Université Chouaib Doukkali
Département de Physique
Option FTR - SMP6
2019 / 2020
Pr. O. LABOUIDYA

LES FONDAMENTAUX EN TELECOMMUNICATIONS

Corrigé - Série de TD N° 1

Corrigé de l'exercice 1 :

Un signal $u_p(t)$ sinusoïdal de fréquence f_p = 1 MHz, d'amplitude U_p = 1V est modulé en fréquence. Le signal modulant est une onde en cosinus d'amplitude U_m = 2,5 V et de fréquence f_m = 500 Hz. L'excursion de fréquence est 5,5 kHz.

1. **Expression mathématique du signal modulé $u_{FM}(t)$:**

Signal porteur :

$$u_p(t) = U_p \sin(2\pi \,.\, f_p \,.\, t)$$
$$= \sin(2\pi \,.10^6 .\, t)$$

Signal modulant (informatif) :

$$u_m(t) = U_m \cos(2\pi \,.\, f_m \,.\, t)$$
$$= 2{,}5 \cos(2\pi \,.\, 500 .\, t)$$

Signal modulé FM :

$$u_{FM}(t) = \sin\left(2\pi \,.10^6 .\, t + 2\pi \,.\, k_f \int_0^T u_x(x)dx\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \,.10^6 .\, t + 2\pi \,.\, k_f \int_0^T 2{,}5\, cos(2\pi \,.\, 500 \,.\, x)dx\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \,.10^6 .\, t + \frac{2\pi \,.k_f \,.2{,}5}{2\pi \,.\, 500}\Big[sin(2\pi \,.\, 500 \,.\, x)\Big]_0^t\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \,.10^6 .\, t + \frac{2{,}5 \,.\, k_f}{500}\, sin(2\pi \,.\, 500 \,.\, t)\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \,.10^6 .\, t + \frac{\Delta_f}{500}\, sin(1000\, \pi \,.\, t)\right) \text{ avec : } \Delta_f = U_m \,.\, k_f = 2{,}5 \,.\, k_f = 5{,}5\, KHz$$

$$= \sin\left(2\pi \,.10^6 .\, t + \frac{5{,}5 \,.10^3}{500}\, sin(1000\, \pi \,.\, t)\right)$$

Donc : $\mathbf{u_{FM}(t) = \sin(2\pi \,.\, 10^6 .\, t + 11\, sin(1000\, \pi \,.\, t))}$

2. **Détermination de l'indice de modulation et de la sensibilité du modulateur** :

Indice de modulation :

$$\beta = \frac{\Delta_f}{f_m} = \frac{U_m \, . \, k_f}{f_m} = \frac{5{,}5\,.\,10^3}{500} = 11$$

Sensibilité du modulateur :

$$k_f = \frac{\Delta_f}{U_m} = \frac{5{,}5\,.\,10^3}{2{,}5} = 2200\frac{Hz}{V} = 2{,}2\ KHz/V$$

Corrigé de l'exercice 2 :

Soit le signal modulé en amplitude suivant $u_{AM}(t) = 5\cos(10^6 t) + 3.5\cos(10^3 t)\cos(10^6 t)$.

1. **Expression mathématique usuelle du signal modulé $u_{AM}(t)$:**

Signal modulé AM :

$u_{AM}(t) = A\,.\,[1 + m\,.\cos(2\pi\,.\,f_m\,.\,t)]\,.\,\cos(2\pi\,.\,f_p\,.\,t)$ **(1)**

On a : $u_{AM}(t) = 5\cos(10^6 t) + 3{,}5\cos(10^3 t)\cos(10^6 t)$

$= 5\cos(10^6 t)\left[1 + \frac{3{,}5}{5}.\cos(10^3\,t)\right]$

Donc : $\mathbf{u_{AM}(t) = 5\left[1 + \frac{3{,}5}{5}.\cos(10^3\,t)\right]\cos(10^6 t)}$ **(2)**

2. **Par analogie entre les équations (1) et (2) précédentes, on déduit la fréquence porteuse, la fréquence modulante et le taux de modulation :**

Fréquence porteuse :

$$f_p = \frac{10^6}{2\pi}\,Hz$$

Fréquence modulante :

$$f_m = \frac{10^3}{2\pi}\,Hz$$

Taux de modulation :

$$m = \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$$

Corrigé de l'exercice 3 :

Une porteuse de fréquence f_p = 100 MHz est modulée en fréquence par un signal sinusoïdal d'amplitude U_m = 20 V et de fréquence f_m = 100 kHz. La sensibilité fréquentielle du modulateur est k_f = 25 KHz/V.

1. ***<u>Méthode 1</u>* : Estimation de la bande passante du signal FM en utilisant la règle de Carson** :

   Rappel de la règle de Carson : $B \approx 2(\Delta f + f_m) = 2\,(\beta + 1)f_m$

   avec : $\beta = \frac{\Delta_f}{f_m} = \frac{U_m \cdot k_f}{f_m}$, $\Delta_f = U_m \cdot k_f$

<u>Application numérique :</u>

$$\beta = \frac{\Delta_f}{f_m} = \frac{500KHz}{100\ KHz} = 5 \quad \text{et} \quad \Delta_f = U_m \cdot k_f = 20\,V \,.\, 25\ KHz/V = 500KHz$$

On obtient alors comme estimation de la bande passante du signal FM en utilisant la règle de Carson :

$$B_1 = 2(\Delta f + f_m) = 2\,(\beta + 1)f_m = 2.(5+1).100\ KHz$$

Ce qui donne : $\boldsymbol{B_1 = 1200\ KHz}$

2. ***<u>Méthode 2</u>* : Estimation de la bande passante du signal FM avec les harmoniques significatives**

   On ne considère que les composantes latérales du spectre dont l'amplitude atteint au moins 1% de celle de la porteuse non-modulée U_p.

   D'après les calculs de la question 1 : $\beta = 5$
   Cette colonne contient donc les fonctions de Bessel de $J_k(5)$ allant de $J_0 = -0{,}1776$ à $J_{15} = 0{,}0000$

   D'autre part, on ne considère ici que les composantes latérales du spectre dont l'amplitude atteint au moins 1% de celle de la porteuse non-modulée U_p :

   $1\% \,.\, U_p = \frac{1\,.\,U_p}{100} = 0{,}01\,.U_p \rightarrow J_k(5) \geq 0{,}01$

   Cela veut dire que les raies du spectre qui auront des Amplitudes $J_k \,.\, U_p$ inférieures à $0{,}01.U_p$ seront négligées.

   On déduit par conséquent de cette table (Figure 1) : **k = 8**

k	β=5	β=10	β=2.5
0	-0.1776	-0.2459	-0.0484
1	-0.3276	0.0435	0.4971
2	0.0466	0.2546	0.4461
3	0.3648	0.0584	0.2166
4	0.3912	-0.2196	0.0738
5	0.2611	-0.2341	0.0195
6	0.1310	-0.0145	0.0042
7	0.0534	0.2167	0.0008
8	0.0184	0.3179	0.0001
9	0.0055	0.2919	0.0000
10	0.0015	0.2075	0.0000
11	0.0004	0.1231	0.0000
12	0.0001	0.0634	0.0000
13	0.0000	0.0290	0.0000
14	0.0000	0.0120	0.0000
15	0.0000	0.0045	0.0000

Figure 1 : Tables mathématiques des fonctions de Bessel $J_k(\beta)$

En se basant sur la figure 2 suivante, on estime la bande passante du signal FM comme suivant :

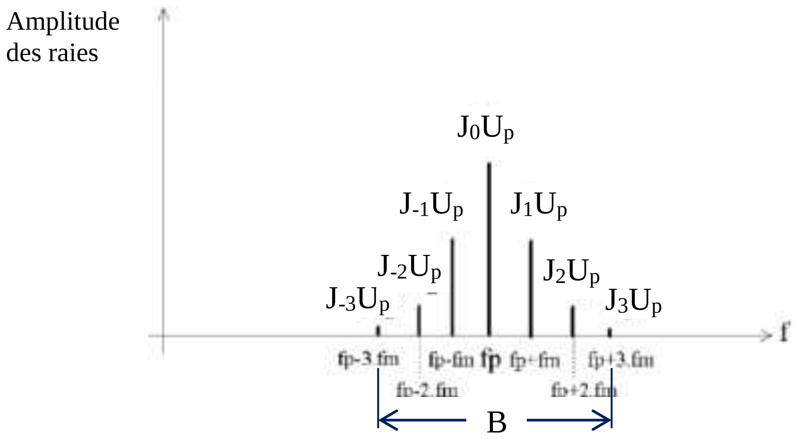

Figure 2 : Exemple de spectre d'un signal FM de bande estimée B pour $\beta = 1$

$$B_2 = \left(f_p + k \,.\, f_m\right) - \left(f_p - k \,.\, f_m\right) = 2 \,.\, k \,.\, f_m = 2 \,.\, 8 \,.\, 100\ KHz$$

$$\boldsymbol{B_2 = 1600\ KHz}.$$

3. **Si on double l'amplitude du signal modulant, on obtient les résultats suivants :**

$$U'_m = 2 \,.\, U_m \,, \qquad \beta' = \frac{\Delta'_f}{f_m} = \frac{U'_m \,.\, k_f}{f_m} = \frac{2 \,.U_m \,.\, k_f}{f_m} = 2 \,.\, \beta$$

Donc $\beta' = 2 \,.\, \beta = 2 \,.\, 5 = 10$ avec $J_k(10) \geq 0{,}01$

$\boldsymbol{\beta' = 10}$

k	β=5	β=10	β=2.5
0	-0.1776	-0.2459	-0.0484
1	-0.3276	0.0435	0.4971
2	0.0466	0.2546	0.4461
3	0.3648	0.0584	0.2166
4	0.3912	-0.2196	0.0738
5	0.2611	-0.2341	0.0195
6	0.1310	-0.0145	0.0042
7	0.0534	0.2167	0.0008
8	0.0184	0.3179	0.0001
9	0.0055	0.2919	0.0000
10	0.0015	0.2075	0.0000
11	0.0004	0.1231	0.0000
12	0.0001	0.0634	0.0000
13	0.0000	0.0290	0.0000
14	0.0000	0.0120	0.0000
15	0.0000	0.0045	0.0000

Figure 3 : Tables mathématiques des fonctions de Bessel $J_k(\beta)$

➞ On déduit alors d'après la table de la figure 3 : $\boldsymbol{k' = 14}$

Par conséquent :

<u>Méthode 1 :</u>

$$B'_1 = 2\left(\Delta'_f + f_m\right) = 2\,(\beta' + 1) f_m = 2.\,(10 + 1).\,100\ KHz$$

$$\boldsymbol{B'_1 = 2200\ KHz}$$

<u>Méthode 2 :</u>

$$B'_2 = 2 \,.\, k' \,.\, f_m = 2 \,.\, 14 \,.\, 100\ KHz$$

$$\boldsymbol{B'_2 = 2800\ KHz}.$$

4. Si on double la fréquence du signal modulant, on obtient les résultats suivants :

$f''_m = 2 \,.\, f_m$, $\Delta''_f = \Delta_f = U_m \,.\, k_f$ car l'amplitude n'a pas changée.

$$\beta'' = \frac{\Delta''_f}{f''_m} = \frac{\Delta_f}{f''_m} = \frac{U_m \,.\, k_f}{2 \,.\, f_m} = \frac{\beta}{2}$$

Donc $\beta'' = \frac{\beta}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ avec $J_k(2{,}5) \geq 0{,}01$

➞ On déduit alors d'après la table de la figure 4 : $\boldsymbol{k'' = 5}$

Par conséquent :

<u>Méthode 1 :</u>

$B''_1 = 2\,(\beta'' + 1) f''_m = 4\,(\beta'' + 1) f_m = 4.(2{,}5 + 1).100\ KHz$

$\boldsymbol{B''_1 = 1400\ KHz}$

<u>Méthode 2 :</u>

$B''_2 = 2 \,.\, k'' \,.\, f''_m = 4 \,.\, k'' \,.\, f_m = 2 \,.\, 5 \,.\, 100\ KHz$

$\boldsymbol{B''_2 = 2000\ KHz}$.

$\boldsymbol{\beta'' = 2,5}$

k	β=5	β=10	β=2.5
0	-0.1776	-0.2459	-0.0484
1	-0.3276	0.0435	0.4971
2	0.0466	0.2546	0.4461
3	0.3648	0.0584	0.2166
4	0.3912	-0.2196	0.0738
5	0.2611	-0.2341	0.0195
6	0.1310	-0.0145	0.0042
7	0.0534	0.2167	0.0008
8	0.0184	0.3179	0.0001
9	0.0055	0.2919	0.0000
10	0.0015	0.2075	0.0000
11	0.0004	0.1231	0.0000
12	0.0001	0.0634	0.0000
13	0.0000	0.0290	0.0000
14	0.0000	0.0120	0.0000
15	0.0000	0.0045	0.0000

Figure 4 : Tables mathématiques des fonctions de Bessel $J_k(\beta)$

N.B. : Largeur de bande effective

Un signal modulé en fréquence u_{FM} (t) est constitué théoriquement d'un nombre infini de composantes (raies) spectrales lorsque le signal modulant ou le message à transmettre est une pure sinusoïde : u_m (t) = U_m cos (2π . f_m . t).

Cependant en pratique, l'énergie du signal modulé se trouve autour de la fréquence porteuse f_p et devient négligeable au fur et à mesure qu'on s'éloigne de celle-ci (voir figure 3).

La règle de Carson est une méthode empirique et approximative qui permet d'estimer la bande passante effective d'un signal modulé en fréquence u_{FM} (t) :

$B \approx 2(\Delta f + f_m) = 2\,(\beta + 1) f_m$ avec : $\beta = \frac{\Delta_f}{f_m} = \frac{U_m \,.\, k_f}{f_m}$, $\Delta_f = U_m \,.\, k_f$

On peut aussi estimer la bande passante effective d'un signal modulé FM à l'aide du nombre des harmoniques significatives k pour lequel $|J_k(\beta)| \geq 0{,}01$: $B \approx 2 \,.\, k \,.\, f_m$

Corrigé de l'exercice 4 :

Un analyseur de spectre permet d'obtenir la représentation d'un spectre sur un écran. Le spectre d'un signal AM, branché à un analyseur de spectre, est représenté ci-contre :

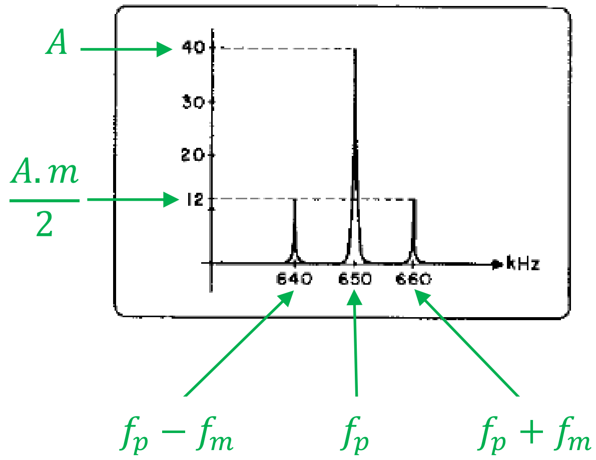

Figure 5 : Représentation du spectre d'un signal AM

1. **D'après la figure 5, la fréquence de la porteuse correspond à la raie centrale du spectre en question d'amplitude A** :

$$\boldsymbol{f_p = 650\ KHz}$$

2. **La fréquence de l'onde modulante peut être déduite de l'une des fréquences des raies latérales de ce spectre d'amplitude $\frac{A.m}{2}$** :

$$f_p + f_m = 660\ KHz \quad \rightarrow \quad f_m = 660\ KHz - f_p = 660\ KHz - 650\ KHz$$

Donc : $\boldsymbol{f_m = 10\ KHz}$

3. **La bande de fréquence occupée par le signal AM se calcule comme suit** :

$$B = (f_p + f_m) - (f_p - f_m) = 2\,.\,f_m = 2\,.\,10\ KHz$$

$$\boldsymbol{B = 20\ KHz.}$$

4. **D'après la représentation de la figure 5 ci-dessus, le taux de modulation peut se déduire à partir des amplitudes des raies de ce spectre** :

$$\begin{cases} A = 40 \\ \dfrac{A.m}{2} = 12 \end{cases}$$

$$m = \frac{2\,.\,12}{A} = \frac{24}{40} \qquad d'où : \quad \boldsymbol{m = 0{,}6}$$