



Месенёв Павел Ростиславович

**Оптимизационные методы решения обратных задач
сложного теплообмена**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Дальневосточный федеральный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Чеботарев Александр Юрьевич

Официальные оппоненты: **Фамилия Имя Отчество,**
доктор физико-математических наук, профессор,
Не очень длинное название для места работы,
старший научный сотрудник
Фамилия Имя Отчество,
кандидат физико-математических наук,
Основное место работы с длинным длинным
длинным длинным названием,
старший научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования с длинным длинным длинным длинным названием

Защита состоится **DD mmmmmmmmm YYYU** г. в **XX** часов на заседании диссертационного совета **Д 123.456.78** при **Название учреждения** по адресу: **Адрес.**

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке **Название библиотеки.**

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: **Адрес,** ученому секретарю диссертационного совета **Д 123.456.78.**

Автореферат разослан **DD mmmmmmmmm**2024 года.
Телефон для справок: **+7 (0000) 00-00-00.**

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 123.456.78,
д-р физ.-мат. наук

Фамилия Имя Отчество

Общая характеристика работы

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена анализу диффузионных моделей сложного теплообмена. В разделе 1.1 приведена модель сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения, а также её нормализованный вариант. Раздел 1.2 посвящен выводу модели переноса излучения в P_1 приближении. Для получения которого интенсивность излучения и фазовая функция заменяются линейным приближением соответствующих функций.

$$\begin{aligned} I^*(x, \omega, t) &= \varphi(x, t) + \Phi(x, t) \cdot \omega, \\ P(\omega, \omega') &= 1 + A\omega \cdot \omega'. \end{aligned}$$

Таким образом, диффузионное P_1 приближение уравнения переноса излучения представляется в виде

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a\Delta \theta(x, t) + b\kappa_a (\theta^4(x, t) - \varphi(x, t)) = 0. \quad (1)$$

$$-\alpha \Delta \varphi(x, t) + \kappa_a (\varphi(x, t) - \theta^4(x, t)) = 0. \quad (2)$$

$$\alpha \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial n} + \gamma(x) (\varphi(x, t) - \theta_b^4(x, t)) = 0, \quad (3)$$

дополняется граничным условием для температуры

$$a \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial n} + \beta(x) (\theta(x, t) - \theta_b(x, t)) = 0, \quad (4)$$

а также начальными условиями

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x). \quad (5)$$

В разделе 1.3 приведены определения функциональных пространств, вспомогательных утверждений и определений, которые используются в дальнейшем.

В разделе 1.4 приведены теоретические результаты для стационарной модели сложного теплообмена в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$.

$$-\alpha \Delta \varphi + \kappa_a \varphi = \kappa_a \theta^4, \quad (6)$$

$$-a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0, \quad (8)$$

$$a \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \beta(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0. \quad (9)$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, \mathbf{v} – заданное поле скоростей, κ_a – коэффициент поглощения. Постоянные a , b и α определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

где k – теплопроводность, c_v – удельная теплоемкость, ρ – плотность, σ – постоянная Стефана-Больцмана, n – показатель преломления, T_{\max} – максимальная температура в ненормализованной модели, $\kappa = \kappa_s + \kappa_a$ – коэффициент полного взаимодействия, κ_s – коэффициент рассеяния.

Раздел 1.5 посвящен квазистационарной модели сложного теплообмена. Представлена следующая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \quad (10)$$

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \quad (11)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (12)$$

Данная модель описывает систему связанных уравнений в частных производных, моделирующих квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен. Дано определение слабого решения, доказана лемма о существовании и единственности слабого решения, а также справедливости утверждений

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0, T; H).$$

Указанный результат используется в параграфе 2.3 при анализе оптимизационного метода для квазистационарной модели.

В разделе 1.6 рассмотрена квазилинейная модель сложного теплообмена, представленная начально-краевой задачей в ограниченной трехмерной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = f, \quad (13)$$

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) = g, x \in \Omega, 0 < t < T, \quad (14)$$

$$k(\theta) \partial_n \theta + p(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \quad (15)$$

Приведено определение слабой формулировки задачи (13)–(15), даны априорные оценки решений и доказано существование решения начально-краевой задачи. Представлены результаты единственности ограниченных решений, а также сходимость к решению начально-краевой задачи последовательности, построенной рекурсивно.

Вторая глава посвящена исследованию граничных обратных задач для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена. При решении таких задач часто встречаются краевые условия для эллиптических или параболических уравнений, когда на границе (части границы) задаётся неизвестная функция и её нормальная производная (условия Коши).

В разделе 2.1 рассмотрена нормализованная стационарная модель, описывающая процесс радиационного теплопереноса в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ . Модель имеет следующий вид

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

и дополняется граничными условиями на $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, где части границы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ не имеют пересечений.

$$\begin{aligned} \Gamma : a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) &= 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2 : \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) &= 0, \\ \Gamma_1 : \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Функции γ, θ_b, β – являются известными. Функция u характеризует отражающие свойства участка границы Γ_1 . Предполагается, что

$$0 < u_1 \leq u \leq u_2, \quad (18)$$

где u_1 и u_2 – заданные ограниченные функции.

Рассматриваемая экстремальная задача состоит в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \quad (19)$$

на решениях краевой задачи.

Далее ставится задача нахождения квазирешения, которая состоит в минимизации функционала (19) на компоненте θ решения системы

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (20)$$

Для поставленной экстремальной задачи доказано существование решения, а также выведена система оптимальности, на котором основан численный алгоритм, представленный в 4.2.2.

Раздел 2.2 содержит постановку задачи без краевых условия для интенсивности излучения. Будем предполагать, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ известно температурное поле, и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n \theta = q_b. \quad (21)$$

Оптимизационный метода решения краевой задачи (16),(21) заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления с «искусственными» краевыми условиями

$$a(\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \quad (22)$$

Функция $r(x)$, $x \in \Gamma$ является заданной, а неизвестная функция $u(x)$, $x \in \Gamma$ играет роль управления. Экстремальная задача заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf \quad (23)$$

на решениях краевой задачи (16),(22). Функция $\theta_b(x)$, $x \in \Gamma$ и параметр регуляризации $\lambda > 0$ заданы.

Для формулировки задачи оптимального управления определим оператор ограничений $F(\theta, \varphi, u) : V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$

$$F(\theta, \varphi, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\},$$

где

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma} yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_{\Gamma} wz d\Gamma.$$

Тогда задача оптимального управления (CP) заключается в отыскании тройки $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_{\Gamma}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{\Gamma}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0. \quad (24)$$

Доказана однозначная разрешимость краевой задачи (16),(22) и даны априорные оценки решения, которые далее используются для доказательства разрешимости задачи (CP).

Доказана следующая теорема

Теорема. Пусть выполняются условия $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$, $\theta_b, q_b \in U$, $r = a(\theta_b + q_b)$ и существует решение задачи (16),(21). Если $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$

– решение задачи (CP) для $\lambda > 0$, то существует последовательность $\lambda \rightarrow +0$ такая, что

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_*, \quad \varphi_\lambda \rightarrow \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

где θ_*, φ_* – решение задачи (16), (21).

В разделе 2.3 представлен анализ оптимизационного метода для квазистационарной модели. Квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ моделируем следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \quad (25)$$

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \quad (26)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (27)$$

Экстремальная задача состоит в том, чтобы найти тройку $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf \quad (28)$$

на решениях задачи (25)–(27).

Ставится задача оптимального управления (OC), доказывается существование решения задачи (OC) и выводится система оптимальности. Представлено доказательство сходимости решений задачи оптимального управления к решению задачи оптимального управления.

В разделе 2.4 рассмотрена задача сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы. В данном случае граница области состоит из двух участков, $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, так что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. На всей границе Γ задается тепловой поток q_b , в качестве условия переопределения на Γ_1 , в дополнение к условию на φ , задается температурное поле θ_b ,

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad x \in \Gamma_1. \quad (29)$$

Для постановки задачи управления вводится новая неизвестная функция $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$. Полученная краевая задача имеет вид

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (30)$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \text{ на } \Gamma, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \quad \theta = \theta_b \text{ на } \Gamma_1. \quad (31)$$

Здесь $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$, $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$.

Для соответствующей задачи оптимального управления доказано существование и единственность решения. Приведено доказательство, что решения задачи оптимального управления аппроксимируют решение начальной краевой задачи.

Третья глава посвящена исследованию квазилинейных моделей. В разделе 3.1 рассмотрена задача оптимального управления для квазилинейных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена, моделирующих процесс внутривенной лазерной абляции в ограниченной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \rightarrow \inf$$

на решениях начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi \\ - \operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\theta = 0|_{\Gamma}, \quad \alpha \partial_n \varphi + 2^{-1} \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (33)$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*$$

Здесь G_1 и G_2 подмножества Ω , θ представляют разницу между реальной температурой и температурой на границе, которая является постоянной.

Доказано существование решения соответствующей задачи оптимального управления и даны априорные оценки решений. Показано, что решения задачи со штрафом сходятся к решению задачи оптимального управления.

В разделе 3.2 приведён анализ метода штрафных функций используемого для решения задачи оптимального управления с финальным наблюдением. Задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \rightarrow \inf,$$

на решениях начально-краевой задачи

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi = u_1 \chi, \quad (34)$$

$$- \operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi = u_2 \chi, \quad (35)$$

$$k(\theta) \partial_n \theta + \gamma (\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi + 0.5 \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad (36)$$

с учётом следующих ограничений:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_b} \leq \theta_*.$$

На основе этой задачи ставится задача оптимального управления. Доказано существование решения задачи оптимального управления, а также сходимость решений задачи со штрафом к решениям задачи оптимального управления.

В четвертой главе приведены разработанные численные методы решения параболических уравнений и задач оптимизаций. В разделе 4.1 приводятся алгоритмы решения прямых стационарных задач. Рассмотрим пример численного решения задачи (6)–(9) с параметрами, определёнными как $\gamma = 0.8 \cos(\frac{\pi}{2}z) + 0.5$, $\theta_b = 1 - y/2 + z/2$. Начальное приближение решения выбрано нулевым. Результат представлен на рисунке 1.

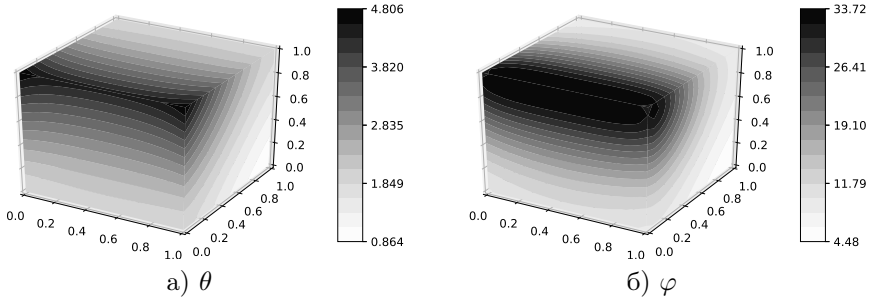
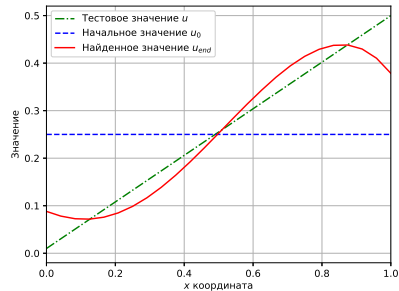
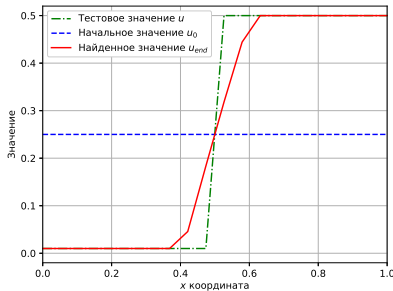


Рис. 1 — Решение граничной задачи в трёхмерной области

В разделе 4.2 рассмотрены алгоритмы решения граничных обратных задач. Приведён пример реализации алгоритма градиентного спуска с проекцией в двумерном случае. Для задачи (16)–(20) определим параметры среды соответствующие стеклу. Результаты работы алгоритма нахождения квазирешения обратной задачи представлены на рисунке 2.

Приведён результат работы алгоритма по решению задачи оптимального управления для квазистационарной модели.

Приводятся алгоритмы нахождения решения для квазилинейной и квазистационарной модели. Алгоритмы решения задач с данными Коши, а также примеры численного моделирования подобных задач представлены в 4.3.



а) Первый эксперимент

б) Второй эксперимент

Рис. 2 — Тестовая функция u , начальная u_0 , найденная функция u_{end} .

В **заключении** приведены основные результаты работы. В диссертации в соответствии с паспортом специальности 1.2.2 представлен математический анализ диффузионных моделей сложного теплообмена, предложены новые постановки обратных задач, разработаны оптимизационные методы решения обратных задач, основанные на понятии квазирешения и сведения рассмотренных задач к задачам оптимального управления. Разработаны и программно реализованы новые алгоритмы решения прямых, обратных и экстремальных задач для моделей сложного теплообмена.

Получены новые априорные оценки решений начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных уравнений сложного теплообмена и доказана их нелокальная однозначная разрешимость. Выполнен теоретический анализ возникающих новых экстремальных задач. Представлены априорные оценки решений регуляризованных задач и обоснована сходимость их решений к точным решениям обратных задач. Для решения задач с фазовыми ограничениями, предложены алгоритмы, основанные на аппроксимации экстремальными задачами со штрафом.

Таким образом, получены важные с теоретической и численной точки зрения результаты, которые могут быть полезны при дальнейшем использовании моделей сложного теплообмена и анализе обратных задач сложного теплообмена. Развитые методы исследования краевых, начально-краевых и экстремальных задач могут применяться для изучения различных моделей, описываемых нелинейными уравнениями типа реакции-диффузии. Численные алгоритмы решения задач оптимизации сложного теплообмена могут использоваться для выбора оптимальных характеристик процессов теплообмена.

В дальнейшем исследование обратных задач для диффузионных моделей сложного теплообмена может быть направлено на учет эффектов

отражения и преломления на границе раздела сред и учет зависимости коэффициентов поглощения и рассеяния от частоты излучения.

Все рассмотренные в работе типы задач логически связаны следующим образом. Теоретический анализ математических моделей сложного теплообмена, представленный в первой главе, является основой для исследования оптимизационных методов решения обратных задач во второй и третьей главах. Соответственно, полученные там условия оптимальности дают возможность представить численные алгоритмы решения сформулированных задач и численно реализовать их в главе 4.

Конечно же, автору не удалось рассмотреть все важные вопросы в теории и методах решения обратных задач сложного теплообмена. В стороне осталось, например, исследование таких важных свойств решений экстремальных задач как регулярность, которая обеспечивает повышение скорости сходимости итерационных алгоритмов. Автор не касался в работе исследования необходимых и достаточных условий оптимальности второго порядка. Ряд постановок, которые нетрудно будет исследовать на основе предложенной методики, ожидает своего решения в том числе и в связи с вопросами нахождения наиболее эффективных механизмов и способов управления теплофизическими полями.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] P. R. Mesenev. — «Optimization method for solving the inverse problem of complex heat transfer». — В: *Дальневост. матем. журн.* 23.1 (2023), с. 81—84. — URL: <http://mi.mathnet.ru/dvmg508>.
- [2] П. Р. Месенев и А. Ю. Чеботарев. — «Задача сложного теплообмена с условиями типа Коши на части границы». — В: *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 63.5 (2023), с. 856—863. — URL: <http://mi.mathnet.ru/zvmmf11560>.
- [3] Alexander Chebotarev, Pavel Mesenev и Andrey Kovtanyuk. — «Inverse problem with unknown sources for a quasi-linear complex heat transfer model». — В: *2023 Days on Diffraction (DD)*. — IEEE, июнь 2023, — С. 31—35. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/DD58728.2023.10325734>.
- [4] A Yu Chebotarev и др. — «Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation». — В: *Journal of Physics: Conference Series* 2514.1 (май 2023), с. 012006. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2514/1/012006>.
- [5] A. Yu. Chebotarev и др. — «Penalty method to solve an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation». — В: *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 22 (2022), с. 158—163.

- [6] P R Mesenev and A Yu Chebotarev. — “Analysis of an optimization method for solving the problem of complex heat transfer with Cauchy boundary conditions”. — In: *Comput. Math. Math. Phys.* 62.1 (Jan. 2022), p. 33—41.
- [7] Alexander Chebotarev и др. — «Optimal control with phase constraints for a quasilinear endovenous laser ablation model». — В: *2021 Days on Diffraction (DD)*. — IEEE, май 2021, — С. 19—24. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/DD52349.2021.9598691>.
- [8] Alexander Chebotarev, Andrey Kovtanyuk, and Pavel Mesenev. — “Optimization algorithm for radiative-conductive heat transfer model with boundary conditions of Cauchy type”. — In: *MMSC 2020 - Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems - Dedicated to the Memory of Nikolai Botkin*. — Vol. 2783. — Munich, Germany: CEUR WORKSHOP PROCEEDINGS, Nov. 2020, — P. 29—40.
- [9] A.Yu. Chebotarev и P.R. Mesenev. — «An algorithm for solving the boundary value problem of radiation heat transfer without boundary conditions for radiation intensity». — В: *Dal’nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (июнь 2020), с. 114—122. — URL: <http://dx.doi.org/10.47910/FEMJ202012>.
- [10] Месенев П.Р. — «Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена». — В: *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам*. — Владивосток, Россия: Дальневосточный федеральный университет, апр. 2018.
- [11] P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev. — «A boundary inverse problem for complex heat transfer equations». — В: *Dal’nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 18.1 (2018), с. 75—84.
- [12] П. Р. Месенев. — «Солвер обратной задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши». — Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет». — 25 сент. 2023.
- [13] П. Р. Месенев. — «Программа для нахождения квазирешения обратной задачи сложного теплообмена с дополнительным температурным условием на границе». — Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет». — 1 марта 2024.

- [14] П. Р. Месенев. — «Программа для решения граничной обратной задачи сложного теплообмена с переопределением на части границы». — Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет». — 29 марта 2024.

Месенёв Павел Ростиславович

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____