

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»



На правах рукописи

Месенёв Павел Ростиславович

**Оптимизационные методы решения обратных задач  
сложного теплообмена**

Специальность 1.2.2 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Чеботарев Александр Юрьевич

Владивосток — 2024

## Оглавление

Стр.

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Модели сложного теплообмена</b>	<b>15</b>
1.1 Уравнение переноса теплового излучения	15
1.2 Диффузионное $P_1$ приближение уравнения переноса излучения	21
1.3 Математический аппарат моделирования сложного теплообмена	26
1.4 Стационарная модель сложного теплообмена	33
1.4.1 Постановка краевой задачи	33
1.4.2 Слабое решение краевой задачи	34
1.5 Квазистационарная модель сложного теплообмена	35
1.6 Квазилинейная модель сложного теплообмена	39
1.6.1 Формулировка задачи	39
1.6.2 Расщепление задачи	41
1.6.3 Теорема единственности и сходимость итеративного метода	44
<b>Глава 2. Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши</b>	<b>47</b>
2.1 Квазирешение граничной обратной задачи	47
2.1.1 Постановка обратной задачи	47
2.1.2 Формализация задачи нахождения квазирешения	48
2.1.3 Анализ экстремальной задачи	49
2.2 Анализ оптимизационного метода решения задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши	52
2.2.1 Постановка обратной задачи	52
2.2.2 Формализация задачи управления	53
2.2.3 Разрешимость задачи (CP)	54
2.2.4 Условия оптимальности	56
2.2.5 Аппроксимация задачи с условиями типа Коши	57
2.3 Анализ оптимизационного метода для квазистационарной модели	59
2.3.1 Постановка задачи оптимального управления	59
2.3.2 Формализация задачи управления	60
2.3.3 Разрешимость задачи (OC)	62
2.3.4 Условия оптимальности	65

2.3.5	Аппроксимация задачи с граничными условиями типа Коши . . . . .	67
2.4	Задача сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы . . . . .	68
2.4.1	Постановка обратной задачи . . . . .	68
2.4.2	Разрешимость задачи оптимального управления . . . . .	70
2.4.3	Условия оптимальности первого порядка . . . . .	72
2.4.4	Аппроксимация решения обратной задачи . . . . .	73
<b>Глава 3. Анализ задач оптимального управления для квазилинейных уравнений сложного теплообмена . . . . .</b>		
3.1	Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями . . . . .	75
3.1.1	Формализация задачи оптимального управления . . . . .	76
3.1.2	Предварительные результаты . . . . .	77
3.1.3	Разрешимость задачи оптимального управления . . . . .	78
3.1.4	Задача со штрафом . . . . .	80
3.2	Метод штрафных функций для решения задачи оптимального управления с финальным наблюдением . . . . .	82
3.2.1	Формализация задачи оптимального управления . . . . .	83
3.2.2	Предварительные результаты . . . . .	83
3.2.3	Метод штрафных функций . . . . .	85
<b>Глава 4. Численные методы и комплексы программ . . . . .</b>		
4.1	Численные алгоритмы решения прямых задач сложного теплообмена . . . . .	87
4.1.1	Метод Ньютона для стационарной модели . . . . .	87
4.1.2	Примеры численного решения краевой задачи (4.1)–(4.3) . . . . .	88
4.2	Алгоритмы решения граничных обратных задач . . . . .	90
4.2.1	Градиентный спуск и модификации . . . . .	90
4.2.2	Алгоритм нахождения квазирешения обратной задачи . . . . .	92
4.2.3	Примеры численного моделирования для двумерного случая . . . . .	94
4.2.4	Алгоритм решения задачи оптимального управления для квазистационарной модели . . . . .	95

4.2.5	Численное решение квазилинейной начально-краевой задачи моделирующей ВВЛА . . . . .	98
4.2.6	Метод штрафов для задачи с фазовыми ограничениями . . . . .	102
4.3	Алгоритмы решения задач с данными Коши. Примеры. . . . .	105
4.3.1	Задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши на всей границе . . . . .	105
4.3.2	Задача сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы . . . . .	109
Заключение . . . . .		113
Словарь терминов . . . . .		114
Список литературы . . . . .		115
Список рисунков . . . . .		128
Список таблиц . . . . .		129
Приложение А. Приложения . . . . .		130

## Введение

Под сложным теплообменом понимают процесс распространения тепла излучением, теплопроводностью и конвекцией. При этом важно, что радиационный перенос тепла дает существенный вклад в распределение температурного поля. Для многих инженерных приложений моделирование процессов теплопередачи имеет первостепенное значение (например, это относится к радиационному теплообмену в полупрозрачных материалах). Температура – важнейший параметр практически во всех производственных этапах. Следовательно, знание температурных полей необходимо для контроля производственных процессов и качества результата.

С математической точки зрения процесс сложного теплообмена моделируется системой уравнений с частными производными, включающей уравнение теплопроводности, а также интегро-дифференциальное уравнение переноса теплового излучения [1–4]. Теоретический и численный анализ различных задач для такой системы является весьма затратным поскольку интенсивность излучения зависит не только от пространственной и временной переменных, но и от направления распространения излучения. Имеется ряд аппроксимаций уравнения переноса излучения, в том числе диффузионное  $P_1$ -приближение, в котором интенсивность излучения усредняется по направлениям.  $P_1$ -приближение является частным случаем метода сферических гармоник ( $PN$ -приближения) и упрощенного метода сферических гармоник ( $SPN$ -приближения). В данной работе рассмотрены модели, основанные на  $P_1$ -приближении.

В классических прямых задачах сложного теплообмена задаются параметры системы, и по ним вычисляется состояние системы – температурное поле и интенсивность теплового излучения. Обратные задачи сложного теплообмена состоят в разыскании неизвестных параметров системы по некоторой дополнительной информации (условия переопределения) о температурном поле или интенсивности излучения. Методы, основанные на решении обратных задач, продолжают оставаться актуальным, быстро развивающимся направлением исследований. Отметим трудности, возникающие при решении обратных задач сложного теплообмена.

Эти задачи математически классифицируются как некорректные в общем смысле из-за неустойчивости решений. Развитие методов оптимизации позво-

ляет исправить проблемы некорректности исследуемых задач. В основе таких методов лежит идея замены исходной задачи на задачу оптимизации и фактически использует методику А.Н. Тихонова регуляризации задачи.

Диссертация посвящена теоретическому и численному анализу одному из наиболее распространенных на практике типу обратных задач – граничных обратных задач сложного теплообмена в трёхмерной области в рамках  $P_1$ -приближения уравнения переноса излучения. При этом основное внимание уделяется разработке и обоснованию оптимизационных методов решения указанных задач. Исследование обратных задач для математических моделей радиационного теплопереноса, учитывающих одновременно вклад эффектов теплопроводности и излучения, даёт теоретическую основу для эффективных инженерных решений в различных областях, таких как производство стекла, лазерная термотерапия и другие.

**Степень разработанности темы исследования.** Степень разработанности темы исследования. Имеется значительное число работ, посвященных теоретическому анализу моделей сложного теплообмена. Результаты А. А. Амосова, М. Laitinen, Т. Tiihonen, Р.-Е. Druet и др. [5–21] посвящены анализу разрешимости моделей сложного теплообмена, которые включают уравнение теплопроводности с нелинейным нелокальным краевым условием, моделирующим тепловое излучение границы области и теплообмен излучением между частями границы, в [6, 8, 9, 11, 13–15] рассмотрены стационарные модели, в [5, 7, 10–14] — нестационарные.

Анализ моделей сложного теплообмена в полупрозрачной среде, в которых для моделирования радиационного теплообмена используется полное уравнение переноса излучения представлен в следующих статьях. В [22, 23] доказана однозначная разрешимость одномерных стационарных задач радиационно-кондуктивного теплообмена, в [24–26] доказана однозначная разрешимость трехмерных задач: в [26] исследована стационарная модель, в [25] – нестационарная, в [24] – квазистационарная. Под квазистационарными моделями сложного теплообмена понимаются модели, включающие нестационарное уравнение теплопроводности и стационарное уравнение переноса излучения. В работах R. Pinnau, O. Tse [27, 28] проведен теоретический анализ квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе  $SP_1$ - и  $SP_3$ -приближений. Эти модели включают уравнение теплопроводности, стационарное  $SP_N$ -приближение, а также в [28] уравнения Навье–Стокса в

приближении Буссинеска. В работах Г.В. Гренкина, А.Е. Ковтанюка, А.Ю. Чеботарева [29—31] доказана однозначная разрешимость краевых задач для моделей сложного теплообмена на основе  $P_1$ -приближения, доказана сходимость метода простой итерации нахождения решения. В [32] доказана однозначная разрешимость субдифференциальной краевой задачи с многозначной зависимостью коэффициента излучения границы от интенсивности излучения.

Подробный обзор различных численных методов решения задач сложного теплообмена можно найти в [4]. Большинство методов можно разделить на четыре класса:

- Методы диффузионной аппроксимации. Типичным примером является приближение Розеланда [33, 34].
- Методы, в которых зависимость теплового излучения от направления выражается рядом специальных базисных функций. Представителями методов являются  $PN$  и  $SPN$ -аппроксимации.
- Методы, использующие дискретизацию угловой зависимости, например метод дискретных ординат, который является наиболее популярным.
- Методы Монте-Карло.

Статьи [35—38] посвящены численному моделированию в рамках диффузионных моделей сложного теплообмена, в [39] исследована схема метода конечных объемов для решения квазистационарной системы уравнений сложного теплообмена на основе  $P_1$ -приближения уравнения переноса излучения. Сравнение  $P_1$ -приближения с другими методами аппроксимации уравнения переноса излучения проводилось в [36, 40—44]. Численный анализ нестационарного  $P_1$ -приближения выполнен в [41, 44—47].

Основополагающие работы А.Н. Тихонова [48] и его коллег, которые исследовали обратные задачи для уравнений математической физики, стали отправной точкой для разработки методов преодоления неустойчивостей в обратных задачах. О.М. Алифанов [49] в своих работах, посвященных обратным задачам сложного теплообмена, также сделал значительный вклад в развитие этой области. J.V. Beck [50] предложил новые подходы к решению обратных задач, основанных на методах оптимизации и статистическом анализе. Отметим также серьезный теоретический анализ обратных задач тепломассопереноса представленный в работах С.Г.Пяткова и его учеников [51—53].

Решение обратных задач оптимизационным методом можно рассматривать как соответствующую задачу оптимального управления системой,

моделируемой уравнениями сложного теплообмена. Обратно, каждую задачу оптимального управления можно интерпретировать как обратную экстремальную задачу. Отметим следующие работы, посвященные решению обратных задач в рамках моделей сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения. В [54] проведен теоретический анализ задачи оптимального управления источниками тепла в рамках квазистационарной модели сложного теплообмена, включающей полное уравнение переноса излучения. В [55] разработан численный алгоритм решения задачи оптимального управления источниками тепла и излучения в рамках стационарной модели сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения. Работа [56] посвящена теоретическому и численному анализу обратной задачи восстановления начального распределения температуры по известной зависимости температуры на границе области от времени в рамках квазистационарной модели сложного теплообмена. Отметим также работы [13, 57–59], посвященные анализу задач оптимального управления для стационарных моделей сложного теплообмена в прозрачной среде, включающих уравнение теплопроводности с нелинейным нелокальным краевым условием, моделирующим тепловое излучение границы области и теплообмен излучением между частями границы, и работу [60], в которой построен численный алгоритм решения задачи оптимального управления граничными коэффициентами в одномерной нестационарной модели, включающей уравнение теплопроводности с нелинейным краевым условием, которое описывает тепловое излучение границ. В [47, 61–65] разработаны численные методы решения задач оптимального управления граничной температурой для квазистационарной модели сложного теплообмена на основе  $P_1$ -приближения, при этом в [61–63] использовалась модель с учетом зависимости коэффициента поглощения от частоты излучения: в [47, 64] минимизировалось отклонение поля температуры от заданного и для решения задачи оптимизации применялся метод Ньютона, в [63] для решения задачи минимизации отклонения поля температуры от заданного применялся метод проекции градиента, в [61, 65] минимизировалась норма градиента температуры и для решения задачи оптимизации применялся метод проекции градиента, в [62] решалась задача минимизации отклонения поля температуры от заданного на основе серии из трех моделей, аппроксимирующих уравнение переноса излучения с разной точностью, использовался оптимизационный метод второго порядка. В [65] проведен теоретический анализ задачи оптимального управления температурой



на границе области в рамках стационарной диффузионной модели сложного теплообмена, для численного решения задачи управления применен метод проекции градиента. В работах А.Е. Ковтанюка, А.Ю. Чеботарева и др. [29, 66–69] исследованы задачи оптимального управления коэффициентом излучения границы области в рамках стационарной модели сложного теплообмена на основе  $P_1$ -приближения.

В последние годы исследования моделей сложного теплообмена стали особенно актуальными в связи с практическими приложениями. Ниже приведены некоторые примеры исследований практической применимости рассматриваемых моделей. В работах [33, 36, 43, 47, 61–65, 70, 71] модели сложного теплообмена на основе  $P_1$ -приближений применялись для моделирования и оптимизации сложного теплообмена при производстве стекла, в [72–74] моделировался сложный теплообмен в камерах сгорания газовых турбин, в [75] диффузионные модели использовались для моделирования переноса теплового излучения в растущем кристалле. Также  $P_1$ -приближение применялось в составе моделей лазерной термотерапии [76–78]. Процедура внутривенной лазерной абляции (ВВЛА) является безопасной и эффективной в лечении варикозных вен [79]. Математическое моделирование лучевых и тепловых процессов при ВВЛА имеет решающее значение для определения оптимальных параметров излучения, обеспечивающих достаточно высокие температуры внутри вены для успешной облитерации, обеспечивая при этом сохранность окружающих тканей. Результаты численного моделирования для различных длин волн и диаметров вен обсуждались в ряде работ [80–83]. Задачи оптимального управления для модели ВВЛА рассматриваются в [84, 85]. В [84] поставлена задача оптимального управления для модели реакция-диффузия, описывающей процедуру ВВЛА, которая заключается в аппроксимации заданного температурного профиля в определенной точке области модели. В [85] изучается аналогичная задача оптимального управления. Здесь целевой функционал выбран таким образом, что его минимизация позволяет достичь заданного распределения температуры в различных частях области модели.

Несмотря на представленный в обзоре значительный объем исследований, включающий анализ обратных и обратных экстремальных задач, ряд важных задач, связанных с анализом корректности стационарных, квазистационарных и квазилинейных *моделей сложного теплообмена*, корректности постановок поиска квазирешений граничных обратных задач, *построением и обосно-*

**ванием сходимости** оптимизационных алгоритмов решения обратных задач и задач с краевыми условиями Коши, а также с **разработкой комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов** и тестирования предложенных алгоритмов оставался нерешенным. Настоящая работа посвящена решению указанных проблем.

**Цели и задачи диссертационной работы.** *Целью работы* является является теоретический и численный анализ граничных обратных задач, включая задачи с условиями типа Коши на границе области, и задач оптимального управления для моделей сложного теплообмена на основе  $P_1$ -приближения уравнения переноса излучения, а именно:

- исследование разрешимости краевых и начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных моделей сложного теплообмена;
- разработка оптимизационных алгоритмов решения обратных задач и задач с краевыми условиями Коши, теоретический анализ и обоснование их сходимости;
- разработка комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов и тестирования предложенных алгоритмов.

*Для достижения целей работы были сформулированы следующие задачи:*

- доказать существование и единственность решения начально-краевой задачи для квазистационарной и квазилинейной моделей сложного теплообмена, разработать итерационный алгоритм нахождения решения и обосновать его сходимость;
- получить условия существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на границе, вывести условия оптимальности первого порядка и получить численный алгоритм;
- выполнить анализ оптимизационных методов решения задач сложного теплообмена с условиями Коши на границе для стационарной и квазистационарной моделей, исследовать разрешимость возникающих регуляризованных экстремальных задач, получить условия оптимальности, обосновать сходимость решений регуляризованных задач к решению задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю;
- провести теоретический анализ обратных экстремальных задач с фазовыми ограничениями для квазилинейной модели сложного теплообмена, рассмотреть аппроксимации задачами с штрафными функционалами и доказать сходимость их решений при увеличении штрафа;

– предложить численные методы решения рассматриваемых краевых и оптимизационных задач сложного теплообмена, адаптировать метод Ньютона и градиентные методы для их решения, реализовать полученные методы в виде программных систем, осуществить тестирование предложенных алгоритмов используя данные реальных сред и материалов.

**Научная новизна.** В работе получены новые априорные оценки решений начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных уравнений сложного теплообмена и доказана их нелокальная однозначная разрешимость. Для рассмотренных моделей сложного теплообмена рассмотрены новые постановки граничных обратных задач, предложены оптимизационные методы их решения. Выполнен теоретический анализ возникающих новых экстремальных задач. Представлены априорные оценки решений регуляризованных задач и впервые обоснована сходимость их решений к точным решениям обратных задач. Для решения задач с фазовыми ограничениями, предложены алгоритмы, основанные на аппроксимации экстремальными задачами со штрафом. Разработаны и протестированы новые алгоритмы решения прямых, обратных и экстремальных задач для моделей сложного теплообмена.

**Теоретическая и практическая значимость.** Научная значимость результатов диссертации основана, с одной стороны, на решении открытых задач, связанных с корректностью моделей теплообмена, учитывающих тепловое излучение, теоретическим и численным анализом граничных обратных задач и задач оптимального управления. С другой стороны, развитие новых оптимизационных методов решения рассматриваемых нелинейных обратных задач является основой для анализа прикладных задач и задач проектирования систем с заданными экстремальными свойствами. Решение граничных обратных задач имеет практическое значение при выборе оптимальных параметров границы области, в которой происходит процесс сложного теплообмена. Задачи оптимизации имеют важное практическое применение при выборе параметров системы для получения необходимого распределения температуры или уровня теплового излучения. Необходимость выбора параметров системы возникает при проектировании инженерных установок, в которых присутствуют процессы сложного теплообмена. Теоретическая значимость работы обусловлена также тем, что результаты, связанные с корректностью рассматриваемых задач, сходимость предлагаемых численных алгоритмов имеют нелокальный характер и не содержат нефизичных ограничений типа малости определенных парамет-

ров. Представленный комплекс программ имеет открытый характер и может дополняться для решения прикладных обратных задач сложного теплообмена. С помощью разработанного комплекса программ проведено численное моделирование процесса внутривенной лазерной абляции, изучено влияние различных факторов на распределения полей температуры и интенсивности излучения.

**Методология и методы исследования.** В работе широко использовались методы математического и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории экстремальных задач. Для разработки численных алгоритмов решения применялись методы вычислительной математики, объектно-ориентированное и функциональное программирование, методы оптимизации и другие. Методология исследования обратных задач, рассмотренных в работе, заключается в следующем. Предварительно выполняется теоретический анализ краевых или начально-краевых задач, моделирующих рассматриваемый процесс. Для построения оптимизационного алгоритма ставится экстремальная задача или задача оптимального управления для рассматриваемой модели сложного теплообмена и проводится ее теоретический анализ, включающий нахождение условий разрешимости и вывод условий оптимальности. Для регуляризованных задач обосновывается сходимость последовательности их решений. Далее, на основе полученных условий оптимальности строится градиентный метод решения обратной задачи. Полученные алгоритмы реализуются в виде комплекса программ и теоретические результаты тестируются на численных примерах, иллюстрирующих эффективность предложенных методов.

### **Положения, выносимые на защиту.**

*В области математического моделирования:*

1. Доказательство однозначной разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей квазистационарный сложный теплообмен в трехмерной области.
2. Доказательство однозначной разрешимости квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен с нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.
3. Обоснование существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на части границы и условием переопределения на другой части. Вывод необходимых условий оптимальности.
4. Вывод условий разрешимости экстремальных задач, аппроксимирующих решения граничных обратных задач (задач с условиями Коши на границе

области) для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена.

5. Построение систем оптимальности и доказательство их невырожденности для задач оптимального управления стационарными, квазистационарными и квазилинейными уравнениями сложного теплообмена.

*В области численных методов:*

6. Разработка численного алгоритма решения квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен и доказательство его сходимости.
7. Обоснование сходимости последовательности решений задач оптимального управления к решениям задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю.
8. Обоснование сходимости алгоритма решения экстремальных обратных задач с ограничениями температурных полей методом штрафа.

*В области комплексов программ:*

9. Разработка программ, реализующих численное моделирование процессов сложного теплообмена на основе метода конечных элементов. Реализация и тестирование оптимизационных алгоритмов решения граничных обратных задач для стационарных, квазистационарных и квазилинейных моделей.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность полученных в диссертации теоретических результатов основывается на использовании методов функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории оптимального управления распределенными системами задач и строгих математических доказательствах. Достоверность результатов численного моделирования обеспечивается доказательством сходимости предложенных итерационных процессов и тестированием разработанного комплекса программ.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах департамента математического и компьютерного моделирования ДВФУ, института прикладной математики ДВО РАН, института автоматизации и процессов управления ДВО РАН и на следующих научных конференциях:

- Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (Владивосток, 2018, 2019);
- Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics (Вычислительные технологии и прикладная математика, Владивосток, 2022);

- International Conference DAYS on DIFFRACTION (Санкт-Петербург, 2021, 2023);
- International Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing (Мюнхен, 2020, 2022).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 10 статьях, из них 4 статьи [86—89] в «Дальневосточном математическом журнале», индексируемом в ядре РИНЦ и в международных базах научного цитирования (MathSciNet, zbMATH), 1 статья [90] в трудах CEUR (Scopus), 1 статья [91] в «Journal of Physics: Conference Series» (Scopus), 2 статьи [92, 93] в Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (Web of Science, Scopus), 2 статьи [94, 95] в «Журнале вычислительной математики и математической физики» (Web of Science, Scopus, MathSciNet, zbMATH).

Получено 3 свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [96—98].

**Личный вклад автора.** Результаты в области математического моделирования получены совместно с научным руководителем. Результаты в области численных методов и комплексов программ получены автором самостоятельно.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 131 страницу, включая 17 рисунков и 0 таблиц. Список литературы содержит 135 наименований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №20-01-00113), Российского научного фонда (проект №23-21-00087) и гранта Министерства науки и высшего образования РФ на поддержку Дальневосточного центра математических исследований (2020-2023).

## Глава 1. Модели сложного теплообмена

### 1.1 Уравнение переноса теплового излучения

Уравнение переноса излучения описывает поле интенсивности излучения при взаимодействии теплового излучения с поглощающей, излучающей и рассеивающей средой (radiatively participating medium). Будем предполагать, что среда имеет постоянный показатель преломления  $n$ , является не поляризующей, находится в состоянии покоя (по сравнению со скоростью света) и в локальном термодинамическом равновесии [4, с. 280].

Спектральной интенсивностью излучения  $I_\nu(x\omega, t)$  [Вт/(м<sup>2</sup> · стер · Гц)] называется количество энергии излучения, проходящего через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения  $\omega$ , внутри единичного телесного угла, осью которого является направление  $\omega$ , в единичном интервале частот, включающем частоту  $\nu$ , и в единицу времени. Считаем, что направления излучения  $\omega$  связаны с точками единичной сферы  $S = \{\omega \in R^3 : \|\omega\| = 1\}$ .

Рассмотрим пучок излучения интенсивностью  $I_\nu(x\omega, t)$ , распространяющегося в поглощающей, излучающей и рассеивающей среде в заданном направлении. Энергия излучения будет уменьшаться вследствие поглощения излучения веществом и отклонения части его от первоначальной траектории в результате рассеяния во всех направлениях, но одновременно она будет возрастать вследствие испускания излучения веществом.

Обозначим через  $\kappa_{a\nu}$  [м<sup>-1</sup>] спектральный коэффициент поглощения, равный доле падающего излучения, поглощенной веществом на единице длины пути распространения излучения. Приращение интенсивности излучения за счет поглощения равно  $(dI_\nu)_{\text{погл}} = -\kappa_{a\nu} I_\nu ds$ , где  $ds$  — элемент пути. Отметим, что  $1/\kappa_{a\nu}$  есть средняя длина свободного пробега фотона до его поглощения веществом [4, с. 281].

Для получения выражения для испускания излучения элементом объема часто используется предположение о локальном термодинамическом равновесии. Оно означает, что любой малый элемент объема среды находится в локальном термодинамическом равновесии, вследствие чего состояние любой

точки может быть охарактеризовано локальной температурой  $T(x)$ . Это предположение законно, когда столкновения атомов в веществе происходят столь часто, что это приводит к локальному термодинамическому равновесию в каждой точке  $x$  среды. В этом случае испускание излучения элементом объема можно описать с помощью функции Планка [1, с. 36] Приращение интенсивности излучения за счет испускания равно  $(dI_\nu)_{\text{исп}} = j_\nu ds$   $j_\nu$  – коэффициент испускания. В локальном термодинамическом равновесии справедлива формула [1, с. 36] [4, с. 282].  $j_\nu = \kappa_{a\nu} I_{b\nu}$ , где  $I_{b\nu}$  – интенсивность излучения абсолютно черного тела.

Абсолютно черным называется тело, которое поглощает все падающее со всех направлений излучение любой частоты без отражения, пропускания и рассеяния. Из закона Кирхгофа следует, что абсолютно черное тело также излучает максимальное количество энергии при данной температуре [1, с. 25][4, с. 5]. Интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре  $T$  равна

$$I_{b\nu}(T) = \frac{2h\nu^3 n^2}{c_0^2 (e^{h\nu/kT} - 1)},$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $k$  – постоянная Больцмана,  $c_0$  – скорость света в вакууме,  $T$  – абсолютная температура,  $n$  – показатель преломления. Интегральная интенсивность излучения абсолютно черного тела  $I_b(T)$  вычисляется по формуле [1, с. 28],[4, с. 10].

$$I_b(T) = \int_0^\infty I_{b\nu}(T) d\nu = \frac{n^2 \sigma T^4}{\pi},$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана.

Рассеяние излучения учитывается так же, как поглощение, с той разницей, что рассеянная энергия просто перенаправляется и возникает в приращении интенсивности излучения в другом направлении. Различают когерентное и некогерентное рассеяние. Рассеяние называется когерентным, если рассеянное излучение имеет ту же самую частоту, что и падающее излучение, и некогерентным, если частота рассеянного излучения отличается от частоты падающего излучения. В дальнейшем мы будем рассматривать только когерентное рассеяние. Обозначим через  $\kappa_{s\nu}$  [м<sup>-1</sup>] спектральный коэффициент рассеяния, равный доле падающего излучения, рассеянной веществом во всех направлениях на единице длины пути распространения излучения. Тогда приращение интенсивности излучения за счет «рассеяния вне» равно  $(dI_{\nu})_{\text{расс.вне}} = -\kappa_{s\nu} I_{\nu} ds$ . Для



описания «рассеяния в» вводится неотрицательная фазовая функция рассеяния  $P_{nu} = (\omega, \omega')$  такая, что  $\frac{1}{4\pi} \int_S P_{nu}(\omega, \omega') d\omega = 1$ . Величина  $\frac{1}{4\pi} \int_S P_{nu}(\omega, \omega') d\omega$  определяет вероятность того, что излучение частоты  $\nu$ , падающее в направлении  $\omega'$ , будет рассеяно в пределах элементарного телесного угла  $d\omega$  в направлении  $\omega$ . Случай  $P_\nu \equiv 1$  соответствует изотропному рассеянию. Тогда для того, чтобы получить приращение интенсивности излучения за счет «рассеяния в», нужно проинтегрировать  $I_\nu(\omega') P_\nu(\omega, \omega') / 4\pi$  по всем входящим направлениям  $\omega'$  [4, с. 283]:  $(dI_\nu)_{\text{расс.в}} = ds \frac{\kappa_{sv}}{4\pi} \int_S I_\nu(\omega') P_{nu}(\omega, \omega') d\omega'$ . Учитывая приращения интенсивности излучения с учетом поглощения, испускания и рассеяния, получим искомое уравнение переноса излучения [1, с. 272] [4, с. 284]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(x, \omega, t)}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_x I_\nu(x, \omega, t) + \kappa_\nu I_\nu(x, \omega, t) = \\ = \kappa_{av} I_{bv}(T(x, t)) + \frac{\kappa_{sv}}{4\pi} \int_S I_\nu(x, \omega', t) P_\nu(\omega, \omega') d\omega'. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\kappa_{nu} = \kappa_{av} + \kappa_{sv}$  – полный спектральный коэффициент взаимодействия,  $c$  – скорость света в среде.

Далее получим граничные условия для уравнения переноса излучения. Будем считать, что граница области непрозрачна, испускает излучение диффузно и отражает излучение диффузно и зеркально. Степенью черноты поверхности  $\varepsilon_\nu(x)$  называется отношение количества энергии, испускаемого данной поверхностью, к количеству энергии, испускаемому абсолютно черным телом при той же температуре. При диффузном испускании излучения степень черноты не зависит от направления и определяется формулой  $\varepsilon_\nu(x) = \frac{I_{\nu, \text{исп}}(x)}{I_{b\nu}(T(x))}$ , где  $I_{\nu, \text{исп}}(x)$  – интенсивность излучения, испускаемого поверхностью при температуре  $T(x)$  [1, с. 53]

При диффузном поглощении степень черноты равняется поглотительной способности, которая равна доле поглощенного излучения [4, с. 66]. Также введем коэффициенты зеркального и диффузного отражения  $\rho_\nu^s(x), \rho_\nu^d(x)$  как части зеркально и диффузно отраженного излучения соответственно. Отметим, что в случае непрозрачной поверхности  $\varepsilon_\nu + \rho_\nu^s + \rho_{nu=1}^d = 1$ . Граничное условие имеет вид [4, с. 289][99].

$$\begin{aligned} I_\nu(x, \omega, t) = \varepsilon_\nu(x) I_{bv}(T(x, t)) + \rho_\nu^s(x) I_\nu(x, \omega_R, t) + \\ + \frac{\rho_\nu^d(x)}{\pi} \int_{\omega' \cdot \mathbf{n} > 0} I_\nu(x, \omega', t) \omega' \cdot \mathbf{n} d\omega', \omega \cdot \mathbf{n} < 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе области,  $\boldsymbol{\omega}$  – входящее направление,  $\boldsymbol{\omega}_R$  – направление отражения, определяемое из соотношения  $\boldsymbol{\omega} + (-\boldsymbol{\omega}_R) = 2 \cos \theta = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$  косинус угла между вектором нормали и направлением падающего излучения. Таким образом,  $\boldsymbol{\omega}_R = \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ .

Поле температуры описывается уравнением теплопроводности [4, с. 297]:

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - k \Delta T(x, t) + \rho c_p \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla T(x, t) = -\operatorname{div} \mathbf{q}_r(x, t),$$

где  $T[K]$  – температура,  $\mathbf{v}$  [м/с] поле скоростей,  $k$  [Вт/м · К] – коэффициент теплопроводности,  $c_p$  [Дж/(кг · К)] – удельная теплоёмкость при постоянном давлении,  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] – плотность,  $\mathbf{q}_r$  – вектор плотности потока излучения, определяемый формулой [4, с. 292]  $\mathbf{q}_r(x, t) = \int_0^\infty \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega} dv$ . Дивергенция вектора плотности потока излучения  $\operatorname{div} \mathbf{q}_r$  характеризует изменение в единицу времени энергии излучения, заключенной в единице объема среды, по всему спектру частот вследствие испускания излучения во всё сферическое пространство и поглощения падающего из него излучения [1, с. 274]. Для нахождения  $\operatorname{div} \mathbf{q}_r$  проинтегрируем уравнение (1.1) по  $\boldsymbol{\omega} \in S$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} + \operatorname{div} \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega} + \kappa_v \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} = \\ = 4\pi \kappa_{av} I_{bv}(T(x, t)) + \frac{\kappa_{sv}}{4\pi} \int_S \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}', t) P_v(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' d\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Поменяем порядок интегрирования во втором слагаемом в правой части:

$$\begin{aligned} \int_S \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}', t) P_v(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' d\boldsymbol{\omega} = \\ \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}', t) \int_S P_v(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega}' = \\ 4\pi \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}', t) d\boldsymbol{\omega}'. \end{aligned}$$

Обозначим через  $G_v(x, t) = \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega}$  пространственную плотность падающего излучения. Тогда

$$\frac{1}{c} \frac{\partial G_v(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega} + \kappa_v G_v(x, t) = 4\pi \kappa_{av} I_{bv}(T(x, t)) + \kappa_{sv} G_v(x, t),$$

отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega} = 4\pi \kappa_{av} I_{bv}(T(x, t)) - \kappa_{av} G_v(x, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial G_v(x, t)}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{q}_r(x, t) = \int_0^\infty \kappa_{av} (4\pi I_{bv}(T(x, t)) - G_v(x, t)) dv - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty G_v(x, t) dv. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение теплопроводности принимает вид

$$\begin{aligned} & \rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - k \Delta T(x, t) + \rho c_p \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla T(x, t) = \\ & = - \int_0^\infty \int_S \kappa_{av} (I_{bv}(T(x, t)) - I_v(x, \omega, t)) d\omega dv + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int_S I_v(x, \omega, t) d\omega dv. \end{aligned}$$

Получим граничные условия для уравнения теплопроводности из закона Ньютона-Рихмана. Согласно этому закону, плотность теплового потока пропорциональна разности температур поверхности тела  $T$  и окружающей среды  $T_b$  :  $q = h(T - T_b)$ . Здесь  $h$  [Вт / (м<sup>2</sup> · К)] - коэффициент теплоотдачи, характеризующий интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству тепла, отдаваемому (воспринимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью и средой в 1 К. Отметим, что непосредственно на поверхности контакта тела с окружающей средой  $T = T_b$ , однако мы считаем, что температура  $T$  на границе поверхности - это температура за пределами пограничного слоя [100]. Рассматривая граничное условие для уравнения переноса излучения (1.2), будем считать, что поверхностное излучение происходит из пограничного слоя, поэтому в качестве аргумента функции  $I_{bv}(T)$  будем использовать  $T_b$ . По закону сохранения энергии количество тепла, отводимое с единицы поверхности вследствие теплоотдачи, должно равняться теплу, подводимому к единице поверхности вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, тогда  $h(T - T_b) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -k \nabla T \cdot \mathbf{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n}$ . Таким образом, граничное условие имеет вид:

$$k \frac{\partial T(x, t)}{\partial n} + h(x) (T(x, t) - T_b(x, t)) = 0.$$

Следует отметить, что условия третьего рода для температуры обычно ставятся на твердой стенке, где  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ . В данном случае постановка условий третьего рода на всей границе и, в частности, на участке втекания моделирует процесс теплообмена при малых значениях нормальной компоненты скорости.

В дальнейшем мы будем рассматривать случай «серой» среды, когда  $\kappa_{av}$  и  $K_{sv}$  не зависят от частоты  $\nu$ , так что  $K_{av} = K_a$ ,  $K_{sv} = K_s$ . Граница области также предполагается «серой». В этом случае уравнения и граничные условия принимают вид [99]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I(x, \boldsymbol{\omega}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_x I(x, \boldsymbol{\omega}, t) + \kappa I(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \\ = \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S P(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') I(x, \boldsymbol{\omega}', t) d\boldsymbol{\omega}' + \kappa_a \frac{\sigma n^2 T^4(x, t)}{\pi} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - k \Delta T(x, t) + \rho c_p \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla T(x, t) = \\ = -\kappa_a \left( 4\sigma n^2 T^4(x, t) - \int_S I(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S I(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} I(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \varepsilon(x) \frac{\sigma n^2}{\pi} T_b^4(x, t) + \rho^s(x) I(x, \boldsymbol{\omega}_R, t) + \\ + \frac{\rho^d(x)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} > 0} I(x, \boldsymbol{\omega}', t) \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} d\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T(x, t)}{\partial n} + h(x) (T(x, t) - T_b(x, t)) = 0. \\ \text{Здесь } I = \int_0^\infty I_v dv. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Поставим также начальные условия:

$$I(x, \boldsymbol{\omega}, 0) = I_0(x, \boldsymbol{\omega}), \quad T(x, 0) = T_0(x). \quad (1.7)$$

Соотношения (1.3)–(1.7) представляют собой модель сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения.

Перейдем к безразмерным величинам. Обозначим

$$I(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \left( \frac{\sigma n^2}{\pi} T_{\max}^4 \right) I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t), \quad T(x, t) = T_{\max} \theta(x, t), \quad (1.8)$$

Здесь  $I^*$  — нормализованная интенсивность излучения,  $\theta$  — нормализованная температура,  $T_{\max}$  — максимальная температура в ненормализованной модели. Подставив (1.8) в уравнения (1.3)–(1.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_x I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) + \kappa I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \\ = \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S P(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') I^*(x, \boldsymbol{\omega}', t) d\boldsymbol{\omega}' + \kappa_a \theta^4(x, t), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a \Delta \theta(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta(x, t) = \\ = -b \kappa_a \left( \theta^4(x, t) - \frac{1}{4\pi} \int_S I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} \right) + \frac{b}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $a = \frac{k}{\rho c_p}$ ,  $b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_p}$ . Подставляя (1.8) в граничные условия (1.5)–(1.6) и полагая  $T_b = T_{\max}\theta_b$ , получим

$$I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \varepsilon(x)\theta_b^4(x, t) + \rho^s(x)I^*(x, \boldsymbol{\omega}_R, t) + \frac{\rho^d(x)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} > 0} I^*(x, \boldsymbol{\omega}', t) \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} d\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0, \quad (1.11)$$

$$a \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial n} + \beta(x) (\theta(x, t) - \theta_b(x, t)) = 0, \quad (1.12)$$

где  $\beta = \frac{h}{\rho c_p}$ .

Аналогично получаем начальные условия:

$$I^*(x, \boldsymbol{\omega}, 0) = I_0^*(x, \boldsymbol{\omega}), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad (1.13)$$

$$\text{где } I_0^*(x, \boldsymbol{\omega}) = \left( \frac{\sigma n^2 T_{\max}^4}{\pi} \right)^{-1} I_0(x, \boldsymbol{\omega}), \quad \theta_0(x) = \frac{T_0(x)}{T_{\max}}.$$

## 1.2 Диффузионное $P_1$ приближение уравнения переноса излучения

$P_1$  приближение уравнения переноса излучения является частным случаем метода сферических гармоник ( $P_N$ ). Идея  $P_N$  приближений состоит в том, что функцию интенсивности излучения  $I(x, \boldsymbol{\omega})$  раскладывают в ряд Фурье по сферическим гармоникам  $\mathcal{Y}_l^m(\boldsymbol{\omega})$  [4, с. 496]:

$$I(x, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l I_l^m(x) \mathcal{Y}_l^m(\boldsymbol{\omega}),$$

где  $I_l^m(x)$  - коэффициенты, зависящие от  $x$ . Также в ряд раскладывают фазовую функцию  $P(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')$ . Тогда решение уравнения переноса излучения ищется в виде отрезка ряда Фурье для  $l \leq N$ . При подстановке указанной конечной суммы в исходное уравнение интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения относительно  $I(x, \boldsymbol{\omega})$  сводится к  $(N+1)^2$  дифференциальным уравнениям относительно  $I_l^m(x)$ .

В  $P_1$  приближении используется линейное приближение для интенсивности излучения и фазовой функции:

$$I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \varphi(x, t) + \boldsymbol{\Phi}(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1.14)$$

$$P(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') = 1 + A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}'. \quad (1.15)$$

Для фазовой функции выполняется условие нормировки:

$$\frac{1}{4\pi} \int_S P(\omega, \omega') d\omega = 1 + \frac{A}{4\pi} \int_S \omega \cdot \omega' d\omega = 1,$$

вычисление интеграла см. ниже. Коэффициент  $A \in [-1, 1]$  описывает анизотропию рассеяния, а величина  $A/3$  имеет смысл среднего косинуса угла рассеяния, поскольку

$$\frac{1}{4\pi} \int_S (\omega \cdot \omega') P(\omega, \omega') d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_S \omega \cdot \omega' d\omega + \frac{A}{4\pi} \int_S (\omega \cdot \omega') (\omega \cdot \omega') d\omega = \frac{A}{3},$$

вычисление интегралов см. ниже. Случай  $A = 0$  соответствует изотропному рассеянию. Диапазон допустимых значений величины  $A \in [-1, 1]$  обусловлен тем, что при  $|A| > 1$  фазовая функция может принимать отрицательные значения.

Отметим, что если функция  $I^*$  ищется в виде (1.14), то [4, с. 502]:

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \int_S I^*(x, \omega, t) d\omega = 4\pi \varphi(x, t), \\ \mathbf{q}_r(x, t) &= \int_S I^*(x, \omega, t) \omega d\omega = \frac{4\pi}{3} \Phi(x, t), \end{aligned}$$

поэтому

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi} G(x, t), \quad \Phi(x, t) = \frac{3}{4\pi} \mathbf{q}_r(x, t),$$

где  $G$  - аппроксимация пространственной плотности падающего излучения,  $\mathbf{q}_r$  - аппроксимация плотности потока излучения. Следовательно, функция  $\varphi(x, t)$  имеет физический смысл нормализованной интенсивности излучения в точке  $x$  в момент времени  $t$ , усредненной по всем направлениям.

**Лемма 1.1.** *Справедливы равенства:*

$$\begin{aligned} \int_S 1 \cdot d\omega &= 4\pi, \quad \int_S \mathbf{a} \cdot \omega d\omega = 0, \quad \int_S (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega = \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ \int_S \omega d\omega &= 0, \quad \int_S (\mathbf{a} \cdot \omega) \omega d\omega = \frac{4\pi}{3} \mathbf{a}, \\ \int_{\omega \cdot \mathbf{a} > 0} \mathbf{a} \cdot \omega d\omega &= \pi, \quad \int_{\omega \cdot \mathbf{a} > 0} (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega = \frac{2\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  - любые векторы.

*Доказательство.* Доказательство является простым упражнением. □

Подставляя (1.14), (1.15) в (1.9), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \varphi(x, t) \\ & + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}) + \kappa \varphi(x, t) + \kappa \Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ & \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S (1 + A \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}') (\varphi(x, t) + \Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' + \kappa_a \theta^4(x, t). \end{aligned}$$

С учетом равенств

$$\begin{aligned} \int_S \Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}' d\boldsymbol{\omega}' &= 0, \quad \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}' d\boldsymbol{\omega}' = 0, \\ \int_S (\Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}') (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' &= \frac{4\pi}{3} \Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right) \\ & + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \varphi(x, t) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}) + \kappa \varphi(x, t) + \kappa \Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ & = \kappa_s \left( \varphi(x, t) + \frac{A}{3} \Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \kappa_a \theta^4(x, t), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \varphi(x, t) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ & + \kappa_a \varphi(x, t) + (\kappa_a + \kappa'_s) \Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega} = \kappa_a \theta^4(x, t), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $\kappa'_s = \kappa_s(1 - A/3)$  - приведенный коэффициент рассеяния.

Проинтегрируем уравнение (1.16) по  $\boldsymbol{\omega} \in S$ . Получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{3} \operatorname{div} \Phi(x, t) + \kappa_a \varphi(x, t) = \kappa_a \theta^4(x, t), \quad (1.17)$$

так как

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^3 \int_S (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i) \left( \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_i} \right) d\boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(x, t)}{\partial x_i} = \frac{4\pi}{3} \operatorname{div} \Phi(x, t). \end{aligned}$$

Умножим уравнение (1.16) на  $\omega$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \omega + \frac{1}{c} \left( \omega \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right) \omega + (\omega \cdot \nabla \varphi(x, t)) \omega + (\omega \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \omega)) \omega + \\ + \kappa_a \varphi(x, t) \omega + (\kappa_a + \kappa'_s) (\Phi(x, t) \cdot \omega) \omega = \kappa_a \theta^4(x, t) \omega \end{aligned}$$

и проинтегрируем полученное равенство по  $\omega \in S$ . Для вычисления четвертого слагаемого представим интеграл по единичной сфере  $S$  как сумму интегралов по верхней  $S_1$  и нижней  $S_2$  полусферам и воспользуемся тем, что

$$\int_{S_2} (\omega \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \omega)) \omega d\omega = - \int_{S_1} (\omega \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \omega)) \omega d\omega,$$

следовательно, интеграл равен 0. Таким образом,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} + (\kappa_a + \kappa'_s) \Phi(x, t) + \nabla \varphi(x, t) = 0. \quad (1.18)$$

Итак, уравнения (1.17)(1.18) представляют собой  $P_1$  приближение для уравнения переноса излучения. Дальнейшие преобразования основываются на предположении, что выполняется закон Фика:

$$\Phi(x, t) = -3\alpha \nabla \varphi(x, t), \quad (1.19)$$

где  $\alpha = \frac{1}{3(\kappa_a + \kappa'_s)} = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$ . Фактически мы пренебрегаем производной  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  в уравнении (1.18). Подставив (1.19) в (1.17), получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} - \alpha \Delta \varphi(x, t) + \kappa_a (\varphi(x, t) - \theta^4(x, t)) = 0. \quad (1.20)$$

Чтобы получить уравнение для температуры, подставим (1.14) в (1.10). Получим

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a \Delta \theta(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta(x, t) + b \kappa_a (\theta^4(x, t) - \varphi(x, t)) = \frac{b}{c} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Учитывая (1.20), уравнение (1.21) можно записать в виде с кросс-диффузией:

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a \Delta \theta(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta(x, t) = b \alpha \Delta \varphi(x, t).$$

В дальнейшем вместо уравнения (1.21) будем использовать уравнение с нулевой правой частью (см., например [47])

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a \Delta \theta(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta(x, t) + b \kappa_a (\theta^4(x, t) - \varphi(x, t)) = 0. \quad (1.22)$$



Далее выведем граничные условия типа Маршака для  $P_1$  приближения (см. [101]). Для этого подставим (1.14) в граничное условие (1.11):

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) + \Phi(x, t) \cdot \omega &= \varepsilon(x) \theta_b^4(x, t) + \rho^s(x) (\varphi(x, t) + \Phi(x, t) \cdot \omega_R) + \\ &+ \frac{\rho^d(x)}{\pi} \int_{\omega' \cdot \mathbf{n} > 0} (\varphi(x, t) + \Phi(x, t) \cdot \omega') \omega' \cdot \mathbf{n} d\omega', \\ \omega \cdot \mathbf{n} &< 0, \quad \omega_R = \omega - 2(\omega \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла применим лемму 1:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) + \Phi(x, t) \cdot \omega &= \varepsilon(x) \theta_b^4(x, t) + \rho^s(x) [\varphi(x, t) + \\ &+ \Phi(x, t) \cdot \omega - 2(\omega \cdot \mathbf{n})(\Phi(x, t) \cdot \mathbf{n})] + \\ &+ \rho^d(x) \left( \varphi(x, t) + \frac{2}{3} \Phi(x, t) \cdot \mathbf{n} \right), \quad \omega \cdot \mathbf{n} < 0. \end{aligned}$$

Умножим данное равенство на  $\omega \cdot \mathbf{n}$  и проинтегрируем по множеству входящих направлений, для которых  $\omega \cdot \mathbf{n} < 0$ . Получим

$$\begin{aligned} -\pi \varphi(x, t) + \frac{2\pi}{3} \Phi(x, t) \cdot \mathbf{n} &= -\pi \varepsilon(x) \theta_b^4(x, t) - \pi \rho^s(x) \varphi(x, t) + \frac{2\pi \rho^s(x)}{3} \Phi(x, t) \cdot \mathbf{n} - \\ &- \frac{4\pi \rho^s(x)}{3} \Phi(x, t) \cdot \mathbf{n} - \pi \rho^d(x) \left( \varphi(x, t) + \frac{2}{3} \Phi(x, t) \cdot \mathbf{n} \right), \end{aligned}$$

или

$$\varepsilon(x) \varphi(x, t) = \varepsilon(x) \theta_b^4(x, t) + \frac{2(2 - \varepsilon(x))}{3} \Phi(x, t) \cdot \mathbf{n}.$$

Воспользуемся равенством (1.19), будем иметь

$$\alpha \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial n} + \gamma(x) (\varphi(x, t) - \theta_b^4(x, t)) = 0, \quad (1.23)$$

где  $\gamma = \frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}$ . Отметим, что на участках втекания и вытекания среды можно принять  $\gamma = 1/2$  [102].

Дополним полученные соотношения граничным условием для температуры (1.12):

$$a \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial n} + \beta(x) (\theta(x, t) - \theta_b(x, t)) = 0 \quad (1.24)$$

и начальными условиями

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x). \quad (1.25)$$

Соотношения (1.20), (1.22)–(1.25) образуют диффузионную модель сложного теплообмена.

### 1.3 Математический аппарат моделирования сложного теплообмена

Предполагается, что  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область с липшицевой границей  $\Gamma$  [103, с. 232],  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ . Вектор внешней нормали к границе области обозначается через  $\mathbf{n}$ .

Введем следующие обозначения:  $|\Omega|$  — объем области  $\Omega$ ,  $|\Gamma|$  — площадь границы  $\Gamma$ ,  $\mu(E)$  — мера множества  $E$ ;  $L^p(\Omega)$ ,  $L^p(\Gamma)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  — пространства Лебега;  $H^s(\Omega)$  — пространство Соболева  $W^{2s}(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0\}$ ,  $C_0^\infty(\Omega)$  — пространство функций класса  $C^\infty$  с компактным носителем в  $\Omega$ ; аналогично определяются пространства вектор-функций  $L_s^p(\Omega)$ ,  $H^s(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$ ,  $C_0^\infty(\Omega)$ ;  $L^p(0, T; X)$  — пространство Лебега функций со значениями в банаховом пространстве  $X$ ,  $C([0, T]; X)$  — пространство функций, непрерывных на  $[0, T]$ , со значениями в  $X$ ,  $X'$  — пространство, сопряженное с пространством  $X$ .

Если  $y \in L^p(0, T; X)$ , то обозначаем  $y' = \frac{dy}{dt}$ .

Обозначим  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H_0^1(\Omega)$ . Пространство  $H$  отождествляем с пространством  $H'$ , так что  $V \subset H = H' \subset V'$ . Через  $\|\cdot\|$  будем обозначать норму в  $H$ , а через  $(f, v)$  — значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$ , совпадающее со скалярным произведением в  $H$ , если  $f \in H$ . Определим пространство  $\mathcal{W} = \{y \in L^2(0, T; V) : y' \in L^2(0, T; V')\}$ .

Скалярное произведение в  $H$  и нормы в  $H$ ,  $V$ ,  $V'$  определяются формулами

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \|f\|^2 = (f, f), \\ \|f\|_V^2 &= \|f\|^2 + \|\nabla f\|^2, \\ \|f\|_{V'} &= \sup\{(f, v) : v \in V, \|v\|_V = 1\}. \end{aligned}$$

**Лемма 1.2** (неравенство Гёльдера). [104, с. 35] Пусть  $p, q \in [1, \infty]$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда для любых  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $v \in L^q(\Omega)$  выполнено неравенство:

$$\left| \int_{\Omega} uv \, dx \right| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Лемма 1.3** (неравенство Юнга). [105, с. 38] Пусть  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда для любых  $a, b \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство:

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{q\varepsilon}.$$

**Лемма 1.4.** [105, с. 254] *Всякое гильбертово пространство рефлексивно.*

**Лемма 1.5.** [105, с. 255] *Пусть  $X$  — рефлексивное банахово пространство. Если последовательность  $x_n \in X$  ограничена, то в ней существует слабо сходящаяся подпоследовательность.*

**Лемма 1.6.** [105, с. 260] *Пусть  $X$  — сепарабельное банахово пространство. Если последовательность  $f_n \in X'$  ограничена, то в ней существует  $*$ -слабо сходящаяся подпоследовательность.*

**Лемма 1.7.** [105, с. 258] *Пусть  $X$  — банахово пространство. Если  $x_n \in X$ ,  $x_n \rightharpoonup x$  слабо в  $X$ , то последовательность  $x_n$  ограничена и  $\|x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ .*

**Лемма 1.8.** [106, с. 47] *Пусть  $U$  — выпуклое, замкнутое множество в банаховом пространстве  $X$ ,  $x_n \in U$ ,  $x_n \rightharpoonup x$  слабо в  $X$ . Тогда  $x \in U$ .*

**Определение 1.1.** [107, с. 48] *Множество  $M$  банахова пространства  $X$  называется компактным, если из всякого бесконечного подмножества множества  $M$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого множества. Множество называется относительно компактным, если его замыкание компактно.*

**Определение 1.2.** [107, с. 190] *Пусть  $X, Y$  — банаховы пространства. Оператор  $A : M \subset X \rightarrow Y$  называется компактным, если он переводит всякое ограниченное подмножество множества  $M$  в относительно компактное множество пространства  $Y$ . Если, кроме того, оператор  $A$  непрерывен, то он называется вполне непрерывным.*

**Теорема 1.1** (Принцип Шаудера). [107, с. 193] *Пусть  $X$  — банахово пространство,  $M \subset X$  — выпуклое замкнутое множество,  $A : M \rightarrow M$  — вполне непрерывный оператор. Тогда оператор  $A$  имеет неподвижную точку  $x \in M$ , т.е.  $Ax = x$ .*

**Лемма 1.9.** [105, с. 365] *Пусть  $X, Y, Z$  — банаховы пространства и  $X \subset Y \subset Z$ , причем вложение  $X \subset Y$  компактно, а вложение  $Y \subset Z$  непрерывно. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует постоянная  $C_\varepsilon > 0$  такая, что  $\|u\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + C_\varepsilon \|u\|_Z \quad \forall u \in X$ .*

**Теорема 1.2.** [108, теорема 3] Пусть  $F$  — ограниченное множество в  $L^2(0, T; V)$ , и

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|^2 dt \rightarrow 0$$

при  $h \rightarrow 0$  равномерно относительно  $f \in F$ . Тогда  $F$  относительно компактно в  $L^2(0, T; H)$ .

**Теорема 1.3** (Гильберт, Шмидт). [109, с. 263] Пусть  $A$  — линейный, самосопряженный, компактный оператор в гильбертовом пространстве  $X$ . Тогда множество собственных элементов оператора  $A$  образует ортогональный базис в  $X$ .

**Теорема 1.4** (Лакс, Мильграм). [110, с. 40] Пусть  $X$  — гильбертово пространство,  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная билинейная форма,  $B(x, x) \geq C\|x\|_X^2$ ,  $C > 0$ . Тогда для любого  $f \in X'$  задача  $B(x, z) = (f, z) \quad \forall z \in X$  имеет единственное решение  $x \in X$ .

**Определение 1.3.** [106, с. 47] Пусть  $X$  — банахово пространство. Функционал  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется слабо полунепрерывным снизу, если для любой последовательности  $x_n \in X$  такой, что  $x_n \rightharpoonup x$  слабо, выполняется неравенство  $J(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n)$ .

**Лемма 1.10.** [106, с. 47] Пусть  $X$  — банахово пространство. Если функционал  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывный и выпуклый, то он слабо полунепрерывен снизу.

**Следствие 1.1.** Пусть  $X$  — банахово пространство,  $a \in X$ . Тогда функционал  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J(x) = \|x - a\|_X^2$  слабо полунепрерывен снизу.

**Лемма 1.11.** [105, с. 37] Вложение  $L^p(\Omega) \subset L^s(\Omega)$  непрерывно при  $1 \leq s \leq p \leq \infty$ .

**Лемма 1.12.** [104, с. 1020] Пространство  $L^p(\Omega)$  сепарабельно при  $1 \leq p < \infty$  и рефлексивно при  $1 < p < \infty$ .

**Лемма 1.13.** Пусть  $f_k \rightarrow f$  в  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Тогда  $g_k \rightarrow g$  в  $L^p(\Omega)$ , где  $g_k = \max\{f_k, 0\}$ ,  $g = \max\{f, 0\}$ .

*Доказательство.* Так как  $|g_k - g| \leq |f_k - f|$ , то

$$\|g_k - g\|_{L^p(\Omega)} = \int_{\Omega} |g_k - g|^p dx \leq \int_{\Omega} |f_k - f|^p dx = \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)}^p \rightarrow 0.$$

□

**Лемма 1.14.** Пусть  $f_k \rightarrow f$  в  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $f_k \geq 0$  почти всюду в  $\Omega$ . Тогда  $f \geq 0$  почти всюду в  $\Omega$ .

*Доказательство.* По лемме 1.13 получаем, что  $f_k = \max\{f_k, 0\} \rightarrow \max\{f, 0\}$  в  $L^p(\Omega)$ . Следовательно,  $f = \max\{f, 0\}$ , поэтому  $f \geq 0$  почти всюду в  $\Omega$ . □

**Лемма 1.15.** Пусть  $f_k, f \geq 0$ ,  $f_k \rightarrow f$  в  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ . Тогда  $f_k^s \rightarrow f^s$  в  $L^1(\Omega)$ , если  $1 < s < p$ .

*Доказательство.* По формуле Лагранжа

$$|f_k^s - f^s| \leq s \xi^{s-1} |f_k - f| \leq s(f_k^{s-1} + f^{s-1}) |f_k - f|,$$

где  $\xi(x)$  находится между  $f_k(x)$  и  $f(x)$ . Применяя неравенство Гёльдера с показателями  $p, q = \frac{p}{p-1}$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \|f_k^s - f^s\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} |f_k^s - f^s| dx \leq s \int_{\Omega} (f_k^{s-1} + f^{s-1}) |f_k - f| dx \\ &\leq \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} (\|f_k^{s-1}\|_{L^q(\Omega)} + \|f^{s-1}\|_{L^q(\Omega)}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями  $\frac{p-1}{p-s}$  и  $\frac{p-1}{s-1}$ , получаем, что

$$\|f_k^{s-1}\|_{L^q(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} f_k^{(s-1)p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq |\Omega|^{\frac{p-s}{p}} \left( \int_{\Omega} f_k^p dx \right)^{\frac{s-1}{p}} = |\Omega|^{\frac{s}{p}-1} \|f_k\|_{L^p(\Omega)}^{s-1}.$$

Следовательно, второй сомножитель в (1.26) ограничен, поэтому  $\|f_k^s - f^s\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ . □

**Теорема 1.5** (Лебег). [109, с. 321] Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $f_n \rightarrow f$  н.в. в  $\Omega$ ,  $\forall n : |f_n(x)| \leq \varphi(x)$  н.в. в  $\Omega$ , где  $\varphi \in L^1(\Omega)$ . Тогда  $f \in L^1(\Omega)$ ,  $\int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx$ .

**Теорема 1.6** (Леви). [109, с. 322] Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , последовательность  $f_n \in L^1(\Omega)$  не убывает и  $\forall n : \int_{\Omega} f_n(x) dx \leq K$ . Тогда  $f_n \rightarrow f$  н.в. в  $G$ , где  $f \in L^1(\Omega)$ ,  $\int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx$ .

**Лемма 1.16.** [111, с. 47] Пусть  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\nabla u = 0$  н.в. в  $\Omega$ . Тогда  $u = \text{const} \theta \Omega$ .

**Лемма 1.17.** [112, с. 47] Пусть  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $u^+ = \max\{u, 0\}$ ,  $u^- = \min\{u, 0\}$ . Тогда  $u^+, u^- \in H^1(\Omega)$  и

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{если } u > 0, \\ 0, & \text{если } u \leq 0, \end{cases} \quad \nabla u^- = \begin{cases} \nabla u, & \text{если } u < 0, \\ 0, & \text{если } u \geq 0. \end{cases}$$

**Лемма 1.18.** [112, с. 50] Пусть  $f(t), t \in \mathbb{R}$  - липшицева функция, производная которой существует всюду, за исключением, быть может, множества  $\{a_1, \dots, a_M\}$ ,  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^N$ . Тогда  $f(u) \in H^1(\Omega)$ ,  $\frac{\partial f(u)}{\partial x_i} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$ , где обе части этого равенства считаются равными нулю, когда  $x \in \bigcup_{j=1}^M \{y : u(y) = a_j\}$ .

**Лемма 1.19.** [104, с. 1026] Вложение  $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  непрерывно при  $1 \leq p \leq 6$  и компактно при  $1 \leq p < 6$ .

**Лемма 1.20.** [105, с. 239] Оператор следа  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  непрерывен.

**Лемма 1.21.** [113, с. 4] Образ оператора следа  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  - плотное подпространство пространства  $L^2(\Gamma)$ .

**Лемма 1.22.** [114] Пусть  $f(t), t \in \mathbb{R}$  - липшицева функция. Для любой функции  $u \in H^1(\Omega)$  справедливо равенство  $f(\gamma(u)) = \gamma(f(u))$ , где  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  - оператор следа.

**Лемма 1.23.** Пусть  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $u \geq 0$  п.в. в  $\Omega$ . Тогда  $u|_\Gamma \geq 0$  п.в. на  $\Gamma$ .

*Доказательство.* Применим лемму 1.22 для функции  $f(t) = \max\{t, 0\}$ :

$$\max\{u|_\Gamma, 0\} = \max\{u, 0\}|_\Gamma = u|_\Gamma$$

Следовательно,  $u|_\Gamma \geq 0$  п.в. на  $\Gamma$ . □

**Лемма 1.24.** [115, с. 41] Для любого  $\varepsilon > 0$  существует постоянная  $C_\varepsilon > 0$  такая, что для любой функции  $u \in H^1(\Omega)$  выполняется неравенство

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \varepsilon \|\nabla u\|^2 + C_\varepsilon \|u\|^2.$$

**Лемма 1.25** (Гронуолл). [116, с. 191] Пусть  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывная функция  $b \geq 0$ . Если

$$f(t) \leq a + b \int_0^t f(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T]$$

$$tof(t) \leq ae^{bt} \forall t \in [0, T]$$

**Лемма 1.26.** Оператор  $A : V \rightarrow V'$ , определяемый формулой  $(Au, v) = a(\nabla u, \nabla v) + \int_{\Gamma} buvd\Gamma$ , где  $a > 0, b \in L^{\infty}(\Gamma), b \geq b_0 > 0, b_0 = \text{const}$ , непрерывен.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|Au\|_{V'} &= \sup_{\|v\|_V=1} (Au, v) \leq \sup_{\|v\|_V=1} (a\|\nabla u\| \|\nabla v\| + \|b\|_{L^{\infty}(\Gamma)} \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)}) \leq \\ &\leq a\|u\|_V + \|b\|_{L^{\infty}(\Gamma)} C_1^2 \|u\|_V = C\|u\|_V, \end{aligned}$$

где  $C_1$  - норма оператора следа  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ .  $\square$

**Лемма 1.27.** Пусть  $\mathbf{v} \in L^{\infty}(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ , оператор  $B(t) : V \rightarrow V'$  определяется формулой  $(B(t)u, v) = (\mathbf{v} \cdot \nabla u, v)$ . Тогда  $\exists C > 0 : |(B(t)u, w)| \leq C\|u\|_V \|w\|_V \forall u, w \in V, t \in (0, T)$ .

*Доказательство.* Применяя неравенство Гёльдера с показателями 4, 2, 4, получаем, что

$$\begin{aligned} |(B(t)u, w)| &= |(\mathbf{v} \cdot \nabla u, w)| \leq \|\mathbf{v}(t)\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla u\| \|w\|_{L^4(\Omega)} \leq \\ &\leq C_1^2 \|\mathbf{v}\|_{L^{\infty}(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))} \|u\|_V \|w\|_V \end{aligned}$$

где  $C_1$  - норма оператора вложения  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$   $\square$

**Лемма 1.28.** [105, с. 238] Функционал  $f(v) = (Av, v)^{1/2}$ , где  $A$  - оператор из леммы 1.25, определяет норму в пространстве  $V$ , эквивалентную стандартной норме в  $V$ .

**Лемма 1.29.** [105, с. 411] Если  $X$  - рефлексивное и сепарабельное банахово пространство, то  $L^p(0, T; X), 1 < p < \infty$  - рефлексивное и сепарабельное банахово пространство.

**Лемма 1.30.** [105, с. 449] Если  $X$  - рефлексивное и сепарабельное банахово пространство, то  $L^1(0, T; X)$  - сепарабельное банахово пространство.

**Лемма 1.31.** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, |f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$ . Тогда отображение  $y \mapsto f(y)$  непрерывно отображает пространство  $C([0, T]; H)$  в себя.



*Доказательство.* Пусть  $y \in C([0, T]; H)$ . Тогда  $z = f(y) \in C([0, T]; H)$ , так как  $\|z(t_1) - z(t_2)\| \leq C \|y(t_1) - y(t_2)\|$ . Поскольку  $\|z_1(t) - z_2(t)\| \leq C \|y(t_1) - y(t_2)\|$ , то

$$\begin{aligned} \|z_1 - z_2\|_{C([0, T]; H)} &= \max_{t \in [0, T]} \|z_1(t) - z_2(t)\| \leq C \max_{t \in [0, T]} \|y_1(t) - y_2(t)\| = \\ &= C \|y_1 - y_2\|_{C([0, T]; H)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 1.32.** [105, с. 423] Для любой функции  $u \in W$  справедлива формула

$$\|u(t)\|^2 - \|u(0)\|^2 = 2 \int_0^t (u'(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T$$

**Лемма 1.33.** Для любой функции  $u \in W$  справедливо равенство

$$\frac{d\|u(t)\|^2}{dt} = 2(u'(t), u(t)) \quad \text{н.с. на } (0, T)$$

*Доказательство.* Продифференцируем (1.24) по  $t$  согласно [109, с. 356]  $\square$

**Лемма 1.34.** Пусть  $y \in W, k \geq 0$ . Тогда  $z_1 = \max\{y - k, 0\} \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H)$ ,  $z_2 = \min\{y + k, 0\} \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H)$  и справедливы равенства

$$2 \int_0^t (y'(\tau), z_k(\tau)) d\tau = \|z_k(t)\|^2 - \|z_k(0)\|^2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2$$

*Доказательство.* Пространство  $H^1(Q)$  плотно в  $W$  [105, с. 423] поэтому существует последовательность  $y_j \in H^1(Q), y_j \rightarrow y$  в  $W$ . В силу непрерывности вложения  $W \subset C([0, T]; H)$  имеем  $y_j \rightarrow y$  в  $C([0, T]; H)$ .

Положим  $z_{1j} = \max\{y_j - k, 0\}$ . Отображение  $y \mapsto \max\{y - k, 0\}$  непрерывно отображает пространство  $C([0, T]; H)$  в себя (лемма 1.30), поэтому  $z_{1j} \rightarrow z_1$  в  $C([0, T]; H)$ .

Поскольку  $\|z_{1j}(t)\| \leq \|y_j(t)\|$  и  $\|\nabla z_{1j}(t)\| \leq \|\nabla y_j(t)\|$ , то  $\|z_{1j}(t)\|_V \leq \|y_j(t)\|_V$ , следовательно, последовательность  $z_{1j}$  ограничена в  $L^2(0, T; V)$ , поэтому в ней существует подпоследовательность  $z_{1j} \rightarrow z_1$  слабо в  $L^2(0, T; V)$ .

По лемме 1.16 получаем, что

$$z'_{1j} = \begin{cases} y'_j, & \text{если } y_j > k (z_{1j} > 0), \\ 0, & \text{если } y_j \leq k (z_{1j} = 0). \end{cases}$$



Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t (y'_j, z_{1j}) d\tau &= 2 \int_0^t (z'_{1j}, z_{1j}) d\tau = \int_{\Omega} \int_0^t \frac{d(z_{1j}^2)}{dt} d\tau dx = \\ &= \|z_{1j}(t)\|^2 - \|z_{1j}(0)\|^2. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу в (1.25) при  $j \rightarrow \infty$ . Примем во внимание, что  $y'_j \rightarrow y'$  сильно в  $L^2(0, T; V')$  и  $z_{1j} \rightarrow z_1$  слабо в  $L^2(0, T; V)$ , а также  $z_{1j} \rightarrow z_1$  в  $C([0, T]; H)$ , поэтому  $\|z_{1j}(t)\| \rightarrow \|z_1(t)\|$ ,  $t \in [0, T]$ . Таким образом, получаем утверждение леммы для  $z_1$ . Утверждение для  $z_2$  доказывается аналогично.  $\square$

**Теорема 1.7.** [105, с. 426] Пусть  $A(t) : V \rightarrow V'$  – линейный оператор,  $\forall u, v \in V$  функция  $t \mapsto (A(t)u, v)$  измерима на  $(0, T)$ ,  $\exists C, c > 0, d \geq 0 : \forall u, v \in V, t \in (0, T) : |(A(t)u, v)| \leq C\|u\|_V\|v\|_V, (A(t)u, u) \geq c\|u\|_V^2 - d\|u\|_H^2, f \in L^2(0, T; V'), u_0 \in H$ . Тогда задача

$$\begin{aligned} u'(t) + A(t)u(t) &= f(t) \quad \text{н.в. на } (0, T), \\ u(0) &= u_0, \quad u \in W \end{aligned}$$

имеет единственное решение.

## 1.4 Стационарная модель сложного теплообмена

### 1.4.1 Постановка краевой задачи

Стационарная нормализованная диффузионная модель, описывающая радиационный, кондуктивный и конвективный теплообмен в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , имеет следующий вид [4]:

$$-a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad (1.27)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4. \quad (1.28)$$

Здесь  $\theta$  – нормализованная температура,  $\varphi$  – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям,  $\mathbf{v}$  – заданное поле

скоростей,  $\kappa_a$  – коэффициент поглощения. Постоянные  $a$ ,  $b$  и  $\alpha$  определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

где  $k$  – теплопроводность,  $c_v$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $n$  – показатель преломления,  $T_{\max}$  – максимальная температура в ненормализованной модели,  $\kappa = \kappa_s + \kappa_a$  – коэффициент полного взаимодействия,  $\kappa_s$  – коэффициент рассеяния. Коэффициент  $A \in [-1, 1]$  описывает анизотропию рассеяния, случай  $A = 0$  соответствует изотропному рассеянию.

Будем предполагать, что функции  $\theta$  и  $\varphi$ , описывающие процесс сложного теплообмена, удовлетворяют следующим условиям на границе  $\Gamma = \partial\Omega$ :

$$a \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} + \beta (\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad (1.29)$$

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} + \gamma (\varphi - \theta_0^4)|_{\Gamma} = 0. \quad (1.30)$$

Здесь через  $\partial/\partial \mathbf{n}$  обозначаем производную в направлении внешней нормали. Неотрицательные функции неотрицательные константы  $\theta_0, \gamma$ , определенные на  $\Gamma$ , и функция  $\beta$ , описывающая, в частности, отражающие свойства границы  $\Gamma$ , являются заданными.

#### 1.4.2 Слабое решение краевой задачи

Пусть  $\Omega$  – липшицева ограниченная область, граница  $\Gamma$  которой состоит из конечного числа гладких кусков, а исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i)  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ;
- (ii)  $\theta_0, \beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $0 \leq \theta_0 \leq M$ ,  $\beta \geq \beta_0 > 0$ ,  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ ;
- (iii)  $\gamma + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \geq c_0 > 0$  на части границы, где  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) < 0$ .

Здесь  $M, \beta_0, \gamma_0$ , и  $c_0$  положительные постоянные.

**Определение 1.4.** Пара  $\{\theta, \varphi\} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  называется слабым решением задачи (1.27)-(1.30), если для любых  $\eta, \psi \in H^1(\Omega)$  выполняются равенства

$$a(\nabla\theta, \nabla\eta) + (\mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi), \eta) + \int_{\Gamma} \beta (\theta - \theta_0) \eta d\Gamma = 0, \quad (1.31)$$

$$\alpha(\nabla\varphi, \nabla\psi) + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3, \psi) + \int_{\Gamma} \gamma (\varphi - \theta_0^4) \psi d\Gamma = 0, \quad (1.32)$$

Отметим, что в силу вложения  $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$  выражение  $(\theta^4, \eta)$  имеет смысл для любой функции  $\eta \in H^1(\Omega)$ .

**Теорема 1.8.** [117, Th. 2] Пусть выполняются условия (i)-(iii). Тогда существует единственное слабое решение задачи (1.27)-(1.30), удовлетворяющее неравенствам

$$a\|\nabla\theta\|^2 \leq b\kappa_a M^5 |\Omega| + \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)} M^2 |\Gamma|, \quad (1.33)$$

$$\alpha\|\nabla\varphi\|^2 \leq \kappa_a M^8 |\Omega| + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} M^8 |\Gamma|, \quad (1.34)$$

$$0 \leq \theta \leq M, \quad 0 \leq \varphi \leq M^4. \quad (1.35)$$

## 1.5 Квазистационарная модель сложного теплообмена

Квазистационарная модель - это тип математической модели, который описывает систему, претерпевающую медленные изменения со временем или имеющую относительно длительный период стабильности по сравнению с интересующим масштабом времени. Такие модели часто используются, когда изучаемая система находится в равновесии или близка к нему, но при этом может испытывать небольшие, медленные колебания со временем. Термин 'квази' означает, что система не совсем стационарна (то есть, фиксирована или неизменна), а скорее, ее состояние меняется настолько медленно, что его можно считать почти стационарным для определенных анализов или целей.

В контексте теплообмена, излучения или других физических процессов квазистационарные модели могут использоваться для описания сценариев, когда параметры и свойства системы меняются очень медленно по сравнению с масштабом времени конкретного изучаемого явления. Такие модели могут упростить анализ и снизить вычислительную сложность, позволяя исследователям сосредоточиться на основных аспектах проблемы.

Квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$  моделируется в рамках приближения  $P_1$  для уравнения радиационного теплообмена следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad (1.36)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \quad (1.37)$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_0^4)|_\Gamma = 0, \quad \text{на } \Gamma; \quad (1.38)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (1.39)$$

Данная модель описывает систему связанных уравнений в частных производных, моделирующих квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  в трехмерном пространстве. Используется приближение  $P_1$  для уравнения радиационного теплообмена, что является упрощенным подходом к решению задач радиационного теплообмена.

Задача состоит из начально-краевой задачи с тремя компонентами:

1. Первое уравнение представляет баланс энергии из-за радиационного теплообмена ( $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ ) и проводящего теплообмена ( $a\Delta\theta$ ) с термом источника тепла ( $b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi)$ ) в ограниченной области  $\Omega$  на промежутке времени  $0 < t < T$ . Радиационный теплообмен моделируется с использованием приближения  $P_1$ , которое упрощает уравнение радиационного теплообмена.

2. Второе уравнение представляет баланс энергии из-за диффузионного теплообмена ( $\alpha\Delta\varphi$ ) с термом источника тепла ( $\kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3)$ ) в той же области  $\Omega$  на промежутке времени  $0 < t < T$ . Это уравнение связано с первым уравнением через термы источника тепла.

3. Граничные условия задаются уравнениями,  $a(\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma) = 0$  и  $\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_0^4)|_\Gamma = 0$  на границе  $\Gamma$ , которые являются условиями Робина, представляющими смесь условий Дирихле (фиксированное значение) и Неймана (фиксированный градиент).

4. Наконец, начальное условие предоставляется четвертым уравнением,  $\theta|_{t=0} = \theta_0$ , которое дает начальное распределение температуры в области.

Доказательство однозначной разрешимости задачи (1.37)–(1.39) представлено в работе [118].

Приведём здесь анализ задачи, где  $\beta = \gamma = 1$ ,  $\theta_b = r$ . Обозначим  $u = \theta_b^4$ .

Также будем далее предполагать

(j)  $a, b, \alpha, \kappa_a = \text{Const} > 0$ ,

(jj)  $\theta_b, q_b \in U, r = a(\theta_b + q_b) \in L^5(\Sigma), \theta_0 \in L^5(\Omega)$ .

Здесь под  $U$  мы обозначаем пространство  $L^2(\Sigma)$  с нормой

$$\|u\|_\Sigma = \left( \int_\Sigma u^2 d\Gamma dt \right)^{1/2}.$$

Используя следующие равенства, определим операторы  $A : V \rightarrow V', B : U \rightarrow V'$ , которые выполняются для любых  $y, z \in V, w \in L^2(\Gamma)$ :

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_\Gamma yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_\Gamma wz d\Gamma.$$

Билинейная форма  $(Ay, z)$  определяет скалярное произведение в пространстве  $V$ , и соответствующая норма  $\|z\|_V = \sqrt{(Az, z)}$  эквивалентна стандартной норме в  $V$ . Следовательно, определен непрерывный обратный оператор  $A^{-1} : V' \mapsto V$ . Заметим, что для любых  $v \in V, w \in L^2(\Gamma), g \in V'$  выполняются следующие неравенства:

$$\|v\|^2 \leq C_0 \|v\|_V^2, \|v\|_{V'} \leq C_0 \|v\|_V, \|Bw\|_{V'} \leq \|w\|_\Gamma, \|A^{-1}g\|_V \leq \|g\|_{V'}.$$

Константа  $C_0$  зависит только от пространства  $\Omega$ .

**Определение 1.5.** Пара  $\theta \in W, \varphi \in L^2(0, T; V)$  называется слабым решением задачи (1.37)–(1.39) если

$$\theta' + aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu \quad (1.40)$$

Здесь и далее будем обозначать через  $[\theta]^s := |\theta|^s \text{sign } s \in \mathbb{R}$ .

**Лемма 1.35.** Пусть выполняются условия (j), (jj),  $u \in U$ . Тогда существует единственное слабое решение задачи (1.37)–(1.39) и справедливо

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0, T; H).$$

*Доказательство.* Выразим  $\varphi$  из последнего уравнения (1.40) и подставим его в первое. В результате получаем следующую задачу Коши для уравнения с операторными коэффициентами:

$$\theta' + aA\theta + L[\theta]^4 = Br + f, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (1.41)$$

Здесь

$$L = \alpha b \kappa_a A (\alpha A + \kappa_a I)^{-1} : V' \rightarrow V', f = b \kappa_a (\alpha A + \kappa_a I)^{-1} Bu \in L^2(0, T; V).$$

Получим априорные оценки решения задачи (1.41), на основании которых стандартным образом выводится разрешимость этой задачи. Пусть  $[\zeta, \eta] = ((\alpha I + \kappa_a A^{-1}) \zeta, \eta)$ ,  $\zeta \in V', \eta \in V$ . Обратите внимание, что выражение  $[[\eta]] = \sqrt{[\eta, \eta]}$  определяет норму в  $H$ , эквивалентную стандартной.

Скалярно умножив уравнение (1.41) в смысле пространства  $H$ , на  $(\alpha I + \kappa_a A^{-1}) \theta$ , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [[\theta]]^2 + a \alpha (A\theta, \theta) + a \kappa_a \|\theta\|^2 + \alpha b \kappa_a \|\theta\|_{L^5(\Omega)}^5 = [Br, \theta] + [f, \theta]. \quad (1.42)$$

Равенство (1.42) влечет оценку

$$\|\theta\|_{L^\infty(0, T; H)} + \|\theta\|_{L^2(0, T; V)} + \|\theta\|_{L^5(Q)} \leq C_1,$$

где  $C_1$  зависит только от  $a, b, \alpha, \kappa_a, \|f\|_{L^2(0, T; H)}, \|\theta_0\|, \|r\|_{L^2(\Sigma)}$ .

Далее, пусть  $\psi = [\theta]^{5/2}$ . Отметим, что

$$(\theta', [\theta]^4) = \frac{1}{5} \frac{d}{dt} \|\psi\|^2, \quad (A\theta, [\theta]^4) = \frac{16}{25} \|\nabla \psi\|^2 + \|\psi\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Умножая в смысле скалярного произведения  $H$  уравнение (1.41) на  $[\theta]^4 = [\psi]^{8/5}$ , получаем

$$\frac{1}{5} \frac{d}{dt} \|\psi\|^2 + a \left( \frac{16}{25} \|\nabla \psi\|^2 + \|\psi\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) + \left( L[\psi]^{8/5}, [\psi]^{8/5} \right) = \left( Br + f, [\psi]^{8/5} \right). \quad (1.43)$$

Равенство (1.43) влечет оценку

$$\|\psi\|_{L^\infty(0, T; H)} + \|\psi\|_{L^2(0, T; V)} + \|[\theta]^4\|_{L^2(0, T; H)} \leq C_2, \quad (1.44)$$

где  $C_2$  зависит только от  $a, b, \alpha, \kappa_a, \|f\|_{L^2(0, T; H)}, \|\theta_0\|_{L^5(\Omega)}, \|r\|_{L^5(\Sigma)}$ . Далее оценим  $\|\theta'\|_{L^2(0, T; V')}$  с учетом  $\theta' = Br + f - aA\theta - L[\theta]^4$ . Из-за ограничений на начальные данные, верно утверждение, что  $Br, f \in L^2(0, T; V')$ .

Так как  $\theta \in L^2(0, T; V)$ , следовательно  $A\theta \in L^2(0, T; V')$ . Пусть  $\zeta = L[\theta]^4$ , тогда

$$\alpha \zeta + \kappa_a A^{-1} \zeta = \alpha b \kappa_a [\theta]^4.$$

Умножая в смысле скалярного произведения  $H$  последнее равенство на  $\zeta$ , получаем

$$\alpha \|\zeta\|^2 + \kappa_a (A^{-1}\zeta, \zeta) = \alpha b \kappa_a ([\theta]^4, \zeta) \leq \alpha \left( \|\zeta\|^2 + \frac{(b\kappa_a)^2}{4} \|[\theta]^4\|^2 \right).$$

Следовательно,  $\|\zeta\|_{V'}^2 = (A^{-1}\zeta, \zeta) \leq \frac{\alpha \kappa_a b^2}{4} \|[\theta]^4\|^2$  и в силу оценок (1.42), (1.44) получаем

$$\|\theta'\|_{L^2(0,T;V')} \leq \|Br + f\|_{L^2(0,T;V')} + aC_1 + \sqrt{\alpha \kappa_a} b C_2. \quad (1.45)$$

Оценок (1.42)–(1.45) достаточно, для доказательства разрешимости задачи. Пусть  $\theta_{1,2}$  является решением задачи (1.41),  $\eta = \theta_1 - \theta_2$ . Тогда

$$\eta' + aA\eta + L([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4) = 0, \quad \eta(0) = 0.$$

Умножая в смысле скалярного произведения  $H$  последнее уравнение на  $(\alpha I + \kappa_a A^{-1})\eta$ , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|[\eta]\|^2 + a\alpha (A\eta, \eta) + a\kappa_a \|\eta\|^2 + \alpha b \kappa_a ([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4, \theta_1 - \theta_2) = 0.$$

Последний член в левой части неотрицательный, поэтому, интегрируя полученное равенство по времени, получаем  $\eta = \theta_1 - \theta_2 = 0$ , что означает единственность решения. Лемма доказана. □

## 1.6 Квазилинейная модель сложного теплообмена

### 1.6.1 Формулировка задачи

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу в ограниченной трехмерной области  $\Omega$  с отражающей границей  $\Gamma = \partial\Omega$ :

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = f, \quad (1.46)$$

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta (\varphi - \theta^3 |\theta|) = g, x \in \Omega, 0 < t < T, \quad (1.47)$$

$$k(\theta) \partial_n \theta + p(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \alpha \partial_n \varphi + \gamma (\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \quad (1.48)$$

Здесь  $\theta$  – нормированная температура,  $\varphi$  – нормированная интенсивность излучения. Нормирующими коэффициентами для получения из  $\theta$  и  $\varphi$  абсолютной температуры и средней интенсивности излучения являются  $\mathcal{M}_\theta$  и  $\mathcal{M}_\varphi$  соответственно. Положительные параметры  $b, \alpha, \beta, \gamma, p$  описывают радиационные и теплофизические свойства среды [119],  $\sigma(x, t)$  – произведение удельной теплоемкости на объемную плотность,  $k(\theta)$  – коэффициент теплопроводности,  $f$  и  $g$  описывают вклад источников тепла и излучения соответственно. Символом  $\partial_n$  обозначена производная по направлению внешней нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $\Gamma$ .

Предположим, что  $\Omega$  – липшицева ограниченная область,  $\Gamma = \partial\Omega, Q = \Omega \times (0, T), \Sigma = \Gamma \times (0, T)$ . Обозначим через  $L^p, 1 \leq p \leq \infty$  пространство Лебега, через  $H^1$  пространство Соболева  $W_2^1$  и через  $L^p(0, T; X)$  пространство Лебега функций из  $L^p$ , определенных на  $(0, T)$ , со значениями в банаховом пространстве  $X$ . Пусть  $H = L^2(\Omega), V = H^1(\Omega)$ , а пространство  $V'$  двойственно к  $V$ .

Тогда мы отождествим  $H$  с его двойственным пространством  $H'$  таким, что  $V \subset H = H' \subset V'$ , и обозначим через  $\|\cdot\|$  норму в  $H$ , а через  $(h, v)$  значение функционала  $h \in V'$  на элементе  $v \in V$ , совпадающее со скалярным произведением в  $H$ , если  $h \in H$ . Предположим, что исходные данные удовлетворяют следующим условиям:

$$(k1) \quad \alpha, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega), \quad b = r\beta, r = \text{Const} > 0; \alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \beta_0, \sigma \geq \sigma_0, \alpha_0, \beta_0, \sigma_0 = \text{Const} > 0.$$

$$(k2) \quad 0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1, |k'(s)| \leq k_2, s \in \mathbb{R}, \quad k_j = \text{Const}.$$

$$(k3) \quad 0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma), 0 \leq \theta_v \in L^\infty(\Omega); \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma), p_0 \leq p \in L^\infty(\Gamma), \gamma_0, p_0 = \text{Const} > 0.$$

$$(k4) \quad 0 \leq f, g \in L^\infty(Q)$$

Пусть

$$W = \{y \in L^2(0, T; V) : \sigma y' = \sigma dy/dt \in L^2(0, T, V')\}.$$

Определим операторы  $A_1 : V \rightarrow V'_0$  и  $A_2 : V \rightarrow V'$  такие, что для всех  $\theta, \varphi, v$  выполняются следующие равенства:

$$(A_1(\theta), v) = (k(\theta) \nabla \theta, \nabla v) + \int_\Gamma p \theta v d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_\Gamma p \theta v d\Gamma,$$

$$(A_2 \varphi, v) = (\alpha \nabla \varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma \varphi v d\Gamma,$$



где

$$h(s) = \int_0^s k(r)dr.$$

**Определение 1.6.** Пару  $\theta \in W, \varphi \in L^2(0, T; V)$  будем называть слабым решением задачи (1.46)–(1.48), если

$$\sigma\theta' + A_1(\theta) + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f \quad \text{n. в. в } (0, T), \quad \theta(0) = \theta_{in}, \quad (1.49)$$

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - [\theta]^4) = g_b + g \quad \text{n. в. в } (0, T). \quad (1.50)$$

Здесь  $f_b, g_b \in L^2(0, T; V')$  и

$$(f_b, v) = \int_{\Gamma} p\theta_b v d\Gamma, \quad (g_b, v) = \int_{\Gamma} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

**Замечание 1.1.** Так как  $\theta \in W$ , следовательно  $\theta \in C([0, T]; V)$ . Таким образом, начальные условия имеют смысл.

### 1.6.2 Расщепление задачи

Определим оператор  $F_1 : L^\infty(\Omega) \rightarrow V$  и  $F_2 : L^\infty(Q) \times L^2(0, T; V) \rightarrow W$  следующим образом. Пусть  $\varphi = F_1(\theta)$ , если

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - [\theta]^4) = g_b + g, \quad (1.51)$$

и  $\theta = F_2(\zeta, \varphi)$ , если

$$\sigma\theta' + A(\zeta, \theta) + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f \quad \text{п. в. в } (0, T), \quad \theta(0) = \theta_{in}. \quad (1.52)$$

Здесь

$$(A(\zeta, \theta), v) = (k(\zeta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} p\theta v d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

Пусть  $w(t) = M_0 + M_1 t, t \in [0, T]$ , где

$$M_0 = \max \left\{ \|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_{in}\|_{L^\infty(\Omega)} \right\},$$

$$M_1 = \sigma_0^{-1} (\|f\|_{L^\infty(Q)} + \max b M_2), \quad M_2 = \beta_0^{-1} \|g\|_{L^\infty(Q)}.$$

**Лемма 1.36.** Пусть выполняются условия  $(k1) - (k4)$ ,  $0 \leq \theta \leq w(t)$ ,  $\varphi = F_1(\theta)$ . В таком случае

$$0 \leq \varphi \leq w^4(t) + M_2. \quad (1.53)$$

*Доказательство.* Умножая скалярно (1.51) на  $\psi = \max\{\varphi - M_2 - w^4, 0\} \in L^2(0, T; V)$ , получаем

$$(A_2\varphi - g_b, \psi) + (\beta(\varphi - M_2 - [\theta]^4), \psi) = (g - \beta M_2, \psi) \leq 0.$$

Заметим, что с учетом ограничений на  $\theta$  выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} (A_2\varphi - g_b, \psi) &= (\alpha \nabla \psi, \nabla \psi) + \int_{\Gamma} \gamma (\varphi - \theta_b^4) d\Gamma \geq (\alpha \nabla \psi, \nabla \psi) \\ (\beta(\varphi - M_2 - [\theta]^4), \psi) &= (\beta \psi, \psi) + (\beta(w^4 - [\theta]^4), \psi) \geq (\beta \psi, \psi). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\psi = 0$  и  $\varphi \leq w^4 + M_2$ .

Далее, умножая (1.51) на  $\xi = \min\{\varphi, 0\} \in L^2(0, T; V)$ , мы получаем  $\xi = 0$ . Таким образом,  $\varphi \geq 0$ .  $\square$

**Лемма 1.37.** Пусть выполняются условия  $(k1) - (k4)$ ,  $0 \leq \varphi \leq w^4(t) + M_2$ ,  $\theta = F_2(\zeta, \varphi)$ ,  $\zeta \in L^\infty(Q)$ , тогда  $0 \leq \theta \leq w(t)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\widehat{\theta} = \theta - w$ . Перепишем уравнение (1.52) следующим образом

$$\sigma \widehat{\theta}' + A(\zeta, \theta) - f_b + b([\widehat{\theta} + w]^4 - (\varphi - M_2)) = f - \sigma M_1 + bM_2 \leq 0, \quad (1.54)$$

Умножим скалярно (1.54) на  $\eta = \max\{\widehat{\theta}, 0\} \in W$ . Учтём, что правая часть не положительна, а также то, что

$$\begin{aligned} (\sigma \widehat{\theta}', \eta) &= (\sigma \eta', \eta) = \frac{d}{2dt}(\sigma \eta, \eta) \\ (A(\zeta, \theta) - f_b, \eta) &= (k(\zeta) \nabla \eta, \nabla \eta) + \int_{\Gamma} p(\widehat{\theta} + w - \theta_b) \eta d\Gamma \geq 0 \\ ([\widehat{\theta} + w]^4 - w^4) \max\{\widehat{\theta}, 0\} &\geq 0, \quad (w^4 + M_2 - \varphi) \eta \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(\sigma\eta, \eta) \leq 0, \quad \eta|_{t=0} = 0.$$

Таким образом,  $\eta = 0, \hat{\theta} \leq 0, \theta \leq w$ . Аналогично, умножив (1.54) на  $\eta = \min\{\theta, 0\} \in W$ , мы получим  $\eta = 0, \quad \theta \geq 0$ .  $\square$

Пусть  $\theta_0 = \theta_{\text{in}}, \quad \varphi_0 = F_1(\theta_0)$ . Рекурсивно определим последовательность  $\theta_m \in W, \quad \varphi_m \in L^2(0, T; V)$  такую, что

$$\theta_m = F_2(\theta_{m-1}, \varphi_{m-1}), \quad \varphi_m = F_1(\theta_m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.55)$$

Из лемм 1.36, 1.37 следуют оценки

$$0 \leq \varphi_m \leq w^4(t) + M_2, \quad 0 \leq \theta_m \leq w(t), \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.56)$$

**Лемма 1.38.** *Если выполнены условия (k1) - (k4), то существует константа  $C > 0$ , не зависящая от  $m$ , такая, что*

$$\|\varphi_m\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \quad (1.57)$$

$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s + \delta) - \theta_m(s)\|^2 ds \leq C\delta. \quad (1.58)$$

*Доказательство.* Из определения последовательностей  $\varphi_m, \theta_m$  следуют равенства

$$A_2\varphi_m + \beta \left( \varphi_m - [\theta_m]^4 \right) = g_b + g, \quad (1.59)$$

$$\sigma\theta'_m + A(\theta_{m-1}, \theta_m) + b \left( [\theta_m]^4 - \varphi_{m-1} \right) = f_b + f \quad \text{п. в. в } (0, T), \quad \theta_m(0) = \theta_{\text{in}}. \quad (1.60)$$

Оценки (1.57) выводятся стандартным образом из уравнений (1.59) и (1.60) и с учетом (1.56), т.е. ограниченности последовательностей в  $L^\infty(Q)$ . Получим оценку, гарантирующую компактность последовательности  $\theta_m$  в  $L^2(Q)$ . Перепишем (1.60) как

$$\sigma\theta'_m = \chi_m \quad \text{п. в. в } (0, T), \quad \theta_m(0) = \theta_{\text{in}}, \quad (1.61)$$

где

$$-\chi_m = A(\theta_{m-1}, \theta_m) + b([\theta_m]^4 - \varphi_{m-1}) - f_b - f.$$

Заметим, что с учетом полученных оценок последовательность  $\chi_m$  ограничена в  $L^2(0, T; V')$ . Умножим (1.61) на  $\theta_m(t) - \theta_m(s)$  и проинтегрируем по  $t$  на интервале  $(s, s + \delta)$  и по  $s$  на  $(0, T - \delta)$ , предполагая, что  $\delta > 0$  достаточно мало. В результате получим

$$\frac{1}{2} \int_0^{T-\delta} \|\sqrt{\sigma}(\theta_m(s + \delta) - \theta_m(s))\|^2 ds = \int_0^{T-\delta} \int_s^{s+\delta} c_m(t, s) dt ds,$$

где

$$c_m(t, s) = (\chi_m(t), \theta_m(t) - \theta_m(s)) \leq \|\chi_m(t)\|_{V'}^2 + \frac{1}{2} \|\theta_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\theta_m(s)\|_V^2.$$

Для оценки интегралов от слагаемых, зависящих от  $t$ , достаточно изменить порядок интегрирования. Используя ограниченность последовательностей  $\theta_m$  в  $L^2(0, T; V)$  и  $\chi_m$  в  $L^2(0, T; V')$ , получаем оценку равномерной непрерывности (1.58).  $\square$

Полученные оценки (1.57), (1.58) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что существуют функции  $\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}$  такие, что

$$\begin{aligned} \theta_m &\rightarrow \widehat{\theta} \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \\ \varphi_m &\rightarrow \widehat{\varphi} \text{ слабо в } L^2(0, T; V). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Результатов о сходимости (1.62) достаточно, чтобы перейти к пределу при  $m \rightarrow \infty$  в равенствах (1.59), (1.60) и доказать, что предельные функции  $\widehat{\theta}, \widehat{\varphi} \in L^2(0, T; V)$  таковы, что  $\sigma \widehat{\theta}' \in L^2(0, T; V')$  и для них выполняются равенства (1.49), (1.50).

**Теорема 1.9.** *Если выполнены условия (k1) - (k4), то существует хотя бы одно решение задачи (1.46)-(1.48).*

### 1.6.3 Теорема единственности и сходимость итеративного метода

Покажем, что в классе функций с ограниченным градиентом температуры решение единственно. Это позволяет доказать сходимость итерационной процедуры.

**Теорема 1.10.** Если выполнены условия (k1) - (k4) и  $\theta_*, \varphi_*$  является решением задачи (1.46)-(1.48) так, что  $\theta_*, \nabla \theta_* \in L^\infty(Q)$ , то других ограниченных решений этой задачи нет.

*Доказательство.* Пусть  $\theta_1, \varphi_1$  — другое решение задачи (1.46)-(1.48),  $\theta = \theta_1 - \theta_*, \varphi = \varphi_1 - \varphi_*$ . Тогда

$$\sigma \theta' + A_1(\theta_1) - A_1(\theta_*) + b \left( [\theta_1]^4 - [\theta_*]^4 - \varphi \right) = 0 \quad \text{п. в. в } (0, T), \quad \theta(0) = 0. \quad (1.63)$$

$$A_2 \varphi + \beta \left( \varphi - \left( [\theta_1]^4 - [\theta_*]^4 \right) \right) = 0 \quad \text{п. в. в } (0, T). \quad (1.64)$$

Умножим (1.63) на  $\theta$  и проинтегрируем по времени. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma} \theta\|^2 + \int_0^t \left( (k(\theta_1) \nabla \theta, \nabla \theta) + \int_{\Gamma} p \theta^2(s) d\Gamma \right) ds = \\ & - \int_0^t \left( b \left( [\theta_1]^4 - [\theta_*]^4 - \varphi \right), \theta \right) ds - \int_0^t ((k(\theta_1) - k(\theta_*)) \nabla \theta_*, \nabla \theta) ds. \end{aligned}$$

Пусть  $|\theta_1| \leq M, |\theta_*| \leq M$ . С учетом ограничения на функцию  $k$  получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_0}{2} \|\theta\|^2 + k_0 \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 ds \leq \\ & \int_0^t (4M \max b \|\theta\|^2 + \|\varphi\| \|\theta\|) ds + k_2 \|\nabla \theta_*\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|\theta\| \|\nabla \theta\| ds. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Принимая во внимание, что  $\|\theta\| \|\nabla \theta\| \leq \varepsilon \|\nabla \theta\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\theta\|^2$  и полагая

$$\varepsilon = \frac{k_0}{k_2 \|\nabla \theta_*\|_{L^\infty(Q)}},$$

из (1.65) получаем оценку

$$\frac{\sigma_0}{2} \|\theta\|^2 \leq \int_0^t (4M \max b \|\theta\|^2 + \|\varphi\| \|\theta\|) ds + \frac{1}{4\varepsilon} k_2 \|\nabla \theta_*\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|\theta\|^2 ds. \quad (1.66)$$

Умножим (1.64) скалярно на  $\varphi$ , в результате получим

$$(A_2\varphi, \varphi) + (\beta\varphi, \varphi) = \left( \beta \left( [\theta_1]^4 - [\theta_2]^4 \right), \varphi \right) \leq 4 \max \beta M^3 \|\theta\| \|\varphi\|.$$

Следовательно,  $\|\varphi\| \leq 4\beta_0^{-1} \max \beta M^3 \|\theta\|$ . Тогда из (1.66) и неравенства Гронуолла следует, что  $\theta = 0$ ,  $\theta_1$  совпадает с  $\theta_*$  и, соответственно,  $\varphi_1$  совпадает с  $\varphi_*$ .  $\square$

**Теорема 1.11.** *Если выполнены условия (k1) - (k4) и  $\theta_*$ ,  $\varphi_*$  является решением задачи (1.46)-(1.48) так, что  $\theta_*$ ,  $\nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$ . Тогда для последовательностей (1.55) справедливы следующие сходимости:*

$$\theta_m \rightarrow \theta_* \quad \text{в } L^2(0, T; V), \quad \varphi_m \rightarrow \varphi_* \quad \text{в } L^2(0, T; V)$$

*Доказательство.* Сначала покажем, что  $\theta_m \rightarrow \theta_*$  в  $L^2(0, T; H)$ . Предполагая противное, заключаем, что существуют  $\varepsilon_0 > 0$  и подпоследовательность  $\theta_{m'}$  такие, что  $\|\theta_{m'} - \theta_*\|_{L^2(0, T; H)} \geq \varepsilon_0$ . Оценки (1.57), (1.58) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что справедливы результаты сходимости (1.62), где  $\hat{\theta}, \hat{\varphi}$  также является решением задачи (1.46)-(1.48). Следовательно,  $\|\hat{\theta} - \theta_*\|_{L^2(0, T; H)} \geq \varepsilon_0$ , что противоречит теореме 1.10 о единственности решения. Из уравнений (1.59) и (1.60), с учетом (1.56), т.е. ограниченности последовательностей в  $L^\infty(Q)$ , а также доказанной сходимости  $\theta_m$  в  $L^2(0, T; H)$ , следуют сходимости  $\theta_m \rightarrow \theta_*$ ,  $\varphi_m \rightarrow \varphi_*$  в  $L^2(0, T; V)$ .  $\square$

## Глава 2. Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

### 2.1 Квазирешение граничной обратной задачи

#### 2.1.1 Постановка обратной задачи

Нормализованная стационарная модель, описывающая процесс радиационного теплопереноса в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с липшицевой границей  $\Gamma$  согласно (1.27), (1.28), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\theta$  – нормализованная температура,  $\varphi$  – нормализованная интенсивность излучения, усреднённая по всем направлениям,  $\kappa_a$  – коэффициент поглощения. Константы  $a, b, \alpha, \gamma, \beta$  описываются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$$

где  $k$  – теплопроводность,  $c_v$  – удельная теплоёмкость,  $\rho$  – плотность,  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана,  $n$  – индекс рефракции,  $T_{\max}$  – максимальная температура,  $\kappa := \kappa_s + \kappa_a$  – коэффициент полного взаимодействия,  $\kappa_s$  – коэффициент рассеяния. Коэффициент  $A \in [-1, 1]$  описывает анизотропию рассеивания; случай  $A = 0$  отвечает изотропному рассеиванию.

Уравнения (2.1) дополняются граничными условиями на  $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ , где части границы  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  не имеют пересечений.

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) &= 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2 : \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) &= 0, \\ \Gamma_1 : \quad \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функции  $\gamma, \theta_b, \beta$  – являются известными. Функция  $u$  характеризует отражающие свойства участка границы  $\Gamma_1$ . Предполагается, что

$$0 < u_1 \leq u \leq u_2, \quad (2.3)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  – заданные ограниченные функции.

Обратная задача состоит в нахождении функций

$$u(x), x \in \Gamma_1, \theta(x), \varphi(x), x \in \Omega$$

удовлетворяющих условиям (2.1)–(2.3), а также дополнительному условию на участке границы  $\Gamma_2$ :

$$\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0 \quad (2.4)$$

где  $\theta_0$  известная функция.

Сформулированная обратная задача (2.1)–(2.4) сводится к экстремальной задаче, состоящей в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \quad (2.5)$$

на решениях краевой задачи (2.1)–(2.3).

### 2.1.2 Формализация задачи нахождения квазирешения

Будем предполагать что исходные данные удовлетворяют условию

(i)  $\beta \in L^\infty(\Gamma); \gamma \in L^\infty(\Gamma_0 \cup \Gamma_2); u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma_1); 0 < \beta_0 \leq \beta; 0 < \gamma_0 \leq \gamma; \beta_0, \gamma_0 = Const, 0 \leq u_1 \leq u_2$ .

Пусть  $H = L^2(\Omega), V = H^1(\Omega), Y = V \times V$ . Пространство  $H$  отождествляем с сопряжённым пространством  $H'$  так, что  $V \subset H = H' \subset V'$ . Определим  $(f, v)$  как значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$ , совпадающее со скалярным произведением в  $H$ , если  $f \in H, \|f\|^2 = (f, f)$ . Пространство  $U = L^2(\Gamma_1)$  является пространством управлений;  $U_{ad} = \{u \in U, u_1 \leq u \leq u_2\}$  — множество допустимых управлений.



Пусть  $v$  произвольный элемент множества  $V$ . Определим операторы:

$$\begin{aligned} A_{1,2}: V &\rightarrow V', \quad F: V \times U \rightarrow V', \quad f \in V', \quad g \in V'. \\ (A_1\theta, v) &= a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} \gamma\varphi v d\Gamma, \\ (f, v) &= \int_{\Gamma} \beta\theta_b v d\Gamma, \quad (g, v) = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma, \\ (F(\varphi, u), v) &= \int_{\Gamma_1} u(\varphi - \theta_b^4) v d\Gamma. \end{aligned}$$

Пару  $\{\theta, \varphi\} \in Y$  будем называть слабым решением задачи (2.1), (2.2), если

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (2.6)$$

Задача нахождения квазирешения состоит в минимизации функционала  $J(\theta)$ , определённом на компоненте  $\theta$  решения системы (2.6). Таким образом получаем следующую задачу на экстремум

$$J(\theta) \rightarrow \inf, \quad \{\theta, \varphi\} \text{ решение (2.6), соответствующее функции } u \in U_{ad}. \quad (2.7)$$

Пара  $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$  соответствующая минимуму  $J$ , отвечающая функции  $\hat{u}$  называется оптимальным состоянием. В таком случае  $\hat{u}$  называется квазирешением обратной задачи (2.1)–(2.4).

### 2.1.3 Анализ экстремальной задачи

Для доказательства разрешимости задачи (2.7) установим некоторые свойства решения задачи (2.1), (2.2).

**Лемма 2.1** ([120]). Пусть выполняется условие (i). Тогда для каждого  $u \in U_{ad}$  существует единственное слабое решение  $\{\theta, \varphi\}$  для задачи (2.1), (2.2) и справедливы оценки:

$$M_1 \leq \theta \leq M_2, \quad M_1^4 \leq \varphi \leq M_2^4, \quad (2.8)$$

$$\|\nabla \varphi\|^2 \leq C. \quad (2.9)$$

Здесь  $M_1 = \operatorname{ess\,inf} \theta_b$ ,  $M_2 = \operatorname{ess\,sup} \theta_b$ , и константа  $C > 0$  зависит только от

$a, b, \alpha, \kappa_a, \beta, \gamma, \|u\|_{L^\infty(\Gamma)}$  и области  $\Omega$ .

На основе оценок (2.8) и (2.9) аналогично [69] доказывается разрешимость экстремальной задачи (2.7).

**Теорема 2.1.** Пусть выполняется условие (i). Тогда существует хотя бы одно решение задачи (2.7).

Для вывода системы оптимальности, покажем дифференцируемость функционала  $J$ .

**Лемма 2.2.** Функционал  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируем по Фреше.

*Доказательство.* Покажем, что для произвольной функции  $\theta \in V$  выполняется следующее равенство:

$$J(\theta + h) = J(\theta) + J'(\theta)\langle h \rangle + r(\theta, h) \quad \forall h \in V, \quad \text{где} \quad J'(\theta)\langle h \rangle = \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0) h d\Gamma \quad (2.10)$$

и для остаточного члена  $r(\theta, h)$  справедливо соотношение:

$$\frac{|r(\theta, h)|}{\|h\|_V} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_V \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Перепишем (2.10) в виде

$$\frac{1}{2} \|\theta + h - \theta_0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 = \frac{1}{2} \|\theta - \theta_0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 + (\theta - \theta_0, h)_{L^2(\Gamma_2)} + \frac{1}{2} \|h\|_{L^2(\Gamma_2)}^2.$$

Согласно теореме о следах  $\|h\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C \|h\|_V$ , где  $C$  не зависит от  $h$ . Поэтому

$$\frac{r(\theta, h)}{\|h\|_V} \leq \frac{1}{2} C^2 \|h\|_V \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_V \rightarrow 0.$$

Лемма доказана. □

Вывод условий оптимальности основан на принципе множителей Лагранжа для гладко-выпуклых задач минимизации.

**Теорема 2.2.** Пусть  $\hat{y} = \{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\} \in Y, \hat{u} \in U_{ad}$  — решение экстремальной задачи (2.7). Тогда существует пара  $p = (p_1, p_2), p \in Y$  такая, что тройка  $(\hat{y}, \hat{u}, p)$ , удовлетворяет следующим условиям:

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a(b p_1 - p_2) = f_c, \quad (f_c, v) = - \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma, \quad (2.12)$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - b p_1) = g_c(p_2, \hat{u}), \quad (g_c(p_2, \hat{u}), v) = - \int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma, \quad (2.13)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2 (\hat{\varphi} - \theta_b^4)(u - w) d\Gamma \leq 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (2.14)$$

*Доказательство.* Перепишем уравнения (2.6) следующим образом:

$$H(y, u) = 0, \quad y = \{\theta, \varphi\} \in Y,$$

где

$$H : Y \times U \rightarrow Y',$$

$$H(y, u) = \{A_1 \theta + b \kappa_a(|\theta| \theta^3 - \varphi) - f, A_2 \varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta| \theta^3) + F(\varphi, u) - g\}.$$

Заметим, что для всех  $u \in U_{ad}$ , отображение  $y \rightarrow J(\theta)$  и  $y \rightarrow H(y, u)$  непрерывно дифференцируемо в окрестности  $\mathcal{O}(\hat{y})$  точки  $\hat{y}$ . Непрерывная дифференцируемость членов в  $H$  следует из непрерывной дифференцируемости функции  $t \in \mathbb{R} \rightarrow |t|t^3$ , а также из непрерывности вложения  $V \subset L^6(\Omega)$ . В дополнение, отображение  $u \rightarrow H(y, u)$  непрерывно из  $U \rightarrow Y'$  и аффинно. В [69] показано, что  $\text{Im} H'_y(\hat{y}, \hat{u}) = Y$ , что влечёт невырожденность условий оптимальности.

Рассмотрим функцию Лагранжа  $L(y, u, p) = J(\theta) + (H(y, u), p)$ , где  $y, p \in Y, u \in U_{ad}$ . Согласно принципу Лагранжа [121, Гл.2, теорема 1.5] существует пара  $p = \{p_1, p_2\} \in Y$  такая, что

$$(L'_\theta, \zeta) = \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) \zeta d\Gamma + (A_1 \zeta + 4b \kappa_a |\hat{\theta}|^3 \zeta, p_1) - 4 \kappa_a (|\hat{\theta}|^3 \zeta, p_2) = 0 \quad \forall \zeta \in V, \quad (2.15)$$

$$(L'_\varphi, \zeta) = (A_2 \zeta + \kappa_a \zeta, p_2) - b \kappa_a (\zeta, p_1) + \int_{\Gamma_1} \hat{u} \zeta p_2 d\Gamma = 0 \quad \forall \zeta \in V, \quad (2.16)$$

$$(L'_u, \tau) = \int_{\Gamma_1} \tau (\varphi - \theta_b^4) p_2 d\Gamma \leq 0, \quad \tau := \hat{u} - w \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (2.17)$$

Сопряжённые уравнения (2.12), (2.13) являются прямым следствием вариационных равенств (2.15) и (2.16).  $\square$

Численный алгоритм, основанный на полученной системе оптимальности представлен в 4.2.2.

## 2.2 Анализ оптимизационного метода решения задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши

### 2.2.1 Постановка обратной задачи

Рассмотрим систему эллиптических уравнений (2.1) моделирующую стационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.18)$$

Будем предполагать, что на границе  $\Gamma = \partial\Omega$  известно температурное поле,

$$\theta = \theta_b. \quad (2.19)$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию, описывающую отражающие свойства границы [102]. В том случае, если указанная функция неизвестна, естественно вместо краевого условия для интенсивности излучения задавать тепловые потоки на границе

$$\partial_n\theta = q_b. \quad (2.20)$$

Здесь через  $\partial_n$  обозначаем производную в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$ .

Нелокальная разрешимость нестационарной и стационарной краевых задач для уравнений сложного теплообмена без краевых условий на интенсивность излучения и с условиями (2.19), (2.20) для температуры доказана в [122, 123].

Данный раздел посвящен анализу предлагаемого оптимизационного метода решения краевой задачи (2.18)-(2.20) с условиями типа Коши для температуры. Указанный метод заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления для системы (2.18) с “искусственными” краевыми условиями

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \quad (2.21)$$

Функция  $r(x)$ ,  $x \in \Gamma$  является заданной, а неизвестная функция  $u(x)$ ,  $x \in \Gamma$  играет роль управления. Экстремальная задача заключается в отыскании тройки  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf \quad (2.22)$$

на решениях краевой задачи (2.18), (2.21). Функция  $\theta_b(x)$ ,  $x \in \Gamma$  и параметр регуляризации  $\lambda > 0$  заданы.

Как будет показано ниже, задача оптимального управления (2.18), (2.21), (2.22), если  $r := a(\theta_b + q_b)$ , где  $q_b$  – заданная на  $\Gamma$  функция, является при малых  $\lambda$  аппроксимацией краевой задачи (2.18)–(2.20).

### 2.2.2 Формализация задачи управления

В дальнейшем считаем, что  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – ограниченная строго липшицева область, граница  $\Gamma$  которой состоит из конечного числа гладких кусков. Через  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  обозначаем пространство Лебега, а через  $H^s$  – пространство Соболева  $W_2^s$ . Пусть  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega)$ , через  $V'$  обозначаем пространство, сопряженное с пространством  $V$ . Пространство  $H$  отождествляем с пространством  $H'$  так, что  $V \subset H = H' \subset V'$ . Обозначим через  $\|\cdot\|$  стандартную норму в  $H$ , а через  $(f, v)$  – значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$ , совпадающее со скалярным произведением в  $H$ , если  $f \in H$ . Через  $U$  обозначаем пространство  $L^2(\Gamma)$  с нормой  $\|u\|_\Gamma = \left(\int_{\Gamma} u^2 d\Gamma\right)^{1/2}$ .

Будем предполагать, что

- (j)  $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$ ,
- (jj)  $\theta_b, q_b \in U$ ,  $r = a(\theta_b + q_b)$ .

Определим операторы  $A: V \rightarrow V'$ ,  $B: U \rightarrow V'$ , используя следующие равенства, справедливые для любых  $y, z \in V$ ,  $w \in U$ :

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma} yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_{\Gamma} wz d\Gamma.$$

Билинейная форма  $(Ay, z)$  определяет скалярное произведение в пространстве  $V$ , а соответствующая норма  $\|z\|_V = \sqrt{(Az, z)}$  эквивалентна стандартной норме

$V$ . Поэтому определен непрерывный обратный оператор  $A^{-1} : V' \mapsto V$ . Отметим, что для любых  $v \in V$ ,  $w \in U$ ,  $g \in V'$  справедливы неравенства

$$\|v\|^2 \leq C_0 \|v\|_V^2, \|v\|_{V'} \leq C_0 \|v\|_V, \|Bw\|_{V'} \leq \|w\|_\Gamma, \|A^{-1}g\|_V \leq \|g\|_{V'}. \quad (2.23)$$

Здесь постоянная  $C_0 > 0$  зависит только от области  $\Omega$ .

Далее используем следующее обозначение  $[h]^s := |h|^s \text{sign } h$ ,  $s > 0$ ,  $h \in \mathbb{R}$  для монотонной степенной функции.

**Определение 2.1.** Пара  $\theta, \varphi \in V$  называется слабым решением задачи (2.18), (2.21), если

$$aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu. \quad (2.24)$$

Для формулировки задачи оптимального управления определим оператор ограничений  $F(\theta, \varphi, u) : V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$ ,

$$F(\theta, \varphi, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

**Задача (CP).** Найти тройку  $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$  такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_\Gamma^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0. \quad (2.25)$$

### 2.2.3 Разрешимость задачи (CP)

Докажем предварительно однозначную разрешимость краевой задачи (2.18), (2.21).

**Лемма 2.3.** Пусть выполняются условия (j), (jj),  $u \in U$ . Тогда существует единственное слабое решение задачи (2.18), (2.21) и при этом

$$\begin{aligned} a\|\theta\|_V &\leq \|r\|_\Gamma + \frac{C_0\kappa_a}{\alpha} \|r + bu\|_\Gamma, \\ \alpha b\|\varphi\|_V &\leq \|r\|_\Gamma + \left( \frac{C_0\kappa_a}{\alpha} + 1 \right) \|r + bu\|_\Gamma. \end{aligned} \quad (2.26)$$

*Доказательство.* Если второе уравнение в (2.24) умножить на  $b$  и сложить с первым, то получим равенства

$$\begin{aligned} A(a\theta + \alpha b\varphi) &= B(r + bu), \quad a\theta + \alpha b\varphi = A^{-1}B(r + bu), \\ \varphi &= \frac{1}{\alpha b} (A^{-1}B(r + bu) - a\theta). \end{aligned}$$

Поэтому  $\theta \in V$  является решением следующего уравнения:

$$aA\theta + \frac{\kappa_a}{\alpha}\theta + b\kappa_a[\theta]^4 = g. \quad (2.27)$$

Здесь

$$g = Br + \frac{\kappa_a}{\alpha}A^{-1}B(r + bu) \in V'.$$

Однозначная разрешимость уравнения (2.27) с монотонной нелинейностью хорошо известна (см. например [124]). Следовательно задача (2.24) однозначно разрешима.

Для получения оценок (2.26) умножим скалярно (2.27) на  $\theta \in V$  и отбросим неотрицательные слагаемые в левой части. Тогда

$$a\|\theta\|_V^2 \leq (g, \theta) \leq \|g\|_{V'}\|\theta\|_V, \quad a\|\theta\|_V \leq \|g\|_{V'}.$$

Неравенства (2.23) позволяют оценить  $\|g\|_{V'}$  и  $\|\varphi\|_V$ ,

$$\|g\|_{V'} \leq \|r\|_\Gamma + \frac{C_0\kappa_a}{\alpha}\|r + bu\|_\Gamma, \quad \|\varphi\|_V \leq \frac{1}{\alpha b}\|r + bu\|_\Gamma + \frac{a}{\alpha b}\|\theta\|_V.$$

В результате получаем оценки (2.26). □

Полученные оценки решения управляемой системы позволяют доказать разрешимость задачи оптимального управления.

**Теорема 2.3.** Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда существует решение задачи (CP).

*Доказательство.* Пусть  $j_\lambda = \inf J_\lambda$  на множестве  $u \in U$ ,  $F(\theta, \varphi, u) = 0$ . Выберем минимизирующую последовательность  $u_m \in U$ ,  $\theta_m \in V$ ,  $\varphi_m \in V$ ,

$$J_\lambda(\theta_m, u_m) \rightarrow j_\lambda,$$

$$aA\theta_m + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi_m) = Br, \quad \alpha A\varphi_m + \kappa_a(\varphi_m - [\theta]^4) = Bu_m. \quad (2.28)$$

Из ограниченности последовательности  $u_m$  в пространстве  $U$  следуют, на основании леммы 2.3, оценки

$$\|\theta_m\|_V \leq C, \quad \|\varphi_m\|_V \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^6(\Omega)} \leq C.$$

Здесь через  $C > 0$  обозначена наибольшая из постоянных, ограничивающих соответствующие нормы и не зависящих от  $m$ . Переходя при необходимости к

подпоследовательностям, заключаем, что существует тройка  $\{\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\} \in U \times V \times V$ ,

$$u_m \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } U, \quad \theta_m, \varphi_m \rightarrow \hat{\theta}, \hat{\varphi} \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^4(\Omega). \quad (2.29)$$

Заметим также, что  $\forall v \in V$

$$|([\theta_m]^4 - [\hat{\theta}]^4, v) \leq 2\|\theta_m - \hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)}\|v\|_{L^4(\Omega)} \left( \|\theta_m\|_{L_6(\Omega)}^3 + \|\hat{\theta}\|_{L_6(\Omega)}^3 \right). \quad (2.30)$$

Результаты о сходимости (2.29), (2.30) позволяют перейти к пределу в (2.28). Поэтому

$$aA\hat{\theta} + b\kappa_a([\hat{\theta}]^4 - \hat{\varphi} = Br), \quad \alpha A\hat{\varphi} + \kappa_a(\hat{\varphi} - [\hat{\theta}]^4) = B\hat{u},$$

и при этом  $j_\lambda \leq J_\lambda(\hat{\theta}, \hat{u}) \leq \liminf J_\lambda(\theta_m, u_m) = j_\lambda$ . Следовательно, тройка  $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$  есть решение задачи (CP).  $\square$

#### 2.2.4 Условия оптимальности

Для получения системы оптимальности достаточно использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [121, 125]. Проверим справедливость ключевого условия, что образ производной оператора ограничений  $F(y, u)$ , где  $y = \{\theta, \varphi\} \in V \times V$ , совпадает с пространством  $V' \times V'$ . Именно это условие гарантирует невырожденность условий оптимальности. Напомним, что

$$F(y, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

**Лемма 2.4.** Пусть выполняются условия (j), (jj). Для любой пары  $\hat{y} \in V \times V, \hat{u} \in U$  справедливо равенство

$$ImF'_y(y, u) = V' \times V'.$$

*Доказательство.* Достаточно проверить, что задача

$$aA\xi + b\kappa_a(4|\hat{\theta}|^3\xi - \eta) = f_1, \quad \alpha A\eta + \kappa_a(\eta - 4|\hat{\theta}|^3\xi) = f_2$$



разрешима для всех  $f_{1,2} \in V'$ . Данная задача равносильна системе

$$aA\xi + \kappa_a \left( 4b|\theta|^3 + \frac{a}{\alpha} \right) \xi = f_1 + \frac{\kappa_a}{\alpha} f_3, \quad \eta = \frac{1}{\alpha b} (f_3 - a\xi).$$

Здесь  $f_3 = A^{-1}(f_1 + bf_2) \in V$ . Разрешимость первого уравнения указанной системы очевидным образом следует из леммы Лакса-Мильграма.

В соответствии с леммой 2.4, лагранжиан задачи  $(CP)$  имеет вид

$$\begin{aligned} L(\theta, \varphi, u, p_1, p_2) = & J_\lambda(\theta, u) + (aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, p_1) \\ & + (\alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu, p_2). \end{aligned}$$

Здесь  $p = \{p_1, p_2\} \in V \times V$  – сопряженное состояние. Если  $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$  – решение задачи  $(CP)$ , то в силу принципа Лагранжа [125, Гл. 2, теорема 1.5] справедливы вариационные равенства  $\forall v \in V, w \in U$

$$(\hat{\theta} - \theta_b, v)_\Gamma + (aAv + 4b\kappa_a|\hat{\theta}|^3v, p_1) - \kappa_a(4|\hat{\theta}|^3v, p_2) = 0, \quad (2.31)$$

$$b\kappa_a(v, p_1) + (\alpha Av + \kappa_a v, p_2) = 0,$$

$$\lambda(\hat{u}, w)_\Gamma - (Bw, p_2) = 0. \quad (2.32)$$

Таким образом, из условий (2.31), (2.32) получаем следующий результат, который вместе с уравнениями (2.24) для оптимальной тройки определяет систему оптимальности задачи  $(CP)$ .  $\square$

**Теорема 2.4.** Пусть выполняются условия  $(j), (jj)$ . Если  $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$  – решение задачи  $(CP)$ , то существует единственная пара  $\{p_1, p_2\} \in V \times V$  такая, что

$$aAp_1 + 4|\hat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) = B(\theta_b - \hat{\theta}), \quad \alpha Ap_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0 \quad (2.33)$$

и при этом  $\lambda\hat{u} = p_2$ .

## 2.2.5 Аппроксимация задачи с условиями типа Коши

Рассмотрим краевую задачу (2.18)–(2.20) для уравнений сложного теплообмена, в которой нет краевых условий на интенсивность излучения. Существование  $\theta, \varphi \in H^2(\Omega)$ , удовлетворяющих (2.18)–(2.20) для достаточно гладких  $\theta_b, q_b$  и достаточные условия единственности решения установлены в [123]. Покажем, что решения задачи  $(CP)$  при  $\lambda \rightarrow +0$  аппроксимируют решение задачи (2.18)–(2.20).

**Теорема 2.5.** Пусть выполняются условия (i), (ii) и существует решение задачи (2.18)–(2.20). Если  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  – решение задачи (CP) для  $\lambda > 0$ , то существует последовательность  $\lambda \rightarrow +0$  такая, что

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_*, \quad \varphi_\lambda \rightarrow \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

где  $\theta_*, \varphi_*$  – решение задачи (2.18)–(2.20).

*Доказательство.* Пусть  $\theta, \varphi \in H^2(\Omega)$  – решение задачи (2.18)–(2.20),  $u = \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) \in U$ . Тогда

$$aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu,$$

где  $r := a(\theta_b + q_b)$ . Поэтому, с учетом того, что  $\theta|_\Gamma = \theta_b$ ,

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2}\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2}\|u_\lambda\|_\Gamma^2 \leq J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2}\|u\|_\Gamma^2.$$

Следовательно,

$$\|u_\lambda\|_\Gamma^2 \leq C, \quad \|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow +0.$$

Здесь и далее  $C > 0$  не зависит от  $\lambda$ . Из ограниченности последовательности  $u_\lambda$  в пространстве  $U$  следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_\lambda\|_V \leq C, \quad \|\varphi_\lambda\|_\lambda \leq C.$$

Поэтому можно выбрать последовательность  $\lambda \rightarrow +0$  такую, что

$$u_\lambda \rightarrow u_* \text{ слабо в } U, \quad \theta_\lambda, \varphi_\lambda \rightarrow \theta_*, \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^4(\Omega). \quad (2.34)$$

Результаты (2.34) позволяют перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow +0$  в уравнениях для  $\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda$  и тогда

$$aA\theta_* + b\kappa_a([\theta_*]^4 - \varphi_*) = Br, \quad \alpha A\varphi_* + \kappa_a(\varphi_* - [\theta_*]^4) = Bu_*. \quad (2.35)$$

При этом  $\theta_*|_\Gamma = \theta_b$ . Из первого уравнения в (2.35), с учетом, что  $r = a(\theta_b + q_b)$ , выводим

$$-a\Delta\theta_* + b\kappa_a([\theta_*]^4 - \varphi_*) = 0 \text{ п.в. в } \Omega, \quad \theta_* = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b \text{ п.в. на } \Gamma.$$

Из второго уравнения в (2.35) следует, что  $-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = 0$  почти всюду в  $\Omega$ . Таким образом, пара  $\theta_*, \varphi_*$  – решение задачи (2.18)–(2.20).  $\square$

**Замечание 2.1.** Из ограниченности последовательности  $u_\lambda$  в пространстве  $U$  следует ее слабая относительная компактность и существование последовательности (возможно не единственной)  $\lambda \rightarrow +0$  такой, что  $u_\lambda \rightarrow u_*$  слабо в  $U$ .

Для практического решения задачи (2.18)-(2.20) важно то, что для любой последовательности  $\lambda \rightarrow +0$  справедлива оценка  $\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 \leq C\lambda$ , а поскольку  $\partial_n \theta_\lambda = \theta_b + q_b - \theta_\lambda$ , то также  $\|\partial_n \theta_\lambda - q_b\|_\Gamma^2 \leq C\lambda$ . Указанные неравенства гарантируют, что граничные значения  $\theta_\lambda, \partial_n \theta_\lambda$  при малых  $\lambda$  аппроксимируют краевые условия задачи (2.18)-(2.20).

В главе 4.3.1 рассмотрен численный метод решения задачи и приведены численные примеры, демонстрирующие его эффективность.

## 2.3 Анализ оптимизационного метода для квазистационарной модели

### 2.3.1 Постановка задачи оптимального управления

Квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$  моделируем следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$a(\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \quad (2.37)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (2.38)$$

Здесь  $\theta$  — нормализованная температура,  $\varphi$  — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные параметры  $a, b, \kappa_a$  и  $\alpha$ , описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [120]. Функция  $r(x, t), x \in \Gamma, t \in (0, T)$ , а неизвестная функция  $u(x, t), x \in \Gamma, t \in (0, T)$  — управление.

Экстремальная задача состоит в том, чтобы найти тройку  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf \quad (2.39)$$

на решениях задачи (2.36)–(2.38).

Функция  $\theta_b(x, t)$ ,  $x \in \Gamma$ ,  $t \in (0, T)$ , а также регуляризирующий параметр  $\lambda > 0$  являются заданными.

Задача оптимального управления (2.36)–(2.39), если  $r := a(\theta_b + q_b)$ , где  $q_b$  — заданная функция на  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ , является при малых значениях  $\lambda$  аппроксимацией краевой задачи для уравнения (2.36), для которого неизвестны граничные условия для интенсивности излучения  $\varphi$ . Вместо них задаются граничные температура и нормальная производная

$$\theta|_\Gamma = \theta_b, \quad \partial_n \theta|_\Gamma = q_b. \quad (2.40)$$

Основные результаты раздела заключаются в получении априорных оценок решения задачи (2.36), (2.37), на основании которых доказывается разрешимость задачи оптимального управления (2.36)–(2.39), и выводится система оптимальности. Показано, что последовательность  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  решений экстремальной задачи (2.36)–(2.39), при  $\lambda \rightarrow +0$  сходится к решению начально-краевой задачи (2.36), (2.40), с условиями типа Коши для температуры.

### 2.3.2 Формализация задачи управления

В дальнейшем как и ранее предполагается, что  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная строго липшицева область, граница которой  $\Gamma$  состоит из конечного числа гладких кусков. Через  $L^s$ ,  $1 \leq s \leq \infty$  обозначается пространство Лебега, а через  $H^s$  пространство Соболева  $W_2^s$ . Пусть  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega)$ . Через  $V'$  обозначим двойственное к  $V$  пространство, а через  $L^s(0, T; X)$  пространство Лебега функций из  $L^s$ , определенных на  $(0, T)$  со значениями в пространстве  $X$ . Пространство  $H$  отождествляется с пространством  $H'$  так, что  $V \subset H = H' \subset V'$ .

Обозначим через  $\|\cdot\|$  стандартную норму в  $H$ , а через  $(f, v)$  значение функционала  $f \in V'$  в элементе  $v \in V$ , что совпадает со скалярным произведением в  $H$ , если  $f \in H$ .

Через  $U$  обозначим пространство  $L^2(\Sigma)$  с нормой

$$\|u\|_\Sigma = \left( \int_\Sigma u^2 d\Gamma dt \right)^{1/2}.$$

Также будем использовать пространство

$$W = \{y \in L^2(0, T; V) : y' \in L^2(0, T, V')\},$$

где  $y' = dy/dt$ .

Будем считать, что

(k)  $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$ ,

(kk)  $\theta_b, q_b \in U, r = a(\theta_b + q_b) \in L^5(\Sigma), \theta_0 \in L^5(\Omega)$ .

Определим операторы  $A : V \rightarrow V', B : U \rightarrow V'$ , используя следующие равенства, справедливые для любых  $y, z \in V, w \in L^2(\Gamma)$ :

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_\Gamma yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_\Gamma wz d\Gamma.$$

Билинейная форма  $(Ay, z)$  определяет скалярное произведение в пространстве  $V$ , и соответствующая норма  $\|z\|_V = \sqrt{(Az, z)}$  эквивалентна к стандартной норме в  $V$ . Следовательно, определен непрерывный обратный оператор  $A^{-1} : V' \mapsto V$ . Заметим, что для любых  $v \in V, w \in L^2(\Gamma), g \in V'$  выполняются следующие неравенства:

$$\|v\|^2 \leq C_0 \|v\|_V^2, \|v\|_{V'} \leq C_0 \|v\|_V, \|Bw\|_{V'} \leq \|w\|_\Gamma, \|A^{-1}g\|_V \leq \|g\|_{V'}.$$

Здесь константа  $C_0 > 0$  зависит только от области  $\Omega$ .

**Определение 2.2.** Пара  $\theta \in W, \varphi \in L^2(0, T; V)$  называется слабым решением задачи (2.36)–(2.38), если

$$\theta' + aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu. \quad (2.41)$$

Для формулировки задачи оптимального управления определим оператор ограничения  $F(\theta, \varphi, u) : W \times L^2(0, T; V) \times U \rightarrow L^2(0, T, V') \times L^2(0, T, V') \times H$  таким, что

$$F(\theta, \varphi, u) = \{\theta' + aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \\ \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu, \theta(0) - \theta_0\}.$$

Таким образом задача (ОС) заключается в отыскании тройки  $\{\theta, \varphi, u\} \in W \times L^2(0, T; V) \times U$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_\Sigma^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_\Sigma^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0.$$

### 2.3.3 Разрешимость задачи (ОС)

Докажем сначала однозначную разрешимость задачи (2.36)–(2.38).

**Лемма 2.5.** Пусть выполняются условия  $(k), (kk)$ ,  $u \in U$ . Тогда существует единственное слабое решение задачи (2.36)–(2.38) и, кроме того,

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0, T; H).$$

*Доказательство.* Выразим  $\varphi$  из последнего уравнения (2.41) и подставим его в первое. В результате получаем следующую задачу Коши для уравнения с операторными коэффициентами:

$$\theta' + aA\theta + L[\theta]^4 = Br + f, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2.42)$$

Здесь

$$L = \alpha b \kappa_a A (\alpha A + \kappa_a I)^{-1} : V' \rightarrow V', \quad f = b \kappa_a (\alpha A + \kappa_a I)^{-1} Bu \in L^2(0, T; V).$$

Получим априорные оценки решения задачи (2.42), на основании которых стандартным образом выводится разрешимость этой задачи. Пусть  $[\zeta, \eta] = ((\alpha I + \kappa_a A^{-1}) \zeta, \eta)$ ,  $\zeta \in V', \eta \in V$ . Отметим, что выражение  $[[\eta]] = \sqrt{[\eta, \eta]}$  определяет норму в  $H$ , эквивалентную стандартной.

Умножая скалярно в  $H$  уравнение в (2.42) на  $(\alpha I + \kappa_a A^{-1}) \theta$ , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [[\theta]]^2 + a\alpha(A\theta, \theta) + a\kappa_a \|\theta\|^2 + \alpha b \kappa_a \|\theta\|_{L^5(\Omega)}^5 = [Br, \theta] + [f, \theta]. \quad (2.43)$$

Из равенства (2.43) следует оценка

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\theta\|_{L^2(0,T;V)} + \|\theta\|_{L^5(Q)} \leq C_1, \quad (2.44)$$

где  $C_1$  зависит только от  $a, b, \alpha, \kappa_a, \|f\|_{L^2(0,T;H)}, \|\theta_0\|, \|r\|_{L^2(\Sigma)}$ .

Далее положим  $\psi = [\theta]^{5/2}$ . В таком случае

$$(\theta', [\theta]^4) = \frac{1}{5} \frac{d}{dt} \|\psi\|^2, \quad (A\theta, [\theta]^4) = \frac{16}{25} \|\nabla \psi\|^2 + \|\psi\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Умножая скалярно в  $H$  уравнение в (2.42) на  $[\theta]^4 = [\psi]^{8/5}$ , получаем

$$\frac{1}{5} \frac{d}{dt} \|\psi\|^2 + a \left( \frac{16}{25} \|\nabla \psi\|^2 + \|\psi\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) + (L[\psi]^{8/5}, [\psi]^{8/5}) = (Br + f, [\psi]^{8/5}). \quad (2.45)$$

Равенство (2.45) влечет оценку

$$\|\psi\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\psi\|_{L^2(0,T;V)} + \|[\theta]^4\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_2, \quad (2.46)$$

где  $C_2$  зависит только от  $a, b, \alpha, \kappa_a, \|f\|_{L^2(0,T;H)}, \|\theta_0\|_{L^5(\Omega)}, \|r\|_{L^5(\Sigma)}$ . Получим оценку  $\|\theta'\|_{L^2(0,T;V')}$  с учетом того, что  $\theta' = Br + f - aA\theta - L[\theta]^4$ . В силу условий на исходные данные  $Br, f \in L^2(0, T; V')$ . Поскольку  $\theta \in L^2(0, T; V)$ , то  $A\theta \in L^2(0, T; V')$ . Пусть  $\zeta = L[\theta]^4$ . Таким образом

$$\alpha \zeta + \kappa_a A^{-1} \zeta = \alpha b \kappa_a [\theta]^4.$$

Умножая в смысле скалярного произведения  $H$  последнее равенство на  $\zeta$ , получаем

$$\alpha \|\zeta\|^2 + \kappa_a (A^{-1} \zeta, \zeta) = \alpha b \kappa_a ([\theta]^4, \zeta) \leq \alpha \left( \|\zeta\|^2 + \frac{(b \kappa_a)^2}{4} \|[\theta]^4\|^2 \right).$$

Следовательно,  $\|\zeta\|_{V'}^2 = (A^{-1} \zeta, \zeta) \leq \frac{\alpha \kappa_a b^2}{4} \|[\theta]^4\|^2$  и в силу оценок (2.44), (2.46) получаем

$$\|\theta'\|_{L^2(0,T;V')} \leq \|Br + f\|_{L^2(0,T;V')} + aC_1 + \sqrt{\alpha \kappa_a} b C_2. \quad (2.47)$$

Оценок (2.44)–(2.47) достаточно для доказательства разрешимости задачи.

Пусть  $\theta_{1,2}$  — решения задачи (2.42),  $\eta = \theta_1 - \theta_2$ . Тогда

$$\eta' + aA\eta + L\left([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4\right) = 0, \quad \eta(0) = 0.$$

Умножая в смысле скалярного произведения  $H$  последнее уравнение на  $(\alpha I + \kappa_a A^{-1})\eta$ , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [[\eta]]^2 + a\alpha(A\eta, \eta) + a\kappa_a \|\eta\|^2 + \alpha b \kappa_a \left([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4, \theta_1 - \theta_2\right) = 0.$$

Последний член в левой части неотрицательный, поэтому, интегрируя полученное равенство по времени, получаем  $\eta = \theta_1 - \theta_2 = 0$ , что означает единственность решения. Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 2.6.** Пусть выполняются условия  $(k), (kk)$ . Тогда существует решение задачи (OC).

*Доказательство.* Пусть  $j_\lambda = \inf\{J_\lambda : u \in U, F(\theta, \varphi, u) = 0\}$ . Выберем минимизирующую последовательность  $u_m \in U, \theta_m \in W, \varphi_m \in L^2(0, T; V), J_\lambda(\theta_m, u_m) \rightarrow j_\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \theta'_m + aA\theta_m + b\kappa_a \left([\theta_m]^4 - \varphi_m\right) &= Br, \theta_m(0) = \theta_0, \\ \alpha A\varphi_m + \kappa_a \left(\varphi_m - [\theta_m]^4\right) &= Bu_m. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Ограниченность последовательности  $u_m$  в пространстве  $U$  влечет по 2.5 оценки

$$\begin{aligned} \|\theta_m\|_{L^2(0,T;V)} &\leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^\infty(0,T;L^5(\Omega))} \leq C, \quad \|\theta'_m\|_{L^2(0,T;V')} \leq C, \\ \int_0^T \int_\Omega |\theta_m|^8 dx dt &\leq C, \quad \|\varphi_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C. \end{aligned}$$

Здесь  $C > 0$  обозначает наибольшую из констант, ограничивающих соответствующие нормы и не зависящих от  $m$ . Переходя, если необходимо, к подпоследовательностям, заключаем, что существует тройка  $\{\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\} \in U \times W \times L^2(0, T; V)$ ,

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } U \\ \theta_m &\rightarrow \hat{\theta} \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \text{ сильно в } L^2(Q), \\ \varphi_m &\rightarrow \hat{\varphi} \text{ слабо в } L^2(0, T; V). \end{aligned}$$



Более того,  $\widehat{\theta} \in L^8(Q) \cap L^\infty(0, T; L^5(\Omega))$ .

Результаты о сходимости позволяют перейти к пределу в (2.48). В этом случае предельный переход в нелинейной части следует из следующего неравенства, справедливого при  $\xi \in C^\infty(\bar{Q})$ :

$$\int_0^T \left| ([\theta_m]^4 - [\widehat{\theta}]^4, \xi) \right| dt \leq 2 \max_{\bar{Q}} |\xi| \left( \|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^{5/3} \|\theta_m\|_{L^8(\Omega)}^{4/3} + \|\widehat{\theta}\|_{L^5(\Omega)}^{5/3} \|\widehat{\theta}\|_{L^8(\Omega)}^{4/3} \right) \|\theta_m - \widehat{\theta}\|_{L^2(Q)}.$$

В результате получаем, что

$$\widehat{\theta}' + aA\widehat{\theta} + b\kappa_a \left( [\widehat{\theta}]^4 - \widehat{\varphi} \right) = Br, \quad \widehat{\theta}(0) = \theta_0, \quad \alpha A\widehat{\varphi} + \kappa_a \left( \widehat{\varphi} - [\widehat{\theta}]^4 \right) = B\widehat{u},$$

где

$$j_\lambda \leq J_\lambda(\widehat{\theta}, \widehat{u}) \leq \liminf J_\lambda(\theta_m, u_m) = j_\lambda.$$

Таким образом, тройка  $\{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}, \widehat{u}\}$  есть решение задачи (OC).  $\square$

### 2.3.4 Условия оптимальности

Для получения системы оптимальности достаточно использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [121, 125]. Проверим выполнение ключевого условия, что образ производной оператора связи  $F'_y(y, u)$ , где  $y = \{\theta, \varphi\}$  в  $W \times L^2(0, T; V)$ , совпадает с пространством  $L^2(0, T; V') \times L^2(0, T; V') \times H$ .

Напомним, что

$$F(\theta, \varphi, u) = \{\theta' + aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu, \theta(0) - \theta_0\}.$$

**Лемма 2.6.** Пусть выполнены условия (k), (kk). Если  $\widehat{y} \in W \times L^2(0, T; V)$ ,  $\widehat{u} \in U$  является решением задачи (OC), то справедливо равенство:

$$\text{Im } F'_y(\widehat{y}, \widehat{u}) = L^2(0, T; V') \times L^2(0, T; V') \times H.$$

*Доказательство.* Достаточно проверить, что задача

$$\xi' + aA\xi + b\kappa_a \left( 4|\widehat{\theta}|^3 \xi - \eta \right) = f_1, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad \alpha A\eta + \kappa_a \left( \eta - 4|\widehat{\theta}|^3 \xi \right) = f_2$$

разрешима для всех  $f_{1,2} \in L^2(0, T; V')$ ,  $\xi_0 \in H$ . Выразим  $\eta$  из последнего уравнения и подставим его в первое. В результате получаем следующую задачу:

$$\xi' + aA\xi + 4L \left( |\widehat{\theta}|^3 \xi \right) = f_1 + b\kappa_a (\alpha A + \kappa_a I)^{-1} f_2, \quad \xi(0) = \xi_0. \quad (2.49)$$

Однозначная разрешимость линейной задачи (2.49) доказывается аналогично лемме 2.5.  $\square$

Согласно лемме 2.6 лагранжиан задачи (OC) имеет вид

$$\begin{aligned} L(\theta, \varphi, u, p_1, p_2, q) = & J_\lambda(\theta, u) + \int_0^T (\theta' + aA\theta + b\kappa_a ([\theta]^4 - \varphi) - Br, p_1) dt \\ & + \int_0^T (\alpha A\varphi + \kappa_a (\varphi - [\theta]^4) - Bu, p_2) dt + (q, \theta(0) - \theta_0). \end{aligned}$$

Здесь  $p = \{p_1, p_2\} \in L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; V)$  — сопряженное состояние,  $q \in H$  — множитель Лагранжа для начального условия. Если  $\{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}, \widehat{u}\}$  является решением задачи (OC), то в силу принципа Лагранжа [125, гл. 2, теорема 1.5] выполняются вариационные равенства  $\forall \zeta \in L^2(0, T; V), v \in U$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( (B(\widehat{\theta} - \theta_b), \zeta) + (\zeta' + aA\zeta + 4b\kappa_a |\widehat{\theta}|^3 \zeta, p_1) - \kappa_a (4|\widehat{\theta}|^3 \zeta, p_2) \right) dt \\ & \quad + (q, \zeta(0)) = 0, \\ & \int_0^T ((\alpha A\zeta + \kappa_a \zeta, p_2) - b\kappa_a (\zeta, p_1)) dt = 0, \quad \int_0^T (\lambda(\widehat{u}, v)_\Gamma - (Bv, p_2)) dt = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из полученных условий получаем следующий результат.

**Теорема 2.7.** Пусть выполнены условия (k), (kk). Если  $\{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}, \widehat{u}\}$  — решение задачи (OC), то существует единственная пара  $\{p_1, p_2\} \in W \times W$  такая, что

$$\begin{aligned} -p_1' + aAp_1 + 4|\widehat{\theta}|^3 \kappa_a (bp_1 - p_2) &= B(\theta_b - \widehat{\theta}), \quad p_1(T) = 0, \\ \alpha Ap_2 + \kappa_a (p_2 - bp_1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

а также  $\lambda \widehat{u} = p_2|_\Sigma$ .

### 2.3.5 Аппроксимация задачи с граничными условиями типа Коши

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений сложного теплообмена, в которой отсутствуют граничные условия на интенсивность излучения:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (2.51)$$

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n \theta = q_b \text{ на } \Sigma, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (2.52)$$

Существование и единственность функций  $\theta \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ ,  $\varphi, \Delta\varphi \in L^2(Q)$ , удовлетворяющие (2.51), (2.52) для достаточно гладких  $\theta_b, q_b$ , доказаны в [122]. Покажем, что решения задачи (OC) при  $\lambda \rightarrow +0$  аппроксимируют решение задачи (2.51), (2.52)

**Теорема 2.8.** Пусть выполняются условия (k), (kk) и существует решение  $\theta, \varphi \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$  задачи (2.51), (2.52). Если  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  — решение задачи (OC) при  $\lambda > 0$ , то при  $\lambda \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \theta_\lambda &\rightarrow \theta \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \text{ сильно в } L^2(Q), \\ \varphi_\lambda &\rightarrow \varphi \text{ слабо в } L^2(0, T; V). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $\theta, \varphi \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$  — решение задачи (2.51), (2.52),  $u = \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) \in U$ . Тогда

$$\theta' + aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu,$$

где  $r := a(\theta_b + q_b)$ . Следовательно, принимая во внимание, что  $\theta|_\Gamma = \theta_b$ ,

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2} \|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Sigma^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_\lambda\|_\Sigma^2 \leq J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2} \|u\|_\Sigma^2.$$

Таким образом

$$\|u_\lambda\|_\Sigma^2 \leq C, \quad \|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Sigma^2 \rightarrow 0, \lambda \rightarrow +0.$$

Здесь и далее  $C > 0$  не зависит от  $\lambda$ . Ограниченность последовательности  $u_\lambda$  в пространстве  $U$  влечет по лемме 2.5 оценки

$$\|\theta_\lambda\|_{L^2(0,T;V)} \leq C, \quad \|\theta_\lambda\|_{L^\infty(0,T;L^5(\Omega))} \leq C, \quad \|\theta'_\lambda\|_{L^2(0,T;V')} \leq C,$$

$$\int_0^T \int_\Omega |\theta_\lambda|^8 dxdt \leq C, \quad \|\varphi_\lambda\|_{L^2(0,T;V)} \leq C.$$

Следовательно, можно выбрать последовательность  $\lambda \rightarrow +0$  такую, что

$$u_\lambda \rightarrow u_* \text{ слабо в } U$$

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_* \text{ слабо в } L^2(0,T;V) \text{ сильно в } L^2(Q),$$

$$\varphi_\lambda \rightarrow \varphi_* \text{ слабо в } L^2(0,T;V).$$

Полученные результаты о сходимости позволяют, как и в теореме 2.6, перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow +0$  в уравнениях для  $\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda$ . Тогда

$$\begin{aligned} \theta'_* + aA\theta_* + b\kappa_a \left( [\theta_*]^4 - \varphi_* \right) &= Br, \quad \theta_*(0) = \theta_0, \\ \alpha A\varphi_* + \kappa_a \left( \varphi_* - [\theta_*]^4 \right) &= Bu_*. \end{aligned} \tag{2.53}$$

При этом  $\theta_*|_\Gamma = \theta_b$ . Из первого уравнения в (2.53), учитывая, что  $r = a(\theta_b + q_b)$ , получаем  $\frac{\partial \theta_*}{\partial t} - a\Delta\theta_* + b\kappa_a \left( [\theta_*]^4 - \varphi_* \right) = 0$  почти всюду в  $Q$ ,  $\theta_* = \theta_b$ ,  $\partial_n \theta = q_b$  почти всюду в  $\Sigma$ .

Из второго уравнения в (2.53) следует, что  $-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = 0$  почти всюду в  $Q$ . Таким образом, пара  $\theta_*, \varphi_*$  является решением задачи (2.51), (2.52). Поскольку решение этой задачи единственно [122], то  $\theta_* = \theta, \varphi_* = \varphi$ .  $\square$

## 2.4 Задача сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы

### 2.4.1 Постановка обратной задачи

Рассмотрим следующую систему полулинейных эллиптических уравнений, которая моделирует радиационный и диффузионный (сложный) теплообмен в ограниченной липшицевой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$  [27, 99].

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{2.54}$$

Пусть граница области состоит из двух участков,  $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ , так что  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . На всей границе  $\Gamma$  задается тепловой поток  $q_b$ ,

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad x \in \Gamma. \quad (2.55)$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию  $\gamma$ , описывающую отражающие свойства границы [102]. В случае, если эта функция неизвестна на части границы  $\Gamma_2$ , краевое условие для интенсивности излучения на  $\Gamma_2$  не ставится, а в качестве условия переопределения на  $\Gamma_1$ , в дополнение к условию на  $\varphi$ , задается температурное поле  $\theta_b$ ,

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad x \in \Gamma_1. \quad (2.56)$$

Здесь через  $\partial_n$  обозначаем производную в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$ .

Для постановки задачи управления введем новую неизвестную функцию  $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$ . Складывая первое уравнение в (2.54) со вторым, умноженным на  $b$ , заключаем, что  $\psi$  – гармоническая функция. Исключая  $\varphi$  из первого уравнения в (2.54) и используя краевые условия (2.55), (2.56), получаем краевую задачу

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.57)$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad \text{на } \Gamma, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \quad \theta = \theta_b \text{ на } \Gamma_1. \quad (2.58)$$

Здесь  $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$ ,  $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$ .

Сформулируем задачу оптимального управления, которая аппроксимирует задачу (2.57), (2.58). Задача состоит в отыскании тройки  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf, \quad (2.59)$$

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.60)$$

$$a\partial_n\theta + s\theta = q_b + s\theta_b, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r \text{ на } \Gamma_1, \quad (2.61)$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad \alpha\partial_n\psi = u \text{ на } \Gamma_2. \quad (2.62)$$

Здесь  $\lambda, s > 0$  – регуляризующие параметры.

### 2.4.2 Разрешимость задачи оптимального управления

Рассмотрим пространства  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ ,  $V'$  – пространство, сопряженное с  $V$ . Пространство  $H$  отождествляем с пространством  $H'$  так, что  $V \subset H = H' \subset V'$ . Через  $U$  обозначаем пространство управлений  $L^2(\Gamma_2)$ . Стандартную норму в  $H$  обозначаем  $\|\cdot\|$ ,  $(f, v)$  – значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$ , совпадающее со скалярным произведением в  $H$ , если  $f \in H$ .

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

(l)  $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda, s = \text{Const} > 0$ ,

(ll)  $0 < \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma_1)$ ,  $\theta_b, r \in L^2(\Gamma_1)$ ,  $q_b \in L^2(\Gamma)$ .

Определим операторы  $A_{1,2}: V \rightarrow V'$ ,  $B_1: L^2(\Gamma_1) \rightarrow V'$ ,  $B_2: U \rightarrow V'$  используя равенства, справедливые для любых  $y, z \in V$ ,  $f, v \in L^2(\Gamma_1)$ ,  $h, w \in U$ :

$$\begin{aligned} (A_1 y, z) &= a(\nabla y, \nabla z) + s \int_{\Gamma_1} y z d\Gamma, \quad (A_2 y, z) = \alpha(\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma_1} \gamma y z d\Gamma, \\ (B_1 f, v) &= \int_{\Gamma_1} f v d\Gamma, \quad (B_2 h, w) = \int_{\Gamma_2} h w d\Gamma. \end{aligned}$$

Заметим, что билинейная форма  $(A_1 y, z)$  определяет скалярное произведение в пространстве  $V$  и норма  $\|z\|_V = \sqrt{(A_1 z, z)}$  эквивалентна стандартной норме  $V$ . Кроме того, определены непрерывные обратные операторы  $A_{1,2}^{-1}: V' \mapsto V$ . Для  $y \in V$ ,  $f \in L^2(\Gamma_1)$ ,  $h \in V'$  справедливы неравенства

$$\|y\| \leq K_0 \|y\|_V, \quad \|B_1 f\|_{V'} \leq K_1 \|w\|_{L^2(\Gamma_1)}, \quad \|B_2 h\|_{V'} \leq K_2 \|h\|_U. \quad (2.63)$$

Здесь постоянные  $K_j > 0$  зависят только от области  $\Omega$ .

Используя введенные операторы, слабую формулировку краевой задачи, на решениях которой минимизируется функционал (2.59), нетрудно записать в виде

$$A_1 \theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi + f_1, \quad A_2 \psi = f_2 + B_2 u, \quad (2.64)$$

где  $f_1 = B_1(q_b + s\theta_b) + B_2 q_b$ ,  $f_2 = B_1 r$ .

Для формализации задачи оптимального управления определим оператор ограничений  $F(\theta, \psi, u): V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$ ,

$$F(\theta, \psi, u) = \left\{ A_1 \theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi - f_1, A_2 \psi - f_2 - B_2 u \right\}.$$

**Задача** ( $P_\lambda$ ). Найти тройку  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\} \in V \times V \times U$  такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\|\theta - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_U^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \psi, u) = 0. \quad (2.65)$$

**Лемма 2.7.** Пусть выполняются условия (I), (II),  $u \in U$ . Тогда существует единственное решение системы (2.64) и при этом

$$\|\theta\|_V \leq \frac{K_0^2 \kappa_a}{\alpha} \|\psi\|_V + \|f_1\|_{V'}, \quad \|\psi\|_V \leq \|A_2^{-1}\| (\|f_2\|_{V'} + K_2 \|u\|_U). \quad (2.66)$$

*Доказательство.* Из второго уравнения в (2.64) следует, что  $\psi = A_2^{-1}(f_2 + B_2 u)$  и поэтому

$$\|\psi\|_V \leq \|A_2^{-1}\| (\|f_2\|_{V'} + K_2 \|u\|_U).$$

Однозначная разрешимость первого уравнения (2.64) с монотонной нелинейностью хорошо известна (см. например [124]). Умножим скалярно это уравнение на  $\theta$ , отбросим неотрицательное слагаемое  $(g(\theta), \theta)$  и оценим правую часть, используя неравенство Коши-Буняковского. Тогда, с учетом неравенств (2.63), получаем

$$\|\theta\|_V^2 \leq \frac{\kappa_a}{\alpha} \|\psi\| \|\theta\| + \|f_1\|_{V'} \|\theta\|_V \leq \frac{K_0^2 \kappa_a}{\alpha} \|\psi\|_V \|\theta\|_V + \|f_1\|_{V'} \|\theta\|_V.$$

В результате получаем оценки (2.66). □

**Теорема 2.9.** При выполнении условий (I), (II) существует решение задачи ( $P_\lambda$ ).

*Доказательство.* Обозначим через  $j_\lambda$  точную нижнюю грань целевого функционала  $J_\lambda$  на множестве  $u \in U$ ,  $F(\theta, \psi, u) = 0$  и рассмотрим последовательности такие, что  $u_m \in U$ ,  $\theta_m \in V$ ,  $\psi_m \in V$ ,  $J_\lambda(\theta_m, u_m) \rightarrow j_\lambda$ ,

$$A_1 \theta_m + g(\theta_m) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi_m + f_1, \quad A_2 \psi_m = f_2 + B_2 u_m. \quad (2.67)$$

Из ограниченности последовательности  $u_m$  в пространстве  $U$  следуют, на основании леммы 2.7, оценки

$$\|\theta_m\|_V \leq C, \quad \|\psi_m\|_V \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^6(\Omega)} \leq C.$$

Здесь через  $C > 0$  обозначена наибольшая из постоянных, ограничивающих соответствующие нормы и не зависящих от  $m$ . Переходя при необходимости к

подпоследовательностям, заключаем, что существует тройка  $\{\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{\psi}\} \in U \times V \times V$ ,

$$u_m \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } U, \quad \theta_m, \psi_m \rightarrow \hat{\theta}, \hat{\psi} \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^4(\Omega). \quad (2.68)$$

Заметим также, что  $\forall v \in V$  имеем

$$|([\theta_m]^4 - [\hat{\theta}]^4, v)| \leq 2\|\theta_m - \hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)}\|v\|_{L^4(\Omega)} \left( \|\theta_m\|_{L^6(\Omega)}^3 + \|\hat{\theta}\|_{L^6(\Omega)}^3 \right). \quad (2.69)$$

Результаты о сходимости (2.68) и неравенство (2.69) позволяют перейти к пределу в (2.67). В результате получим

$$A_1\hat{\theta} + g(\hat{\theta}) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\hat{\psi} + f_1, \quad A_2\hat{\psi} = f_2 + B_2\hat{u}. \quad (2.70)$$

Поскольку целевой функционал слабо полунепрерывен снизу, то  $j_\lambda \leq J_\lambda(\hat{\theta}, \hat{u}) \leq \liminf J_\lambda(\theta_m, u_m) = j_\lambda$  и поэтому тройка  $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$  есть решение задачи  $(P_\lambda)$ .  $\square$

### 2.4.3 Условия оптимальности первого порядка

Воспользуемся принципом Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [121, 125]. Невырожденность условий оптимальности гарантируется условием, что образ производной оператора ограничений  $F(y, u)$ , где  $y = \{\theta, \psi\} \in V \times V$ , совпадает с пространством  $V' \times V'$ . Последнее означает, что линейная система

$$A_1\xi + g'(\theta)\xi - \frac{\kappa_a}{\alpha}\eta = q_1, \quad A_2\eta = q_2$$

разрешима для всех  $\theta \in V$ ,  $q_1, q_2 \in V'$ . Здесь  $g'(\theta) = 4b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{\kappa_a}{\alpha}$ . Из второго уравнения получаем  $\eta = A_2^{-1}q_2$ . Разрешимость первого уравнения при известном  $\eta \in V$  очевидным образом следует из леммы Лакса–Мильграма. Отметим, что справедливость остальных условий принципа Лагранжа также очевидна.

Функция Лагранжа задачи  $(P_\lambda)$  имеет вид

$$L(\theta, \psi, u, p_1, p_2) = J_\lambda(\theta, u) + \left( A_1\theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi - f_1, p_1 \right) + (A_2\psi - f_2 - B_2u, p_2).$$

Здесь  $p = \{p_1, p_2\} \in V \times V$  – сопряженное состояние.



Пусть  $\{\hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{u}\}$  – решение задачи  $(P_\lambda)$ . Вычислив производные Гато функции Лагранжа по  $\theta, \psi$  и  $u$ , получаем в силу принципа Лагранжа [125, Гл. 2, теорема 1.5] следующие равенства  $\forall v \in V, w \in U$

$$(B_1(\hat{\theta} - \theta_b), v) + (A_1v + g'(\hat{\theta})v, p_1) = 0, \quad -\frac{\kappa_a}{\alpha}(v, p_1) + (A_2v, p_2) = 0, \quad (2.71)$$

$$\lambda(B_2\hat{u}, w) - (B_2w, p_2) = 0. \quad (2.72)$$

Из условий (2.71), (2.72) вытекают уравнения для сопряженного состояния, которые вместе с уравнениями (2.70) для оптимальной тройки дают систему оптимальности задачи  $(P_\lambda)$ .

**Теорема 2.10.** Пусть выполняются условия (I), (II). Если  $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$  – решение задачи  $(P_\lambda)$ , то существует единственная пара  $\{p_1, p_2\} \in V \times V$  такая, что

$$A_1p_1 + g'(\hat{\theta})p_1 = -B_1(\hat{\theta} - \theta_b), \quad A_2p_2 = \frac{\kappa_a}{\alpha}p_1, \quad \lambda\hat{u} = p_2|_{\Gamma_2}. \quad (2.73)$$

**Замечание 2.2.** Если рассмотреть приведенный целевой функционал  $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$ , где  $\theta(u)$  компонента решения задачи (2.64) соответствующая управлению  $u \in U$ , то градиент функционала  $\tilde{J}_\lambda(u)$  равен  $\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2$ . Здесь  $p_2$  – компонента решения сопряженной системы (2.73), где  $\hat{\theta} := \theta(u)$ .

#### 2.4.4 Аппроксимация решения обратной задачи

Покажем, что если существует пара  $\{\theta, \phi\} \in V \times V$  – решение обратной задачи (2.54)-(2.56) и при этом  $q = a\partial_n\phi|_{\Gamma_2} \in L^2(\Gamma_2)$ , то решения задачи  $(P_\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow +0$  аппроксимируют решение задачи (2.54)-(2.56).

Предварительно заметим, что указанная пара для всех  $v \in V$  удовлетворяет равенствам

$$a(\nabla\theta, \nabla v) + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \phi, v) = \int_{\Gamma} q_b v d\Gamma, \quad (2.74)$$

$$\alpha(\nabla\phi, \nabla v) + \int_{\Gamma_1} \gamma\phi v d\Gamma + \kappa_a(\phi - |\theta|\theta^3, v) = \int_{\Gamma_1} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q v d\Gamma \quad (2.75)$$

и при этом  $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$ .

**Теорема 2.11.** Пусть выполняются условия (I), (II) и существует решение задачи (2.54)-(2.56), удовлетворяющее равенствам (2.74), (2.75). Если  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$  – решение задачи  $(P_\lambda)$  для  $\lambda > 0$ , то существует последовательность  $\lambda \rightarrow +0$  такая, что

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_*, \quad \frac{1}{\alpha b}(\psi_\lambda - a\theta_\lambda) \rightarrow \varphi_* \quad \text{слабо в } V, \quad \text{сильно в } H,$$

где  $\theta_*, \varphi_*$  – решение задачи (2.54)-(2.56).

*Доказательство.* Умножим равенство (2.74) на  $\alpha$ , (2.75) на  $\alpha b$  и сложим равенства. Тогда, полагая  $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$ ,  $u = \alpha b q + \alpha q_b|_{\Gamma_2}$ , получаем

$$\alpha(\nabla\psi, \nabla v) + \int_{\Gamma_1} \gamma \psi v d\Gamma = \int_{\Gamma_1} r v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u v d\Gamma.$$

Здесь  $r = \alpha b \gamma \theta_b^4 + \alpha q_b + a \gamma \theta_b$ . Поэтому  $A_2 \psi = f_2 + B_2 u$ .

Из (2.74), с учетом условия  $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$  выводим равенство  $A_1 \theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi + f_1$ . Таким образом, тройка  $\{\theta, \psi, u\} \in V \times V \times U$  является допустимой для задачи  $(P_\lambda)$  и следовательно

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2} \|\theta_\lambda - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_\lambda\|_U^2 \leq J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2.$$

Тогда

$$\|u_\lambda\|_U^2 \leq \|u\|_U^2, \quad \|\theta_\lambda - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow +0.$$

Из ограниченности последовательности  $u_\lambda$  в пространстве  $U$  следуют, на основании леммы 2.7, оценки

$$\|\theta_\lambda\|_V \leq C, \quad \|\psi_\lambda\|_V \leq C,$$

где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $\lambda$ . Поэтому можно выбрать последовательность  $\lambda \rightarrow +0$  такую, что

$$\begin{aligned} u_\lambda \rightarrow u_* \quad \text{слабо в } U, \quad \theta_\lambda, \psi_\lambda \rightarrow \theta_*, \psi_* \quad \text{слабо в } V, \quad \text{сильно в } H, L^4(\Omega), \\ \theta_\lambda|_{\Gamma_1} \rightarrow \theta_*|_{\Gamma_1} \quad \text{сильно в } L^2(\Gamma_1). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Результаты (2.76) позволяют перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow +0$  в уравнениях для  $\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda$  и тогда

$$A_1 \theta_* + g(\theta_*) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi_* + f_1, \quad A_2 \psi_* = f_2 + B_2 u_*, \quad \theta_*|_{\Gamma_1} = \theta_b. \quad (2.77)$$

Полагая  $\varphi_* = \frac{1}{\alpha b}(\psi_* - a\theta_*)$ , заключаем, что пара  $\theta_*, \varphi_*$  – решение задачи (2.54)-(2.56).  $\square$

### Глава 3. Анализ задач оптимального управления для квазилинейных уравнений сложного теплообмена

#### 3.1 Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями

Рассмотрим задачу оптимального управления для квазилинейных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена, моделирующих процесс внутренней лазерной абляции в ограниченной области  $\Omega$  с отражающей границей  $\Gamma = \partial\Omega$ . Задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt \rightarrow \inf$$

на решениях начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi \\ -\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\theta = 0|_{\Gamma}, \quad \alpha \partial_n \varphi + 2^{-1} \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (3.2)$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*$$

Здесь  $G_1$  и  $G_2$  подмножества  $\Omega$ ,  $\theta$  представляют разницу между реальной температурой и температурой на границе, которая является постоянной.  $\varphi$  является интенсивностью излучения усредненной по всем направлениям,  $\alpha$  – коэффициент диффузии фотонов,  $\beta$  – коэффициент поглощения,  $k(\theta)$  является коэффициентом теплопроводности,  $\sigma(x, t)$  является произведением удельной теплоемкости и плотностью среды,  $u_1$  описывает силу источника тепла, нагревающего наконечник волокна и  $u_2$  – мощность источника теплового излучения.  $P$  – максимальная мощность лазерного источника,  $\chi$  есть характеристическая функция той части среды, в которой расположен наконечник волокна, деленная на объём. Отметим, что значения параметров  $u_1$ ,  $u_2$  определяются методом карбонизации кончика волокна. Обзор некоторых способов карбонизации приведен в [84].

Таким образом, при моделировании процедуры ВВЛА мы будем использовать диффузионную модель, которая учитывает кондуктивный теплообмен, а также перенос излучения и поглощение с выделением тепла. Поток пузырьков, образующихся на нагретом наконечнике оптического волокна, вносит значительный вклад в температурное поле. В [80–82], основываясь на анализе экспериментальных данных, теплопередача потоком пузырьков моделируется с использованием кусочно-постоянного коэффициента теплопроводности, который зависит от температуры следующим образом: когда температура в некоторой точке достигает  $95^\circ\text{C}$ , коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз.

Задача оптимального управления заключается в достижении заданного распределения температурного поля  $\theta_d$  в области  $G_1$ , при этом температура в области  $G_2$  не должна превышать критических значений  $\theta_* = \text{const} > 0$ .

### 3.1.1 Формализация задачи оптимального управления

Будем далее предполагать, что  $\Omega$  является липшицевой ограниченной областью,  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ .

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

$$(c1) \quad \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, \quad |\partial\sigma/\partial t| \leq \sigma_2$$

$$(c2) \quad k_0 \leq k(s) \leq k_1, \quad |k'(s)| \leq k_2, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$(c3) \quad \theta_0 \in H$$

$$(c4) \quad \alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1, \beta_0 \leq \beta(x) \leq \beta_1, \quad x \in \Omega,$$

где  $\sigma_i, k_i, \alpha_i$ , и  $\beta_i$  положительные константы.

Определим нелинейный оператор  $A : V \rightarrow V'$  и линейный оператор  $B : H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))'$  используя следующие равенства, справедливые для любого  $\theta, v \in V, \varphi, w \in H^1(\Omega)$

$$(A(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) = (\nabla h(\theta), \nabla v)$$

$$(B\varphi, w) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla w) + (\beta\varphi, w) + 2^{-1} \int_{\Gamma} \varphi w d\Gamma$$

где

$$h(s) = \int_0^s k(r) dr.$$

**Определение 3.1.** Пусть  $u_{1,2} \in L^2(0, T)$ . Пара функций  $\theta \in L^2(0, T; V)$ ,  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  является слабым решением задачи (3.1), (3.2) если  $\sigma\theta' \in L^2(0, T; V')$  и

$$\sigma\theta' + A(\theta) - \beta\varphi = u_1\chi, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad B\varphi = u_2\chi \text{ где } \theta' = d\theta/dt.$$

Из леммы Лакса-Мильграма следует, что для любой функции  $g \in H$  существует единственное решение уравнения  $B\varphi = g$ . Более того, обратный оператор  $B^{-1} : H \rightarrow H^1(\Omega)$  непрерывен. Поэтому можно исключить интенсивность излучения  $\varphi = u_2 B^{-1}\chi$  и сформулировать задачу оптимального управления следующим образом.

**Определение 3.2** (Задача P).

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt \rightarrow \inf$$

$$\sigma\theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*, \quad u \in U_{ad},$$

где

$$U_{ad} = \{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in L^2(0, T), \\ u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}$$

### 3.1.2 Предварительные результаты

Рассмотрим задачу

$$\sigma\theta' + A(\theta) = f, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (3.3)$$

Справедлива следующая лемма

**Лемма 3.1** ([85]). Пусть выполняются условия (c1)-(c3) и  $f \in L^2(0, T; V')$ . Тогда существует решение задачи (3.3) такое, что  $\theta \in L^\infty(0, T; H)$  и справедливы следующие оценки:

$$\|\theta(t)\|^2 \leq \frac{K}{\sigma_0} \exp \frac{\sigma_2 t}{\sigma_0} \quad \text{n.в. в } (0, T) \\ \int_0^T \|\theta(t)\|_V^2 dt \leq \frac{K}{k_0} \left( 1 + \frac{\sigma_2 T}{\sigma_0} \exp \frac{\sigma_2 T}{\sigma_0} \right)$$

$$\text{где } K = \sigma_1 \|\theta_0\|^2 + k_0^{-1} \|f\|_{L^2(0,T;V')}^2.$$

Следующий результат важен для установления непустоты множества допустимых пар управляющих состояний.

**Лемма 3.2.** Пусть выполняются условия (c1)-(c3) и  $f = 0$ ,  $\theta_0 \leq \theta_*$  н.в. в  $\Omega$ , и  $\theta$  решение задачи (3.3). Тогда  $\theta \leq \theta_*$  н.в. в  $\Omega \times (0, T)$ .

*Доказательство.* Скалярно умножим в  $H$  первое уравнение (3.3) на  $v = \max\{\theta - \theta_*, 0\} \in L^2(0, T; V)$ , получим

$$(\sigma v', v) + (k(\theta) \nabla v, \nabla v) = 0.$$

Отбрасывая неотрицательный второй член, приходим к оценке

$$\frac{d}{dt}(\sigma v, v) \leq (\sigma_t v, v) \leq \sigma_2 \|v\|^2.$$

Учитывая, что  $v|_{t=0} = 0$ , проинтегрируем последнее неравенство по времени. Тогда

$$\sigma_0 \|v(t)\|^2 \leq (\sigma v(t), v(t)) \leq \sigma_2 \int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau$$

На основании леммы Гронуолла заключаем, что  $v = 0$  и, следовательно,  $\theta \leq \theta_*$  почти всюду в  $\Omega \times (0, T)$ .  $\square$

### 3.1.3 Разрешимость задачи оптимального управления

**Теорема 3.1.** Пусть выполняются условия (c1)-(c3), и  $\theta_0 \leq \theta_*$  н.в. в  $\Omega$ . Тогда существует решение задачи  $P$ .

*Доказательство.* Согласно леммам 3.1 и 3.2 множество допустимых пар непусто. Рассмотрим минимизирующую последовательность допустимых пар  $\{\theta_m, u_m\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$  такой, что  $J(\theta_m) \rightarrow j = \inf J$ , где

$$\sigma \theta'_m + A(\theta_m) = u_m, \quad \theta_m(0) = \theta_0, \quad \theta_m|_{G_2} \leq \theta_*. \quad (3.4)$$

Ограниченность в  $L^2(0, T; H)$  множества допустимых управлений  $U_{ad}$  влечет по лемме 3.1 оценки:

$$\begin{aligned}\|\theta_m\|_{L^\infty(0,T;H)} &\leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C, \\ \|h(\theta_m)\|_{L^2(0,T;V)} &\leq C.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Здесь и далее при доказательстве теоремы через  $C$  обозначаются константы, не зависящие от  $m$ . Оценки (3.5), используя при необходимости подпоследовательности, приводят к существованию функций  $u \in U_{ad}$ ,  $\theta \in L^2(0, T; V)$ ,  $\chi \in L^2(0, T; V)$  такое, что

$$\begin{aligned}u_m &\rightarrow u \text{ слабо в } L^2(0, T; H), \\ \theta_m &\rightarrow \theta \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \\ &\text{*}-\text{слабо в } L^\infty(0, T; H), \\ h(\theta_m) &\rightarrow \chi \text{ слабо в } L^2(0, T; V).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Результаты о сходимости (3.6) достаточны для предельного перехода при  $m \rightarrow \infty$  в (3.4) и доказательства того, что предельная функция  $\theta \in L^2(0, T; V)$  такова, что  $\sigma\theta' \in L^2(0, T; V')$  удовлетворяет равенству

$$(\sigma\theta', v) + (\nabla\chi, \nabla v) = (u, v) \quad \forall v \in V$$

и выполняется начальное условие.

Следующая оценка гарантирует компактность последовательности  $\theta_m$  в  $L^2(Q)$ :

$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s+\delta) - \theta_m(s)\|^2 ds \leq C\delta.\tag{3.7}$$

Из неравенства (3.7), используя при необходимости подпоследовательности, получаем, что  $\theta_m \rightarrow \theta$  in  $L^2(Q)$ . Следовательно, в силу неравенства

$$|h(\theta_m) - h(\theta)| \leq k_1 |\theta_m - \theta|,$$

следует, что  $h(\theta_m) \rightarrow h(\theta)$  in  $L^2(Q)$  и, следовательно  $\chi = h(\theta)$ . Кроме того, предельная функция  $\theta$  удовлетворяет неравенству  $\theta|_{G_2} \leq \theta_*$ . Следовательно, допустима предельная пара  $\{\theta, u\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$ .

Поскольку функционал  $J$  слабо полунепрерывен снизу,

$$j \leq J(\theta) \leq \liminf J(\theta_m) = j,$$

пара  $\{\theta, u\}$  является решением задачи P. □

### 3.1.4 Задача со штрафом

Для численного решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями  $\theta|_{G_2} \leq \theta_*$ , рассмотрим следующую задачу со штрафом.

**Определение 3.3** (Задача  $P_\varepsilon$ ).  $J_\varepsilon(\theta) \rightarrow \inf$ , где

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\theta) &= \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dxdt, \\ \sigma\theta' + A(\theta) &= u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Здесь,

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_* \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_* \end{cases}$$

Оценки, представленные в лемме 3.1, также позволяют доказать разрешимость задачи со штрафом аналогично доказательству теоремы 3.1.

**Теорема 3.2.** Пусть выполняются условия (с1)-(с3). Тогда существует решение задачи  $(P_\varepsilon)$ .

Рассмотрим аппроксимационные свойства решений задачи со штрафом. Пусть  $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$  — решения задачи  $(P_\varepsilon)$  и  $\{\theta, u\}$  — решение задачи P. Тогда,

$$\sigma\theta'_\varepsilon + A(\theta_\varepsilon) = u_\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon(0) = \theta_0. \quad (3.8)$$

Так как  $\theta|_{G_2} \leq \theta_*$ , выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{G_1} (\theta_\varepsilon - \theta_d)^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dxdt \\ \leq \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt = J(\theta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{G_1} (\theta_\varepsilon - \theta_d)^2 dxdt &\leq J(\theta), \\ \int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dxdt &\leq \varepsilon J(\theta). \end{aligned}$$



Из полученных оценок, используя при необходимости подпоследовательности, соответствующие  $\varepsilon_k \rightarrow +0$ , аналогично доказательству теоремы 3.1, устанавливаем существование функций  $\widehat{u} \in U_{ad}, \widehat{\theta} \in L^2(0, T; V)$ , таких, что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow \widehat{u} \text{ слабо в } L^2(0, T; H); \\ \theta_\varepsilon &\rightarrow \widehat{\theta} \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \\ &\text{сильно в } L^2(0, T; H). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dx dt &\rightarrow \int_0^T \int_{G_2} F(\widehat{\theta}) dx dt, \\ \int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dx dt &\rightarrow 0, \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0, \end{aligned}$$

что гарантирует  $F(\widehat{\theta}) = 0$  и  $\widehat{\theta}|_{G_2} \leq \theta_*$ .

Результаты сходимости достаточны для предельного перехода по  $\varepsilon \rightarrow +0$  в системе (3.8) и доказательства того, что предельная пара  $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$  допустима для задачи Р. Поскольку функционал  $J$  слабо полунепрерывен снизу,

$$j \leq J(\widehat{\theta}) \leq \liminf J(\theta_\varepsilon) \leq J(\theta) = j = \inf J.$$

Тогда пара  $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$  есть решение задачи Р.

**Теорема 3.3.** Пусть выполнены условия (с1)-(с3), и  $\theta_0 \leq \theta_*$  п.в. в  $\Omega$ . Если  $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$  есть решение задачи  $(P_\varepsilon)$  для  $\varepsilon > 0$ , тогда существует такая последовательность  $\varepsilon \rightarrow +0$ , что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow \widehat{u} \text{ слабо в } L^2(0, T; H) \\ \theta_\varepsilon &\rightarrow \widehat{\theta} \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \end{aligned}$$

где  $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$  есть решение задачи Р.

### 3.2 Метод штрафных функций для решения задачи оптимального управления с финальным наблюдением

Рассмотрим задачу оптимального управления моделирующую процесс внутривенной лазерной абляции в ограниченной трехмерной области  $\Omega$  с отражающей границей  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \rightarrow \inf$$

на решениях начально-краевой задачи

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi = u_1 \chi, \quad (3.9)$$

$$- \operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi = u_2 \chi, \quad (3.10)$$

$$k(\theta) \partial_n \theta + \gamma (\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi + 0.5 \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (3.11)$$

Также будем учитывать следующие ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_b} \leq \theta_*.$$

Здесь  $\theta$  - температура,  $\varphi$  - интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям,  $\alpha$  - коэффициент диффузии оптического излучения,  $\mu_a$  - коэффициент поглощения,  $k(\theta)$  - коэффициент теплопроводности,  $\sigma(x, t)$  произведение удельной теплоемкости и объемной плотности,  $u_1$  описывает мощность источника, затрачиваемую на нагрев наконечника волокна,  $u_2$  - мощность источника, затрачиваемая на излучение,  $\chi$  равно характеристической функции части среды, в которой расположен наконечник волокна, деленной на объем наконечника волокна. Функции  $\theta_b, \theta_0$  определяют граничное и начальное распределения температуры.

Требуется обеспечить близость распределения температуры к желаемому температурному полю  $\theta_d$  в конечный момент времени  $t = T$  в подобласти  $G_d$ , при этом температура в подобласти  $G_b$  не превышает постоянного критического значения значение  $\theta_*$ .

### 3.2.1 Формализация задачи оптимального управления

В дальнейшем мы предполагаем, что  $\Omega$  является ограниченной Липшицевой областью,  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ .

**Определение 3.4.** Пусть  $u_{1,2} \in L^2(0, T)$ . Пара  $\theta, \varphi \in L^2(0, T; V)$  слабое решение задачи (3.9)-(3.11) если  $\sigma\theta' \in L^2(0, T; V')$  и

$$\sigma\theta' + A(\theta) - \beta\varphi = g + u_1\chi, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad B\varphi = u_2\chi, \quad (3.12)$$

где

$$\theta' = d\theta/dt, \quad g \in L^\infty(0, T; V'), \quad (g, v) = \int_{\Gamma} \gamma\theta_b v d\Gamma$$

**Замечание 3.1.** Так как  $(\sigma\theta)' = \sigma\theta' + \theta\partial\sigma/\partial t \in L^2(0, T; V')$  and  $\sigma\theta \in L^2(0, T; V)$ , тогда  $\sigma\theta \in C([0, T]; H)$ , и поэтому начальные условия имеют смысл.

Из леммы Лакса-Мильграма следует, что для любой функции  $g \in H$  существует единственное решение уравнения  $B\varphi = g$ . Более того, обратный оператор  $B^{-1} : H \rightarrow V$  является непрерывным. Следовательно, мы можем исключить интенсивность излучения  $\varphi = u_2 B^{-1}\chi$  и сформулировать задачу оптимального управления следующим образом.

**Определение 3.5** (Задача CPP).

$$J(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \rightarrow \inf, \quad \sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0, \\ \theta|_{G_b} \leq \theta_*, \quad u \in U_{ad}.$$

Здесь

$$U_{ad} = \{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in L^2(0, T), u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}$$

### 3.2.2 Предварительные результаты

**Лемма 3.3** ([126]). Пусть условия (c1)-(c4) выполняются и  $u \in L^2(0, T; V')$ . Тогда есть решение задачи

$$\sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (3.13)$$

такое, что  $\theta \in L^\infty(0, T; H)$ , а также верна следующая оценка:

$$\|\theta(t)\|^2 + \|\theta\|_{L^2(0, T; V')}^2 \leq C \left( \|\theta_0\|^2 + \|g + u\|_{L^2(0, T; V')}^2 \right),$$

где  $C > 0$  не зависит от  $\theta_0, g, u$ .

**Лемма 3.4.** Пусть условия (с1)-(с4) выполняются,  $u = 0, \theta_0 \leq \theta_*$  почти всюду в  $\Omega, \theta_b \leq \theta_*$  почти всюду в  $\Sigma$ , и  $\theta$  есть решение задачи (3.13). Тогда  $\theta \leq \theta_*$  почти всюду в  $\Omega \times (0, T)$ .

*Доказательство.* Умножая скалярно в  $H$  первое уравнение в (3.13) на  $v = \max\{\theta - \theta_*, 0\} \in L^2(0, T; V)$ , мы получаем

$$(\sigma v', v) + (k(\theta) \nabla v, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma \theta v d\Gamma = 0.$$

Отбрасывая неотрицательные второе и третье слагаемые, мы приходим к оценке

$$\frac{d}{dt}(\sigma v, v) \leq (\sigma_t v, v) \leq \sigma_2 \|v\|^2.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени и принимая во внимание, что  $v|_{t=0} = 0$ , мы получаем

$$\sigma_0 \|v(t)\|^2 \leq (\sigma v(t), v(t)) \leq \sigma_2 \int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau$$

Основываясь на лемме Гронуолла, мы приходим к выводу, что  $v = 0$  и, следовательно,  $\theta \leq \theta_*$  в  $\Omega \times (0, T)$   $\square$

Леммы 3.3 и 3.4 влекут непустоту множества допустимых пар задачи  $СРР$  и ограниченность минимизирующей последовательности допустимых пар  $\{\theta_m, u_m\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$  так, что  $J(\theta_m) \rightarrow j = \inf J$ , где

$$\sigma \theta'_m + A(\theta_m) = g + u_m, \quad \theta_m(0) = \theta_0, \quad \theta_m|_{G_b} \leq \theta_*. \quad (3.14)$$

Аналогично разделу 3.1, переходя к пределу в системе (3.14), можно установить разрешимость задачи  $СРР$ .

**Теорема 3.4.** Пусть условия (с1)-(с4) выполняются,  $\theta_0 \leq \theta_*$  п.в. в  $\Omega, \theta_b \leq \theta_*$  п.в. в  $\Sigma$ . Тогда решение задачи  $СРР$  существует.

### 3.2.3 Метод штрафных функций

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления с параметром  $\varepsilon > 0$ , решения которой аппроксимируют решение задачи  $CPP$  как  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

**Определение 3.6** (Задача  $CPP_\varepsilon$ ).

$$J_\varepsilon(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_b} F(\theta) dx dt \rightarrow \inf$$

$$\sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}$$

Здесь,

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_*, \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_* \end{cases}$$

Оценки, представленные в лемме 3.3, позволяют, аналогично доказательству теоремы 3.4, доказать разрешимость задачи со штрафом.

**Теорема 3.5.** Пусть выполняются условия (c1)-(c4). Тогда существует решение задачи  $CPP_\varepsilon$ .

Рассмотрим аппроксимирующие свойства решений задачи со штрафом. Пусть  $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$  будет решением задачи  $(CPP_\varepsilon)$  и  $\{\theta, u\}$  будет решением задачи  $CPP$ . Тогда,

$$\sigma\theta'_\varepsilon + A(\theta_\varepsilon) = g + u_\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon(0) = \theta_0. \quad (3.15)$$

так как  $\theta|_{G_b} \leq \theta_*$ , верны следующие неравенства:

$$\int_{G_d} (\theta_\varepsilon|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \leq J(\theta), \quad \int_0^T \int_{G_b} F(\theta_\varepsilon) dx dt \leq \varepsilon J(\theta).$$

Из полученных оценок, используя при необходимости подпоследовательности в качестве  $\varepsilon \rightarrow +0$ , аналогично, как и в доказательстве теоремы 3.4, мы можем доказать существование функций  $\hat{u} \in U_{ad}$ ,  $\hat{\theta} \in L^2(0, T; V)$  таких, что  $u_\varepsilon \rightarrow \hat{u}$  слабо в  $L^2(0, T; H)$ ,  $\theta_\varepsilon \rightarrow \hat{\theta}$  слабо в  $L^2(0, T; V)$ , сильно в  $L^2(0, T; H)$ ;

$$\int_0^T \int_{G_b} F(\theta_\varepsilon) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{G_b} F(\hat{\theta}) dx dt \text{ и } \int_0^T \int_{G_b} F(\theta_\varepsilon) dx dt \rightarrow 0, \text{ как } \varepsilon \rightarrow +0$$

Следовательно,  $F(\widehat{\theta}) = 0$  и  $\widehat{\theta}|_{G_b} \leq \theta_*$ .

Результатов о сходимости достаточно, чтобы перейти к пределу как  $\varepsilon \rightarrow +0$  в системе состояний (3.15) и доказать, что предельная пара  $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$  является приемлемым для задачи  $CPP$ . Поскольку функционал  $J$  является слабо полунепрерывным снизу, то есть

$$j \leq J(\widehat{\theta}) \leq \liminf J(\theta_\varepsilon) \leq J(\theta) = j = \inf J.$$

Тогда пара  $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$  это решение задачи  $CPP$ .

**Теорема 3.6.** Пусть выполняются условия (c1)-(c4),  $\theta_0 \leq \theta_*$  н.в. в  $\Omega$ ,  $\theta_b \leq \theta_*$  н.в. в  $\Sigma$ . Если  $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$  решения задачи  $(CP_\varepsilon)$  для  $\varepsilon > 0$ , тогда существует последовательность вида  $\varepsilon \rightarrow +0$  и  $u_\varepsilon \rightarrow \widehat{u}$  слабо в  $L^2(0, T; H)$ ,  $\theta_\varepsilon \rightarrow \widehat{\theta}$  слабо в  $L^2(0, T; V)$ , сильно в  $L^2(0, T; H)$ , где  $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$  есть решение задачи  $CPP$ .

## Глава 4. Численные методы и комплексы программ

### 4.1 Численные алгоритмы решения прямых задач сложного теплообмена

#### 4.1.1 Метод Ньютона для стационарной модели

Краевая задача сложного теплообмена имеет вид (см. раздел [1.4.1](#))

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|^3\theta = b\kappa_a\varphi, \quad (4.1)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a|\theta|^3\theta, \quad (4.2)$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0. \quad (4.3)$$

Основную сложность при численном решении прямой задачи представляет нелинейность по температурному полю, которое входит в систему дифференциальных уравнений в четвёртой степени.

Метод простой итераций успешно применяется для решения задач в двумерной области. Он был использован в работах [120, 127]. Однако, в трёхмерной области этот метод демонстрирует недостаточную скорость сходимости, что приводит к долгим итерационным процессам и увеличению вычислительных затрат.

Вместо метода простой итераций для решения сложных задач оптимального управления температурой может быть применен метод Ньютона. Метод Ньютона является одним из наиболее эффективных методов оптимизации и решения нелинейных уравнений. Он использует локальную аппроксимацию функции в виде касательной плоскости и обновляет решение на основе градиента и гессиана функции. Этот метод обычно обеспечивает быструю сходимость и может быть применен для решения сложных задач оптимального управления температурой в трехмерных областях.

Метод Ньютона является усовершенствованным вариантом метода простой итерации, в котором нелинейное слагаемое  $|\theta|^3\theta$  аппроксимируется выражением  $\tilde{\theta}^4 + 4\tilde{\theta}^3(\theta - \tilde{\theta})$ , где  $\tilde{\theta}$  - приближение для температуры на предыдущей

итерации. Эта аппроксимация обеспечивает более точное решение и быструю сходимость, что делает метод Ньютона более эффективным для решения задач с высокой степенью нелинейности. В результате модифицированная система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a \left( (4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4) - \varphi \right) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a \left( \varphi - (4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4) \right) &= 0; \end{aligned} \quad (\text{L1})$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0. \quad (\text{L2})$$

Моноотонная сходимость метода Ньютона является важным свойством, которое позволяет обеспечить устойчивость итерационного процесса и успешное решение эллиптических уравнений с монотонным и выпуклым нелинейным слагаемым. В литературе было проведено множество исследований, направленных на изучение сходимости метода Ньютона для таких уравнений.

В частности, в работах [128, 129] были представлены результаты анализа монотонной сходимости метода Ньютона для эллиптического уравнения с монотонным и выпуклым нелинейным слагаемым. Результаты этих исследований показывают, что метод Ньютона обладает хорошими свойствами сходимости и может быть применен для решения сложных задач оптимального управления в моделях сложного теплообмена.

#### 4.1.2 Примеры численного решения краевой задачи (4.1)–(4.3)

Первым этапом решения задачи методом конечных элементов будет вывод слабой формулировки для линеаризованной модели. Для этого умножим уравнения (L1) на соответствующие тестовые функции  $v, \psi \in H^1(\Omega)$  и применим формулу Грина. Учитывая краевые условия (L2), получим вариационные равенства  $\forall v, \psi \in H^1(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v d\Gamma + \left( b\kappa_a((4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4) - \varphi), v \right) &= \int_{\Gamma} \beta\theta_b v d\Gamma, \\ \alpha(\nabla\varphi, \nabla\psi) + \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} \gamma\varphi v d\Gamma + \left( (\kappa_a(\varphi - (4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4))), \psi \right) &= \int_{\Gamma} \gamma\theta_b^4 \psi d\Gamma. \end{aligned}$$

**Пример 1** (двумерная область). Положим  $\Omega = \{(x, y), 0 \leq x, y \leq 1\}$ .



Метод конечных элементов требует разбиения области  $\Omega$  на конечное число непересекающихся подобластей, называемых *конечными элементами*. Отметим, что большинство современных солверов включают в себя алгоритмы разбиения области на конечные элементы, а также загрузку уже разбитых областей.

Определим параметры системы следующим образом.  $a = 0.6$ ,  $\alpha = 0.333$ ,  $k_a = 1$ ,  $b = 0.025$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.8 \cos(\frac{\pi}{2}y) + 0.5$ ,  $\theta_b = 0.1 + y/2$ . Начальное приближение для функций  $\theta$  и  $\varphi$  выбрано нулевым. Состояние, полученное за три итерации при данных параметрах представлено на рисунке 4.1.

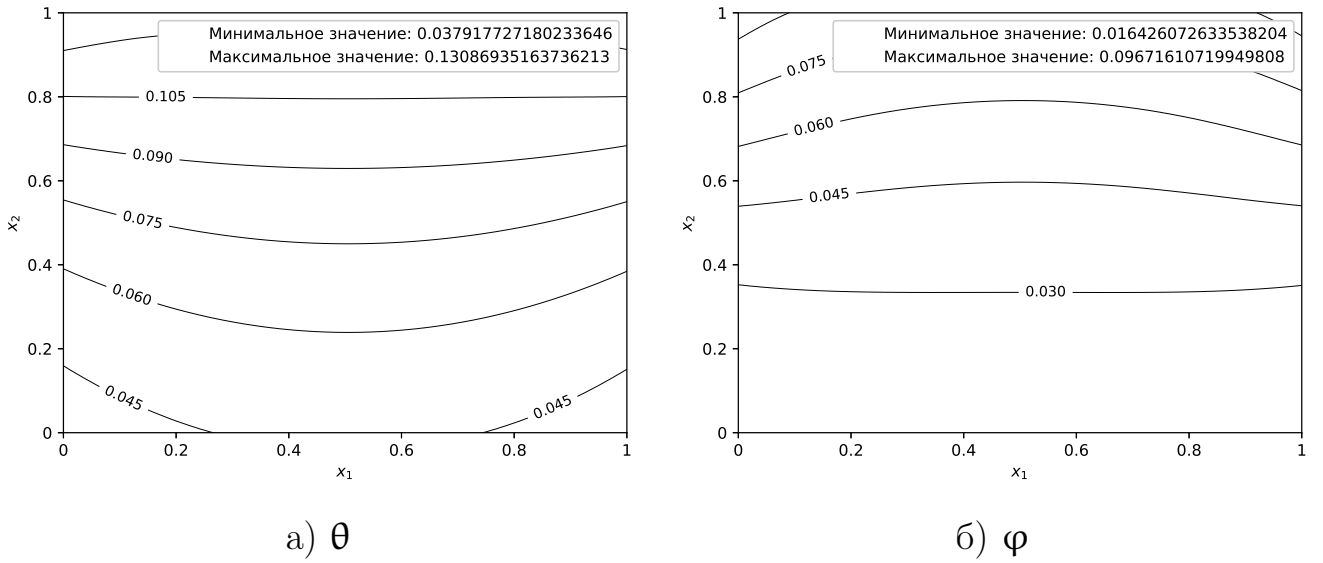


Рисунок 4.1 — Решение граничной задачи в двумерной области

Код, используемый для получения решения представлен в приложении А.1. Инструментарий для получения изображений можно найти в репозитории [130].

**Пример 2** (трёхмерная область). Пусть  $\Omega = \{(x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ . Определим функции  $\gamma, \theta_b$  следующим образом:  $\gamma = 0.8 \cos(\frac{\pi}{2}z) + 0.5$ ,  $\theta_b = 1 - y/2 + z/2$ .

Начальное приближение также выберем нулевым. Для нахождения состояния потребовалось шесть итераций, результат представлен на рисунке 4.2.

**Замечание 4.1.** Алгоритмы численного решения начально-краевых задач для квазилинейных моделей также основаны на предложенном выше методе Ньютона и будут изложены при описании алгоритмов решения обратных задач.

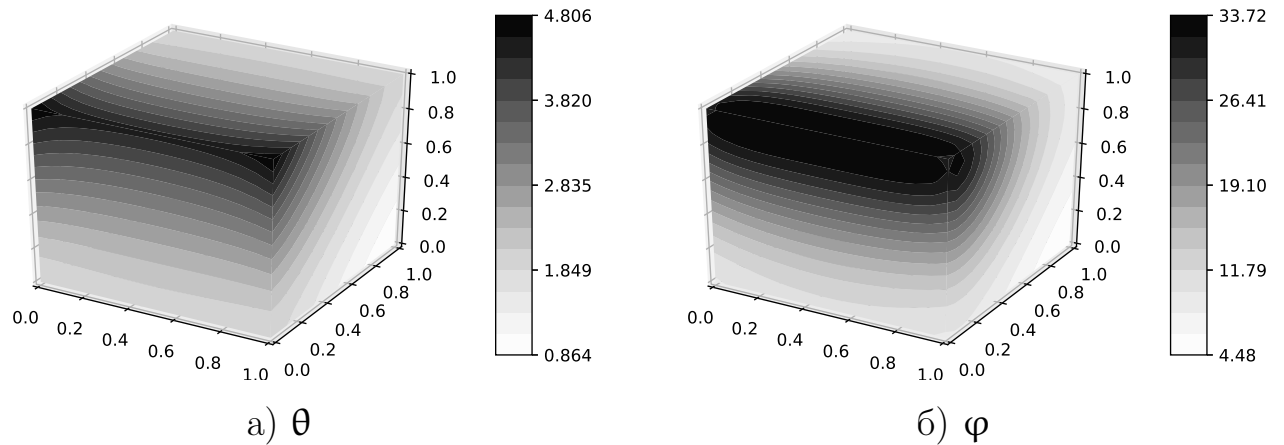


Рисунок 4.2 — Решение граничной задачи в трёхмерной области

## 4.2 Алгоритмы решения граничных обратных задач

### 4.2.1 Градиентный спуск и модификации

*Градиентный спуск* – это способ минимизации целевой функции  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in X$ , путем обновления параметров в направлении, противоположном градиенту целевой функции  $\nabla f(\mathbf{x})$ . Скорость обучения  $\eta$  определяет размер шагов, которые мы делаем, чтобы достичь (локального) минимума. Иными словами, мы следуем направлению наклона поверхности, созданной целевой функцией, вниз до тех пор, пока не достигнем локального минимума.

Известны различные способы модификации градиентного спуска. Перечислим некоторые из них.

#### Градиентный спуск с проекцией

Метод градиентного спуска широко используется для минимизации дифференцируемой функции  $f(\mathbf{x})$ , итеративно двигаясь в направлении наибольшего убывания. Алгоритм осуществляется путем обновления параметров  $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ , где  $\mathbb{X}$  некоторое гильбертово пространство, в направлении, противоположном градиенту функции  $\nabla f(\mathbf{x})$  с величиной шага (скорость обучения)  $\eta$ . Этот простой, но мощный алгоритм оптимизации используется во множестве приложений, таких как машинное обучение, компьютерное зрение и обработка сигналов. В некоторых случаях задача оптимизации имеет дополнительные ограничения, которые могут быть включены в алгоритм градиентного спуска

с использованием проекции. Представим краткий обзор метода градиентного спуска с проекцией.

Цель алгоритма градиентного спуска - минимизировать функцию  $f(\mathbf{x})$ , итеративно обновляя параметры следующим образом:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \eta \nabla f(\mathbf{x}_k),$$

где  $\mathbf{x}_k$  - вектор параметров на итерации  $k$ ,  $\eta$  - величина шага, и  $\nabla f(\mathbf{x}_k)$  - градиент функции на итерации  $k$ . Когда задача оптимизации включает ограничения, алгоритм градиентного спуска должен быть изменен, чтобы учесть эти ограничения. Один из распространенных подходов состоит в использовании проекции на множество ограничений.

Пусть  $\mathcal{C}$  - множество ограничений. Алгоритм градиентного спуска с проекцией можно описать следующим образом:

$$x_{k+1} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x_k - \eta \nabla f(x_k)),$$

где  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\cdot)$  - оператор проекции на множество ограничений  $\mathcal{C}$ . Проекция обеспечивает сохранение обновленного вектора параметров  $\mathbf{x}_{k+1}$  в пределах множества ограничений, таким образом, удовлетворяя ограничениям задачи.

### Оператор проекции

Оператор проекции  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\cdot)$  проецирует заданную точку на множество ограничений  $\mathcal{C}$ . Проекция точки  $\mathbf{y}$  на множество  $\mathcal{C}$  определяется как:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(y) = \arg \min_{x \in \mathcal{C}} \|y - x\|^2,$$

где  $\|\cdot\|$  обозначает евклидову норму. Оператор проекции находит точку в множестве ограничений  $\mathcal{C}$ , которая ближе всего к заданной точке  $\mathbf{y}$ .

### Примеры множеств ограничений

Множество ограничений может иметь различные формы в зависимости от задачи оптимизации. Некоторые распространенные множества ограничений включают:

- **Ограничения-коробки:** Множество ограничений представляет собой коробку, определенную как  $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, |, a_i \leq x_i \leq b_i, , i = 1, \dots, n\}$ . В этом случае оператор проекции можно вычислить поэлементно:

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(y))_i = \min(\max(y_i, a_i), b_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

- **Ограничения-шары:** Множество ограничений представляет собой закрытый шар с радиусом  $r$  и центром  $\mathbf{c}$ , определенный как  $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leq r\}$ . Оператор проекции для этого множества ограничений:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(y) = c + \min \left( 1, \frac{r}{\|y - c\|} \right) (y - c).$$

- **Ограничения-симплексы:** Множество ограничений представляет собой симплекс, определенный как  $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ . Оператор проекции для этого множества ограничений включает более сложный алгоритм, такой как тот, который представлен, например [131].

#### 4.2.2 Алгоритм нахождения квазирешения обратной задачи

Задача нахождения квазирешения обратной задачи (см. 2.1.1)

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \Gamma : a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) &= 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2 : \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) &= 0, \\ \Gamma_1 : \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

где предполагается, что неизвестная функция  $u$  удовлетворяет неравенствам

$$0 < u_1 \leq u \leq u_2, \tag{4.6}$$

а также условию  $\theta = \theta_0$  на  $\Gamma_2$ , заключающаяся в минимизации функционала (2.5)

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \tag{4.7}$$

на решениях начально-краевой задачи (4.4)–(4.6).

Пусть функционал  $J(\theta)$  удовлетворяет условиям, указанным в разд. 2.1.3. Для удобства введём переобозначение  $\hat{J}(u) := J(\theta(u))$ ,  $\hat{J} : L^2(\Gamma_1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Здесь  $\theta(u)$  – температурное поле задачи (2.1)–(2.2) отвечающее управлению  $u \in L^2(\Gamma_1)$ .

Согласно формуле (2.14) градиент функционала  $\hat{J}(u)$  имеет вид

$$\hat{J}'(u) = (\varphi(u) - \theta_b^4)p_2,$$

где  $\varphi(u)$  есть интенсивность излучения,  $p_2$  – соответствующая переменная сопряжённой системы (2.12)–(2.14):

$$\begin{aligned} A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a(b p_1 - p_2) &= f_c, \quad (f_c, v) = - \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma, \\ A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - b p_1) &= g_c(p_2, \hat{u}), \quad (g_c(p_2, \hat{u}), v) = - \int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma, \\ \int_{\Gamma_1} p_2 (\hat{\varphi} - \theta_b^4)(u - w) d\Gamma &\leq 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Предлагаемый алгоритм решения выглядит следующим образом:

### Алгоритм градиентного спуска с проекцией

1. Выбор значения шага градиента  $\lambda$ .
2. Выбор числа итераций  $N$ .
3. Выбор начального приближения для управления  $u_0 \in U_{ad}$ .
4. для  $k \leftarrow 0, 1, 2, \dots, N$  выполнить:
  - а. Для заданного  $u_k$ , вычислить состояние  $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$  системы (2.6).
  - б. Вычислить значение функционала качества  $J(\theta_k)$  из уравнения (2.5).
  - в. Рассчитать сопряжённое состояние  $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$  из уравнений (2.12)–(2.13), где  $\hat{\theta} := \theta_k, \hat{u} = u_k$ .
  - г. Пересчитать управление  $u_{k+1} = P_{ad} [u_k - \lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}]$ .

Значение параметра  $\lambda$  выбирается согласованным со значением градиента  $J'(u_k) = (\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}$  таким образом, чтобы значение  $\lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}$  определяло значимую поправку для  $u_k$ . В экспериментах, приведённых ниже, значение параметра  $\lambda = 20$ .

Количество итераций  $N$  выбирается достаточным для выполнения условия  $J(\theta_{N-1}) - J(\theta_N) < 10^{-15}$ . Эксперименты показывают хорошее восстановление функции  $u$  при  $N > 10^5$ .

Оператор проекции  $P_{ad} : U \rightarrow U_{ad}$  определён следующим образом

$$P_{ad}[v] = \begin{cases} u_1, & \text{если } v \leq u_1 \\ v, & \text{если } u_1 < v < u_2 \\ u_2, & \text{если } v \geq u_2. \end{cases}$$

### 4.2.3 Примеры численного моделирования для двумерного случая

Положим  $\Omega = \{(x, y), 0 \leq x, y \leq 1\}$ ,  $l = 1$  см. Граница  $\partial\Omega$  состоит из участков:

$$\Gamma_0 = \{x = \{0, 1\}, y \in [0, 1]\}$$

$\Gamma_1 = \{x \in [0, 1], y = 0\}$  — участок с неизвестными отражающими свойствами,

$\Gamma_2 = \{x \in [0, 1], y = 1\}$  — участок наблюдения.

Будем также далее считать, что  $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$ ,  $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\beta = 0.00005[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\kappa = 1[\text{см}^{-1}]$ ,  $\kappa_s = 0$ ,  $A = 0$ ,  $\gamma = 0.3$ . Указанные параметры соответствуют стеклу [132]. Температуру на границе  $\Omega$  положим равной  $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$ .

При указанных параметрах для первого эксперимента выберем следующее тестовое значение функции  $u$  (рис. 4.4а):

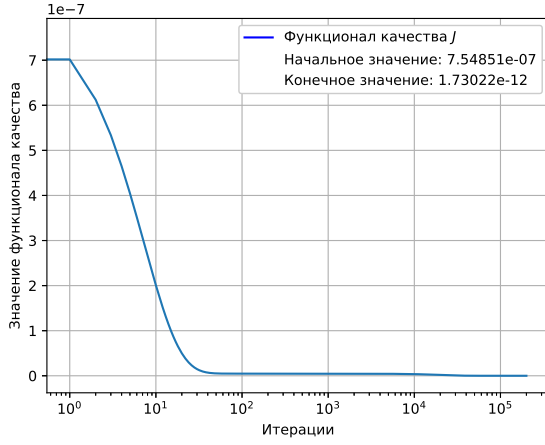
$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leq 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases} \quad (4.8)$$

и для второго эксперимента (рис. 4.4б):

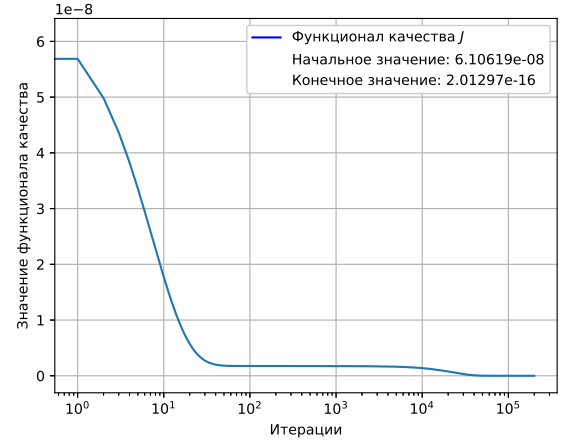
$$u(x) = 0.49x + 0.01. \quad (4.9)$$

Вычислим решение прямой задачи (2.1)–(2.2) для этих случаев. Полученное температурное поле на участке наблюдения  $\Gamma_2$  выберем в качестве  $\theta_0$ . Далее, применяя предложенный алгоритм, находим квазирешение обратной задачи (2.1)–(2.4). Эффективность алгоритма, а также значение  $u_0$  в первом и втором случаях иллюстрируются на рисунке 4.4. На рисунке 4.3 показана динамика функционала качества по итерациям.

**Замечание 4.2.** В предложенных примерах потребовалось  $2 \cdot 10^6$  итераций для нахождения квазирешения  $u$ . В то же время температурное поле на участке наблюдения  $\Gamma_2$  становится близким к  $\theta_0$  уже на  $10^2$  итерации. Также наблюдается существенное падение скорости уменьшения функционала качества с каждой итерацией после того, как среднее значение найденной функции контроля становится близко к тестовой функции.

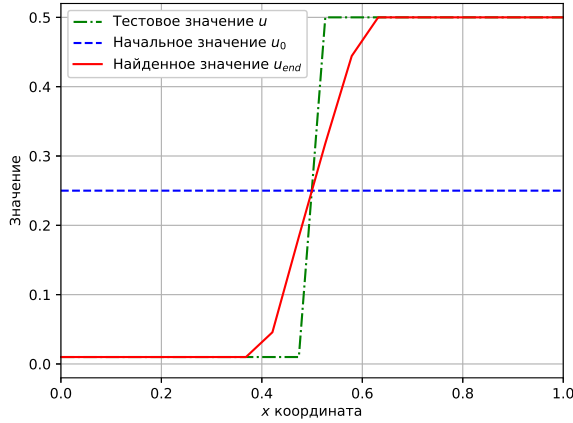


а) Первый эксперимент

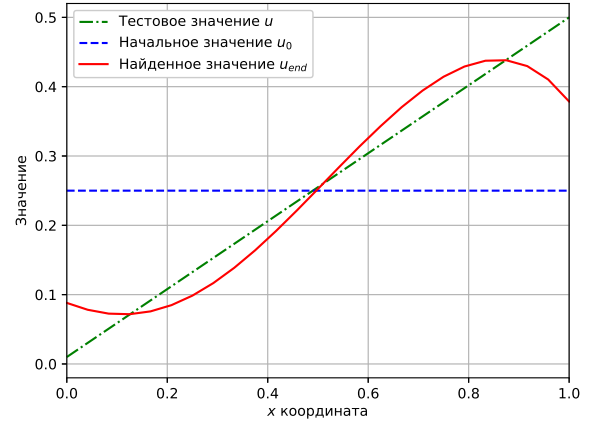


б) Второй эксперимент

Рисунок 4.3 — Значение функционала качества



а) Первый эксперимент



б) Второй эксперимент

Рисунок 4.4 — Тестовая функция u, начальная u<sub>0</sub>, найденная функция u<sub>end</sub>.

#### 4.2.4 Алгоритм решения задачи оптимального управления для квазистационарной модели

Задача оптимального управления, поставленная в разделе 2.3 для квазистационарной модели имеет вид:

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b \kappa_a (|\theta| \theta^3 - \varphi) &= 0, \\ -\alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta| \theta^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$a(\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \quad (4.11)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (4.12)$$

Напомним, что эта задача аппроксимирует задачу с данными типа Коши для температуры.

Приведем алгоритм решения задачи управления. Пусть

$$\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u),$$

где  $\theta(u)$  — компонента решения задачи (2.36)–(2.37), соответствующая управлению  $u \in U$ . Согласно (2.50) градиент функционала  $\tilde{J}_\lambda(u)$  определяется следующим образом:  $\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2$ . Здесь  $p_2$  — соответствующая компонента сопряженного состояния системы (2.50)

$$\begin{aligned} -p'_1 + aAp_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a (bp_1 - p_2) &= B(\theta_b - \hat{\theta}), \\ p_1(T) &= 0, \quad \alpha Ap_2 + \kappa_a (p_2 - bp_1) = 0, \end{aligned}$$

где  $\hat{\theta} := \theta(u)$ . Предлагаемый алгоритм для решения задачи оптимального управления состоит из следующих шагов:

#### Алгоритм градиентного спуска

1. Выбор значения шага градиента  $\varepsilon$ ,
2. Выбор числа итераций  $N$ ,
3. Выбор начального приближения для управления  $u_0 \in U$ ,
4. для  $k \leftarrow 0, 1, 2, \dots, N$  выполнить:
  - а. Для заданного  $u_k$ , вычислить состояние  $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$ , решение задачи (2.36)–(2.38).
  - б. Вычислить значение функционала качества  $J_\lambda(\theta_k, u_k)$ .
  - в. Из уравнений (2.50), вычислить сопряженное состояние  $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$ , где  $\hat{\theta} := \theta_k, \hat{u} := u_k$ .
  - г. Пересчитать управление  $u_{k+1} = u_k - \varepsilon(\lambda u_k - p_2)$ .

Параметр  $\varepsilon$  выбирается эмпирически таким образом, чтобы значение  $\varepsilon(\lambda u_k - p_2)$  являлось существенной корректировкой для  $u_{k+1}$ . Число итераций  $N$  выбирается достаточным для удовлетворения условия  $J_\lambda(\theta_k, u_k) - J_\lambda(\theta_{k+1}, u_{k+1}) < \delta$ , где  $\delta > 0$  определяет точность вычислений.

Рассмотренный ниже пример иллюстрирует работу предложенного алгоритма для малых, что важно, значений параметра регуляризации  $\lambda \leq 10^{-12}$ .



Заметим, что для численного решения прямой задачи с заданным управлением был использован метод простой итерации для линеаризации задачи и ее решения с помощью метода конечных элементов. Для численного моделирования мы использовали солвер FEniCS [133, 134]. Сравним работу предложенного алгоритма с результатами статьи [122]. Задача рассматривается в области  $\Omega \times (-L, L)$ , где  $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_{1,2} < d\}$  и при большом  $L$  сводится к двумерной задаче для вычислительной области  $\Omega$ .

Для задачи были выбраны следующие значения параметров:  $d = 1(\text{м})$ ,  $a = 0.9210^{-4}(\text{м}^2/\text{с})$ ,  $b = 0.19(\text{м}/\text{с})$ ,  $\alpha = 0.0333(\text{м})$ ,  $\kappa_a = 1(\text{м}^{-1})$ . Параметры соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре  $400^\circ\text{С}$ . Функции  $\theta_b, q_b$  для граничного условия (2.40) задаются следующим образом:  $\theta_b = \hat{\theta}|_\Gamma, q_b = \partial_n \hat{\theta}|_\Gamma$ , где  $\hat{\theta} = (x_1 - 0.5)^2 - 0.5x_2 + 0.75$ .

Приближенное решение задачи (2.51), (2.52) с данными Коши, представленными в [122] (рисунок 4.5а), было получено путем решения параболической задачи четвертого порядка для температуры. Решение стабилизировалось через 120 секунд, но вычисления на каждом временном шаге были довольно затратными [122]. На рисунке 4.5б показано стационарное поле температуры, полученное

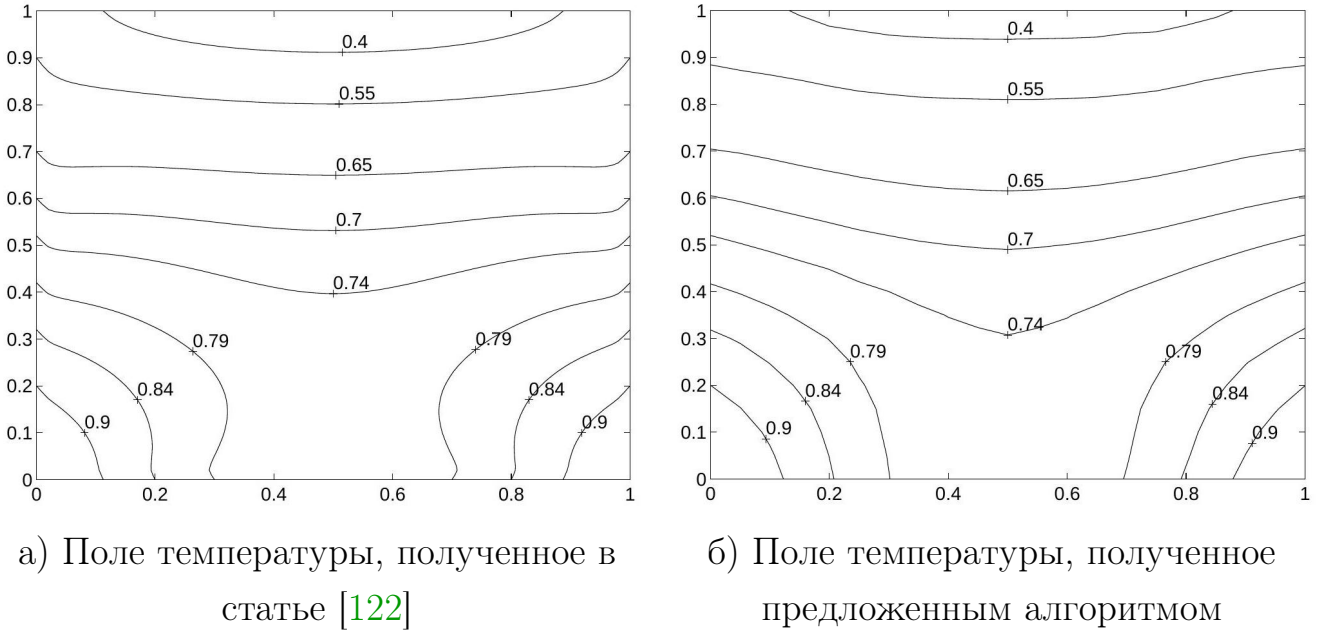


Рисунок 4.5 — сравнение полученных температурных полей

с помощью метода, предложенного в данном параграфе.

Представленный пример иллюстрирует, что предложенный алгоритм успешно находит численное решение задачи (2.51), (2.52) с граничными условиями типа Коши.

#### 4.2.5 Численное решение квазилинейной начально-краевой задачи моделирующей ВВЛА

Перенос тепла и излучения будет рассматриваться в среде, состоящей из четырех частей, которые интерпретируются как кровь, стенки вены, около-венозная ткань и оптическое волокно. Вычислительная область в цилиндрической системе координат в случае угловой симметрии схематически изображена на рисунке 4.6 (линейные размеры указаны в миллиметрах).

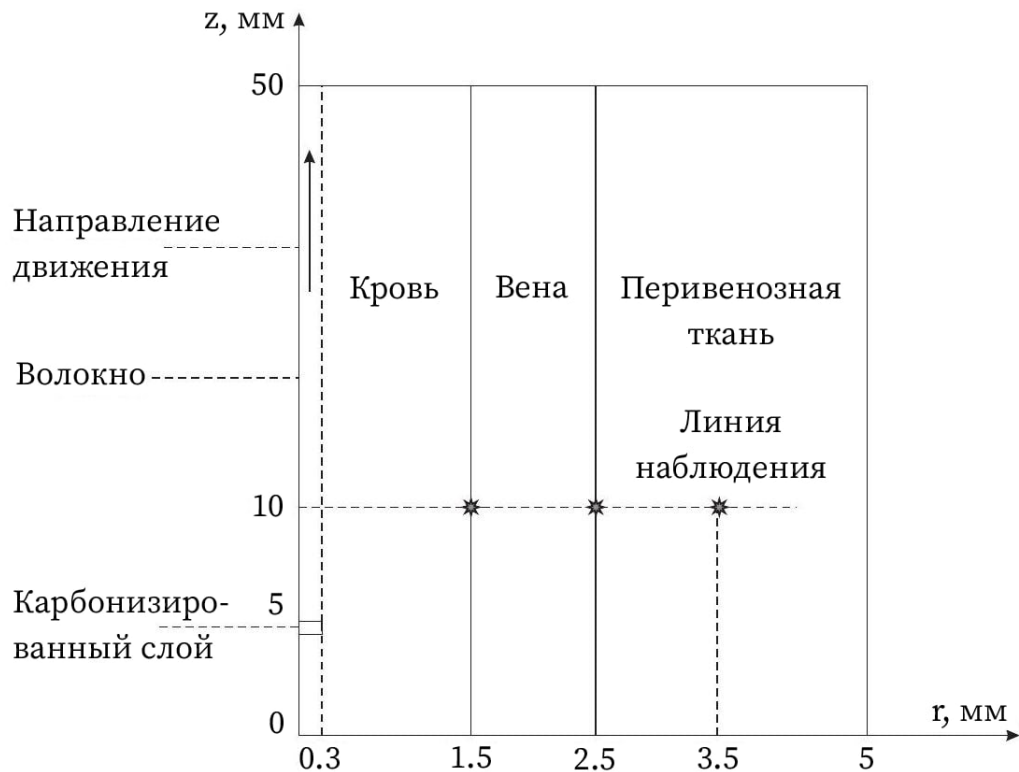


Рисунок 4.6 — Область вычисления

Для нахождения решения начально-краевой задачи (1.46)–(1.48) мы дискретизируем временной интервал  $(0, T)$ ,  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ . Для каждого момента времени  $t = t_l = l\Delta t$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$ , используется итерационный алгоритм для нахождения решения соответствующей краевой задачи.  $n$ -й шаг итерационной процедуры ( $n = 1, 2, \dots, M$ ) записывается следующим

образом:

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi_n) + \beta (\varphi_n - \theta_{n-1}^3 |\theta_{n-1}|) = g, \quad (4.13)$$

$$\sigma \partial \theta_n / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta_{n-1}) \nabla \theta_n) - b(\theta_{n-1}^3 |\theta_n| - \varphi_n) = f, \quad x \in \Omega, \quad (4.14)$$

$$k(\theta_{n-1}) \partial_n \theta_n + p(\theta_n - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi_n + \gamma (\varphi_n - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad (4.15)$$

где производная по времени в (4.14) аппроксимируется следующим образом

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} \simeq \frac{\theta_n|_{t=t_l} - \theta_M|_{t=t_{l-1}}}{\Delta t},$$

и функции  $\theta_n, \theta_{n-1}, \varphi_n$  в (4.13)–(4.15) являются приближениями решения, соответствующими моменту времени  $t = t_l$ . Подстрочный индекс функций  $\theta_n, \theta_{n-1}$  и  $\varphi_n$  означает номер итерации. Для инициализации итерационной процедуры задаем начальное приближение температуры для каждого момента времени:

$$\theta_0|_{t=t_l} = \theta_M|_{t=t_{l-1}}, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad \theta_M|_{t=t_0} = \theta_{in}. \quad (4.16)$$

В уравнениях (4.13), (4.14)  $g = P_\varphi \chi / \mathcal{M}\varphi$ ,  $f = P_\theta \chi / \mathcal{M}\theta$ , где  $P_\varphi$  - мощность источника, расходуемая на излучение,  $P_\theta$  описывает мощность источника, расходуемую на нагрев кончика волокна,  $\chi$  - характеристическая функция части среды, в которой расположен кончик волокна, деленная на объем кончика волокна,  $\mathcal{M}\varphi$  и  $\mathcal{M}\theta$  - нормализующие коэффициенты для получения средней интенсивности излучения и абсолютной температуры из  $\varphi$  и  $\theta$ .

Для реализации каждого шага итерационного алгоритма (4.13)–(4.16) использовался метод конечных элементов с использованием программного пакета FreeFEM++ [135]. Оптические и термофизические параметры среды взяты из [80]. Параметры  $\theta_b$  и  $\theta_{in}$  соответствуют температуре 37°C, а коэффициент  $\gamma$  равен 1. Во всех расчетах начальное положение кончика оптического волокна соответствует  $(r, z) = (0, 5)$ , и его скорость отката составляет 2 мм/с. Следуя [80, 81], мы моделируем теплоперенос потоком пузырьков, образующихся на горячем кончике волокна, через коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры, как следующим образом: когда температура в определенной точке достигает 95° C и выше, коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз.

Эффективность лазерной абляции можно оценить по поведению температурных профилей в различных точках вычислительной области. Основные

параметры процедуры лазерной абляции – мощность лазера, длина волны излучения, скорость отката оптического волокна и соотношение между мощностями лазера, затрачиваемыми на излучение и нагрев кончика волокна.

Отметим, что решение задачи (1.46)–(1.48) зависит от длины волны неявным образом, через параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , описывающие свойства излучения среды (смотрите таблицы значений коэффициента поглощения и коэффициента уменьшения рассеяния, определяющие параметры  $\alpha$  и  $\beta$  [80, 81]). Как правило, лазерная абляция осуществляется излучением с длиной волны от 810 до 1950 нм. Достаточно широко используемые диапазоны скорости отката волокна и мощности лазерного излучения составляют 1 – 3 мм/с и 5 – 15 Вт соответственно [80, 81, 83].

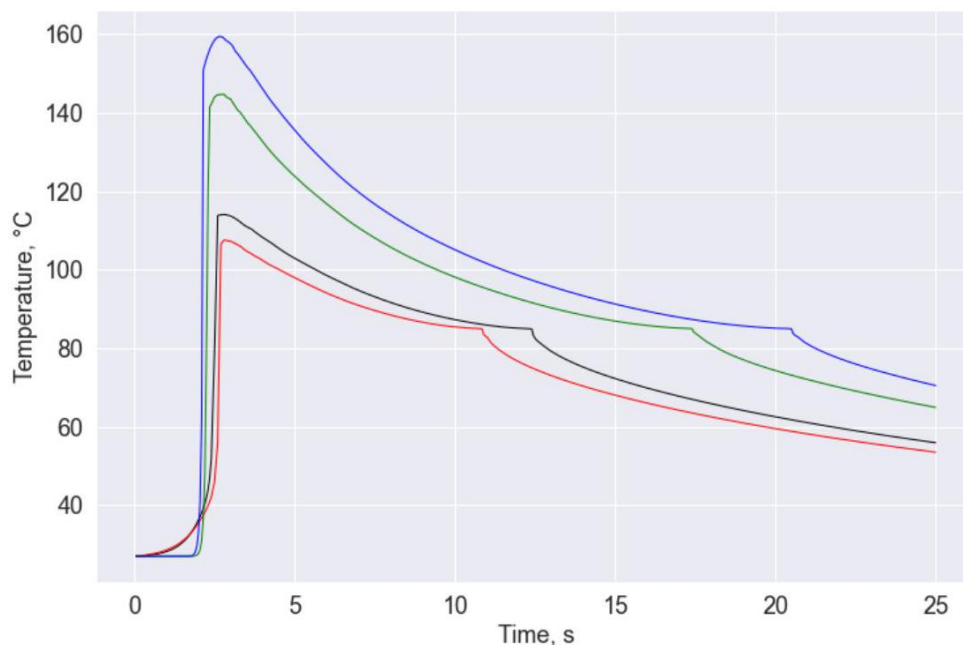


Рисунок 4.7 — Поведение температуры в точке (1.5,10) при мощности лазера 10 Вт и следующих длинах волн: 810 нм (черный), 1064 нм (красный), 1470 нм (зеленый) и 1950 нм (синий).

Рисунок 4.7 показывает поведение температурных профилей в точке (1.5,10) для излучения с различными длинами волн: 810 нм, 1064 нм, 1470 нм и 1950 нм. Мощность источника устанавливается как  $(P_\phi, P_\theta) = (7 \text{ Вт}, 3 \text{ Вт})$  во всех случаях. Как видно из рисунка 4.7, изменение длины волны излучения оказывает значительное влияние на поведение температурного профиля. Тем не менее, возможно обеспечить достаточно близкую продолжительность кипения (когда температура выше  $95^\circ\text{C}$ ) для температурных профилей, соответствующих разным длинам волн, изменив мощность лазера  $P = P_\phi + P_\theta$ ,

сохраняя соотношение  $P_\phi/P_\theta$  равным  $7/3$  (рисунок 4.7). Отметим, что рассчитанная температура в точках перивенозной ткани,  $(2.5, 10)$  и  $(3.5, 10)$ , довольно безопасна (рисунок 4.8).

Как видно из проведенных экспериментов, использование компьютерного моделирования является перспективным способом определения оптимальных параметров излучения, обеспечивающих эффективную и безопасную процедуру ВВЛА.

На рисунке 4.7 показаны температурные профили в точке  $(1.5, 10)$  для мощности лазера 10 Вт и для разных длин волн: 810 нм (черный), 1064 нм (красный), 1470 нм (зеленый) и 1950 нм (синий).

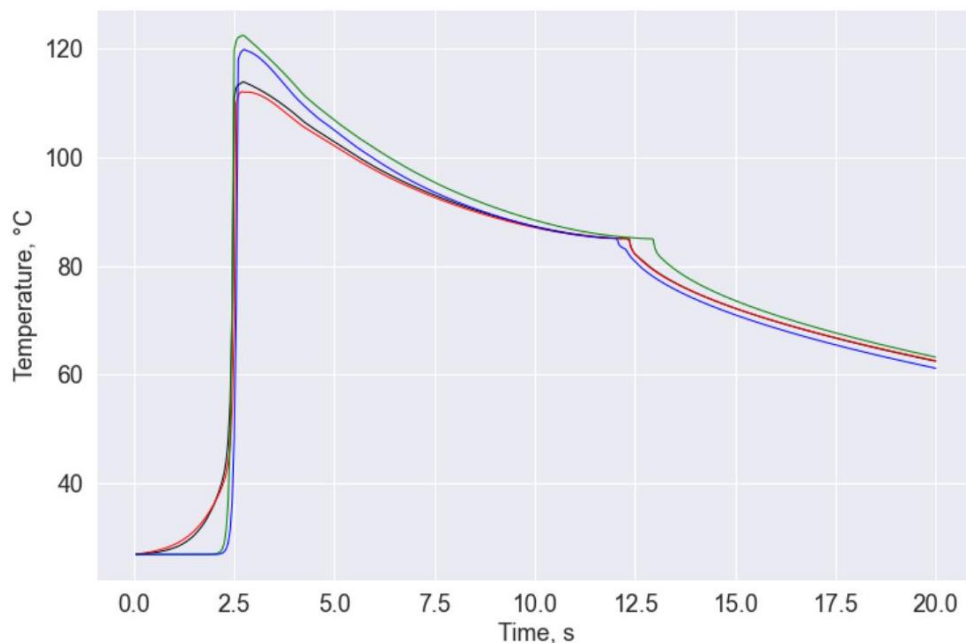


Рисунок 4.8 — Поведение температуры в точке  $(1.5, 10)$  для следующих длин волн и мощностей лазера: 810 нм,  $P = 10$  Вт (черный); 1064 нм,  $P = 11$  W (красный); 1470 нм,  $P = 7.5$  W (зеленый); 1950 нм,  $P = 6$  W (синий).

На рисунке 4.8 показаны температурные профили в точке  $(1.5, 10)$  для разных длин волн и мощностей лазера: 810 нм,  $P = 10$  Вт (черный); 1064 нм,  $P = 11$  Вт (красный); 1470 нм,  $P = 7.5$  Вт (зеленый); 1950 нм,  $P = 6$  Вт (синий).

На рисунке 4.9 показаны температурные профили в точках  $(1.5, 10)$  (сплошной),  $(2.5, 10)$  (пунктирный) и  $(3.5, 10)$  (точка-тире). Длина волны составляет 810 нм,  $(P_\phi, P_\theta) = (7 \text{ Вт}, 3 \text{ Вт})$

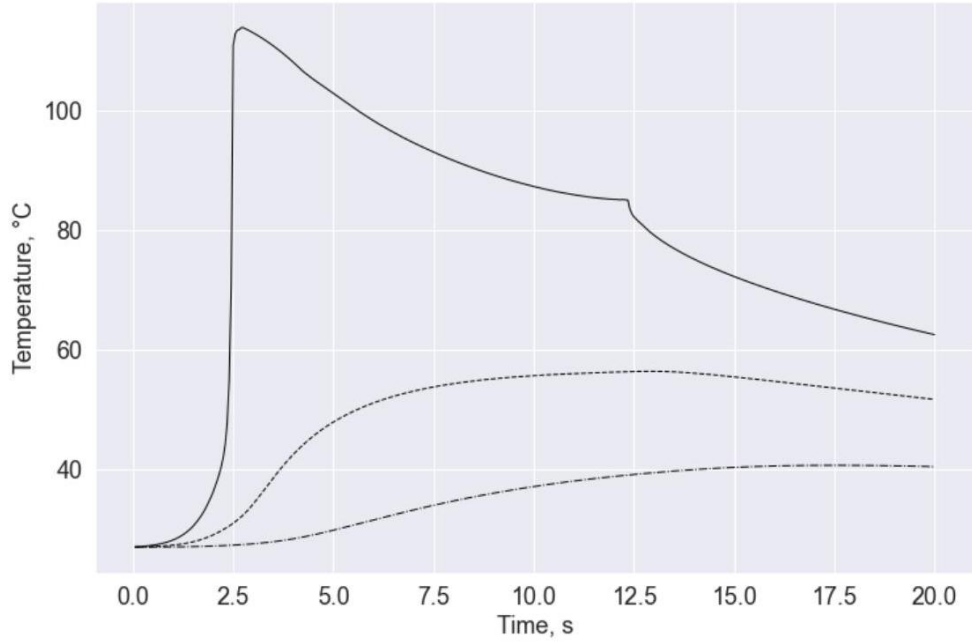


Рисунок 4.9 — Поведение температуры в точках (1.5,10) (твердое тело), (2.5,10) (пунктирной линией) и (3.5,10) (пунктирной линией). Длина волны равна 810 нм,  $(P_\varphi, P_\theta) = (7 \text{ W}, 3 \text{ W})$ .

#### 4.2.6 Метод штрафов для задачи с фазовыми ограничениями

Квазилинейная модель радиационного и диффузионного теплообмена в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$  в разделе 3.1 представлена в виде начально-краевой задачи следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi, \\ -\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ \theta &= 0|_\Gamma, \quad \alpha \partial_n \varphi + 2^{-1} \varphi|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \end{aligned}$$

Требуется найти неизвестные интенсивности  $u_1, u_2$  и соответствующие поля  $\theta, \varphi$  по условию

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \rightarrow \inf,$$

при ограничениях

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*.$$

В разделе 3.1.4 показано, что задачу с ограничениями на температуру в области  $G_2$  можно аппроксимировать задачей со штрафом  $P_\varepsilon$ .

Рассмотрим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления  $(P_\varepsilon)$  для случая, когда параметры управления  $u_1$  и  $u_2$  не зависят от времени. На каждой итерации алгоритма решается линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой требуется найти минимум функционала:

$$\begin{aligned} \widehat{J}_\varepsilon(\theta) = & \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_*} (\theta - \theta_*)^2 dx dt \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad} \end{aligned} \quad (4.17)$$

с соответствующими ограничениями

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\widehat{\theta}) \nabla \theta) &= u, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \\ \theta|_\Gamma &= 0, \quad \theta(x, 0) = \theta_0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь,

$$\begin{aligned} U_{ad} &= \{u = u_1 \chi + u_2 \beta B^{-1} \chi : u_{1,2} \in \mathbb{R}, \\ & \quad u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}, \\ G_* &= \{x \in G_2 : \widehat{\theta}(x, t) > \theta_*\}. \end{aligned}$$

Функция  $\widehat{\theta}$  описывает поле температуры, найденное на предыдущей итерации.

В качестве зависимости коэффициента теплопроводности от температуры используется гладкая аппроксимация кусочно-постоянной функции, рассмотренная в [80–82].

Как легко видеть, задача (4.17), (4.18) сводится к нахождению минимума квадратичной функции параметров  $u_1$  и  $u_2$ :

$$\widehat{J}_\varepsilon(u_1 \theta_1 + u_2 \theta_2 + \theta_3) \rightarrow \inf$$

на треугольнике  $\{u_1, u_2 \in \mathbb{R} : u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}$ . Функции  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$  вычисляются заранее как решения следующих линейных начально-краевых задач для  $x \in \Omega, t \in (0, T)$ :

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta_1 / \partial t - \operatorname{div}(k(\widehat{\theta}) \nabla \theta_1) &= \chi, & \theta_1|_\Gamma &= 0, & \theta_1(x, 0) &= 0, \\ \sigma \partial \theta_2 / \partial t - \operatorname{div}(k(\widehat{\theta}) \nabla \theta_2) &= \beta B^{-1} \chi, & \theta_2|_\Gamma &= 0, & \theta_2(x, 0) &= 0, \\ \sigma \partial \theta_3 / \partial t - \operatorname{div}(k(\widehat{\theta}) \nabla \theta_3) &= 0, & \theta_3|_\Gamma &= 0, & \theta_3(x, 0) &= \theta_0. \end{aligned}$$

При проведении численных экспериментов использовалась область, аналогичная рассматриваемой в разделе 4.2.5 (рисунок 4.6). Толщина карбонизированного слоя равна 0,2 мм, скорость вытягивания волокна 2 мм/с. Рассматривалось излучение с длиной волны 1064 нм. Оптические и теплофизические параметры среды взяты из [80—82].

Для демонстрации сходимости итерационного алгоритма в качестве решения прямой начально-краевой задачи для  $(u_1, u_2) = (3, 7)$  (здесь и далее единицы в ваттах). Области  $G_1$  и  $G_2$  берутся как достаточно малые окрестности точек  $(1.5, 10), (3.5, 10)$ . Для реализации итерационного алгоритма мы взяли  $\varepsilon = 0.3$  и  $\theta_*$ , соответствующие  $47^\circ\text{C}$ .

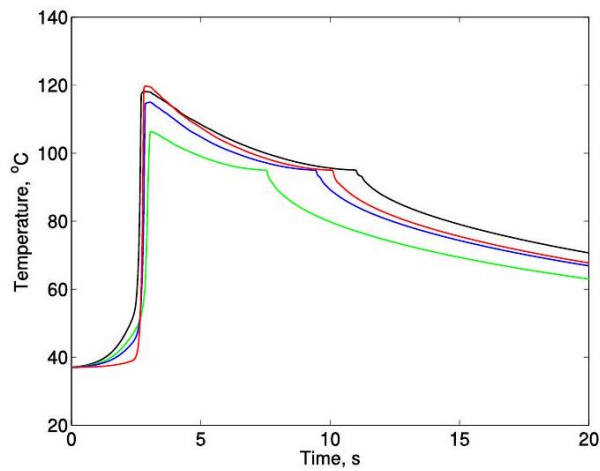


Рисунок 4.10 — Температурные профили: желаемая температура (черный), 1-е (зеленое), 2-е (синее) и 3-е (красное) приближения.

Аппроксимации решения в точке  $(1.5, 10)$  показаны на рисунке 4.10. Аппроксимации после первого, второго и третьего шагов итерационного алгоритма отмечены зеленым цветом  $(u_1, u_2) = (2.5, 4.8)$ , синим  $(u_1, u_2) = (3.4, 3.5)$  и красным  $(u_1, u_2) = (4.2, 0.9)$  соответственно. Черная линия показывает желаемую температуру, соответствующую  $(u_1, u_2) = (3, 7)$ . Максимальное значение температуры в точке  $(3.5, 10)$  равно  $48,8^\circ\text{C}$ . Отметим, что при  $(u_1, u_2) = (3, 7)$  максимальное значение температуры в точке  $(3.5, 10)$  равно  $50,2^\circ\text{C}$ .

Данный пример демонстрирует возможность снижения температуры в околососудистой ткани при сохранении температурного режима внутри вены.



### 4.3 Алгоритмы решения задач с данными Коши. Примеры.

#### 4.3.1 Задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши на всей границе

Решим экстремальную задачу (2.18),(2.21),(2.22). Для этого представим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления. Пусть  $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$ , где  $\theta(u)$  компонента решения задачи (2.18),(2.20), соответствующая управлению  $u \in U$ .

В соответствии с (2.33) градиент функционала  $\tilde{J}_\lambda(u)$  равен

$$\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2.$$

Здесь  $p_2$  – соответствующая компонента сопряженного состояния из системы (2.33), где  $\hat{\theta} := \theta(u)$ .

Значение параметра  $\varepsilon$  выбирается эмпирически таким образом, чтобы значение  $\varepsilon(\lambda u_k - p_2)$  являлось существенной поправкой для  $u_{k+1}$ . Количество итераций  $N$  выбирается достаточным для выполнения условия  $J_\lambda(\theta_k, u_k) - J_\lambda(\theta_{k+1}, u_{k+1}) < \delta$ , где  $\delta > 0$  определяет точность расчетов.

Примеры, рассмотренные ниже, иллюстрируют работоспособность предложенного алгоритма при малых, что важно, значениях параметра регуляризации  $\lambda \leq 10^{-12}$ . В первом примере выполнены тестовые расчеты для куба. Во втором примере приводится сравнение расчетов по предложенному алгоритму с результатами работы [122].

Отметим, что для численного решения прямой задачи с заданным управлением использовался метод простой итерации для линеаризации задачи и ее решения методом конечных элементов. Решение сопряженной системы, которая является линейной при заданной температуре, не вызывает трудностей. Для численного моделирования использовался солвер FEniCS [133, 134].

Исходный код экспериментов представлен в открытом доступе [130].

#### Пример 1.

Приведем примеры расчетов для куба  $\Omega = (x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq l$ . Будем считать, что  $l = 1$  см,  $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$ ,  $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\kappa_a = 1[\text{см}^{-1}]$ ,

$\alpha = 0.(3)[\text{см}]$ . Указанные параметры соответствуют стеклу [132]. Параметр регуляризации  $\lambda = 10^{-12}$ .

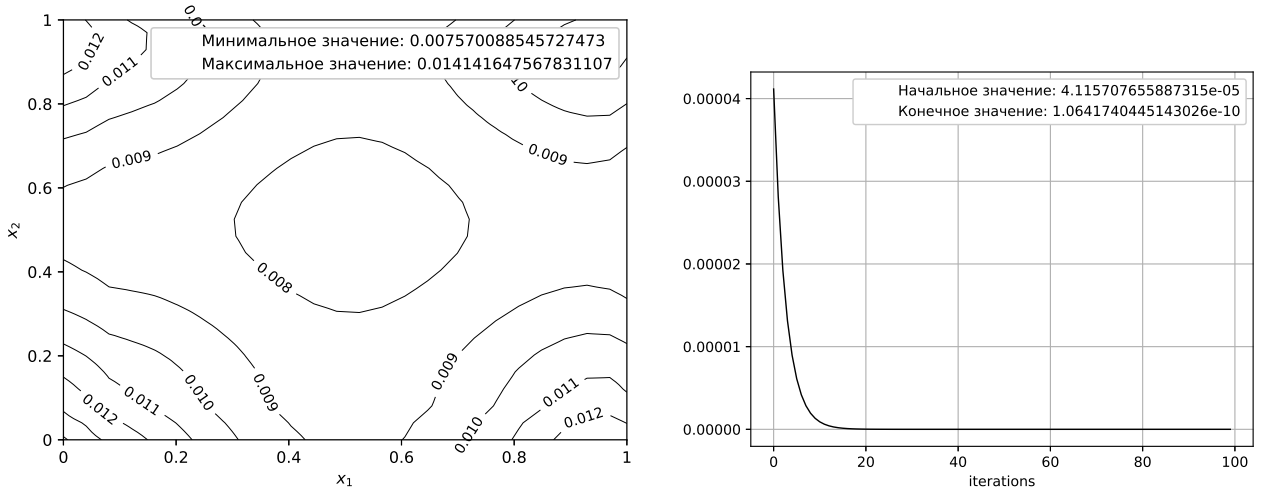
Пусть граничные данные  $r$  и  $u$  в (2.19) имеют вид:

$$r = 0.7,$$

$$u = \hat{u} = 0.5.$$

Далее рассчитываем состояние  $\theta$  и  $\varphi$  как решение задачи (2.18), (2.19) и в качестве  $\theta_b$  выбираем граничное значение функции  $\theta$  на  $\Gamma$ . Значения нормальной производной  $\partial_n \theta$  на  $\Gamma$  должны соответствовать значениям  $q_b = r/a - \theta_b$ . Применяя предложенный алгоритм с начальным приближением  $u_0 = 0.1$ , находим приближенное решение  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  задачи  $CP$ . Для демонстрации того, что алгоритм находит приближенное решение задачи с данными Коши для температуры, важно сравнить значения  $\partial_n \theta_\lambda$  на  $\Gamma$  с  $q_b$ .

На рисунке 4.11а представлен модуль относительного отклонения  $\partial_n \theta_\lambda$  от  $q_b$  на грани куба в плоскости  $z = l$ , где  $\partial_n \theta_\lambda = \partial \theta_\lambda / \partial z$ , а также динамика функционала качества, определяющего норму разности  $\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2$  на рисунке 4.11б. На остальных гранях куба значения относительного отклонения имеют тот же порядок малости.



а)  $|\partial_n \theta_\lambda - q_b|/|q_b|$

б) Результаты первого эксперимента

Рисунок 4.11 — Значение функционала качества

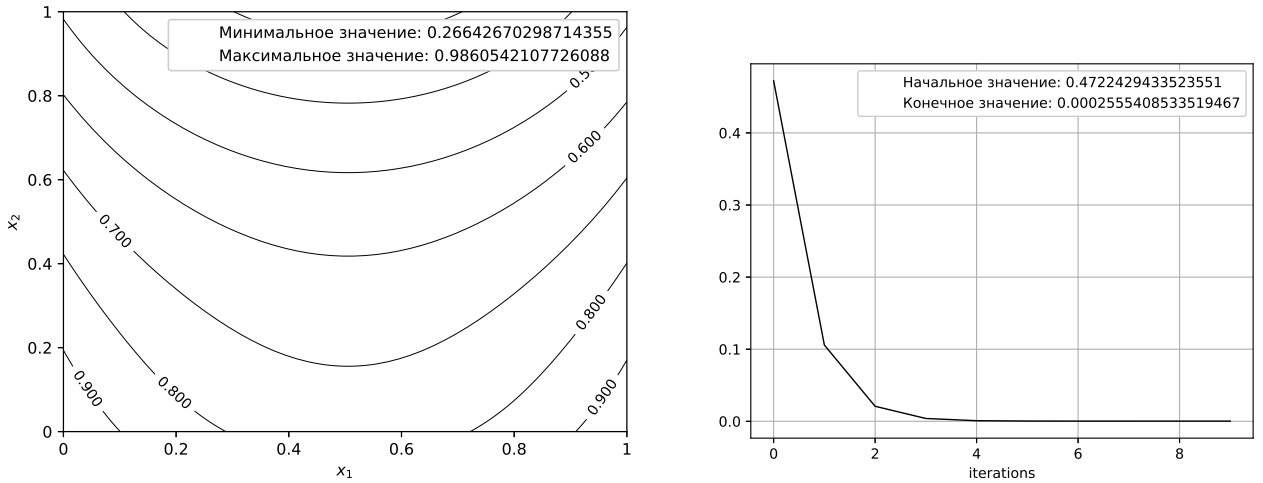
**Пример 2.** Сравним работу предложенного алгоритма с результатами статьи [122]. Задача рассматривается в области  $\Omega \times (-L, L)$ , где  $\Omega = \{x = (x_1, x_2): 0 < x_{1,2} < d\}$  и при больших  $L$  сводится к двумерной задаче с вычислительной областью  $\Omega$ . Выбраны следующие значения параметров задачи:  $d = 1(\text{м})$ ,  $a = 0.92 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2/\text{с})$ ,  $b = 0.19 (\text{м}/\text{с})$ ,  $\alpha = 0.0333 (\text{м})$  и  $\kappa_a = 1 (\text{м}^{-1})$ .

Параметры соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре  $400^\circ\text{C}$ .

Функции  $\theta_b$ ,  $q_b$  в краевом условии (2.20) заданы следующим образом:  $\theta_b = \hat{\theta}|_\Gamma$ ,  $q_b = \partial_n \hat{\theta}|_\Gamma$ , где  $\hat{\theta} = (x_1 - 0.5)^2 - 0.5x_2 + 0.75$ .

Приближенное решение задачи с данными Коши, представленное в [122] получено путем решения эллиптической задачи четвертого порядка для температуры методом установления по времени. Использовались  $H^2$  конформные конечные элементы Богнера-Фокса-Шмитта и солвер FeliCs, разработанный в техническом университете Мюнхена. Решение стабилизировалось через 120 секунд, но вычисления на каждом временном шаге потребовали довольно значительных затрат [122].

На рис. 4.12а представлено температурное поле, полученное предложенным в данной статье методом, достаточно точно совпадающее с результатом в [122]. Величина  $\|\partial_n \theta_\lambda - q_b\|_{L^2(\Gamma)} / \|q_b\|_{L^2(\Gamma)}$  равна 0.000567. Значение функционала качества, определяющего норму разности  $\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2$ , равно 0.000255 и стабилизируется после 10 итераций 4.12б.



а) Полученное решение  $\theta$

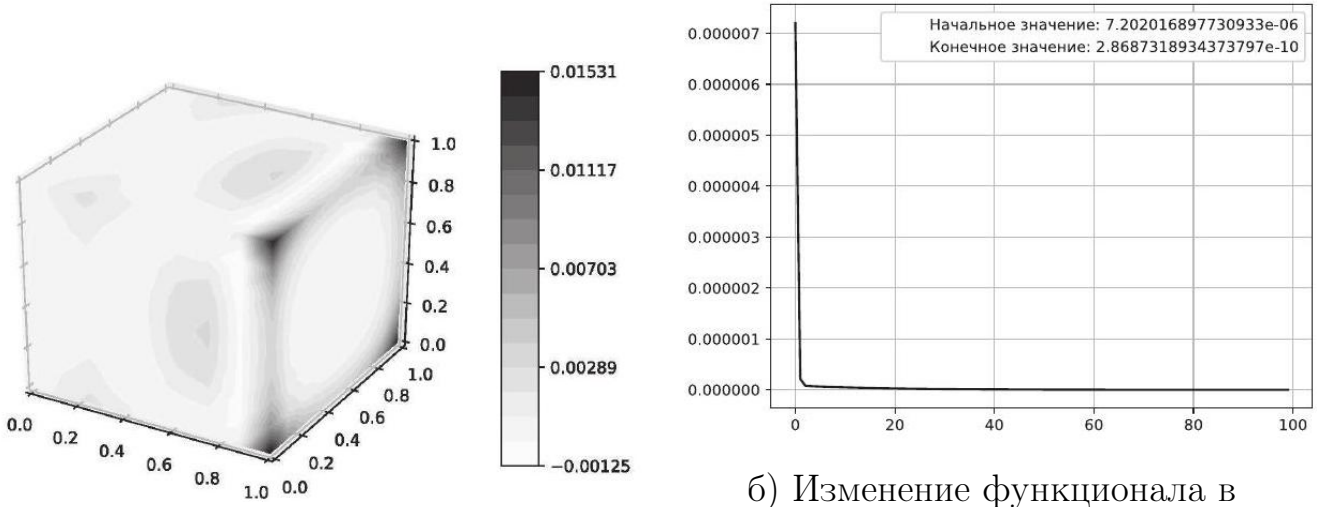
б) Изменение функционала качества

Рисунок 4.12 — Результаты второго эксперимента

Представленные численные примеры иллюстрируют, что предложенный алгоритм успешно справляется с нахождением численного решения задачи (2.18)–(2.20).

**Пример 3.** Положим в условии (2.19)  $r = 0.8 \cos(x) + 0.1$ ,  $u = \hat{u} = y$ . Далее рассчитываем состояние  $\theta$  и  $\varphi$  как решение задачи (2.18)–(2.20) и в качестве  $\theta_b$  выбираем граничные значения функции  $\theta$  на  $\Gamma$ . Применяя предложенный алгоритм с начальным приближением  $u_0 = 0.1$ , находим приближенное решение

задачи (C). Квадрат разницы тестового и найденного решения представлен на рисунке 4.13а, а также динамика функционала качества представлена на рисунке 4.13б.



а)  $(\hat{u} - u_{100})^2$

б) Изменение функционала в зависимости от числа итераций

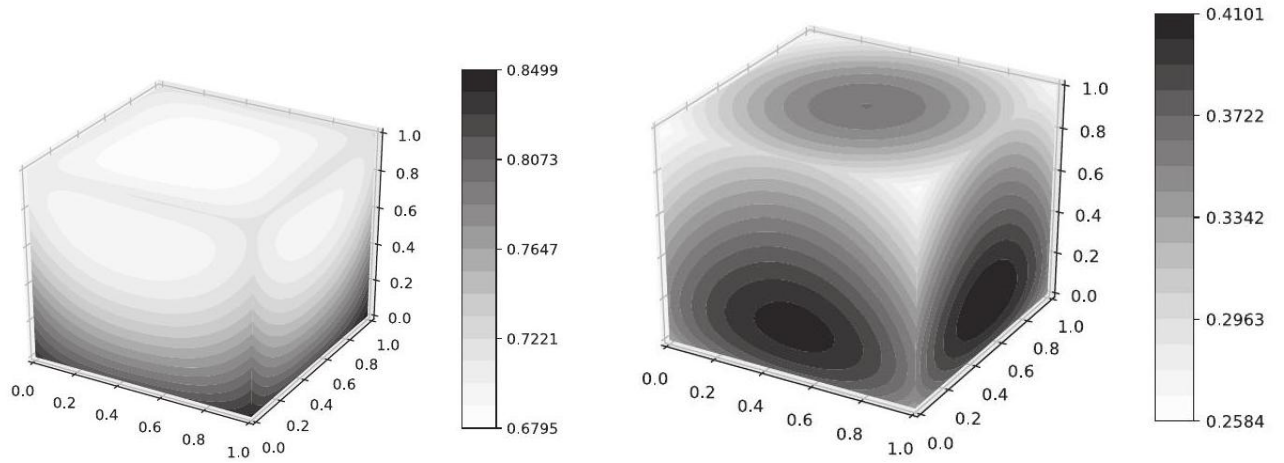
Рисунок 4.13 — Результаты третьего эксперимента

**Пример 4.** Зададим функции  $\theta_b, q_b$  в краевом условии (2.20) следующим образом:

$$\theta_b = 0.1z + 0.3, \quad q_b = \begin{cases} 0.11, & \text{если } z = 1, \\ 0, & \text{если } 0 < z < 1, \\ -0.15, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

В данном примере оптимальное управление  $u$  в качестве тестового не задается. На рисунках 4.14а, 4.14б представлен результат работы алгоритма.

Компоненты состояния, соответствующие найденному управлению, представлены на рисунках 4.15а, 4.15б.



а) Оптимальное управление

б) Изменение функционала

Рисунок 4.14 — Результаты третьего эксперимента

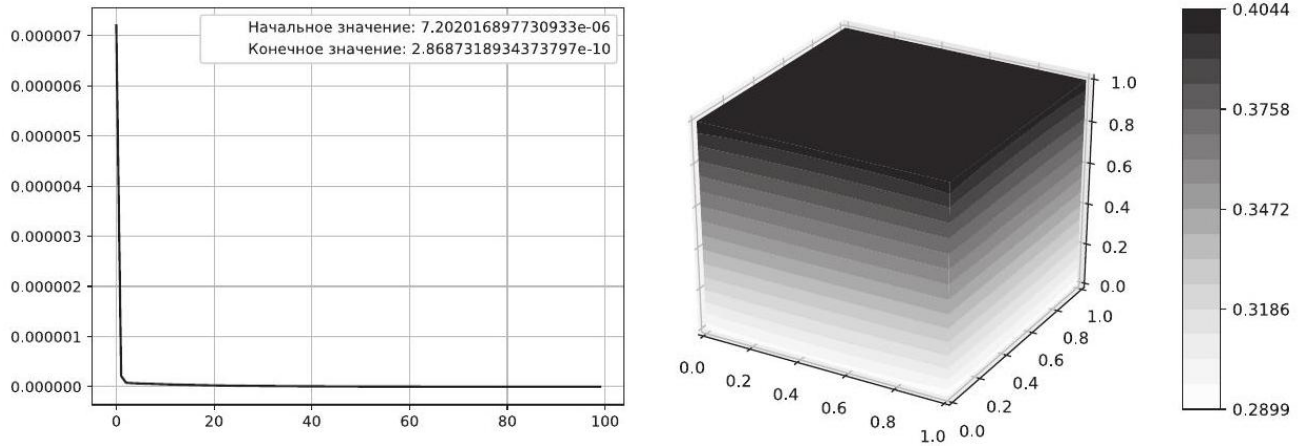
а) Температура  $\theta$ б) Излучение  $\varphi$ 

Рисунок 4.15 — Результаты третьего эксперимента

#### 4.3.2 Задача сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы

Задача оптимального управления, сформулированная в разделе 2.4.1, заключается в отыскании тройки  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf,$$

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$a\partial_n\theta + s\theta = q_b + s\theta_b, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r \text{ на } \Gamma_1,$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad \alpha\partial_n\psi = u \text{ на } \Gamma_2,$$

где  $\lambda, s > 0$  – регуляризирующие параметры.

Представим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления. Пусть  $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$ , где  $\theta(u)$  компонента решения задачи (2.54), (2.56), соответствующая управлению  $u \in U$ .

В соответствии с (2.73) градиент функционала  $\tilde{J}_\lambda(u)$  равен

$$\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2.$$

Здесь  $p_2$  – соответствующая компонента сопряженного состояния из системы (2.73), где  $\hat{\theta} := \theta(u)$ .

Значение параметра  $\varepsilon$  выбирается эмпирически таким образом, чтобы значение  $\varepsilon(\lambda u_k - p_2)$  являлось существенной поправкой для  $u_{k+1}$ . Количество итераций  $N$  выбирается достаточным для выполнения условия  $J_\lambda(\theta_k, u_k) - J_\lambda(\theta_{k+1}, u_{k+1}) < \delta$ , где  $\delta > 0$  определяет точность расчетов.

Примеры, рассмотренные ниже, иллюстрируют работоспособность предложенного алгоритма при малых, что важно, значениях параметра регуляризации  $\lambda \leq 10^{-12}$ . В первом примере выполнены тестовые расчеты для куба. Во втором примере рассмотрен куб с внутренней полостью. Для численного решения прямой задачи с заданным управлением использовался метод Ньютона для линеаризации задачи и ее решения методом конечных элементов. Решение сопряженной системы, которая является линейной при заданной температуре, не вызывает трудностей. Для численного моделирования использовался солвер FEniCS [133], [134].

Исходный код экспериментов представлен в открытом доступе [130].

**Пример 1.** Рассмотрим куб  $\Omega = (x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq l$  с границей  $\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , где

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z), 0 \leq x, y \leq l, z \in [0, l]\}, \quad \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \hat{\Gamma}_1.$$

Будем считать, что  $l = 1$  см,  $a = 0.6[\text{см}^2/\text{с}]$ ,  $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\kappa_a = 1[\text{см}^{-1}]$ ,  $\alpha = 0.3[\text{см}]$ . Указанные параметры соответствуют стеклу [132]. Параметр регуляризации  $\lambda = 10^{-12}$ .

Пусть граничные данные  $q_b$  и  $\theta_b$  в (2.55), (2.56) имеют вид:

$$q_b = 0.5, \quad \theta_b = 0.1 + z/2$$

на все границе, а также начальное управление  $u_0 = 0$ . Используя предложенный алгоритм, решим задачу оптимального управления.

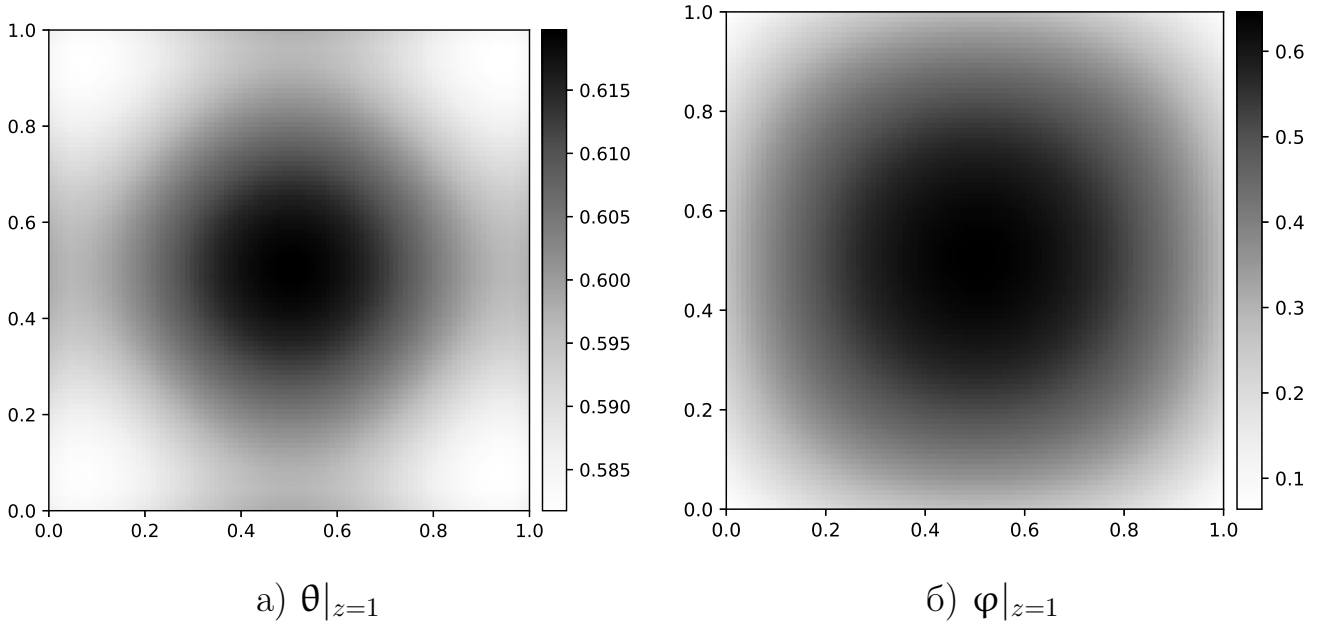


Рисунок 4.16 — Результаты первого эксперимента

На рисунке 4.16а, 4.16б представлены полученные решения  $\theta$  и  $\varphi$ . Начальное значение функционала качества равно 0.025 и через сотню итераций становится равным  $5 \cdot 10^{-5}$ .

**Пример 2.** Рассмотрим двумерный случай: имеется квадрат  $S =$

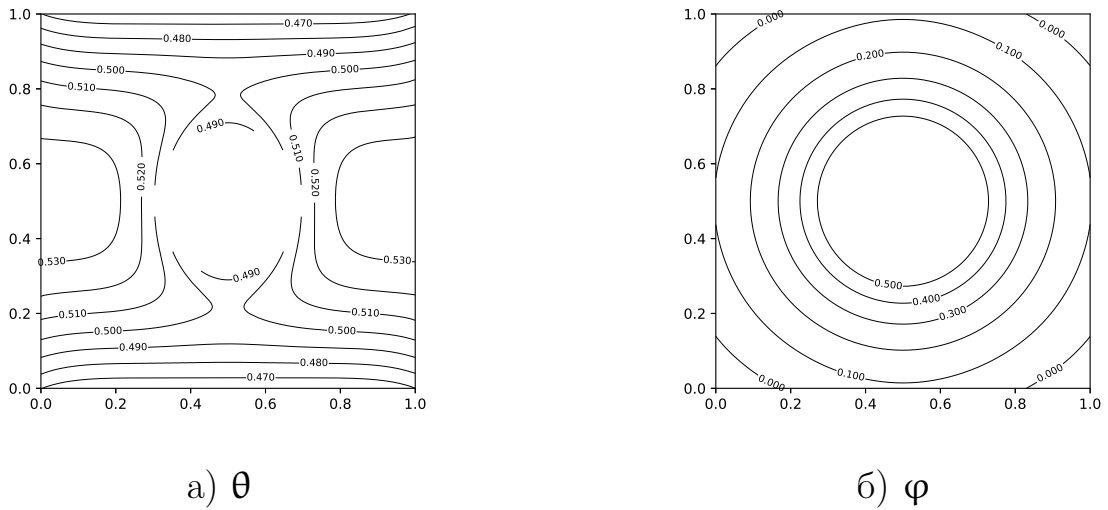


Рисунок 4.17 — Результаты второго эксперимента

$\{(x, y), 0 \leq x, y, z \leq 1 \text{ см.}\}$  с круговой полостью  $R$  с центром  $b_0 = \{0.5, 0.5\}$   $R = \{r, \|r - b_0\| \leq 0.15 \text{ см.}\}$ . Рассматриваемая область  $\Omega = S \setminus R$ .  $\Gamma \equiv \partial\Omega = \partial C \cup \partial B$  при этом  $\Gamma_2 = \partial R, \Gamma_1 = \partial S \setminus \Gamma_2$ . Параметры среды возьмём из примера

1. Граничные данные  $q_b$  и  $\theta_b$  положим равными

$$\theta_b = 0.5,$$

$$q_b = \begin{cases} 0.2, & \text{если } x \in \Gamma_1 \\ -0.2, & \text{если } x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Начальное значение функционала качества 0.045 после тридцати итераций становится равным  $6.2 \cdot 10^{-5}$ . Полученное состояние представлено рисунками 4.17а, 4.17б.

Представленные численные примеры демонстрируют, что предложенный алгоритм успешно справляется с нахождением численного решения задачи (2.54)–(2.56) с данными Коши для температуры на части границы.



## Заключение

В диссертации доказано существование квазирешения задачи нахождения коэффициента отражения участка границы для стационарной модели, по дополнительной информации о температурном поле. Экспериментально поверена устойчивость получаемых решений методом градиентного спуска. Таким образом, получены важные с теоретической точки зрения результаты, которые могут быть полезны при дальнейшем использовании стационарных моделей сложного теплообмена и анализе обратных задач в рамках нестационарных моделей сложного теплообмена. Развитые методы исследования начально-краевых задач могут применяться для изучения различных моделей, описываемых нелинейными уравнениями со сходной структурой.

Разработанный комплекс программ для постановки численных экспериментов показал свою надёжность и может в дальнейшем быть использован как пример для решения подобных задач.

Разработан комплекс программ для проведения вычислительных экспериментов. Для презентации результатов расчётов, помимо самих солверов, был разработан программный комплекс для отрисовки полученных расчётов в трёхмерных областях.

Исследование нестационарных моделей сложного теплообмена и соответствующих им обратных задач является крайне перспективной областью математического моделирования и в то же время достаточно сложной для теоретического анализа и реализации численных решений. В заключении автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Чеботареву А. Ю. за его поддержку, помощь, терпеливость и личный пример, который сделал данную работу возможной.

Особую признательность автор хочет выразить Байдину А. В., Бризицкому Р. В., Артемьевой И. Л., чья поддержка оказалась неоценимой в написании данной работы, Кленину А. С., который стал источником мотивации в написании данного труда, и Алексееву Г. В. за помощь в первых шагах научной деятельности автора.

Автор хотел бы отдельно поблагодарить Месенева В. П. за его неоценимый вклад в становление автора и бесконечную сопричастность к данной работе.

## Словарь терминов

**TeX** : Система компьютерной вёрстки, разработанная американским профессором информатики Дональдом Кнудом

**панграмма** : Короткий текст, использующий все или почти все буквы алфавита

## Список литературы

- [1] М. Н. Оиисик. — *Сложный теплообмен*. — Москва: Мир, 1976.
- [2] Э. М. Sparrow и Р. Д. Sæss. — *Теплообмен излучением*. — Энергия, 1971.
- [3] John R Howell, Robert Siegel и M Pinar Mengüç. — *Thermal radiation heat transfer*. — CRC Press, 2010.
- [4] MF Modest. — *Radiative heat transfer*. — Academic Press, 2013.
- [5] А. А. Амосов. — «Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением». — В: *Дифференциальные уравнения* 41.1 (2005), с. 93—104.
- [6] А. А. Амосов. — «Разрешимость стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в системе серых тел». — В: *Вестник МЭИ* 6 (2009), с. 72—93.
- [7] А. А. Amosov. — «Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency». — В: *Journal of Mathematical Sciences* 165.1 (январь. 2010), с. 1—41. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s10958-010-9778-3>.
- [8] AA Amosov. — «Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency». — В: *J. Math. Sci.* 164.3 (2010), с. 309—344.
- [9] Pierre-Emmanuel Druet. — «Weak solutions to a stationary heat equation with nonlocal radiation boundary condition and right-hand side in  $L_p(p \geq 1)$ ». — В: *Math. Methods Appl. Sci.* 32.2 (2009), с. 135—166.
- [10] Pierre-Emmanuel Druet. — «Weak solutions to a time-dependent heat equation with nonlocal radiation boundary condition and arbitrary p-summable right-hand side». — В: *Appl. Math.* 55.2 (2010), с. 111—149.
- [11] M. Laitinen и Т. Tiihonen. — «Conductive-radiative heat transfer in grey materials». — В: *Quart. Appl. Math.* 59 (2001), с. 737—768.
- [12] M Metzger. — «Existence for a time-dependent heat equation with non-local radiation terms». — В: *Math. Methods Appl. Sci.* 22.13 (1999), с. 1101—1119.

- [13] P. Philip. — «Analysis, optimal control, and simulation of conductive-radiative heat transfer». — В: *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.* 2 (2010), с. 171—204.
- [14] T. Tiihonen. — «A nonlocal problem arising from heat radiation on non-convex surfaces». — В: *European J. Appl. Math.* 8.4 (1997), с. 403—416.
- [15] T. Tiihonen. — «Stefan-Boltzmann radiation on non-convex surfaces». — В: *Math. Methods Appl. Sci.* 20.1 (1997), с. 47—57.
- [16] А. А. Амосов. — «Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения, “Журнал вычислительной математики и математической физики”». — В: *Журнал вычислительной математики и математической физики* 3 (2017), с. 510—535. — URL: <http://dx.doi.org/10.7868/S0044466917030024>.
- [17] А. А. Amosov. — «Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation». — В: *Journal of Mathematical Sciences* 233.6 (2018), с. 777—806.
- [18] А. А. Amosov и N. E. Krymov. — «On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems». — В: *Journal of Mathematical Sciences* 244 (2020), с. 357—377.
- [19] Andrey Amosov. — «Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies». — В: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 44.13 (2021), с. 10703—10733. — eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/mma.7439>. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.7439>.
- [20] Andrey Amosov. — «Nonstationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a Semitransparent Body with Absolutely Black Inclusions». — В: *Mathematics* 9.13 (июнь 2021), с. 1471. — URL: <http://dx.doi.org/10.3390/math9131471>.

- [21] Andrey Amosov. — «Nonstationary radiative–conductive heat transfer problem in an absolutely black body with semitransparent inclusions». — В: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 46.4 (2023), с. 4237–4262. — eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/mma.8753>. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.8753>.
- [22] F Asllanaj и др. — «Existence and uniqueness of a steady state solution of a coupled radiative-conductive heat transfer problem for a non-grey anisotropically and participating medium». — В: *Transport Theory and Statistical Physics* 32.1 (2003), с. 1–35.
- [23] C. T. Kelley. — «Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations». — В: *Transport Theory Statist. Phys.* 25.2 (1996), с. 249–260.
- [24] Mohamed Ghattassi, Jean-Rémi Roche и Denis Schmitt. — «Existence and uniqueness of a transient state for the coupled radiative-conductive heat transfer problem». — В: *Computers & Mathematics with Applications* 75.11 (2018), с. 3918–3928.
- [25] M. M. Porzio и O. López-Pouso. — «Application of accretive operators theory to evolutive combined conduction, convection and radiation». — В: *Rev. Mat. Iberoamericana* 20.1 (2004), с. 257–275.
- [26] M. Thompson, C. Segatto и M. de Vilhena. — «Existence theory for the solution of a stationary nonlinear conductive-radiative heat-transfer problem in three space dimensions». — В: *Transport Theory Statist. Phys.* 33.5-7 (2004), с. 563–576.
- [27] R. Pinnau. — «Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by  $SP_1$  system». — В: *Commun. Math. Sci.* 5.4 (2007), с. 951–969.
- [28] R. Pinnau и O. Tse. — «Optimal control of a simplified natural convection-radiation model». — В: *Commun. Math. Sci.* 11.3 (2013), с. 679–707.
- [29] А. Е. Ковтанюк. — «Стационарные модели переноса излучения и сложного теплообмена». — Дис. ... док. дисс. д-ра физ.-мат. наук, 2014.
- [30] А. Е. Ковтанюк и А. Ю. Чеботарев. — «Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена». — В: *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 56.5 (2016), с. 816–823.

- [31] A. Amosov. — «Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative-Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies». — В: *Russian Journal of Mathematical Physics* 23.3 (2016), с. 309—334.
- [32] А. Ю. Чеботарев, Г. В. Гренкин и А. Е. Ковтанюк. — «Однозначная разрешимость субдифференциальной краевой задачи для уравнений сложного теплообмена». — В: *Дальневост. матем. журн.* 16.2 (2016), с. 229—236.
- [33] A Farina, A Klar, RMM Mattheij и др. — *Mathematical models in the manufacturing of glass*. — Springer, 2011.
- [34] Norbert Siedow. — «Radiative Heat Transfer and Applications for Glass Production Processes II». — В: — *Mathematical Models in the Manufacturing of Glass: C.I.M.E. Summer School, Montecatini Terme, Italy 2008*. — Под ред. Antonio Fasano. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011, — С. 135—171. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-15967-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-15967-1_3).
- [35] А. Е. Kovtanyuk и А. Y. Chebotarev. — «An iterative method for solving a complex heat transfer problem». — В: *Appl. Math. Comput.* 219.17 (2013), с. 9356—9362.
- [36] G. Thömmes, R. Pinnau, M. Seaïd и др. — «Numerical methods and optimal control for glass cooling processes». — В: *Transport Theory Statist. Phys.* 31.4-6 (2002), с. 513—529.
- [37] R. Pinnau и M. Seaïd. — «Simplified  $P_N$  models and natural convection-radiation». — В: *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006*. — Под ред. U. Langer и др. — Springer, 2008, — С. 397—401.
- [38] C. Siewert и J. Thomas. — «A computational method for solving a class of coupled conductive-radiative heat transfer problems». — В: *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 45.5 (1991), с. 273—281.
- [39] T. Gallouët и др. — «Analysis of a fractional-step scheme for the  $P_1$  radiative diffusion model». — В: *Comput. Appl. Math.* 35.1 (2016), с. 135—151.
- [40] MF Modest и др. — «Elliptic formulation of the simplified spherical harmonics method in radiative heat transfer». — В: *Int. J. Heat Mass Tran.* 76 (2014), с. 459—466.
- [41] M Frank, J Lang и M Sch"аfer. — «Adaptive finite element simulation of the time-dependent simplified  $P_N$  equations». — В: *Journal of Scientific Computing* 49.3 (2011), с. 332—350.

- [42] A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin и К.-Н. Hoffmann. — «Numerical simulations of a coupled radiative-conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method». — В: *Int. J. Heat. Mass Transf.* 55.4 (2012), с. 649—654.
- [43] E. W. Larsen, G. Thömmes, A. Klar и др. — «Simplified  $P_N$  approximations to the equations of radiative heat transfer and applications». — В: *J. Comput. Phys.* 183.2 (2002), с. 652—675.
- [44] М. Frank и др. — «Time-dependent simplified  $P_N$  approximation to the equations of radiative transfer». — В: *J. Comput. Phys.* 226.2 (2007), с. 2289—2305.
- [45] M. Addam, A. Bouhamidi и M. Seaid. — «A frequency-domain approach for the  $P_1$  approximation of time-dependent radiative transfer». — В: *J. Sci. Comput.* 62.3 (2015), с. 623—651.
- [46] E Olbrant и др. — «Asymptotic derivation and numerical investigation of time-dependent simplified  $P_N$  equations». — В: *Journal of Computational Physics* 238 (2013), с. 315—336.
- [47] М Frank, А Klar и R Pinnau. — «Optimal control of glass cooling using simplified  $P_N$  theory». — В: *Transport Theory and Statistical Physics* 39.2-4 (2010), с. 282—311.
- [48] А.Н. Тихонов и А.А. Самарский. — *Уравнения математической физики*. — Москва: Наука, 1972, — С. 736.
- [49] Олег Михайлович Алифанов. — *Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена*. — 2009.
- [50] James V Beck, etc., and C R St. Clair. — *Inverse heat conduction*. — Nashville, TN: John Wiley & Sons, Nov. 1985.
- [51] С.Г. Пятков и В.В. Ротко. — «Обратные задачи для некоторых квазилинейных параболических систем с точечными условиями переопределения». — В: *Матем. тр.* 22.1 (2019), с. 178—204.
- [52] В.А. Белоногов и С.Г. Пятков. — «О некоторых классах обратных задач определения коэффициента теплообмена в слоистых средах». — В: *Сибирский математический журнал* 63.2 (2022), с. 252—271.
- [53] С.Г. Пятков и В.А. Баранчук. — «Определение коэффициента теплопередачи в математических моделях тепломассопереноса». — В: *Математические заметки* 113.1 (2023), с. 90—108.

- [54] T End. — «On analytical results for the optimal control of the quasi-stationary radiative heat transfer system». — B: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 11.1 (2011), с. 793—794.
- [55] T End. — «On optimization of the full radiative heat transfer system». — B: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 10.1 (2010), с. 533—534.
- [56] S. S. Pereverzyev, R. Pinnau и N. Siedow. — «Initial temperature reconstruction for nonlinear heat equation: application to a coupled radiative-conductive heat transfer problem». — B: *Inverse Probl. Sci. Eng.* 16.1 (2008), с. 55—67.
- [57] K Birgelis и др. — «Optimal control in models with conductive-radiative heat transfer». — B: *Mathematical Modelling and Analysis* 8.1 (2003), с. 1—12.
- [58] C Meyer, P Philip и F Tröltzsch. — «Optimal control of a semilinear PDE with nonlocal radiation interface conditions». — B: *SIAM J. Control Optim.* 45.2 (2006), с. 699—721.
- [59] C Meyer и I Yousept. — «State-constrained optimal control of semilinear elliptic equations with nonlocal radiation interface conditions». — B: *SIAM J. Control Optim.* 48.2 (2009), с. 734—755.
- [60] A Belmiloudi и F Mah'e. — «On nonlinear inverse problems of heat transfer with radiation boundary conditions: application to dehydration of gypsum plasterboards exposed to fire». — B: *Advances in Numerical Analysis* 2014 (2014).
- [61] Dominik Clever и Jens Lang. — «Optimal control of radiative heat transfer in glass cooling with restrictions on the temperature gradient». — B: *Optimal Control Applications and Methods* 33.2 (2012), с. 157—175.
- [62] Dominik Clever, Jens Lang и Dominik Schröder. — «Model hierarchy-based optimal control of radiative heat transfer». — B: *International Journal of Computational Science and Engineering* 9.5/6 (2014), с. 509—525.
- [63] Jochen Lang. — «Adaptive computation for boundary control of radiative heat transfer in glass». — B: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 183.2 (2005), с. 312—326.
- [64] R. Pinnau и A. Schulze. — «Newton's method for optimal temperature-tracking of glass cooling processes». — B: *Inverse Probl. Sci. Eng.* 15.4 (2007), с. 303—323.



- [65] R. Pinnau и G. Thömmes. — «Optimal boundary control of glass cooling processes». — В: *Math. Methods Appl. Sci.* 27.11 (2004), с. 1261—1281.
- [66] П. Р. Месенев и А. Ю. Чеботарев. — «Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена». — В: *Дальневост. матем. журн.* 18.1 (2018), с. 75—84.
- [67] A A Astrakhantseva, A Y Chebotarev и A E Kovtanyuk. — «Design of the boundary reflection properties to minimize the energy flows». — В: *2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium-Spring (PIERS)*. — 2017, — С. 1332—1336.
- [68] А. Yu. Chebotarev и др. — «Strong optimal controls in a steady-state problem of complex heat transfer». — В: *IFIP Conference on System Modeling and Optimization*. — Springer, 2015, — С. 209—219.
- [69] А. Е. Kovtanyuk и др. — «Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer». — В: *J. Math. Anal. Appl.* 412.1 (2014), с. 520—528.
- [70] A. Klar, J. Lang и M. Seaïd. — «Adaptive solutions of  $SP_N$ -approximations to radiative heat transfer in glass». — В: *Int. J. Therm. Sci.* 44.11 (2005), с. 1013—1023.
- [71] M. Seaïd. — «Multigrid Newton-Krylov method for radiation in diffusive semitransparent media». — В: *J. Comput. Appl. Math.* 203.2 (2007), с. 498—515.
- [72] M Frank, M Seaïd, A Klar и др. — «A comparison of approximate models for radiation in gas turbines». — В: *Prog. Comput. Fluid Dyn.* 4.3-5 (2004), с. 191—197.
- [73] M Seaïd, M Frank, A Klar и др. — «Efficient numerical methods for radiation in gas turbines». — В: *J. Comput. Appl. Math.* 170.1 (2004), с. 217—239.
- [74] M. Seaïd, A. Klar и R. Pinnau. — «Numerical solvers for radiation and conduction in high temperature gas flows». — В: *Flow, Turbulence and Combustion* 75.1-4 (2005), с. 173—190.
- [75] R. Backofen и др. — « $SP_N$ -approximations of internal radiation in crystal growth of optical materials». — В: *J. Cryst. Growth* 266.1-3 (2004), с. 264—270.

- [76] Л. А. Домбровский и В. М. Тимченко. — «Лазерная гипертермия поверхностных опухолей: модели переноса излучения, сложного теплообмена и деградации биологических тканей». — В: *Тепловые процессы в технике* 7.1 (2015), с. 24—36.
- [77] O. Tse, R. Pinnau и N. Siedow. — «Identification of temperature-dependent parameters in laser-interstitial thermo therapy». — В: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 22.9 (2012), с. 1250019.
- [78] F. Hübner, C. Leithäuser, B. Bazrafshan и др. — «Validation of a mathematical model for laser-induced thermotherapy in liver tissue». — В: *Lasers Med. Sci.* 32.6 (2017), с. 1399—1409.
- [79] R. R. van den Bos и др. — «Endovenous laser ablation-induced complications: Review of the literature and new cases». — В: *Dermatol. Surg.* 35.8 (2009), с. 1206—1214.
- [80] Peter WM van Ruijven и др. — «Optical-thermal mathematical model for endovenous laser ablation of varicose veins». — В: *Lasers in medical science* 29 (2014), с. 431—439.
- [81] A. A. Poluektova и др. — «Some controversies in endovenous laser ablation of varicose veins addressed by optical-thermal mathematical modeling». — В: *Lasers Med. Sci.* 29 (2014), с. 441—452.
- [82] W. S. J. Malskat и др. — «Endovenous laser ablation (EVLA): A review of mechanisms, modeling outcomes, and issues for debate». — В: *Lasers Med. Sci.* 29 (2014), с. 393—403.
- [83] S. Mordon, B. Wassmer и J. Zemmouri. — «Mathematical modeling of endovenous laser treatment (ELT)». — В: *BioMed. Eng. OnLine.* 5 (2006), с. 26.
- [84] A. E. Kovtanyuk и др. — «Optimal control of endovenous laser ablation». — В: *Opt. Spectrosc.* 128.9 (2020), с. 1508—1516.
- [85] A. Kovtanyuk, A. Chebotarev и A. Astrakhantseva. — «Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation». — В: *J. Inv. Ill-Posed Probl.* 29.3 (2021), с. 467—476.
- [86] P. R. Mesenev. — «Optimization method for solving the inverse problem of complex heat transfer». — В: *Дальневост. матем. журн.* 23.1 (2023), с. 81—84. — URL: <http://mi.mathnet.ru/dvmg508>.

- [87] A. Yu. Chebotarev и др. — «Penalty method to solve an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation». — В: *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 22 (2022), с. 158—163.
- [88] A.Yu. Chebotarev и P.R. Mesenev. — «An algorithm for solving the boundary value problem of radiation heat transfer without boundary conditions for radiation intensity». — В: *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (июнь 2020), с. 114—122. — URL: <http://dx.doi.org/10.47910/FEMJ202012>.
- [89] P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev. — «A boundary inverse problem for complex heat transfer equations». — В: *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 18.1 (2018), с. 75—84.
- [90] Alexander Chebotarev, Andrey Kovtanyuk, and Pavel Mesenev. — “Optimization algorithm for radiative-conductive heat transfer model with boundary conditions of Cauchy type”. — In: *MMSC 2020 - Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems - Dedicated to the Memory of Nikolai Botkin*. — Vol. 2783. — Munich, Germany: CEUR WORKSHOP PROCEEDINGS, Nov. 2020, — P. 29—40.
- [91] A Yu Chebotarev и др. — «Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation». — В: *Journal of Physics: Conference Series* 2514.1 (май 2023), с. 012006. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2514/1/012006>.
- [92] Alexander Chebotarev и др. — «Optimal control with phase constraints for a quasilinear endovenous laser ablation model». — В: *2021 Days on Diffraction (DD)*. — IEEE, май 2021, — С. 19—24. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/DD52349.2021.9598691>.
- [93] Alexander Chebotarev, Pavel Mesenev и Andrey Kovtanyuk. — «Inverse problem with unknown sources for a quasi-linear complex heat transfer model». — В: *2023 Days on Diffraction (DD)*. — IEEE, июнь 2023, — С. 31—35. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/DD58728.2023.10325734>.
- [94] П. Р. Месенев и А. Ю. Чеботарев. — «Задача сложного теплообмена с условиями типа Коши на части границы». — В: *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 63.5 (2023), с. 856—863. — URL: <http://mi.mathnet.ru/zvmmf11560>.

- [95] P R Mesenev and A Yu Chebotarev. — “Analysis of an optimization method for solving the problem of complex heat transfer with Cauchy boundary conditions”. — In: *Comput. Math. Math. Phys.* 62.1 (Jan. 2022), p. 33—41.
- [96] П. Р. Месенев. — «Солвер обратной задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши». — Дальневосточный федеральный университет. — 25 сент. 2023.
- [97] П. П. Петров. — «foobar». — НИИ ГДААДАВБА. — 1 янв. 2020.
- [98] П. П. Петров. — «foobar». — НИИ ГДААДАВБА. — 1 янв. 2020.
- [99] А. Е. Kovtanyuk и др. — «The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem». — В: *J. Math. Anal. Appl.* 409.2 (2014), с. 808—815.
- [100] А. Мазо. — *Основы теории и методы расчета теплопередачи*. — Янв. 2013.
- [101] R. E. Marshak. — «Note on the spherical harmonic method as applied to the Milne problem for a sphere». — В: *Phys. Rev.* 71.7 (1947), с. 443—446.
- [102] А. Е. Ковтанюк и А. Ю. Чеботарев. — «Стационарная задача сложного теплообмена». — В: *Журнал вычислительной математики и математической физики* 54.4 (2014), с. 711—719.
- [103] E. Zeidler. — *Nonlinear functional analysis and its applications. I: Fixed-point theorems*. — Springer, 1986.
- [104] E. Zeidler. — *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B: Nonlinear monotone operators*. — Springer, 1990.
- [105] E. Zeidler. — *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A: Linear monotone operators*. — Springer, 1990.
- [106] F. Tröltzsch. — *Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications*. — AMS, 2010.
- [107] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. — *Краткий курс функционального анализа: Учеб. пособие*. — Москва: Высш. школа, 1982.
- [108] J. Simon. — «Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ ». — В: *Ann. Mat. Pura Appl.* 146.1 (1986), с. 65—96.
- [109] А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин. — *Элементы теории функций и функционального анализа*. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [110] Ж.-П. Обэн. — *Приближенное решение эллиптических краевых задач*. — Москва: Мир, 1977.

- [111] W. P. Ziemer. — *Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation*. — Springer, 1989.
- [112] Д. Киндерлерер и Г. Стампаккъя. — *Введение в вариационные неравенства и их приложения*. — Москва: Мир, 1983.
- [113] Vivette Girault и Pierre-Arnaud Raviart. — *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*. — Springer-Verlag, 1979.
- [114] Hans Berninger. — «Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators». — В: *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII*. — Springer. 2009, — С. 169—176.
- [115] Pierre Grisvard. — *Elliptic problems in nonsmooth domains*. — Pitman, 1985.
- [116] Х. Гаевский, К. Греггер и К. Захариас. — *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*. — Москва: Мир, 1978.
- [117] А. Е. Kovtanyuk и др. — «Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model». — В: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 20.3 (2015), с. 776—784.
- [118] А. Yu. Chebotarev и R. Pinnau. — «An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer». — В: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 472.1 (2019), с. 314—327.
- [119] А. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin и А. Е. Kovtanyuk. — «Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer». — В: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 51.6 (2017), с. 2511—2519.
- [120] А. Е. Kovtanyuk и др. — «Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model». — В: *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 20.3 (2015), с. 776—784.
- [121] А. Д. Ioffe и V. М. Tikhomirov. — *Theory of Extremal Problems*. — Amsterdam: North-Holland, 1979.
- [122] А. Y. Chebotarev, А. Е. Kovtanyuk и N. D. Botkin. — «Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type». — В: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 75 (2019), с. 262—269.

- [123] А.Г. Колобов, Т.В. Пак и А.Ю. Чеботарев. — «Стационарная задача радиационного теплообмена с граничными условиями типа Коши». — В: *Журнал вычислительной математики и математической физики* 59.7 (2019), с. 1258—1263.
- [124] S. Fučík и A. Kufner. — *Nonlinear differential equations*. — Amsterdam–Oxford–New York: Elsevier, 1980.
- [125] А. В. Фурсиков. — *Т. 5: Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения: учебное пособие для студентов мат. специальностей вузов*. — Новосибирск: Научная книга, 1999, — С. 350.
- [126] А Kovtanyuk и др. — «Mathematical and computer modeling of endovenous laser treatment». — В: *CEUR Workshop Proceedings*. — Т. 2837. — 2021, — С. 13—23.
- [127] А Astrakhantseva и А Kovtanyuk. — «Numerical modeling the radiativeconvective-conductive heat transfer». — В: *2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA)*. — 2014, — С. 106—107.
- [128] Э. М. Мухамадиев и В. Я. Стеценко. — «Достаточные условия сходимости метода Ньютона-Канторовича при решении краевых задач для квазилинейных уравнений эллиптического типа». — В: *Сиб. матем. журн.* 12.3 (1971), с. 576—582.
- [129] N. L. Schryer. — «Newton's method for convex nonlinear elliptic boundary value problems». — В: *Numer. Math.* 17.4 (1971), с. 284—300.
- [130] *Mesenev's GitHub Repository*. — [https://github.com/mesenev/articles\\_src](https://github.com/mesenev/articles_src).
- [131] John Duchi и др. — «Efficient projections onto the l1-ball for learning in high dimensions». — В: *Proceedings of the 25th international conference on Machine learning*. — 2011, — С. 272—279.
- [132] G. V. Grenkin, A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk и др. — «Boundary optimal control problem of complex heat transfer model». — В: *J. Math. Anal. Appl.* 433.2 (2016), с. 1243—1260.
- [133] M. S. Alnaes и др. — «The FEniCS Project Version 1.5». — В: *Archive of Numerical Software* 3 (2015).
- [134] A. Logg и G. N. Wells. — «DOLFIN: Automated Finite Element Computing». — В: *ACM Transactions on Mathematical Software* 37 (2010).

- [135] F. Hecht. — «New development in freefem++». — B: *Journal of Numerical Mathematics* 20.3-4 (2012). — URL: <https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013>.

## Список рисунков

4.1	Решение граничной задачи в двумерной области . . . . .	89
4.2	Решение граничной задачи в трёхмерной области . . . . .	90
4.3	Значение функционала качества . . . . .	95
4.4	Тестовая функция $u$ , начальная $u_0$ , найденная функция $u_{end}$ . . . . .	95
4.5	сравнение полученных температурных полей . . . . .	97
4.6	Область вычисления . . . . .	98
4.7	Поведение температуры в точке (1.5,10) при мощности лазера 10 Вт и следующих длинах волн: 810 нм (черный), 1064 нм (красный), 1470 нм (зеленый) и 1950 нм (синий). . . . .	100
4.8	Поведение температуры в точке (1.5,10) для следующих длин волн и мощностей лазера: 810 нм, $P = 10$ Вт (черный); 1064 нм, $P = 11$ W (красный); 1470 нм, $P = 7,5$ W (зеленый); 1950 нм, $P = 6$ W (синий). . . . .	101
4.9	Поведение температуры в точках (1.5,10) (твердое тело), (2.5,10) (пунктирной линией) и (3,5,10) (пунктирной линией). Длина волны равна 810 нм, $(P_\phi, P_\theta) = (7 \text{ W}, 3 \text{ W})$ . . . . .	102
4.10	Температурные профили: желаемая температура (черный), 1-е (зеленое), 2-е (синее) и 3-е (красное) приближения. . . . .	104
4.11	Значение функционала качества . . . . .	106
4.12	Результаты второго эксперимента . . . . .	107
4.13	Результаты третьего эксперимента . . . . .	108
4.14	Результаты третьего эксперимента . . . . .	109
4.15	Результаты третьего эксперимента . . . . .	109
4.16	Результаты первого эксперимента . . . . .	111
4.17	Результаты второго эксперимента . . . . .	111



**Список таблиц**

## Приложение А

### Приложения

Листинг А.1: Решение начально-краевой задачи с использованием солвера FEniCS

```

from dolfin import *

from utilities import print_2d_isolines, print_2d
from dolfin import dx, ds
5
parameters["form_compiler"]["optimize"] = True
parameters["form_compiler"]["cpp_optimize"] = True
set_log_active(True)

10 omega2d = UnitSquareMesh(50, 50)
finite_element = FiniteElement("CG", omega2d.ufl_cell(), 1)
square = FunctionSpace(omega2d, finite_element)
state_space = FunctionSpace(omega2d, finite_element *
    finite_element)
simple_space = FunctionSpace(omega2d, finite_element)
15 # boundary_vector_space = VectorFunctionSpace(omega_b, 'CG', 1)
vector_space = VectorFunctionSpace(omega2d, 'CG', 1)
# boundary_simple_space = FunctionSpace(omega_b, 'CG', 1)

_lambda = 0.1 ** 2
20 v, h = TestFunctions(state_space)
epsilon = 0.1 ** 10

a = 0.6
alpha = 0.333
25 ka = 1
b = 0.025
beta = 1
state = Function(state_space)
theta, phi = split(state)
30
theta_b = project(Expression('0.2 + x[1] / 2', degree=2),
    simple_space)
theta_b_4 = project(Expression('pow(t, 4)', degree=2, t=theta_b
    ), simple_space)

```

```

gamma = Expression("0.8 * cos(x[1]*3.14/2) + 0.5", degree=2)

35 def solve_boundary():
    theta_equation = \
        a * inner(grad(theta), grad(v)) * dx \
        + a * theta * v * ds + \
40     + b * ka * inner(theta ** 4 - phi, v) * dx
    theta_src = beta * theta_b_4 * v * ds
    phi_equation = \
        alpha * inner(grad(phi), grad(h)) * dx \
        + alpha * phi * h * ds \
45     + ka * inner(phi - theta ** 4, h) * dx
    phi_src = gamma * theta_b_4 * h * ds
    solve(
        theta_equation + phi_equation - theta_src - phi_src ==
        0, state,
        form_compiler_parameters={"optimize": True, '
quadrature_degree': 3},
50     solver_parameters={"newton_solver": {"linear_solver": "
mumps"}}
    )
    return state.split()

55 theta_ans, phi_ans = solve_boundary()
# to_print = function2d_dumper(
#     lambda p: abs(theta_n_diff(Point(p[0], p[1], 1))),
#     folder='scratch', name=target
# )
60 print_2d_isolines(
    theta_ans, name='theta_iso', folder='scratch',
    # table=True,
    # levels=[0.001, 0.002, 0.003, 0.004, 0.005, 0.006, 0.007,
    0.008, 0.01, 0.05, 0.1]
)
65 print_2d(theta_ans, name='theta', folder='scratch',)
print_2d(phi_ans, name='phi', folder='scratch',)
print_2d_isolines(phi_ans, name='phi_iso', folder='scratch', )

```