise

Exercice 14 *Pour chaque question, montrer que l' annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit*
$\forall x, y, , x', y'. P_\ell(x, y) \ \wedge \ cond_{\ell,\ell'}(x, y) \ \wedge \ (x', y') = f_{\ell,\ell'}(x, y) \Rightarrow P_{\ell'}(x', y')$
Pour cela, on utilisera l'environnement Frama-c.

Question 14.1

$\ell_1 : x = 10 \ \wedge \ y = z{+}x \ \ \wedge z = 2{\cdot}x$
$y := z{+}x$
$\ell_2 : x = 10 \ \wedge \ y = x{+}2{\cdot}10$

Question 14.2

$\ell_1 : x = 1 \ \wedge \ y = 12$
$x := 2{\cdot}y$
$\ell_2 : x = 1 \ \wedge \ y = 24$

Question 14.3

$\ell_1 : x = 11 \ \wedge \ y = 13$
$z := x; x := y; y := z;$
$\ell_2 : x = 26/2 \ \wedge \ y = 33/3$

Exercice 15 *Evaluer la validité de chaque annotation dans les questions suivent.*

Question 15.1

$\ell_1 : x = 64 \ \wedge \ y = x{\cdot}z \ \ \wedge z = 2{\cdot}x$
$Y := X{\cdot}Z$
$\ell_2 : \ y{\cdot}z = 2{\cdot}x{\cdot}x{\cdot}z$

Question 15.2

$\ell_1 : x = 2 \ \wedge \ y = 4$
$Z := X{\cdot}Y{+}3{\cdot}Y{\cdot}Y{+}3{\cdot}X{\cdot}Y{\cdot}Y{+}X^6$
$\ell_2 : \ z = 6{\cdot}(x{+}y)^2$

Question 15.3

$\ell_1 : x = z \ \wedge \ y = x{\cdot}z$
$Z := X{\cdot}Y{+}3{\cdot}Y{\cdot}Y{+}3{\cdot}X{\cdot}Y{\cdot}Y{+}Y{\cdot}X{\cdot}Z{\cdot}Z{\cdot}X;$
$\ell_2 : \ z = (x{+}y)^3$

Soit l'annotation suivante :

$\ell_1 : x = 1 \wedge y = 2$
$X := Y{+}2$
$\ell_2 : x{+}y \geq m$

où m est un entier ($m \in \mathbb{Z}$).

Question 15.4 *Ecrire la condition de vérification correspondant à cette annotation en upposant que X et Y sont deux variables entières.*

Question 15.5 *Etudier la validité de cette condition de vérification selon la valeur de m.*

Exercice 16 *gex7.c*

VARIABLES N, V, S, I

$$pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \stackrel{def}{=} \begin{cases} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0{-}1 \longrightarrow \mathbb{Z} \\ s_0 \in \mathbb{Z} \wedge i_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

REQUIRES $\begin{pmatrix} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0{-}1 \longrightarrow \mathbb{Z} \end{pmatrix}$

ENSURES $\begin{pmatrix} s_f = \bigcup_{k=0}^{n_0-1} v_0(k) \\ n_f = n_0 \\ v_f = v_0 \end{pmatrix}$

$\ell_0 : \begin{pmatrix} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ (n, v, s, i) = (n_0, v_0, s_0, i_0) \end{pmatrix}$

$S := V(0)$

$\ell_1 : \begin{pmatrix} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{0} v(k) \\ (n, v, i) = (n_0, v_0, i_0) \end{pmatrix}$

$I := 1$

$\ell_2 : \begin{pmatrix} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i = 1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{pmatrix}$

WHILE $I < N$ *DO*

$\ell_3 : \begin{pmatrix} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 1..n{-}1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{pmatrix}$

  $S := S \oplus V(I)$

$\ell_4 : \begin{pmatrix} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i} v(k) \wedge i \in 1..n{-}1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{pmatrix}$

  $I := I{+}1$

$\ell_5 : \begin{pmatrix} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 2..n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{pmatrix}$

OD;

$\ell_6 : \begin{pmatrix} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{n-1} v(k) \wedge i = n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{pmatrix}$

La notation $\bigcup_{k=0}^{n} v(k)$ *désigne la valeur maximale de la suite* $v(0) \ldots v(n)$. *On suppose que l'opérateur* $\oplus$ *est défini comme suit* $a \oplus b = max(a, b)$.

Question 16.1 *Ecrire une solution contractuelle de cet algorithme.*

Question 16.2 *Que faut-il faire pour vérifier que cet algorithme est bien annoté et qu'il est partiellement correct en utilisant TLA*$^+$ *? Expliquer simplement les éléments à mettre en œuvre et les propriétés de sûreté à vérifier.*

Question 16.3 *Ecrire un module TLA*$^+$ *permettant de vérifier l'algorithme annoté à la fois pour la correction partielle et l'absence d'erreurs à l'exécution.*

Exercice 17 *gex8.c*

On considère le petit programme se trouvant à droite de cette colonne. Nous allons poser quelques questions visant à compléter les parties marquées en gras et visant à définir la relation de calcul.
On notera $pre(n_0, x_0, b_0)$ *l'expression suivante* $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ *et* $in(n, b, n_0, x_0, b_0)$ *l'expression* $n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$.

Question 17.1 *Ecrire un algorithme avec le contrat et vérifier le .*

VARIABLES N, X, B
REQUIRES $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$
ENSURES $\left(\begin{array}{l} n_0 < b_0 \Rightarrow x_f = (n_0+b_0)^2 \\ n_0 \geq b_0 \Rightarrow x_f = b_0 \\ n_f = n_0 \\ b_f = b_0 \end{array}\right.$
BEGIN
$\ell_0 : n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge x = x_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$
$X := N;$
$\ell_1 : x = n \wedge in(n, b, n_0, x_0, b_0)$
IF $X < B$ ***THEN***
ℓ_2 :
$X := X \cdot X + 2 \cdot B \cdot X + B \cdot B;$
ℓ_3 :
ELSE
ℓ_4 :
$X := B;$
ℓ_5 :
FI
ℓ_6 :
END

Exercice 18 *Soit le petit programme suivant :*

Listing 9 – f91

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int f1(int x)
{ if (x > 100)
     { return(x-10);
     }
  else
     { return(f1(f1(x+11)));
     }
}



int f2(int x)
{ if (x > 100)
     { return(x-10);
     }
  else
     { return(91);
     }
}

int mc91tail(int n, int c)
{if (c != 0) {
     if (n > 100) {
        return mc91tail(n-10,c-1);}
     else
        {
```

```
          return  mc91tail(n+11,c+1);
        }
   }
    else
      { return n;}
   }

int mc91(int n)
{
   return mc91tail(n,1);
}

int main()
{
  int val1,val2,val3,num;
   printf("Enter␣a␣number:␣");
   scanf("%d", &num);
   // Computes the square root of num and stores in root.
   val1 = f1(num);
     val2 = f2(num);
     val3 = mc91(num);
     printf("Et␣le␣rÃ©sultat␣␣f1(%d)=%d␣et␣la␣vÃ©rification:␣%d␣et␣.....%d\n", num,
   return 0;
}
```

On veut montrer que les deux fonctions f1 et f2 sont équivalentes avec frama-c en montrant qu'elles vérifient le même contrat ;

Exercice 19 *Soit le petit programme suivant :*

Listing 10 – qpower2.c

```
#include <limits.h>
/*@ axiomatic auxmath {
  @ axiom  rule1: \forall int n; n >0 ==> n*n == (n-1)*(n-1)+2*n+1;
  @ } */

/*@  requires  0 <= x;
     requires x <= INT_MAX;
     requires x*x <= INT_MAX;
  assigns \nothing;
     ensures \result == x*x;
*/
int power2(int x)
{int  r,k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
  r=0;k=0;cv=0;cw=0;or=0;ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
      /*@ loop invariant cv == k*k;
         @ loop invariant k  <= x;
         @ loop invariant cw  == 2*k;
         @ loop invariant  4*cv  == cw*cw;
         @ loop assigns k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
          @ loop variant x-k;
*/
  while (k<x)
        {
          ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
          k=ok+1;
```

```
            cv=ocv+ocw+1;
            cw=ocw+2;

         }
   r=cv;
   return(r);
}


/*@  requires  0 <= x;
      decreases x;
   assigns \nothing;

      ensures \result == x*x
;
*/
int p(int x)
{
   int r;
   if (x==0)
         {
            r=0;

         }
   else
         {
            r= p(x-1)+2*x+1;

         }
   return(r);
}


/*@   requires  0 <= n;
   assigns \nothing;
    ensures \result == 1;
*/

int check(int n){
   int r1,r2,r;
   r1 = power2(n);
   r2 = p(n);
   if (r1 != r2)
      { r = 0;
      }
   else
      { r = 1;
      };
   return r;
 }
```

On veut montrer que les deux fonctions p et power2 sont équivalentes avec frama-c en montrant qu'elles vérifient le même contrat ;

Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations
Exercices
Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (III)
par Dominique Méry
5 mars 2025

Exercice 20 *Utiliser frama-c pour vérifier ou non les annotations suivantes :*

Question 20.1

$\ell_1 : x = 10 \ \wedge \ y = z+x \ \wedge z = 2 \cdot x$
$y := z+x$
$\ell_2 : x = 10 \ \wedge \ y = x+2 \cdot 10$

Question 20.2

$\ell_1 : x = 1 \ \wedge \ y = 12$
$x := 2 \cdot y$
$\ell_2 : x = 1 \ \wedge \ y = 24$

Question 20.3

$\ell_1 : x = 11 \ \wedge \ y = 13$
$z := x; x := y; y := z;$
$\ell_2 : x = 26/2 \ \wedge \ y = 33/3$

Question 20.4

$\ell_1 : x = 3 \ \wedge \ y = z+x \ \wedge z = 2 \cdot x$
$y := z+x$
$\ell_2 : x = 3 \ \wedge \ y = x+6$

Question 20.5

$\ell_1 : x = 2^4 \ \wedge \ y = 2^{345} \ \wedge \ x \cdot y = 2^{350}$
$x := y+x+2^x$
$\ell_2 : x = 2^{56} \ \wedge \ y = 2^{345}$

Question 20.6

$\ell_1 : x = 1 \ \wedge \ y = 12$
$x := 2 \cdot y+x$
$\ell_2 : x = 1 \ \wedge \ y = 25$

Exercice 21 *Traduire ce contrat dans le langage ACSL et vérifier le contrat.*

variables x
requires
  $x_0 \in \mathbb{N}$
ensures
  $x_f \in \mathbb{N}$
begin
$\ell_0 : \{\ x = x_0 \wedge x_0 \in \mathbb{N}\}$
While $(0 < x)$
$\ell_1 : \{0 < x \leq x_0 \wedge x_0 \in \mathbb{N}\}$
$x := x{-}1;$
$\ell_2 : \{0 \leq x \leq x_0 \wedge x_0 \in \mathbb{N}\}$
od;
$\ell_4 : \{x = 0\}$
end

Exercice 22 *Utiliser frama-c pour vérifier le contrat suivant :*

Variables : F,N,M,I

Requires : $\left(\begin{array}{l} n_0 \in \mathbb{N} \wedge \\ n_0 \neq 0 \wedge \\ f_0 \in 0 \mathrel{..} n_0{-}1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array}\right)$

Ensures : $\left(\begin{array}{l} m_f \in \mathbb{N} \wedge \\ m_f \in ran(f_0) \wedge \\ (\forall j \cdot j \in 0 \mathrel{..} n_0{-}1 \Rightarrow f_0(j) \leq m_f) \end{array}\right)$

$M := F(0);$
$I := 1;$
while $I < N$ **do**
  if *F(i)>M* **then**
    $M := F(I);$
  ;
  $I{+}{+};$
;
b

Algorithme 1: Algorithme du maximum d'une liste non annotée

Exercice 23

Utiliser frama-c pour vérifier ke contrat suivant :
Soit l'algorithme annoté suivant se trouvant à la page suivante et les pré et postconditions définies pour cet algorithme comme suit : On suppose que $x1$ *et* $x2$ *sont des constantes.*

Exercice 24 *Soit la fonction suivante utiliée dans un programme*

Listing 11 – mainpower.c

```
#include <stdio.h>
#include <limits.h>
int power(int x)
{int   r,  cz,cv,cu,cw,ct,  k;
  cz=0;cv=0;cw=1;ct=3;cu=0;k=0;
  while  (k<x)
          {
```

Variables : X1,X2,Y1,Y2,Y3,Z
Requires : $x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0$
Ensures : $z_f = x1_0^{x2_0}$

ℓ_0 : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, y1, y2, y3, z) = (x1_0, x2_0, y1_0, y2_0, y3_0, z0)\}$
$(y_1, y_2, y_3) := (x_1, x_2, 1)$;
ℓ_1 : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z0) \wedge y_3{\cdot}{y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2}\}$
while $y_2 \neq 0$ **do**
  ℓ_2 : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z0) \wedge y_3{\cdot}{y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge 0 < y2 \leq x2\}$
  if $impair(y_2)$ **then**
    ℓ_3 : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z0) \wedge y_3{\cdot}{y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge 0 < y2 \leq x2 \wedge impair(y2)\}$
    $y_2 := y_2 - 1$;
    ℓ_4 : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z0) \wedge y_3{\cdot}y1{\cdot}{y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$
    $y_3 := y_3{\cdot}y_1$;
    ℓ_5 : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z0) \wedge y_3{\cdot}{y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2))\}$
  ;
  ℓ_6 : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z0) \wedge y_3{\cdot}{y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$

  $y_1 := y_1{\cdot}y_1$;
  ℓ_7 : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z0) \wedge y_3{\cdot}{y_1}^{y_2 \ div \ 2} = {x_1}^{x_2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$

  $y_2 := y_2 \ div \ 2$;
  ℓ_8 : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z0) \wedge y_3{\cdot}{y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2\}$
;
ℓ_9 : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z0) \wedge y_3{\cdot}{y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y2 = 0\}$

$z := y_3$;
ℓ_{10} : $\{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2) = (x1_0, x2_0) \wedge y_3{\cdot}{y_1}^{y_2} = {x_1}^{x_2} \wedge y2 = 0 \wedge z = x1^{x2}\}$

Algorithme 2: Algorithme de l'exponentitaion indienne annoté

```
                printf("%d␣%d␣%d␣cz=%d␣%d\n",cu,cv,cw,cz,ct);
                cz=cz+cv+cw;
                cv=cv+ct;
                ct=ct+6;
                cw=cw+3;
                cu=cu+1;
                k=k+1;}
      r=cz;
   return(r);
}

int p(int x)
{
   int r;
   if (x==0)
          {
             r=0;

          }
   else
          {
             r= p(x-1)+3*(x-1)*(x-1) + 3*(x-1)+1;

          }
   return(r);
}



int check(int n){
   int r1,r2,r;
   r1 = power(n);
   r2 = p(n);
   if (r1 != r2)
      { r = 0;
      }
   else
      { r = 1;
      };
   return r;
 }



int main () {

   int counter;
      for( counter=0; counter<5; counter++ ) {
         int v,r;
         printf("Enter␣a␣natural␣number:");
         scanf("%d", &v);
         r = power(v);
         printf ("Power␣:␣%d␣---->␣␣%d\n", v,r);

      };
}
```

Question 24.1 *Compiler ce programme et tester son exécution afin d'en dégager ses fonctionnalités.*

Question 24.2 *Annoter les fonctions principales.*

Question 24.3 *Vérifiez sa correction partielle et totale.*