

На правах рукописи



Месенёв Павел Ростиславович

**Оптимизационные методы решения обратных задач
сложного теплообмена**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Владивосток — 2025

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Дальневосточный федеральный университет».

Научный руководитель: **Чеботарев Александр Юрьевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Шишленин Максим Александрович**,
доктор физико-математических наук, профессор РАН,
ФГУБН Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заместитель директора по науке.

Максимова Надежда Николаевна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО Амурский государственный университет,
зав. кафедрой математического анализа и моделирования.

Ведущая организация: **ФГБУН Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН**

Защита состоится **DD mmmmmmmmm YYYU г. в XX часов** на заседании диссертационного совета **Д123.456.78** при **Название учреждения** по адресу: **Адрес**.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке **Название библиотеки**.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: **Адрес**, ученому секретарю диссертационного совета **Д123.456.78**.

Автореферат разослан **DD mmmmmmmmm2025** года.

Телефон для справок: **+7 (0000) 00-00-00**.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д123.456.78,
д-р физ.-мат. наук

Фамилия Имя Отчество

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Под сложным теплообменом понимают процесс распространения тепла излучением, теплопроводностью и конвекцией. При этом важно, что радиационный перенос тепла дает существенный вклад в распределение температурного поля. Для многих инженерных приложений моделирование процессов теплопередачи имеет первостепенное значение (например, это относится к радиационному теплообмену в полупрозрачных материалах). Температура – важнейший параметр практически во всех производственных этапах. Следовательно, знание температурных полей необходимо для контроля производственных процессов и качества результата.

С математической точки зрения процесс сложного теплообмена моделируется системой уравнений с частными производными, включающей уравнение теплопроводности, а также интегро-дифференциальное уравнение переноса теплового излучения. Теоретический и численный анализ различных задач для такой системы является весьма затратным поскольку интенсивность излучения зависит не только от пространственной и временной переменных, но и от направления распространения излучения. Имеется ряд аппроксимаций уравнения переноса излучения, в том числе диффузионное P_1 -приближение, в котором интенсивность излучения усредняется по направлениям. P_1 -приближение является частным случаем метода сферических гармоник (P_N -приближения) и упрощенного метода сферических гармоник (SP_N -приближения). В данной работе рассмотрены модели, основанные на P_1 -приближении.

В классических прямых задачах сложного теплообмена задаются параметры системы, и по ним вычисляется состояние системы – температурное поле и интенсивность теплового излучения. Обратные задачи сложного теплообмена состоят в нахождении неизвестных параметров системы по некоторой дополнительной информации (условия переопределения) о температурном поле или интенсивности излучения. Методы, основанные на решении обратных задач, продолжают оставаться актуальным, быстро развивающимся направлением исследований.

Отметим трудности, возникающие при решении обратных задач сложного теплообмена. Эти задачи математически классифицируются как некорректные в общем смысле из-за неустойчивости решений. Развитие методов оптимизации позволяет исправить проблемы некорректности исследуемых задач. В основе таких методов лежит идея замены исходной задачи на задачу оптимизации и фактически использует методику А. Н. Тихонова регуляризации задачи.

Диссертация посвящена теоретическому и численному анализу, одному из наиболее распространенных на практике типу обратных задач

– граничных обратных задач сложного теплообмена в трёхмерной области в рамках P_1 -приближения уравнения переноса излучения. При этом основное внимание уделяется разработке и обоснованию оптимизационных методов решения указанных задач. Исследование обратных задач для математических моделей радиационного теплопереноса, учитывающих одновременно вклад эффектов теплопроводности и излучения, даёт теоретическую основу для эффективных инженерных решений в различных областях, таких как производство стекла, лазерная термотерапия и другие.

Степень разработанности темы исследования. Имеется значительное число работ, посвященных теоретическому анализу моделей сложного теплообмена. Результаты А. А. Амосова, М. Laitinen, Т. Tihihonen, Р.-Е. Druet и др. посвящены анализу разрешимости моделей сложного теплообмена, которые включают уравнение теплопроводности с нелинейным нелокальным краевым условием, моделирующим тепловое излучение границы области и теплообмен излучением между частями границы, как стационарный так и не стационарные.

В работах F. Asllanaj (2003), С. Т. Kelley (1996), М. Ghattassi (2018), М. Porzio (2004), М. Thompson (2004) доказана однозначная разрешимость различных задач радиационно-кондуктивного теплообмена. В работах R. Pinnau, O. Tse (2007–2013) проведен теоретический анализ квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе SP_1 - и SP_3 -приближений. Эти модели включают уравнение теплопроводности, стационарное SP_N -приближение, а также в уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска. В работах Г. В. Гренкина, А. Е. Ковтанюка, А. Ю. Чеботарева (2014–2022) доказана однозначная разрешимость краевых задач для моделей сложного теплообмена на основе P_1 -приближения, доказана сходимость метода простой итерации нахождения решения.

В книге М. F. Modest (2013) можно найти подробный обзор различных численных методов решения задач сложного теплообмена.

Отдельно приведем исследования, посвященные обратным задачам сложного теплообмена. Работы О. М. Алифанова, посвященные обратным задачам сложного теплообмена, оказали значительный вклад в развитие этой области. J. V. Beck (1985) предложил новые подходы к решению обратных задач, основанных на методах оптимизации и статистическом анализе. Отметим серьезный теоретический анализ обратных задач тепломассопереноса, представленный в работах С. Г. Пяткова (2019–2023) и его учеников.

Несмотря на представленный в обзоре значительный объем исследований, включающий анализ обратных и обратных экстремальных задач, ряд важных задач, связанных с анализом корректности стационарных, квазистационарных и квазилинейных *моделей сложного теплообмена*, корректности постановок поиска квазирешений граничных обратных задач, *построением и обоснованием сходимости* оптимизационных

алгоритмов решения обратных задач и задач с краевыми условиями Коши, а также с *разработкой комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов* и тестирования предложенных алгоритмов оставался нерешенным. Настоящая работа посвящена решению указанных проблем.

Цели и задачи диссертационной работы. *Целью работы* Целью работы является разработка математических и численных методов решения обратных задач сложного теплообмена. Это включает в себя как теоретическое обоснование, так и разработку алгоритмов и программных комплексов, которые позволяют эффективно решать рассматриваемые задачи.

Для достижения целей работы были сформулированы следующие задачи:

1. доказать существование и единственность решения начально-краевой задачи для квазистационарной и квазилинейной моделей сложного теплообмена, разработать итерационный алгоритм нахождения решения и обосновать его сходимость;
2. получить условия существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на границе, вывести условия оптимальности первого порядка и получить численный алгоритм;
3. выполнить анализ оптимизационных методов решения задач сложного теплообмена с условиями Коши на границе для стационарной и квазистационарной моделей, исследовать разрешимость возникающих регуляризованных экстремальных задач, получить условия оптимальности, обосновать сходимость решений регуляризованных задач к решению задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю;
4. провести теоретический анализ обратных экстремальных задач с фазовыми ограничениями для квазилинейной модели сложного теплообмена, рассмотреть аппроксимации задачами с штрафными функционалами и доказать сходимость их решений при увеличении штрафа;
5. предложить численные методы решения рассматриваемых краевых и оптимизационных задач сложного теплообмена, адаптировать метод Ньютона и градиентные методы для их решения, реализовать полученные методы в виде программных систем, осуществить тестирование предложенных алгоритмов используя данные реальных сред и материалов, проверить средствами численного моделирования гипотезы об устойчивости предложенных алгоритмов и стабилизации решений.

Научная новизна. В работе получены новые априорные оценки решений начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных уравнений сложного теплообмена и доказана их нелокальная однозначная разрешимость. Для рассмотренных моделей сложного теплообмена рассмотрены новые постановки граничных обратных задач, предложены

оптимизационные методы их решения. Выполнен теоретический анализ возникающих новых экстремальных задач. Представлены априорные оценки решений регуляризованных задач и впервые обоснована сходимость их решений к точным решениям обратных задач. Для решения задач с фазовыми ограничениями, предложены алгоритмы, основанные на аппроксимации экстремальными задачами со штрафом. Разработаны и протестированы новые алгоритмы решения прямых, обратных и экстремальных задач для моделей сложного теплообмена.

Теоретическая и практическая значимость. Научная значимость результатов диссертации основана, с одной стороны, на решении открытых задач, связанных с корректностью моделей теплообмена, учитывающих тепловое излучение, теоретическим и численным анализом граничных обратных задач и задач оптимального управления. С другой стороны, развитие новых оптимизационных методов решения рассматриваемых нелинейных обратных задач является основой для анализа прикладных задач и задач проектирования систем с заданными экстремальными свойствами. Решение граничных обратных задач имеет практическое значение при выборе оптимальных параметров границы области, в которой происходит процесс сложного теплообмена. Задачи оптимизации имеют важное практическое применение при выборе параметров системы для получения необходимого распределения температуры или интенсивности теплового излучения. Необходимость выбора параметров системы возникает при проектировании инженерных установок, в которых присутствуют процессы сложного теплообмена. Теоретическая значимость работы обусловлена также тем, что результаты, связанные с корректностью рассматриваемых задач, сходимость предлагаемых численных алгоритмов имеют нелокальный характер и не содержат нефизичных ограничений типа малости определенных параметров. Представленный комплекс программ имеет открытый характер и может дополняться для решения прикладных обратных задач сложного теплообмена.

Методология и методы исследования. В работе широко использовались методы математического и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории экстремальных задач. Для разработки численных алгоритмов решения применялись методы вычислительной математики, объектно-ориентированное и функциональное программирование, методы оптимизации и другие. Методология исследования обратных задач, рассмотренных в работе, заключается в следующем. Предварительно выполняется теоретический анализ краевых или начально-краевых задач, моделирующих рассматриваемый процесс. Для построения оптимизационного алгоритма ставится экстремальная задача или задача оптимального управления для рассматриваемой модели сложного теплообмена и проводится ее теоретический анализ, включающий нахождение условий разрешимости и вывод

условий оптимальности. Для регуляризованных задач обосновывается сходимость последовательности их решений. Далее, на основе полученных условий оптимальности строится градиентный метод решения обратной задачи. Полученные алгоритмы реализуются в виде комплекса программ и теоретические результаты тестируются на численных примерах, иллюстрирующих эффективность предложенных методов.

Положения, выносимые на защиту.

В области математического моделирования:

1. Доказательство однозначной разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей квазистационарный сложный теплообмен в трехмерной области.
2. Доказательство однозначной разрешимости квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен с нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.
3. Обоснование существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на части границы и условием переопределения на другой части. Вывод необходимых условий оптимальности.
4. Вывод условий разрешимости экстремальных задач, аппроксимирующих решения граничных обратных задач (задач с условиями Коши на границе области) для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена.
5. Построение систем оптимальности и доказательство их невырожденности для задач оптимального управления стационарными, квазистационарными и квазилинейными уравнениями сложного теплообмена.

В области численных методов:

6. Численный алгоритм решения квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен и доказательство его сходимости.
7. Обоснование сходимости последовательности решений задач оптимального управления к решениям задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю.
8. Обоснование сходимости алгоритма решения экстремальных обратных задач с ограничениями температурных полей методом штрафа.

В области комплексов программ:

9. Программы, реализующие численное моделирование процессов сложного теплообмена на основе метода конечных элементов. Реализация и тестирование оптимизационных алгоритмов решения граничных обратных задач для стационарных, квазистационарных и квазилинейных моделей.
10. Численная проверка устойчивости задачи сложного теплообмена с граничными данными Коши для температуры и стабилизации решения начально-краевой задачи.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертации теоретических результатов основывается на использовании методов функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории оптимального управления распределенными системами и строгих математических доказательствах. Достоверность результатов численного моделирования обеспечивается доказательством сходимости предложенных итерационных процессов и тестированием разработанного комплекса программ.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах департамента математического и компьютерного моделирования ДВФУ, института прикладной математики ДВО РАН, института автоматизации и процессов управления ДВО РАН и на следующих научных конференциях:

- Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (Владивосток, 2018, 2019);
- Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics (Вычислительные технологии и прикладная математика, Владивосток, 2022);
- International Conference DAYS on DIFFRACTION (Санкт-Петербург, 2021, 2023);
- International Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing (Мюнхен, 2020, 2022).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 10 статьях, из них 4 статьи [1–4] в «Дальневосточном математическом журнале», индексируемом в ядре РИНЦ и в международных базах научного цитирования (MathSciNet, zbMATH), 1 статья [5] в трудах CEUR (Scopus), 1 статья [6] в «Journal of Physics: Conference Series» (Scopus), 2 статьи [7, 8] в Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (Web of Science, Scopus), 2 статьи [9, 10] в «Журнале вычислительной математики и математической физики» (Web of Science, Scopus, MathSciNet, zbMATH). Статьи [1–4, 9, 10] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ.

Получено 3 свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [11–13].

Личный вклад автора. Результаты в области математического моделирования получены совместно с научным руководителем. Результаты в области численных методов и комплексов программ получены автором самостоятельно.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, приводится обзор литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая

и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена анализу диффузионных моделей сложного теплообмена. В разделе 1.1 приведена модель сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения, а также её нормализованный вариант. Раздел 1.2 посвящен выводу модели переноса излучения в P_1 приближении. Интенсивность излучения I^* и фазовая функция P заменяются линейными приближениями по частоте соответствующих функций

$$I^*(x, \omega, t) = \varphi(x, t) + \Phi(x, t) \cdot \omega, \quad P(\omega, \omega') = 1 + A\omega \cdot \omega'.$$

В разделе 1.3 приведены определения функциональных пространств, вспомогательных утверждений и определений, которые используются в дальнейшем. Анализ моделей сложного теплообмена проводится в пространствах Лебега $H = L^2(\Omega)$ и Соболева $V = H^1(\Omega)$. Пространство H отождествляем с сопряженным пространством H' , так что $V \subset H = H' \subset V'$. Через $L^p(0, T; X)$ обозначаем пространство Лебега функций со значениями в банаховом пространстве X , $C([0, T]; X)$ — пространство функций, непрерывных на $[0, T]$, со значениями в X .

В разделе 1.4 приведены теоретические результаты для стационарной модели сложного теплообмена в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$, которая имеет вид краевой задачи для системы нелинейных эллиптических уравнений

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$a\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0. \quad (2)$$

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, κ_a — коэффициент поглощения. Постоянные a , b и α определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

где k — теплопроводность, c_v — удельная теплоемкость, ρ — плотность, σ — постоянная Стефана-Больцмана, n — показатель преломления, T_{\max} — максимальная температура в ненормализованной модели, $\kappa = \kappa_s + \kappa_a$ — коэффициент полного взаимодействия, κ_s — коэффициент рассеяния.

Раздел 1.5 посвящен квазистационарной модели сложного теплообмена. Данная модель описывает систему связанных уравнений в частных

производных, моделирующих квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен. Рассмотрена следующая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a(\partial_n\theta + \theta) &= r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \\ \theta|_{t=0} &= \theta_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Дано определение слабого решения, доказана лемма о существовании и единственности слабого решения, а также справедливости утверждений

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0, T; H),$$

где $[\theta]^s = |\theta|^s \cdot \text{sign } \theta$. Указанный результат используется в параграфе 2.3 при анализе оптимизационного метода для квазистационарной модели.

В разделе 1.6 рассмотрена квазилинейная модель сложного теплообмена, представленная начально-краевой задачей в ограниченной трехмерной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\sigma\partial\theta/\partial t - \text{div}(k(\theta)\nabla\theta) + b(\theta^3|\theta| - \varphi) = f, \quad (6)$$

$$-\text{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta(\varphi - \theta^3|\theta|) = g, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \quad (7)$$

$$k(\theta)\partial_n\theta + p(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \quad (8)$$

Приведено определение слабой формулировки задачи (6)–(8), даны априорные оценки решений и доказано существование решения начально-краевой задачи. Представлены достаточные условия единственности решения. Кроме того, предложен численный метод решения задачи (6)–(8) и доказана его сходимость.

Вторая глава посвящена исследованию граничных обратных задач для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена. При решении таких задач часто встречаются краевые условия для эллиптических или параболических уравнений, когда на границе (части границы) задаётся неизвестная функция и её нормальная производная (условия Коши).

В разделе 2.1 рассмотрена нормализованная стационарная модель, описывающая процесс радиационного теплопереноса в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ . Модель имеет следующий вид

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \quad (9)$$

и дополняется граничными условиями на $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, где части границы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ не имеют пересечений:

$$\begin{aligned}
\Gamma : a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) &= 0, \\
\Gamma_0 \cup \Gamma_2 : \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) &= 0, \\
\Gamma_1 : \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Функции γ, θ_b, β – являются известными. Неизвестная функция u характеризует отражающие свойства участка границы Γ_1 . Предполагается, что

$$0 < u_1 \leq u \leq u_2, \tag{11}$$

где u_1 и u_2 – заданные ограниченные функции.

Обратная задача заключается в отыскании тройки функций θ, φ, u по дополнительному условию $\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0$. Далее ставится задача нахождения квазирешения обратной задачи, которая состоит в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \tag{12}$$

на решениях краевой задачи (9)–(10) при ограничениях (11).

Для поставленной экстремальной задачи доказано существование решения, а также выведена система оптимальности, на котором основан численный алгоритм, представленный в разделе 4.2.

Раздел 2.2 содержит постановку задачи без краевых условий для интенсивности излучения. Предполагается, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ известно температурное поле и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b. \tag{13}$$

Оптимизационный метода решения краевой задачи (9), (13) заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления с «искусственными» краевыми условиями

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \tag{14}$$

Функция $r(x), x \in \Gamma$ является заданной, а неизвестная функция $u(x), x \in \Gamma$ играет роль управления. Экстремальная задача заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf \tag{15}$$

на решениях краевой задачи (9), (14). Функция $\theta_b(x), x \in \Gamma$ и параметр регуляризации $\lambda > 0$ заданы.

Доказана однозначная разрешимость краевой задачи (9), (14) и даны априорные оценки решения, которые далее используются для доказательства разрешимости оптимизационной задачи (9), (14), (15).

Обоснованием предложенного оптимизационного метода решения задачи с условиями Коши является следующий результат, который обосновывает аппроксимационные свойства задачи оптимального управления.

Теорема (2.5). Пусть выполняются условия $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$, $\theta_b, q_b \in L^2(\Omega)$, $r = a(\theta_b + q_b)$ и существует θ_*, φ_* – решение задачи (9), (13). Если $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ – решение задачи (9), (14), (15) для $\lambda > 0$, то существует последовательность $\lambda \rightarrow +0$ такая, что $\theta_\lambda \rightarrow \theta_*$, $\varphi_\lambda \rightarrow \varphi_*$ слабо в V , сильно в H .

В разделе 2.3 представлен аналогичный разделу 2.2 анализ оптимизационного метода решения задачи Коши для квазистационарной модели.

Ставится задача оптимального управления, доказывается существование решения оптимального управления и выводится система оптимальности. Представлено доказательство сходимости решений задачи оптимального управления к решению задачи с условиями Коши для температуры.

В разделе 2.4 рассмотрена стационарная задача сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы. В данном случае граница области состоит из двух участков, $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ так, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. На всей границе Γ задается тепловой поток q_b , но краевые условия для интенсивности излучения на Γ_2 не заданы. В качестве условия переопределения на Γ_1 , в дополнение к условию на φ , задается температурное поле θ_b :

$$\alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad x \in \Gamma_1. \quad (16)$$

Для постановки задачи управления, которая аппроксимирует поставленную задачу, вводится новая неизвестная функция $\psi = a\theta + b\varphi$. Полученная краевая задача имеет вид

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

$$a\partial_n\theta = q_b \text{ на } \Gamma, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \quad \theta = \theta_b \text{ на } \Gamma_1. \quad (18)$$

Здесь $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$, $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$.

Задача управления заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf, \quad (19)$$

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (20)$$

$$a\partial_n\theta + s\theta = q_b + s\theta_b, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r \text{ на } \Gamma_1, \quad (21)$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad \alpha\partial_n\psi = u \text{ на } \Gamma_2. \quad (22)$$

Здесь $\lambda, s > 0$ – регуляризующие параметры.

Для задачи оптимального управления доказано существование решения. Приведено доказательство того, что решения задачи оптимального управления аппроксимируют решение краевой задачи при $\lambda \rightarrow +0$.

Третья глава посвящена исследованию квазилинейных моделей. В разделе 3.1 рассмотрена задача оптимального управления для квазилинейных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена, моделирующих процесс внутривенной лазерной абляции в ограниченной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt \rightarrow \inf$$

на решениях начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi \\ -\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\theta = 0|_{\Gamma}, \quad \alpha \partial_n \varphi + 2^{-1} \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (24)$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*. \quad (25)$$

Здесь G_1 и G_2 подмножества Ω, θ представляют разницу между реальной температурой и температурой на границе, которая является постоянной. φ является интенсивностью излучения усредненной по всем направлениям, α – коэффициент диффузии фотонов, β – коэффициент поглощения, $k(\theta)$ является коэффициентом теплопроводности, $\sigma(x, t)$ является произведением удельной теплоемкости и плотности среды, u_1 описывает мощность источника тепла, u_2 – мощность источника теплового излучения. P – максимальная мощность источника, χ есть характеристическая функция той части среды, в которой он расположен, деленная на его объём.

Доказано существование решения задачи оптимального управления и даны априорные оценки решений. Для решения задачи с ограничением на температуру в области G_2 предложен метод, использующий функции со штрафом. Задача со штрафом заключается в минимизации функционала $J_\varepsilon(\theta)$, где

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\theta) &= \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dxdt, \\ \sigma \theta' + A(\theta) &= u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Оператор F определяется следующим образом:

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_* \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_*. \end{cases}$$

Показано, что при уменьшении штрафного параметра $\varepsilon \rightarrow +0$ решения задачи со штрафом сходятся к решению задачи оптимального управления.

В разделе 3.2 приведён анализ метода штрафных функций используемого для решения задачи оптимального управления с финальным наблюдением. Задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \rightarrow \inf,$$

на решениях начально-краевой задачи (23), (24) учётом следующих ограничений:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_b} \leq \theta_*.$$

Требуется обеспечить близость распределения температуры к желаемому температурному полю θ_d в конечный момент времени $t = T$ в подобласти G_d , при этом температура в подобласти G_b не должна превышать постоянного критического значения θ_* . Данная задача также сводится к задаче оптимального управления. Доказывается существование решения задачи оптимального управления, а также сходимости решений задачи со штрафом к решениям задачи оптимального управления.

В четвертой главе приведены разработанные численные методы решения прямых краевых задач сложного теплообмена и оптимизационные методы решения обратных задач.

В разделе 4.1 приводятся алгоритмы решения прямых стационарных задач. Для решения прямых задач используется метод Ньютона, который заключается в аппроксимации нелинейного слагаемого $|\theta|^3\theta$ выражением $\tilde{\theta}^4 + 4\tilde{\theta}^3(\theta - \tilde{\theta})$, где $\tilde{\theta}$ – приближение для температуры на предыдущей итерации. Решение линеаризованных дифференциальных уравнений осуществляется методом конечных элементов.

Приведем пример численного решения задачи (1)–(2) в области $\Omega = \{(x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ с параметрами, определёнными как $\gamma = 0.8 \cos(\frac{\pi}{2}z) + 0.5$, $\theta_b = 1 - y/2 + z/2$. Начальное приближение решения выбрано нулевым. Метод Ньютона при указанных параметрах сходится за шесть итераций. Полученные компоненты состояния представлены на рисунках 1. На рис. 1а представлено полученное температурное поле, на рис. 1б поле излучения.

В разделе 4.2 рассмотрены алгоритмы решения граничных обратных задач. Приведён пример реализации алгоритма градиентного спуска

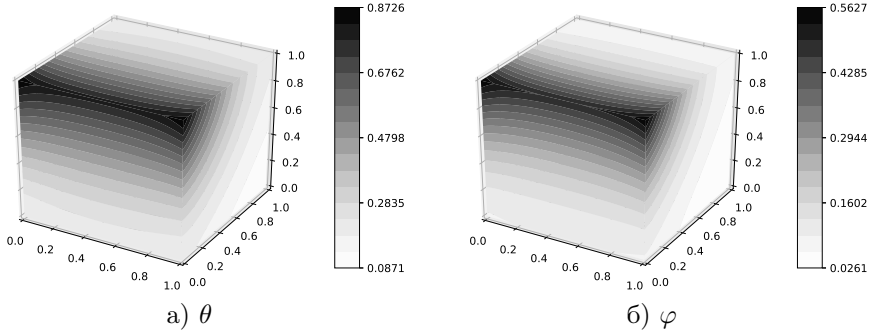


Рис. 1 — Решение граничной задачи в трёхмерной области

с проекцией в двумерном случае. Сам алгоритм является итерационным и состоит из решения прямой задачи с начальным приближением функции управления, численного решения сопряженной системы и пересчёта управления, используя градиент целевого функционала. Приведём пример решения задачи (9)–(11) с параметрами среды, соответствующими стеклу. Результаты работы алгоритма нахождения квазирешения обратной задачи представлены на рисунках 2.

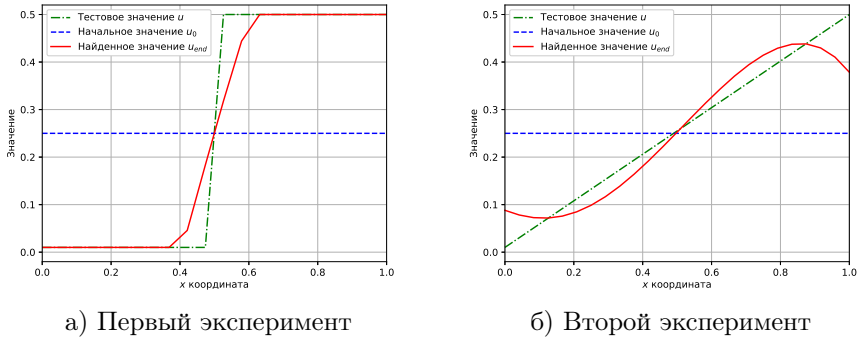


Рис. 2 — Тестовая функция u , начальная u_0 , найденная функция u_{end} .

Далее приводятся результаты работы алгоритма по решению задачи оптимального управления для квазистационарных и квазилинейных моделей.

Численное решение квазистационарной задачи с условием Коши, поставленной в разделе 2.3, сравнивается с решением, полученным в статье коллег из технического университета Мюнхена, которые предложили альтернативный подход к решению, с использованием конформных прямоугольных конечных элементов Богнера-Фокса-Шмидта. Полученные

решения практически совпадают, но предложенный в диссертации алгоритм существенно проще в реализации и быстрее сходится.

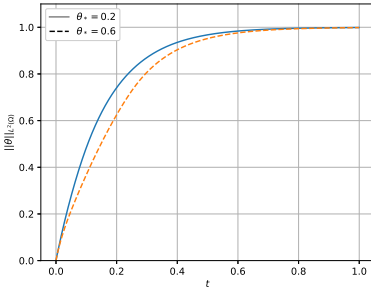
В рамках численного моделирования квазилинейной начально-краевой задачи (23)–(25) были поставлены эксперименты по влиянию коэффициента $k(\theta)$ на динамику температурного поля. В первом эксперименте параметр k определим как

$$k(\theta) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } \theta \leq \theta_*, \\ 1, & \text{если } \theta > \theta_*, \end{cases}$$

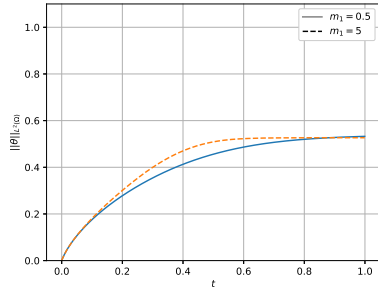
а также определим $\theta_b = 1$ на всей границе. Во втором эксперименте положим $\theta_b = (x + y)/2$ и

$$k(\theta) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } \theta \leq 0.5, \\ m_1, & \text{если } \theta > 0.5. \end{cases}$$

Иными словами, в первом эксперименте меняется пороговое значение для функции $k(\theta)$, а во втором величина скачка. Результаты экспериментов приведены на рисунке 3. На рисунке 4 видна разница распределения



а) Первый эксперимент

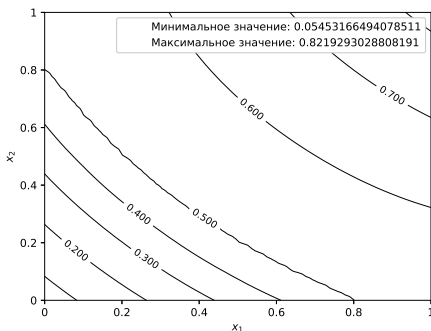


б) Второй эксперимент

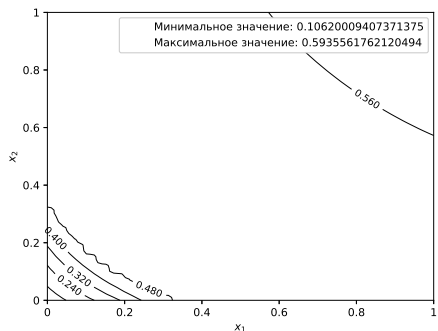
Рис. 3 — Влияние параметра $k(\theta)$ на норму температурного поля.

температурного поля во втором эксперименте. В первом эксперименте температурное поле θ равно единице на всей области в финальный момент времени T .

Несмотря на отсутствие соответствующего теоретического обоснования, полученные результаты численного моделирования позволяют говорить о стабилизации решения квазилинейной задачи с течением времени. На рисунке 5 показан модуль разности температурных полей между итерациями для первого эксперимента. Динамика разности температурного поля по времени в других поставленных экспериментах аналогичная.

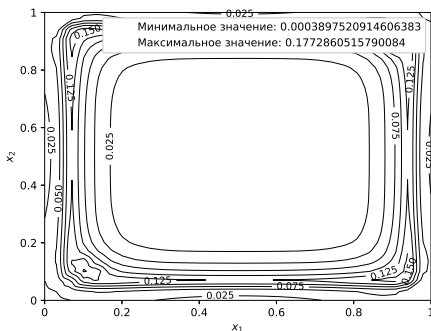


а) $m_1 = 0.5$,

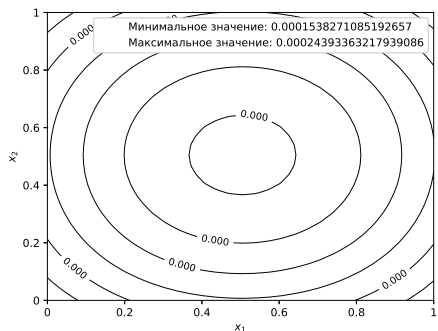


б) $m_1 = 5$.

Рис. 4 — Температурное поле $\theta(T)$



а) $|\theta|_{t=2} - \theta|_{t=3}|$,



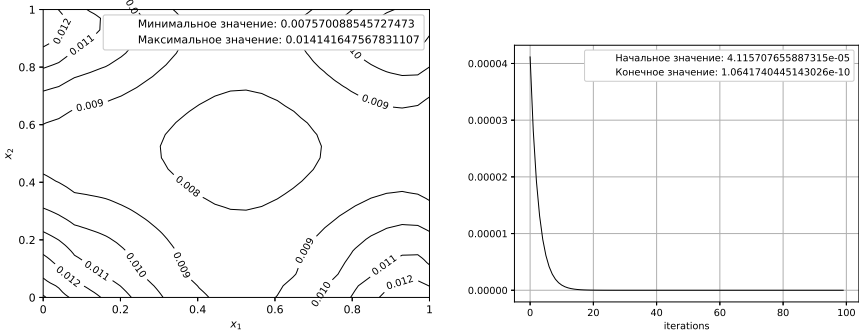
б) $|\theta|_{t=99} - \theta|_{t=100}|$.

Рис. 5 — Модуль разности θ по итерациям.

Алгоритмы решения задач с данными Коши, а также примеры численного моделирования подобных задач представлены в разделе 4.3. Сам алгоритм заключается в выборе начального приближения для управления и численного решения прямой задачи. Результаты решения прямой задачи используются для расчёта значения функционала качества, а также для вычисления значений решения сопряженной системы. Решение сопряженной системы используется при пересчёте управления, используя градиент функционала качества. Обновленное управление позволяет нам повторить описанную процедуру и получить итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления. Данный процесс повторяется до достижения некоторого заранее определённого значения функционала качества или же некоторое, заранее определённое количество итераций N .

Приведем пример численного моделирования. Для (9), (14) значения параметров среды выберем соответствующими стеклу. Определим граничные данные таким образом, что $r = 0.7$, $u = \hat{u} = 0.5$.

На рисунке 6а представлен модуль относительного отклонения $\partial_n \theta_\lambda$ от q_b на грани куба в плоскости $z = l$, где $\partial_n \theta_\lambda = \partial \theta_\lambda / \partial z$. На рисунке 6б приведена динамика функционала качества, определяющего норму разности $\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2$.



а) $|\partial_n \theta_\lambda - q_b|/|q_b|$ б) Значение функционала качества
Рис. 6 — Результаты решения задачи с данными Коши

Далее рассматривается алгоритм решения задачи сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы. Его отличие в том, что для постановки задачи управления вводится новая неизвестная функция ψ , как показано в разделе 2.4.1. Соответственно, алгоритм находит тройку θ, ψ, u из которой можно восстановить интенсивность излучения φ .

В первом примере рассматривается куб $\Omega = \{(x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq l\}$ с границей $\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z), 0 \leq x, y, \leq l, z \in [0, l]\}, \quad \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1.$$

Параметры среды также положим соответствующими стеклу. Параметр регуляризации $\lambda = 10^{-12}$. Граничные данные q_b и θ_b в (18) положим равными

$$q_b = 0.5, \quad \theta_b = 0.1 + z/2$$

на всей границе, а также начальное управление $u_0 = 0$.

Полученные результаты представлены на рисунке 7.

Во втором примере рассматривается квадрат $S = \{(x, y), 0 \leq x, y, z \leq 1 \text{ см.}\}$ с круговой полостью R с центром $b_0 = \{0.5, 0.5\}$ $R = \{r, \|r - b_0\| \leq 0.15 \text{ см.}\}$. Рассматриваемая область $\Omega = S \setminus R$. $\Gamma \equiv \partial\Omega = \partial C \cup \partial B$ при этом

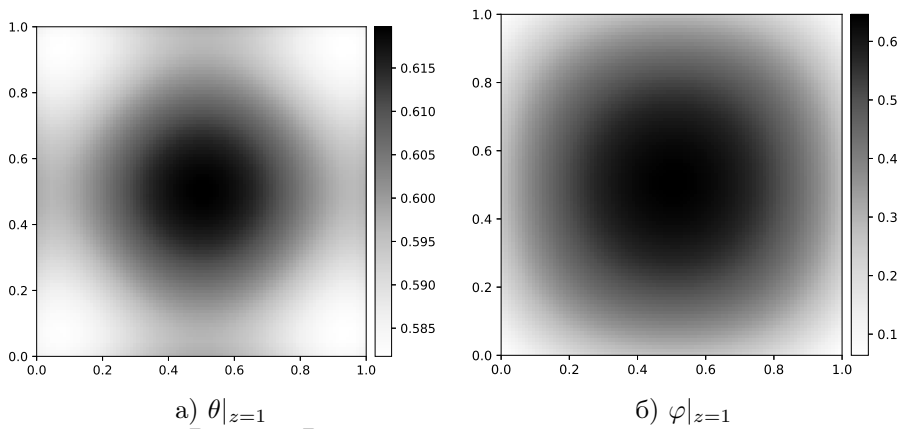


Рис. 7 — Результаты первого эксперимента

$\Gamma_2 = \partial R, \Gamma_1 = \partial S \setminus \Gamma_2$. Граничные данные q_b и θ_b положим равными

$$\theta_b = 0.5, \quad q_b = \begin{cases} 0.2, & \text{если } x \in \Gamma_1, \\ -0.2, & \text{если } x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Начальное значение функционала качества 0.045 после тридцати итераций становится равным $6.2 \cdot 10^{-5}$. Полученное состояние представлено рисунками 8.

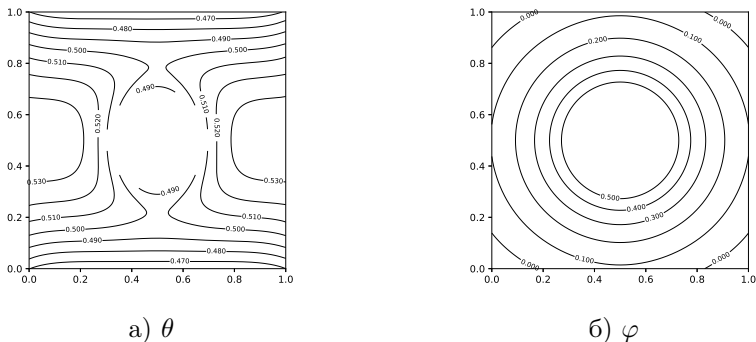


Рис. 8 — Результаты второго эксперимента

Представленные численные примеры демонстрируют, что предложенный алгоритм успешно справляется с нахождением численного решения задачи с данными Коши для температуры на части границы.

Также приведем результаты по исследованию устойчивости решений обратных задач с данными Коши. Для этого переопределим в уравнении (18) $a\partial_n\theta = q_b + \varepsilon\psi$, где $\psi = \psi(x), x \in \Gamma_1$ некоторая функция, моделирующая возмущение. Полученное таким образом решение задачи (17), (18) обозначим за θ^ε . Следовательно, θ будет соответствовать случаю $\varepsilon = 0$. Для проведения численного моделирования область Ω определим как квадрат с единичной стороной, где Γ_1 соответствует стороне $y = 1$. Положим $\theta_b = (x + y)/2$ и $q_b = a/2$ соответственно. Выполним расчеты температурного поля для различных малых значений параметра возмущений ε из промежутка $[-0.1, 0.1]$ и вычислим L^2 норму отклонения возмущенного поля.

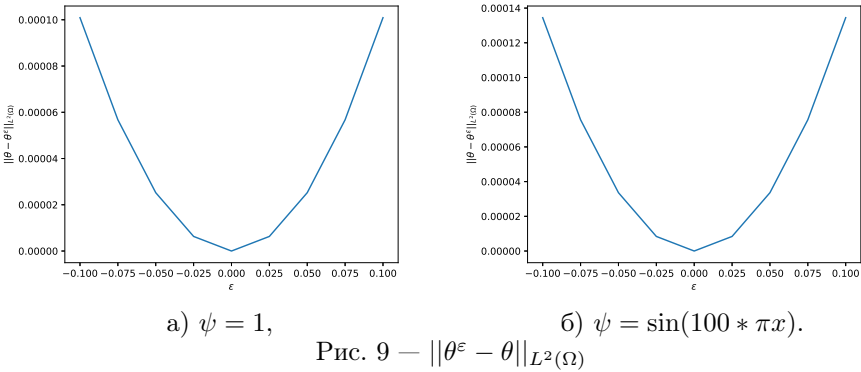


Рис. 9 — $||\theta^\varepsilon - \theta||_{L^2(\Omega)}$

Численные эксперименты демонстрируют устойчивость решения относительно изменений теплового потока (см. рисунок 9).

В заключении указано, что в диссертации, в соответствии с паспортом специальности 1.2.2, представлен математический анализ диффузионных моделей сложного теплообмена, предложены новые постановки обратных задач, разработаны оптимизационные методы решения обратных задач, основанные на понятии квазирешения и сведения рассмотренных задач к задачам оптимального управления. Разработаны и программно реализованы новые алгоритмы решения прямых, обратных и экстремальных задач для моделей сложного теплообмена.

Кроме того, представлены новые априорные оценки решений начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных уравнений сложного теплообмена и доказана их нелокальная однозначная разрешимость. Выполнен теоретический анализ возникающих новых экстремальных задач. Получены априорные оценки решений регуляризованных задач и обоснована сходимость их решений к точным решениям

обратных задач. Для решения задач с фазовыми ограничениями, предложены алгоритмы, основанные на аппроксимации экстремальными задачами со штрафом.

Указанные результаты могут быть полезны при дальнейшем использовании моделей сложного теплообмена и анализе обратных задач сложного теплообмена. Развитые методы исследования краевых, начально-краевых и экстремальных задач могут применяться для изучения различных моделей, описываемых нелинейными уравнениями типа реакции-диффузии. Численные алгоритмы решения задач оптимизации сложного теплообмена могут использоваться для выбора оптимальных характеристик процессов теплообмена.

Все рассмотренные в работе типы задач логически связаны следующим образом. Теоретический анализ математических моделей сложного теплообмена, представленный в первой главе, является основой для исследования оптимизационных методов решения обратных задач во второй и третьей главах. Соответственно, полученные там условия оптимальности дают возможность представить численные алгоритмы решения сформулированных задач и численно реализовать их в главе 4.

Конечно же, автору не удалось рассмотреть все важные вопросы в теории и методах решения обратных задач сложного теплообмена. Ряд постановок, которые можно будет исследовать на основе предложенной методики, ожидает своего решения, в том числе и в связи с вопросами нахождения наиболее эффективных механизмов и способов управления теплофизическими полями.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ

- [1] P. R. Mesenev. — «Optimization method for solving the inverse problem of complex heat transfer». — В: *Дальневост. матем. журн.* 23.1 (2023), с. 81—84. — URL: <http://mi.mathnet.ru/dvmg508>.
- [2] A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev и A. E. Kovtanyuk. — «Penalty method to solve an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation». — В: *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 22 (2022), с. 158—163.
- [3] A. Yu. Chebotarev и P. R. Mesenev. — «An algorithm for solving the boundary value problem of radiation heat transfer without boundary conditions for radiation intensity». — В: *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (июнь 2020), с. 114—122. — URL: <http://dx.doi.org/10.47910/FEMJ202012>.

- [4] P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev. — «A boundary inverse problem for complex heat transfer equations». — В: *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 18.1 (2018), с. 75—84.
- [5] Alexander Chebotarev, Andrey Kovtanyuk, and Pavel Mesenev. — “Optimization algorithm for radiative-conductive heat transfer model with boundary conditions of Cauchy type”. — In: *MMSC 2020 - Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems – Dedicated to the Memory of Nikolai Botkin*. — Vol. 2783. — Munich, Germany: CEUR WORKSHOP PROCEEDINGS, Nov. 2020, — P. 29—40.
- [6] A Yu Chebotarev, N M Park, P R Mesenev и A E Kovtanyuk. — «Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation». — В: *Journal of Physics: Conference Series* 2514.1 (май 2023), с. 012006. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2514/1/012006>.
- [7] Alexander Chebotarev, Andrey Kovtanyuk, Nikolai Park и Pavel Mesenev. — «Optimal control with phase constraints for a quasilinear endovenous laser ablation model». — В: *2021 Days on Diffraction (DD)*. — IEEE, май 2021, — С. 19—24. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/DD52349.2021.9598691>.
- [8] Alexander Chebotarev, Pavel Mesenev и Andrey Kovtanyuk. — «Inverse problem with unknown sources for a quasi-linear complex heat transfer model». — В: *2023 Days on Diffraction (DD)*. — IEEE, июнь 2023, — С. 31—35. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/DD58728.2023.10325734>.
- [9] П. Р. Месенев и А. Ю. Чеботарев. — «Задача сложного теплообмена с условиями типа Коши на части границы». — В: *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 63.5 (2023), с. 856—863. — URL: <http://mi.mathnet.ru/zvmmf11560>.
- [10] P R Mesenev and A Yu Chebotarev. — “Analysis of an optimization method for solving the problem of complex heat transfer with Cauchy boundary conditions”. — In: *Comput. Math. Math. Phys.* 62.1 (Jan. 2022), p. 33—41.

В изданиях, входящих в международную базу цитирования Scopus

- [5] Alexander Chebotarev, Andrey Kovtanyuk, and Pavel Mesenev. — “Optimization algorithm for radiative-conductive heat transfer model with boundary conditions of Cauchy type”. — In: *MMSC 2020 - Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems – Dedicated to the Memory of Nikolai Botkin*. — Vol. 2783. — Munich, Germany: CEUR WORKSHOP PROCEEDINGS, Nov. 2020, — P. 29—40.

- [6] A Yu Chebotarev, N M Park, P R Mesenev и A E Kovtanyuk. — «Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation». — В: *Journal of Physics: Conference Series* 2514.1 (май 2023), с. 012006. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2514/1/012006>.
- [7] Alexander Chebotarev, Andrey Kovtanyuk, Nikolai Park и Pavel Mesenev. — «Optimal control with phase constraints for a quasilinear endovenous laser ablation model». — В: *2021 Days on Diffraction (DD)*. — IEEE, май 2021, — С. 19–24. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/DD52349.2021.9598691>.
- [8] Alexander Chebotarev, Pavel Mesenev и Andrey Kovtanyuk. — «Inverse problem with unknown sources for a quasi-linear complex heat transfer model». — В: *2023 Days on Diffraction (DD)*. — IEEE, июнь 2023, — С. 31–35. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/DD58728.2023.10325734>.
- [9] П. Р. Месенев и А. Ю. Чеботарев. — «Задача сложного теплообмена с условиями типа Коши на части границы». — В: *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 63.5 (2023), с. 856–863. — URL: <http://mi.mathnet.ru/zvmmf11560>.
- [10] P R Mesenev and A Yu Chebotarev. — “Analysis of an optimization method for solving the problem of complex heat transfer with Cauchy boundary conditions”. — In: *Comput. Math. Math. Phys.* 62.1 (Jan. 2022), p. 33–41.

Зарегистрированные программы для ЭВМ

- [11] П. Р. Месенев. — «Солвер обратной задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши». — Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет». — 25 сент. 2023.
- [12] П. Р. Месенев. — «Программа для нахождения квазирешения обратной задачи сложного теплообмена с дополнительным температурным условием на границе». — Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет». — 1 марта 2024.
- [13] П. Р. Месенев. — «Программа для решения граничной обратной задачи сложного теплообмена с переопределением на части границы». — Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет». — 4 апр. 2024.

В сборниках трудов конференций

- [5] Alexander Chebotarev, Andrey Kovtanyuk, and Pavel Mesenev. — “Optimization algorithm for radiative-conductive heat transfer model with boundary conditions of Cauchy type”. — In: *MMSC 2020 - Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems – Dedicated to the Memory of Nikolai Botkin*. — Vol. 2783. — Munich, Germany: CEUR WORKSHOP PROCEEDINGS, Nov. 2020, — P. 29—40.
- [6] A Yu Chebotarev, N M Park, P R Mesenev и A E Kovtanyuk. — «Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation». — В: *Journal of Physics: Conference Series* 2514.1 (май 2023), с. 012006. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2514/1/012006>.
- [7] Alexander Chebotarev, Andrey Kovtanyuk, Nikolai Park и Pavel Mesenev. — «Optimal control with phase constraints for a quasilinear endovenous laser ablation model». — В: *2021 Days on Diffraction (DD)*. — IEEE, май 2021, — С. 19—24. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/DD52349.2021.9598691>.
- [8] Alexander Chebotarev, Pavel Mesenev и Andrey Kovtanyuk. — «Inverse problem with unknown sources for a quasi-linear complex heat transfer model». — В: *2023 Days on Diffraction (DD)*. — IEEE, июнь 2023, — С. 31—35. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/DD58728.2023.10325734>.
- [14] Месенев П. Р. — «Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена». — В: *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам*. — Владивосток, Россия: Дальневосточный федеральный университет, апр. 2018.

В прочих изданиях

- [14] Месенев П. Р. — «Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена». — В: *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам*. — Владивосток, Россия: Дальневосточный федеральный университет, апр. 2018.

Месенёв Павел Ростиславович

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____

