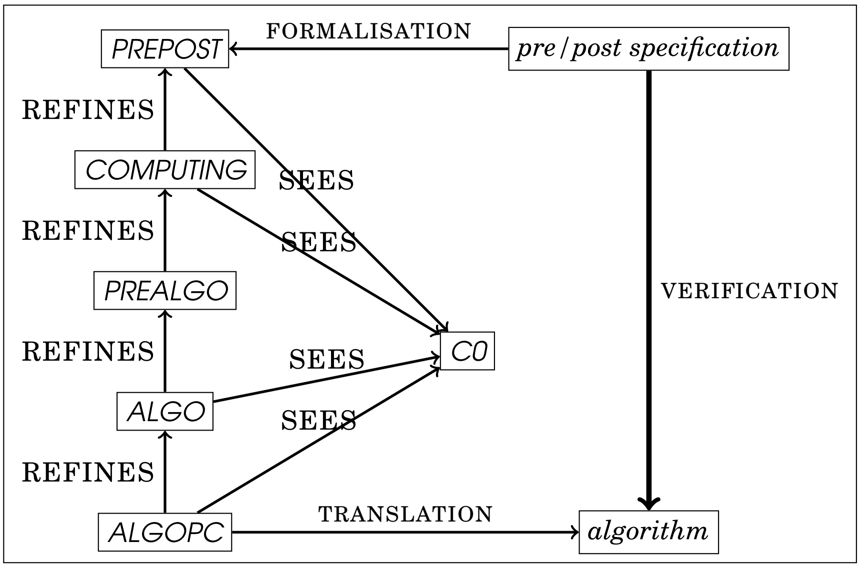
Cours MCFSI
...
Apprivoiser la modélisation par raffinement
Dominique Méry
21 octobre 2024

Exercice 1 *(ex21-fullsummation.zip ou mcfsi2-ex1)*
Soit une suite de valeurs entières $v_1, \ldots, v_n$ où le nombre n est fixé. On souhaite développer un algorithme qui réalise la somme des éléments du vecteur v. Pour cela, on utilisera le patron ci-dessous dont l'archive est sur le site arche sous le nom iterativepattern.zip et on commencera par déterminer le contexte C0 de ce problème puis on modifiera les différents composants pour construire un développement. Dans ce cas, la solution présentée dans ex21-fullsummation.zip définit une suite u qui sera ensuite calculée dans la suite uu.



Question 1.1 *Ecrire la pré et post specification de ce problème et définir les notations auxiliaires nécessaires pour une expression en Event-B.*

Question 1.2 *Définir les deux composants C0 et PREPOST*

Question 1.3 *Poursuivre le développement selon le patron notamment en définissant une machine raffinant la machine PREPOST et en introduisant une variable de modèle conservant l'histoire du calcul de la suite principale ?*

Question 1.4 *Utiliser les règles de transformations des événements pour proposer un algorithme et utiliser Frama-c pour vérifier le programme obtenu.*

Exercice 2 *ex22-power.zip ou mcfsi2-ex2 ou mcfsi2-ex2bis*

Question 2.1 *Appliquer ce patron pour calculer la valeur de n^2 en définissant une suite v à l'aide de l'identité suivante $(n+1)^2 = n^2+n+n+1$. On pourra utiliser deux variantes avec soit l'introduction de la variable ok soit uniquement la variable pc en fin de raffinement.*

Question 2.2 *power2.c et power2bis.c*
Ecrire une fonction C que vous vérifierez avec Frama-c en prenant soin de définir le contrat et l'invariant de boucle à l'aide des machines précédemment construites.

Exercice 3 *ex-occur.zip ou mcfsi2-ex3*
Cet exercice vise à compter le nombre d'occurrences d'une valeur donnée satisfaisant une propriété dans un ensemble de valeurs.

— *S est un ensemble d'animaux d'un zoo, A est un ensemble d'animaux vus par un visiteur et P est la propriété les animaux de P sont des singes.*
— *S est l'ensemble des tableaux de valeurs entières, A est l'ensemble des valeurs contenues dans un tableau t de dimension n et P est la propriété les valeurs entières paires contenues dans un tableau donné*

Dans cette question, on considère un tableau t de valeurs entières de dimension n et une propriété définie par CO telle que $x \in CO$ signifie que x a la propriété CO.
Développer une solution algorithmique avec le patron pour le problème de la recherche du nombre d'occurrences d'une valeur v satisfaisant une condition CO dans une table t de dimension n. On suppose que le tableau est à valeur dans un ensemble V et que CO est une partie de V.

Exercice 4 *ex-search.zip ou mcfsi2-ex4*
Une forme plus générale est de considérer un ensemble de valeurs possibles S, un ensemble de données D et une propriété P. Une variante plus générale est la recherche du nombre d'occurrences communes à un ensemble D et un ensemble P qui sont des parties de S et on peut donc caractériser la solution par l'expression $cardinalite(D \cap P)$.
Appliquer ce patron pour rechercher $cardinalite(D \cap P)$. Ecrire une fonction C que vous vérifierez avec Frama-c. Pour cela on se ramènera au problème plus général précédent.

Exercice 5 *(ex-primrec.zip ou ou mcfsi2-ex5)*
Une fonction primitive récursive f sur les naturels Nat est définie comme suit :

$$\begin{cases} f(x,0) = g(x) \\ f(x,suc(y)) = h(x,y,f(x,y)) \end{cases}$$

On suppose que g et h sont deux fonctions définies primitives récursives aussi mais connues.

Question 5.1 *Ecrire un premier modèle spécifiant le calcul de f pour une donnée.*

Question 5.2 *Proposer un raffinement de ce modèle en utilisant les équations et les fonctions g et h.*

Question 5.3 *Dériver un algorithme par transformation du modèle.*

Exercice 6 *mcfsi2-ex6*
Appliquer le patron pour le cas du calcul de x^3 en utilisant $(i+1)^3 = i^3+3i^2+3i+1$. Nous utilisons en fait ces suites :
— $z_0 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} : z_{n+1} = z_n+v_n+w_n$
— $v_0 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = v_n+t_n$
— $t_0 = 3$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} : t_{n+1} = t_n+6$
— $w_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} : w_{n+1} = w_n+3$
— $u_0 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n+1$

$$\begin{pmatrix} z(i+1) \\ v(i+1) \\ t(i+1) \\ w(i+1) \\ u(i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_i+v_i+w_i \\ v(i)+t(i) \\ t(i)+6 \\ w(i)+3 \\ u(i)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 01 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(i) \\ v(i \\ t(i) \\ w(i) \\ u(i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ecrire une fonction C que vous vérifierez avec Frama-c.