

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»

По материалам диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук по специальности 1.2.2 Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

П. Р. Месенёв

Науч. руководитель: д. ф.-м. н., проф. А. Ю. Чеботарев

Владивосток, 2025

Интерес к изучению задач сложного теплообмена (одновременно учитываются радиационный, конвективный и кондуктивный факторы) обусловлен важностью для многих инженерных применений, связанных с высокими температурами: оценки эффективности систем охлаждения, моделирования теплопередачи в деталях газотурбинных двигателей, космической техники, летательных аппаратов, контроль тепловых процессов при производстве стекла и др.

О. М. Алифанов, J. V. Beck, М.А. Шишленин – упомянуть.

Интерес обусловлен важностью для многих инженерных применений, связанных с высокими температурами: оценки эффективности систем охлаждения, моделирования теплопередачи в деталях газотурбинных двигателей, космической техники, летательных аппаратов, контроль тепловых процессов при производстве стекла и др.

- Теоретическое исследование моделей сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения (А. А. Амосов, С. Т. Келли, М. Лайтинен, Т. Тийхонен, Р.-Е. Друэт и др.)
- Однозначная разрешимость различных задач радиационно-кондуктивного теплообмена (F. Asllanaj, M. Ghattassi, M. Porzio, M. Thompson и др.)
- Анализ квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе SP_1 и SP_3 -приближений (R. Pinnau, O. Tse)
- Однозначная разрешимость краевых задач для моделей сложного теплообмена (А. Ю. Чеботарев, А. Е. Ковтанюк, Г. В. Гренкин)
- Теоретический анализ обратных задач в рамках диффузионного приближения (С. Г. Пятков и др.)

Интерес обусловлен важностью для многих инженерных применений, связанных с высокими температурами: оценки эффективности систем охлаждения, моделирования теплопередачи в деталях газотурбинных двигателей, космической техники, летательных аппаратов, контроль тепловых процессов при производстве стекла и др.

- Теоретическое исследование моделей сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения (А. А. Амосов, С. Т. Kelley, M. Laitinen, T. Tiihonen, P.-E. Druet и др.)
- Однозначная разрешимость различных задач радиационно-кондуктивного теплообмена (F. Asllanaj, M. Ghattassi, M. Porzio, M. Thompson и др.)
- Анализ квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе SP_1 и SP_3 -приближений (R. Pinnau, O. Tse)
- Однозначная разрешимость краевых задач для моделей сложного теплообмена (А. Ю. Чеботарев, А. Е. Ковтанюк, Г. В. Гренкин)
- Теоретический анализ обратных задач в рамках диффузионного приближения (С. Г. Пятков и др.)

Цели и задачи работы

В работе рассматриваются диффузионные модели сложного теплообмена в рамках так называемого P_1 приближения уравнения переноса излучения, где функция, описывающая тепловое излучение является интенсивностью излучения, усредненной по всем направлениям.

Модели представляют собой нелинейные системы уравнений с частными производными. Граничные обратные задачи возникают в ситуациях, когда неизвестны отражающие свойства границы или ее части и требуется их найти, используя дополнительную информацию о температурном поле. Близкие к ним задачи с условиями Коши на границе для температуры (терминология акад. М.М.Лаврентьева) возникают когда нет информации о поведении интенсивности излучения на границе.

Цели работы являются теоретический и численный анализ граничных обратных задач, включая задачи с условиями типа Коши на границе области, и задач оптимального управления для моделей сложного теплообмена на основе P_1 -приближения уравнения переноса излучения

- исследование корректности моделей процессов сложного теплообмена, описываемых краевыми и начально-краевыми задачами для нелинейных квазистационарных и квазилинейных уравнений;
- разработка оптимизационных алгоритмов решения обратных задач и задач с краевыми условиями Коши, теоретический анализ и обоснование их сходимости;
- разработка комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов и тестирования предложенных алгоритмов;
- анализ свойств устойчивости и стабилизации процессов сложного теплообмена методами численного моделирования.

Цели и задачи работы

Цели и задачи работы

Целью работы является теоретический и численный анализ граничных обратных задач, включая задачи с условиями типа Коши на границе области, и задач оптимального управления для моделей сложного теплообмена на основе P_1 -приближения уравнения переноса излучения

- исследование корректности моделей процессов сложного теплообмена, описываемых краевыми и начально-краевыми задачами для нелинейных квазистационарных и квазилинейных уравнений;
- разработка оптимизационных алгоритмов решения обратных задач и задач с краевыми условиями Коши, теоретический анализ и обоснование их сходимости;
- разработка комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов и тестирования предложенных алгоритмов.
- Анализ свойств устойчивости и стабилизации процессов сложного теплообмена методами численного моделирования.

Положения, выносимые на защиту

Расписать актуальность и полезность полученных теоретических результатов в общем случае.

Расписать, где не удалось достичь всех результатов.

В области анализа рассмотренных математических моделей:

- Доказательство однозначной разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей квазистационарный сложный теплообмен в трехмерной области.
- Доказательство однозначной разрешимости квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен с нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.
- Обоснование существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на части границы и условием переопределения на другой части.
- Вывод условий разрешимости экстремальных задач, аппроксимирующих решения граничных обратных задач с условиями Коши на границе области для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена.
- Построение систем оптимальности и доказательство их невырожденности для задач оптимального управления стационарными, квазистационарными и квазилинейными уравнениями сложного теплообмена.

В области анализа рассмотренных математических моделей:

- Доказательство однозначной разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей квазистационарный сложный теплообмен в трехмерной области.
- Доказательство однозначной разрешимости квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен с нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.
- Обоснование существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на части границы и условием переопределения на другой части.
- Вывод условий разрешимости экстремальных задач, аппроксимирующих решения граничных обратных задач (задач с условиями Коши на границе области) для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена.
- Построение систем оптимальности и доказательство их невырожденности для задач оптимального управления стационарными, квазистационарными и квазилинейными уравнениями сложного теплообмена.

Положения, выносимые на защиту

Все рассмотренные в работе типы задач логически связаны следующим образом. Теоретический анализ математических моделей сложного теплообмена, представленный в первой главе, является основой для исследования оптимизационных методов решения обратных задач во второй и третьей главах. Соответственно, полученные там условия оптимальности дают возможность представить численные алгоритмы решения сформулированных задач и численно реализовать их в главе 4.

В области численных методов:

- Разработка численного алгоритма решения квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен и доказательство его сходимости.
- Обоснование сходимости последовательности решений задач оптимального управления к решению задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю.
- Обоснование сходимости алгоритма решения экстремальных обратных задач с ограничениями температурных полей методом штрафа.

В области комплексных программ:

- Разработка программ, реализующих численное моделирование процессов сложного теплообмена на основе метода конечных элементов. Реализация и тестирование оптимизационных алгоритмов решения граничных обратных задач для стационарных, квазистационарных и квазилинейных моделей.

В области численных методов:

- Разработка численного алгоритма решения квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен и доказательство его сходимости.
- Обоснование сходимости последовательности решений задач оптимального управления к решениям задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю.
- Обоснование сходимости алгоритма решения экстремальных обратных задач с ограничениями температурных полей методом штрафа.

В области комплексных программ:

- Разработка программ, реализующих численное моделирование процессов сложного теплообмена на основе метода конечных элементов. Реализация и тестирование оптимизационных алгоритмов решения граничных обратных задач для стационарных, квазистационарных и квазилинейных моделей.

1	Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши
	Граничная обратная задача
	Обратная задача с условиями типа Коши
	Квазистационарная задача с данными Коши
	Стационарная задача с условиями Коши на части границы
2	Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей
	Задачи оптимального управления с ограничениями на состояние системы и метод штрафа

Презентация состоит из трёх глав.

В первой главе рассмотрены краевые и начально-краевые модели. Преведены теоретические результаты по исследованию их корректности.

Во второй главе на рассмотренных моделях ставятся граничные обратные задачи и задачи с данными Коши.

Третья глава посвящена обратным задачам, поставленным на квазилинейных моделях, а также исследования устойчивости и стабилизации методами численного моделирования.

1 Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

Граничная обратная задача

Обратная задача с условиями типа Коши

Квазистационарная задача с данными Коши

Стационарная задача с условиями Коши на части границы

2 Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей

Задачи оптимального управления с ограничениями на состояние системы и метод штрафа

Рассматриваемая обратная задача формулируется следующим образом: дана некая область Ω . На части её границы неизвестен параметр среды u . Требуется отыскать тройку: температурное поле, поле излучения и неизвестный параметр по дополнительной информации о температуре на границе. Вопрос о корректности сформулированной обратной задачи является открытым (как её решать тоже вопрос открытый). Предлагается заменить обратную задачу на задачу оптимального управления, которая состоит в минимизации функционала (4). Решение данной экстремальной задачи называется квазирешением обратной задачи. Для нахождения квазирешения был разработан оптимизационный численный метод.



Модель имеет следующий вид

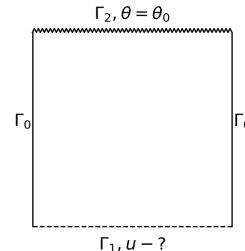
$$- \alpha \Delta \theta + b \kappa_a (\theta^3 |\theta| - \varphi) = 0, \quad (1)$$

$$- \alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - \theta^3 |\theta|) = 0, \quad (2)$$

$$\Gamma : \alpha \partial_n \theta + \beta (\theta - \theta_b) = 0,$$

$$\Gamma_0 \cup \Gamma_2 : \alpha \partial_n \varphi + \gamma (\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad (3)$$

$$\Gamma_1 : \alpha \partial_n \varphi + u (\varphi - \theta_b^4) = 0.$$



$\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ не имеют пересечений.

Функции γ, θ_b, β известны. Неизвестная функция u характеризует отражающие свойства участка границы Γ_1 . Предполагается, что $0 < u_1 \leq u \leq u_2$.

Обратная задача заключается в отыскании тройки θ, φ, u по дополнительному условию $\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0$.

Экстремальная задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \quad (4)$$

на решениях краевой задачи (1)–(3).

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

Граничная обратная задача

Нахождение квазирешения обратной задачи

Предложенный в работе алгоритм поиска квазирешения обратной задачи основан на выведенных условиях оптимальности (доказано, что квазирешение должно удовлетворять (5)–(8)), куда входят сопряженные функции для температуры p_1 и излучения p_2 , а также связь между сопряженным состоянием и искомым граничным управлением. Для компактной записи краевых задач, используется современная операторная форма. Система (5) является операторной записью краевой задачи, где $A_{1,2}$ описывают диффузионные члены модели, остальные моделируют граничные условия. Уравнения (7)–(8) это сопряженная система, а вариационное неравенство (9) устанавливает связь с оптимальным управлением.

Приведём алгоритм градиентного спуска с проекцией. Обратим внимание, что оператор проекции нужен из-за начальных ограничений на функцию управления (вызванных физичностью параметра, например).

Отметим, что в силу невыпуклости экстремальной задачи градиентные алгоритмы не обладают свойством глобальной сходимости, что служит основой для их критики, зачастую заслуженной.

Однако свойства диффузионных моделей сложного теплообмена представленные в диссертации и правильный выбор шага градиентного метода обеспечивают сходимость для рассматриваемых задач. Следующие примеры этот факт демонстрируют.

Нахождение квазирешения обратной задачи

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (5)$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma. \quad (6)$$

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a(b p_1 - p_2) = f_c, \quad (f_c, v) = - \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma. \quad (7)$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - b p_1) = g_c(p_2, \hat{u}), \quad (g_c(p_2, \hat{u}), v) = - \int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma. \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2(\hat{\varphi} - \theta_b^4)(u - w) d\Gamma \leq 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (9)$$

Алгоритм градиентного спуска с проекцией

• Выбор шага λ , числа итераций N , управления $u_0 \in U_{ad}$ – пространство допустимых управлений.

• для $k \leftarrow 0, 1, 2, \dots, N$ выполнить:

• Для u_k вычислить $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$ из (5).

• Вычислить значение $J(\theta_k)$ из уравнения (4).

• Рассчитать $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$ из (7)–(8).

• Пересчитать управление $u_{k+1} = P_{ad}[u_k - \lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}]$.

Нахождение квазирешения обратной задачи

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (5)$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma, \quad (6)$$

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a(b p_1 - p_2) = f_c, \quad (f_c, v) = - \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma, \quad (7)$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - b p_1) = g_c(p_2, \hat{u}), \quad (g_c(p_2, \hat{u}), v) = - \int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma, \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2(\hat{\varphi} - \theta_b^4)(u - w) d\Gamma \leq 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (9)$$

Алгоритм градиентного спуска с проекцией

1. Выбор шага λ , числа итераций N , управления $u_0 \in U_{ad}$ – пространство допустимых управлений.
2. для $k \leftarrow 0, 1, 2, \dots, N$ выполнить:
 - Для u_k , вычислить $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$ из (5).
 - Вычислить значение $J(\theta_k)$ из уравнения (4).
 - Рассчитать $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$ из (7)–(8).
 - Пересчитать управление $u_{k+1} = P_{ad}[u_k - \lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}]$.

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

Граничная обратная задача

Модель управления температурным полем через граничный параметр

Положим параметры среды, соответствующие стеклу и зададим тестовую функцию управления как показано на слайде. Пластинка, у которого боковые стороны "обычные верхняя грань - участок наблюдения, нижняя грань - участок под "контролем".

Модель управления температурным полем через граничный параметр

Положим $\Omega = \{(x,y); 0 \leq x,y \leq 1\}$, $l = 1$ см. Граница $\partial\Omega$:

$\Gamma_0 = \{x = \{0,1\}, y \in [0,1]\}$
 $\Gamma_1 = \{x \in [0,1], y = 0\}$ – участок с неизвестными отр. свойствами,
 $\Gamma_2 = \{x \in [0,1], y = 1\}$ – участок наблюдения.

Будем также далее считать, что $\kappa = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$, $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$,
 $\beta = 0.00005[\text{см}/\text{с}]$, $\kappa = 1[\text{см}^{-1}]$, $\kappa_s = 0$, $A = 0$, $\gamma = 0.3$. Температуру на границе Ω положим равной $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$.
 При указанных параметрах для первого эксперимента выберем следующую тестовую значение функции u :

$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leq 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases}$$

и для второго эксперимента: $u(x) = 0.49x + 0.01$.

Модель управления температурным полем через граничный параметр

Положим $\Omega = \{(x,y), 0 \leq x,y \leq 1\}$, $l = 1$ см. Граница $\partial\Omega$:

$$\Gamma_0 = \{x = \{0,1\}, y \in [0,1]\}$$

$\Gamma_1 = \{x \in [0,1], y = 0\}$ – участок с неизвестными отр. свойствами,

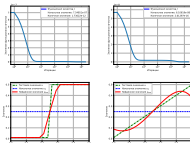
$\Gamma_2 = \{x \in [0,1], y = 1\}$ – участок наблюдения.

Будем также далее считать, что $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$, $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$,
 $\beta = 0.00005[\text{см}/\text{с}]$, $\kappa = 1[\text{см}^{-1}]$, $\kappa_s = 0$, $A = 0$, $\gamma = 0.3$. Температуру на границе Ω положим равной $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$.

При указанных параметрах для первого эксперимента выберем следующее тестовое значение функции u :

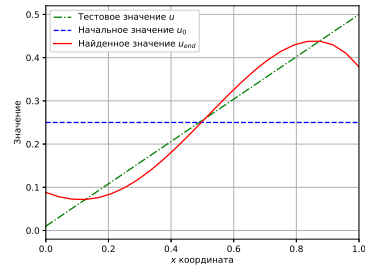
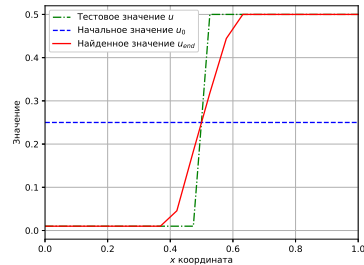
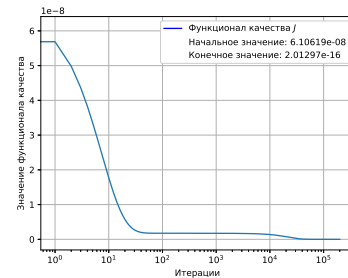
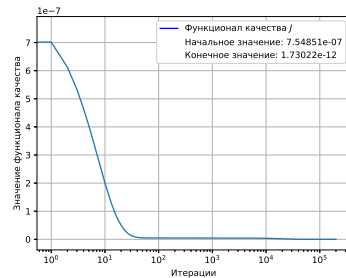
$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leq 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases}$$

и для второго эксперимента: $u(x) = 0.49x + 0.01$.



Интересный эффект "среднего значения". Большое количество итераций. Обратить внимание на функционал качества. Для получения представленных результатов, использовался разработанный мной комплекс программ, включающий решение прямой задачи, сопряженной системы и алгоритм градиентного спуска.

Модель управления температурным полем через граничные параметр



23. Не задано φ ! В основе разработанного алгоритма решения лежит анализ экстремальной задачи.

Строго обосновано существование решения экстр задачи. Кроме того, и это принципиально важно, показана сходимость решений экстремальных задач к решению задачи (10)–(??) без краевых условий для интенс излучения при λ стремящемся к 0.

Задача без краевых условий для интенсивности излучения	
Краевая задача:	
$-\alpha \Delta \theta + b \kappa_a (\theta^3 \theta - \varphi) = 0, \quad -\alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - \theta^3 \theta) = 0, \quad (10)$	
На Γ известно температурное поле и тепловой поток:	
$\theta = \theta_b, \quad \partial_n \theta = q_b. \quad (11)$	
Заменяем на «искусственные» краевые условия	
$\alpha (\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha (\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \quad (12)$	
Функция $r(x), x \in \Gamma$ является заданной, функция $u(x), x \in \Gamma$ описывающая излучающие свойства участка границы, неизвестна. Получаем обратную задачу. Экстремальная задача заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что	
$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_\Gamma u^2 d\Gamma \rightarrow \inf \quad (13)$	
на решении краевой задачи, функция $u(x), x \in \Gamma$ играет роль управления.	
• (jj) $\theta_b, q_b \in U, r = \alpha(\theta_b + q_b)$.	
Theorem (2.3)	
Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда существует решение экстремальной задачи.	

Задача без краевых условий для интенсивности излучения

Краевая задача:

$$- \alpha \Delta \theta + b \kappa_a (\theta^3 |\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - \theta^3 |\theta|) = 0, \quad (10)$$

На Γ известно температурное поле и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n \theta = q_b. \quad (11)$$

Заменяем на «искусственные» краевые условия

$$\alpha (\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha (\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \quad (12)$$

Функция $r(x), x \in \Gamma$ является заданной, функция $u(x), x \in \Gamma$ описывающая излучающие свойства участка границы, неизвестна. Получаем **обратную задачу**. **Экстремальная задача** заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_\Gamma u^2 d\Gamma \rightarrow \inf \quad (13)$$

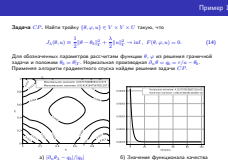
на решениях краевой задачи, функция $u(x), x \in \Gamma$ играет роль управления.

- (j) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = Const > 0$,
- (jj) $\theta_b, q_b \in U, r = \alpha(\theta_b + q_b)$.

Theorem (2.3)

Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда существует решение экстремальной задачи.

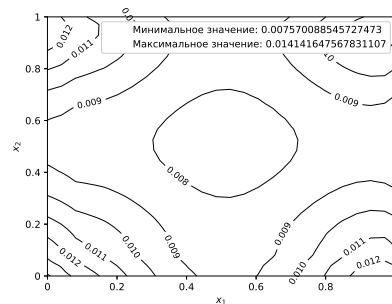
Обратите внимание на малость функционала качества. Сравним с тем, что получилось – довольно близко, но не идеально. Уменьшение параметра регуляризации повышает точность решения, но и увеличивает вычислительные затраты.



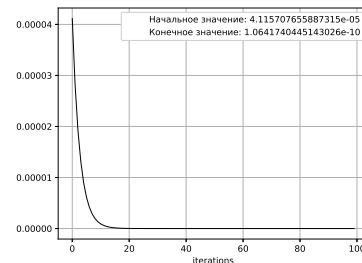
Задача *CP*. Найти тройку $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_\Gamma^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0. \quad (14)$$

Для обозначенных параметров рассчитаем функции θ, φ из решения граничной задачи и положим $\theta_b = \theta|_\Gamma$. Нормальная производная $\partial_n \theta = q_b = r/a - \theta_b$. Применяя алгоритм градиентного спуска найдем решение задачи *CP*.

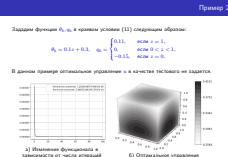


а) $|\partial_n \theta_\lambda - q_b|/|q_b|$



б) Значение функционала качества

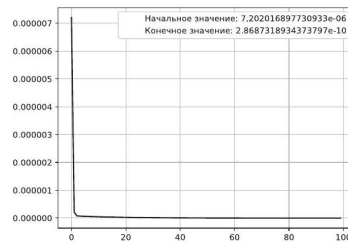
"Честный" эксперимент - используем то, что полагается в исходной задаче. Функционал качества (его динамика) позволяет предположить аналогичный порядок близости (с предыдущим примером) точного и аппроксимированного решений. Обратите внимание на линейность θ_b по оси z .



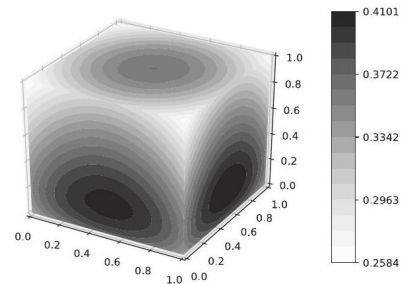
Зададим функции θ_b, q_b в краевом условии (11) следующим образом:

$$\theta_b = 0.1z + 0.3, \quad q_b = \begin{cases} 0.11, & \text{если } z = 1, \\ 0, & \text{если } 0 < z < 1, \\ -0.15, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

В данном примере оптимальное управление u в качестве тестового не задается.



а) Изменение функционала в зависимости от числа итераций



б) Оптимальное управление

27. Аналог стационарной задачи с небольшими сдвигами по времени. Для оптимизационного метода решения задачи требуются результаты анализа кв.стц. модели из гл. 1! параметр u неизвестен.

Квазистационарная модель с данными Коши

Начально-краевая задача:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b \kappa_a (|\theta|^3 - \varphi) = 0, \quad (15)$$

$$- \alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T,$$

$$a (\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha (\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma, \quad (16)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (17)$$

Экстремальная задача состоит в том, чтобы найти тройку $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf \quad (18)$$

на решении задачи (15)–(17).

на решение задачи (15)–(17):

- (k) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$,
- (kk) $\theta_b, q_b \in U, r = a(\theta_b + q_b) \in L^2(\Sigma), \theta_0 \in L^2(\Omega)$.

Theorem (2.6)

Пусть выполняются условия (k), (kk). Тогда существует решение экстремальной задачи.

Начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b \kappa_a (|\theta|^3 - \varphi) &= 0, \\ - \alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \quad (15)$$

$$a (\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha (\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \quad (16)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (17)$$

Экстремальная задача состоит в том, чтобы найти тройку $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf \quad (18)$$

на решениях задачи (15)–(17).

- (k) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$,
- (kk) $\theta_b, q_b \in U, r = a(\theta_b + q_b) \in L^2(\Sigma), \theta_0 \in L^2(\Omega)$.

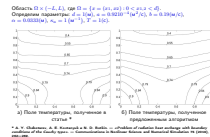
Theorem (2.6)

Пусть выполняются условия (k), (kk). Тогда существует решение экстремальной задачи.

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

Квазистационарная задача с данными Коши



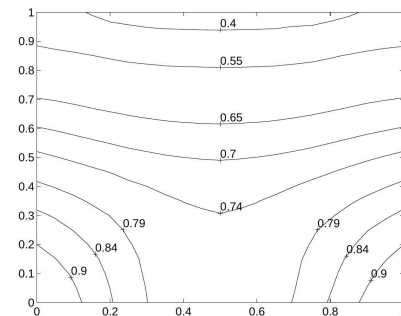
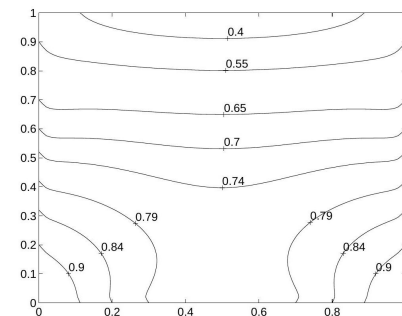
52. Приведены изображения сравнения полученных результатов в рамках работы над диссертацией и коллег из Мюнхена (финальный момент времени) Параметры среды соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400С.

N.Botkin для расчетов использовал, разработанную в TUM программу, использующую эрмитов прямоугольный (конформный) элемент Богнера-Фокса-Шмидта и сведение задачи к нестационарной. Не ясно, что же такое случилось с пространством решений, что потребовались столь экзотические конечные элементы.

Фактически ему пришлось решать краевую задачу для нелинейного уравнения 4 порядка. Предложенный в работе оптимизационный алгоритм является более простым и дает фактически те же результаты. Использовались конечные элементы Галёркина (Лагранжа-1).

Область $\Omega \times (-L, L)$, где $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_{1,2} < d\}$.

Определим параметры: $d = 1(\text{м})$, $a = 0.9210 \cdot 10^{-4}(\text{м}^2/\text{с})$, $b = 0.19(\text{м}/\text{с})$,
 $\alpha = 0.0333(\text{м})$, $\kappa_a = 1(\text{м}^{-1})$, $T = 1(\text{с})$.



* А. У. Чеботарев, А. Е. Ковтаныук и Н. Д. Боткин. — «Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type». — Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 75 (2019), с. 262—269.

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

Стационарная задача с условиями Коши на части границы

Стац. задача с условиями Коши для температуры на части границы

30. Рассмотрим случай если на всей границе известен поток, а параметр из гранич. условия для φ неизвестен. Мы дополняем "доступный" участок информацией о температуре: θ_{theta_b} . Если данные Коши заданы на части границы задача является ещё более сложной. Для точной постановки нет результатов по её корректности. Однако предлагаемый далее оптимизационный метод полностью теоретически обоснован и лежит в основе соответствующего программного комплекса для численного решения.

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$.

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (18)$$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ так, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. На всей границе Γ задается тепловой поток q_b .

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad x \in \Gamma. \quad (19)$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию γ . В случае, если эта функция известна на части границы Γ_1 , краевое условие для интенсивности излучения на Γ_2 не ставится, а в качестве условия переопределения на Γ_1 , в дополнение к условию на φ , задается температурное поле θ_b .

$$a\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (21)$$

Стац. задача с условиями Коши для температуры на части границы

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$.

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (19)$$

$\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ так, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. На всей границе Γ задается тепловой поток q_b ,

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad x \in \Gamma. \quad (20)$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию γ . В случае, если эта функция неизвестна на части границы Γ_2 , краевое условие для интенсивности излучения на Γ_2 не ставится, а в качестве условия переопределения на Γ_1 , в дополнение к условию на φ , задается температурное поле θ_b ,

$$a\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (21)$$



31. Используя замену, представленную на слайде, мы заменим исходную задачу, на краевую задачу с функциями θ, ψ . Вместо системы двух нелинейных уравнений одно уравнение стало линейным (для Ψ) (!!!Где нелинейность в исходной задаче!!!) Два нелинейных заменили на нелинейное и линейное (пси - гармоническая, к тому же). Особо обратим внимание на параметр s , который пришлось добавить в данную постановку из-за того, что реализованный алгоритм не сходиллся. (Потеря точности решения.?)

Расчёты выполнены при лямбда равной нулю.

Введем новую неизвестную функцию $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$.

Краевая задача:

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (22)$$

$$a\partial_n\theta = q_b \quad \text{на } \Gamma, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \quad \theta = \theta_b \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (23)$$

Здесь $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$, $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$.

Задача **оптимального управления**, аппроксимирующая краевую задачу, заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf, \quad (24)$$

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (25)$$

$$a\partial_n\theta + s\theta = q_b + s\theta_b, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (26)$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad \alpha\partial_n\psi = u \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (27)$$

$\lambda, s > 0$ – регуляризирующие параметры.

- (I) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda, s = \text{Const} > 0$.
- (II) $0 < \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma_1)$, $\theta_b, r \in L^2(\Gamma_1)$, $q_b \in L^2(\Gamma)$.

Theorem (2.9)

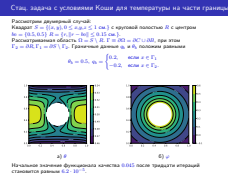
При выполнении условий (I), (II) существует решение задачи оптимального управления.

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

Стационарная задача с условиями Коши на части границы

Стац. задача с условиями Коши для температуры на части границы



63. Квадрат с полостью внутри. (не доступная среда).

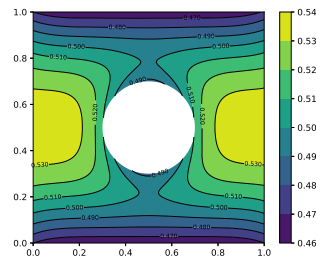
Стац. задача с условиями Коши для температуры на части границы

Рассмотрим двумерный случай:

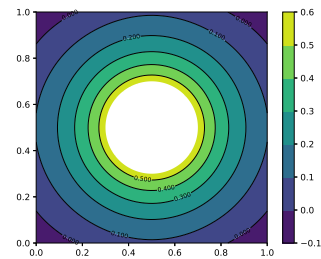
Квадрат $S = \{(x, y), 0 \leq x, y, z \leq 1 \text{ см.}\}$ с круговой полостью R с центром $b_0 = \{0.5, 0.5\}$, $R = \{r, \|r - b_0\| \leq 0.15 \text{ см.}\}$.

Рассматриваемая область $\Omega = S \setminus R$. $\Gamma \equiv \partial\Omega = \partial C \cup \partial B$, при этом $\Gamma_2 = \partial R$, $\Gamma_1 = \partial S \setminus \Gamma_2$. Граничные данные q_b и θ_b положим равными

$$\theta_b = 0.5, \quad q_b = \begin{cases} 0.2, & \text{если } x \in \Gamma_1 \\ -0.2, & \text{если } x \in \Gamma_2 \end{cases}$$



a) θ



b) φ

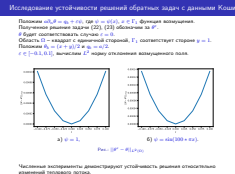
Начальное значение функционала качества 0.045 после тридцати итераций становится равным $6.2 \cdot 10^{-5}$.

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

Стационарная задача с условиями Коши на части границы

Исследование устойчивости решений обратных задач с данными Коши



Также приведем результаты по исследованию устойчивости решений обратных задач с данными Коши. Для этого переопределим в уравнении (23) $a\partial_n\theta = q_b + \varepsilon\psi$, где $\psi = \psi(x)$, $x \in \Gamma_1$ некоторая функция, моделирующая возмущение. Полученное таким образом решение задачи (22), (23) обозначим за θ^ε . Следовательно, θ будет соответствовать случаю $\varepsilon = 0$. Для проведения численного моделирования область Ω определим как квадрат с единичной стороной, где Γ_1 соответствует стороне $y = 1$. Положим $\theta_b = (x + y)/2$ и $q_b = a/2$ соответственно. Выполним расчеты температурного поля для различных малых значений параметра возмущений ε из промежутка $[-0.1, 0.1]$ и вычислим L^2 норму отклонения возмущенного поля.

Хорошо известно, что решение задачи с данными Коши на границе для одного эллиптического уравнения, напр. уравнения Лапласа, неустойчиво (знаменитый пример Адамара, когда малые изменения теплового потока на границе приводят к большим изменениям решения). Для рассматриваемой новой модели сложного теплообмена с данными Коши теоретический анализ устойчивости это открытая проблема.

На первом этапе этот вопрос был исследован численно с использованием разработанного комплекса программ.

Полученные численные результаты позволяют высказать гипотезу об устойчивости решения этой модели, которую в дальнейшем планируется обосновать аналитически.

Исследование устойчивости решений обратных задач с данными Коши

Положим $a\partial_n\theta = q_b + \varepsilon\psi$, где $\psi = \psi(x)$, $x \in \Gamma_1$ функция возмущения.

Полученное решение задачи (22), (23) обозначим за θ^ε .

θ будет соответствовать случаю $\varepsilon = 0$.

Область Ω – квадрат с единичной стороной, Γ_1 соответствует стороне $y = 1$.

Положим $\theta_b = (x + y)/2$ и $q_b = a/2$.

$\varepsilon \in [-0.1, 0.1]$, вычислим L^2 норму отклонения возмущенного поля.

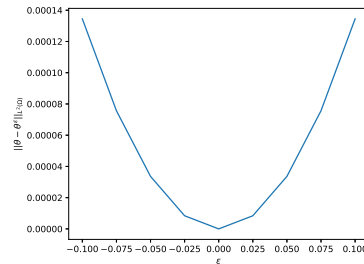
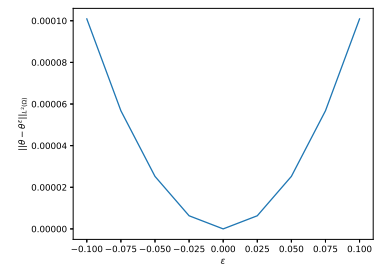


Рис.: $\|\theta^\varepsilon - \theta\|_{L^2(\Omega)}$

Численные эксперименты демонстрируют устойчивость решения относительно изменений теплового потока.

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей

Задачи оптимального управления с ограничениями на состояние системы и метод штрафа

Квазилинейная модель с фазовыми ограничениями

Дана область, в ней две подобласти. Мы хотим в одной достичь определенного температурного режима, в другой хотим не допустить превышения заранее заданного ограничения. P – максимальная мощность источника, α – коэффициент диффузии фотонов, Hi есть характеристическая функция той части среды, в которой он расположен, деленная на его объём. β – коэффициент поглощения, $k(\theta)$ является коэффициентом теплопроводности, σ является произведением удельной теплоемкости и плотности среды, u_1 описывает мощность источника тепла, u_2 – мощность источника теплового излучения.

Главная проблема здесь–наличие ограничения на температуру в области G_2 . Для ее преодоления рассматривается задача со штрафом. Нарушение указанного ограничения штрафуются ростом функционала при малых значениях ϵ . Обоснована сходимость предложенного штрафного алгоритма к решению задачи с ограничениями на температуру при $\epsilon \rightarrow +0$.

Квазилинейная модель с фазовыми ограничениями

Начально-краевая задача

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi, \\ -\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\theta = \theta_0, \quad \alpha \partial_n \varphi + 2^{-1} \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \text{При этом учитываются ограничения}$$

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*,$$

Задача оптимального управления P_ϵ . $J_\epsilon(\theta) \rightarrow \inf$, где

$$J_\epsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dx dt,$$

$$\sigma \theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad},$$

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_*, \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_*. \end{cases}$$

- (a1) $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, $\|\theta\|_{H^1} \leq \theta_1$
- (a2) $\theta_0 \leq \theta(x) \leq \theta_1$, $\|k(\theta)\| \leq \theta_1$, $\theta \in \mathbb{R}$
- (a3) $\theta_0 \in M$
- (a4) $\theta_0 \leq \theta(x) \leq \theta_1$, $\theta(x) \leq \theta_1$, $x \in \Omega$

Theorem (3.2)
Пусть выполняются условия (a1)-(a4). Тогда существует решение задачи P_ϵ .

Квазилинейная модель с фазовыми ограничениями

Начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi \\ -\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\theta = 0|_{\Gamma}, \quad \alpha \partial_n \varphi + 2^{-1} \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (29)$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*$$

Задача оптимального управления P_ϵ . $J_\epsilon(\theta) \rightarrow \inf$, где

$$J_\epsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dx dt,$$

$$\sigma \theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad},$$

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_* \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_*. \end{cases}$$

- (c1) $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, $|\partial \sigma / \partial t| \leq \sigma_2$
- (c2) $k_0 \leq k(s) \leq k_1$, $|k'(s)| \leq k_2$, $s \in \mathbb{R}$,
- (c3) $\theta_0 \in H$
- (c4) $\alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1$, $\beta_0 \leq \beta(x) \leq \beta_1$, $x \in \Omega$,

Theorem (3.2)

Пусть выполняются условия (c1)-(c4). Тогда существует решение задачи P_ϵ .

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

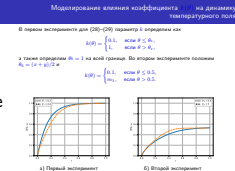
Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей

Задачи оптимального управления с ограничениями на состояние системы и метод штрафа

Моделирование влияния коэффициента $k(\theta)$ на динамику температурного поля

В рассмотренной модели коэффициент теплопроводности зависит от неизвестной температуры (квазилинейность уравнения). Это позволяет моделировать эффекты переноса энергии в областях с высокой температурой. Разработанный комплекс программ позволяет оценить влияние этого коэффициента на динамику темп поля. температурного поля

Здесь показать анимацию.



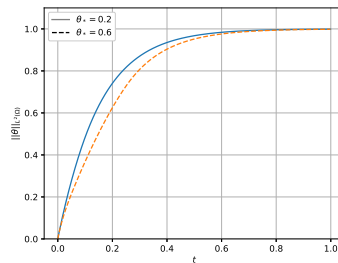
Моделирование влияния коэффициента $k(\theta)$ на динамику температурного поля

В первом эксперименте для (28)–(29) параметр k определим как

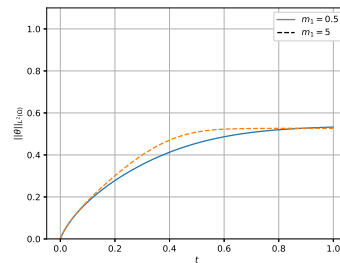
$$k(\theta) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } \theta \leq \theta_*, \\ 1, & \text{если } \theta > \theta_*, \end{cases}$$

а также определим $\theta_b = 1$ на всей границе. Во втором эксперименте положим $\theta_b = (x + y)/2$ и

$$k(\theta) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } \theta \leq 0.5, \\ m_1, & \text{если } \theta > 0.5. \end{cases}$$



а) Первый эксперимент



б) Второй эксперимент

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей

Задачи оптимального управления с ограничениями на состояние системы и метод штрафа

Научная новизна

В работе получены новые априорные оценки решений начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных уравнений сложного теплообмена и доказана их нелокальная однозначная разрешимость. Для рассмотренных моделей сложного теплообмена рассмотрены новые постановки граничных обратных задач, предложены оптимизационные методы их решения. Выполнен теоретический анализ возникающих новых экстремальных задач. Представлены априорные оценки решений регуляризованных задач и впервые обоснована сходимость их решений к точным решениям обратных задач. Для решения задач с фазовыми ограничениями, предложены алгоритмы, основанные на аппроксимации экстремальными задачами со штрафом. Разработаны и протестированы новые алгоритмы решения прямых, обратных и экстремальных задач для моделей сложного теплообмена.



- Получены новые априорные оценки решений начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных уравнений сложного теплообмена и доказана их нелокальная однозначная разрешимость.
- Представлены априорные оценки решений регуляризованных задач и обоснована сходимость их решений к точным решениям обратных задач.
- Для решения задач с фазовыми ограничениями, предложены алгоритмы, основанные на аппроксимации экстремальными задачами со штрафом.
- Реализованы программные комплексы
 - По решению обратных задач, основанные на оптимизационных методах
 - Тестирования решений, получаемых в результате решения обратных задач
 - Инструменты моделирования процессов сложного теплообмена для манипуляции 'in place'
 - Инструменты визуализации получаемых значений в процессе моделирования



Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей

Задачи оптимального управления с ограничениями на состояние системы и метод штрафа

Публикации, конференции

БАК:

- P. R. Mesenev — *Дальневост. матем. журн.* 23.1 (2023).
- P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* (2023).
- P. R. Mesenev and A. Yu. Chebotarev — *Comput. Math. Math. Phys.* 62.1 (Jan. 2022).
- A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev и A. E. Kovtanyuk — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2022).
- A. Yu. Chebotarev и P. R. Mesenev — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2020).
- P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2018).

Прочее:

- A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, P. Mesenev — *Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems – Dedicated to the Memory of Nikolai Botkin* (2020).
- A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev и A. E. Kovtanyuk — *Journal of Physics: Conference Series* (2023).
- A. Chebotarev, P. Mesenev и A. Kovtanyuk — *2023 Days on Diffraction (DD)* (2023).
- A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, N. Park, P. Mesenev — *2021 Days on Diffraction (DD)* (2021).
- P. R. Mesenev — *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам* (2018).

Конференции:

- Региональная научно-практическая конференция (Владивосток, 2018, 2019);
- Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics (Владивосток, 2022);
- Int. Conference DAYS on DIFFRACTION (Санкт-Петербург, 2021, 2023);
- Int. Workshop on Math. Modeling and Scientific Computing (Мюнхен, 2020, 2022).

БАК:

1. P. R. Mesenev — *Дальневост. матем. журн.* 23.1 (2023).
2. П. Р. Месенев и А. Ю. Чеботарев — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* (2023).
3. P R Mesenev and A Yu Chebotarev — *Comput. Math. Math. Phys.* 62.1 (Jan. 2022).
4. A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev и A. E. Kovtanyuk — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2022).
5. A. Yu. Chebotarev и P. R. Mesenev — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2020).
6. P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2018).

Прочее:

1. A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, P. Mesenev — *Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems – Dedicated to the Memory of Nikolai Botkin* (2020).
2. A Yu Chebotarev, N M Park, P R Mesenev и A E Kovtanyuk — *Journal of Physics: Conference Series* (2023).
3. A. Chebotarev, P. Mesenev и A. Kovtanyuk — *2023 Days on Diffraction (DD)* (2023).
4. A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, N. Park, P. Mesenev — *2021 Days on Diffraction (DD)* (2021).
5. П. Р. Месенев — *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам* (2018).

Конференции:

- Региональная научно-практическая конференция (Владивосток, 2018, 2019);
- Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics (Владивосток, 2022);
- Int. Conference DAYS on DIFFRACTION (Санкт-Петербург, 2021, 2023);
- Int. Workshop on Math. Modeling and Scientific Computing (Мюнхен, 2020, 2022).