1 слайд.

Здравствуйте коллеги, выступает Месенев Павел. Представляю доклад по теме диссертации на соискание кандидата наук "оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена".

Мотивация

Интерес к обратным задачам теплообмена вызван широкой применимостью рассматриваемых моделей в области инженерных приложений. Данные модели широко применяются при моделировании и оптимизации производства стекла, камер сгорания гозовых турбин, лазерной термотерапии и так далее. Иными словами, любой процесс, сопряженный с высокими температурами.

как следствие имеется значительное число работ, посвященных теоретическому анализу моделей сложного теплообмена.

- Амосов, Laiitinen, Druet, Tiihonen – исследовали разрешимость краевых и начально-краевых задач с полным уравнением переноса излучения.

- Rene Pinnau, Oliver Tse предоставили теоретический анализ квазистационарных моделей для SP_1, SP_3–приближений.

- В работах Чеботарёва, Ковтанюка Гренкина доказана однозначная разрешимость краевых задач на основе P_1 приближений.

- Также необходимо упомянуть серьёзный теоретический анализ обратных задач теплообмена в работах Сергея Григорьевича Пяткова и его научной группы.

Тем не менее ряд важных вопросов, связанных с анализом корректности стационарных, квазистационарных и квазилинейных моделей, построением и обоснованием сходимости оптимизационных алгоритмов решения обратных задач и задач с краевыми условиями Коши, разработкой программ для проведения численных экспериментов остаются открытыми. Данная работапосвящена решению указанных проблем.

Положения, выносимые на защиту

В работе рассматриваются диффузионные модели сложного теплообмена в рамках так называемого $_1$ приближения уравнения переноса излучения, где функция, описывающая тепловое излучение является интенсивностью излучения, усредненной по всем направлениям.

Модели представляют собой нелинейные системы уравнений с частными производными.

Граничные обратные задачи возникают в ситуациях, когда неизвестны отражающие свойства границы или ее части и требуется их найти, используя дополнительную информацию о температурном поле. Близкие к ним задачи с условиями Коши на границе для температуры (терминология акад. М.М.Лаврентьева) возникают когда нет инфомации о поведении интесивности излучения на границе.

В области анализа рассмотренных математических моделей:

Граничная обратная задача

Первая из рассматриваемых задач формулируется следующим образом: дана некая область омега, на части её границы неизвестен параметр среды u, характеризирующий отражающие свойства границы. Сам параметр выражается как $(\frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)})$, где ε меняется в диапазоне от 0 до 1, как следствие на сам параметр накладывается ограничение, такое что $u \in [0, 0.5]$.

Степень черноты не зависит от направления и определяется формулой $\varepsilon_\nu(x) = \frac{I_{\nu,\text{исп}}(x)}{I_{b\nu}(T(x))}$, где $I_{\nu,\text{исп}}(x)$ – интенсивность излучения, испускаемого поверхностью при температуре $T(x)$ [**?**, 53]. Требуется отыскать тройку: температурное поле, поле излучения и неизвестный параметр по дополнительной информации о температуре на границе. Вопрос о корректности сформулированной обратной задачи является открытым (как её решать тоже вопрос открытый). Предлагается заменить обратную задачу на задачу оптимального управления, которая состоит в минимизации функционала (**??**). Решение данной экстремальной задачи называется квазирешением обратной задачи. Для нахождения квазирешения был разработан оптимизационный численный метод.

Постоянные a (температуропроводность $^2/$), b(коэффициент радиационного переноса) и α (Эффективный коэффициент оптического взаимодействия) определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

где k – теплопроводность $(Vt/(m \cdot K) = Dj/(m \cdot c \cdot K))$, c_v – удельная теплоемкость, ρ – плотность, σ – постоянная Стефана-Больцмана $(5.67 \cdot 10^{-8} Vt/(m^2 \cdot K^4))$, n – показатель преломления, $T_{\max}$ – максимальная температура в ненормализованной модели, $\kappa = \kappa_s + \kappa_a$ – коэффициент полного взаимодействия, κ_s – коэффициент рассеяния, κ_a – коэффициент поглощения.

Нахождение квазирешения обратной задачи

Предложенный в работе алгоритм поиска квазирешения обратной задачи основан на выведенных условиях оптимальности (доказано, что квазирешение должно удовлетворять (**??**)–(**??**)), куда входят сопряженные функции для температуры p_1 и излучения p_2, а также связь между сопряженным состоянием и искомым граничным управлением. Для компактной записи краевых задач, используется современная операторная форма. Система (**??**) является операторной записью краевой задачи, где $A_{1,2}$ описывают диффузионные члены модели, остальные моделируют граничные условия. Уравнения (**??**)–(**??**) это сопряженная система, а вариационное неравенство (**??**) устанавливает связь с оптимальным управлением.

Приведём алгоритм градиентного спуска с проекцией. Обратим внимание, что оператор проекции нужен из-за начальных ограничений на функцию управления (вызванных физичностью параметра, например).

Отметим, что в силу невыпуклости экстремальной задачи градиентные алгоритмы не обладают свойством глобальной сходимости, что служит основой для их критики, зачастую заслуженной.

Однако свойства диффузионных моделей сложного теплообмена представленные в диссертации и правильный выбор шага градиентного метода обеспечивают сходимость для рассматриваемых задач. Следующие примеры этот факт демонстрируют.

Модель управления температурным полем через граничный параметр

Положим параметры среды, соответствующие стеклу и зададим тестовую функцию управления как показано на слайде. Пластинка, у которого боковые стороны ‘обычные’, верхняя грань - участок наблюдения, нижняя грань - участок под “контролем”.

Модель управления температурным полем через граничный параметр

Интересный эффект "среднего значения". Большое количество итераций. Обратить внимание на функционал качества. Для получения представленных результатов, использовался разработанный мной комплекс программ, включающий решение прямой задачи, сопряженной системы и алгоритм градиентного спуска.

Обратная задача с условиями типа Коши

Задача без краевых условий для интенсивности излучения

Не задано φ! В основе разработанного алгоритма решения лежит анализ экстремальной задачи.

Строго обосновано существование решения экстр задачи. Кроме того, и это принципиально важно, показана сходимость решений экстремальных задач к решению начально-краевой задачи без краевых условий для интенсивности излучения при λ стремящемся к 0.

Пример 1

Обратите внимание на малость функционала качества. Сравним с тем, что получилось – довольно близко, но не идеально. Уменьшение параметра регуляризации повышает точность решения, но и увеличивает вычислительные затраты.

Пример 2

"Честный"эксперимент - используем то, что полагается в исходной задаче. Функционал качества (его динамика) позволяет предположить аналогичный порядок близости (с предыдущим примером) точного и аппроксимированного решений. Обратите внимание на линейность θ_b по оси z.

Квазистационарная задача с данными Коши

Аналог стационарной задачи с небольшими сдвигами по времени. Для оптимизационного метода решения задачи требуются результаты анализа кв.стц. модели из гл. 1! параметр u неизвестен.

Численное моделирование

Приведены изображения сравнения полученных результатов в рамках работы над диссертацией и коллег из Мюнхена (финальный момент времени) Параметры среды соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400С.

N.Botkin для расчетов использовал, разработанную в TUM программу, использующую эрмитов прямоугольный (конформный) элемент Богнера-Фокса-Шмидта и сведение задачи к нестационарной. Не ясно, что же такое случилось с пространством решений, что потребовались столь экзотические конечные элементы.

Фактически ему пришлось решать краевую задачу для нелинейного уравнения 4 порядка. Предложенный в работе оптимизационный алгоритм является более простым и дает фактически те же результаты. Использовались конечные элементы Галёркина (Лагранжа-1).

Стационарная задача с условиями Коши на части границы

Рассмотрим случай если на всей границе известен поток, а параметр из граничного условия для φ неизвестен. Мы дополняем "доступный"участок информацией о температуре: θ_b. Если данные Коши заданы на части границы задача является ещё более сложной. Для точной постановки нет результатов по её корректности. Однако предлагаемый далее оптимизационный метод полностью теоретически обоснован и лежит в основе соответствующего программного комплекса для численного решения.

Постановка задачи оптимального управления

Используя замену, представленную на слайде, мы заменим исходную задачу, на краевую задачу с функциями θ, ψ. Вместо системы двух нелинейных уравнений одно уравнение стало линейным (для Ψ) (!!!Где нелинейность в исходной задаче!!!) Два нелинейных заменили на нелинейное и линейное (пси - гармоническая, к тому же). Особо обратим внимание на параметр s, который пришлось добавить в данную постановку из-за того, что реализованный алгоритм не сходился. (Потеря точности решения.?)

Расчёты выполнены при лямбда равной нулю.

Численное моделирование стационарной модели с условиями Коши на части границы

Квадрат с полостью внутри (недоступная среда).

Исследование устойчивости решений обратных задач с данными Коши

Также приведем результаты по исследованию устойчивости решений обратных задач с данными Коши. Для этого переопределим в уравнении (**??**) $a\partial_n\theta = q_b + \varepsilon\psi$, где $\psi = \psi(x), x \in \Gamma_1$ некоторая функция, моделирующая возмущение. Полученное таким образом решение задачи (**??**), (**??**) обозначим за θ^ε. Следовательно, θ будет соответствовать случаю $\varepsilon = 0$. Для проведения численного моделирования область Ω определим как квадрат с единичной стороной, где Γ_1 соответствует стороне $y = 1$. Положим $\theta_b = (x+y)/2$ и $q_b = a/2$ соответственно. Выполним расчеты температурного поля для различных малых значений параметра возмущений ε из промежутка $[-0.1, 0.1]$ и вычислим L^2 норму отклонения возмущенного поля.

Хорошо известно, что решение задачи с данными Коши на границе для одного эллиптического уравнения, напр. уравнения Лапласа, неустойчиво (знаменитый пример Адамара, когда малые изменения теплового потока на границе приводят к большим изменениям решения). Для рассматриваемой новой модели сложного теплообмена с данными Коши теоретический анализ устойчивости это открытая проблема.

На первом этапе этот вопрос был исследован численно с использованием разработанного комплекса программ.

Полученные численные результаты позволяют высказать гипотезу об устойчивости решения этой модели, которую в дальнейшем планируется обосновать аналитически.

Квазилинейные модели

Задачи оптимального управления с ограничениями на состояние системы и метод штрафа

Дана область, в ней две подобласти. Мы хотим в одной достичь определенного температурного режима, в другой хотим не допустить превышения заранее заданного ограничения. P – максимальная мощность источника, α – коэффициент диффузии фотонов, Hi есть характеристическая функция той части среды, в которой он расположен, деленная на его объём. β – коэффициент поглощения, $k(\theta)$ является коэффициентом теплопроводности, σ является произведением удельной теплоемкости и плотности среды, u_1 описывает мощность источника тепла, u_2 – мощность источника теплового излучения.

Главная проблема здесь-наличие ограничения на температуру в области G_2. Для ее преодоления рассматривается задача со штрафом. Нарушение указанного ограничения штрафуется ростом функционала при малых значениях ϵ. Обоснована сходимость предложенного штрафного алгоритма к решению задачи с ограничениями на температуру при $\epsilon \to +0$.

Моделирование влияния коэффициента $k(\theta)$ на динамику температурного поля

В рассмотренной модели коэффициент теплопроводности зависит от неизвестной температуры (квазилинейность уравнения). Это позволяет моделировать эффекты переноса энергии в областях с высокой температурой. Разработанный комплекс программ позволяет оценить влияние этого коэффициента на динамику темп поля. температурного поля

Здесь показать анимацию.