Cours Algorithmique des systèmes parallèles et distribués
Exercices
Série 1 Modélisation, programmation et vérification en TLA$^+$
par Dominique Méry
21 janvier 2026

Modélisation et vérification avec TLA$^+$

Exercice 1 *(disapp_td1_ex1.tla)*

Question 1.1 *Modéliser sous forme d'un module TLA$^+$ le réseau de Petri de la figure 1. Donner une instanciation possible des constantes. Préciser les conditions initiales correspondant à un système avec cinq (5) processeurs et deux (2) bus.*

Question 1.2 *On désire analyser le comportement de ce réseau et, pour cela, on souhaite savoir si la place $p5$ contiendra au moins un jeton. Expliquer comment on doit procéder pour obtenir une réponse en un temps fini. Préciser le message donné par le système TLAPS.*

Question 1.3 *Est-ce que le réseau peut atteindre un point de deadlock ?*

Question 1.4 *Enoncez trois propriétés de sûreté de ce réseau établissant une relation entre au moins deux places.*

```
------------------------------- MODULE disapp_td1_ex1 -------------------------------
(* Petri-net for the multiprocessor system *)
EXTENDS Naturals,TLC
CONSTANTS Places,P,B
VARIABLES M
-------------------------------
(* Auxiliary Definitions *)
K == [p \in Places |-> IF p \in {"p3"} THEN 1   ELSE 0 ]
TOKENS==1..20
----------------------------------------------------------------------------------------
TypeOK == M \in [Places |-> SUBSET TOKENS]
----------------------------------------------------------------------------------------
t1 ==
    /\ M["p1"] \geq 1 /\ M["p3"]+1 \leq K["p3"]
    /\ M'= [[M EXCEPT![" p3"]=M["p3"]+1] EXCEPT![" p1"]=M["p1"]-1]

t2 ==
    /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1
    /\ M'=[[[M  EXCEPT![" p3"]=M["p3"]-1]
```

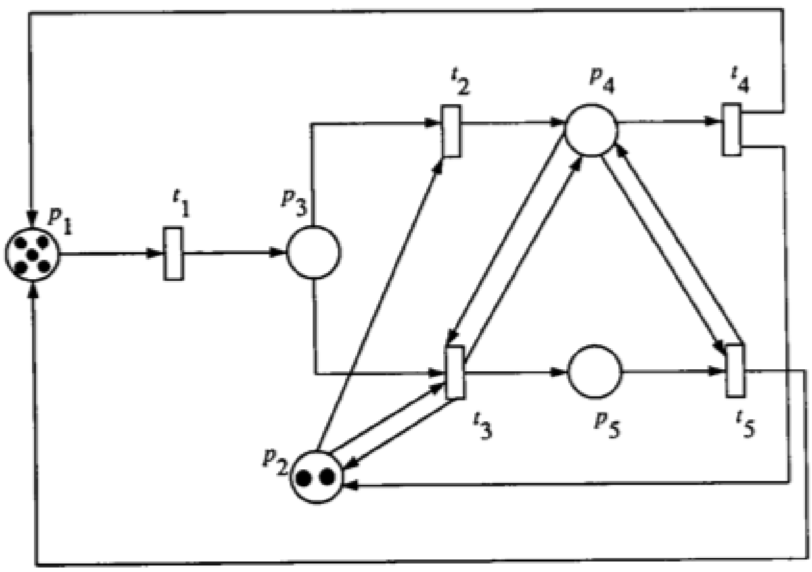


Fig. 14. A Petri-net model of a multiprocessor system, where tokens in p_1 represent active processors, p_2 available buses, p_3, p_4, and p_5 processors waiting for, having access to, queued for common memories, respectively.

FIGURE 1 – Réseau de Petri

```
                 EXCEPT!["p2"]=M["p2"]-1]
                 EXCEPT!["p4"]=M["p4"]+1]


t3 ==
    /\ M["p2"] \geq 1 /\ M["p3"] \geq 1 /\ M["p4"] \geq 1
    /\ M'=[[M    EXCEPT!["p3"]=M["p3"]-1]
                 EXCEPT!["p5"]=M["p5"]+1]

t4 ==
    /\ M["p4"] \geq 1
    /\ M'=[[[M   EXCEPT!["p4"]=M["p4"]-1]
                 EXCEPT!["p2"]=M["p2"]+1]
                 EXCEPT!["p1"]=M["p1"]+1]


t5 ==
    /\ M["p4"] \geq 1 /\ M["p5"] \geq 1
    /\ M'=[[M    EXCEPT!["p5"]=M["p5"]-1]
                 EXCEPT!["p1"]=M["p1"]+1]

--------------------------------------------------------------------------------


Init ==  M = [p \in Places |->
            IF p \in {"p1"} THEN P
            ELSE IF p \in {"p2"}
            THEN B   ELSE 0 ]



Next == t1 \/ t2 \/ t3 \/ t4 \/ t5

Petri  == Init /\ [][Next]_<<M>>


I0 ==  \A p \in Places :  M[p] \geq 0


I1 == 0 \leq M["p3"] /\ M["p3"] \leq 1
I2 ==  M["p1"] \leq 5 /\ M["p2"] \leq 2
I3 ==  \A p \in {"p5"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 5
I4 ==  \A p \in {"p4"} : 0 \leq M[p] /\ M[p] \leq 2
I == M["p2"]+M["p5"] \leq 2
```

```
AP4 == M["p4"] = 0
AP5 == M["p5"] = 0
Test == I0 /\ I1 /\ I2 /\ I3 /\ I4
=============================================================================
```

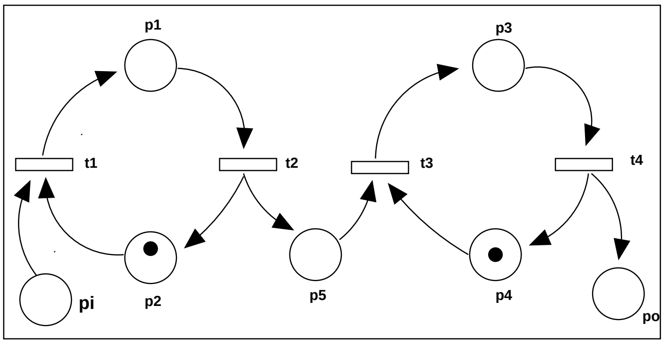
Exercice 2 *(disapp_td1_ex2.tla)*

Un réseau de Petri est un uple R=(S,T,F,K,M,W) tel que

- *S est l'ensemble (fini) des places.*
- *T est l'ensemble (fini) des transitions.*
- $S \cap T = \varnothing$
- *F est la relation du flÔt d'exécution :* $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
- *K représente la capacité de chaque place :* $K \in S \rightarrow Nat$.
- *M représente le initial marquage chaque place :*
  $M \in S \rightarrow Nat$ *et vérifie la condition* $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$.
- *W représente le poids de chaque arc :* $W \in F \rightarrow Nat$
- *un marquage M pour R est une fonction de S dans Nat :*
  $M \in S \rightarrow Nat$ *et respectant la condition* $\forall s \in S : M(s) \leq K(s)$.
- *une transition t de T est activable à partir de M un marquage de R si*
  1. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (s',t) \in F \} : M(s) \geq W(s,t)$.
  2. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (t,s') \in F \} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.
- *Pour chaque transition t de T, Pre(t) est l'ensemble des places conduisant à t et Post(t) est l'ensemble des places pointées par un lien depuis t :*
  $Pre(t) = \{ s' \in S : (s',t) \in F \}$ *et* $Post(t) = \{ s' \in S : (t,s') \in F \}$
- *Soit une transition t de T activable à partir de M un marquage de R :*
  1. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (s',t) \in F \} : M(s) \geq W(s,t)$.
  2. $\forall s \in \{ s' \in S \mid (t,s') \in F \} : M(s) \leq K(s) - W(s,t)$.
- *un nouveau marquage M' est défini à partir de M par : '* $\forall s \in S$,

$$M'(s) = \begin{cases} \mathrm{M(s)-W(s,t), \text{ si } s \in Pre(t) - Post(t)} \\ \mathrm{M(s)+W(t,s), \text{ si } s \in Post(t) - Pre(t)} \\ \mathrm{M(s)-W(s,t)+W(t,s), \text{ si } s \in Pre(t) \cap Post(t)} \\ \mathrm{M(s), \text{ sinon}} \end{cases}$$

On considère le réseau suivant :



MODULE *petri*10

EXTENDS *Naturals*, *TLC*
CONSTANTS *Places*, *N*, *Q*, *B*
VARIABLES *M*

$t1 \triangleq$
$t2 \triangleq$
$t3 \triangleq$
$t4 \triangleq$
$Init1 \triangleq \quad M = [p \in Places \mapsto \text{IF } p \in \{\text{"p4"}, \text{"p2"}\} \text{ THEN } 1 \text{ ELSE }$
$\text{IF } p = \text{"pi" THEN } N \text{ ELSE } 0]$

$Next \triangleq t1 \lor t2 \lor t3 \lor t4$

Question 2.1 *Traduire ce réseau en un module TLA*$^+$ *dont le squelette est donné dans le texte. Pour cela, on donnera la définition des quatre transitions* $t1$, $t2$, $t3$, $t4$. *On ne tiendra pas compte de la capacité des places : les places ont une capacité d'au plus un jeton, sauf la place pi qui peut contenir* N *jetons, la place p5 peut contenir au plus B jetons et la place po peut contenir au plus* Q.

Question 2.2 *Donner une relation liant les places po,p1,p3,p5,pi et la valeur* N. *Justifiez votre réponse.*

Question 2.3 *Si on suppose que la place po peut contenir au plus* Q *jetons, donnez une condition sur* Q *pour que tous les jetons de pi soient consommés un jour. Justifiez votre réponse.*

Question 2.4 *Expliquez ce que modélise ce réseau de Petri.*

◇— **Solution de l'exercice 2**

```
-------------------- MODULE disapp_td1_ex2 ------------------
EXTENDS Naturals,TLC
CONSTANTS Places,N,Q,B
VARIABLES M

t11 ==
     /\ M["p1"] \geq 1 /\ M["p5"] \geq 1
     /\ M' =[ [[M EXCEPT!["p1"]=@-1] EXCEPT!["p5"]=@-1] EXCEPT!["p2"]=@+1]

t1 ==
          /\ M["p2"] = 1  /\  M["pi"]  \geq 1
          /\ M'=   [[[M EXCEPT!["p1"]=1] EXCEPT!["pi"]=M["pi"]-1] EXCEPT!["p2"]=0]

t2 ==
```

```
        /\ M["p1"] = 1 /\ M["p5"] <  B
        /\ M'=  [[[M EXCEPT!["p1"]=0] EXCEPT!["p5"]=M["p5"]+1] EXCEPT!["p2"]=1]

t3 ==
        /\ M["p5"] \geq 1 /\ M["p4"]=1
        /\ M'=  [[[M EXCEPT!["p3"]=1] EXCEPT!["p5"]=M["p5"]-1] EXCEPT!["p4"]=0]



t4 ==
        /\ M["p3"] = 1 /\ M["po"] <  Q
        /\ M'=  [[[M EXCEPT!["p3"]= M["p3"]-1] EXCEPT!["po"]=M["po"]+1] EXCEPT!["p4

----

Init1 ==  M = [p \in Places |-> IF p \in {"p4","p2"} THEN 1 ELSE
                IF p = "pi" THEN N ELSE 0 ]

Init == Init1

Next == t1 \/ t2 \/ t3 \/ t4\/ M'=M

Petri  == Init /\ [][Next]_<<M>>

TypeInvariant ==  \A p \in Places :  M[p] \geq 0

Inv1 ==  M["pi"]+M["p5"]+M["po"]+M["p1"]+M["p3"] = N

Inv2 ==  M["po"] \leq  Q

Inv4 ==  M["pi"]+M["p5"]+M["po"]+M["p2"]+M["p4"] = N+2
Inv5 ==  M["p3"]+M["p4"]+M["p1"]+M["p2"] = 2

Inv3 ==  M["po"] #  Q
Inv == TypeInvariant /\ Inv1 /\ Inv2  /\  Inv5
Test == Inv3
=============================================
```

Fin 2