

<

Cours Modélisation et vérification des systèmes informatiques
Exercices (avec les corrections)
Examen écrit et TP Noté du 27 novembre 2025
par Dominique Méry
1^{er} décembre 2025

Exercice 1 Soit le contrat suivant :

```
variables int x, int y, int z
requires P(x0, y0, z0)
ensures Q(x0, y0, z0, xf, yf, zf)
begin
  0 : x = 10 ∧ y = z + x ∧ z = 2 · x
  y := z + x
  1 : x = 10 ∧ y = x + 2 · 10
end
```

Question 1.1 Compléter le module `ex25_1.tla` en définissant la précondition et la postcondition.

Question 1.2 Compléter l'action `step0_1` et vérifier que le module est sans blocage.

Question 1.3 Compléter le module en vérifiant que le contrat est correct c'est-à-dire que la propriété de correction partielle est satisfaite ou pas.

Listing 1 – labelx251

```
----- MODULE ex25_1 -----
EXTENDS Integers, TLC
CONSTANTS x0, y0, z0 (* x0, y0, z0 are the initial values *), un
P(u, v, w) == u = 10 /\ v = u + w /\ w = 2 * u
Q(u0, v0, w0, u, v, w) ==
-----
ASSUME P(x0, y0, z0)
-----
VARIABLES x, y, z, pc
-----
step0_1 == pc = "0" /\ y' = z + x /\ pc' = "1" /\ x' = x /\ z' = z
skip == UNCHANGED <<x, y, z, pc>>
-----
Init ==
Next == step0_1 \/ skip
-----

safetypc == pc = "1" =>
=====
```

Listing 2 – labelx251

```
----- MODULE ex25_1 -----
EXTENDS Integers, TLC
CONSTANTS x0, y0, z0 (* x0, y0, z0 are the initial values *), un
P(u, v, w) == u = 10 /\ v = w + u /\ w = 2 * u
Q(u0, v0, w0, u, v, w) == P(u0, v0, w0) /\ u = 10 /\ v = u + 2 * 10
```

```
-----  
ASSUME P(x0,y0,z0)  
-----
```

```
VARIABLES x,y,z,pc  
-----
```

```
step0_1 ==  
    /\ pc="0"  
    /\ y'=_z+x  
    /\ pc'="1"  
    /\ UNCHANGED <<x,z>>
```

```
skip == UNCHANGED <<x,y,z,pc>>
```

```
-----  
Init == x=x0 /\ y=y0 /\ z=z0 /\ pc="0"  
Next == step0_1 \/ skip  
-----
```

```
safetypc == pc="1" => Q(x0,y0,z0,x,y,z)
```

```
=====
```

Exercice 2 Soit le contrat suivant :

<pre>variables int x,int y,int z requires P(x0,y0,z0) ensures Q(x0,y0,z0,xf,yf,zf) begin 0 : x = 1 /\ y = 3 /\ x+y = 12 x := y+x 1 : x = 567 /\ y = 34 end</pre>
--

Question 2.1 Compléter le module `ex25_2.tla` en définissant la précondition et la postcondition.

Question 2.2 Compléter l'action `step0_1` et vérifier que le module est sans blocage.

Question 2.3 Compléter le module en vérifiant que le contrat est correct c'est-à-dire que la propriété de correction partielle est satisfaite ou pas.

Listing 3 – lalex251

```
----- MODULE ex25_2 -----  
EXTENDS Integers,TLC  
CONSTANTS x0,y0 (* x0,y0 are the initial values *), un  
pre(u,v) ==  
post(u0,v0,u,v) ==  
-----  
ASSUME pre(x0,y0)  
-----  
VARIABLES x,y,pc  
-----  
step0_1 ==  
  
skip == UNCHANGED <<x,y,pc>>
```

```

Init ==
Next == step0_1 \ / skip

```

```

safetypc ==

```

```

=====

```

Listing 4 – lalex251

```

----- MODULE ex25_2 -----
EXTENDS Integers ,TLC
CONSTANTS x0,y0,z0 (* x0,y0 are the initial values *), un
P(u,v,w) == u= 1 /\ v = 3
Q(u0,v0,w0,u,v,w) == P(u0,v0,w0) /\ u=567 /\ v=34

```

```

ASSUME P(x0,y0,z0)

```

```

VARIABLES x,y,z,pc

```

```

step0_1 ==
    /\ pc="0"
    /\ x'=_y+x
    /\ _pc'="1"
    /\ UNCHANGED <<y,z>>

```

```

skip == UNCHANGED <<x,y,z,pc>>

```

```

Init == x=x0 /\ y=y0 /\ z=z0 /\ pc="0"
Next == step0_1 \ / skip

```

```

safetypc == pc="1" => Q(x0,y0,z0,x,y,z)

```

```

=====

```

Exercice 3 Soit le programme C suivant :

Listing 5 – summation.c

```

#include <stdio.h>

```

```

int ffS(int n) {
    int ps = 0;
    int k = 0;
    int ok=k, ops = 0;
    while (k < n) {
        ok=k;ops=ps;
        k = ok + 1;
        ps = ops + k;
    };
    return ps;
}

int fS(int n) {
    int ps = 0;

```

```

int k = 0;
    while (k < n) {

        ps = ps + k+1;
        k = k + 1;

    };
    return ps;
}

int main()
{

    for (int i = 0; i < 11; ++i){
        printf("Value_for_z=%d_is_%d\n",i,fS(i));
        return 0;
    }
}

```

Question 3.1 *Ecrire les données en entrée de ce programme et ce qui est calculer.*

Question 3.2 *Donner la liste des variables utiles pour exprimer le calcul à partir des valeurs.*

Question 3.3 *Soit le code suivant extrait du programme ci-dessus :*

Listing 6 – labelsummation.c

```

int ps = 0;
int k = 0;
int r;
inloop: while (k < x) {
    k = k + 1;

    ps = ps + k+1;
};
outloop: r = ps ;

```

Traduire ce code sous la forme d'actions suivant les étiquettes inloop et outloop.

Question 3.4 *Vérifier la correction partielle et l'absence des erreurs à l'exécution.*

Listing 7 – labelsummation.c

```

----- MODULE summation -----
EXTENDS Integers,TLC
CONSTANTS x0,r0 (* x0 is the input *), un
sum(u) == (u*(u+1)) \div 2
P(u,v) == u \geq 0
Q(u0,v0,u,v) == P(u0,v0) /\ v = sum(u)
-----
ASSUME P(x0,r0)
-----
VARIABLES x,r,k,ps,pc
-----

```

```

inloop == pc="inloop" /\ k < x /\ k'=k+1 /\ ps'=ps+k+1 /\ UNCHANGED <<x,r,pc>>
outloop == pc="inloop" /\ ~(k < x) /\ pc'="outloop" /\ UNCHANGED <<x,r,ps,k>>
final_==_pc="outloop" /\ _r'=ps /\ pc'="done" /\ UNCHANGED <<x,ps,k>>
-----
Init_==_x=x0 /\ _ps=0 /\ _k=0 /\ _r=un /\ _pc="inloop"
Next_==_inloop_ \/ _outloop_ \/ _final_ \/ UNCHANGED <<x,r,k,ps,pc>>
-----
safetypc_==_pc="done" => _r=_sum(x)

=====

```

Exercice 4 Soit le programme suivant :

Listing 8 – average.c

```

int a(int n, int m) {
    int r;
    r = (m+n)/2;
    return r;
}

```

Question 4.1 Ecrire une relation entre les valeurs initiales n_0 , m_0 et r_0 et les valeurs finales de n_f , m_f et r_f des variables n, m, r . Traduire cette relation dans un module TLA^+ .

Listing 9 – average.tla

```

----- MODULE average -----
EXTENDS Integers, TLC
CONSTANTS n0, m0, r0, un
-----
ave(x, y) == (x+y) \div 2
-----
ASSUME n0 \in Int /\ m0 \in Int
-----
VARIABLES n, m, r, pc
-----
Computing == pc="start" /\ pc'="done" /\ r' = ave(n, m) /\ UNCHANGED <<n, m>>
Skipping == UNCHANGED <<n, m, r, pc>>
-----
Init == n=n0 /\ m=m0 /\ r=un /\ pc="start"
Next == Computing \/ Skipping
-----
safetypc == pc="done" => r = ave(n, m)

=====

```

Question 4.2 L'exécution du programme `summation.c` conduit à une valeur inattendue pour certaines valeurs de n_0 et de m_0 . Analyser cette question avec l'outil TLA^+ .

Listing 10 – averagebis.tla

```

----- MODULE averagebis -----
EXTENDS Integers, TLC
CONSTANTS n0, m0, r0, un, maxi
mini == -maxi-1
-----

```

```

ave(x,y) == (x+y) \div 2
rte(x) == x#un => x \in mini..maxi
-----
ASSUME n0 \in Int /\ m0 \in Int
-----
VARIABLES n,m,r,pc
-----
Computing == pc="start" /\ pc'="done" /\ r' = ave(n,m) /\ UNCHANGED <<n,m>>
Skipping  == UNCHANGED <<n,m,r,pc>>
-----
Init == n=n0 /\ m=m0 /\ r=un /\ pc="start"
Next == Computing \/ Skipping
-----
safetypc == pc="done" => r = ave(n,m)
safetyrte == rte(n) /\ rte(m) /\ rte(r)

=====

```

Exercice 5 Soient les deux annotations suivantes. Pour chacune de ces annotations, traduire les annotations en un module TLA^+ et vérifier ou non la correction de cette annotation.

Question 5.1

On suppose que p est un nombre premier :

$\ell_1 : x = 2^p \wedge y = 2^{p+1} \wedge x \cdot y = 2^{2 \cdot p+1}$
 $x := y + x + 2^x$
 $\ell_2 : x = 5 \cdot 2^p \wedge y = 2^{p+1}$

Question 5.2

$\ell_1 : x = 1 \wedge y = 12$
 $x := 2 \cdot y$
 $\ell_2 : x = 1 \wedge y = 24$