Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»

Представление на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

# Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

*Выступающий:* П. Р. Месенёв
*Руководитель:* проф.,д. физ.-мат. н. А. Ю. Чеботарев

Владивосток, 2024

# Положения, выносимые на защиту

*В области математического моделирования:*

- Доказательство однозначной разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей квазистационарный сложный теплообмен в трехмерной области.
- Доказательство однозначной разрешимости квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен с нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.
- Обоснование существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на части границы и условием переопределения на другой части.
- Вывод условий разрешимости экстремальных задач, аппроксимирую щих решения граничных обратных задач (задач с условиями Коши на границе области) для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена.
- Построение систем оптимальности и доказательство их невырожденности для задач оптимального управления стационарными, квазистационарными и квазилинейными уравнениями сложного теплообмена.

# Положения, выносимые на защиту

*В области численных методов:*

- Разработка численного алгоритма решения квазилинейной начально- краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен и доказательство его сходимости.
- Обоснование сходимости последовательности решений задач оптималь ного управления к решениям задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю.
- Обоснование сходимости алгоритма решения экстремальных обратных задач с ограничениями температурных полей методом штрафа.

*В области комплексов программ:*

- Разработка программ, реализующих численное моделирование процессов сложного теплообмена на основе метода конечных элементов. Реализация и тестирование оптимизационных алгоритмов решения граничных обратных задач для стационарных, квазистационарных и квазилинейных моделей.

# Содержание

Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, граница $\Gamma = \partial\Omega$.

$$-a\Delta\theta + +b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4, \tag{1}$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \beta\,(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

$\Omega$ – липшицева ограниченная область, $\Gamma$ состоит из конечного числа гладких кусков, исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i) $\theta_0, \beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma), 0 \leqslant \theta_0 \leqslant M, \beta \geqslant \beta_0 > 0, \gamma \geqslant \gamma_0 > 0;$

Здесь $M, \beta_0, \gamma_0$, и $c_0$ положительные постоянные.

## Definition

Пара $\{\theta, \varphi\} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ называется слабым решением задачи, если для любых $\eta, \psi \in H^1(\Omega)$ выполняются равенства:

$$a(\nabla\theta, \nabla\eta) + \left(b\kappa_a\left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right), \eta\right) + \int_\Gamma \beta\left(\theta - \theta_0\right)\eta d\Gamma = 0,$$

$$\alpha(\nabla\varphi, \nabla\psi) + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|\theta^3, \psi\right) + \int_\Gamma \gamma\left(\varphi - \theta_0^4\right)\psi d\Gamma = 0.$$

## Theorem (Chebotarev, 2015)

*Пусть выполняются условия (i). Тогда существует единственное слабое решение задачи* (1)–(2), *удовлетворяющее неравенствам:*

$$a\|\nabla\theta\|^2 \leqslant b\kappa_a M^5|\Omega| + \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)}M^2|\Gamma|, \tag{3}$$

$$\alpha\|\nabla\varphi\|^2 \leqslant \kappa_a M^8|\Omega| + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}M^8|\Gamma|, \tag{4}$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant M, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant M^4. \tag{5}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \phi) = 0, \tag{6}$$

$$-\alpha\Delta\phi + \kappa_a(\phi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \tag{7}$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta\,(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0 \text{ на } \Gamma; \tag{8}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{9}$$

Предполагаем, что

- (j) $a, b, \alpha, \kappa_a = \text{Const} > 0$,
- (jj) $\theta_b, q_b, u = \theta_b^4 \in U, r = a\,(\theta_b + q_b) \in L^5(\Sigma),\ \theta_0 \in L^5(\Omega)$.

Здесь $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$, $U$ – пространство $L^2(\Sigma)$ с нормой

$$\|u\|_\Sigma = \left(\int_\Sigma u^2 d\Gamma dt\right)^{1/2}.$$

Определим операторы $A : V \to V', B : U \to V'$, которые выполняются для любых $y, z \in V, w \in L^2(\Gamma)$:

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_\Gamma yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_\Gamma wz d\Gamma.$$

## Definition

Пара $\theta \in W, \varphi \in L^2(0, T; V)$ называется слабым решением задачи (6)–(9) если

$$\theta' + aA\theta + b\kappa_a \left([\theta]^4 - \varphi\right) = Br, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a \left(\varphi - [\theta]^4\right) = Bu.$$

Здесь и далее будем обозначать через $[\theta]^s := |\theta|^s \mathrm{sign}\theta, \quad s \in \mathbb{R}$.

## Lemma (1.20)

*Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда существует единственное слабое решение задачи* (6)–(9) *и справедливо*

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0, T; H).$$

$$\sigma \partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) + b\left(\theta^3|\theta| - \varphi\right) = f, \tag{10}$$

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta\left(\varphi - \theta^3|\theta|\right) = g, x \in \Omega, 0 < t < T, \tag{11}$$

$$k(\theta)\partial_n\theta + p\left(\theta - \theta_b\right)|_\Gamma = 0, \alpha\partial_n\varphi + \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right)\Big|_\Gamma = 0, \quad \theta\big|_{t=0} = \theta_{in}. \tag{12}$$

Предполагаем, что:

- (k1) $\alpha, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega), \quad b = r\beta, r = Const > 0; \alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \beta_0, \sigma \geq \sigma_0, \alpha_0, \beta_0, \sigma_0 =$ Const $> 0$.
- (k2) $0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1, |k'(s)| \leq k_2, s \in \mathbb{R}, \quad k_j =$ Const.
- (k3) $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma), 0 \leq \theta_{\text{in}} \in L^\infty(\Omega)$;
  $\gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma), p_0 \leq p \in L^\infty(\Gamma), \gamma_0, p_0 =$ Const $> 0$.
- (k4) $0 \leq f, g \in L^\infty(Q)$.

Определим операторы $A_1 : V \to V_0'$ и $A_2 : V \to V'$ такие, что для всех $\theta, \varphi, v \in V$ выполняются следующие равенства:

$$(A_1(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma p\theta v d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_\Gamma p\theta v d\Gamma,$$
$$(A_2\varphi, v) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v d\Gamma,$$

где $h(s) = \int_0^s k(r)dr$.

## Definition

Пару $\theta \in W, \varphi \in L^2(0,T;V)$ будем называть слабым решением задачи (10)–(12), если

$$\sigma\theta' + A_1(\theta) + b\left([\theta]^4 - \varphi\right) = f_b + f \quad \text{п. в. в } (0,T), \quad \theta(0) = \theta_{\text{in}}, \tag{13}$$

$$A_2\varphi + \beta\left(\varphi - [\theta]^4\right) = g_b + g \quad \text{п. в. в } (0,T). \tag{14}$$

Здесь $f_b, g_b \in L^2(0,T;V')$ и

$$(f_b, v) = \int_\Gamma p\theta_b v d\Gamma, \quad (g_b, v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 v d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

Рекурсивно определим последовательность
$\theta_m \in W, \quad \varphi_m \in L^2(0,T;V)$ такую, что

$$\theta_m = F_2\left(\theta_{m-1}, \varphi_{m-1}\right), \quad \varphi_m = F_1\left(\theta_m\right), \quad m = 1{,}2, \ldots \tag{15}$$

Здесь операторы $F_1 : L^\infty(\Omega) \to V$ и $F_2 : L^\infty(Q) \times L^2(0,T;V) \to W$ определены следующим образом. Пусть $\varphi = F_1(\theta)$, если

$$A_2\varphi + \beta\left(\varphi - [\theta]^4\right) = g_b + g, \tag{16}$$

и $\theta = F_2(\zeta, \varphi)$, если

$$\sigma\theta' + A(\zeta,\theta) + b\left([\theta]^4 - \varphi\right) = f_b + f \quad \text{п. в. в } (0,T), \quad \theta(0) = \theta_{in}. \tag{17}$$

Здесь $(A(\zeta,\theta), v) = (k(\zeta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma p\theta v d\Gamma \quad \forall v \in V$,

$$W = \left\{y \in L^2(0,T;V) : \sigma y' = \sigma dy/dt \in L^2\left(0,T,V'\right)\right\}.$$

### Lemma

*Если выполнены условия (k1)–(k4), то существует константа $C > 0$, не зависящая от $m$, такая, что*

$$\|\varphi_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C,$$
$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s+\delta) - \theta_m(s)\|^2 \, ds \leq C\delta.$$

$\theta_m \to \widehat{\theta}$ слабо в $L^2(0,T;V)$, сильно в $L^2(0,T;H)$,

$\varphi_m \to \widehat{\varphi}$ слабо в $L^2(0,T;V)$.

### Theorem

*Если выполнены условия (k1)–(k4), то существует хотя бы одно решение задачи* (10)–(12).

## Теорема единственности и сходимость итеративного метода

### Theorem

*Если выполнены условия (k1)–(k4) и* $\theta_*, \varphi_*$ *является решением задачи* (10)–(12) *так, что* $\theta_*, \nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$*, то других ограниченных решений этой задачи нет.*

### Theorem

*Если выполнены условия (k1)–(k4) и* $\theta_*, \varphi_*$ *является решением задачи* (10)–(12) *так, что* $\theta_*, \nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$*. Тогда для последовательностей* (15) *справедливы следующие сходимости:*

$$\theta_m \to \theta_* \quad \text{в } L^2(0,T;V), \quad \varphi_m \to \varphi_* \quad \text{в } L^2(0,T;V).$$

Модель имеет следующий вид

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \tag{18}$$

и дополняется граничными условиями на $\Gamma := \partial\Omega = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, где части границы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ не имеют пересечений:

$$\begin{aligned} \Gamma:&\ a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2:&\ \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \\ \Gamma_1:&\ \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Функции $\gamma, \theta_b, \beta$ известны. Неизвестная функция $u$ характеризует отражающие свойства участка границы $\Gamma_1$. Предполагается, что $0 < u_1 \leq u \leq u_2$.

**Обратная задача** заключается в отыскании тройки $\theta, \varphi, u$ по дополнительному условию $\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0$.

**Экстремальная задача** заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma.$$

# Существование решения и условия оптимальности

Будем предполагать что исходные данные удовлетворяют условию

- (i) $\beta \in L^\infty(\Gamma); \gamma \in L^\infty(\Gamma_0 \cup \Gamma_2);\, u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma_1);$
  $0 < \beta_0 \le \beta; 0 < \gamma_0 \le \gamma;\ \beta_0,\gamma_0 = Const,\ 0 \le u_1 \le u_2.$

## Theorem

*Пусть выполняется условие (i). Тогда существует хотя бы одно решение задачи оптимального управления.*

## Theorem

*Пусть* $\hat{y} = \{\hat{\theta},\hat{\varphi}\} \in Y, \hat{u} \in U_{ad}$ *— решение экстремальной задачи. Тогда существует пара* $p = (p_1, p_2)$, $p \in Y$ *такая, что тройка* $(\hat{y}, \hat{u}, p)$, *удовлетворяет следующим условиям:*

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a (b p_1 - p_2) = f_c,\ \ (f_c,v) = -\int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma,$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a (p_2 - b p_1) = g_c(p_2, \hat{u}),\ (g_c(p_2, \hat{u}), v) = -\int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma,$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2 (\hat{\varphi} - \theta_b^4)(u - w) d\Gamma \le 0 \quad \forall w \in U_{ad}.$$

# Задача без краевых условий для интенсивности излучения

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \tag{20}$$

На $\Gamma$ известно температурное поле и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b. \tag{21}$$

Заменяем на «искусственные» краевые условия

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r,\ \ \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \tag{22}$$

Функция $r(x), x \in \Gamma$ является заданной, а неизвестная функция $u(x), x \in \Gamma$ играет роль управления.

**Экстремальная задача** заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda,\varphi_\lambda,u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2}\int\limits_\Gamma u^2 d\Gamma \to \inf \tag{23}$$

на решениях краевой задачи.

Будем предполагать, что

- $(j)$ $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = Const > 0$,
- $(jj)$ $\theta_b,\ q_b \in U,\ \ r = a(\theta_b + q_b)$.

Определим оператор ограничений $F(\theta, \varphi, u) : V \times V \times U \to V' \times V'$,

$$F(\theta, \varphi, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

**Задача** $CP$**.** Найти тройку $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2}\|\theta - \theta_b\|^2_\Gamma + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_\Gamma \to \inf\,,\ \ F(\theta, \varphi, u) = 0. \tag{24}$$

**Theorem**

*Пусть выполняются условия $(j), (jj)$. Тогда существует решение задачи $CP$.*

**Theorem**

*Пусть выполняются условия (j),(jj). Если $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ – решение задачи $CP$, то существует единственная пара $\{p_1, p_2\} \in V \times V$ такая, что*

$$aAp_1 + 4|\hat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) = B(\theta_b - \hat{\theta}), \;\; \alpha Ap_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0 \quad (25)$$

*и при этом $\lambda\hat{u} = p_2$.*

### Theorem

*Пусть выполняются условия (j),(jj) и существует решение задачи* (20)–(21)*. Если* $\{\theta_\lambda,\varphi_\lambda,u_\lambda\}$ *– решение задачи* $CP$ *для* $\lambda > 0$*, то существует последовательность* $\lambda \to +0$ *такая, что*

$$\theta_\lambda \to \theta_*, \;\; \varphi_\lambda \to \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

*где* $\theta_*,\varphi_*$ *– решение задачи* (20)–(21)*.*

Из ограниченности последовательности $u_\lambda$ в пространстве $U$ следует ее слабая относительная компактность и существование последовательности (возможно не единственной) $\lambda \to +0$ такой, что $u_\lambda \to u_*$ слабо в $U$.

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a\left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right) = 0,$$
$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|\theta^3\right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \tag{26}$$

$$a\left(\partial_n\theta + \theta\right) = r, \quad \alpha\left(\partial_n\varphi + \varphi\right) = u \text{ на } \Gamma; \tag{27}$$
$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{28}$$

**Экстремальная задача** состоит в том, чтобы найти тройку $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma \left(\theta - \theta_b\right)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T\int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \to \inf \tag{29}$$

на решениях задачи (26)–(28).

Будем считать, что

- $(k)$ $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda =$ Const $> 0$,
- $(kk)$ $\theta_b, q_b \in U, r = a\,(\theta_b + q_b) \in L^5(\Sigma),\ \theta_0 \in L^5(\Omega)$.

Задача оптимального управления $OC$ заключается в отыскании тройки $\{\theta, \varphi, u\} \in W \times L^2(0,T;V) \times U$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2}\,\|\theta - \theta_b\|^2_\Sigma + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_\Sigma \to \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0.$$

Здесь и далее $W = \left\{y \in L^2(0,T;V) : y' \in L^2\,(0,T,V')\right\}$.

### Theorem

*Пусть выполняются условия $(k), (kk)$. Тогда существует решение задачи $OC$.*

Определим операторы $A : V \to V', B : U \to V'$

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_\Gamma yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_\Gamma wz d\Gamma, \quad y, z \in V, w \in L^1(\Gamma).$$

### Theorem

*Пусть выполнены условия* $(k),(kk)$. *Если* $\{\widehat{\theta},\widehat{\varphi},\widehat{u}\}$ *— решение задачи* $OC$, *то существует единственная пара* $\{p_1,p_2\}\in W\times W$ *такая, что*

$$\begin{gathered}-p_1'+aAp_1+4|\widehat{\theta}|^3\kappa_a\left(bp_1-p_2\right)=B\left(\theta_b-\widehat{\theta}\right),\ p_1(T)=0,\\ \alpha Ap_2+\kappa_a\left(p_2-bp_1\right)=0,\quad \lambda\widehat{u}=p_2|_\Sigma\,.\end{gathered}\tag{30}$$

### Theorem

*Пусть выполняются условия* $(k),(kk)$ *и существует решение* $\theta,\varphi\in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right)$ *задачи* (26)–(28). *Если* $\{\theta_\lambda,\varphi_\lambda,u_\lambda\}$ *— решение задачи* $OC$ *при* $\lambda>0$, *то при* $\lambda\to+0$

$$\begin{gathered}\theta_\lambda\to\theta \text{ слабо в } L^2(0,T;V),\ \text{сильно в } L^2(Q),\\ \varphi_\lambda\to\varphi \text{ слабо в } L^2(0,T;V).\end{gathered}$$

# Стационарная задача с условиями Коши для температуры на части границы

Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$.

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, x \in \Omega. \quad (31)$$

$\Gamma := \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$ так, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. На всей границе $\Gamma$ задается тепловой поток $q_b$,

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad x \in \Gamma. \quad (32)$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию $\gamma$. В случае, если эта функция неизвестна на части границы $\Gamma_2$, краевое условие для интенсивности излучения на $\Gamma_2$ не ставится, а в качестве условия переопределения на $\Gamma_1$, в дополнение к условию на $\varphi$, задается температурное поле $\theta_b$,

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \theta = \theta_b \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (33)$$

.

Введем новую неизвестную функцию $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$.
**Краевая задача**:

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0,\ x \in \Omega, \tag{34}$$

$$a\partial_n\theta = q_b \text{ на } \Gamma,\ \ \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r,\ \ \theta = \theta_b \text{ на } \Gamma_1. \tag{35}$$

Здесь $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$, $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$.
Задача **оптимального управления**, аппроксимирующая краевую задачу, заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_1}(\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \to \inf, \tag{36}$$

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0,\ x \in \Omega, \tag{37}$$

$$a\partial_n\theta + s\theta = q_b + s\theta_b,\ \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r \text{ на } \Gamma_1, \tag{38}$$

$$a\partial_n\theta = q_b,\ \alpha\partial_n\psi = u \text{ на } \Gamma_2. \tag{39}$$

$\lambda, s > 0$ – регуляризирующие параметры.

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

- $(l)$ $a,b,\alpha,\kappa_a,\lambda,s = Const > 0.$
- $(ll)$ $0 < \gamma_0 \le \gamma \in L^\infty(\Gamma_1),\ \theta_b, r \in L^2(\Gamma_1),\ q_b \in L^2(\Gamma).$

**Задача** $(P_\lambda)$. Найти тройку $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta,u) = \frac{1}{2}\|\theta - \theta_b\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_U \to \inf\,,\ \ F(\theta,\psi,u) = 0. \qquad (40)$$

Здесь $F(\theta,\psi,u) : V \times V \times U \to V' \times V'$,

$$(A_1 y,z) = a(\nabla y, \nabla z) + s\int\limits_{\Gamma_1} yz d\Gamma,\ \ (A_2 y,z) = \alpha(\nabla y, \nabla z) + \int\limits_{\Gamma_1} \gamma yz d\Gamma,$$

$$(B_1 f, v) = \int\limits_{\Gamma_1} fv d\Gamma,\ \ (B_2 h, w) = \int\limits_{\Gamma_2} hw d\Gamma.$$

$$F(\theta,\psi,u) = \left\{A_1\theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi - f_1,\ A_2\psi - f_2 - B_2 u\right\}.$$

## Theorem

*При выполнении условий* $(l), (ll)$ *существует решение задачи* $(P_\lambda)$.

### Theorem (2.10)

*Пусть выполняются условия* $(l), (ll)$. *Если* $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$ *– решение задачи оптимального управления, то существует единственная пара* $\{p_1, p_2\} \in V \times V$ *такая, что*

$$A_1 p_1 + g'(\hat{\theta}) p_1 = -B_1(\hat{\theta} - \theta_b), \ A_2 p_2 = \frac{\kappa_a}{\alpha} p_1, \ \lambda \hat{u} = p_2|_{\Gamma_2}. \qquad (41)$$

Градиент функционала $\tilde{J}_\lambda(u)$ равен $\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2$, где $p_2$ – компонента решения сопряженной системы (41), $\hat{\theta} := \theta(u)$.

Решение обратной задачи (31)–(33) удовлетворяет равенствам для всех $v \in V$

$$a(\nabla\theta, \nabla v) + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi, v) = \int\limits_{\Gamma} q_b v d\Gamma, \qquad (42)$$

$$\alpha(\nabla\varphi,\nabla v) + \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\varphi v d\Gamma + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3, v) = \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_2} q v d\Gamma \qquad (43)$$

и при этом $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$.

### Theorem (2.11)

*Пусть выполняются условия $(l), (ll)$, и существует решение задачи* (31)–(33), *удовлетворяющее равенствам* (42), (43). *Если $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$ – решение задачи $(P_\lambda)$ для $\lambda > 0$, то существует последовательность $\lambda \to +0$ такая, что*

$$\theta_\lambda \to \theta_*, \quad \frac{1}{\alpha b}(\psi_\lambda - a\theta_\lambda) \to \varphi_* \quad \textit{слабо в } V, \quad \textit{сильно в } H,$$

*где $\theta_*, \varphi_*$ – решение задачи* (31)–(33).

# Квазилинейная модель с фазовыми ограничениями

**Начально-краевая** задача:

$$\begin{gathered} \sigma\partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) - \beta\varphi = u_1\chi \\ -\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta\varphi = u_2\chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \end{gathered} \tag{44}$$

$$\theta = 0|_\Gamma, \quad \alpha\partial_n\varphi + 2^{-1}\varphi\big|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{45}$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*$$

Задача **оптимального управления** в минимизации

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 \, dxdt \to \inf$$

на решениях начально-краевой задачи.
Здесь $G_1$ и $G_2$ подмножества $\Omega$, $\theta$ представляет разницу между реальной температурой и постоянной температурой на границе.

$\Omega$ является липшицевой ограниченной областью,
$\Gamma = \partial\Omega, Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.
Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

- $(c1)$ $\sigma_0 \le \sigma \le \sigma_1, \quad |\partial\sigma/\partial t| \le \sigma_2$
- $(c2)$ $k_0 \le k(s) \le k_1, \quad |k'(s)| \le k_2, \quad s \in \mathbb{R}$,
- $(c3)$ $\theta_0 \in H$
- $(c4)$ $\alpha_0 \le \alpha(x) \le \alpha_1, \beta_0 \le \beta(x) \le \beta_1, \quad x \in \Omega$,

где $\sigma_i, k_i, \alpha_i$, и $\beta_i$ положительные константы.
Определим нелинейный оператор $A : V \to V'$ и линейный оператор $B : H^1(\Omega) \to \left(H^1(\Omega)\right)'$ используя следующие равенства, справедливые для любого $\theta, v \in V, \varphi, w \in H^1(\Omega)$:

$$(A(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) = (\nabla h(\theta), \nabla v)$$
$$(B\varphi, w) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla w) + (\beta\varphi, w) + 2^{-1}\int_\Gamma \varphi w d\Gamma,$$

где $h(s) = \int_0^s k(r)dr$.

**Задача** $P$.

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 \, dxdt \to \inf,$$

$$\sigma\theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*, \quad u \in U_{ad},$$

где

$$U_{ad} = \left\{ u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in L^2(0,T), \; u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P \right\}.$$

## Theorem (3.1)

*Пусть выполняются условия $(c1)$-$(c3)$, и $\theta_0 \leq \theta_*$ п. в. в $\Omega$. Тогда существует решение задачи $P$.*

**Задача** $P_\varepsilon$. $J_\varepsilon(\theta) \to \inf$, где

$$J_\varepsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 \, dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dxdt,$$

$$\sigma\theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad},$$

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \le \theta_* \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_*. \end{cases}$$

## Theorem (3.2)

*Пусть выполняются условия $(c1)$-$(c3)$. Тогда существует решение задачи $P_\varepsilon$.*

## Theorem (3.3)

*Пусть выполнены условия $(c1)$-$(c3)$, и $\theta_0 \le \theta_*$ п. в. в $\Omega$. $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ – решение задачи $P_\varepsilon$ для $\varepsilon > 0$, тогда существует п-ть $\varepsilon \to +0$*

$$u_\varepsilon \to \widehat{u} \text{ слабо в } L^2(0,T;H), \quad \theta_\varepsilon \to \widehat{\theta} \text{ сильно в } L^2(0,T;H),$$

*где $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$ есть решение задачи $P$.*

$G_d$ и $G_b$ – подобласти $\Omega$. **Начально-краевая** задача

$$\sigma\partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) - \beta\varphi = u_1\chi, \tag{46}$$

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta\varphi = u_2\chi, \tag{47}$$

$$k(\theta)\partial_n\theta + \gamma\,(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + 0.5\varphi|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{48}$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_b} \leq \theta_*.$$

Задача **оптимального управления** заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_{G_d} \left(\theta|_{t=T} - \theta_d\right)^2 dx \to \inf$$

на решениях начально-краевой задачи.

**Задача** $CPP$.

$$J(\theta)=\int_{G_d}\left(\theta|_{t=T}-\theta_d\right)^2 dx \to \inf, \quad \sigma\theta'+A(\theta)=g+u, \quad \theta(0)=\theta_0,$$
$$\theta|_{G_b}\leq\theta_*, \quad u\in U_{ad}.$$

Здесь
$U_{ad}=\left\{u=u_1\chi+u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2}\in L^2(0,T), u_{1,2}\geq 0, u_1+u_2\leq P\right\}$.

## Theorem (3.4)

*Пусть условия $(c1)$–$(c4)$ выполняются, $\theta_0\leq\theta_*$ п. в. в $\Omega, \theta_b\leq\theta_*$ п. в. в $\Sigma$. Тогда решение задачи $CPP$ существует.*

**Задача** $CPP_\varepsilon$.

$$J_\varepsilon(\theta) = \int_{G_d} \left(\theta|_{t=T} - \theta_d\right)^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \int_{G_b} F(\theta)dxdt \to \inf,$$
$$\sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}.$$

Здесь

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \le \theta_*, \\ \left(\theta - \theta_*\right)^2, & \text{если } \theta > \theta_*. \end{cases}$$

## Theorem (3.5)

*Пусть выполняются условия* $(c1)$–$(c4)$. *Тогда существует решение задачи* $CPP_\varepsilon$.

## Theorem (3.6)

*Пусть выполняются условия* $(c1)$–$(c4)$, $\theta_0 \le \theta_*$ *п. в. в* $\Omega$, $\theta_b \le \theta_*$ *п. в. в* $\Sigma$. *Если* $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ *решения задачи* $CPP_\varepsilon$ *для* $\varepsilon > 0$, *тогда существует последовательность* $\varepsilon \to +0$ *такая, что* $u_\varepsilon \to \widehat{u}$ *слабо в* $L^2(0,T;H)$, $\theta_\varepsilon \to \widehat{\theta}$ *слабо в* $L^2(0,T;V)$, *сильно в* $L^2(0,T;H)$, *где* $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$ *есть решение задачи* $CPP$.

- Линеаризация задачи методом Ньютона.
- Триангуляция рассматриваемой области.
- Применение метода конечных элементов для решения системы дифференциальных уравнений.

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|^3\theta = b\kappa_a\varphi, \tag{49}$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a|\theta|^3\theta, \tag{50}$$

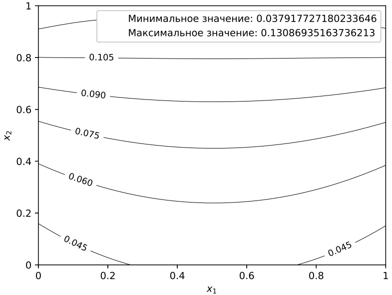
$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta\left(\theta - \theta_b\right)\big|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right)\big|_\Gamma = 0. \tag{51}$$

Линеаризация методом Ньютона:

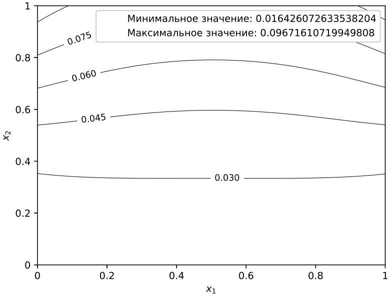
$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a\left(\left(4\widetilde{\theta}^3\theta - 3\widetilde{\theta}^4\right) - \varphi\right) = 0,\\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - \left(4\widetilde{\theta}^3\theta - 3\widetilde{\theta}^4\right)\right) = 0; \end{aligned} \tag{L1}$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta\left(\theta - \theta_b\right)\big|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right)\big|_\Gamma = 0. \tag{L2}$$

**Пример 1** (двумерная область). Положим $\Omega = \{(x,y), 0 \leq x,y \leq 1\}$.
Параметры системы:
$a = 0.6$, $\alpha = 0.333$, $k_a = 1$, $b = 0.025$, $\beta = 1$,
$\gamma = 0.8\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) + 0.5$, $\theta_b = 0.1 + y/2$.



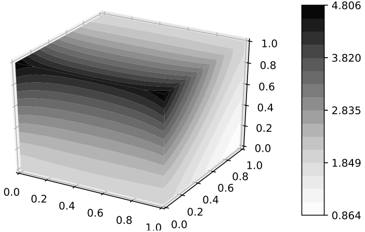

а) $\theta$




б) $\varphi$

Рис.: Решение граничной задачи в двумерной области

**Пример 2** (трёхмерная область). Пусть $\Omega = \{(x,y,z), 0 \le x,y,z \le 1\}$. Определим функции $\gamma, \theta_b$ следующим образом:
$\gamma = 0.8\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) + 0.5$, $\theta_b = 1 - y/2 + z/2$.
Начальное приближение также выберем нулевым. Для нахождения состояния потребовалось шесть итераций, результат представлен на рисунке 2.




а) $\theta$ б) $\varphi$

Рис.: Решение граничной задачи в трёхмерной области

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (52)$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma, \quad (53)$$

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) = f_c, \;\; (f_c, v) = -\int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma, \quad (54)$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = g_c(p_2, \hat{u}), \; (g_c(p_2, \hat{u}), v) = -\int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma, \quad (55)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2(\hat{\varphi} - \theta_b^4)(u - w) d\Gamma \le 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (56)$$

**Алгоритм градиентного спуска с проекцией**

1. Выбор шага $\lambda$, числа итераций $N$, управления $u_0 \in U_{ad}$.
2. для $k \leftarrow 0{,}1{,}2, \ldots, N$ выполнить:
   - Для $u_k$, вычислить $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$ из (52).
   - Вычислить значение $J(\theta_k)$ из уравнения (53).
   - Рассчитать $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$ из (54)–(55),
   - Пересчитать управление $u_{k+1} = P_{ad}\left[u_k - \lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}\right]$.

Положим $\Omega = \{(x,y), 0 \leq x,y \leq 1\}$, $l = 1$ см. Граница $\partial\Omega$:

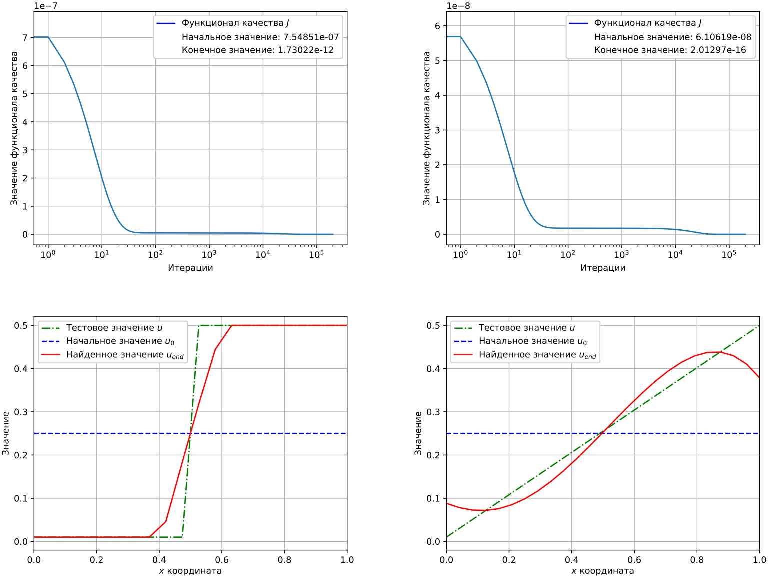
$\Gamma_0 = \{x = \{0,1\}, y \in [0,1]\}$
$\Gamma_1 = \{x \in [0,1], y = 0\}$ – участок с неизвестными отр. свойствами,
$\Gamma_2 = \{x \in [0,1], y = 1\}$ – участок наблюдения.

Будем также далее считать, что $a = 0.006$[см$^2$/с], $b = 0.025$[см/с], $\beta = 0.00005$[см/с], $\kappa = 1$[см$^{-1}$], $\kappa_s = 0$, $A = 0$, $\gamma = 0.3$. Температуру на границе $\Omega$ положим равной $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$.
При указанных параметрах для первого эксперимента выберем следующее тестовое значение функции $u$:

$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leq 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases}$$

и для второго эксперимента: $u(x) = 0.49x + 0.01$.

# Результаты моделирования обратной граничной задачи



Задача оптимального управления для квазистационарной модели:

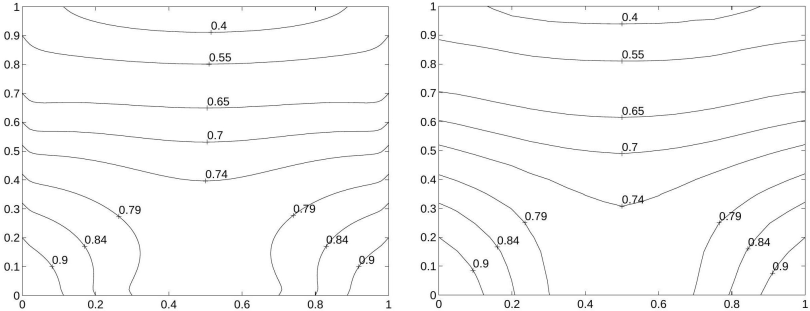
$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 \, d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T \int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \to \inf$$

при ограничениях

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a \left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right) = 0, \\
-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a \left(\varphi - |\theta|\theta^3\right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \\
a\left(\partial_n\theta + \theta\right) = r, \quad \alpha\left(\partial_n\varphi + \varphi\right) = u \text{ на } \Gamma; \\
\theta\big|_{t=0} = \theta_0.
\end{gathered}$$

Задача аппроксимирует задачу с данными типа Коши для температуры.

Область $\Omega \times (-L, L)$, где $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_{1,2} < d\}$ и при большом $L$ сводится к двумерной задаче.
Определим параметры следующим образом: $d = 1$(м),
$a = 0.9210^{-4}$(м$^2$/с), $b = 0.19$(м/с), $\alpha = 0.0333$(м), $\kappa_a = 1$ (м$^{-1}$).




а) Поле температуры, полученное в статье *

б) Поле температуры, полученное предложенным алгоритмом

Рис.: Сравнение полученных температурных полей

* A. Y. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk и N. D. Botkin. — «*Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type*». — Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 75 (2019), c. 262—269.

Возьмём оптические и термофизические среды из статьи **. Параметры $\theta_b$ и $\theta_{in}$ соответствуют температуре $37°$C, коэффициент $\gamma$ равен 1. Начальное положение кончика оптического волокна $(r, z) = (0{,}5)$, скорость отката составляет $2$ мм/с.

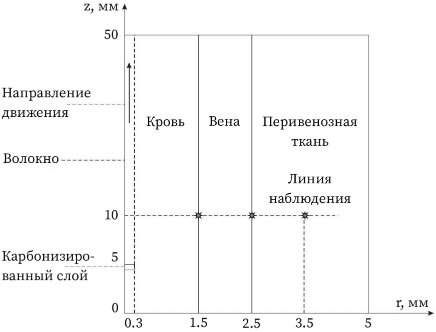
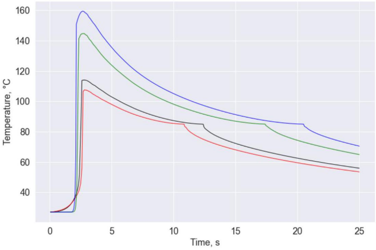


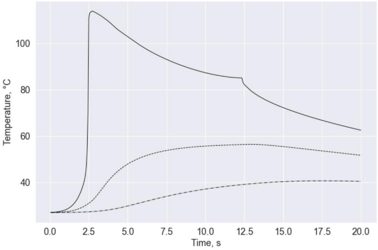

Рис.: Область вычисления

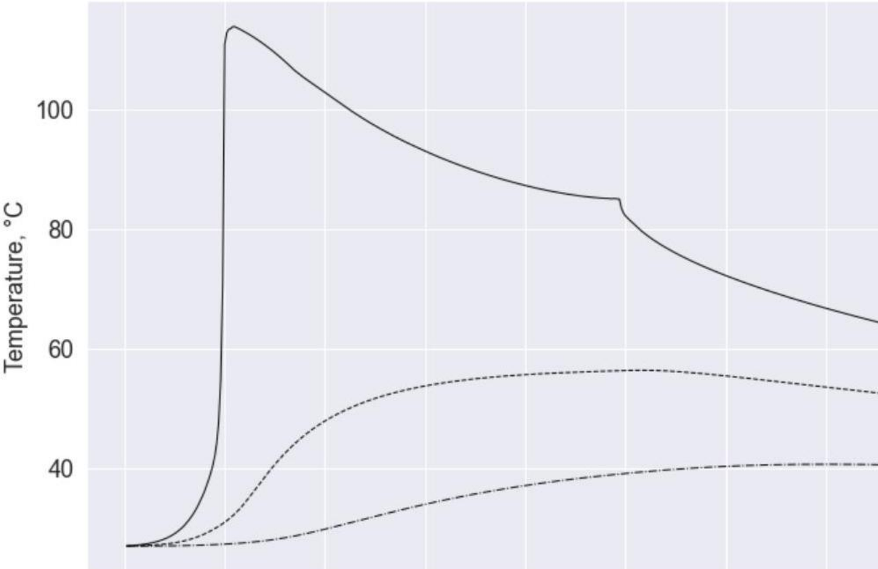
** Peter WM van Ruijven и др. — «*Optical-thermal mathematical model for endovenous laser ablation of varicose veins*». – Lasers in medical science 29 (2014), с. 431—439

Поведение температуры в точке (1.5,10) при мощности лазера 10 Вт и следующих длинах волн: 810 нм (черный), 1064 нм (красный), 1470 нм (зеленый) и 1950 нм (синий).

Поведение температуры в точке (1.5,10) для следующих длин волн и мощностей лазера: 810 нм, $P = 10$ Вт (черный); 1064 нм, $P = 11$ W (красный); 1470 нм, $P = 7{,}5$ W (зеленый); 1950 нм, $P = 6$ W (синий).




Temperature, °C
100
80
60
40

# Научная новизна

- Впервые реализован ...
- Разработана программа ...
- Впервые проведён анализ ...
- Предложена схема ...

# Научная и практическая значимость

- Получены выражения для ....
- Определены условия ....
- Разработаны устройства ....

# Свидетельства о регистрации программы

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023680939

**Солвер обратной задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши**

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет» (ДВФУ) (RU)*

Автор(ы): *Месенев Павел Ростиславович (RU)*

Заявка № **2023669496**
Дата поступления **25 сентября 2023 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***06 октября 2023 г.***

*Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности*

*Ю.С. Зубов*

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024615095

**Программа для нахождения квазирешения обратной задачи сложного теплообмена с дополнительным температурным условием на границе**

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет» (ДВФУ) (RU)*

Автор(ы): *Месенев Павел Ростиславович (RU)*

Заявка № **2024613068**
Дата поступления **15 февраля 2024 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***01 марта 2024 г.***

*Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности*

*Ю.С. Зубов*

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024618129

**Программа для решения граничной обратной задачи сложного теплообмена с переопределением на части границы**

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет» (ДВФУ) (RU)*

Автор(ы): *Месенев Павел Ростиславович (RU)*

Заявка № **2024617082**
Дата поступления **04 апреля 2024 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***09 апреля 2024 г.***

*Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности*

*Ю.С. Зубов*

1. P. R. Mesenev. — «Optimization method for solving the inverse problem of complex heat transfer». — *Дальневост. матем. журн.* 23.1 (2023).
2. A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev и A. E. Kovtanyuk. — «Penalty method to solve an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation». — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 22 (2022), с. 158—163.
3. A. Yu. Chebotarev и P. R. Mesenev. — «An algorithm for solving the boundary value problem of radiation heat transfer without boundary conditions for radiation intensity». — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2020), с. 114—122.
4. P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev. — «A boundary inverse problem for complex heat transfer equations». — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 18.1 (2018), с. 75—84.
5. П. Р. Месенев и А. Ю. Чеботарев. — «Задача сложного теплообмена с условиями типа Коши на части границы». — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 63.5 (2023), с. 856—863.
6. P R Mesenev and A Yu Chebotarev. — "Analysis of an optimization method for solving the problem of complex heat transfer with Cauchy boundary conditions". — *Comput. Math. Math. Phys. 62.1* (Jan. 2022).

# Участие в конференциях

- Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (Владивосток, 2018, 2019);
- Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics (Вычислительные технологии и прикладная математика, Владивосток, 2022);
- International Conference DAYS on DIFFRACTION (Санкт-Петербург, 2021, 2023);
- International Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing (Мюнхен, 2020, 2022).