Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations
Exercices
Sémantique des langages de programmation
par Dominique Méry
6 mai 2025

Sémantique naturelle et sémantique SOS

Exercice 1

$$\begin{array}{rcl}
n & ::= & 0 \mid 1 \mid n0 \mid n1 \\
e & ::= & n \mid x \mid e1{+}e2 \mid e1{-}e2 \mid e1{\cdot}e2 \\
b & ::= & tt \mid ff \mid e1 = e2 \mid e1 \neq e2 \mid e1 \leq e2 \mid e1 \geq e2 \mid e1 < e2 \mid e1 > e2 \mid \neg\, b \mid b1 \;\&\&\; b2 \\
S & ::= & x := e \mid skip \mid S1; S2 \mid (\textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ S_1\ \textbf{else}\ S_2\ \textbf{fi} \mid \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S\ \textbf{od}
\end{array}$$

Question 1.1 *Définir une fonction sémantique pour la catégorie syntaxique des chaines numériques NUM à valeurs dans $\mathbb{Z}$: $\mathcal{N} \in NUM \longrightarrow \mathbb{Z}$.*

Question 1.2 *Evaluer les valeurs suivantes :*
- $\mathcal{N}(11)$
- $\mathcal{N}(101)$
- $\mathcal{N}(0100)$

Question 1.3 *Montrer que $\mathcal{N}$ est bien définie pour toutes les expressions.*

Exercice 2 *On définit lénsemble des états $States = Var \longrightarrow \mathbb{Z}$ où Var est lénsemble des variables.*

Question 2.1 *Une expression arithmétique $e \in Exp$ est évaluée dans un état ar la fonction sémantique $\mathcal{E} \in Exp \longrightarrow (States \longrightarrow \mathbb{Z})$.*
Définir $\mathcal{E}$ par induction sur la syntaxe.

Question 2.2 *Soit $s \in States$ tel que $s(x) = 2$ et $s(y) = 3$ où $x, y \in Var$ et $s \in States$.*
Evaluer les expressions suivantes en s : $x{+}y{+}101$, $x{\cdot}y$.

Question 2.3 *Une expression logique $b \in Bexp$ est évaluée dans un état ar la fonction sémantique $\mathcal{B} \in Bexp \longrightarrow (States \longrightarrow \mathbb{B})$.*
Définir $\mathcal{B}$ par induction sur la syntaxe.

Question 2.4 *Soit $s \in States$ tel que $s(x) = 2$ et $s(y) = 3$ où $x, y \in Var$ et $s \in States$.*
Evaluer les expressions suivantes en s : $x = y$, $x \neq y$, $x \leq y$, $x < y \;\&\&\; x{+}{-}6 \leq y$.

Question 2.5 *On étend le langage des expressions logiques par les deux constructions $b1 \Rightarrow b2$ et $b1 \Leftrightarrow b2$. Ce langage est noté $Bexp1$.*
Montrer que pour tout expression $b \in Bexp1$, il existe une expression $b' \in Bexpt$ telle que $\mathcal{B}(b) = \mathcal{B}(b')$.

Exercice 3 *Nous définissons deux opérations substitution et mise à jour. Ces deux opérations seront utilisées plus tard dans léxpression de la sémantique des instructions :*
- *la notation de substitution $e[x \mapsto e1]$ qui est la substitution de x par $e1$ dans e.*
- *la mise à jour pour un état s et on la note $s[x \mapsto v]$ qui est le nouvel état obtenu par mise à jour de la valeur de x pour s.*

Question 3.1 *Ecrire une définition inductive de $e[x \mapsto f]$.*

⋄– Solution de la question 3.1

On définit cette substitution par induction sur la syntaxe des expressions e :

$$\begin{array}{lcl}
n[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & n \\
x[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & f \\
y[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & y \\
(e1{+}e2)[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & e1[x \mapsto f] \oplus e2[x \mapsto f] \\
(e1{\cdot}e2)[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & e1[x \mapsto f] \otimes e2[x \mapsto f] \\
(e1\ op\ e2)[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & e1[x \mapsto f]\ \mathbf{op}\ e2[x \mapsto f]
\end{array}$$

Dans cette écriture, nous utilisons les symboles $\oplus$, $\otimes$ et **op** *pour signifier les opérateurs arithmétiques dans lénsemble $\mathbb{Z}$ et qui sont les opérateurs du monde des mathématiques.*

Fin 3.1

Question 3.2 *Définir la mise à jour pour un état s et on la note $s[x \mapsto v]$ qui est le nouvel état obtenu par mise à jour de la valeur de x pour s.*

⋄– Solution de la question 3.2

$$\begin{array}{l}
s[x \mapsto v](x) \stackrel{def}{=} v \\
s[x \mapsto v](y) \stackrel{def}{=} y
\end{array}$$

x et y sont deux noms distincts.

Fin 3.2

Question 3.3 *Montrer que $s[x \mapsto v][y \mapsto w] = s[y \mapsto w][x \mapsto v]$ et que $s[x \mapsto v][\mapsto w] = s[x \mapsto v]$.*

Question 3.4 *Montrer que $\mathcal{E}(e[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(e)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s)$.*

⋄– Solution de la question 3.4

$$\textbf{Cas e = n} \left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{E}(n[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(n)(s) = n \\
\mathcal{E}(n)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s) = n \\
\mathcal{E}(n[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(n)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s)])
\end{array} \right.$$

$$\textbf{Cas e = x} \left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{E}(x[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(f)(s) \\
\mathcal{E}(x)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s)]) = \mathcal{E}(f)(s) \\
\mathcal{E}(x[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(x)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s)
\end{array} \right.$$

$$\textbf{Cas e = y} \left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{E}(y[x \mapsto f])(s) = s(y) \\
\mathcal{E}(y)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s)]) = s(y) \\
\mathcal{E}(y[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(y)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)(s)
\end{array} \right.$$

$$\textbf{Cas e = e1+e2} \left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{E}(e[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(e1[x \mapsto f])(s) \oplus \mathcal{E}(e2[x \mapsto f])(s) \\
\mathcal{E}(e1[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(e1)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)])(hypothsed'inductionstructurelle) \\
\mathcal{E}(e2[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(e2)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)])(hypothsed'inductionstructurelle) \\
\mathcal{E}(e1[x \mapsto f])(s) \oplus \mathcal{E}(e2[x \mapsto f])(s) = \mathcal{E}(e1)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)]) \oplus \mathcal{E}(e2)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)]) \\
\mathcal{E}(e1)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)]) \oplus \mathcal{E}(e2)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)]) = \mathcal{E}(e1{+}e2)(s[x \mapsto \mathcal{E}(f)])
\end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl}
(e1{\cdot}e2)[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & e1[x \mapsto f] \otimes e2[x \mapsto f] \\
(e1\ op\ e2)[x \mapsto f] & \stackrel{def}{=} & e1[x \mapsto f]\ \mathbf{op}\ e2[x \mapsto f]
\end{array}$$

Fin 3.4

Question 3.5 *Définir la substitution pour les expressions booléennes $b[x \mapsto e]$ où b est une expression booléenne de BExp et e est une expression arithmétqiue de Exp.*

Question 3.6
Montrer que $\mathcal{E}(b[x \mapsto e])(s) = \mathcal{E}(b)(s[x \mapsto \mathcal{E}(e)(s)$.

Exercice 4
On rappelle les règles définissant la sémantique naturelle du langage de programmation $\mathcal{PL}$

Règles de définition selon la syntaxe

Axiome Ass $(x := e, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s[x \mapsto \mathcal{E}(e)(s)]$

Axiome Skip $(skip, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s$

Règle Comp Si $(S_1, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$ *et* $(S_2, s') \underset{nat}{\longrightarrow} s"$*, alors* $(S_1; S_2, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s"$.

Règle Iftt Si $(S_1, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$ *et* $\mathcal{B}(b)(s) = TRUE$*, alors* $(\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \textbf{ fi}, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$.

Règle Ifff Si $(S_2, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$ *et* $\mathcal{B}(b)(s) = FALSE$*, alors* $(\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \textbf{ fi}, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$.

Règle Whilett] Si $(S, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$ *et* $(\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od}, s') \underset{nat}{\longrightarrow} s"$ *et* $\mathcal{B}(b)(s) = TRUE$*, alors* $(\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od}, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s"$.

Règle Whieff] Si $\mathcal{B}(b)(s) = FALSE$*, alors* $(\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od}, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s$.

Question 4.1 *Soit* s *tel que* $s(u) = 0$ *et* $s(v) = 1$.

- *Evaluer (u :=11 ;v :=u+100 ;u :=u+v,s) en sémantique naturelle.*
- *Evaluer (w :=u ;u :=v ;v :=w,s) en sémantique naturelle.*

Exercice 5 *On dit que S1 est équivalent à S2 et on note* $S1 \equiv S2$*, si pour touts les états s et s',* $(S1, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$ *si, et seulement si,* $(S2, s) \underset{nat}{\longrightarrow} s'$.

Question 5.1 *Montrer que* $\textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od} \equiv \textbf{if } b \textbf{ then } S; \textbf{while } b \textbf{ do } S \textbf{ od else } skip \textbf{ fi}$

Question 5.2 *Etendre la fonction sémantique pour l'instruction* **repeat** S **until** b .

Question 5.3 *Montrer que* $\textbf{repeat } S \textbf{ until } b \equiv S; \textbf{if } b \textbf{ then } skip \textbf{ else repeat } S \textbf{ until } b \textbf{ fi}$

Exercice 6 *On rappelle que* $wp(X := E)(P(x)) = P[e(x)/x]$ *et que* $\{A(x)\}X := E\{B(x)\}$ *est définie par* $A \Rightarrow wp(X := E)(B)$*. On peut assez naturellement appliquer cette définition pour*

$\ell_1 : A(x)$
$X := E(X)$
$\ell_2 : B(x)$

Montrer la correction des triplets suivants et vérifier avec Frama-C en examinant les conditions de vérification engendrées :

- $\ell_1 : x = 10 \wedge y = z{+}x \wedge z = 2{\cdot}x$
  $y := z{+}x$
  $\ell_2 : x = 10 \wedge y = x{+}2{\cdot}10$
- *On suppose que* p *est un nombre premier :*
  $\ell_1 : x = 2^p \wedge y = 2^{p+1} \wedge x{\cdot}y = 2^{2\cdot p+1}$
  $x := y{+}x{+}2^x$
  $\ell_2 : x = 5{\cdot}2^p \wedge y = 2^{p+1}$
- $\ell_1 : x = 1 \wedge y = 12$
  $x := 2{\cdot}y$
  $\ell_2 : x = 1 \wedge y = 24$

—
$$\begin{array}{|l|}\hline \ell_1 : x = 11 \ \wedge \ y = 13 \\ z := x; x := y; y := z; \\ \ell_2 : x = 26/2 \ \wedge \ y = 33/3 \\ \hline \end{array}$$

— *(1)*
$$\begin{array}{|l|}\hline \ell_1 : x = 9 \ \wedge \ y = z{+}x \\ y := x{+}9 \\ \ell_2 : x = 9 \ \wedge \ y = x{+}9 \\ \hline \end{array}$$

— *(2)*
$$\begin{array}{|l|}\hline \ell_1 : x = 1 \ \wedge \ y = 3 \ \wedge \ x{+}y = 12 \\ x := y{+}x \\ \ell_2 : x = 567 \ \wedge \ y = 34 \\ \hline \end{array}$$