

Cours Algorithmique des systèmes parallèles et distribués  
Exercices

Série 1 Modélisation, programmation et vérification en TLA<sup>+</sup>  
par Dominique Méry  
14 janvier 2026

## Modélisation et vérification avec TLA<sup>+</sup>

**Exercice 1** (*disapp\_td1\_ex1.tla*)

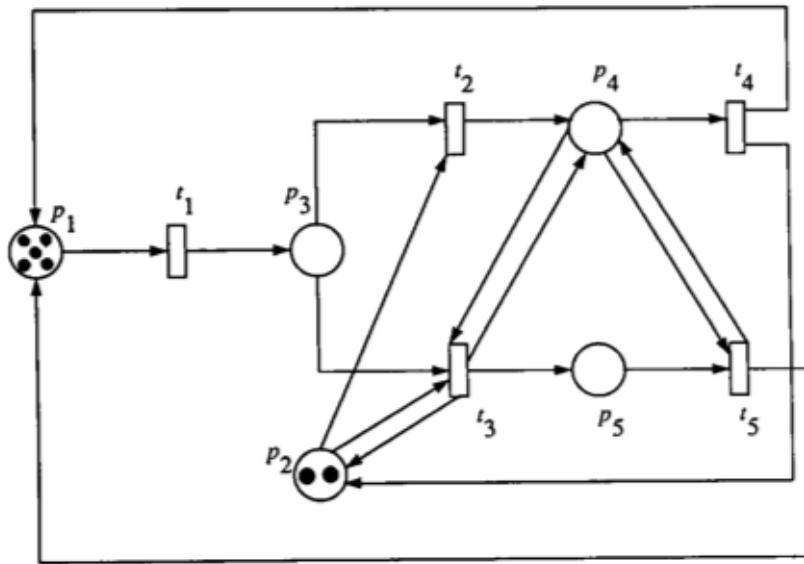
**Question 1.1** Modéliser sous forme d'un module TLA<sup>+</sup> le réseau de Petri de la figure 1. Donner une instantiation possible des constantes. Préciser les conditions initiales correspondant à un système avec cinq (5) processeurs et deux (2) bus.

**Question 1.2** On désire analyser le comportement de ce réseau et, pour cela, on souhaite savoir si la place p5 contiendra au moins un jeton. Expliquer comment on doit procéder pour obtenir une réponse en un temps fini. Préciser le message donné par le système TLAPS.

**Question 1.3** Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ?

**Question 1.4** Enoncez trois propriétés de sûreté de ce réseau établissant une relation entre au moins deux places.

```
----- MODULE disapp_td1_ex1 -----
(* Petri-net for the multiprocessor system *)
EXTENDS Naturals ,TLC
CONSTANTS Places ,P,B
VARIABLES M
-----
(* Auxiliary Definitions *)
K == [p \in Places |-> IF p \in {"p3"} THEN 1 ELSE 0 ]
TOKENS==1..20
-----
TypeOK == M \in [Places |-> SUBSET TOKENS]
-----
t1 ==
  /\ M["p1"] \geq 1 /\ M["p3"]+1 \leq K["p3"]
  /\ M= [[M EXCEPT!["p3"] = M["p3"]+1] EXCEPT![ "p1"] = M["p1"] - 1]
t2 ==
  /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1
  /\ M=[[M EXCEPT!["p3"] = M["p3"]-1]
```



**Fig. 14.** A Petri-net model of a multiprocessor system, where tokens in  $p_1$  represent active processors,  $p_2$  available buses,  $p_3$ ,  $p_4$ , and  $p_5$  processors waiting for, having access to, queued for common memories, respectively.

FIGURE 1 – Réseau de Petri

```

EXCEPT!["p2"] = M["p2"] - 1
EXCEPT!["p4"] = M["p4"] + 1

t3 == 
  /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1 /\ M["p4"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p3"] = M["p3"] - 1]
            EXCEPT!["p5"] = M["p5"] + 1]

t4 == 
  /\ M["p4"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p4"] = M["p4"] - 1]
            EXCEPT!["p2"] = M["p2"] + 1]
            EXCEPT!["p1"] = M["p1"] + 1]

t5 == 
  /\ M["p4"] \geq 1 /\ M["p5"] \geq 1
  /\ M' = [[M   EXCEPT!["p5"] = M["p5"] - 1]
            EXCEPT!["p1"] = M["p1"] + 1]

```

---

```

Init == M = [p \in Places |->
             IF p \in {"p1"} THEN P
             ELSE IF p \in {"p2"}
             THEN B ELSE 0 ]

```

```
Next == t1 \wedge t2 \wedge t3 \wedge t4 \wedge t5
```

```
Petri == Init \wedge [] [Next]_<<M>>
```

```
I0 == \A p \in Places : M[p] \geq 0
```

```

I1 == 0 \leq M["p3"] /\ M["p3"] \leq 1
I2 == M["p1"] \leq 5 /\ M["p2"] \leq 2
I3 == \A p \in {"p5"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 5
I4 == \A p \in {"p4"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 2
I == M["p2"] + M["p5"] \leq 2

```

```

AP4 == M[ " p4 " ] = 0
AP5 == M[ " p5 " ] = 0
Test == I0 /\ I1 /\ I2 /\ I3 /\ I4
=====

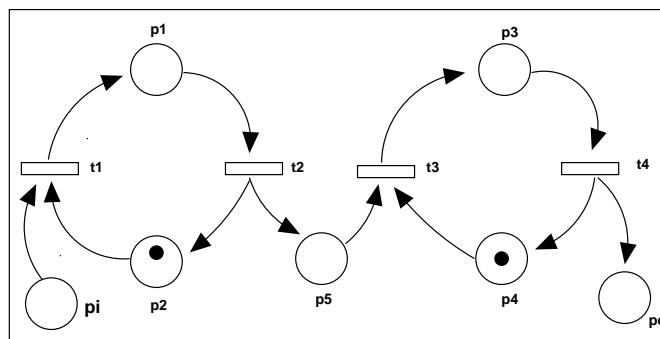
```

### Exercice 2 (disapp\_td1\_ex2.tla)

Un réseau de Petri est un uple  $R=(S,T,F,K,M,W)$  tel que

- $S$  est l'ensemble (fini) des places.
  - $T$  est l'ensemble (fini) des transitions.
  - $S \cap T = \emptyset$
  - $F$  est la relation du flôt d'exécution :  $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
  - $K$  représente la capacité de chaque place :  $K : S \rightarrow \text{Nat}$ .
  - $M$  représente le initial marquage chaque place :
    - $M : S \rightarrow \text{Nat}$  et vérifie la condition  $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$ .  - $W$  représente le poids de chaque arc :  $W : F \rightarrow \text{Nat}$
  - un marquage  $M$  pour  $R$  est une fonction de  $S$  dans  $\text{Nat}$  :
    - $M : S \rightarrow \text{Nat}$  et respectant la condition  $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$ .  - une transition  $t$  de  $T$  est activable à partir de  $M$  un marquage de  $R$  si
    1.  $\forall s \in \{s' \in S \mid (s',t) \in F\} : M(s) \geq W(s,t)$ .
    2.  $\forall s \in \{s' \in S \mid (t,s') \in F\} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$ .
  - Pour chaque transition  $t$  de  $T$ ,  $\text{Pre}(t)$  est l'ensemble des places conduisant à  $t$  et  $\text{Post}(t)$  est l'ensemble des places pointées par un lien depuis  $t$  :
 $\text{Pre}(t) = \{s' \in S : (s',t) \in F\}$  et  $\text{Post}(t) = \{s' \in S : (t,s') \in F\}$
  - Soit une transition  $t$  de  $T$  activable à partir de  $M$  un marquage de  $R$  :
    1.  $\forall s \in \{s' \in S \mid (s',t) \in F\} : M(s) \geq W(s,t)$ .
    2.  $\forall s \in \{s' \in S \mid (t,s') \in F\} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$ .
  - un nouveau marquage  $M'$  est défini à partir de  $M$  par :  $\forall s \in S$ ,
- $$M'(s) = \begin{cases} M(s) - W(s,t), & \text{SI } s \in \text{PRE}(t) - \text{POST}(t) \\ M(s) + W(t,s), & \text{SI } s \in \text{POST}(t) - \text{PRE}(t) \\ M(s) - W(s,t) + W(t,s), & \text{SI } s \in \text{PRE}(t) \cap \text{POST}(t) \\ M(s), & \text{SINON} \end{cases}$$

On considère le réseau suivant :



---

MODULE *petri10*

---

EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANTS *Places, N, Q, B*

**VARIABLES M**

$t1 \triangleq$   
 $t2 \triangleq$   
 $t3 \triangleq$   
 $t4 \triangleq$

$Init1 \triangleq M = [p \in Places \mapsto \text{IF } p \in \{ "p4", "p2" \} \text{ THEN } 1 \text{ ELSE }$   
 $\quad \quad \quad \text{IF } p = "p1" \text{ THEN } N \text{ ELSE } 0]$

$Next \triangleq t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4$

---

**Question 2.1** Traduire ce réseau en un module TLA<sup>+</sup> dont le squelette est donné dans le texte. Pour cela, on donnera la définition des quatre transitions  $t1, t2, t3, t4$ . On ne tiendra pas compte de la capacité des places : les places ont une capacité d'au plus un jeton, sauf la place  $p_i$  qui peut contenir  $N$  jetons, la place  $p_5$  peut contenir au plus  $B$  jetons et la place  $p_0$  peut contenir au plus  $Q$ .

**Question 2.2** Donner une relation liant les places  $p_0, p_1, p_3, p_5, p_i$  et la valeur  $N$ . Justifiez votre réponse.

**Question 2.3** Si on suppose que la place  $p_0$  peut contenir au plus  $Q$  jetons, donnez une condition sur  $Q$  pour que tous les jetons de  $p_i$  soient consommés un jour. Justifiez votre réponse.

**Question 2.4** Expliquez ce que modélise ce réseau de Petri.

◊ Solution de l'exercice 2

---

----- MODULE *disapp\_td1\_ex2* -----

---

EXTENDS *Naturals, TLC*

CONSTANTS *Places, N, Q, B*

**VARIABLES M**

$t11 ==$   
 $\quad \quad \quad \wedge M["p1"] \leq 1 \wedge M["p5"] \leq 1$   
 $\quad \quad \quad \wedge M' = [[M \text{ EXCEPT! } ["p1"] = @-1] \text{ EXCEPT! } ["p5"] = @-1] \text{ EXCEPT! } ["p2"] = @+1]$

$t1 ==$   
 $\quad \quad \quad \wedge M["p2"] = 1 \wedge M["pi"] \leq 1$   
 $\quad \quad \quad \wedge M' = [[M \text{ EXCEPT! } ["p1"] = 1] \text{ EXCEPT! } ["pi"] = M["pi"] - 1] \text{ EXCEPT! } ["p2"] = 0]$

$t2 ==$

```

/\ M["p1"] = 1 /\ M["p5"] < B
/\ M= [[[M EXCEPT!["p1"]=0] EXCEPT!["p5"]=M["p5"]+1] EXCEPT!["p2"]=1]

t3 ==
/\ M["p5"] \geq 1 /\ M["p4"] = 1
/\ M= [[[M EXCEPT!["p3"] = 1] EXCEPT!["p5"] = M["p5"] - 1] EXCEPT!["p4"] = 0]

t4 ==
/\ M["p3"] = 1 /\ M["po"] < Q
/\ M= [[[M EXCEPT!["p3"] = M["p3"] - 1] EXCEPT!["po"] = M["po"] + 1] EXCEPT!["p4"]

-----
Init1 == M = [p \in Places |> IF p \in {"p4", "p2"} THEN 1 ELSE
              IF p = "pi" THEN N ELSE 0]

Init == Init1

Next == t1 \vee t2 \vee t3 \vee t4 \vee M=M

Petri == Init /\ [] [Next]_<<M>>

TypeInvariant == \A p \in Places : M[p] \geq 0

Inv1 == M["pi"] + M["p5"] + M["po"] + M["p1"] + M["p3"] = N
Inv2 == M["po"] \leq Q

Inv4 == M["pi"] + M["p5"] + M["po"] + M["p2"] + M["p4"] = N+2
Inv5 == M["p3"] + M["p4"] + M["p1"] + M["p2"] = 2

Inv3 == M["po"] # Q
Inv == TypeInvariant /\ Inv1 /\ Inv2 /\ Inv5
Test == Inv3
=====
```

---

**Fin 2**