

Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations  
Exercices (avec les corrections)  
Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (I)  
par Dominique Méry  
25 mars 2025

## TD5

### Annotations en Frama-c

#### Exercice 1

**Exercice 2** *framac/ex1.c* Vérifier l'annotation suivante :

```
l1: x== 10 && y == z+x && z==2*x;  
    y= z+x;  
l2: x== 10 && y == x+2*10;  
    x = x+1;  
l3: x-1== 10 && y == x-1+2*10;
```

#### ◇ Solution de l'exercice 2

---

Listing 1 – annotation 1 (wp2.c)

```
int q1() {  
    int x=10,y=30,z=20;  
    //@ assert x== 10 && y == z+x && z==2*x;  
    y= z+x;  
    //@ assert x== 10 && y == x+2*10;  
    x = x+1;  
    //@ assert x-1== 10 && y == x-1+2*10;  
    return(0);  
}
```

Listing 2 – annotation 1 avec wp (wp2bis.c)

```
int q1() {  
    //@ assert 10== 10 && 30 == 20+10 && 20==2*10;  
    //@ assert 10== 10 && 20+10 == 10+2*10;  
    //@ assert 10+1-1== 10 && 20+10 == 10+1-1+2*10;  
    int x=10,y=30,z=20;  
    //@ assert x== 10 && y == z+x && z==2*x;  
    //@ assert x== 10 && z+x == x+2*10;  
    //@ assert x+1-1== 10 && z+x == x+1-1+2*10;  
    y= z+x;  
    //@ assert x== 10 && y == x+2*10;  
    //@ assert x+1-1== 10 && y == x+1-1+2*10;  
    x = x+1;  
    //@ assert x-1== 10 && y == x-1+2*10;  
    return(0);  
}
```

---

**Fin 2**

**Exercice 3** *framac/ex2.c*

On suppose que val est une valeur entière. Vérifier l'annotation suivante :

```
int q1() {  
    int c = val ;  
l1: x == 2;  
    int x;  
l2: c == 2;  
    x = 3 * c ;  
l3: x == 6;  
    return(0);  
}
```

---

◇ **Solution de l'exercice 3**

---

Listing 3 – annotation 2 (wp3.c)

```
int q1() {  
    int c = 2 ;  
    /*@ assert c == 2; */  
    int x;  
    /*@ assert c == 2; */  
    x = 3 * c ;  
    /*@ assert x == 6; */  
    return(0);  
}
```

---

**Fin 3**

**Exercice 4** Vérifier l'annotation suivante :

```
int main()  
{  
    int a = 42; int b = 37;  
    int c = a+b;  
l1: b == 37 ;  
    a -= c;  
    b += a;  
l2: b == 0 && c == 79;  
    return(0);  
}
```

---

◇ **Solution de l'exercice 4**

---

Listing 4 – annotation 2 (wp4.c)

```
int main()  
{  
    int a = 42; int b = 37;  
    int c = a+b; // i:1  
    //@assert b == 37 ;  
    a -= c; // i:2  
    b += a; // i:3  
    //@assert b == 0 && c == 79;  
    return(0);  
}
```

---

**Fin 4**

**Exercice 5** Vérifier l'annotation suivante :

```

int main()
{
    int z;
    int a = 4;
l1:  a == 4 ;
    int b = 3;
l2:  b == 3 && a == 4;
    int c = a+b;
l3:  b == 3 && c == 7 && a == 4 ; */
    a += c;
    b += a;
l4:  a == 11 && b == 14 && c == 7 ;
l5:  a +b == 25 ;
    z = a*b;
l6:  a == 11 && b == 14 && c == 7 && z == 154;
    return(0);
}

```

◇— **Solution de l'exercice 5** \_\_\_\_\_

Listing 5 – annotation 4 (wp5.c)

```

int main()
{
    int z; // instruction 8
    int a = 4; // instruction 7
    //@assert a == 4 ;
    int b = 3; // instyruccion 6
    //@assert b == 3 && a == 4;
    int c = a+b; // instruction 4
    /*@ assert b == 3 && c == 7 && a == 4 ; */
    a += c; // instruction 3
    b += a; // instruction 2
    //@ assert a == 11 && b == 14 && c == 7 ;
    //@ assert a +b == 25 ;
    z = a*b; // instruction 1
    //@assert a == 11 && b == 14 && c == 7 && z == 154;
    return(0);
}

```

**Fin 5**

**Exercice 6** Vérifier l'annotation suivante :

```

int main()
{
    int a = 4;
    int b = 3;
    int c = a+b;
    a += c;
    b += a;
l:  a == 11 && b == 14 && c == 7 ;
    return(0);
}

```

◇— **Solution de l'exercice 6** \_\_\_\_\_

Listing 6 – annotation 5 (wp6.c)

```
int main()
{
    int a = 4;
    int b = 3;
    int c = a+b; // i:1
    a += c; // i:2
    b += a; // i:3
    //@assert a == 11 && b == 14 && c == 7 ;
    return(0);
}
```

---

**Fin 6**

## Contrats en Frama-c

**Exercice 7** Vérifier l'annotation suivante :

```
/*@ requires x0 >= 0;
    assigns \nothing;
    ensures \result == x0+1;
    @*/

int exemple(int x0) {
    int x=x0;
    //@ assert ...;
    x = x + 2;
    //@ assert x== ...;
    return x;
}
```

### ◇— Solution de l'exercice 7

---

Listing 7 – contrat (wp10.c)

```
/*@ requires x0 >= 0;
    assigns \nothing;
    ensures twp10 == x0+2;
    @*/

int exemple(int x0) {
    int x=x0;
    //@ assert x == x0;
    x = x + 2;
    //@ assert x== x0+2;
    return x;
}
```

Listing 8 – contrat avec wp (wp10bis.c)

```
/*@ requires x0 >= 0;
    assigns \nothing;
    ensures \result == x0+2;
    @*/

int exemple(int x0) {
    //@ assert x0 == x0;
    //@ assert x0 + 2== x0+2;
```

```
    int x=x0;
    //@ assert x == x0;
    //@ assert x0 + 2== x0+2;
    x = x + 2;
    //@ assert x== x0+2;
return x;
}
```

Listing 9 – contrat avec wp (wp10.c)

```
/*@ requires x0 >= 0;
    assigns \nothing;
    ensures \result == x0+2;
    @*/

int exemple(int x0) {
    //@ assert x0+2 == x0+2;
    int x=x0;
    //@ assert x+2 == x0+2;
    x = x + 2;
    //@ assert x == x0+2;
return x;
}
```

---

**Fin 7**

**Exercice 8** Vérifier l'annotation suivante :

```
/*@
    requires x < 3 && x > 8;
    ensures \false;
    */
void fonc(int x){

}
```

◊ **Solution de l'exercice 8**

---

Listing 10 – annotation (wp9.c)

```
/*@
    requires x < 3 && x > 8;
    ensures \false;
    */
void fonc(int x){

}
```

Listing 11 – annotation (wp9bis.c)

```
/*@
    requires x < 3 && x > 8;
    ensures \true;
    */
void fonc(int x){

}
```

## TD8-IL

**Exercice 9** Analyser et compléter l'annotation suivante pour qu'elle soit valide :

```
int annotation(int a,int b)
{
    int x,y,z;
    x = a;
    l1: x == a; */
    y = b;
    l2: x == a && y == b; */
    z = a+b-2;
    l3: x == a && y == b && z==4; */
    return(z);
}
```

## ◇— Solution de l'exercice 9

Listing 12 – annotation wp11bis.c

```
/*@ requires a >= 0 && b>= 0 && a +b == 6;
   @ assigns \nothing;
   @ ensures \result == 4;
   @*/
int annotation(int a,int b)
{
    /*@ a == a; */
    /*@ a == a && b == b; */
    /*@ a == a && b == b && a+b-2wp1.c
       ==4; */
    int x,y,z;

    x = a;
    /*@ x == a; */
    /*@ x == a && b == b; */
    /*@ x == a && b == b && a+b-2==4; */
    y = b;
    /*@ x == a && y == b; */
    /*@ x == a && y == b && a+b-2==4; */
    z = a+b-2;
    /*@ x == a && y == b && z==4; */
    return(z);
}
```

Listing 13 – annotation (wp11.c)

```
/*@ requires a+b-2==4;
   assigns \nothing;
   ensures \result == 4;
   @*/

int annotation(int a,int b)
{

    int x,y,z;
    /*@ assert a == a;
```

```
//@ assert    a == a && b == b;
//@ assert a == a && b == b && a+b-2==4;
x = a;
//@ assert    x == a;
//@ assert    x == a && b == b;
//@ assert x == a && b == b && a+b-2==4;
y = b;
//@ assert    x == a && y == b;
//@ assert x == a && y == b && a+b-2==4;
z = a+b-2;
//@ assert x == a && y == b && z==4;
return(z);
}
```

**Fin 9**

**Exercice 10** Définir une fonction *abs* avec son contrat.

```
int abs ( int x ) {
    if ( x >=0 ) return x ;
    return -x ; }
```

◇— **Solution de l'exercice 10**

---

Listing 14 – abs.c (wp1.c)

```
// returns the absolute value of x
#include <limits.h>
/*@
    requires x > INT_MIN;
    ensures (x >= 0 ==> \result == x);
    ensures (x < 0 ==> \result == -x);
*/

int abs ( int x ) {
    if ( x >=0 ) return x ;
    return -x ; }
```

**Fin 10**

**Exercice 11** Définir une fonction *max* avec son contrat.

```
int max ( int x, int y ) {
    if ( x >=y ) return x ;
    return y ; }
```

◇— **Solution de l'exercice 11**

---

Listing 15 – max (mlax.c)

```
// returns the maximum of x and y
#include <limits.h>
/*@ requires x <= INT_MAX && x >= INT_MIN;
    requires y <= INT_MAX && y >= INT_MIN;
    assigns \nothing;
    ensures \result >= x && \result >= y && (x == \result || y == \result) ; */
int max ( int x, int y ) {
    if ( x >=y ) return x ;
    return y ; }
```

**Exercice 12** Soit l'algorithme annoté comme suit :

**Variables** : X,Y,Z  
**Requires** :  $x_0, y_0 \in \mathbb{N} \wedge z_0 \in \mathbb{Z}$   
**Ensures** :  $z_f = \max(x_0, y_0)$

$\ell_0 : \{x = x_0 \wedge y = y_0 \wedge z = z_0 \wedge x_0, y_0 \in \mathbb{N} \wedge z_0 \in \mathbb{Z}\}$   
**if**  $X < Y$  **then**  
     $\ell_1 : \{x < y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0 \wedge z = z_0 \wedge x_0, y_0 \in \mathbb{N} \wedge z_0 \in \mathbb{Z}\}$   
     $Z := Y;$   
     $\ell_2 : \{x < y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0 \wedge x_0, y_0 \in \mathbb{N} \wedge z_0 \in \mathbb{Z} \wedge z = y_0\}$   
**else**  
     $\ell_3 : \{x \geq y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0 \wedge z = z_0 \wedge x_0, y_0 \in \mathbb{N} \wedge z_0 \in \mathbb{Z}\}$   
     $Z := X;$   
     $\ell_4 : \{x \geq y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0 \wedge x_0, y_0 \in \mathbb{N} \wedge z_0 \in \mathbb{Z} \wedge z = x_0\}$   
**;**  
 $\ell_5 : \{z = \max(x_0, y_0) \wedge x = x_0 \wedge y = y_0 \wedge x_0, y_0 \in \mathbb{N} \wedge z_0 \in \mathbb{Z}\}$

**Algorithme 1:** maximum de deux nombres non annotée

**Question 12.1** Ecrire un programme ACSL qui traduit ce contrat et qui le vérifie.

**Question 12.2** Ecrire un programme ACSL qui traduit ce contrat et qui le vérifie mais qui enlève les assertions.

◊— **Solution de l'exercice 12**

Listing 16 – maximum.c (maximum.c)

```
/*@ axiomatic max{
  @ logic integer max(integer n, integer m);
  @ axiom max1: \forall integer n,m; n <= m
    ==> max(n,m) == m;
  @ axiom max2: \forall integer n,m; n > m
    ==> max(n,m) == n;
@} */

/*@ requires x0 >= 0 && y0 >= 0;
    assigns \nothing;
    ensures \result == max(x0,y0);
@*/

int maximum(int x0,int y0,int z0) {
  int x=x0;
  int y=y0;
  int z=z0;
  //@ assert max(x0,x0) == x0;
  //@ assert max(x0,y0) == max(y0,x0);
  //@ assert x== x0 && y == y0 && z==z0;
```



```

if (x < y) {
  //@ assert x < y && x== x0 && y == y0 && z==z0;
  //@ assert x < y && x== x0 && y == y0 && y==y;
  z = y;
  //@ assert x < y && x== x0 && y == y0 && z==y;
}
else
{
  //@ assert x >= y && x== x0 && y == y0 && z==z0;
  //@ assert x >= y && x== x0 && y == y0 && x==x;

  z = x;
  //@ assert x >= y && x== x0 && y == y0 && z==x;
};
//@ assert x== x0 && y == y0 && z==max(x,y);
return z;
}

```

Listing 17 – maximumlazy.c

```

/*@ axiomatic max{
  @ logic integer max(integer n, integer m);
  @ axiom max1: \forall integer n,m; n <= m
    ==> max(n,m) == m;
  @ axiom max2: \forall integer n,m; n > m
    ==> max(n,m) == n;
@} */

/*@ requires x0 >= 0 && y0 >=0;
   assigns \nothing;
   ensures \result == max(x0,y0);
   @*/

int maximum(int x0,int y0,int z0) {
  int x=x0;
  int y=y0;
  int z=z0;
  //@ assert (x<y && y == max(x0,y0)) || (x >= y && x== max(x0,y0));
  if (x < y) {
    //@ assert x<y && y == max(x0,y0);
    z = y;
    //@ assert z == max(x0,y0);
  }
  else
  {
    //@ assert x >= y && x== max(x0,y0);
    z = x;
    //@ assert z == max(x0,y0);
  };
  //@ assert z == max(x0,y0);
  return z;
}

```

## Contrats avec invariants de boucle et ghosts en Frama-c

**Exercice 13** *Ecrire un contrat pour la fonction factorielle*

```
int codefact(int n) {
    int y = 1;
    int x = n;
    while (x != 1) {
        y = y * x;
        x = x - 1;
    };
    return y;
}
```

◇— **Solution de l'exercice 13**

---

Listing 18 – factorial.c

```
/*@ axiomatic mathfact {
    @ logic integer mathfact(integer n);
    @ axiom mathfact_1: mathfact(1) == 1;
    @ axiom mathfact_rec: \forall integer n; n > 1
    ==> mathfact(n) == n * mathfact(n-1);
    @ } */

/*@ requires n > 0;
    ensures \result == mathfact(n);
*/
int codefact(int n) {
    int y = 1;
    int x = n;
    /*@ loop invariant x >= 1 &&
                        mathfact(n) == y * mathfact(x);
        loop assigns x, y;
        loop variant x-1;
    */
    while (x != 1) {
        y = y * x;
        x = x - 1;
    };
    return y;
}
```

**Fin 13**

---

**Exercice 14** *Ecrire un contrat pour la fonction calculant le reste de la division de a par b.*

```
int reste(int a, int b) {
    int r = a;
    int q = 0;
    while (r >= b) {
        r = r - b;
        q = q + 1;
    };
    return r;
}
```

◇— **Solution de l'exercice 14**

---

Listing 19 – remainder.c

```
#include <limits.h>

#include <limits.h>

/*@ requires a >= 0 && b > 0;
    requires a <= INT_MAX;
    requires b <= INT_MAX;
    assigns \nothing;
    ensures 0 <= \result;
    ensures \result < b;
    ensures \exists integer k; a == k * b + \result;
    ensures \result <= INT_MAX;
*/
int reste (int a, int b) {
    int r = a;
    int q = 0;
    /*@
        loop invariant
        ( a == q * b + r ) &&
        r >= 0 && r <= a;
        loop assigns r;
        loop assigns q;
    */
    while (r >= b) {
        r = r - b;
        q = q + 1;
    };
    return r;
}
```

Listing 20 – remainder.c

```
/*@ requires a >= 0 && b >= 0;
    assigns \nothing;
    ensures 0 <= \result;
    ensures \result < b;
    ensures \exists integer k; a == k * b + \result;
*/
int rem(int a, int b) {
    int r = a;
    /*@ ghost int q=0;
    */
    /*@
        loop invariant
        a == q * b + r &&
        r >= 0
    ;
        loop assigns r;
        loop assigns q;
    */
    while (r >= b) {
        r = r - b;
    /*@ ghost
        q = q+1;
    */
    }
}
```

```

    */
};
return r;
}

```

**Fin 14**

Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations  
Exercices (avec les corrections)  
Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (I)  
par Dominique Méry  
25 mars 2025

**Exercice 15** *Nous vous donnons des annotations que vous devez analyser avec Frama-c.*

Listing 21 – annotation3.c

**Question 15.1** */\*@ requires a >= 0 && b >= 0 ;*  
*@ assigns \nothing;*  
*@ ensures \result == \old(a) + \old(b) - 2;*

```

/*@
int annotation(int a, int b)
{
    int x, y, z;
    x = a;
    /*@ assert l1: x == a; */
    y = b;
    /*@ assert l2: x == a && y == b; */
    z = a + b - 2;
    /*@ assert l3: x == a && y == b && z == a + b - 1; */
    return(z); // \result = z
}

```

Listing 22 – annotation4.c

**Question 15.2** */\*@ requires a >= 0 ;*  
*@ assigns \nothing;*  
*@ ensures \result == 0;*  
*/\*@*

```

int annotation(int a)
{
    int x;
    x = a;
    return(x);
}

```

**Exercice 16** *Soit le petit programme suivant*

Listing 23 – td61.c

```

void ex(void) {
    int x=2, y=4, z, a=1;

    /*@ assert x <= y;
    x = x*x;

```

```
//@ assert x == a*y;
y = 2*x;

z = x + y;

//@ assert z == x+y && x* y >= 8;
}
```

Analyser la correction des annotations avec *Frama-c* et trouver  $a$  pour que cela soit correctement analysé.

**Exercice 17** Soit le petit programme suivant

Listing 24 – td62.c

```
void ex(void) {
    int x0,y0,z0;
    int x=x0,y=x0,z=x0*x0;
    //@ assert l1: x == y && z == x*y;
    x = x*x;
    //@ assert l2: x == y*y && z == x;
    y = x;
    //@ assert l3: x + y + 2*z == (x0+x0)*(x0+x0);
    z = x + y + 2*z;

    //@ assert z == (x0+x0)*(x0+x0);
}
```

Analyser la correction des annotations avec *Frama-c*.

## TD6

**Exercice 18** Soit le petit programme suivant

Listing 25 – td63.c

```
#include <limits.h>
// returns the maximum of x and y
/*@
    ensures \result >= x && \result >= y && (\result == x || \result == y);
*/
int max ( int x, int y ) {

    if ( x >= y )
    {
        //@ assert x >= y;
        return x ;
        //@ assert x >= y;
    }
    //@ assert x < y;
    return y ;
    //@ assert x < y;
}
```

Analyser la correction des annotations avec *Frama-c*.

**Exercice 19** La définition structurelle des transformateurs de prédicats est rappelée dans le tableau ci-dessous :

$S$	$wp(S)(P)$
$X := E(X, D)$	$P[e(x, d)/x]$
SKIP	$P$
$S_1; S_2$	$wp(S_1)(wp(S_2)(P))$
IF $B$ $S_1$ ELSE $S_2$ FI	$(B \Rightarrow wp(S_1)(P)) \wedge (\neg B \Rightarrow wp(S_2)(P))$

- Axiome d'affectation :  $\{P(e/x)\} X := E(X) \{P\}$ .
- Axiome du saut :  $\{P\} \text{skip} \{P\}$ .
- Règle de composition : Si  $\{P\} S_1 \{R\}$  et  $\{R\} S_2 \{Q\}$ , alors  $\{P\} S_1; S_2 \{Q\}$ .
- Si  $\{P \wedge B\} S_1 \{Q\}$  et  $\{P \wedge \neg B\} S_2 \{Q\}$ , alors  $\{P\} \text{if } B \text{ then } S_1 \text{ then } S_2 \text{ fi} \{Q\}$ .
- Si  $\{P \wedge B\} S \{P\}$ , alors  $\{P\} \text{while } B \text{ do } S \text{ od} \{P \wedge \neg B\}$ .
- Règle de renforcement/affaiblissement : Si  $P' \Rightarrow P$ ,  $\{P\} S \{Q\}$ ,  $Q \Rightarrow Q'$ , alors  $\{P'\} S \{Q'\}$ .

**Question 19.1** Simplifier les expressions suivantes :

1.  $WP(X := X+Y+7)(x+y=6)$
2.  $WP(X := X+Y)(x < y)$

**Question 19.2** On rappelle que  $\{P\} S \{Q\}$  est défini par l'implication  $O \Rightarrow WP(S)(Q)$ . Pour chaque point énuméré ci-dessous, monter que la propriété  $\{P\} S \{Q\}$  est valide ou pas en utilisant la définition suivante :

$$\{P\} S \{Q\} = P \Rightarrow WP(S)(Q)$$

1.  $\{x+y = 7\} X := Y+X \{2 \cdot x+y = 6\}$
2.  $\{x < y\} \text{IF } x \neq y \text{ THEN } x := 5 \text{ ELSE } x := 8 \text{ FI} \{x \in \{5, 8\}\}$

**Question 19.3** Utiliser frama-c pour vérifier les éléments suivants :

1.  $\{x+y = 7\} X := Y+X \{2 \cdot x+y = 6\}$
2.  $\{x < y\} \text{IF } x \neq y \text{ THEN } x := 5 \text{ ELSE } x := 8 \text{ FI} \{x \in \{5, 8\}\}$

**Exercice 20** td65.c

Soit le petit programme suivant dans un fichier :

Listing 26 – td65.c

```
/*@
  assigns  \nothing;
*/
void swap1(int a, int b) {
  int x = a;
  int y = b;
  //@ assert x == a && y == b;
  int tmp;
  //@ assert y == b && x == a;
  tmp = x;
  //@ assert y == b && tmp == a;
  x = y;
  //@ assert x == b && tmp == a;
  y = tmp;
  //@ assert x == b && y == a;
}
```

**Question 20.1** Utiliser l'outil frama-c-gui avec la commande `$frama-c-gui ex1.c` et cliquer sur le lien `ex1.c` apparaissant sur la gauche. A partir du fichier source, une fenêtre est créée et vous découvrez le texte du fichier.

**Question 20.2** *Cliquer à droite sur le mot-clé `assert` et cliquer sur `Prove annotation by WP`. Les boutons deviennent vert.*

**Question 20.3**

```
void swap2(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    //@ assert x == a && y == b;
    int tmp;
    tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
    //@ assert x == a && y == a;
}
```

Répétez les mêmes suites d'opérations mais avec le programme suivant dans `ex2.c`.

**Question 20.4** *Ajoutez une précondition pour que les preuves soient possibles.*

◇— **Solution de la question 20.4**

---

```
/*@ requires a==b;
 */
void swap2(int a, int b) {
    int x = a;
    int y = b;
    //@ assert x == a && y == b;
    int tmp;
    tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
    //@ assert x == a && y == a;
}
```

**Fin 20.4**

**Question 20.5** *Soit le nouvel algorithme avec un contrat qui établit ce que l'on attend de cet algorithme*

```
/*@
requires \valid(a);
requires \valid(b);
ensures P: *a == \old(*b);
ensures Q: *b == \old(*a);
 */
void swap3(int
           *a, int *b) {
    int tmp;
    tmp = *a;
    *a = *b;
    *b = tmp;
}
```

Recommencer les opérations précédentes et observer ce qui a été utilisé comme outils de preuve.

**MOVEX2-1**

**MALG2-1**

**Exercice 21** *Etudier la correction de l'algorithme suivant en complétant l'invariant de boucle :*

Listing 27 – td66.c

```

    /*@
    requires 0 <= n;
    ensures \result == n * n;
    */
    int f(int n) {
        int i = 0;
        /*@ assert i=0
        int s = 0;
        /*@ loop invariant ...;
        @ loop assigns ...; */
        while (i < n) {
            i++;
            s += 2 * i - 1;
        };
        return s;
    }

```

Listing 28 – td66c.c

```

    /*@
    requires 0 <= n;
    ensures \result == n * n;
    */
    int f(int n) {
        int i = 0;
        //@ assert i==0;
        int s = 0;
        //@ assert s == i*i && 0 <= i && i <= n;

        /*@ loop invariant i * i == s && 0 <= i && i <= n;
        @ loop assigns i, s;
        @ loop variant n-i; */
        while (i < n) {
            i++;
            s += 2 * i - 1;
        };
        //@ assert i==n && s == n*n;
        return s;
    }

```

**Exercice 22**

On rappelle que l'annotation suivante du listing 29 est correcte, si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $pre(v_0) \wedge v = v_0 \Rightarrow A(v_0, v)$
- $pre(v_0) \wedge B(v_0, v) \Rightarrow post(v_0, v)$
- $A(v_0, v) \Rightarrow wp(v = f(v))(B(v_0, v))$  où  $wp(v = f(v))(B(v_0, v))$  est définie par  $B(v_0, v)[f(v)/v]$ .

Dans le cas de frama-c, la valeur initiale d'une variable  $v$  est notée  $\backslash at(v, Pre)$  et aussi  $\backslash old(v)$ . Nous utiliserons la notation  $v_0$  dans cet exercice.

Listing 29 – contrat

```

requires pre(v)
ensures post(\old(v), v)

```



```

type1 truc(type2 v)
  /*@ assert A(v0,v); */
  v = f(v);
  /*@ assert B(v0,v); */
return val;

```

Soient les annotations suivantes. Les variables sont supposées de type int.

### Question 22.1 anq81.c

$\ell_1 : x = 64 \wedge y = x \cdot z \wedge z = 2 \cdot x$ $Y := X \cdot Z$ $\ell_2 : y \cdot z = 2 \cdot x \cdot x \cdot z$	b
---	---

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant Frama-c

### Listing 30 – td81.c

```

/*@
  requires x0==64 && y0==x0*z0 && z0==2*x0;
  ensures \result == 0;
*/
int ex(int x0,int y0,int z0) {
  int x=x0,y=y0,z=z0;

  /*@ assert x==64 && y==x*z && z==2*x;
  y = x*z;
  /*@ assert y*z == 2*x*x*z;
  return 0;

}

```

### Question 22.2 anq82.c

Soient trois constantes  $n, m, p$

$\ell_1 : x = 3^n \wedge y = 3^p \wedge z = 3^m;$ $T := 8 \cdot X \cdot Y \cdot Z;$ $\ell_2 : t = (y+z)^3 \wedge y = x;$
--

Montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte en utilisant Frama-c. On prendra soin de discuter sur les valeurs de  $m, n, p$  et notamment de donner une condition sur ces valeurs pour que cel soit correcte.

### Exercice 23 td68.c

### Listing 31 – qpower2.c

```

#include <limits.h>
/*@ axiomatic auxmath {
  @ axiom rule1: \forall int n; n > 0 ==> n*n == (n-1)*(n-1)+2*n-1;
  @ } */

/*@ requires 0 <= x;
  requires x <= INT_MAX;
  requires x*x <= INT_MAX;
  assigns \nothing;
  ensures \result == x*x;

```

```
*/
int power2(int x)
{int  r,k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
  r=0;k=0;cv=0;cw=0;or=0;ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
  /*@ loop invariant cv == k*k;
    @ loop invariant k  <= x;
    @ loop invariant cw == 2*k;
    @ loop invariant 4*cv == cw*cw;
    @ loop assigns k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
    @ loop variant x-k;
  */
  while (k<x)
  {
    ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
    k=ok+1;
    cv=ocv+ocw+1;
    cw=ocw+2;

  }
  r=cv;
  return(r);
}
```

```
/*@ requires 0 <= x;
   requires x <= INT_MAX;
   requires x*x <= INT_MAX;
   assigns \nothing;
   ensures \result == x*x;
*/
int npower2(int x)
{int  r,k,cv,cw;
  r=0;k=0;cv=0;cw=0;
  /*@ loop invariant cv == k*k;
    @ loop invariant k  <= x;
    @ loop invariant cw == 2*k;
    @ loop invariant 4*cv == cw*cw;
    @ loop assigns k,cv,cw;
    @ loop variant x-k;
  */
  while (k<x)
  {
    k=k+1;
    cv=cv+cw+1;
    cw=cw+2;

  }
  r=cv;
  return(r);
}
```

```
/*@ requires 0 <= x;

   decreases x;
   assigns \nothing;
```

```

        ensures \result == x*x
;
*/
int p(int x)
{
    int r;
    if (x==0)
    {
        r=0;

    }
    else
    {
        r= p(x-1)+2*x-1;

    }
    return(r);
}

/*@   requires  0 <= n;
        requires n*n <= INT_MAX;
    assigns \nothing;
    ensures \result == 1;
*/

int check(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power2(n);
    r2 = p(n);
    if (r1 != r2)
    { r = 0;
    }
    else
    { r = 1;
    };
    return r;
}

```

```

/*@   requires  0 <= n;
        requires n*n <= INT_MAX;
    assigns \nothing;
    ensures \result == 1;
*/

int check2(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power2(n);
    r2 = npower2(n);
    if (r1 != r2)
    { r = 0;
    }
}

```

```

    else
    { r = 1;
    };
    return r;
}

```

Listing 32 – mainpower2.c

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int power2(int x)
{int r,k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
 r=0;k=0;cv=0;cw=0;or=0;ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
 while (k<x)
 {
 ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
 k=ok+1;
 cv=ocv+ocw+1;
 cw=ocw+2;

 }
 r=cv;
 return(r);
}

int p(int x)
{
 int r;
 if (x==0)
 {
 r=0;

 }
 else
 {
 r= p(x-1)+2*x-1;

 }
 return(r);
}

int check(int n){
 int r1,r2,r;
 r1 = power2(n);
 r2 = p(n);
 if (?? == ??)
 { r = ??;
 }
 else
 { r = ??;
 };
 return r;
}

int main()
{
 int val1,val2,val3,num;

```

```

printf("Enter_a_number:_");
scanf("%d", &num);
val1 = power2(num);
    val2 = p(num);
    val3 = check(num);
    printf("Et le résultat pour n=%d: %d %d %d\n", num, val1, val2, val3);
    return 0;
}

```

Soit le fichier `qpower2.c` qui est partiellement complété et qui permet de calculer le carré d'un nombre naturel. L'exercice vise à compléter les points d'interrogation puis de simplifier le résultat et de montrer l'équivalence de deux fonctions. Le fichier `mainpower2.c` peut être compilé pour que vous puissiez faire des expérimentations sur les valeurs calculées.

**Question 23.1** Compléter le fichier `qpower2.c` et produire le fichier `power2.c` qui est vérifié avec `fraama-c`.

**Question 23.2** Simplifier la fonction itérative en supprimant les variables commençant par la lettre `o`. Puis vérifier les fonctions obtenues avec `frama-c`.

**Question 23.3** En fait, vous avez montré que les deux fonctions étaient équivalentes. Expliquez pourquoi en quelques lignes.

#### Exercice 24 `td71.c`

Soit le contrat suivant :

<pre> variables X, Y, Z requires <math>x_0 \geq 0 \wedge y_0 \geq 0 \wedge z_0 \geq 0</math> Roots1st <math>\wedge z_0 = 25 \wedge y_0 = x_0 + 1</math> ensures <math>z_f = 100</math>;     begin         0 : <math>x^2 + y^2 = z \wedge z = 25</math>;         (X, Y, Z) := (X+3, Y+4, Z+75);         1 : <math>x^2 + y^2 = z</math>;     end </pre>
---

**Question 24.1** Traduire ce contrat avec le langage `PlusCal` et proposer une validation pour que ce contrat soit valide.

Listing 33 – `td71.c`

```

/*@
requires  $x_0 \geq 0 \ \&\& \ y_0 \geq 0 \ \&\& \ z_0 \geq 0 \ \&\& \ z_0 == 25 \ \&\& \ y_0 == x_0 + 1 \ \&\& \ x_0 * x_0 + y_0 * y_0 == z_0$ 
ensures  $\text{result} == 100$ ;
*/
int f(int x0, int y0, int z0) {
    int x = x0;
    int y = y0;
    int z = z0;
    /*@ assert  $x * x + y * y == z \ \&\& \ z == 25$  ; */
    x = x + 3;
    y = y + 4;
    z = z + 75;
    /*@ assert  $x * x + y * y == z$  ; */
    return z;
}

```

Listing 34 – td71bis.c

```

/*@
  requires x0>=0 && y0 >= 0 && z0 >= 0 && z0 == 25 && y0==x0+1 &&
  x0*x0 + y0*y0 == z0 && z0 == 25 && (x0+3)*(x0+3) + (y0+4)*(y0+4) == z0+75 ;
  ensures \result == 100;
*/
int f(int x0,int y0,int z0) {
  int x = x0;
  int y = y0;
  int z = z0;
  /*@ assert x*x + y*y == z && z == 25 ;*/
  /*@ assert (x+3)*(x+3) + (y+4)*(y+4) == z+75 ; */
  x = x +3;
  /*@ assert x*x + (y+4)*(y+4) == z+75 ; */
  y = y +4;
  /*@ assert x*x + y*y == z+75 ; */
  z = z + 75;
  /*@ assert x*x + y*y == z ; */
  return z;
}

```

**Question 24.2** Traduire ce contrat en ACSL et vérifier qu'il est valide ou non. S'il est non valide, proposer une correction de la pré-condition et/ou de la postcondition.

Listing 35 – td71.tla

```

----- MODULE td71 -----
EXTENDS TLC, Integers, Naturals

CONSTANTS x0,y0,z0

ASSUME x0 \geq 0 /\ y0 \geq 0 /\ z0 \geq 0 /\ z0 = 25 /\ y0 = x0 +1
(*)
d71--fair algorithm q2 {
  variables x=x0,y=y0, z=z0;
  {
    l1: assert x*x + y*y = z /\ z=25;
    x:= x+3;y:=y+4;z:=z+75;
    l2: assert x*x + y*y = z;
  }
}
*)
\* BEGIN TRANSLATION (chksum(pcal) = "82854ce8" /\ chksum(tla) = "4e9145d3")
VARIABLES x, y, z, pc

vars == << x, y, z, pc >>

Init == (* Global variables *)
        /\ x = x0
        /\ y = y0
        /\ z = z0
        /\ pc = "l1"

l1 == /\ pc = "l1"
      /\ Assert(x*x + y*y = z /\ z=25,
                "Failure_of_assertion_at_line_11,_column_5.")

```

```

/\ x' = x+3
/\ y' = y+4
/\ z' = z+75
/\ pc' = "l2"

l2 == /\ pc = "l2"
      /\ Assert(x*x + y*y = z, "Failure_of_assertion_at_line_13,column_6.")
      /\ pc' = "Done"
      /\ UNCHANGED<<x, y, z>>

(* Allow infinite stuttering to prevent deadlock on termination. *)
Terminating == pc = "Done" /\ UNCHANGED vars

Next == l1 /\ l2
      /\ Terminating

Spec == /\ Init /\ [] [Next] vars
      /\ WF_vars (Next)

Termination == <>(pc = "Done")

\*_END_TRANSLATION

check == pc = "Done" => z = 100

```

### Exercice 25 anq11.c

Définir une fonction `maxpointer` (`gex1.c`) calculant la valeur du `maxiSquaremum` du ciontenu de deux adresses avec son contrat.

```

int max_ptr ( int *p, int *q ) {
  if ( *p >= *q ) return *p ;
  return *q ; }

```

### ◊ Solution de l'exercice 25

---

#### Listing 36 – gex1.c

```

// frama-c-gui -wp -wp-rte -report -wp-print maxpointer.c

/*@ requires \valid(p) && \valid(q);
    ensures \result >= *p && \result >= *q;
    ensures \result == *p || \result == *q;
*/
int max_ptr ( int *p, int *q ) {
  if ( *p >= *q ) return *p ;
  return *q ; }

```

**Fin 25**

### Exercice 26 anq12.c

Définir une fonction `abs` (`anq12.c`) calculant la valeur absolue d'un nombre entier avec son contrat.

```
#include <limits.h>
int abs (int x) {
    if (x >= 0) return x ;
    return -x;}

```

---

◊— **Solution de l'exercice 26**

**Fin 26**

---

**Exercice 27** *Etudier les fonctions pour la vérification de l'appel de abs et max (max-abs.c,max-abs1.c,max-abs2.c)*

```
int abs ( int x );
int max ( int x, int y );
// returns maximum of absolute values of x and y
int max_abs( int x, int y ) {
x=abs(x); y=abs(y);
return max(x,y);
}

```

---

◊— **Solution de l'exercice 27**

Listing 37 – gex4-1.c

```
/*@ requires a >= 0 && b >= 0;
   ensures 0 <= \result;
   ensures \result < b;
   ensures \exists integer k; a == k * b + \result;
*/
int rem(int a, int b) {
    int r = a;
    /*@
       loop invariant
       (\exists integer i; a == i * b + r) &&
       r >= 0
       ;
       loop assigns r;
    */
    while (r >= b) {
        r = r - b;
    };
    return r;
}

```

Listing 38 – gex4-1bis.c

```
/*@ requires a >= 0 && b >= 0;
   ensures 0 <= \result;
   ensures \result < b;
   ensures \exists integer k; a == k * b + \result;
*/
int rem(int a, int b) {
    int r = a;

    &&
    ( a == i * b + r) &&

```



```

    r >= 0 && r <= a
    ;
    loop assigns r,i;
  */
  while (r >= b) {
    r = r - b;
    ++i;
  };
  return r;
}

```

Listing 39 – gex4-2.c

```

/*@ axiomatic mathfact {
  @ logic integer mathfact(integer n);
  @ axiom mathfact_1: mathfact(1) == 1;
  @ axiom mathfact_rec: \forall integer n; n > 1
  ==> mathfact(n) == n * mathfact(n-1);
  @ } */

/*@ requires n > 0;
   ensures \result == mathfact(n);
*/
int codefact(int n) {
  int y = 1;
  int x = n;
  /*@ loop invariant x >= 1 &&
                                     mathfact(n) == y * mathfact(x);
     loop assigns x, y;
     loop variant x-1;
  */
  while (x != 1) {
    y = y * x;
    x = x - 1;
  };
  return y;
}

```

Listing 40 – gex4-3.c

```

/*@ assigns \nothing;
   ensures \result >= a;
   ensures \result >= b;
   ensures \result == a || \result == b;
*/
int max (int a, int b) {
  if (a >= b) return a;
  else return b;
}

```

```

/*@ assigns \nothing;
   ensures \result >= a;
   ensures \result >= b;
   ensures \result == a || \result == b;

```

```

*/
int max2 (int a, int b) {
    int r;
    if (a >= b)
        { r=a;}
    else
        {r=b;};
    return r;
}

/*@
    requires n > 0;
    requires \valid(t+(0..n-1));
    assigns \nothing;

    ensures 0 <= \result < n;
    ensures \forallall int k; 0 <= k < n ==>    t[k] <= t[\result];
*/
int indice_max (int t[], int n) {
    int r = 0;
    /*@ loop invariant 0 <= r < i <= n
        && (\forallall int k; 0 <= k < i ==> t[k] <= t[r])
        ;
        loop assigns i, r;
        loop variant n-i;
    */
    for (int i = 1; i < n; i++)
        if (t[i] > t[r]) r = i;
    return r;
}

/*@
    requires n > 0;
    requires \valid(t+(0..n-1));
    assigns \nothing;

    ensures \forallall int k; 0 <= k < n ==>
        t[k] <= \result;
    ensures \exists int k; 0 <= k < n && t[k] == \result;
*/
int valeur_max (int t[], int n) {
    int r = t[0];
    /*@ loop invariant 0 <= i <= n
        && (\forallall int k; 0 <= k < i ==> t[k] <= r)
        && (\exists int k; 0 <= k < i && t[k] == r)
        ;
        loop assigns i, r;
        loop variant n-i;
    */
    for (int i = 1; i < n; i++)
        if (t[i] > r) r = t[i];
    return r;
}

```

◊— **Solution de l'exercice 27**

---

**Fin 27**

**Exercice 28 Question 28.1** *Soit la fonction suivante calculant le reste de la division de  $a$  par  $b$ . Vérifier la correction de cet algorithme.*

```
int rem(int a, int b) {
    int r = a;
    while (r >= b) {
        r = r - b;
    };
    return r;
}
```

*Il faut utiliser une variable ghost.*

◊— **Solution de la question 28.1**

---

```
/*@ requires a >= 0 && b > 0;
   ensures 0 <= \result;
   ensures \result < b;
   ensures \exists integer k; a == k * b + \result;
*/
int rem(int a, int b) {
    int r = a;
    /*@
       loop invariant
       (\exists integer i; a == i * b + r) &&
       r >= 0
       ;
       loop assigns r;
       loop variant r-b;
    */
    while (r >= b) {
        r = r - b;
    };
    return r;
}

/*@ requires a >= 0 && b > 0;
   ensures 0 <= \result;
   ensures \result < b;
   ensures \exists integer k; a == k * b + \result;
*/
int rem(int a, int b) {
    int r = a;
    /*@ ghost    int q=0;
       */
    /*@
       loop invariant
       a == q * b + r &&
       r >= 0 && r <= a
       ;
       loop assigns r;
       loop assigns q;
       loop variant r-b;
    */
    while (r >= b) {
```

```

    r = r - b;
/*@ ghost
    q = q+1;
*/
};
return r;
}

```

**Fin 28.1**

**Question 28.2** Soit la fonction suivante calculant la fonction fact. Vérifier la correction de cet algorithme. Pour vérifier cette fonction, il est important de définir la fonction mathématique Fact avec ses propriétés.

```

/*@ axiomatic Fact {
  @ logic integer Fact(integer n);
  @ axiom Fact_1: Fact(1) == 1;
  @ axiom Fact_rec: \forall integer n; n > 1 ==> Fact(n) == n * Fact(n-1);
  @ } */

int fact(int n) {
  int y = 1;
  int x = n;
  while (x != 1) {
    y = y * x;
    x = x - 1;
  };
  return y;
}

```

◇ **Solution de la question 28.2**

---

Listing 41 – factoriel.c

```

/*@ axiomatic mathfact {
  @ logic integer mathfact(integer n);
  @ axiom mathfact_1: mathfact(1) == 1;
  @ axiom mathfact_rec: \forall integer n; n > 1
  ==> mathfact(n) == n * mathfact(n-1);
  @ } */

/*@ requires n > 0;
   ensures \result == mathfact(n);
*/
int codefact(int n) {
  int y = 1;
  int x = n;
  /*@ loop invariant x >= 1 &&
                    mathfact(n) == y * mathfact(x);
     loop assigns x, y;
     loop variant x-1;
  */
  while (x != 1) {
    y = y * x;
    x = x - 1;
  };
  return y;
}

```

**Question 28.3** Annoter les fonctions suivantes en vue de montrer leur correction.

```
int max (int a, int b) {  
    if (a >= b) return a;  
    else return b;  
}  
  
int indice_max (int t[], int n) {  
    int r = 0;  
    for (int i = 1; i < n; i++)  
        if (t[i] > t[r]) r = i;  
    return r;  
}
```

```
int valeur_max (int t[], int n) {  
    int r = t[0];  
  
    for (int i = 1; i < n; i++)  
        if (t[i] > r) r = t[i];  
    return r;  
}
```

La solution est donnée dans le fichier gex4-3.c.

◇— **Solution de la question 28.3**

---

Listing 42 – gex4-3.c

```
/*@ assigns \nothing;  
    ensures \result >= a;  
    ensures \result >= b;  
    ensures \result == a || \result == b;  
*/  
int max (int a, int b) {  
    if (a >= b) return a;  
    else return b;  
}
```

```
/*@ assigns \nothing;  
    ensures \result >= a;  
    ensures \result >= b;  
    ensures \result == a || \result == b;  
*/  
int max2 (int a, int b) {  
    int r;  
    if (a >= b)  
        { r=a; }  
    else  
        { r=b; };  
    return r;  
}
```

```

/*@
  requires n > 0;
  requires \valid(t+(0..n-1));
  assigns \nothing;

  ensures 0 <= \result < n;
  ensures \forallall int k; 0 <= k < n ==> t[k] <= t[\result];
*/
int indice_max (int t[], int n) {
  int r = 0;
  /*@ loop invariant 0 <= r < i <= n
    && (\forallall int k; 0 <= k < i ==> t[k] <= t[r])
    ;
    loop assigns i, r;
    loop variant n-i;
  */
  for (int i = 1; i < n; i++)
    if (t[i] > t[r]) r = i;
  return r;
}

/*@
  requires n > 0;
  requires \valid(t+(0..n-1));
  assigns \nothing;

  ensures \forallall int k; 0 <= k < n ==>
    t[k] <= \result;
  ensures \exists int k; 0 <= k < n && t[k] == \result;
*/
int valeur_max (int t[], int n) {
  int r = t[0];
  /*@ loop invariant 0 <= i <= n
    && (\forallall int k; 0 <= k < i ==> t[k] <= r)
    && (\exists int k; 0 <= k < i && t[k] == r)
    ;
    loop assigns i, r;
    loop variant n-i;
  */
  for (int i = 1; i < n; i++)
    if (t[i] > r) r = t[i];
  return r;
}

```

**Fin 28.3**

## Reprise

**Exercice 29** Pour chaque question, montrer que l'annotation est correcte ou incorrecte selon les conditions de vérifications énoncées comme suit

$$\forall x, y, x', y'. P_{\ell}(x, y) \wedge \text{cond}_{\ell, \ell'}(x, y) \wedge (x', y') = f_{\ell, \ell'}(x, y) \Rightarrow P_{\ell'}(x', y')$$

Pour cela, on utilisera l'environnement **Frama-c**.

**Question 29.1**

$$\begin{aligned}\ell_1 : x = 10 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x \\ y := z+x \\ \ell_2 : x = 10 \wedge y = x+2 \cdot 10\end{aligned}$$

◊ **Solution de la question 29.1**

Listing 43 – hoare1.c

```
int q1() {
  int x=10,y=30,z=20;
  //@ assert x== 10 && y == z+x && z==2*x;
  y= z+x;
  //@ assert x== 10 && y == x+2*10;
  return (0);
}
```

**Fin 29.1**

**Question 29.2**

$$\begin{aligned}\ell_1 : x = 1 \wedge y = 12 \\ x := 2 \cdot y \\ \ell_2 : x = 1 \wedge y = 24\end{aligned}$$

**Question 29.3**

$$\begin{aligned}\ell_1 : x = 11 \wedge y = 13 \\ z := x; x := y; y := z; \\ \ell_2 : x = 26/2 \wedge y = 33/3\end{aligned}$$

**Exercice 30** Evaluer la validité de chaque annotation dans les questions suivantes.

**Question 30.1**

$$\begin{aligned}\ell_1 : x = 64 \wedge y = x \cdot z \wedge z = 2 \cdot x \\ Y := X \cdot Z \\ \ell_2 : y \cdot z = 2 \cdot x \cdot x \cdot z\end{aligned}$$

**Question 30.2**

$$\begin{aligned}\ell_1 : x = 2 \wedge y = 4 \\ Z := X \cdot Y + 3 \cdot Y \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y \cdot Y + X^6 \\ \ell_2 : z = 6 \cdot (x+y)^2\end{aligned}$$

**Question 30.3**

$$\begin{aligned}\ell_1 : x = z \wedge y = x \cdot z \\ Z := X \cdot Y + 3 \cdot Y \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y \cdot Y + Y \cdot X \cdot Z \cdot Z \cdot X; \\ \ell_2 : z = (x+y)^3\end{aligned}$$

Soit l'annotation suivante :

$$\begin{aligned}\ell_1 : x = 1 \wedge y = 2 \\ X := Y + 2 \\ \ell_2 : x+y \geq m\end{aligned}$$

où  $m$  est un entier ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

**Question 30.4** *Ecrire la condition de vérification correspondant à cette annotation en supposant que  $X$  et  $Y$  sont deux variables entières.*

**Question 30.5** *Etudier la validité de cette condition de vérification selon la valeur de  $m$ .*

**Exercice 31** *gex7.c*

VARIABLES  $N, V, S, I$

$$pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \stackrel{def}{=} \begin{cases} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0-1 \longrightarrow \mathbb{Z} \\ s_0 \in \mathbb{Z} \wedge i_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$REQUIRES \left( \begin{array}{l} n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_0 \neq 0 \\ v_0 \in 0..n_0-1 \longrightarrow \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

$$ENSURES \left( \begin{array}{l} s_f = \bigcup_{k=0}^{n_0-1} v_0(k) \\ n_f = n_0 \\ v_f = v_0 \end{array} \right)$$

$$\ell_0 : \left( \begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ (n, v, s, i) = (n_0, v_0, s_0, i_0) \end{array} \right)$$

$$S := V(0)$$

$$\ell_1 : \left( \begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^0 v(k) \\ (n, v, i) = (n_0, v_0, i_0) \end{array} \right)$$

$$I := 1$$

$$\ell_2 : \left( \begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i = 1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

WHILE  $I < N$  DO

$$\ell_3 : \left( \begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 1..n-1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

$$S := S \oplus V(I)$$

$$\ell_4 : \left( \begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^i v(k) \wedge i \in 1..n-1 \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

$$I := I+1$$

$$\ell_5 : \left( \begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{i-1} v(k) \wedge i \in 2..n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

OD;

$$\ell_6 : \left( \begin{array}{l} pre(n_0, v_0, s_0, i_0) \\ s = \bigcup_{k=0}^{n-1} v(k) \wedge i = n \\ (n, v) = (n_0, v_0) \end{array} \right)$$

La notation  $\bigcup_{k=0}^n v(k)$  désigne la valeur maximale de la suite  $v(0) \dots v(n)$ . On suppose que l'opérateur  $\oplus$  est défini comme suit  $a \oplus b = \max(a, b)$ .

**Question 31.1** *Ecrire une solution contractuelle de cet algorithme.*

**Question 31.2** *Que faut-il faire pour vérifier que cet algorithme est bien annoté et qu'il est partiellement correct en utilisant  $TLA^+$ ? Expliquer simplement les éléments à mettre en œuvre et les propriétés de sûreté à vérifier.*

**Question 31.3** *Ecrire un module  $TLA^+$  permettant de vérifier l'algorithme annoté à la fois pour la correction partielle et l'absence d'erreurs à l'exécution.*

**Exercice 32** *gex8.c*



On considère le petit programme se trouvant à droite de cette colonne. Nous allons poser quelques questions visant à compléter les parties marquées en gras et visant à définir la relation de calcul.

On notera  $pre(n_0, x_0, b_0)$  l'expression suivante  $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$  et  $in(n, b, n_0, x_0, b_0)$  l'expression  $n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$ .

**Question 32.1** Ecrire un algorithme avec le contrat et vérifier le .

```
VARIABLES  $N, X, B$ 
REQUIRES  $n_0, x_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ 
ENSURES  $\left( \begin{array}{l} n_0 < b_0 \Rightarrow x_f = (n_0 + b_0)^2 \\ n_0 \geq b_0 \Rightarrow x_f = b_0 \\ n_f = n_0 \\ b_f = b_0 \end{array} \right)$ 

BEGIN
 $\ell_0 : n = n_0 \wedge b = b_0 \wedge x = x_0 \wedge pre(n_0, x_0, b_0)$ 
 $X := N;$ 
 $\ell_1 : x = n \wedge in(n, b, n_0, x_0, b_0)$ 
IF  $X < B$  THEN
 $\ell_2 :$ 
 $X := X \cdot X + 2 \cdot B \cdot X + B \cdot B;$ 
 $\ell_3 :$ 
ELSE
 $\ell_4 :$ 
 $X := B;$ 
 $\ell_5 :$ 
FI
 $\ell_6 :$ 
END
```

**Exercice 33** Soit le petit programme suivant :

Listing 44 – f91

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int f1(int x)
{ if (x > 100)
  { return(x-10);
  }
  else
  { return(f1(f1(x+11)));
  }
}

int f2(int x)
{ if (x > 100)
  { return(x-10);
  }
  else
  { return(91);
  }
}

int mc91tail(int n, int c)
{ if (c != 0) {
  if (n > 100) {
    return mc91tail(n-10, c-1);
  }
  else
  {
```

```

        return mc91tail(n+11,c+1);
    }
}
else
    { return n;}
}

int mc91(int n)
{
    return mc91tail(n,1);
}

int main()
{
    int val1,val2,val3,num;
    printf("Enter_a_number:_");
    scanf("%d", &num);
    // Computes the square root of num and stores in root.
    val1 = f1(num);
    val2 = f2(num);
    val3 = mc91(num);
    printf("Et_le_résultat_de_f1(%d)=%d_et_la_vérification:_%d_et_....%d\n", num,
    return 0;
}

```

On veut montrer que les deux fonctions *f1* et *f2* sont équivalentes avec *frama-c* en montrant qu'elles vérifient le même contrat;

**Exercice 34** Soit le petit programme suivant :

Listing 45 – qpower2.c

```

#include <limits.h>
/*@ axiomatic auxmath {
    @ axiom rule1: \forall int n; n > 0 ==> n*n == (n-1)*(n-1)+2*n+1;
    @ } */

/*@ requires 0 <= x;
    requires x <= INT_MAX;
    requires x*x <= INT_MAX;
    assigns \nothing;
    ensures \result == x*x;
*/
int power2(int x)
{int r,k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
  r=0;k=0;cv=0;cw=0;or=0;ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
  /*@ loop invariant cv == k*k;
    @ loop invariant k <= x;
    @ loop invariant cw == 2*k;
    @ loop invariant 4*cv == cw*cw;
    @ loop assigns k,cv,cw,or,ok,ocv,ocw;
    @ loop variant x-k;
  */
  while (k<x)
  {
    ok=k;ocv=cv;ocw=cw;
    k=ok+1;
  }
}

```

```

        cv=ocv+ocw+1;
        cw=ocw+2;

    }
    r=cv;
    return(r);
}

/*@ requires 0 <= x;
    decreases x;
    assigns \nothing;

    ensures \result == x*x
;
*/
int p(int x)
{
    int r;
    if (x==0)
    {
        r=0;

    }
    else
    {
        r = p(x-1)+2*x+1;

    }
    return(r);
}

```

```

/*@ requires 0 <= n;
    assigns \nothing;
    ensures \result == 1;
*/

int check(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power2(n);
    r2 = p(n);
    if (r1 != r2)
    { r = 0;
    }
    else
    { r = 1;
    };
    return r;
}

```

On veut montrer que les deux fonctions *p* et *power2* sont équivalentes avec *frama-c* en montrant qu'elles vérifient le même contrat ;

Cours MOdélisation, Vérification et EXpérimentations  
Exercices (avec les corrections)  
Utilisation d'un environnement de vérification Frama-c (III)  
par Dominique Méry  
25 mars 2025

**Exercice 35** *Utiliser frama-c pour vérifier ou non les annotations suivantes :*

**Question 35.1**

$$\begin{array}{l} \ell_1 : x = 10 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x \\ y := z+x \\ \ell_2 : x = 10 \wedge y = x+2 \cdot 10 \end{array}$$

**Question 35.2**

$$\begin{array}{l} \ell_1 : x = 1 \wedge y = 12 \\ x := 2 \cdot y \\ \ell_2 : x = 1 \wedge y = 24 \end{array}$$

**Question 35.3**

$$\begin{array}{l} \ell_1 : x = 11 \wedge y = 13 \\ z := x; x := y; y := z; \\ \ell_2 : x = 26/2 \wedge y = 33/3 \end{array}$$

**Question 35.4**

$$\begin{array}{l} \ell_1 : x = 3 \wedge y = z+x \wedge z = 2 \cdot x \\ y := z+x \\ \ell_2 : x = 3 \wedge y = x+6 \end{array}$$

**Question 35.5**

$$\begin{array}{l} \ell_1 : x = 2^4 \wedge y = 2^{345} \wedge x \cdot y = 2^{350} \\ x := y+x+2^x \\ \ell_2 : x = 2^{56} \wedge y = 2^{345} \end{array}$$

**Question 35.6**

$$\begin{array}{l} \ell_1 : x = 1 \wedge y = 12 \\ x := 2 \cdot y+x \\ \ell_2 : x = 1 \wedge y = 25 \end{array}$$

**Exercice 36** *Traduire ce contrat dans le langage ACSL et vérifier le contrat.*

```

variables  $x$ 
requires
   $x_0 \in \mathbb{N}$ 
ensures
   $x_f \in \mathbb{N}$ 
begin
 $\ell_0 : \{ x = x_0 \wedge x_0 \in \mathbb{N} \}$ 
While ( $0 < x$ )
 $\ell_1 : \{ 0 < x \leq x_0 \wedge x_0 \in \mathbb{N} \}$ 
 $x := x - 1;$ 
 $\ell_2 : \{ 0 \leq x \leq x_0 \wedge x_0 \in \mathbb{N} \}$ 
od;
 $\ell_4 : \{ x = 0 \}$ 
end

```

**Exercice 37** Utiliser frama-c pour vérifier le contrat suivant :

```

Variables : F,N,M,I

Requires :  $\left( \begin{array}{l} n_0 \in \mathbb{N} \wedge \\ n_0 \neq 0 \wedge \\ f_0 \in 0 .. n_0 - 1 \rightarrow \mathbb{N} \end{array} \right)$ 

Ensures :  $\left( \begin{array}{l} m_f \in \mathbb{N} \wedge \\ m_f \in \text{ran}(f_0) \wedge \\ (\forall j. j \in 0 .. n_0 - 1 \Rightarrow f_0(j) \leq m_f) \end{array} \right)$ 

 $M := F(0);$ 
 $I := 1;$ 
while  $I < N$  do
  if  $F(i) > M$  then
     $M := F(I);$ 
  ;
   $I++;$ 
;
b

```

**Algorithme 2:** Algorithme du maximum d'une liste non annotée

**Exercice 38**

Utiliser frama-c pour vérifier le contrat suivant :

Soit l'algorithme annoté suivant se trouvant à la page suivante et les pré et postconditions définies pour cet algorithme comme suit : On suppose que  $x_1$  et  $x_2$  sont des constantes.

**Exercice 39** Soit la fonction suivante utilisée dans un programme

Listing 46 – mainpower.c

```

#include <stdio.h>
#include <limits.h>
int power(int x)
{
  int r, cz, cv, cu, cw, ct, k;
  cz=0;cv=0;cw=1;ct=3;cu=0;k=0;
  while (k<x)
  {

```

**Variables** : X1,X2,Y1,Y2,Y3,Z

**Requires** :  $x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0$

**Ensures** :  $z_f = x1_0^{x2_0}$

$\ell_0 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, y1, y2, y3, z) = (x1_0, x2_0, y1_0, y2_0, y3_0, z_0)\}$

$(y1, y2, y3) := (x1, x2, 1);$

$\ell_1 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2}\}$

**while**  $y2 \neq 0$  **do**

$\ell_2 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 < y2 \leq x2\}$

**if**  $impair(y2)$  **then**

$\ell_3 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 < y2 \leq x2 \wedge impair(y2)\}$

$y2 := y2 - 1;$

$\ell_4 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$

$y3 := y3 \cdot y1;$

$\ell_5 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$

;

$\ell_6 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$

$y1 := y1 \cdot y1;$

$\ell_7 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2 \div 2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2 \wedge pair(y2)\}$

$y2 := y2 \div 2;$

$\ell_8 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge 0 \leq y2 \leq x2\}$

;

$\ell_9 : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2, z) = (x1_0, x2_0, z_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge y2 = 0\}$

$z := y3;$

$\ell_{10} : \{x1_0 \in \mathbb{N} \wedge x2_0 \in \mathbb{N} \wedge x1_0 \neq 0 \wedge y1_0, y2_0, y3_0, z_0 \in \mathbb{Z} \wedge (x1, x2) = (x1_0, x2_0) \wedge y3 \cdot y1^{y2} = x1^{x2} \wedge y2 = 0 \wedge z = x1^{x2}\}$

**Algorithme 3:** Algorithme de l'exponentiation indienne annoté

```

        printf("%d_%d_%d_cz=%d_%d\n",cu,cv,cw,cz,ct);
        cz=cz+cv+cw;
        cv=cv+ct;
        ct=ct+6;
        cw=cw+3;
        cu=cu+1;
        k=k+1;}

    r=cz;
    return(r);
}

int p(int x)
{
    int r;
    if (x==0)
    {
        r=0;

    }
    else
    {
        r= p(x-1)+3*(x-1)*(x-1) + 3*(x-1)+1;

    }
    return(r);
}

int check(int n){
    int r1,r2,r;
    r1 = power(n);
    r2 = p(n);
    if (r1 != r2)
    { r = 0;
    }
    else
    { r = 1;
    };
    return r;
}

int main () {

    int counter;
    for( counter=0; counter<5; counter++ ) {
        int v,r;
        printf("Enter_a_natural_number:");
        scanf("%d", &v);
        r = power(v);
        printf ("Power_:_%d_---->_%d\n", v,r);

    };
}

```

**Question 39.1** *Compiler ce programme et tester son exécution afin d'en dégager ses fonctionnalités.*

**Question 39.2** *Annoter les fonctions principales.*

**Question 39.3** *Vérifiez sa correction partielle et totale.*