

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»



На правах рукописи

Месенёв Павел Ростиславович

Обратные задачи сложного теплообмена

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Чеботарев Александр Юрьевич

Владивосток — 2022

Оглавление

Стр.

Введение	5
Глава 1. Модели сложного теплообмена	12
1.1 Уравнение переноса теплового излучения	12
1.2 Диффузионное P_1 приближение	18
Глава 2. Теоретический анализ проблем абляции	26
2.1 Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена	27
2.1.1 Постановка обратной задачи	27
2.1.2 Формализация задачи нахождения квазирешения	28
2.1.3 Анализ экстремальной задачи	29
2.2 Обратная задача сложного теплообмена с неизвестным	32
2.2.1 Постановка обратной задачи	32
2.2.2 Формализация задачи управления	33
2.2.3 Разрешимость задачи (CP)	35
2.2.4 Условия оптимальности	36
2.3 граничная обратная задача с незадаанным краевым условием для интенсивности излучения	38
2.3.1 Постановка обратной задачи	38
2.3.2 Разрешимость задачи оптимального управления	39
2.3.3 Условия оптимальности первого порядка	42
Глава 3. Теоретический анализ обратных задач сложного теплообмена	44
3.1 Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена	45
3.1.1 Введение	45
3.1.2 Формализация задачи оптимального управления	47
3.1.3 Предварительные результаты	48
3.1.4 Метод штрафов	49
3.2 АНАЛИЗ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА КОШИ	51
3.2.1 Введение	51

	Стр.
3.2.2 Формализация задачи оптимального управления	53
3.2.3 Problem (P)	55
3.2.4 Предварительные результаты	55
3.2.5 Задача штрафов	57
3.2.6 Реализация численного алгоритма	59
3.3 ГРАНИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА	62
3.3.1 Inverse problem	62
3.3.2 Solvability of the control problem	63
3.3.3 Optimality conditions	64
3.3.4 Аппроксимация обратной задачи	65
Глава 4. Численные методы и комплексы программ	66
4.1 Первая статья	67
4.2 Вторая статья	70
4.2.1 Аппроксимация задачи с условиями типа коши	70
4.2.2 Численные эксперименты	71
4.3 Вторая статья	75
4.3.1 Аппроксимация решения без заданного условия излучения на границе	75
4.3.2 Численные эксперименты	76
Заключение	80
Список сокращений и условных обозначений	81
Словарь терминов	83
Список рисунков	84
Список таблиц	85
Приложение А. Примеры вставки листингов программного кода	86

Приложение Б. Очень длинное название второго приложения, в котором продемонстрирована работа с длинными таблицами	92
Б.1 Подраздел приложения	92
Б.2 Ещё один подраздел приложения	94
Б.3 Использование длинных таблиц с окружением <i>longtabu</i>	98
Б.4 Форматирование внутри таблиц	101
Б.5 Стандартные префиксы ссылок	103
Б.6 Очередной подраздел приложения	104
Б.7 И ещё один подраздел приложения	104
Приложение В. Чертёж детали	105

Введение

Под сложным теплообменом понимают процесс распространения тепла, в котором участвуют несколько видов переноса тепла – радиационный, кондуктивный, конвективный. При чём в данном процессе радиационный перенос тепла занимает существенную роль при высоких температурах. С математической точки зрения процесс сложного теплообмена моделируется системой из дифференциального уравнения теплопроводности, а также интегро-дифференциального уравнения переноса излучения.

Решение уравнения переноса излучения является трудно вычислимой задачей из-за того, что помимо временной и пространственной переменной также задействовано векторное поле, задающее направление излучения. В связи с этим для уравнения переноса излучения применяют ряд аппроксимаций, в том числе диффузионное P_1 приближение, которое использует усреднённая интенсивность излучения по всем направлениям. Широко используемое P_1 приближение является частным случаем метода сферических гармоник (P_N -приближения) и упрощенного метода сферических гармоник (SP_N -приближения, SP_1 эквивалентно P_1).

В классических прямых задачах сложного теплообмена задаются параметры системы, и по ним вычисляется состояние системы – температурное поле и интенсивность теплового излучения. Обратные задачи сложного теплообмена состоят в разыскании исходных параметров системы по некоторым известным сведениям о температурном поле или интенсивности излучения. Например, обратные задачи, связанные с теплопроводностью, обычно связаны с оценкой неизвестного граничного теплового потока при известной температуре.

Отметим трудности, возникающие при решении обратных задач сложного теплообмена.

Эти задачи математически классифицируются как некорректные в общем смысле, из-за высокой неустойчивости решений. Как следствие, обратные задачи теплообмена долгое время не представляли физического интереса. Появление в 50-х годах эвристических методов и в 60–70-е годы методов оптимизации позволило исправить проблемы некорректности исследуемых задач. В основе таких методов лежит идея замены исходной задачи на задачу оптимизации с использованием регуляризации, которая и позволяет преодолеть проблемы

нестабильности решений. Приведём некоторые пионерские работы А.Н. Тихонова, О.М. Олифанова, J.V.Beck и других, нашедших различные способы преодоления неустойчивостей обратных задач.

Диссертация посвящена теоретическому анализу обратных стационарных задач сложного теплообмена в трёхмерной области в рамках P_1 -приближения уравнения переноса излучения. Теоретические результаты проиллюстрированы численными примерами.

Исследование математических моделей радиационного теплопереноса учитывающих одновременно вклад эффектов теплопроводности и излучения даёт теоретическую основу для инженерных решений в различных областях, таких как производство стекла [glass], лазерная интерстициальная термотерапия [therapy], и другие. Главной особенностью данных процессов является существенное влияние излучения на теплообмен при высоких температурах.

Степень разработанности темы исследования.

Приведём работы [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13], которые посвящены анализу разрешимости моделей сложного теплообмена между телами, разделенными прозрачной средой. Эти модели включают уравнение теплопроводности с нелинейным нелокальным краевым условием, моделирующим тепловое излучение границы области и теплообмен излучением между частями границы, в [4, 6, 7, 9, 11, 12, 13] рассмотрены стационарные модели, в [3, 5, 8, 9, 10, 11, 12] — нестационарные.

В следующих работах исследована разрешимость моделей сложного теплообмена в полупрозрачной среде, в которых для моделирования радиационного теплообмена используется полное уравнение переноса излучения. В [14, 15] доказана однозначная разрешимость одномерных стационарных задач радиационно-кондуктивного теплообмена, в [16, 17, 18] доказана однозначная разрешимость трехмерных задач: в [18] исследована стационарная модель, в [17] — нестационарная, в [16] — квазистационарная. Под квазистационарными моделями сложного теплообмена понимаются модели, включающие нестационарное уравнение теплопроводности и стационарное уравнение переноса излучения.

Отметим работы [19, 20, 21, 22, 23, 24], посвященные разработке численных методов для указанных моделей. В работах А.А. Амосова [25, 26, 27, 28] доказана однозначная разрешимость стационарных и квазистационарных моделей сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел, где для описания распространения излучения используется уравнение переноса излучения

с краевыми условиями, моделирующими отражение и преломление излучения на границах тел, также учитывается зависимость интенсивности излучения и оптических свойств тел от частоты излучения: в [25, 26] ставились условия диффузного отражения и преломления излучения, в [27, 28] — условия отражения и преломления излучения по законам Френеля.

Отметим следующие работы, посвященные решению обратных задач в рамках моделей сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения. В [29] проведен теоретический анализ задачи оптимального управления источниками тепла в рамках квазистационарной модели сложного теплообмена, включающей полное уравнение переноса излучения: доказана однозначная разрешимость прямой задачи, доказана разрешимость задачи управления, и получены условия оптимальности. В [30] разработан численный алгоритм решения задачи оптимального управления источниками тепла и излучения в рамках стационарной модели сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения. Работа [31] посвящена теоретическому и численному анализу обратной задачи восстановления начального распределения температуры по известной зависимости температуры на границе области от времени в рамках квазистационарной модели сложного теплообмена.

Отметим также работы [32, 33, 34, 11], посвященные анализу задач оптимального управления для стационарных моделей сложного теплообмена в прозрачной среде, включающих уравнение теплопроводности с нелинейным нелокальным краевым условием, моделирующим тепловое излучение границы области и теплообмен излучением между частями границы, и работу [35], в которой построен численный алгоритм решения задачи оптимального управления граничными коэффициентами в одномерной нестационарной модели. Которая включает уравнение теплопроводности с нелинейным краевым условием, описывающее тепловое излучение границ. Работы [36, 37, 38, 39] посвящены численному моделированию в рамках диффузионных моделей сложного теплообмена. В [40] исследована схема метода конечных объемов для решения квазистационарной системы уравнений сложного теплообмена на основе P_1 -приближения уравнения переноса излучения.

Сравнение P_1 -приближения с другими методами аппроксимации уравнения переноса излучения проводилось в [41, 42, 24, 37, 43, 44]. Вывод и численный анализ нестационарного P_1 -приближения выполнен в [45, 46, 47, 42, 44]. В работах R. Pinnau, O. Tse [48, 49] проведен теоретический анализ квазистацио-

нарных моделей сложного теплообмена на основе SP_1 и SP_3 -приближений. Эти модели включают уравнение теплопроводности, стационарное SP_N -приближение, а также в [49] уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска.

В [48] доказаны существование, единственность и ограниченность решения задачи сложного теплообмена на основе P_1 -приближения без источников тепла и излучения, в [49] доказана однозначная разрешимость задачи свободной конвекции с радиационным теплообменом на основе SP_3 -приближения в двумерной области, в этой модели присутствуют источники тепла с ограниченной плотностью. В работах А.Е. Ковтанюка, А.Ю.Чеботарева [50, 51, 52] доказана однозначная разрешимость краевых задач для стационарных моделей сложного теплообмена на основе P_1 -приближения, доказана сходимость метода простой итерации нахождения решения.

Отметим, что численная реализация данного метода затруднена, поскольку на каждой итерации необходимо решить нелинейное эллиптическое уравнение. В [53] доказана однозначная разрешимость сходимой субдифференциальной краевой задачи с многозначной зависимостью коэффициента излучения границы от интенсивности излучения. В [54, 55] получены результаты о существовании и единственности решений обратных задач для стационарной диффузионной модели сложного теплообмена, которые заключаются в нахождении неизвестной плотности источников тепла в виде линейной комбинации заданных функционалов при известных значениях этих функционалов на решении краевой задачи. Работы R. Pinnau, O. Tse [48, 49] посвящены теоретическому анализу задач оптимального управления температурой на границе области в рамках квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе SP_N -приближений: доказана разрешимость задач управления, найдены необходимые условия оптимальности. В [56, 57, 47, 58, 59, 60] разработаны численные методы решения задач оптимального управления граничной температурой для квазистационарной модели сложного теплообмена на основе P_1 -приближения, при этом в [56, 57, 58] использовалась модель с учетом зависимости коэффициента поглощения от частоты излучения: в [47, 59] минимизировалось отклонение поля температуры от заданного и для решения задачи оптимизации применялся метод Ньютона, в [58] для решения задачи минимизации отклонения поля температуры от заданного применялся метод проекции градиента, в [56, 60] минимизировалась норма градиента температуры и для решения задачи оптимизации применялся метод проекции градиента. В [57] решалась задача

минимизации отклонения поля температуры от заданного на основе серии из трех моделей, аппроксимирующих уравнение переноса излучения с разной точностью, использовался оптимизационный метод второго порядка

В [61] проведен теоретический анализ задачи оптимального управления температурой на границе области в рамках стационарной диффузионной модели сложного теплообмена, для численного решения задачи управления применен метод проекции градиента. В работах А.Е.Ковтанюка, А.Ю.Чеботарева и др. [50, 62, 63, 64] исследованы задачи оптимального управления коэффициентом излучения границы области в рамках стационарной модели сложного теплообмена на основе P_1 -приближения. В [50, 64] выведены необходимые условия оптимальности для задачи максимизации выходящей из среды энергии, доказана разрешимость задачи управления и получены достаточные условия регулярности системы оптимальности, которые выполняются при достаточно большой скорости движения среды и малых размерах области. В [62, 63] получены достаточные условия оптимальности для задач максимизации и минимизации полей температуры и излучения во всей области теплообмена, доказана сходимость метода простой итерации нахождения оптимального управления, эти исследования были выполнены позже аналогичной работы автора для нестационарной модели.

Таким образом, ряд важных задач, относящихся к моделированию и оптимизации сложного теплообмена на основе диффузионного приближения, оставался нерешенным: исследование разрешимости нестационарной задачи сложного теплообмена с источниками тепла и излучения и нестационарной задачи свободной конвекции с радиационным теплообменом в трехмерной области, исследование устойчивости по Ляпунову стационарных решений, вывод диффузионной модели сложного теплообмена в многослойной среде, анализ сходимости метода Ньютона для уравнений сложного теплообмена, разработка численных методов решения задач оптимального управления коэффициентом излучения границы области в рамках нестационарных моделей сложного теплообмена, доказательство регулярности условий оптимальности для задачи оптимального управления коэффициентом излучения границы в рамках стационарной модели.

Цели и задачи диссертационной работы. Цели работы - теоретическое исследование разрешимости обратных стационарных задач сложной теплопроводности, разработка численных методов решения исследуемых краевых

задач, а также задач оптимального управления. Разработка вычислительных программ для постановки численных экспериментов и демонстрации результатов расчётов. Перед началом работы были поставлены следующие задачи:

- Исследовать разрешимость задачи по нахождению коэффициента отражения участка границы для стационарной модели, по дополнительной информации о температурном поле.
- Разработать численный метод по нахождению решения для соответствующей экстремальной задачи.
- Исследовать стационарную задачу оптимального управления для уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена в трехмерной области в рамках P_1 -приближения уравнения переноса излучения.
- Результаты теоретического анализа проиллюстрировать численными примерами.

Научная новизна. Результатом работы является теоретический анализ разрешимости обратных задач сложного теплообмена. Доказано существование квазирешения для первой рассматриваемой задачи. Реализован алгоритм градиентного спуска для решения экстремальной задачи и представлены результаты численных экспериментов. Далее показано, что последовательность решений экстремальных задач сходится к решению краевой задачи с условиями типа Коши для температуры. Результаты теоретического анализа также проиллюстрированы численными примерами.

Теоретическая и практическая значимость. Исследование однозначной разрешимости экстремальных задач, а также задач оптимального управления крайне важно при реализации численных алгоритмов и позволяет судить об адекватности полученных решений.

Задачи оптимизации имеют крайне важное практическое применение при выборе параметров системы для получения желаемой температуры или теплового излучения. Необходимость выбора параметров системы возникает при проектировании инженерных установок в которых присутствуют процессы сложного теплообмена.

Разработанные комплексы программ служат практическим подтверждением теоретических результатов, а также могут быть использованы в качестве примеров для решения подобных задач.

Научная значимость данной работы состоит в теоретическом вкладе в исследования корректности и разрешимости задач сложного теплообмена.

Реализация конкретных методов решения проблем оптимального управления, в свою очередь, имеет высокую значимость для решения прикладных инженерных задач по проектированию тепловых установок с заданными температурными свойствами.

Методология и методы исследования. В работе широко использовались методы математического и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории экстремальных задач. Для разработки численных алгоритмов решения применялись методы вычислительной математики, объектно-ориентированное и функциональное программирование, методы оптимизации и другие.

Положения, выносимые на защиту. В области математического моделирования

- Разрешимость экстремальной задачи для стандартной модели радиационно-диффузионного теплообмена

Степень достоверности и апробация результатов. Теоретические результаты, представленные в диссертации получены использованием методов функционального анализа, теорий дифференциальных уравнений и экстремальных задач. Теоремы имеют строгие математические доказательства. Достоверность численных экспериментов обеспечивается согласованностью с теоретическими результатами, доказательством сходимости итерационных процессов и тестированием разработанного программного обеспечения.

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в пяти статьях [65, 66] в изданиях, рекомендованных ВАК.

Личный вклад автора. Результаты в области математического моделирования получены совместно с научным руководителем. В области численных методов и комплексов программ результаты получены автором самостоятельно.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 3 приложений. Полный объем диссертации составляет 105 страниц, включая 6 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 0 наименований.

Глава 1. Модели сложного теплообмена

1.1 Уравнение переноса теплового излучения

Уравнение переноса излучения описывает поле интенсивности излучения при взаимодействии теплового излучения с поглощающей, излучающей и рассеивающей средой (radiatively participating medium). Будем предполагать, что среда имеет постоянный показатель преломления n , является неполяризующей, находится в состоянии покоя (по сравнению со скоростью света) и в локальном термодинамическом равновесии [67, с. 280].

Спектральной интенсивностью излучения $I_\nu(x\omega, t)$ [Вт/($^2 \cdot \text{стер} \cdot \text{Гц}$)] называется количество энергии излучения, проходящего через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения ω , внутри единичного телесного угла, осью которого является направление ω , в единичном интервале частот, включающем частоту ν , и в единицу времени. Считаем, что направления излучения ω связаны с точками единичной сферы $S = \{\omega \in R^3 : \|\omega\| = 1\}$.

Рассмотрим пучок излучения интенсивностью $I_\nu(x\omega, t)$, распространяющегося в поглощающей, излучающей и рассеивающей среде в заданном направлении. Энергия излучения будет уменьшаться вследствие поглощения излучения веществом и отклонения части его от первоначальной траектории в результате рассеяния во всех направлениях, но одновременно она будет возрастать вследствие испускания излучения веществом.

Обозначим через $\kappa_{a\nu}[\text{м}^{-1}]$ спектральный коэффициент поглощения, равный доле падающего излучения, поглощенной веществом на единице длины пути распространения излучения. Приращение интенсивности излучения за счет поглощения равно $(dI_\nu)_{\text{погл}} = -\kappa_{a\nu} I_\nu ds$, где ds — элемент пути. Отметим, что $1/\kappa_{a\nu}$ есть средняя длина свободного пробега фотона до его поглощения веществом [67, с. 281].

Для получения выражения для испускания излучения элементом объема часто используется предположение о локальном термодинамическом равновесии. Оно означает, что любой малый элемент объема среды находится в локальном термодинамическом равновесии, вследствие чего состояние любой точки может быть охарактеризовано локальной температурой $T(x)$. Это пред-

положение законно, когда столкновения атомов в веществе происходят столь часто, что это приводит к локальному термодинамическому равновесию в каждой точке x среды. В этом случае испускание излучения элементом объема можно описать с помощью функции Планка [68, с. 36]. Приращение интенсивности излучения за счет испускания равно $(dI_\nu)_{\text{исп}} = j_\nu ds$ j_ν – коэффициент испускания. В локальном термодинамическом равновесии справедлива формула [68, с. 36], [67, с. 282] $j_\nu = \kappa_{a\nu} I_{b\nu}$, где $I_{b\nu}$ – интенсивность излучения абсолютно черного тела.

Абсолютно черным называется тело, которое поглощает все падающее со всех направлений излучение любой частоты без отражения, пропускания и рассеяния. Из закона Кирхгофа следует, что абсолютно черное тело также излучает максимальное количество энергии при данной температуре [68, с. 25], [67, с. 5]. Интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре T равна

$$I_{b\nu}(T) = \frac{2h\nu^3 n^2}{c_0^2 (e^{h\nu/kT} - 1)},$$

где h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, c_0 – скорость света в вакууме, T – абсолютная температура, n – показатель преломления. Интегральная интенсивность излучения абсолютно черного тела $I_b(T)$ вычисляется по формуле [68, с. 28], [67, с. 10]

$$I_b(T) = \int_0^\infty I_{b\nu}(T) d\nu = \frac{n^2 \sigma T^4}{\pi},$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Рассеяние излучения учитывается так же, как поглощение, с той разницей, что рассеянная энергия просто перенаправляется и возникает в приращении интенсивности излучения в другом направлении. Различают когерентное и некогерентное рассеяние. Рассеяние называется когерентным, если рассеянное излучение имеет ту же самую частоту, что и падающее излучение, и некогерентным, если частота рассеянного излучения отличается от частоты падающего излучения. В дальнейшем мы будем рассматривать только когерентное рассеяние. Обозначим через $\kappa_{s\nu}$ [м⁻¹] спектральный коэффициент рассеяния, равный доле падающего излучения, рассеянной веществом во всех направлениях на единице длины пути распространения излучения. Тогда приращение интенсивности излучения за счет «рассеяния вне» равно $(dI_{\nu u})_{\text{расс.вне}} = -\kappa_{s\nu} I_{\nu u} ds$. Для описания "рассеяния в" вводится неотрицательная фазовая функция рассеяния

$P_{nu} = (\omega, \omega')$ такая, что $\frac{1}{4\pi} \int_S P_{nu}(\omega, \omega') d\omega = 1$. Величина $\frac{1}{4\pi} \int_S P_{nu}(\omega, \omega') d\omega$ определяет вероятность того, что излучение частоты ν , падающее в направлении ω' , будет рассеяно в пределах элементарного телесного угла $d\omega$ в направлении ω . Случай $P_\nu \equiv 1$ соответствует изотропному рассеянию. Тогда для того, чтобы получить приращение интенсивности излучения за счет «рассеяния в», нужно проинтегрировать $I_\nu(\omega') P_\nu(\omega, \omega') / 4\pi$ по всем входящим направлениям ω' [67, с. 283]: $(dI_\nu)_{\text{расс.в}} = ds \frac{\kappa_{sv}}{4\pi} \int_S I_\nu(\omega') P_{nu}(\omega, \omega') d\omega'$. Учитывая приращения интенсивности излучения с учетом поглощения, испускания и рассеяния, получим искомое уравнение переноса излучения [68, с. 272], [67, с. 284]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(x, \omega, t)}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_x I_\nu(x, \omega, t) + \kappa_\nu I_\nu(x, \omega, t) = \\ = \kappa_{av} I_{bv}(T(x, t)) + \frac{\kappa_{sv}}{4\pi} \int_S I_\nu(x, \omega', t) P_\nu(\omega, \omega') d\omega'. \end{aligned}$$

Здесь $\kappa_{nu} = \kappa_{av} + \kappa_{sv}$ – полный спектральный коэффициент взаимодействия, c – скорость света в среде.

Далее получим граничные условия для уравнения переноса излучения. Будем считать, что граница области непрозрачна, испускает излучение диффузно и отражает излучение диффузно и зеркально. Степенью черноты поверхности $\varepsilon_\nu(x)$ называется отношение количества энергии, испускаемого данной поверхностью, к количеству энергии, испускаемому абсолютно черным телом при той же температуре. При диффузном испускании излучения степень черноты не зависит от направления и определяется формулой $\varepsilon_\nu(x) = \frac{I_{\nu, \text{исп}}(x)}{I_{b\nu}(T(x))}$, где $I_{\nu, \text{исп}}(x)$ – интенсивность излучения, испускаемого поверхностью при температуре $T(x)$ [68, с. 53].

При диффузном поглощении степень черноты равняется поглотительной способности, которая равна доле поглощенного излучения [67, с. 66]. Также введем коэффициенты зеркального и диффузного отражения $\rho_\nu^s(x), \rho_\nu^d(x)$ как части зеркально и диффузно отраженного излучения соответственно. Отметим, что в случае непрозрачной поверхности $\varepsilon_\nu + \rho_\nu^s + \rho_{nu=1}^d = 1$. Граничное условие имеет вид [69], [67, с. 289]

$$\begin{aligned} I_\nu(x, \omega, t) = \varepsilon_\nu(x) I_{bv}(T(x, t)) + \rho_\nu^s(x) I_\nu(x, \omega_R, t) + \\ + \frac{\rho_\nu^d(x)}{\pi} \int_{\omega' \cdot \mathbf{n} > 0} I_\nu(x, \omega', t) \omega' \cdot \mathbf{n} d\omega', \quad \omega \cdot \mathbf{n} < 0, \end{aligned}$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе области, ω – входящее направление, ω_R – направление отражения, определяемое из соотношения $\omega + (-\omega_R) =$

$2\cos\theta = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ косинус угла между вектором нормали и направлением падающего излучения. Таким образом, $\boldsymbol{\omega}_R = \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$.

Поле температуры описывается уравнением теплопроводности [67, с. 297]:

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - k \Delta T(x, t) + \rho c_p \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla T(x, t) = - \operatorname{div} \mathbf{q}_r(x, t),$$

где $T[K]$ – температура, \mathbf{v} [м/с] поле скоростей, k [Вт/м · °К] – коэффициент теплопроводности, c_p [Дж/(кг · °К)] – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, ρ [кг/м³] – плотность, \mathbf{q}_r – вектор плотности потока излучения, определяемый формулой [67, с. 292] $\mathbf{q}_r(x, t) = \int_0^\infty \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega} dv$. Дивергенция вектора плотности потока излучения $\operatorname{div} \mathbf{q}_r$ характеризует изменение в единицу времени энергии излучения, заключенной в единице объема среды, по всему спектру частот вследствие испускания излучения во всё сферическое пространство и поглощения падающего из него излучения [68, с. 274]. Для нахождения $\operatorname{div} \mathbf{q}_r$ проинтегрируем уравнение (1.1) по $\boldsymbol{\omega} \in S$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} + \operatorname{div} \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega} + \kappa_v \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} = \\ = 4\pi \kappa_{av} I_{bv}(T(x, t)) + \frac{\kappa_{sv}}{4\pi} \int_S \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}', t) P_v(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' d\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Поменяем порядок интегрирования во втором слагаемом в правой части:

$$\begin{aligned} \int_S \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}', t) P_v(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' d\boldsymbol{\omega} = \\ = \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}', t) \int_S P_v(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega}' = 4\pi \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}', t) d\boldsymbol{\omega}'. \end{aligned}$$

Обозначим через $G_v(x, t) = \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega}$ пространственную плотность падающего излучения. Тогда

$$\frac{1}{c} \frac{\partial G_v(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega} + \kappa_v G_v(x, t) = 4\pi \kappa_{av} I_{bv}(T(x, t)) + \kappa_{sv} G_v(x, t),$$

отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega} = 4\pi \kappa_{av} I_{bv}(T(x, t)) - \kappa_{av} G_v(x, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial G_v(x, t)}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{q}_r(x, t) = \int_0^\infty \kappa_{av} (4\pi I_{bv}(T(x, t)) - G_v(x, t)) dv - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty G_v(x, t) dv. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение теплопроводности принимает вид

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - k \Delta T(x, t) + \rho c_p \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla T(x, t) = \\ = - \int_0^\infty \int_S \kappa_{av} (I_{bv}(T(x, t)) - I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t)) d\boldsymbol{\omega} dv + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int_S I_v(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} dv \end{aligned}$$

Получим граничные условия для уравнения теплопроводности из закона Ньютона-Рихмана. Согласно этому закону, плотность теплового потока пропорциональна разности температур поверхности тела T и окружающей среды T_b : $q = h (T - T_b)$. Здесь $h [\text{Вт} / (^\circ \text{К})]$ - коэффициент теплоотдачи, характеризующий интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству тепла, отдаваемому (воспринимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью и средой в 1 К[70]. Отметим, что непосредственно на поверхности контакта тела с окружающей средой $T = T_b$, однако мы считаем, что температура T на границе поверхности - это температура за пределами пограничного слоя [71]. Рассматривая граничное условие для уравнения переноса излучения (1.2), будем считать, что поверхностное излучение происходит из пограничного слоя, поэтому в качестве аргумента функции $I_{bv}(T)$ будем использовать T_b . По закону сохранения энергии количество тепла, отводимое с единицы поверхности вследствие теплоотдачи, должно равняться теплу, подводимому к единице поверхности вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, тогда $h (T - T_b) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -k \nabla T \cdot \mathbf{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n}$. Таким образом, граничное условие имеет вид:

$$k \frac{\partial T(x, t)}{\partial n} + h(x) (T(x, t) - T_b(x, t)) = 0.$$

Следует отметить, что условия третьего рода для температуры обычно ставятся на твердой стенке, где $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. В данном случае постановка условий третьего рода на всей границе и, в частности, на участке втекания моделирует процесс теплообмена при малых значениях нормальной компоненты скорости.

В дальнейшем мы будем рассматривать случай «серой» среды, когда K_{av} и K_{sv} не зависят от частоты ν , так что $K_{av} = K_a$, $K_{sv} = K_s$. Граница области также предполагается «серой». В этом случае уравнения и граничные условия

принимают вид (ср. [69]):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c} \frac{\partial I(x, \boldsymbol{\omega}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_x I(x, \boldsymbol{\omega}, t) + \kappa I(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \\
& = \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S P(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') I(x, \boldsymbol{\omega}', t) d\boldsymbol{\omega}' + \kappa_a \frac{\sigma n^2 T^4(x, t)}{\pi}, \\
& \rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - k \Delta T(x, t) + \rho c_p \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla T(x, t) = \\
& = -\kappa_a \left(4\sigma n^2 T^4(x, t) - \int_S I(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S I(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega}, \\
& \text{г.р.у.: } I(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \varepsilon(x) \frac{\sigma n^2}{\pi} T_b^4(x, t) + \rho^s(x) I(x, \boldsymbol{\omega}_R, t) + \\
& + \frac{\rho^d(x)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} > 0} I(x, \boldsymbol{\omega}', t) \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} d\boldsymbol{\omega}', \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0, \\
& \text{г.р.у.: } k \frac{\partial T(x, t)}{\partial n} + h(x) (T(x, t) - T_b(x, t)) = 0. \\
& \text{Здесь } I = \int_0^\infty I_\nu d\nu.
\end{aligned}$$

Поставим также начальные условия:

$$I(x, \boldsymbol{\omega}, 0) = I_0(x, \boldsymbol{\omega}), \quad T(x, 0) = T_0(x).$$

Соотношения (1.3)-(1.7) представляют собой модель сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения.

Перейдем к безразмерным величинам. Обозначим

$$I(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \left(\frac{\sigma n^2}{\pi} T_{\max}^4 \right) I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t), \quad T(x, t) = T_{\max} \theta(x, t),$$

Здесь I^* — нормализованная интенсивность излучения, θ — нормализованная температура, T_{\max} — максимальная температура в ненормализованной модели. Подставив (1.8) в уравнения (1.3), (1.4), получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c} \frac{\partial I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_x I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) + \kappa I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \\
& = \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S P(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') I^*(x, \boldsymbol{\omega}', t) d\boldsymbol{\omega}' + \kappa_a \theta^4(x, t), \\
& \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a \Delta \theta(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta(x, t) = \\
& = -b \kappa_a \left(\theta^4(x, t) - \frac{1}{4\pi} \int_S I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} \right) + \frac{b}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega},
\end{aligned}$$

где $a = \frac{k}{\rho c_p}$, $b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_p}$. Подставляя (1.8) в граничные условия (1.5), и полагая $T_b = T_{\max} \theta_b$, получим

$$\begin{aligned} \text{гр.у.: } I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) &= \varepsilon(x) \theta_b^4(x, t) + \rho^s(x) I^*(x, \boldsymbol{\omega}_R, t) + \\ &+ \frac{\rho^d(x)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} > 0} I^*(x, \boldsymbol{\omega}', t) \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} d\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0, \\ \text{гр.у.: } a \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial n} &+ \beta(x) (\theta(x, t) - \theta_b(x, t)) = 0, \end{aligned}$$

где $\beta = \frac{h}{\rho c_p}$. Аналогично получаем начальные условия:

$$I^*(x, \boldsymbol{\omega}, 0) = I_0^*(x, \boldsymbol{\omega}), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x),$$

$$\text{где } I_0^*(x, \boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{\sigma n^2 T_{\max}^4}{\pi} \right)^{-1} I_0(x, \boldsymbol{\omega}), \quad \theta_0(x) = \frac{T_0(x)}{T_{\max}}.$$

1.2 1.2 Диффузионное P_1 приближение

P_1 приближение уравнения переноса излучения является частным случаем метода сферических гармоник (P_N). Идея P_N приближений состоит в том, что функцию интенсивности излучения $I(x, \boldsymbol{\omega})$ раскладывают в ряд Фурье по сферическим гармоникам $\mathcal{Y}_l^m(\boldsymbol{\omega})$ [67, с. 496]:

$$I(x, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l I_l^m(x) \mathcal{Y}_l^m(\boldsymbol{\omega}),$$

где $I_l^m(x)$ - коэффициенты, зависящие от x . Также в ряд раскладывают фазовую функцию $P(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')$. Тогда решение уравнения переноса излучения ищется в виде отрезка ряда Фурье для $l \leq N$. При подстановке указанной конечной суммы в исходное уравнение интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения относительно $I(x, \boldsymbol{\omega})$ сводится к $(N+1)^2$ дифференциальным уравнениям относительно $I_l^m(x)$.

В P_1 приближении используется линейное приближение для интенсивности излучения и фазовой функции:

$$\begin{aligned} I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) &= \varphi(x, t) + \boldsymbol{\Phi}(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ P(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') &= 1 + A \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}'. \end{aligned}$$

Для фазовой функции выполняется условие нормировки:

$$\frac{1}{4\pi} \int_S P(\omega, \omega') d\omega = 1 + \frac{A}{4\pi} \int_S \omega \cdot \omega' d\omega = 1,$$

вычисление интеграла см. ниже. Коэффициент $A \in [-1, 1]$ описывает анизотропию рассеяния, а величина $A/3$ имеет смысл среднего косинуса угла рассеяния, поскольку

$$\frac{1}{4\pi} \int_S (\omega \cdot \omega') P(\omega, \omega') d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_S \omega \cdot \omega' d\omega + \frac{A}{4\pi} \int_S (\omega \cdot \omega') (\omega \cdot \omega') d\omega = \frac{A}{3},$$

вычисление интегралов см. ниже. Случай $A = 0$ соответствует изотропному рассеянию. Диапазон допустимых значений величины $A \in [-1, 1]$ обусловлен тем, что при $|A| > 1$ фазовая функция может принимать отрицательные значения.

Отметим, что если функция I^* ищется в виде (1.14), то [67, с. 502]

$$G(x, t) = \int_S I^*(x, \omega, t) d\omega = 4\pi\varphi(x, t), \quad \mathbf{q}_r(x, t) = \int_S I^*(x, \omega, t) \omega d\omega = \frac{4\pi}{3} \Phi(x, t),$$

поэтому

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi} G(x, t), \quad \Phi(x, t) = \frac{3}{4\pi} \mathbf{q}_r(x, t),$$

где G - аппроксимация пространственной плотности падающего излучения, \mathbf{q}_r - аппроксимация плотности потока излучения. Следовательно, функция $\varphi(x, t)$ имеет физический смысл нормализованной интенсивности излучения в точке x в момент времени t , усредненной по всем направлениям.

Лемма 1. Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \int_S 1 \cdot d\omega &= 4\pi, & \int_S \mathbf{a} \cdot \omega d\omega &= 0, & \int_S (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega &= \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ \int_S \omega d\omega &= 0, & \int_S (\mathbf{a} \cdot \omega) \omega d\omega &= \frac{4\pi}{3} \mathbf{a}, \\ \int_{\omega \cdot \mathbf{a} > 0} \mathbf{a} \cdot \omega d\omega &= \pi, & \int_{\omega \cdot \mathbf{a} > 0} (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega &= \frac{2\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \end{aligned}$$

где \mathbf{a}, \mathbf{b} — любые векторы.

Доказательство. Первое равенство вытекает из определения поверхностного интеграла и представляет собой выражение для площади поверхности единичной сферы.

Для вычисления остальных интегралов воспользуемся формулой перехода от поверхностного интеграла к двойному [72, с. 143, теорема 5.3]:

$$\int_S f(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = \int_D f(\boldsymbol{\omega}_1(u, v), \boldsymbol{\omega}_2(u, v), \boldsymbol{\omega}_3(u, v)) |\boldsymbol{\omega}_u \times \boldsymbol{\omega}_v| dudv$$

где $D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$, $\boldsymbol{\omega}_1(u, v) = \cos u \cos v$, $\boldsymbol{\omega}_2(u, v) = \sin u \cos v$, $\boldsymbol{\omega}_3(u, v) = \sin v$, $|\boldsymbol{\omega}_u \times \boldsymbol{\omega}_v| dudv = \cos v dudv$ — элемент площади поверхности единичной сферы. Тогда для вычисления остальных интегралов воспользуемся формулой перехода от поверхностного интеграла к двойному [72, с. 143, теорема 5.3]:

$$\int_S f(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = \int_D f(\boldsymbol{\omega}_1(u, v), \boldsymbol{\omega}_2(u, v), \boldsymbol{\omega}_3(u, v)) |\boldsymbol{\omega}_u \times \boldsymbol{\omega}_v| dudv$$

где $D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$, $\boldsymbol{\omega}_1(u, v) = \cos u \cos v$, $\boldsymbol{\omega}_2(u, v) = \sin u \cos v$, $\boldsymbol{\omega}_3(u, v) = \sin v$, $|\boldsymbol{\omega}_u \times \boldsymbol{\omega}_v| dudv = \cos v dudv$ — элемент площади поверхности единичной сферы. Тогда

$$\int_S f(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = \int_D f(\boldsymbol{\omega}_1(u, v), \boldsymbol{\omega}_2(u, v), \boldsymbol{\omega}_3(u, v)) |\boldsymbol{\omega}_u \times \boldsymbol{\omega}_v| dudv$$

Для вычисления второго интеграла положим $f(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 a_i \boldsymbol{\omega}_i$,

$$\int_S \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos u \cos v + a_2 \sin u \cos v + a_3 \sin v) \cos v dudv = 0.$$

получим

В третьем интеграле положим $f(\boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \boldsymbol{\omega}_i \boldsymbol{\omega}_j$,

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} &= \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}^T \begin{pmatrix} \cos^2 u \cos^2 v & \sin u \cos u \cos^2 v & \cos u \sin v \cos v \\ \sin u \cos u \cos^2 v & \sin^2 u \cos^2 v & \sin u \sin v \cos v \\ \cos u \sin v \cos v & \sin u \sin v \cos v & \sin^2 v \end{pmatrix} \mathbf{b} \cos v dudv = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{a}^T \begin{pmatrix} \pi \cos^2 v & 0 & 0 \\ 0 & \pi \cos^2 v & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \sin^2 v \end{pmatrix} \mathbf{b} \cos v dv = \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

здесь \mathbf{a}, \mathbf{b} — векторы-столбцы.

Равенства во второй строке получаются из доказанных равенств:

$$\int_S \omega d\omega = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \int_S (\omega \cdot \mathbf{e}_i) d\omega = 0,$$

$$\int_S (\mathbf{a} \cdot \omega) \omega d\omega = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \int_S (\mathbf{a} \cdot \omega) (\omega \cdot \mathbf{e}_i) d\omega = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = \frac{4\pi}{3} \mathbf{a}.$$

Для доказательства первого равенства в третьей строке введем систему координат так, чтобы ось Oz была сонаправлена с вектором \mathbf{a} . Воспользуемся формулой (1.16), в которой вместо S следует взять верхнюю полусферу, $D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$. Заметим, что $f(\omega) = \mathbf{a} \cdot \omega = |\mathbf{a}| \sin v$. Таким образом,

$$\int_{\omega \cdot \mathbf{a} > 0} \mathbf{a} \cdot \omega d\omega = |\mathbf{a}| \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin v \cos v du dv = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin v \cos v dv = \pi$$

Для доказательства второго равенства в третьей строке заметим, что

$$\int_S (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega = \int_{\omega \cdot \mathbf{a} > 0} (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega + \int_{\omega \cdot \mathbf{a} < 0} (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega,$$

$$\int_{\omega \cdot \mathbf{a} > 0} (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega = \int_{\omega \cdot \mathbf{a} < 0} (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega,$$

следовательно,

$$\int_{\omega \cdot \mathbf{a} > 0} (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{a} \cdot \omega)(\mathbf{b} \cdot \omega) d\omega = \frac{2\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Подставляя (1.14), (1.15) в (1.9), получаем

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \omega \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right) + \omega \cdot \nabla \varphi(x, t) + \omega \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \omega) + \kappa \varphi(x, t) + \kappa \Phi(x, t)$$

$$= \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S (1 + A \omega \cdot \omega') (\varphi(x, t) + \Phi(x, t) \cdot \omega') d\omega' + \kappa_a \theta^4(x, t).$$

С учетом равенств

$$\int_S \Phi(x, t) \cdot \omega' d\omega' = 0, \quad \int_S \omega \cdot \omega' d\omega' = 0, \quad \int_S (\Phi(x, t) \cdot \omega') (\omega \cdot \omega') d\omega' = \frac{4\pi}{3} \Phi(x, t) \cdot \omega$$

имеем

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \omega \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right) + \omega \cdot \nabla \varphi(x, t) + \omega \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \omega) + \kappa \varphi(x, t) + \kappa \Phi(x, t)$$

$$= \kappa_s \left(\varphi(x, t) + \frac{A}{3} \Phi(x, t) \cdot \omega \right) + \kappa_a \theta^4(x, t),$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \omega \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right) + \omega \cdot \nabla \varphi(x, t) + \omega \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \omega) + \\ + \kappa_a \varphi(x, t) + (\kappa_a + \kappa'_s) \Phi(x, t) \cdot \omega = \kappa_a \theta^4(x, t), \end{aligned}$$

где $\kappa'_s = \kappa_s(1 - A/3)$ - приведенный коэффициент рассеяния.

Проинтегрируем уравнение (1.17) по $\omega \in S$. Получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{3} \div \Phi(x, t) + \kappa_a \varphi(x, t) = \kappa_a \theta^4(x, t),$$

так как

$$\begin{aligned} \int_S \omega \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \omega) d\omega &= \sum_{i=1}^3 \int_S (\omega \cdot \mathbf{e}_i) \left(\omega \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_i} \right) d\omega = \\ &= \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(x, t)}{\partial x_i} = \frac{4\pi}{3} \div \Phi(x, t). \end{aligned}$$

Умножим уравнение (1.17) на ω :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \omega + \frac{1}{c} \left(\omega \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right) \omega + (\omega \cdot \nabla \varphi(x, t)) \omega + (\omega \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \omega)) \omega + \\ + \kappa_a \varphi(x, t) \omega + (\kappa_a + \kappa'_s) (\Phi(x, t) \cdot \omega) \omega = \kappa_a \theta^4(x, t) \omega \end{aligned}$$

и проинтегрируем полученное равенство по $\omega \in S$.

Для вычисления четвертого слагаемого представим интеграл по единичной сфере S как сумму интегралов по верхней S_1 и нижней S_2 полусферам и воспользуемся тем, что

$$\int_{S_2} (\omega \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \omega)) \omega d\omega = - \int_{S_1} (\omega \cdot \nabla_x (\Phi(x, t) \cdot \omega)) \omega d\omega,$$

следовательно, интеграл равен 0. Таким образом,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} + (\kappa_a + \kappa'_s) \Phi(x, t) + \nabla \varphi(x, t) = 0.$$

Итак, уравнения (1.18), (1.19) представляют собой P_1 приближение для уравнения переноса излучения. Дальнейшие преобразования основываются на предположении, что выполняется закон Фика:

$$\Phi(x, t) = -3\alpha \nabla \varphi(x, t),$$

где $\alpha = \frac{1}{3(\kappa_a + \kappa'_s)} = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$. Фактически мы пренебрегаем производной $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ в уравнении (1.19). Подставив (1.20) в (1.18), получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} - \alpha \Delta \varphi(x, t) + \kappa_a (\varphi(x, t) - \theta^4(x, t)) = 0.$$

Чтобы получить уравнение для температуры, подставим (1.14) в (1.10). Получим

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a \Delta \theta(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta(x, t) + b \kappa_a (\theta^4(x, t) - \varphi(x, t)) = \frac{b}{c} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t}.$$

Учитывая (1.21), уравнение (1.22) можно записать в виде с кросс-диффузией:

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a \Delta \theta(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta(x, t) = b \alpha \Delta \varphi(x, t).$$

В дальнейшем вместо уравнения (1.22) будем использовать уравнение с нулевой правой частью (см., например, [73])

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a \Delta \theta(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta(x, t) + b \kappa_a (\theta^4(x, t) - \varphi(x, t)) = 0.$$

Далее выведем граничные условия типа Маршака для P_1 приближения (см. [74]). Для этого подставим (1.14) в граничное условие (1.11):

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) + \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega} &= \varepsilon(x) \theta_b^4(x, t) + \rho^s(x) (\varphi(x, t) + \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}_R) + \\ &+ \frac{\rho^d(x)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} > 0} (\varphi(x, t) + \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega}') \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n} d\boldsymbol{\omega}', \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0, \quad \boldsymbol{\omega}_R = \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла применим лемму 1 :

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) + \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega} &= \varepsilon(x) \theta_b^4(x, t) + \rho^s(x) [\varphi(x, t) + \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \mathbf{n}) \\ &+ \rho^d(x) \left(\varphi(x, t) + \frac{2}{3} \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \mathbf{n} \right), \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0. \end{aligned}$$

Умножим данное равенство на $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ и проинтегрируем по множеству входящих направлений, для которых $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0$. Получим

$$\begin{aligned} -\pi \varphi(x, t) + \frac{2\pi}{3} \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \mathbf{n} &= -\pi \varepsilon(x) \theta_b^4(x, t) - \pi \rho^s(x) \varphi(x, t) + \frac{2\pi \rho^s(x)}{3} \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \mathbf{n} - \\ &- \frac{4\pi \rho^s(x)}{3} \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \mathbf{n} - \pi \rho^d(x) \left(\varphi(x, t) + \frac{2}{3} \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \mathbf{n} \right), \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\varepsilon(x) \varphi(x, t) = \varepsilon(x) \theta_b^4(x, t) + \frac{2(2 - \varepsilon(x))}{3} \mathbf{\Phi}(x, t) \cdot \mathbf{n}.$$

Воспользуемся равенством (1.20), будем иметь

$$\alpha \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial n} + \gamma(x) (\varphi(x, t) - \theta_b^4(x, t)) = 0,$$

где $\gamma = \frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}$. Отметим, что на участках втекания и вытекания среды можно принять $\gamma = 1/2$ [75].

Дополним полученные соотношения граничным условием для температуры (1.12):

$$a \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial n} + \beta(x) (\theta(x, t) - \theta_b(x, t)) = 0$$

и начальными условиями

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x).$$

Соотношения (1.21), (1.23), (1.24)-(1.26) образуют диффузионную модель сложного теплообмена.

Укажем возможные пути обоснования закона Фика (1.20). В [76, с. 136], [77, с. 222], [78, с. 96] указано, что в уравнении (1.19) можно пренебречь слабым $\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, если

$$\frac{1}{|\Phi|} \frac{\partial |\Phi|}{\partial t} \ll c (\kappa_a + \kappa'_s).$$

Это предположение означает, что относительное изменение плотности потока излучения во времени много меньше частоты столкновений фотонов, так как величина $\frac{1}{\kappa_a + \kappa'_s}$ есть средняя длина свободного пробега (transport mean free path) [78]

В диффузионном приближении предполагается, что среда имеет большое альbedo ($\kappa_a \ll \kappa_s$) и излучение почти изотропно [78, с. 88]. В [78, с. 97] указано, что предположения о почти изотропности излучения (направленное расширение) и о малом относительном изменении плотности потока излучения (временное расширение потока фотонов по отношению к среднему времени свободного пробега) выполняются при большом числе рассеяний фотонов, так что оба приближения можно свести к предположению $\kappa'_s \gg \kappa_a$. Кроме того, необходимо, чтобы точка наблюдения находилась достаточно далеко от источников и от границ.

В [79, 80] делается предположение $3\omega_0\alpha \ll c$, где ω_0 – частота синусоидально модулированного источника. Авторы [79, 81] сначала выводят из (1.18),

(1.19) уравнение второго порядка по времени, а затем отбрасывают некоторые слагаемые, которые можно считать малыми в силу указанного предположения. Применяв к уравнению (1.18) операцию дифференцирования по t , а к уравнению (1.19) операцию дивергенции, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} \div \Phi + \kappa_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \kappa_a \frac{\partial (\theta^4)}{\partial t} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \div \Phi + (\kappa_a + \kappa'_s) \div \Phi + \Delta \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Умножим второе уравнение на $c/3$ и вычтем из первого уравнения. Учитывая (1.18), будем иметь

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - \theta^4) + \frac{3\alpha\kappa_a}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{3\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{3\alpha\kappa_a}{c} \frac{\partial (\theta^4)}{\partial t}.$$

Подчеркнутые слагаемые отбрасываем, принимая во внимание, что $\frac{3\alpha\kappa_a}{\kappa_a + \kappa'_s} \ll 1$. Более точные оценки с переходом в частотную область указаны в [79,80]. Однако их применение для нашей задачи требует дополнительных оценок правой части (1.27), содержащей θ .

Также автор [67, с. 509] отмечает, что P_1 приближение может давать ошибочный результат в оптически тонкой среде со слишком анизотропным распределением интенсивности, в частности, в многомерных областях с длинными узкими конфигурациями и/или когда излучение поверхности преобладает над излучением среды. Среда называется оптически толстой, если средняя длина свободного пробега фотона мала по сравнению с ее характерным размером [68, с. 343]. Авторы [82, с. 228] также указывают, что для применения диффузионного P_1 приближения альбедо κ_s/κ должно быть близко к единице и среда должна быть оптически толстой. В [79, с. 8] указано, что фазовая функция не должна быть слишком анизотропной ($\|A/3\|$ не слишком близко к 1).

Таким образом, благоприятными условиями для применения P_1 приближения являются: 1) $\kappa_a \ll \kappa'_s$;

2) оптически толстая среда;

3) удаление от границ области.

Глава 2. Теоретический анализ проблем абляции

2.1 Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена

2.1.1 Постановка обратной задачи

Нормализованная стационарная модель, описывающая процесс радиационного теплопереноса в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ (см. [OControl_1]), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усреднённая по всем направлениям, κ_a – коэффициент поглощения. Константы $a, b, \alpha, \gamma, \beta$ описываются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$$

где k – теплопроводность, c_v – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, σ – постоянная Стефана–Больцмана, n – индекс рефракции, T_{\max} – максимальная температура, $\kappa := \kappa_s + \kappa_a$ – коэффициент полного взаимодействия, κ_s – коэффициент рассеяния. Коэффициент $A \in [-1, 1]$ описывает анизотропию рассеивания; случай $A = 0$ отвечает изотропному рассеиванию.

Уравнения (2.1) дополняются граничными условиями на $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, где части границы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ не имеют пересечений.

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) &= 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2 : \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) &= 0, \\ \Gamma_1 : \quad \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функции γ, θ_b, β – являются известными. Функция u характеризует отражающие свойства участка границы Γ_1 . Предполагается, что

$$0 < u_1 \leq u \leq u_2, \quad (2.3)$$

где u_1 и u_2 – заданные ограниченные функции.

Обратная задача состоит в нахождении функций $u(x), x \in \Gamma_1$, $\theta(x), \varphi(x), x \in \Omega$ удовлетворяющих условиям (2.1)–(2.3), а также дополнительному условию на участке границы Γ_2 :

$$\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0 \quad (2.4)$$

где θ_0 известная функция.

Сформулированная обратная задача (2.1)–(2.4) сводится к экстремальной задаче, состоящей в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \quad (2.5)$$

на решениях краевой задачи (2.1)–(2.3). Решение задачи (2.1)–(2.3), (2.5) называется квазирешением задачи (2.1)–(2.4)

2.1.2 Формализация задачи нахождения квазирешения

Будем предполагать что исходные данные удовлетворяют следующему условию:

(i) $\beta \in L^\infty(\Gamma)$; $\gamma \in L^\infty(\Gamma_0 \cup \Gamma_2)$; $u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma_1)$; $0 < \beta_0 \leq \beta$; $0 < \gamma_0 \leq \gamma$; $\beta_0, \gamma_0 = Const$,
 $0 \leq u_1 \leq u_2$;

Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$, $Y = V \times V$. Пространство H отождествляем с сопряжённым пространством H' так, что $V \subset H = H' \subset V'$. Определим (f, v) как значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $f \in H$, $\|f\|^2 = (f, f)$. Пространство $U = L^2(\Gamma_1)$ является пространством управлений; $U_{ad} = \{u \in U, u_1 \leq u \leq u_2\}$ — множество допустимых управлений.

Пусть v произвольный элемент множества $H^1(\Omega)$.

Определим операторы:

$$\begin{aligned}
A_{1,2}: V &\rightarrow V', \quad F: V \times U \rightarrow V', \quad f \in V', \quad g \in V'. \\
(A_1\theta, v) &= a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} \gamma\varphi v d\Gamma, \\
(f, v) &= \int_{\Gamma} \beta\theta_b v d\Gamma, \quad (g, v) = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma, \\
(F(\varphi, u), v) &= \int_{\Gamma_1} u(\varphi - \theta_b^4) v d\Gamma.
\end{aligned}$$

Пару $\{\theta, \varphi\} \in Y$ будем называть слабым решением задачи (2.1), (2.2), если

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (2.6)$$

Задача нахождения квазирешения состоит в минимизации функционала $J(\theta)$, определённом на компоненте θ решения системы (2.6). Таким образом

$$J(\theta) \rightarrow \inf, \quad \{\theta, \varphi\} \text{ решение (2.6), соответствующее функции } u \in U_{ad}. \quad (2.7)$$

Пара $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$ соответствующая минимуму J , отвечающая функции \hat{u} называется оптимальным состоянием. В таком случае \hat{u} называется квазирешением обратной задачи (2.1)–(2.4).

2.1.3 Анализ экстремальной задачи

Для доказательства разрешимости задачи (2.7) нам необходимо также установить некоторые свойства решения задачи (2.1), (2.2).

Лемма 1. Пусть выполняется условие (i). Тогда для каждого $u \in U_{ad}$ существует единственное слабое решение $\{\theta, \varphi\}$ для задачи (2.1), (2.2) и справедливы оценки:

$$M_1 \leq \theta \leq M_2, \quad M_1^4 \leq \varphi \leq M_2^4, \quad (2.8)$$

$$\|\nabla\varphi\|^2 \leq C. \quad (2.9)$$

Здесь $M_1 = \text{ess inf } \theta_b$, $M_2 = \text{ess sup } \theta_b$, и константа $C > 0$ зависит только от $a, b, \alpha, \kappa_a, \beta, \gamma, \|u\|_{L^\infty(\Gamma)}$ и области Ω .

На основе оценок (2.8) и (2.9) аналогично [cheb_origin] доказывается разрешимость экстремальной задачи (2.7). **Теорема 1.** Пусть выполняется условие (i). Тогда существует хотя бы одно решение задачи (2.7).

Для вывода системы оптимальности, покажем дифференцируемость функционала J . **Лемма 2.** Функционал $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируем по Фреше.

Доказательство. Покажем, что для произвольной функции $\theta \in V$ выполняется следующее равенство:

$$J(\theta + h) = J(\theta) + J'(\theta)\langle h \rangle + r(\theta, h) \quad \forall h \in V, \quad \text{где } J'(\theta)\langle h \rangle = \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)h d\Gamma, \quad (2.10)$$

где для остаточного члена $r(\theta, h)$ справедливо соотношение:

$$\frac{|r(\theta, h)|}{\|h\|_V} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_V \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Перепишем (2.10) в виде

$$\frac{1}{2}\|\theta + h - \theta_0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 = \frac{1}{2}\|\theta - \theta_0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 + (\theta - \theta_0, h)_{L^2(\Gamma_2)} + \frac{1}{2}\|h\|_{L^2(\Gamma_2)}^2.$$

Согласно теореме о следах $\|h\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C\|h\|_V$, где C не зависит от h . Поэтому

$$\frac{r(\theta, h)}{\|h\|_V} \leq \frac{1}{2}C^2\|h\|_V \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_V \rightarrow 0.$$

Вывод условий оптимальности основан на принципе множителей Лагранжа для гладко-выпуклых задач минимизации. **Теорема 2.** Пусть $\hat{y} = \{\hat{\theta}, \hat{\phi}\} \in Y$, $\hat{u} \in U_{ad}$ — решение экстремальной задачи (?). Тогда существует пара $p = (p_1, p_2)$, $p \in Y$ такая, что тройка (\hat{y}, \hat{u}, p) , удовлетворяет следующим условиям:

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a (b p_1 - p_2) = f_c, \quad (f_c, v) = - \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma, \quad (2.12)$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a (p_2 - b p_1) = g_c((p_2, \hat{u}), v), \quad g_c((p_2, \hat{u}), v) = - \int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma, \quad (2.13)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2 (\hat{\phi} - \theta_b^4)(u - w) \leq 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (2.14)$$

Доказательство. Перепишем уравнения (??) следующим образом:

$$H(y, u) = 0, \quad y = \{\theta, \varphi\} \in Y,$$

где

$$H : Y \times U \rightarrow Y',$$

$$H(y, u) = \{A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) - f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) - g\}.$$

Заметим, что для всех $u \in U_{ad}$, отображение $y \rightarrow J(\theta)$ и $y \rightarrow H(y, u)$ непрерывно дифференцируемо в окрестности $\mathcal{O}(\hat{y})$ точки \hat{y} . Непрерывная дифференцируемость членов в H следует из непрерывной дифференцируемости функции $t \in \mathbb{R} \rightarrow |t|t^3$, а также из непрерывности вложения $V \subset L^6(\Omega)$. В дополнение, отображение $u \rightarrow H(y, u)$ непрерывно из $U \rightarrow Y'$ и аффинно. В [cheb_origin] показано, что $\text{Im}H'_y(\hat{y}, \hat{u}) = Y$, что влечёт невырожденность условий оптимальности.

Рассмотрим функцию Лагранжа $L(y, u, p) = J(\theta) + (H(y, u), p)$, где $y, p \in Y, u \in U_{ad}$. Согласно принципу Лагранжа [theorem_proof_18] существует пара $p = \{p_1, p_2\} \in Y$ такая, что

$$(L_\theta, \zeta) = \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) \zeta d\Gamma + (A_1 \zeta + 4b\kappa_a |\hat{\theta}|^3 \zeta, p_1) - 4\kappa_a (|\hat{\theta}|^3 \zeta, p_2) = 0 \quad \forall \zeta \in V, \quad (2.15)$$

$$(L_\varphi, \zeta) = (A_2 \zeta + \kappa_a \zeta, p_2) - b\kappa_a (\zeta, p_1) + \int_{\Gamma_1} \hat{u} \zeta p_2 = 0 \quad \forall \zeta \in V, \quad (2.16)$$

$$(L_u, \tau) = \int_{\Gamma_1} \tau (\varphi - \theta_b^4) p_2 d\Gamma \leq 0, \quad \tau := \hat{u} - w \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (2.17)$$

Сопряжённые уравнения (2.12), (2.13) являются прямым следствием вариационных равенств (2.15) и (2.16).

2.2 Обратная задача сложного теплообмена с неизвестным

2.2.1 Постановка обратной задачи

Стационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ моделируется в рамках P_1 -приближения для уравнения переноса излучения следующей системой эллиптических уравнений [Pinnau07, AMC-13, Kovt14-1]:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.18)$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные физические параметры a , b , κ_a и α , описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [Kovt14-1]. Подробный теоретический и численный анализ различных постановок краевых и обратных задач, а также задач управления для уравнений радиационного теплообмена в рамках P_1 -приближения для уравнения переноса излучения представлен в [Pinnau07]–[CMMP20]. Отметим также серьезный анализ интересных краевых задач, связанных с радиационным теплообменом, представленный в [Amosov05]–[Amosov20].

Будем предполагать, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ известно температурное поле,

$$\theta = \theta_b. \quad (2.19)$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию, описывающую отражающие свойства границы [JVM-14]. В том случае, если указанная функция неизвестна, естественно вместо краевого условия для интенсивности излучения задавать тепловые потоки на границе

$$\partial_n\theta = q_b. \quad (2.20)$$

Здесь через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали \mathbf{n} .

Нелокальная разрешимость нестационарной и стационарной краевых задач для уравнений сложного теплообмена без краевых условий на интенсивность излучения и с условиями (2.35), (2.36) для температуры доказана в [CNSNS19, CMMP20].

Данная статья посвящена анализу предлагаемого оптимизационного метода решения краевой задачи (2.34)-(2.36) с условиями типа Коши для температуры. Указанный метод заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления для системы (2.34) с "искусственными" краевыми условиями

$$a(\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \quad (2.21)$$

Функция $r(x)$, $x \in \Gamma$ является заданной, а неизвестная функция $u(x)$, $x \in \Gamma$ играет роль управления. Экстремальная задача заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf \quad (2.22)$$

на решениях краевой задачи (2.34), (2.38). Функция $\theta_b(x)$, $x \in \Gamma$ и параметр регуляризации $\lambda > 0$ заданы.

Как будет показано ниже, задача оптимального управления (2.34), (2.38), (2.39), если $r := a(\theta_b + q_b)$, где q_b – заданная на Γ функция, является при малых λ аппроксимацией краевой задачи (2.34)-(2.36).

Статья организована следующим образом. В п.2 вводятся необходимые пространства и операторы, приводится формализация задачи оптимального управления. Априорные оценки решения задачи (2.34), (2.38), на основе которых доказана разрешимость указанной краевой задачи и задачи оптимального управления (2.34), (2.38), (2.39), получены в п.3. В п.4 выводится система оптимальности. В п.5 показано, что последовательность $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda\}$, соответствующая решениям экстремальной задачи, сходится при $\lambda \rightarrow +0$ к решению краевой задачи (2.34)-(2.36) с условиями типа Коши для температуры. Наконец, в п.6 представлен алгоритм решения задачи управления, работа которого проиллюстрирована численными примерами.

2.2.2 Формализация задачи управления

В дальнейшем считаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная строго липшицева область, граница Γ которой состоит из конечного числа гладких кусков. Через

L^p , $1 \leq p \leq \infty$ обозначаем пространство Лебега, а через H^s – пространство Соболева W_2^s . Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, через V' обозначаем пространство, сопряженное с пространством V . Пространство H отождествляем с пространством H' так, что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную норму в H , а через (f, v) – значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $f \in H$. Через U обозначаем пространство $L^2(\Gamma)$ с нормой $\|u\|_\Gamma = (\int_\Gamma u^2 d\Gamma)^{1/2}$.

Будем предполагать, что

- (i) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$,
- (ii) $\theta_b, q_b \in U$, $r = a(\theta_b + q_b)$.

Определим операторы $A: V \rightarrow V'$, $B: U \rightarrow V'$, используя следующие равенства, справедливые для любых $y, z \in V$, $w \in U$:

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_\Gamma yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_\Gamma wz d\Gamma.$$

Билинейная форма (Ay, z) определяет скалярное произведение в пространстве V , а соответствующая норма $\|z\|_V = \sqrt{(Az, z)}$ эквивалентна стандартной норме V . Поэтому определен непрерывный обратный оператор $A^{-1}: V' \mapsto V$. Отметим, что для любых $v \in V$, $w \in U$, $g \in V'$ справедливы неравенства

$$\|v\|^2 \leq C_0 \|v\|_V^2, \quad \|v\|_{V'} \leq C_0 \|v\|_V, \quad \|Bw\|_{V'} \leq \|w\|_\Gamma, \quad \|A^{-1}g\|_V \leq \|g\|_{V'}. \quad (2.23)$$

Здесь постоянная $C_0 > 0$ зависит только от области Ω .

Далее используем следующее обозначение $[h]^s := |h|^s \text{sign } h$, $s > 0$, $h \in \mathbb{R}$ для монотонной степенной функции. **Определение.** Пара $\theta, \varphi \in V$ называется *слабым решением* задачи (2.34), (2.38), если

$$aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu. \quad (2.24)$$

Для формулировки задачи оптимального управления определим оператор ограничений $F(\theta, \varphi, u): V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$,

$$F(\theta, \varphi, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

Задача (CP). Найти тройку $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_\Gamma^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0. \quad (2.25)$$

2.2.3 Разрешимость задачи (CP)

Докажем предварительно однозначную разрешимость краевой задачи (2.34),(2.38).

Лемма 1. Пусть выполняются условия (i),(ii), $u \in U$. Тогда существует единственное слабое решение задачи (2.34),(2.38) и при этом

$$\begin{aligned} a\|\theta\|_V &\leq \|r\|_\Gamma + \frac{C_0\kappa_a}{\alpha}\|r + bu\|_\Gamma, \\ \alpha b\|\varphi\|_V &\leq \|r\|_\Gamma + \left(\frac{C_0\kappa_a}{\alpha} + 1\right)\|r + bu\|_\Gamma. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Доказательство. Если второе уравнение в (2.47) умножить на b и сложить с первым, то получим равенства

$$A(a\theta + \alpha b\varphi) = B(r + bu), \quad a\theta + \alpha b\varphi = A^{-1}B(r + bu), \quad \varphi = \frac{1}{\alpha b}(A^{-1}B(r + bu) - a\theta).$$

Поэтому $\theta \in V$ является решением следующего уравнения:

$$aA\theta + \frac{\kappa_a}{\alpha}\theta + b\kappa_a[\theta]^4 = g. \quad (2.27)$$

Здесь

$$g = Br + \frac{\kappa_a}{\alpha}A^{-1}B(r + bu) \in V'.$$

Однозначная разрешимость уравнения (2.27) с монотонной нелинейностью хорошо известна (см. например [Kufner]). Следовательно задача (2.47) однозначно разрешима.

Для получения оценок (2.43) умножим скалярно (2.27) на $\theta \in V$ и отбросим неотрицательные слагаемые в левой части. Тогда

$$a\|\theta\|_V^2 \leq (g, \theta) \leq \|g\|_{V'}\|\theta\|_V, \quad a\|\theta\|_V \leq \|g\|_{V'}.$$

Неравенства (2.40) позволяют оценить $\|g\|_{V'}$ и $\|\varphi\|_V$,

$$\|g\|_{V'} \leq \|r\|_\Gamma + \frac{C_0\kappa_a}{\alpha}\|r + bu\|_\Gamma, \quad \|\varphi\|_V \leq \frac{1}{\alpha b}\|r + bu\|_\Gamma + \frac{a}{\alpha b}\|\theta\|_V.$$

В результате получаем оценки (2.43).

Полученные оценки решения управляемой системы позволяют доказать разрешимость задачи оптимального управления.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i),(ii). Тогда существует решение задачи (CP).

Доказательство. Пусть $j_\lambda = \inf J_\lambda$ на множестве $u \in U$, $F(\theta, \varphi, u) = 0$. Выберем минимизирующую последовательность $u_m \in U$, $\theta_m \in V$, $\varphi_m \in V$,

$$J_\lambda(\theta_m, u_m) \rightarrow j_\lambda,$$

$$aA\theta_m + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi_m) = Br, \quad \alpha A\varphi_m + \kappa_a(\varphi_m - [\theta]^4) = Bu_m. \quad (2.28)$$

Из ограниченности последовательности u_m в пространстве U следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_m\|_V \leq C, \quad \|\varphi_m\|_V \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^6(\Omega)} \leq C.$$

Здесь через $C > 0$ обозначена наибольшая из постоянных, ограничивающих соответствующие нормы и не зависящих от m . Переходя при необходимости к подпоследовательностям, заключаем, что существует тройка $\{\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\} \in U \times V \times V$,

$$u_m \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } U, \quad \theta_m, \varphi_m \rightarrow \hat{\theta}, \hat{\varphi} \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^4(\Omega). \quad (2.29)$$

Заметим также, что $\forall v \in V$

$$|([\theta_m]^4 - [\hat{\theta}]^4, v) \leq 2\|\theta_m - \hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)}\|v\|_{L^4(\Omega)} \left(\|\theta_m\|_{L^6(\Omega)}^3 + \|\hat{\theta}\|_{L^6(\Omega)}^3 \right). \quad (2.30)$$

Результаты о сходимости (2.45),(2.46) позволяют перейти к пределу в (2.44). Поэтому

$$aA\hat{\theta} + b\kappa_a([\hat{\theta}]^4 - \hat{\varphi} = Br), \quad \alpha A\hat{\varphi} + \kappa_a(\hat{\varphi} - [\hat{\theta}]^4) = B\hat{u},$$

и при этом $j_\lambda \leq J_\lambda(\hat{\theta}, \hat{u}) \leq \liminf J_\lambda(\theta_m, u_m) = j_\lambda$. Следовательно тройка $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ есть решение задачи (CP).

2.2.4 Условия оптимальности

Для получения системы оптимальности достаточно использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [10, 11]. Проверим справедливость ключевого условия, что образ производной оператора ограничений

$F(y, u)$, где $y = \{\theta, \varphi\} \in V \times V$, совпадает с пространством $V' \times V'$. Именно это условие гарантирует невырожденность условий оптимальности. Напомним, что

$$F(y, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

Лемма 2. Пусть выполняются условия (i),(ii). Для любой пары $\hat{y} \in V \times V, \hat{u} \in U$ справедливо равенство

$$\text{Im}F'_y(y, u) = V' \times V'.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что задача

$$aA\xi + b\kappa_a(4|\hat{\theta}|^3\xi - \eta) = f_1, \quad \alpha A\eta + \kappa_a(\eta - 4|\hat{\theta}|^3\xi) = f_2$$

разрешима для всех $f_{1,2} \in V'$. Данная задача равносильна системе

$$aA\xi + \kappa_a\left(4b|\theta|^3 + \frac{a}{\alpha}\right)\xi = f_1 + \frac{\kappa_a}{\alpha}f_3, \quad \eta = \frac{1}{\alpha b}(f_3 - a\xi).$$

Здесь $f_3 = A^{-1}(f_1 + bf_2) \in V$. Разрешимость первого уравнения указанной системы очевидным образом следует из леммы Лакса-Мильграма.

В соответствии с леммой 2, лагранжиан задачи (CP) имеет вид

$$L(\theta, \varphi, u, p_1, p_2) = J_\lambda(\theta, u) + (aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, p_1) + (\alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu, p_2)$$

Здесь $p = \{p_1, p_2\} \in V \times V$ – сопряженное состояние. Если $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ – решение задачи (CP) , то в силу принципа Лагранжа [10] справедливы вариационные равенства $\forall v \in V, w \in U$

$$(\hat{\theta} - \theta_b, v)_\Gamma + (aAv + 4b\kappa_a|\hat{\theta}|^3v, p_1) - \kappa_a(4|\hat{\theta}|^3v, p_2) = 0, \quad b\kappa_a(v, p_1) + (\alpha Av + \kappa_a v, p_2) = 0, \quad (2.31)$$

$$\lambda(\hat{u}, w)_\Gamma - (Bw, p_2) = 0. \quad (2.32)$$

Таким образом, из условий (2.48), (2.49) получаем следующий результат, который вместе с уравнениями (2.47) для оптимальной тройки определяет систему оптимальности задачи (CP) . **Теорема 2.** Пусть выполняются условия (i),(ii). Если $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ – решение задачи (CP) , то существует единственная пара $\{p_1, p_2\} \in V \times V$ такая, что

$$aAp_1 + 4|\hat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) = B(\theta_b - \hat{\theta}), \quad \alpha Ap_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0 \quad (2.33)$$

и при этом $\lambda\hat{u} = p_2$.

2.3 граничная обратная задача с незадаанным краевым условием для интенсивности излучения

2.3.1 Постановка обратной задачи

Рассмотрим следующую систему полулинейных эллиптических уравнений, которая моделирует радиационный и диффузионный (сложный) теплообмен в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ [Pinnau07]-[Kovt14-1].

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.34)$$

Через θ – температура, φ – усредненная по всем направлениям интенсивность теплового излучения. Положительные параметры a , b , κ_a и α , описывающие свойства среды, являются заданными [Kovt14-1].

Пусть граница области состоит из двух участков, $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, так что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. На всей границе Γ задается тепловой поток q_b ,

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad x \in \Gamma. \quad (2.35)$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию γ , описывающую отражающие свойства границы [JVM-14]. В случае, если эта функция неизвестна на части границы Γ_2 , краевое условие для интенсивности излучения на Γ_2 не ставится, а в качестве условия переопределения на Γ_1 , в дополнение к условию на φ , задается температурное поле θ_b ,

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad x \in \Gamma_1. \quad (2.36)$$

Здесь через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали \mathbf{n} .

В данной работе предлагается оптимизационный метод решения задачи (2.34)-(2.36), который заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления для эквивалентной системы эллиптических уравнений. Для постановки задачи управления введем новую неизвестную функцию $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$. Складывая первое уравнение в (2.34) со вторым, умноженным на b , заключаем, что ψ – гармоническая функция. Исключая φ из первого уравнения в (2.34) и используя краевые условия (2.35), (2.36), получаем краевую задачу

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.37)$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \text{ на } \Gamma, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \quad \theta = \theta_b \text{ на } \Gamma_1. \quad (2.38)$$

Здесь $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$, $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$.

Сформулируем задачу оптимального управления, которая аппроксимирует задачу (2.37),(2.38). Задача состоит в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$\begin{aligned} J_\lambda(\theta, u) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf, \\ -a\Delta\theta + g(\theta) &= \frac{\kappa}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \\ a\partial_n\theta + s\theta &= q_b + s\theta_b, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \text{ на } \Gamma_1, \quad a\partial_n\theta = q_b, \quad \alpha\partial_n\psi = u \text{ на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь $\lambda, s > 0$ – регуляризирующие параметры.

Нелинейные модели сложного теплообмена в рамках P_1 приближения для уравнения переноса теплового излучения достаточно полно изучены. В работах [Pinnau07]-[Mesenev22] представлены постановки и анализ различных краевых, обратных и экстремальных задач для таких моделей. Интересные результаты анализа краевых задач сложного теплообмена, без использования P_1 приближения, получены в [Amosov16]-[Amosov20-1].

2.3.2 Разрешимость задачи оптимального управления

Рассмотрим пространства $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$, V' – пространство, сопряженное с V . Пространство H отождествляем с пространством H' так, что $V \subset H = H' \subset V'$. Через U обозначаем пространство управлений $L^2(\Gamma_2)$. Стандартную норму в H обозначаем $\|\cdot\|$, (f, v) – значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $f \in H$.

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda, s = \text{Const} > 0$,
- (ii) $0 < \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma_1), \theta_b, r \in L^2(\Gamma_1), q_b \in L^2(\Gamma)$.

Определим операторы $A_{1,2}: V \rightarrow V'$, $B_1: L^2(\Gamma_1) \rightarrow V'$, $B_2: U \rightarrow V'$ используя равенства, справедливые для любых $y, z \in V$, $f, v \in L^2(\Gamma_1)$, $h, w \in U$:

$$(A_1 y, z) = a(\nabla y, \nabla z) + s \int_{\Gamma_1} y z d\Gamma, \quad (A_2 y, z) = \alpha(\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma_1} \gamma y z d\Gamma,$$

$$(B_1 f, v) = \int_{\Gamma_1} f v d\Gamma, \quad (B_2 h, w) = \int_{\Gamma_2} h w d\Gamma.$$

Заметим, что билинейная форма $(A_1 y, z)$ определяет скалярное произведение в пространстве V и норма $\|z\|_V = \sqrt{(A_1 z, z)}$ эквивалентна стандартной норме V . Кроме того, определены непрерывные обратные операторы $A_{1,2}^{-1}: V' \mapsto V$. Для $y \in V$, $f \in L^2(\Gamma_1)$, $h \in V'$ справедливы неравенства

$$\|y\| \leq K_0 \|y\|_V, \quad \|B_1 f\|_{V'} \leq K_1 \|f\|_{L^2(\Gamma_1)}, \quad \|B_2 h\|_{V'} \leq K_2 \|h\|_U. \quad (2.40)$$

Здесь постоянные $K_j > 0$ зависят только от области Ω .

Используя введенные операторы, слабую формулировку краевой задачи, на решениях которой минимизируется функционал (2.39), нетрудно записать в виде

$$A_1 \theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi + f_1, \quad A_2 \psi = f_2 + B_2 u, \quad (2.41)$$

где $f_1 = B_1(q_b + s\theta_b) + B_2 q_b$, $f_2 = B_1 r$.

Для формализации задачи оптимального управления определим оператор ограничений $F(\theta, \psi, u): V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$,

$$F(\theta, \psi, u) = \{A_1 \theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi - f_1, A_2 \psi - f_2 - B_2 u, \}.$$

Задача (P_λ) . Найти тройку $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \psi, u) = 0. \quad (2.42)$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия (i), (ii), $u \in U$. Тогда существует единственное решение системы (2.41) и при этом

$$\begin{aligned} \|\theta\|_V &\leq \frac{K_0^2 \kappa_a}{\alpha} \|\psi\|_V + \|f_1\|_{V'}, \\ \|\psi\|_V &\leq \|A_2^{-1}\| (\|f_2\|_{V'} + K_2 \|u\|_U). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Доказательство. Из второго уравнения в (2.41) следует, что $\psi = A_2^{-1}(f_2 + B_2 u)$ и поэтому

$$\|\psi\|_V \leq \|A_2^{-1}\| (\|f_2\|_{V'} + K_2 \|u\|_U).$$

Однозначная разрешимость первого уравнения (2.41) с монотонной нелинейностью хорошо известна (см. например [Kufner]). Умножим скалярно это уравнение на θ , отбросим неотрицательное слагаемое $(g(\theta), \theta)$ и оценим правую часть, используя неравенство Коши-Буняковского. Тогда, с учетом неравенств (2.40), получаем

$$\|\theta\|_V^2 \leq \frac{\kappa_a}{\alpha} \|\psi\| \|\theta\| + \|f_1\|_{V'} \|\theta\|_V \leq \frac{K_0^2 \kappa_a}{\alpha} \|\psi\|_V \|\theta\|_V + \|f_1\|_{V'} \|\theta\|_V$$

В результате получаем оценки (2.43).

Теорема 1. При выполнении условий (i),(ii) существует решение задачи (P_λ) .

Доказательство. Обозначим через j_λ точную нижнюю грань целевого функционала J_λ на множестве $u \in U$, $F(\theta, \psi, u) = 0$ и рассмотрим последовательности такие, что $u_m \in U$, $\theta_m \in V$, $\psi_m \in V$, $J_\lambda(\theta_m, u_m) \rightarrow j_\lambda$,

$$A_1 \theta_m + g(\theta_m) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi_m + f_1, \quad A_2 \psi_m = f_2 + B_2 u_m. \quad (2.44)$$

Из ограниченности последовательности u_m в пространстве U следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_m\|_V \leq C, \quad \|\psi_m\|_V \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^6(\Omega)} \leq C.$$

Здесь через $C > 0$ обозначена наибольшая из постоянных, ограничивающих соответствующие нормы и не зависящих от m . Переходя при необходимости к подпоследовательностям, заключаем, что существует тройка $\{\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{\psi}\} \in U \times V \times V$,

$$u_m \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } U, \quad \theta_m, \psi_m \rightarrow \hat{\theta}, \hat{\psi} \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^4(\Omega). \quad (2.45)$$

Заметим также, что $\forall v \in V$ имеем

$$|([\theta_m]^4 - [\hat{\theta}]^4, v)| \leq 2 \|\theta_m - \hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)} \left(\|\theta_m\|_{L^6(\Omega)}^3 + \|\hat{\theta}\|_{L^6(\Omega)}^3 \right). \quad (2.46)$$

Результаты о сходимости (2.45) и неравенство (2.46) позволяют перейти к пределу в (2.44). В результате получим

$$A_1 \hat{\theta} + g(\hat{\theta}) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \hat{\psi} + f_1, \quad A_2 \hat{\psi} = f_2 + B_2 \hat{u}. \quad (2.47)$$

Поскольку целевой функционал слабо полунепрерывен снизу, то $j_\lambda \leq J_\lambda(\hat{\theta}, \hat{u}) \leq \liminf J_\lambda(\theta_m, u_m) = j_\lambda$ и поэтому тройка $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$ есть решение задачи (P_λ) .

2.3.3 Условия оптимальности первого порядка

Воспользуемся принципом Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [10],[11]. Невырожденность условий оптимальности гарантируется условием, что образ производной оператора ограничений $F(y, u)$, где $y = \{\theta, \psi\} \in V \times V$, совпадает с пространством $V' \times V'$. Последнее означает, что линейная система

$$A_1 \xi + g'(\theta) \xi - \frac{\kappa_a}{\alpha} \eta = q_1, \quad A_2 \eta = q_2$$

разрешима для всех $\theta \in V$, $q_1, q_2 \in V'$. Здесь $g'(\theta) = 4b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{\kappa_a}{\alpha}$. Из второго уравнения получаем $\eta = A_2^{-1}q_2$. Разрешимость первого уравнения при известном $\eta \in V$ очевидным образом следует из леммы Лакса–Мильграма. Отметим, что справедливость остальных условий принципа Лагранжа также очевидна.

Функция Лагранжа задачи (P_λ) имеет вид

$$L(\theta, \psi, u, p_1, p_2) = J_\lambda(\theta, u) + (A_1 \theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi - f_{1,p_1}) + (A_2 \psi - f_2 - B_2 u, p_2),$$

где $p = \{p_1, p_2\} \in V \times V$ – сопряженное состояние.

Пусть $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$ – решение задачи (P_λ) . Вычислив производные Гато функции Лагранжа по θ, ψ и u , получаем в силу принципа Лагранжа [10] следующие равенства $\forall v \in V, w \in U$

$$(B_1(\hat{\theta} - \theta_b), v) + (A_1 v + g'(\hat{\theta})v, p_1) = 0, \quad -\frac{\kappa_a}{\alpha}(v, p_1) + (A_2 v, p_2) = 0, \quad (2.48)$$

$$\lambda(B_2 \hat{u}, w) - (B_2 w, p_2) = 0. \quad (2.49)$$

Из условий (2.48), (2.49) вытекают уравнения для сопряженного состояния, которые вместе с уравнениями (2.47) для оптимальной тройки дают систему оптимальности задачи (P_λ) .

Теорема 2. Пусть выполняются условия (i), (ii). Если $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$ – решение задачи (P_λ) , то существует единственная пара $\{p_1, p_2\} \in V \times V$ такая, что

$$A_1 p_1 + g'(\hat{\theta})p_1 = -B_1(\hat{\theta} - \theta_b), \quad A_2 p_2 = \frac{\kappa_a}{\alpha} p_1, \quad \lambda \hat{u} = p_2|_{\Gamma_2}. \quad (2.50)$$

Замечание. Если рассмотреть приведенный целевой функционал $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$, где $\theta(u)$ компонента решения задачи (2.41), соответствующая управлению $u \in U$, то градиент функционала $\tilde{J}_\lambda(u)$ равен $\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2$. Здесь p_2 – компонента решения сопряженной системы (2.50), где $\hat{\theta} := \theta(u)$.

Глава 3. Теоретический анализ обратных задач сложного теплообмена

3.1 Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена

3.1.1 Введение

Процедура эндовенозной лазерной абляции (EVLA) безопасна и достаточно эффективна при лечении варикозного расширения вен. Во время ЭВЛА в поврежденную вену вводится лазерное оптическое волокно. Затем лазерное излучение передается по волокну, которое в это время вытягивается из вены. Конец оптического волокна обычно покрыт карбонизированным слоем (наконечник оптического волокна). Карбонизированный слой разделяет лазерную энергию на нагрев кончика волокна и излучение. Тепло от наконечника волокна передается через кровь и окружающие ткани за счет кондуктивной теплопередачи. Теплообмен значительно увеличивается за счет потока пузырьков, образующихся на нагретом кончике волокна. Излучение, попадающее в кровь и окружающие ткани, частично поглощается с выделением тепла. В результате генерируемая тепловая энергия вызывает значительный нагрев вены, что приводит к ее облитерации.

Математическая модель EVLA учитывает кондуктивную теплопередачу, а также передачу излучения и поглощение с выделением тепла. Поток пузырьков, образующихся на нагретом наконечнике волокна, вносит значительный вклад в распределение температуры в модельной области. В [1], основываясь на оценке экспериментальных данных, теплопередача потоком пузырьков моделируется с использованием кусочно-постоянного коэффициента теплопроводности, который зависит от температуры следующим образом: когда температура в некоторой точке достигает 95°C , коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз.

Задачи оптимального управления для математической модели EVLA изучены в [2,3]. В [2] ставится задача оптимального управления EVLA, которая заключается в аппроксимации заданного температурного профиля в определенной точке модельной области. В [3] изучается аналогичная [2] задача оптимального управления. Здесь целевой функционал берется таким образом, что его минимизация позволяет достичь заданного распределения температу-

ры в разных частях модельной области. Это позволяет обеспечить достаточно высокую температуру внутри вены для ее успешной облитерации и безопасную температуру в перивенозной ткани. Доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи, на основе которой показана разрешимость задачи оптимального управления. Предложен алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления. Его эффективность проиллюстрирована численным примером.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления для модели эндовенозной лазерной абляции в ограниченной трехмерной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Проблема состоит в том, чтобы свести к минимуму функционал

$$J(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \rightarrow \inf$$

на решениях начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi, & -\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, & x \in \Omega, & 0 < t < T \\ k(\theta) \partial_n \theta + \gamma (\theta - \theta_b)|_{\Gamma} &= 0, & \alpha \partial_n \varphi + 0.5 \varphi|_{\Gamma} &= 0, & \theta|_{t=0} &= \theta_0. \end{aligned}$$

В этом случае устанавливаются следующие ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_b} \leq \theta_*.$$

Здесь θ - температура, φ - интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, α - коэффициент диффузии оптического излучения, μ_a - коэффициент поглощения, $k(\theta)$ - коэффициент теплопроводности, $\sigma(x, t)$ произведение удельной теплоемкости и объемной плотности, u_1 описывает мощность источника, затрачиваемую на нагрев наконечника волокна, u_2 - мощность источника, затрачиваемая на излучение, χ равно характеристической функции части среды, в которой расположен наконечник волокна, деленной на объем наконечника волокна. Функции θ_b, θ_0 определяют граничное и начальное распределения температуры. Мы обозначим через ∂_n производную в направлении внешней нормали \mathbf{n} к границе Γ . Требуется обеспечить близость распределения температуры к желаемому температурному полю θ_d в конечный момент времени $t = T$ в поддомене G_d , при этом температура в поддомене G_b не превышает постоянного критического значения значение θ_* .

3.1.2 Формализация задачи оптимального управления

В дальнейшем мы предполагаем, что Ω является ограниченной областью Липшица, $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Обозначим через L^p , $1 \leq p \leq \infty$ пространство Лебега и через H^1 пространство Соболева W_2^1 . Пространство $L^p(0, T; X)$ (соответственно, $C([0, T]; X)$) состоит из p -интегрируемых по $(0, T)$ (соответственно, непрерывных по $[0, T]$) функции со значениями в банаховом пространстве X . Обозначим $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ и V' двойственное значение V . Затем мы отождествляем H с его двойным пространством H' таким, что $V \subset H = H' \subset V'$ и обозначаем через $\|\cdot\|$ норму в H , и на (h, v) значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее с внутренним произведением в H , если $h \in H$.

Пусть выполняются следующие условия:

- (i) $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, $|\partial\sigma/\partial t| \leq \sigma_2$, $\sigma_j = \text{Const}$.
- (ii) $0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1$, $|k'(s)| \leq k_2$, $s \in \mathbb{R}$, $k_j = \text{Const}$.
- (iii) $\theta_0 \in H$, $\gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\gamma \geq \gamma_0 = \text{Const} > 0$, $\theta_b \in L^\infty(\Sigma)$, $\theta_d \in G_d$.

(iv) $0 < \alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1$, $0 < \beta_0 \leq \beta(x) \leq \beta_1$, $x \in \Omega$ Мы определяем нелинейный оператор $A : V \rightarrow V'$ и линейный оператор $B : V \rightarrow V'$, используя следующее равенство, действительное для любого $\theta, v, \varphi, w \in V$:

$$(A(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma\theta v d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma\theta v d\Gamma,$$

где

$$h(s) = \int_0^s k(r)dr; \quad (B\varphi, w) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla w) + (\beta\varphi, w) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \varphi w d\Gamma$$

Далее, с помощью следующей билинейной формы, мы определяем внутреннее произведение в V :

$$(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v) + \int_{\Gamma} uv d\Gamma.$$

Соответствующая норма эквивалентна стандартной норме пространства V .

Определение 1. Пусть $u_{1,2} \in L^2(0, T)$. Пара $\theta, \varphi \in L^2(0, T; V)$ слабое решение задачи (1), (2) если $\sigma\theta' \in L^2(0, T; V')$ и

$$\sigma\theta' + A(\theta) - \beta\varphi = g + u_1\chi, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad B\varphi = u_2\chi,$$

где

$$\theta' = d\theta/dt, \quad g \in L^\infty(0, T; V'), \quad (g, v) = \int_{\Gamma} \gamma \theta_b v d\Gamma$$

Замечание 1. Так как $(\sigma\theta)' = \sigma\theta' + \theta\partial\sigma/\partial t \in L^2(0, T; V')$ and $\sigma\theta \in L^2(0, T; V)$, then $\sigma\theta \in C([0, T]; H)$, и поэтому начальные условия имеют физические основания.

Из леммы Лакса-Милграма следует, что для любой функции $g \in H$ существует единственное решение уравнения $B\varphi = g$. Более того, обратный оператор $B^{-1} : H \rightarrow V$ является непрерывным. Следовательно, мы можем исключить интенсивность излучения $\varphi = u_2 B^{-1}\chi$ и сформулировать задачу оптимального управления следующим образом. Проблема (CP)

$$J(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \rightarrow \inf, \quad \sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0, \\ \theta|_{G_b} \leq \theta_*, \quad u \in U_{ad}.$$

Здесь

$$U_{ad} = \{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in L^2(0, T), u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}$$

3.1.3 Предварительные результаты

В статье [5] получен следующий результат.

Лемма 1. Пусть условия (i) - (iv) выполняются и $u \in L^2(0, T; V')$. Тогда есть решение проблемы

$$\sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

такое что $\theta \in L^\infty(0, T; H)$, а также верна следующая оценка:

$$\|\theta(t)\|^2 + \|\theta\|_{L^2(0, T; V')}^2 \leq C \left(\|\theta_0\|^2 + \|g + u\|_{L^2(0, T; V')}^2 \right),$$

где $C > 0$ не зависит от θ_0, g , и u .

Лемма 2. Пусть условия (i) - (iv) выполняются, $u = 0, \theta_0 \leq \theta_*$ другими словами, в $\Omega, \theta_b \leq \theta_*$ то есть Σ , и θ будут решением задачи (4). Тогда $\theta \leq \theta_*$ в $\Omega \times (0, T)$.

Доказательство. Умножая в смысле внутреннего произведения в H первое уравнение в (4) на $v = \max\{\theta - \theta_*, 0\} \in L^2(0, T; V)$, мы получаем

$$(\sigma v', v) + (k(\theta) \nabla v, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma \theta v d\Gamma = 0.$$

Отбрасывая неотрицательные второе и третье слагаемые, мы приходим к оценке

$$\frac{d}{dt}(\sigma v, v) \leq (\sigma_t v, v) \leq \sigma_2 \|v\|^2.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени и принимая во внимание, что $v|_{t=0} = 0$, мы получаем

$$\sigma_0 \|v(t)\|^2 \leq (\sigma v(t), v(t)) \leq \sigma_2 \int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau$$

Основываясь на лемме Гронуолла, мы приходим к выводу, что $v = 0$ и, следовательно, $\theta \leq \theta_*$ в $\Omega \times (0, T)$

Леммы 1 и 2 подразумевают непустое множество допустимых пар задачи (CP) и ограниченность минимизирующей последовательности допустимых пар $\{\theta_m, u_m\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$ так, что $J(\theta_m) \rightarrow j = \inf J$, где

$$\sigma \theta'_m + A(\theta_m) = g + u_m, \quad \theta_m(0) = \theta_0, \quad \theta_m|_{G_b} \leq \theta_*.$$

Аналогично [4], переходя к пределу в системе (5), можно установить разрешимость задачи (CP).

Theorem 1. Пусть условия (i)-(iv) выполняются, $\theta_0 \leq \theta_*$ а.е. в Ω , $\theta_b \leq \theta_*$ а.е. в Σ . Тогда решение проблемы (CP) существует.

3.1.4 Метод штрафов

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления с параметром $\varepsilon > 0$, решения которой аппроксимируют решение задачи (CP) как $\varepsilon \rightarrow +0$. Problem (CP $_{\varepsilon}$)

$$J_{\varepsilon}(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_b} F(\theta) dx dt \rightarrow \inf$$

$$\sigma \theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}$$

Здесь,

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta \leq \theta_*, \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{if } \theta > \theta_* \end{cases}$$

Оценки, представленные в лемме 1, позволяют, аналогично доказательству теоремы 1, доказать разрешимость задачи со штрафом. **Теорема 2.** Пусть выполняются условия (i)-(iv). Тогда существует решение проблемы (CP_ε) .

Рассмотрим аппроксимативные свойства решений задачи со штрафом. Пусть $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ будет решением проблемы (CP_ε) и $\{\theta, u\}$ будет решением проблемы (CP) . Тогда,

$$\sigma\theta'_\varepsilon + A(\theta_\varepsilon) = g + u_\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon(0) = \theta_0.$$

так как $\theta|_{G_b} \leq \theta_*$, верны следующие неравенства:

$$\int_{G_d} (\theta_\varepsilon|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \leq J(\theta), \quad \int_0^T \int_{G_b} F(\theta_\varepsilon) dx dt \leq \varepsilon J(\theta).$$

Из полученных оценок, используя при необходимости подпоследовательности в качестве $\varepsilon \rightarrow +0$, аналогично, как и в доказательстве теоремы 1, мы можем доказать существование функций $\hat{u} \in U_{ad}, \hat{\theta} \in L^2(0, T; V)$ таких, что $u_\varepsilon \rightarrow \hat{u}$ слабо в $L^2(0, T; H), \theta_\varepsilon \rightarrow \hat{\theta}$ слабо в $L^2(0, T; V)$, сильно в $L^2(0, T; H)$;

$$\int_0^T \int_{G_b} F(\theta_\varepsilon) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{G_b} F(\hat{\theta}) dx dt \quad \text{и} \quad \int_0^T \int_{G_b} F(\theta_\varepsilon) dx dt \rightarrow 0, \quad \text{как } \varepsilon \rightarrow +0$$

Следовательно, $F(\hat{\theta}) = 0$ и $\hat{\theta}|_{G_b} \leq \theta_*$. Результатов сходимости достаточно, чтобы перейти к пределу как $\varepsilon \rightarrow +0$ в системе состояний (6) и доказать, что предельная пара $\{\hat{\theta}, \hat{u}\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$ является приемлемым для проблемы (CP) . Поскольку функционал J является слабо полунепрерывным снизу, то есть

$$j \leq J(\hat{\theta}) \leq \liminf J(\theta_\varepsilon) \leq J(\theta) = j = \inf J$$

Тогда пара $\{\hat{\theta}, \hat{u}\}$ это решение проблемы (CP) . **Теорема 3.** Пусть выполняются условия (i)-(iv), $\theta_0 \leq \theta_*$ а.е. в $\Omega, \theta_b \leq \theta_*$ а.е. в Σ . If $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ решения проблемы (CP_ε) for $\varepsilon > 0$, тогда существует последовательность вида $\varepsilon \rightarrow +0, u_\varepsilon \rightarrow \hat{u}$ слабо в $L^2(0, T; H), \theta_\varepsilon \rightarrow \hat{\theta}$ слабо в $L^2(0, T; V)$, сильно в $L^2(0, T; H)$, where $\{\hat{\theta}, \hat{u}\}$ есть решение проблемы (CP) .

3.2 АНАЛИЗ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА КОШИ

3.2.1 Введение

Процедура эндовенозной лазерной абляции (EVLA) безопасна и достаточно эффективна при лечении варикозного расширения вен [1]. Во время ЭВЛА в поврежденную вену вводится лазерное оптическое волокно. Затем лазерное излучение передается по волокну, которое в это время вытягивается из вены. Конец оптического волокна обычно покрыт карбонизированным слоем (наконечник оптического волокна). Карбонизированный слой разделяет лазерную энергию на нагрев наконечника оптического волокна и излучение. Тепло от наконечника оптического волокна передается крови за счет кондуктивного теплообмена, теплопередача значительно увеличивается за счет потока пузырьков, образующихся на нагретом наконечнике волокна. Излучение, попадающее в кровь и окружающие ткани, частично поглощается с выделением тепла. В результате генерируемая тепловая энергия вызывает значительный нагрев вены, что приводит к ее облитерации (закрытию вены).

Математическое моделирование радиационных и тепловых процессов, возникающих при ЭВЛА, важно для определения оптимальных параметров излучения, обеспечивающих достаточно высокую температуру внутри вены для успешной облитерации, с другой стороны, генерируемое температурное поле должно быть относительно безопасным для тканей, окружающих вену. Результаты численного моделирования EVLA для длин волн в диапазоне от 810 до 1470 и различных диаметров жил обсуждаются в [2-4]. В [5] отмечается важность математического моделирования для выбора оптимальной мощности лазерного излучения и скорости отката волокна. Обычно при выборе оптимальных параметров излучения используется прямое множественное моделирование [2-5]. Такой подход неэффективен с практической точки зрения. Более того, вопросы, связанные с существованием и уникальностью оптимального режима, остаются открытыми.

Наиболее перспективным подходом к выбору оптимальных параметров излучения является рассмотрение задачи оптимального управления для уравнений реакционно-диффузионного типа, описывающих процедуру EVLA. Различные подходы к анализу и оптимизации параметров реакционно-диффузионных моделей, описывающих различные природные явления, можно найти в [6-9].

Задачи оптимального управления для модели EVLA рассмотрены в [10,11]. В [10] ставится задача оптимального управления для реакционно-диффузионной модели, описывающей процедуру EVLA, которая заключается в аппроксимации заданного температурного профиля в определенной точке модельной области. В [11] изучается аналогичная [10] задача оптимального управления. Здесь целевой функционал берется таким образом, что его минимизация позволяет достичь заданного распределения температуры в разных частях модельной области. Это позволяет обеспечить достаточно высокую температуру внутри вены для ее успешной облитерации и безопасную температуру в перивенозной ткани. Доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи, на основе которой показана разрешимость задачи оптимального управления. Предложен алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления. Его эффективность проиллюстрирована численным примером.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления для квазилинейных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена, моделирующих процесс эндовенозной лазерной абляции в ограниченной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Проблема заключается в том, чтобы свести к минимуму функционал

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \rightarrow \inf$$

на решениях начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi \\ - \operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ \theta &= 0|_{\Gamma}, \quad \alpha \partial_n \varphi + 2^{-1} \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \end{aligned}$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*$$

Здесь G_1 и G_2 подмножества Ω, θ представляет собой разницу между реальной температурой (в единицах Цельсия) и постоянной граничной температурой, φ является ли интенсивность излучения усредненной по всем направлениям, α является коэффициентом диффузии фотонов, β является коэффициентом поглощения, $k(\theta)$ является коэффициентом теплопроводности, $\sigma(x, t)$ является произведением удельной теплоемкости и объемной плотности, u_1 описывает мощность источника, затрачиваемую на нагрев наконечника волокна, u_2 это мощность источника, расходуемая на излучение, P является максимальной мощностью лазерного источника, χ является характерной функцией той части среды, в которой волокно наконечник расположен деленным на объем волоконного наконечника. Обратите внимание, что значения параметров u_1 and u_2 определяются методом карбонизации кончика волокна. Обзор некоторых способов карбонизации приведен в [10].

Таким образом, при моделировании процедуры EVLA мы будем использовать диффузионную модель, которая учитывает кондуктивный теплообмен, а также перенос излучения и поглощение с выделением тепла. Поток пузырьков, образующихся на нагретом наконечнике оптического волокна, вносит значительный вклад в температурное поле. В [2-4], основываясь на оценке экспериментальных данных, теплопередача потоком пузырьков моделируется с использованием кусочно-постоянного коэффициента теплопроводности, который зависит от температуры следующим образом: когда температура в некоторой точке достигает 95°C , коэффициент теплопроводность увеличивается в 200 раз.

Следуя задаче оптимального управления, требуется обеспечить заданное распределение температурного поля θ_d в поддомене G_1 , при этом температура в поддомене G_2 не может превышать (если это возможно) критическое значение $\theta_* = \text{Const} > 0$.

3.2.2 Формализация задачи оптимального управления

Будем далее предполагать, что Ω является липшицевой ограниченной областью, $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Обозначим через L^p , $1 \leq p \leq \infty$, пространство Лебега, через H^1 пространство Соболева W_2^1 , через H_0^1 под-

пространство функций из H^1 с нулевыми граничными значениями, а через $L^p(0, T; X)$ пространство Лебега функций из L^p , определенный на $(0, T)$, со значениями в банаховом пространстве X .

Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, а пространство V' двойственно к V . Затем мы отождествляем H с его двойственным пространством H' таким, что $V \subset H^1(\Omega) \subset H = H' \subset (H^1(\Omega))' \subset V'$, и обозначим через $\|\cdot\|$ норму в H , а через (h, v) значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $h \in H$. Скалярный продукт в V определяется как $(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v)$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$(c1) \quad \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, \quad |\partial \sigma / \partial t| \leq \sigma_2$$

$$(c2) \quad k_0 \leq k(s) \leq k_1, \quad |k'(s)| \leq k_2, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$(c3) \quad \theta_0 \in H$$

$$(c4) \quad \alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1, \beta_0 \leq \beta(x) \leq \beta_1, \quad x \in \Omega,$$

где σ_i, k_i, α_i , и β_i положительные константы.

Определим нелинейный оператор $A : V \rightarrow V'$ и линейный оператор $B : H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))'$ используя следующие равенства, справедливые для любого $\theta, v \in V, \varphi, w \in H^1(\Omega)$

$$(A(\theta), v) = (k(\theta) \nabla \theta, \nabla v) = (\nabla h(\theta), \nabla v)$$

$$(B\varphi, w) = (\alpha \nabla \varphi, \nabla w) + (\beta \varphi, w) + 2^{-1} \int_{\Gamma} \varphi w d\Gamma$$

где

$$h(s) = \int_0^s k(r) dr.$$

Definition 1. Пусть $u_{1,2} \in L^2(0, T)$. Пара функций $\theta \in L^2(0, T; V)$, $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ тогда a является слабым решением задачи (1), (2) если $\sigma \theta' \in L^2(0, T; V')$ и

$\sigma \theta' + A(\theta) - \beta \varphi = u_1 \chi, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad B\varphi = u_2 \chi$ where $\theta' = d\theta/dt$. Из леммы Лакса-Мильграма следует, что для любой функции $g \in H$ существует единственное решение уравнения $B\varphi = g$. Более того, обратный оператор $B^{-1} : H \rightarrow H^1(\Omega)$ непрерывен. Поэтому можно исключить интенсивность излучения $\varphi = u_2 B^{-1} \chi$ и сформулировать задачу оптимального управления следующим образом.

3.2.3 Problem (P)

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \rightarrow \inf$$

$$\sigma\theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*, \quad u \in U_{ad},$$

где

$$U_{ad} = \{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in L^2(0, T), \\ u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}$$

3.2.4 Предварительные результаты

Давайте рассмотрим проблему

$$\sigma\theta' + A(\theta) = f, \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Справедлива следующая лемма [11].

Лемма 1. Пусть выполняются условия (с1)-(с3) и $f \in L^2(0, T; V')$. Тогда существует решение задачи (3) такое, что $\theta \in L^\infty(0, T; H)$ и справедливы следующие оценки:

$$\|\theta(t)\|^2 \leq \frac{K}{\sigma_0} \exp \frac{\sigma_2 t}{\sigma_0} \quad \text{a.e. on } (0, T) \\ \int_0^T \|\theta(t)\|_V^2 dt \leq \frac{K}{k_0} \left(1 + \frac{\sigma_2 T}{\sigma_0} \exp \frac{\sigma_2 T}{\sigma_0} \right)$$

где $K = \sigma_1 \|\theta_0\|^2 + k_0^{-1} \|f\|_{L^2(0, T; V')}^2$.

Следующий результат важен для установления непустоты множества допустимых пар управляющих состояний. *Лемма 2.* Пусть выполняются условия (с1)-(с3) и $f = 0$, $\theta_0 \leq \theta_*$ а.е. в Ω , и θ решение задачи (3). Тогда $\theta \leq \theta_*$ а.е. в $\Omega \times (0, T)$.

Proof. Скалярно умножим в H первое уравнение (3) на $v = \max\{\theta - \theta_*, 0\} \in L^2(0, T; V)$ получаем

$$(\sigma v', v) + (k(\theta) \nabla v, \nabla v) = 0.$$

Отбрасывая неотрицательный второй член, приходим к оценке

$$\frac{d}{dt}(\sigma v, v) \leq (\sigma_t v, v) \leq \sigma_2 \|v\|^2.$$

Учитывая, что $v|_{t=0} = 0$, проинтегрировать последнее неравенство по времени. Тогда

$$\sigma_0 \|v(t)\|^2 \leq (\sigma v(t), v(t)) \leq \sigma_2 \int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau$$

На основании леммы Гронуолла заключаем, что $v = 0$ и, следовательно, $\theta \leq \theta_*$ почти всюду в $\Omega \times (0, T)$.

4. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Theorem 1. Пусть выполняются условия (с1)-(с3), и $\theta_0 \leq \theta_*$ а.е. в Ω . Тогда существует решение задачи (P).

Proof. Согласно леммам 1 и 2 множество допустимых пар непусто. Рассмотрим минимизирующую последовательность допустимых пар $\{\theta_m, u_m\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$ такой, что $J(\theta_m) \rightarrow j = \inf J$, где

$$\sigma \theta'_m + A(\theta_m) = u_m, \quad \theta_m(0) = \theta_0, \quad \theta_m|_{G_2} \leq \theta_*.$$

Ограниченность в $L^2(0, T; H)$ множества допустимых управлений U_{ad} влечет по лемме 1 оценки:

$$\begin{aligned} \|\theta_m\|_{L^\infty(0, T; H)} &\leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \\ \|h(\theta_m)\|_{L^2(0, T; V)} &\leq C. \end{aligned}$$

Здесь и далее при доказательстве теоремы через C обозначаются константы, не зависящие от m . Оценки (5), используя при необходимости подпоследовательности, приводят к существованию функций $u \in U_{ad}$, $\theta \in L^2(0, T; V)$, $\chi \in L^2(0, T; V)$ такое, что

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow u \text{ weakly in } L^2(0, T; H), \\ \theta_m &\rightarrow \theta \text{ weakly in } L^2(0, T; V), \\ &\text{*}-\text{weakly in } L^\infty(0, T; H), \\ h(\theta_m) &\rightarrow \chi \text{ weakly in } L^2(0, T; V). \end{aligned}$$

Результаты сходимости (6) достаточны для предельного перехода при $m \rightarrow \infty$ в системе (4) и доказательства того, что предельная функция $\theta \in L^2(0, T; V)$ такова, что $\sigma\theta' \in L^2(0, T; V')$ удовлетворяет равенству

$$(\sigma\theta', v) + (\nabla\chi, \nabla v) = (u, v) \quad \forall v \in V$$

и начальное условие верно.

Следующая оценка гарантирует компактность последовательности θ_m in $L^2(Q)$:

$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s+\delta) - \theta_m(s)\|^2 ds \leq C\delta$$

Из неравенства (7), используя при необходимости подпоследовательности, получаем, что $\theta_m \rightarrow \theta$ in $L^2(Q)$. Следовательно, в силу неравенства

$$|h(\theta_m) - h(\theta)| \leq k_1 |\theta_m - \theta|,$$

следует, что $h(\theta_m) \rightarrow h(\theta)$ in $L^2(Q)$ и, следовательно $\chi = h(\theta)$. Кроме того, предельная функция θ удовлетворяет неравенству $\theta|_{G_2} \leq \theta_*$. Следовательно, допустима предельная пара $\{\theta, u\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$. Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу,

$$j \leq J(\theta) \leq \liminf J(\theta_m) = j,$$

тогда пара $\{\theta, u\}$ является решением задачи (P).

3.2.5 Задача штрафов

Чтобы численно решить задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями $\theta|_{G_2} \leq \theta_*$, рассмотрим следующую задачу штрафов.

Problem (P_ε) : $J_\varepsilon(\theta) \rightarrow \inf$, где

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\theta) &= \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dx dt, \\ \sigma\theta' + A(\theta) &= u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Здесь,

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta \leq \theta_* \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{if } \theta > \theta_* \end{cases}$$

Оценки, представленные в лемме 1, также позволяют доказать разрешимость задачи со штрафом аналогично доказательству теоремы 1.

Theorem 2. Пусть выполняются условия (с1)-(с3). Тогда существует решение задачи (P_ε) .

Рассмотрим аппроксимативные свойства решений задачи со штрафом. Пусть $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ — решения задачи (P_ε) и $\{\theta, u\}$ — решение задачи (P) . Затем,

$$\sigma\theta'_\varepsilon + A(\theta_\varepsilon) = u_\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon(0) = \theta_0.$$

Since $\theta|_{G_2} \leq \theta_*$, the following inequality is true:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{G_1} (\theta_\varepsilon - \theta_d)^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dxdt \\ \leq \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt = J(\theta) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{G_1} (\theta_\varepsilon - \theta_d)^2 dxdt &\leq J(\theta) \\ \int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dxdt &\leq \varepsilon J(\theta) \end{aligned}$$

Из полученных оценок, используя при необходимости подпоследовательности, соответствующие $\varepsilon_k \rightarrow +0$, аналогично доказательству теоремы 1, устанавливаем существование функций $\hat{u} \in U_{ad}$, $\hat{\theta} \in L^2(0, T; V)$, такой, что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow \hat{u} \text{ weakly in } L^2(0, T; H) \\ \theta_\varepsilon &\rightarrow \hat{\theta} \text{ weakly in } L^2(0, T; V) \\ &\text{strongly in } L^2(0, T; H). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dxdt &\rightarrow \int_0^T \int_{G_2} F(\hat{\theta}) dxdt \\ \int_0^T \int_{G_2} F(\theta_\varepsilon) dxdt &\rightarrow 0, \text{ as } \varepsilon \rightarrow +0 \end{aligned}$$

что гарантирует, что $F(\hat{\theta}) = 0$ and $\hat{\theta}|_{G_2} \leq \theta_*$.

Результаты сходимости достаточны для предельного перехода по $\varepsilon \rightarrow +0$ в системе (8) и доказательства того, что предельная пара $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\} \in L^2(0, T; V) \times U_{ad}$ допустимо для задачи (P). Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу,

$$j \leq J(\widehat{\theta}) \leq \liminf J(\theta_\varepsilon) \leq J(\theta) = j = \inf J,$$

тогда пара $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$ есть решение задачи (P).

Theorem 3. Пусть выполнены условия (с1)-(с3), и $\theta_0 \leq \theta_*$ а.е. in Ω . Если $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ есть решения проблемы (P_ε) for $\varepsilon > 0$, тогда существует такая последовательность $\varepsilon \rightarrow +0$ что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow \widehat{u} \text{ weakly in } L^2(0, T; H) \\ \theta_\varepsilon &\rightarrow \widehat{\theta} \text{ strongly in } L^2(0, T; H), \end{aligned}$$

где $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$ есть решение проблемы (P).

3.2.6 Реализация численного алгоритма

Рассмотрим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления (P_ε) для случая, когда параметры управления u_1 и u_2 не зависят от времени. На каждой итерации алгоритма решается линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой требуется найти минимум функционала:

$$\begin{aligned} \widehat{J}_\varepsilon(\theta) &= \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_*} (\theta - \theta_*)^2 dx dt \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad} \end{aligned}$$

с соответствующими ограничениями

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\widehat{\theta}) \nabla \theta) &= u, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \\ \theta|_\Gamma &= 0, \quad \theta(x, 0) = \theta_0. \end{aligned}$$

Здесь,

$$\begin{aligned} U_{ad} &= \{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in \mathbb{R}, \\ &\quad u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}, \\ G_* &= \left\{x \in G_2 : \hat{\theta}(x, t) > \theta_*\right\}. \end{aligned}$$

Функция $\hat{\theta}$ описывает поле температуры, найденное на предыдущей итерации.

В качестве зависимости коэффициента теплопроводности от температуры используется гладкая аппроксимация кусочно-постоянной функции, рассмотренной в [2 – 4].

Как легко видеть, задача (9), (10) сводится к нахождению минимума квадратичной функции параметров u_1 и u_2 :

$$\hat{J}_\varepsilon(u_1\Theta_1 + u_2\Theta_2 + \Theta_3) \rightarrow \inf$$

на треугольнике $\{u_1, u_2 \in \mathbb{R} : u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}$. Функции Θ_1, Θ_2 и Θ_3 вычисляются заранее как решения следующих линейных начально-краевых задач для $x \in \Omega, t \in (0,)$:

$$\begin{aligned} \sigma \partial \Theta_1 / \partial t - \operatorname{div} \left(k(\hat{\theta}) \nabla \Theta_1 \right) &= \chi, \\ \Theta_1|_\Gamma &= 0, \quad \Theta_1(x, 0) = 0 \\ \sigma \partial \Theta_2 / \partial t - \operatorname{div} \left(k(\hat{\theta}) \nabla \Theta_2 \right) &= \beta B^{-1}\chi, \\ \Theta_2|_\Gamma &= 0, \quad \Theta_2(x, 0) = 0 \\ \sigma \partial \Theta_3 / \partial t - \operatorname{div} \left(k(\hat{\theta}) \nabla \Theta_3 \right) &= 0 \\ \Theta_3|_\Gamma &= 0, \quad \Theta_3(x, 0) = \theta_0. \end{aligned}$$

При проведении численных экспериментов использовалась модельная область в цилиндрической системе координат с угловой симметрией, как показано на рис. 1. Толщина карбонизированного слоя равна 0,2 , скорость вытягивания волокна 2 /s. Рассматривалось излучение с длиной волны 1064 . Оптические и теплофизические параметры среды взяты из [2 – 4].

Для демонстрации сходимости итерационного алгоритма в качестве решения прямой начально-краевой задачи для $(u_1, u_2) = (3, 7)$ (здесь и далее единицы в ваттах). Области G_1 и G_2 берутся как достаточно малые окрестности точек (1.5, 10), (3.5, 10). Для реализации итерационного алгоритма мы взяли $\varepsilon = 0.3$ и θ_* , соответствующие 47°C.

Рисунок 1: Область.

Рисунок 2: Температурные профили: желаемая температура (черный), 1-е (зеленое), 2-е (синее) и 3-е (красное) приближения.

Аппроксимации решения в точке $(1.5, 10)$ показаны на рис. 2. Аппроксимации после 1-го, 2-го и 3-го шагов итерационного алгоритма отмечены зеленым цветом $((u_1, u_2) = (2.5, 4.8))$, синим $((u_1, u_2) = (3.4, 3.5))$ и красным $((u_1, u_2) = (4.2, 0.9))$ соответственно. Черная линия показывает желаемую температуру, соответствующую $(u_1, u_2) = (3, 7)$. Максимальное значение температуры в точке $(3.5, 10)$ равно $48,8^{\circ}\text{C}$. Отметим, что при $(u_1, u_2) = (3, 7)$ максимальное значение температуры в точке $(3.5, 10)$ равно $50,2^{\circ}\text{C}$.

Эксперимент демонстрирует возможность снижения температуры в околоунозной ткани при сохранении температурного режима внутри вены.

3.3 ГРАНИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

3.3.1 Inverse problem

В липшицевой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma := \partial\Omega$ рассмотрим следующую систему нелинейных уравнений [1]:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Здесь θ — нормированная температура, φ — нормированная усредненная интенсивность излучения. Приведены положительные параметры a, b, κ_a и α , описывающие внутренние свойства среды [1].

Предположим, что $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ такое, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. На границе Γ задаем тепловой поток q_b ,

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad x \in \Gamma.$$

Граничное условие для интенсивности излучения при Γ_2 не задано. В качестве условия паратерминации на границе Γ_1 зададим следующие условия:

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad x \in \Gamma_1.$$

Оптимизационный метод решения задачи (1)-(3) заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления для эквивалентной системы эллиптических уравнений.

Определим новую неизвестную функцию $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$. Складывая первое уравнение в (1) со вторым, умноженным на b , заключаем, что ψ является гармонической функцией. Исключая φ из первого уравнения (1) и используя граничные условия (2) и (3), получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} a\Delta\theta + g(\theta) &= \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \\ a\partial_n\theta &= q_b, \quad \text{on } \Gamma, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \quad \theta = \theta_b \text{ on } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Здесь $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|^3 + a\kappa_a\theta/\alpha$, $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$.

Задача оптимального управления, аппроксимирующая задачу (4), (5), заключается в нахождении тройки $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf$$

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega$$

$$a\partial_n\theta + s\theta = q_b + s\theta_b, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r \text{ on } \Gamma_1, \quad a\partial_n\theta = q_b, \quad \alpha\partial_n\psi = u \text{ on } \Gamma_2.$$

Здесь $\lambda, s > 0$ — регуляризующие параметры.

3.3.2 Solvability of the control problem

Пусть $U = L^2(\Gamma_2)$ — пространство управлений, $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$, а V' двойственно к V . Тогда мы отождествим H с его двойственным пространством H' таким, что $V \subset H = H' \subset V'$, и обозначим через $\|\cdot\|$ норму в H , а через (f, v) значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $f \in H$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

- (i) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda, s = \text{Const} > 0$,
- (ii) $0 < \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma_1)$, $\theta_b, r \in L^2(\Gamma_1)$, $q_b \in L^2(\Gamma)$.

Пусть $A_{1,2} : V \rightarrow V'$, $B_1 : L^2(\Gamma_1) \rightarrow V'$, $B_2 : U \rightarrow V'$ такое, что для любого $y, z \in V$, $f, v \in L^2(\Gamma_1)$, и $h, w \in U$

$$(A_1 y, z) = a(\nabla y, \nabla z) + s \int_{\Gamma_1} yz d\Gamma, \quad (A_2 y, z) = \alpha(\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma_1} \gamma yz d\Gamma,$$

$$(B_1 f, v) = \int_{\Gamma_1} f v d\Gamma, \quad (B_2 h, w) = \int_{\Gamma_2} h w d\Gamma$$

Слабая постановка краевой задачи на решения, функционал (1) которых минимизируется, имеет вид:

$$A_1\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi + f_1, \quad A_2\psi = f_2 + B_2u$$

где $f_1 = B_1(q_b + s\theta_b) + B_2q_b$ и $f_2 = B_1r$.

Определим оператор ограничения $F(\theta, \psi, u) : V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$,

$$F(\theta, \psi, u) = \left\{ A_1\theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi - f_1, A_2\psi - f_2 - B_2u \right\}$$

Задача (P_λ) . Найдём тройку $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \psi, u) = 0.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (i), (ii). Тогда существует хотя бы одно решение (P_λ)

3.3.3 Optimality conditions

В силу принципа Лагранжа для гладких выпуклых экстремальных задач [2] невырожденность условий оптимальности гарантируется условием что образ производной оператора $F(y, u)$, где $y = \{\theta, \psi\} \in V \times V$, совпадает с $V' \times V'$. Это означает, что система

$$A_1 \xi + g'(\theta) \xi - \frac{\kappa_a}{\alpha} \eta = q_1, \quad A_2 \eta = q_2$$

решаемо для всех $\theta \in V, q_1, q_2 \in V'$. Здесь $g'(\theta) = 4b\kappa_a|\theta|^3 + \kappa_a/\alpha$. Из второго уравнения получаем $\eta = A_2^{-1}q_2$. Разрешимость первого уравнения при известном $\eta \in V$ очевидным образом следует из леммы Лакса-Мильграма. Справедливость остальных условий принципа Лагранжа очевидна.

Лагранжиан задачи (P_λ) имеет вид

$$L(\theta, \psi, u, p_1, p_2) = J_\lambda(\theta, u) + \left(A_1 \theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi - f_1, p_1\right) + (A_2 \psi - f_2 - B_2 u, p_2),$$

где $p = \{p_1, p_2\} \in V \times V$ — сопряженное состояние.

Пусть $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$ будет решением задачи (P_λ) . По принципу Лагранжа [2, Th. 1,5], получаем следующие равенства $\forall v \in V, w \in U$:

$$\begin{aligned} \left(B_1(\hat{\theta} - \theta_b), v\right) + \left(A_1 v + g'(\hat{\theta})v, p_1\right) &= 0, \quad -\frac{\kappa_a}{\alpha}(v, p_1) + (A_2 v, p_2) = 0, \\ \lambda(B_2 \hat{u}, w) - (B_2 w, p_2) &= 0. \end{aligned}$$

Из (9), (10) следуют уравнения для сопряженного состояния.

Theorem 2. Пусть выполняются условия (i), (ii) и $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$ есть решение (P_λ) , тогда есть единственная пара $\{p_1, p_2\} \in V \times V$ такая, что

$$A_1 p_1 + g'(\hat{\theta})p_1 = -B_1(\hat{\theta} - \theta_b), \quad A_2 p_2 = \frac{\kappa_a}{\alpha} p_1, \quad \lambda \hat{u} = p_2|_{\Gamma_2}.$$

3.3.4 Аппроксимация обратной задачи

Докажем, что если пара $\{\theta, \varphi\} \in V \times V$ является решением задачи (1)-(3) и, кроме того, $q = a\partial_n \varphi|_{\Gamma_2} \in L^2(\Gamma_2)$, то решения задачи (P_λ) как $\lambda \rightarrow +0$ аппроксимирует решение задачи (1)-(3). Заметим, что пара для всех $v \in V$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} a(\nabla \theta, \nabla v) + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi, v) &= \int_{\Gamma} q_b v d\Gamma, \\ \alpha(\nabla \varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma_1} \gamma \varphi v d\Gamma + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3, v) &= \int_{\Gamma_1} \gamma \theta_b^4 v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q v d\Gamma, \end{aligned}$$

и при этом $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$.

Theorem 3. Пусть выполнены условия (i), (ii) и существует решение задачи (1)-(3), удовлетворяющее равенствам (12) и (13). Если $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$ является решением задачи (P_λ) при $\lambda > 0$, тогда существует последовательность $\lambda \rightarrow +0$ такая, что $\theta_\lambda \rightarrow \theta_*$, $(\psi_\lambda - a\theta_\lambda)/\alpha b \rightarrow \varphi_*$ слабо в V , сильно в H , где θ_*, φ_* есть решение задачи (1)-(3).

Глава 4. Численные методы и комплексы программ

4.1 Первая статья

Пусть функционал $J(\theta)$ удовлетворяет условиям, указанным в ???. Для удобства введём переобозначение $\hat{J}(u) := J(\theta(u))$, $\hat{J} : L^2(\Gamma_1) \rightarrow \mathbb{R}$. Здесь $\theta(u)$ – температурное поле задачи (??)–(??) отвечающее управлению $u \in L^2(\Gamma_1)$. Согласно формуле (2.14) градиент функционала $\hat{J}(u)$ [grenkin_13] имеет вид

$$\hat{J}'(u) = (\varphi(u) - \theta_b^4)p_2,$$

где $\varphi(u)$ есть интенсивность излучения, p_2 – соответствующая переменная сопряжённой системы.

Предлагаемый алгоритм решения выглядит следующим образом:

Оператор проекции $P_{ad} : U \rightarrow U_{ad}$ определён следующим образом

$$P_{ad}[v] = \begin{cases} u_1, & \text{если } v \leq u_1 \\ v, & \text{если } u_1 < v < u_2 \\ u_2, & \text{если } v \geq u_2 \end{cases}$$

Приведём далее примеры расчётов для двумерного случая. Положим $\Omega = \{(x, y), 0 \leq x, y \leq 1\}$, $l = 1$ см. Граница $\partial\Omega$ состоит из участков:

$$\Gamma_0 = \{x = \{0, 1\}, y \in [0, 1]\}$$

$$\Gamma_1 = \{x \in [0, 1], y = 0\} \text{ — участок с неизвестными отражающими свойствами,}$$

$$\Gamma_2 = \{x \in [0, 1], y = 1\} \text{ — участок наблюдения.}$$

Будем также далее считать, что $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$, $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$, $\beta = 0.00005[\text{см}/\text{с}]$, $\kappa = 1[\text{см}^{-1}]$, $\kappa_s = 0$, $A = 0$, $\gamma = 0.3$. Указанные параметры соответствуют стеклу [grenkin_13]. Температуру на границе Ω положим равной $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$.

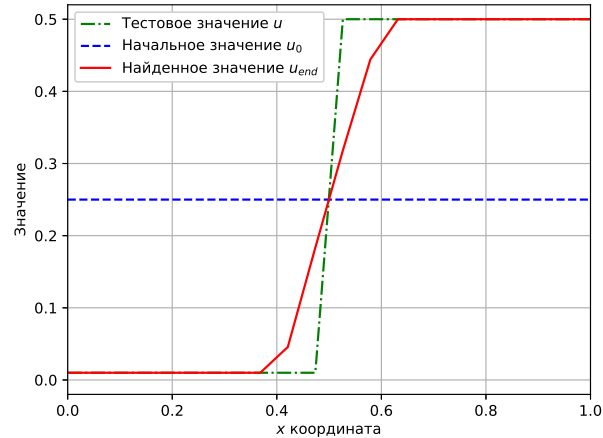
При указанных параметрах для первого эксперимента выберем следующее тестовое значение функции u (рис. 4.1??):

$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leq 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases} \quad (4.1)$$

и для второго эксперимента (рис. 4.1??):

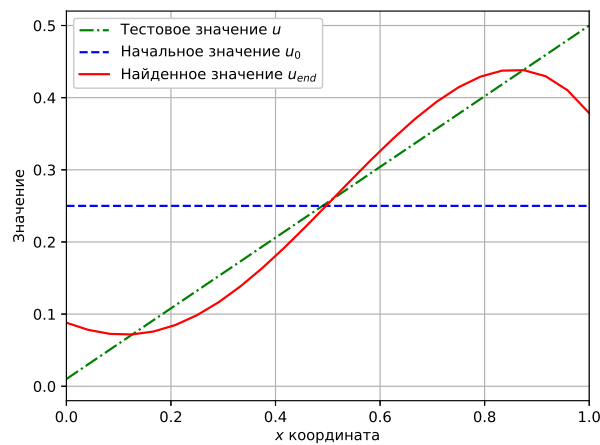
$$u(x) = 0.49x + 0.01. \quad (4.2)$$

[Первый эксперимент]



[Второй

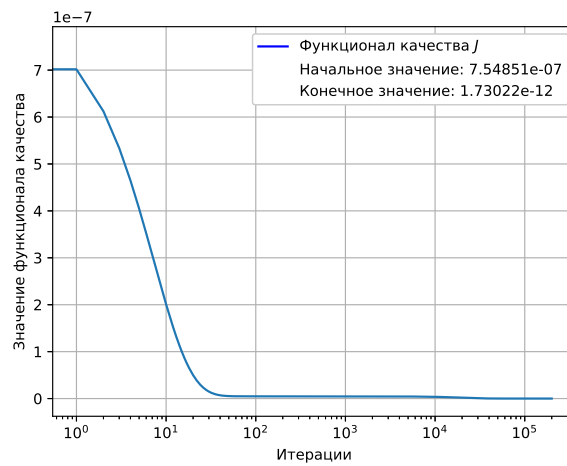
эксперимент]

Рисунок 4.1 — Тестовая функция u , начальная u_0 , найденная функция u_{end} .

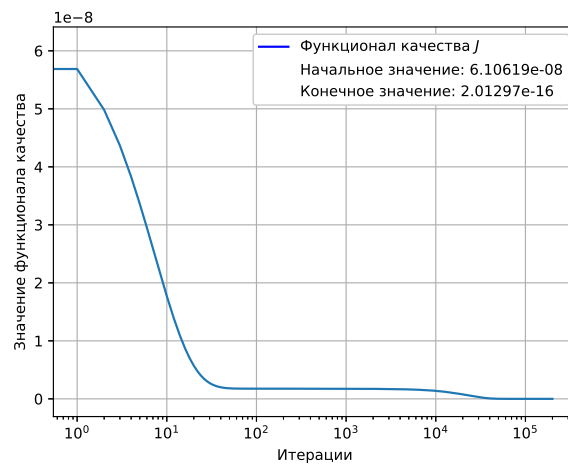
Вычислим решение прямой задачи (2.1)–(2.2) для этих случаев. Полученное температурное поле на участке наблюдения Γ_2 выберем в качестве θ_0 . Далее, применяя предложенный алгоритм находим квазирешение обратной задачи (2.1)–(2.4). Эффективность алгоритма, а также значение u_0 в первом и втором случаях иллюстрируются рис. 4.1. На рис. 4.2 показана динамика функционала качества по итерациям.

Замечание. В предложенных примерах потребовалось $2 \cdot 10^6$ итераций для нахождения квазирешения u . В то же время температурное поле на участке наблюдения Γ_2 становится близким к θ_0 уже на 10^2 итерации. Также наблюдается существенное падение скорости уменьшения функционала качества с каждой итерацией после того, как среднее значение найденной функции контроля становится близко к тестовой функции.

[Первый эксперимент]



[Второй



эксперимент]

Рисунок 4.2 — Динамика функции $\hat{J}(u)$ по итерациям.

4.2 Вторая статья

4.2.1 Аппроксимация задачи с условиями типа коши

Рассмотрим краевую задачу (2.34)-(2.36) для уравнений сложного теплообмена, в которой нет краевых условий на интенсивность излучения. Существование $\theta, \varphi \in H^2(\Omega)$, удовлетворяющих (2.34)-(2.36) для достаточно гладких θ_b, q_b и достаточные условия единственности решения установлены в [СММР20]. Покажем, что решения задачи (CP) при $\lambda \rightarrow +0$ аппроксимируют решение задачи (2.34)-(2.36).

Теорема 3. Пусть выполняются условия (i),(ii) и существует решение задачи (2.34)-(2.36). Если $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ – решение задачи (CP) для $\lambda > 0$, то существует последовательность $\lambda \rightarrow +0$ такая, что

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_*, \quad \varphi_\lambda \rightarrow \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

где θ_*, φ_* – решение задачи (2.34)-(2.36).

Доказательство. Пусть $\theta, \varphi \in H^2(\Omega)$ – решение задачи (2.34)-(2.36), $u = \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) \in U$. Тогда

$$aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu,$$

где $r := a(\theta_b + q_b)$. Поэтому, с учетом того, что $\theta|_\Gamma = \theta_b$,

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2}\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2}\|u_\lambda\|_\Gamma^2 \leq J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2}\|u\|_\Gamma^2.$$

Следовательно,

$$\|u_\lambda\|_\Gamma^2 \leq C, \quad \|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow +0.$$

Здесь и далее $C > 0$ не зависит от λ . Из ограниченности последовательности u_λ в пространстве U следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_\lambda\|_V \leq C, \quad \|\varphi_\lambda\|_\lambda \leq C.$$

Поэтому можно выбрать последовательность $\lambda \rightarrow +0$ такую, что

$$u_\lambda \rightarrow u_* \text{ слабо в } U, \quad \theta_\lambda, \varphi_\lambda \rightarrow \theta_*, \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^4(\Omega). \quad (4.3)$$

Результаты (4.7) позволяют перейти к пределу при $\lambda \rightarrow +0$ в уравнениях для $\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda$ и тогда

$$aA\theta_* + b\kappa_a([\theta_*]^4 - \varphi_*) = Br, \quad \alpha A\varphi_* + \kappa_a(\varphi_* - [\theta_*]^4) = Bu_*. \quad (4.4)$$

При этом $\theta_*|_\Gamma = \theta_b$. Из первого уравнения в (4.8), с учетом, что $r = a(\theta_b + q_b)$, выводим

$$-a\Delta\theta_* + b\kappa_a([\theta_*]^4 - \varphi_*) = 0 \text{ п.в. в } \Omega, \quad \theta_* = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b \text{ п.в. на } \Gamma.$$

Из второго уравнения в (4.8) следует, что $-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = 0$ почти всюду в Ω . Таким образом, пара θ_*, φ_* – решение задачи (2.34)-(2.36).

Замечание. Из ограниченности последовательности u_λ в пространстве U следует ее слабая относительная компактность и существование последовательности (возможно неединственной) $\lambda \rightarrow +0$ такой, что $u_\lambda \rightarrow u_*$ слабо в U . Для практического решения задачи (2.34)-(2.36) важно то, что для любой последовательности $\lambda \rightarrow +0$ справедлива оценка $\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 \leq C\lambda$, а поскольку $\partial_n\theta_\lambda = \theta_b + q_b - \theta_\lambda$, то также $\|\partial_n\theta_\lambda - q_b\|_\Gamma^2 \leq C\lambda$. Указанные неравенства гарантируют, что граничные значения $\theta_\lambda, \partial_n\theta_\lambda$ при малых λ аппроксимируют краевые условия задачи (2.34)-(2.36).

4.2.2 Численные эксперименты

Представим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления. Пусть $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$, где $\theta(u)$ компонента решения задачи (2.34),(2.36), соответствующая управлению $u \in U$.

В соответствии с (2.50) градиент функционала $\tilde{J}_\lambda(u)$ равен

$$\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2.$$

Здесь p_2 – соответствующая компонента сопряженного состояния из системы (2.50), где $\hat{\theta} := \theta(u)$.

Значение параметра ε выбирается эмпирически таким образом, чтобы значение $\varepsilon(\lambda u_k - p_2)$ являлось существенной поправкой для u_{k+1} . Количество итераций N выбирается достаточным для выполнения условия $J_\lambda(\theta_k, u_k) - J_\lambda(\theta_{k+1}, u_{k+1}) < \delta$, где $\delta > 0$ определяет точность расчетов.

Примеры, рассмотренные ниже, иллюстрируют работоспособность предложенного алгоритма при малых, что важно, значениях параметра регуляризации $\lambda \leq 10^{-12}$. В первом примере выполнены тестовые расчеты для куба. Во втором примере приводится сравнение расчетов по предложенному алгоритму с результатами работы [CNSNS19].

Отметим, что для численного решения прямой задачи с заданным управлением использовался метод простой итерации для линеаризации задачи и ее решения методом конечных элементов. Решение сопряженной системы, которая является линейной при заданной температуре, не вызывает трудностей. Для численного моделирования использовался солвер FEniCS [fenics, dolfin].

Исходный код экспериментов можно найти по ссылке [mesenev-github].

Пример 1.

Приведем примеры расчетов для куба $\Omega = (x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq l$. Будем считать, что $l = 1$ см, $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$, $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$, $\kappa_a = 1[\text{см}^{-1}]$, $\alpha = 0.3[\text{см}]$. Указанные параметры соответствуют стеклу [Grenkin5]. Параметр регуляризации $\lambda = 10^{-12}$.

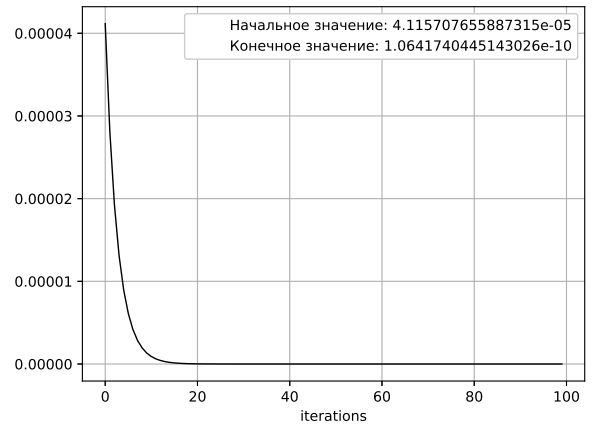
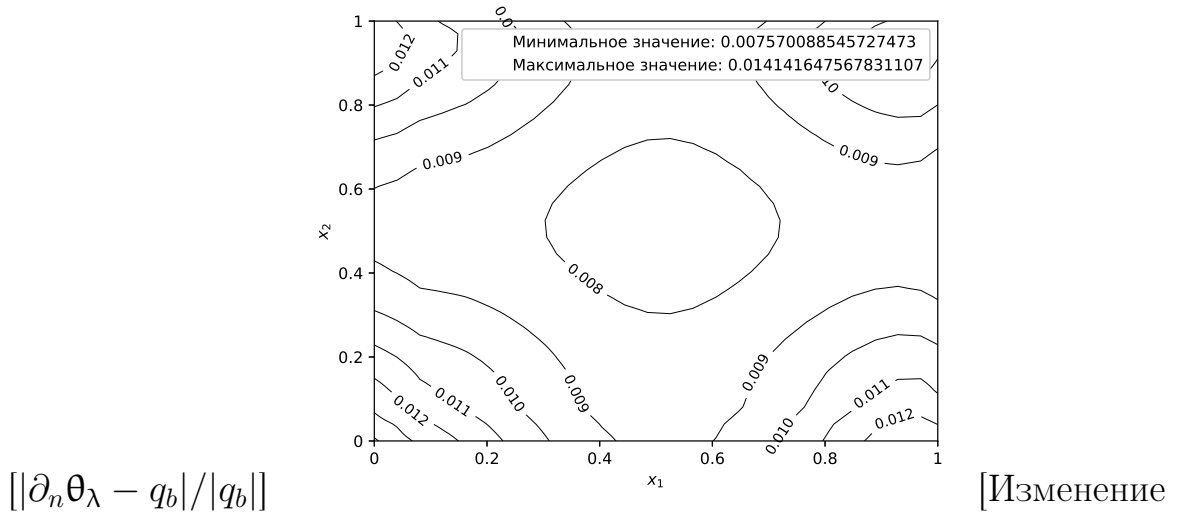
Пусть граничные данные r и u в (2.35) имеют вид:

$$\begin{aligned} r &= 0.7, \\ u &= \hat{u} = 0.5. \end{aligned}$$

Далее рассчитываем состояние θ и φ как решение задачи (2.34), (2.35) и в качестве θ_b выбираем граничные значения функции θ на Γ . Значения нормальной производной $\partial_n \theta$ на Γ должны соответствовать значениям $q_b = r/a - \theta_b$. Применяя предложенный алгоритм с начальным приближением $u_0 = 0.1$, находим приближенное решение $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ задачи (CP). Для демонстрации того, что алгоритм находит приближенное решение задачи с данными Коши для температуры, важно сравнить значения $\partial_n \theta_\lambda$ на Γ с q_b .

На рисунке ?? представлен модуль относительного отклонения $\partial_n \theta_\lambda$ от q_b на грани куба в плоскости $z = l$, где $\partial_n \theta_\lambda = \partial \theta_\lambda / \partial z$, а также динамика функционала качества, определяющего норму разности $\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2$. На остальных гранях куба значения относительного отклонения имеют тот же порядок малости.

Пример 2. Сравним работу предложенного алгоритма с результатами статьи [CNSNS19], где соавтором был один из авторов данной работы. Задача рассматривается в области $\Omega \times (-L, L)$, где $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_{1,2} < d\}$ и



функционала качества по итерациям]

Рисунок 4.3 — Результаты первого эксперимента

при больших L сводится к двумерной задаче с вычислительной областью Ω . Выбраны следующие значения параметров задачи: $d = 1(\text{m})$, $a = 0.92 \cdot 10^{-4} (\text{m}^2/\text{s})$, $b = 0.19 (\text{m}/\text{s})$, $\alpha = 0.0333 (\text{m})$ и $\kappa_a = 1 (\text{m}^{-1})$. Параметры соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400°C .

Функции θ_b , q_b в краевом условии (2.36) заданы следующим образом: $\theta_b = \hat{\theta}|_\Gamma$, $q_b = \partial_n \hat{\theta}|_\Gamma$, где $\hat{\theta} = (x_1 - 0.5)^2 - 0.5x_2 + 0.75$.

Приближенное решение задачи с данными Коши, представленное в [CNSNS19] получено путем решения эллиптической задачи четвертого порядка для температуры методом установления по времени. Использовались H^2 конформные конечные элементы Богнера-Фокса-Шмитта и солвер FeliCs, разработанный в техническом университете Мюнхена. Решение стабилизировалось через 120 секунд, но вычисления на каждом временном шаге потребовали довольно значительных затрат [CNSNS19].

На рис. ?? представлено температурное поле, полученное предложенным в данной статье методом, достаточно точно совпадающее с результатом

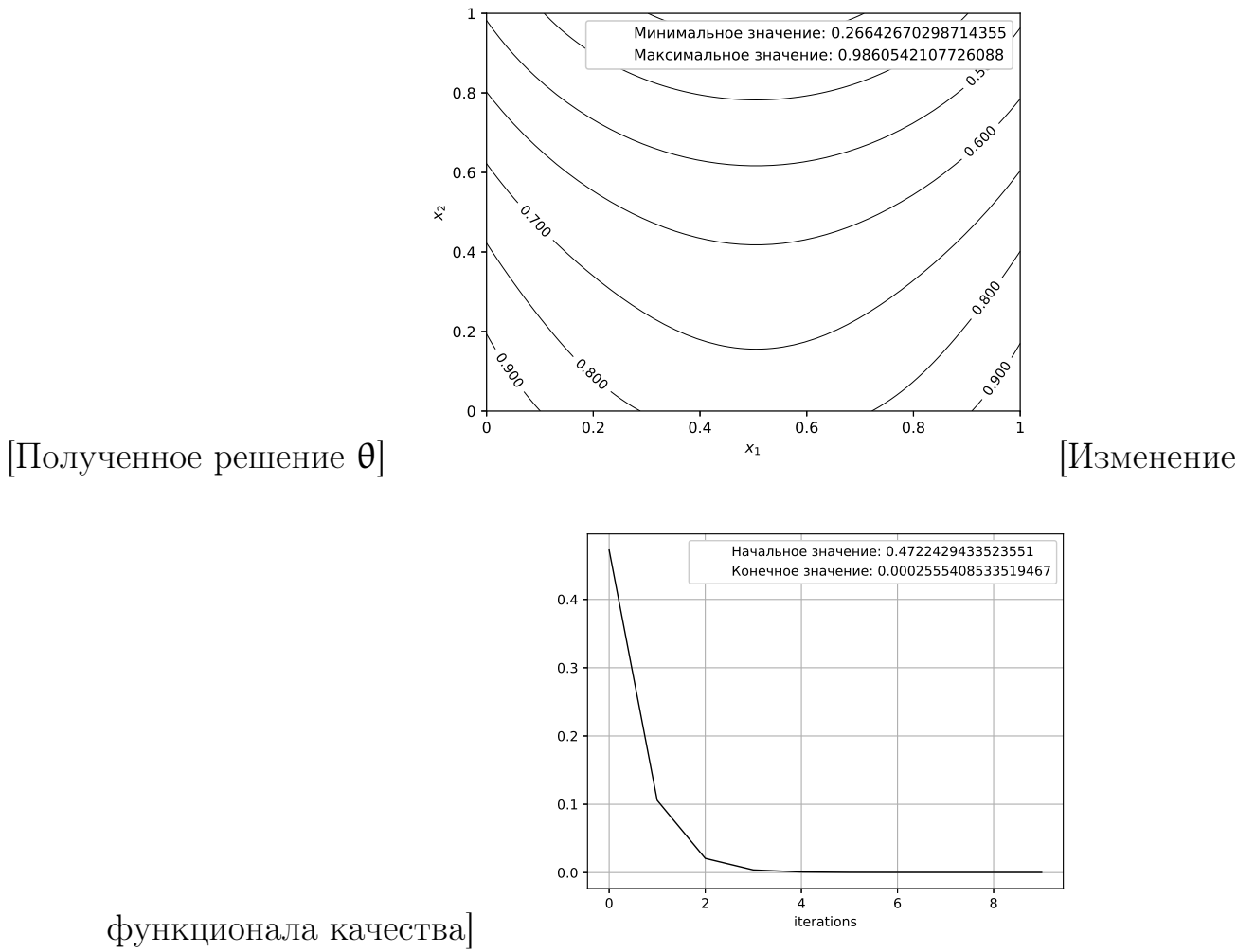


Рисунок 4.4 — Результаты второго эксперимента

в [CNSNS19]. Величина $\|\partial_n \theta_\lambda - q_b\|_{L^2(\Gamma)} / \|q_b\|_{L^2(\Gamma)}$ равна 0.000567. Значение функционала качества, определяющего норму разности $\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2$, равно 0.000255 и стабилизируется после 10 итераций ??.

Представленные численные примеры иллюстрируют, что предложенный алгоритм успешно справляется с нахождением численного решения задачи (2.34)-(2.36).

4.3 Вторая статья

4.3.1 Аппроксимация решения без заданного условия излучения на границе

Покажем, что если существует пара $\{\theta, \varphi\} \in V \times V$ – решение обратной задачи (2.34)-(2.36) и при этом $q = a\partial_n \varphi|_{\Gamma_2} \in L^2(\Gamma_2)$, то решения задачи (P_λ) при $\lambda \rightarrow +0$ аппроксимируют решение задачи (2.34)-(2.36).

Предварительно заметим, что указанная пара для всех $v \in V$ удовлетворяет равенствам

$$a(\nabla \theta, \nabla v) + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi, v) = \int_{\Gamma} q_b v d\Gamma, \quad (4.5)$$

$$\alpha(\nabla \varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma_1} \gamma \varphi v d\Gamma + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3, v) = \int_{\Gamma_1} \gamma \theta_b^4 v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q v d\Gamma \quad (4.6)$$

и при этом $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (i), (ii) и существует решение задачи (2.34)-(2.36), удовлетворяющее равенствам (4.5), (4.6). Если $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$ – решение задачи (P_λ) для $\lambda > 0$, то существует последовательность $\lambda \rightarrow +0$ такая, что

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_*, \quad \frac{1}{\alpha b}(\psi_\lambda - a\theta_\lambda) \rightarrow \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

где θ_*, φ_* – решение задачи (2.34)-(2.36).

Доказательство. Умножим равенство (4.5) на α , (4.6) на αb и сложим равенства. Тогда, полагая $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$, $u = \alpha b q + \alpha q_b|_{\Gamma_2}$, получаем

$$\alpha(\nabla \psi, \nabla v) + \int_{\Gamma_1} \gamma \psi v d\Gamma = \int_{\Gamma_1} r v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u v d\Gamma.$$

Здесь $r = \alpha b \gamma \theta_b^4 + \alpha q_b + a \gamma \theta_b$. Поэтому $A_2 \psi = f_2 + B_2 u$.

Из (4.5), с учетом условия $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$ выводим равенство $A_1 \theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi + f_1$. Таким образом, тройка $\{\theta, \psi, u\} \in V \times V \times U$ является допустимой для задачи (P_λ) и следовательно

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2} \|\theta_\lambda - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_\lambda\|_U^2 \leq J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2.$$

Тогда

$$\|u_\lambda\|_U^2 \leq \|u\|_U^2, \quad \|\theta_\lambda - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow +0.$$

Из ограниченности последовательности u_λ в пространстве U следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_\lambda\|_V \leq C, \quad \|\psi_\lambda\|_V \leq C,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от λ . Поэтому можно выбрать последовательность $\lambda \rightarrow +0$ такую, что

$$\begin{aligned} u_\lambda \rightarrow u_* \quad \text{слабо в } U, \quad \theta_\lambda, \psi_\lambda \rightarrow \theta_*, \psi_* \quad \text{слабо в } V, \quad \text{сильно в } H, L^4(\Omega), \\ \theta_\lambda|_{\Gamma_1} \rightarrow \theta_*|_{\Gamma_1} \quad \text{сильно в } L^2(\Gamma_1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Результаты (4.7) позволяют перейти к пределу при $\lambda \rightarrow +0$ в уравнениях для $\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda$ и тогда

$$A_1 \theta_* + g(\theta_*) = \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi_* + f_1, \quad A_2 \psi_* = f_2 + B_2 u_*, \quad \theta_*|_{\Gamma_1} = \theta_b. \quad (4.8)$$

Полагая $\varphi_* = \frac{1}{\alpha b}(\psi_* - a\theta_*)$, заключаем, что пара θ_*, φ_* — решение задачи (2.34)-(2.36).

4.3.2 Численные эксперименты

Представим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления. Пусть $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$, где $\theta(u)$ компонента решения задачи (2.34),(2.36), соответствующая управлению $u \in U$.

В соответствии с (2.50) градиент функционала $\tilde{J}_\lambda(u)$ равен

$$\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2.$$

Здесь p_2 — соответствующая компонента сопряженного состояния из системы (2.50), где $\hat{\theta} := \theta(u)$.

Значение параметра ε выбирается эмпирически таким образом, чтобы значение $\varepsilon(\lambda u_k - p_2)$ являлось существенной поправкой для u_{k+1} . Количество итераций N выбирается достаточным для выполнения условия $J_\lambda(\theta_k, u_k) - J_\lambda(\theta_{k+1}, u_{k+1}) < \delta$, где $\delta > 0$ определяет точность расчетов.

Примеры, рассмотренные ниже, иллюстрируют работоспособность предложенного алгоритма при малых, что важно, значениях параметра регуляризации $\lambda \leq 10^{-12}$. Численное решение прямой задачи с заданным управлением проводилось методом Ньютона для линеаризации задачи и ее решения методом конечных элементов. Решение сопряженной системы, которая является линейной при заданной температуре, не вызывает трудностей. Для численного моделирования использовался солвер FEniCS [fenics],[dolfin]. Исходный код экспериментов можно найти по ссылке [mesenev-github].

Пример 1. Рассмотрим куб $\Omega = (x, y, z) : 0 < x, y, z < l$ с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z), 0 \leq x, y \leq l, z = 0, l\}, \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1.$$

Будем считать, что $l = 1$ см, $a = 0.6[\text{см}^2/\text{с}]$, $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$, $\kappa_a = 1[\text{см}^{-1}]$, $\alpha = 0.3[\text{см}]$. Указанные параметры соответствуют стеклу [Grenkin5]. Параметр регуляризации $\lambda = 10^{-12}$.

Пусть граничные данные обратной задачи в (2.35), (2.36) имеют вид $q_b = 0.5$ и $\theta_b = 0.1 + z/2$. Обратную задачу решаем, используя предложенный оптимизационный алгоритм с параметром регуляризации $\lambda = 10^{-12}$ и начальным приближением управления $u_0 = 0$.

На фиг. ??, ?? представлены полученные поля θ и φ на грани куба $z = 1$. Начальное значение целевого функционала 0.025 и через сто итераций становится равным $5 \cdot 10^{-5}$.

Пример 2. Рассмотрим двумерный случай, где область Ω является квадратом с круговой полостью,

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x, y < l, (x - l/2)^2 + (y - l/2)^2 > \rho^2\}, \quad l = 1 \text{ см.}, \quad \rho = 0.15 \text{ см.}$$

Условия для интенсивности излучения неизвестны на внутренней границе $\Gamma_2 = \{(x, y) : (x - l/2)^2 + (y - l/2)^2 = \rho^2\}$, а условие переопределения ставится на $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_2$. Параметры среды такие же как в примере 1, а граничные данные q_b и θ_b положим равными

$$\theta_b = 0.5, \quad q_b = \begin{cases} 0.2, & \text{если } x \in \Gamma_1 \\ -0.2, & \text{если } x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

На фиг. ??, ?? представлены полученные поля θ и φ . Начальное значение

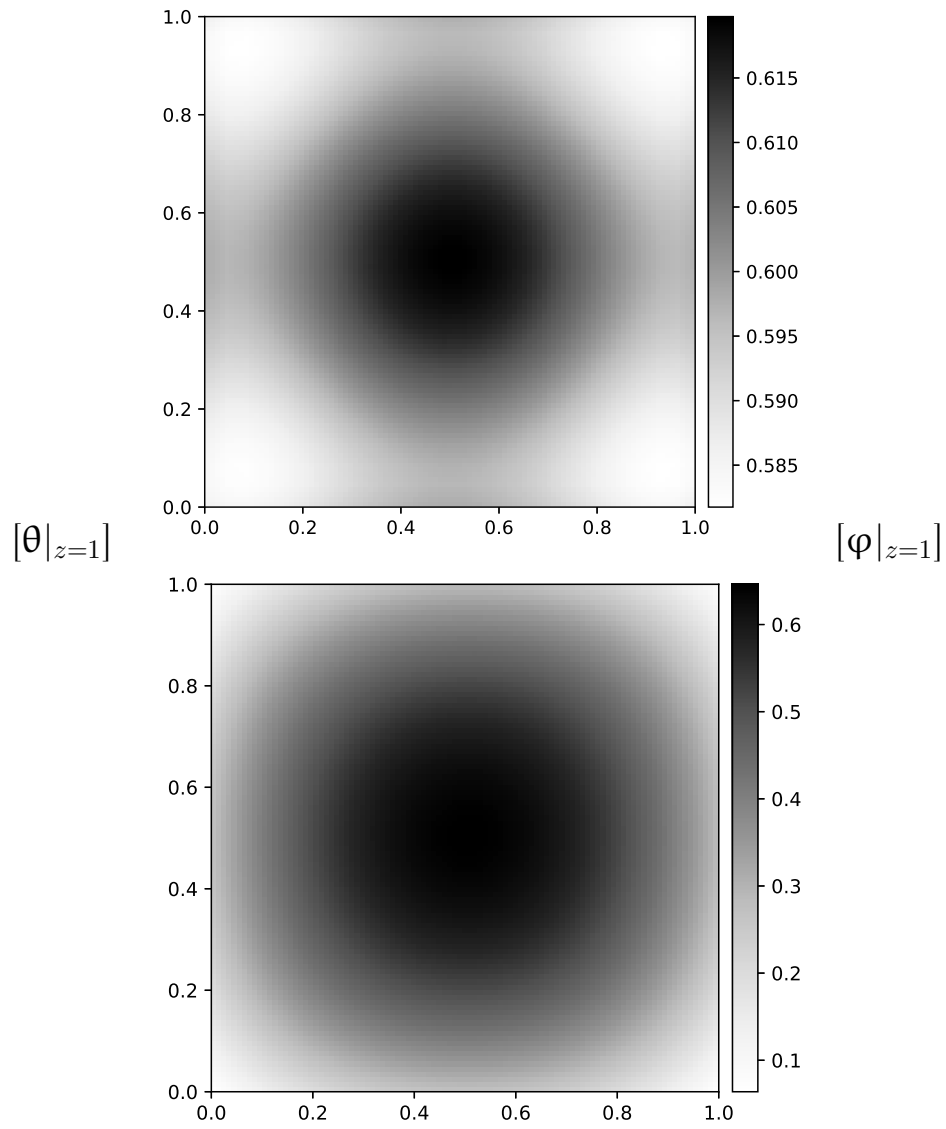


Рисунок 4.5 — Результаты первого эксперимента

целевого функционала 0.045 и через тридцать итераций становится равным $6.2 \cdot 10^{-5}$.

Представленные численные примеры демонстрируют успешную работу предложенного алгоритма численного решения граничной обратной задачи (2.34)-(2.36).

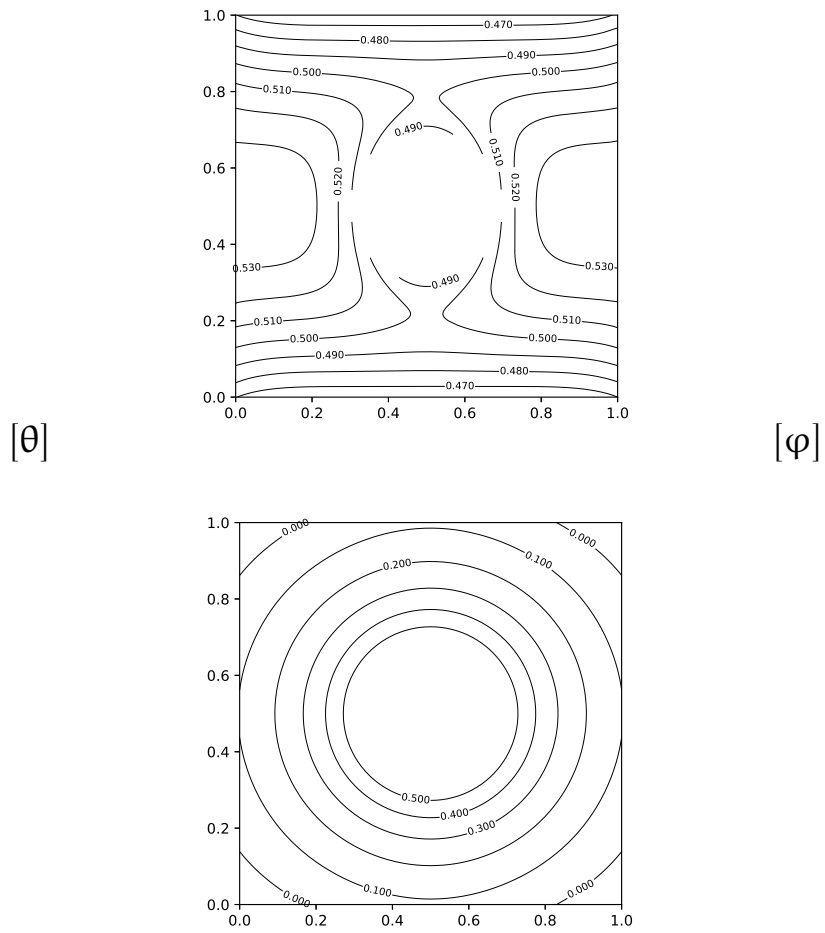


Рисунок 4.6 — Результаты второго эксперимента

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. На основе анализа ...
2. Численные исследования показали, что ...
3. Математическое моделирование показало ...
4. Для выполнения поставленных задач был создан ...

И какая-нибудь заключающая фраза.

Последний параграф может включать благодарности. В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Иванову И. И. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Сидорова А. А. и Петрова Б. Б. за помощь в работе с образцами, Рабиновича В. В. за предоставленные образцы и обсуждение результатов, Занудятину Г. Г. и авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации. Автор также благодарит много разных людей и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список сокращений и условных обозначений

$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\}$	и снова коэффициенты разложения Ми в дальнем поле соответствующие электрическим и магнитным мультиполям. Добавлено много текста, так что описание группы условных обозначений значительно превысило высоту этой группы...
$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\}$	коэффициенты разложения Ми в дальнем поле соответствующие электрическим и магнитным мультиполям
$\left. \begin{matrix} \mathbf{N}_{eln}^{(j)} & \mathbf{N}_{o1n}^{(j)} \\ \mathbf{M}_{o1n}^{(j)} & \mathbf{M}_{eln}^{(j)} \end{matrix} \right\}$	сферические векторные гармоники
λ	длина волны электромагнитного излучения в вакууме
μ	магнитная проницаемость в вакууме
ω	частота падающей волны
$\hat{\mathbf{e}}$	единичный вектор
E_0	амплитуда падающего поля
j	тип функции Бесселя
k	волновой вектор падающей волны
L	общее число слоёв
l	номер слоя внутри стратифицированной сферы
n	порядок мультиполя
r, θ, φ	полярные координаты
ω	частота света, см. (1.7)
c	скорость света, стр. 16
k	модуль волнового вектора, см. (1.7), стр. 16
BEM	boundary element method, метод граничных элементов
CST MWS	Computer Simulation Technology Microwave Studio программа для компьютерного моделирования уравнений Максвелла
DDA	discrete dipole approximation, приближение дискретных диполей
FDFD	finite difference frequency domain, метод конечных разностей в частотной области

FDTD	finite difference time domain, метод конечных разностей во временной области
FEM	finite element method, метод конечных элементов
FIT	finite integration technique, метод конечных интегралов
FMM	fast multipole method, быстрый метод многополюсника
FVTD	finite volume time-domain, метод конечных объёмов во временной области
MLFMA	multilevel fast multipole algorithm, многоуровневый быстрый алгоритм многополюсника
MoM	method of moments, метод моментов
MSTM	multiple sphere T-Matrix, метод Т-матриц для множества сфер
PSTD	pseudospectral time domain method, псевдоспектральный метод во временной области
TLM	transmission line matrix method, метод матриц линий передач

Словарь терминов

TeX : Система компьютерной вёрстки, разработанная американским профессором информатики Дональдом Кнудом

панграмма : Короткий текст, использующий все или почти все буквы алфавита

Список рисунков

4.1	Тестовая функция u , начальная u_0 , найденная функция u_{end}	68
4.2	Динамика функции $\hat{J}(u)$ по итерациям.	69
4.3	Результаты первого эксперимента	73
4.4	Результаты второго эксперимента	74
4.5	Результаты первого эксперимента	78
4.6	Результаты второго эксперимента	79

Список таблиц

1	Наименование таблицы средней длины	94
2	Тестовые функции для оптимизации, D — размерность. Для всех функций значение в точке глобального минимума равно нулю.	99
3	Длинная таблица с примером чересстрочного форматирования . . .	102
4	Стандартные префиксы ссылок	104

Приложение А

Примеры вставки листингов программного кода

Для крупных листингов есть два способа. Первый красивый, но в нём могут быть проблемы с поддержкой кириллицы (у вас может встречаться в комментариях и печатаемых сообщениях), он представлен на листинге А.1. Второй

Листинг А.1 Программа „Hello, world“ на C++

```

5 | #include <iostream>
   | using namespace std;
   |
   | int main() //кириллица в комментариях при xelatex и luaLatex и
   | мееет проблемы с пробелами
   | {
   |     cout << "Hello, world" << endl; //latin letters in
   |     commentaries
   |     system("pause");
   |     return 0;
10| }

```

не такой красивый, но без ограничений (см. листинг А.2).

Листинг А.2 Программа „Hello, world“ без подсветки

```

#include <iostream>
using namespace std;

int main() //кириллица в комментариях
{
    cout << "Привет, мир" << endl;
}

```

Можно использовать первый для вставки небольших фрагментов внутри текста, а второй для вставки полного кода в приложении, если таковое имеется.

Если нужно вставить совсем короткий пример кода (одна или две строки), то выделение линейками и нумерация может смотреться чересчур громоздко.

В таких случаях можно использовать окружения `lstlisting` или `Verb` без `ListingEnv`. Приведём такой пример с указанием языка программирования, отличного от заданного по умолчанию:

```
|fibs = 0 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)
```

Такое решение — со вставкой нумерованных листингов покрупнее и вставок без выделения для маленьких фрагментов — выбрано, например, в книге Эндрю Таненбаума и Тодда Остина по архитектуре компьютера.

Наконец, для оформления идентификаторов внутри строк (функция `main` и тому подобное) используется `lstinline` или, самое простое, моноширинный текст (`\texttt`).

Пример А.3, иллюстрирующий подключение переопределённого языка. Может быть полезным, если подсветка кода работает криво. Без дополнительного окружения, с подписью и ссылкой, реализованной встроенным средством.

Листинг А.3 Пример листинга с подписью собственными средствами

```
## Caching the Inverse of a Matrix

## Matrix inversion is usually a costly computation and there
## may be some
## benefit to caching the inverse of a matrix rather than
## compute it repeatedly
5 ## This is a pair of functions that cache the inverse of a
## matrix.

## makeCacheMatrix creates a special "matrix" object that can
## cache its inverse

makeCacheMatrix <- function(x = matrix()) {#кириллица в коммента
10   rиях npx xelatex u luaLatex имеет проблемы с пробелами
    i <- NULL
    set <- function(y) {
        x <- y
        i <- NULL
    }
15   get <- function() x
    setSolved <- function(solve) i <- solve
    getSolved <- function() i
    list(set = set, get = get,
        setSolved = setSolved,
20   getSolved = getSolved)
```

```

}

25 ## cacheSolve computes the inverse of the special "matrix"
    returned by
    ## makeCacheMatrix above. If the inverse has already been
    calculated (and the
    ## matrix has not changed), then the cachesolve should retrieve
    the inverse from
    ## the cache.

30 cacheSolve <- function(x, ...) {
    ## Return a matrix that is the inverse of 'x'
    i <- x$getSolved()
    if(!is.null(i)) {
        message("getting cached data")
35         return(i)
    }
    data <- x$get()
    i <- solve(data, ...)
    x$setSolved(i)
40     i
}

```

Листинг А.4 подгружается из внешнего файла. Приходится загружать без окружения дополнительного. Иначе по страницам не переносится.

Листинг А.4 Листинг из внешнего файла

```

# Analysis of data on Course Project at Getting and Cleaning
  data course of Data Science track at Coursera.

# Part 1. Merges the training and the test sets to create one
  data set.
# 3. Uses descriptive activity names to name the activities in
  the data set
5 # 4. Appropriately labels the data set with descriptive variable
    names.

if (!file.exists("UCI HAR Dataset")) {
    stop("You need 'UCI HAR Dataset' folder full of data")
}
10

```



```

library(plyr) # for mapvalues

15 #getting common data
features <- read.csv("UCI HAR Dataset/features.txt", sep=" ",
  header = FALSE,
                        colClasses = c("numeric", "character"))
activity_labels <- read.csv("UCI HAR Dataset/activity_labels.txt",
  sep="",
                        header = FALSE, colClasses = c("
numeric", "character"))

20 #getting train set data
subject_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/subject_train.
  txt",
                        header = FALSE, colClasses = "numeric",
                        col.names="Subject")
y_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/y_train.txt", header
  = FALSE,
                        colClasses = "numeric")
25 x_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/X_train.txt", sep="",
  header = FALSE,
                        colClasses = "numeric", col.names=features$V2
                        , check.names = FALSE)

activity_train <- as.data.frame(mapvalues(y_train$V1, from =
  activity_labels$V1,
30                                     to = activity_labels$
V2))
names(activity_train) <- "Activity"

35 #getting test set data
subject_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/subject_test.txt"
  ,
                        header = FALSE, colClasses = "numeric",
                        col.names="Subject")
y_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/y_test.txt", header =
  FALSE,
                        colClasses = "numeric")
40 x_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/X_test.txt", sep="",
  header = FALSE,

```

```

        colClasses = "numeric", col.names=features$V2,
        check.names = FALSE)

activity_test <- as.data.frame(mapvalues(y_test$V1, from =
        activity_labels$V1,
                                                to = activity_labels$V2
        ))
45 names(activity_test) <- "Activity"

# Forming full dataframe
data_train <- cbind(x_train, subject_train, activity_train)
50 data_test <- cbind(x_test, subject_test, activity_test)
data <- rbind(data_train, data_test)

# Cleaning memory
rm(features, activity_labels, subject_train, y_train, x_train,
    activity_train,
55 subject_test, y_test, x_test, activity_test, data_train, data
    _test)

# Part 2. Extracts only the measurements on the mean and
    standard deviation for each measurement.

60 cols2match <- grep("(mean|std)", names(data))

# Excluded gravityMean, tBodyAccMean, tBodyAccJerkMean,
    tBodyGyroMean,
# tBodyGyroJerkMean, as these represent derivations of angle
data, as
# opposed to the original feature vector.
65

# Subsetting data frame, also moving last columns to be first
Subsetted_data_frame <- data[, c(562, 563, cols2match)]

# Part 5. From the data set in step 4, creates a second,
independent tidy data set
70 # with the average of each variable for each activity and each
subject.

library(dplyr) # for %>% and summarise_each

```

```
75 tidydata <- Subsetted_data_frame %>% group_by(Subject,Activity)
    %>%
        summarise_each(funs(mean))

write.table(tidydata, "tidydata.txt", row.names=FALSE)
```

Приложение Б

Очень длинное название второго приложения, в котором продемонстрирована работа с длинными таблицами

Б.1 Подраздел приложения

Вот размещается длинная таблица:

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
&INP			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)

продолжение следует

(продолжение)			
Параметр	Умолч.	Тип	Описание
mars	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
&SURFPAR			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
	1	int	1: генерация белого шума
mars	0	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
	1	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	0	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
	1	int	1: генерация белого шума
mars	0	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
	1	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	0	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
	1	int	1: генерация белого шума
mars	0	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
	1	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	0	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
	1	int	1: генерация белого шума
продолжение следует			

(продолжение)			
Параметр	Умолч.	Тип	Описание
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
			2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

Б.2 Ещё один подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения! Конвынёры витюпырата но нам, тебиквюэ мэнтётюм позтюлант ед про. Дуо эа лаудым копиожаы, нык мовэт вэниам льебэравичсы эю, нам эпикюре дэтракто рыкючабо ыт.

Пример длинной таблицы с записью продолжения по ГОСТ 2.105:

Таблица 1 — Наименование таблицы средней длины

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
&INP			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора

Продолжение таблицы 1

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора

Продолжение таблицы 1

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
			экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
&SURFPAR			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)

Продолжение таблицы 1

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
			1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

Б.3 Использование длинных таблиц с окружением *longtabu*

В таблице 2 более книжный вариант длинной таблицы, используя окружение `longtabu` и разнообразные `toprule` `midrule` `bottomrule` из пакета `booktabs`. Чтобы визуально таблица смотрелась лучше, можно использовать следующие параметры: в самом начале задаётся расстояние между строчками с помощью `arraystretch`. Таблица задаётся на всю ширину, `longtabu` позволяет делить ширину колонок пропорционально — тут три колонки в пропорции 1.1:1:4 — для каждой колонки первый параметр в описании `X[]`. Кроме того, в таблице убраны отступы слева и справа с помощью `@{}` в преамбуле таблицы. К первому и второму столбцу применяется модификатор

`>\setlength{\baselineskip}{0.7\baselineskip}`,

который уменьшает межстрочный интервал в для текста таблиц (иначе заголовков второго столбца значительно шире, а двухстрочное имя сливается с окружающими). Для первой и второй колонки текст в ячейках выравнивается по центру как по вертикали, так и по горизонтали — задаётся буквами `m` и `c` в описании столбца `X[]`.

Так как формулы большие — используется окружение `alignedat`, чтобы отступ был одинаковый у всех формул — он сделан для всех, хотя для большей части можно было и не использовать. Чтобы формулы занимали поменьше места в каждом столбце формулы (где надо) используется `\textstyle` — он делает дроби меньше, у знаков суммы и произведения — индексы сбоку. Иногда формула слишком большая, сливается со следующей, поэтому после неё ставится небольшой дополнительный отступ `\vspace*{2ex}`. Для штрафных функций — размер фигурных скобок задан вручную `\Big\{`, т. к. не умеет `alignedat` работать с `\left` и `\right` через несколько строк/колонок.

В примечании к таблице наоборот, окружение `cases` даёт слишком большие промежутки между вариантами, чтобы их уменьшить, в конце каждой строчки окружения использовался отрицательный дополнительный отступ `\[-0.5em]`.

Таблица 2 — Тестовые функции для оптимизации, D — размерность. Для всех функций значение в точке глобального минимума равно нулю.

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
сфера	$[-100, 100]^D$	$f_1(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2$
Schwefel 2.22	$[-10, 10]^D$	$f_2(x) = \sum_{i=1}^D x_i + \prod_{i=1}^D x_i $
Schwefel 1.2	$[-100, 100]^D$	$f_3(x) = \sum_{i=1}^D \left(\sum_{j=1}^i x_j \right)^2$
Schwefel 2.21	$[-100, 100]^D$	$f_4(x) = \max_i \{ x_i \}$
Rosenbrock	$[-30, 30]^D$	$f_5(x) = \sum_{i=1}^{D-1} \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 \right]$
ступенчатая	$[-100, 100]^D$	$f_6(x) = \sum_{i=1}^D \lfloor x_i + 0.5 \rfloor^2$
зашумлённая квартиче- ская	$[-1.28, 1.28]^D$	$f_7(x) = \sum_{i=1}^D ix_i^4 + rand[0,1)$
Schwefel 2.26	$[-500, 500]^D$	$f_8(x) = \sum_{i=1}^D -x_i \sin \sqrt{ x_i } +$ $+ D \cdot 418.98288727243369$
Rastrigin	$[-5.12, 5.12]^D$	$f_9(x) = \sum_{i=1}^D [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10]$
Ackley	$[-32, 32]^D$	$f_{10}(x) = -20 \exp\left(-0.2\sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i^2}\right) -$ $-\exp\left(\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \cos(2\pi x_i)\right) + 20 + e$
Griewank	$[-600, 600]^D$	$f_{11}(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos(x_i/\sqrt{i}) + 1$
штрафная 1	$[-50, 50]^D$	$f_{12}(x) = \frac{\pi}{D} \left\{ 10 \sin^2(\pi y_1) + \right.$ $\left. + \sum_{i=1}^{D-1} (y_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi y_{i+1})] + \right.$ $\left. + (y_D - 1)^2 \right\} + \sum_{i=1}^D u(x_i, 10, 100, 4)$

продолжение следует

(продолжение)

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
штрафная 2	$[-50, 50]^D$	$f_{13}(x) = 0.1 \left\{ \sin^2(3\pi x_1) + \right.$ $+ \sum_{i=1}^{D-1} (x_i - 1)^2 [1 + \sin^2(3\pi x_{i+1})] +$ $+ (x_D - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi x_D)] \left. \right\} +$ $+ \sum_{i=1}^D u(x_i, 5, 100, 4)$
сфера	$[-100, 100]^D$	$f_1(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2$
Schwefel 2.22	$[-10, 10]^D$	$f_2(x) = \sum_{i=1}^D x_i + \prod_{i=1}^D x_i $
Schwefel 1.2	$[-100, 100]^D$	$f_3(x) = \sum_{i=1}^D \left(\sum_{j=1}^i x_j \right)^2$
Schwefel 2.21	$[-100, 100]^D$	$f_4(x) = \max_i \{ x_i \}$
Rosenbrock	$[-30, 30]^D$	$f_5(x) = \sum_{i=1}^{D-1} \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 \right]$
ступенчатая	$[-100, 100]^D$	$f_6(x) = \sum_{i=1}^D [x_i + 0.5]^2$
зашумлённая квартиче- ская	$[-1.28, 1.28]^D$	$f_7(x) = \sum_{i=1}^D i x_i^4 + rand[0, 1)$
Schwefel 2.26	$[-500, 500]^D$	$f_8(x) = \sum_{i=1}^D -x_i \sin \sqrt{ x_i } +$ $+ D \cdot 418.98288727243369$
Rastrigin	$[-5.12, 5.12]^D$	$f_9(x) = \sum_{i=1}^D [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10]$
Ackley	$[-32, 32]^D$	$f_{10}(x) = -20 \exp \left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i^2} \right) -$ $- \exp \left(\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \cos(2\pi x_i) \right) + 20 + e$
Griewank	$[-600, 600]^D$	$f_{11}(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos(x_i / \sqrt{i}) + 1$

продолжение следует

(окончание)

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
штрафная 1	$[-50, 50]^D$	$f_{12}(x) = \frac{\pi}{D} \left\{ 10 \sin^2(\pi y_1) + \right.$ $+ \sum_{i=1}^{D-1} (y_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi y_{i+1})] +$ $\left. + (y_D - 1)^2 \right\} + \sum_{i=1}^D u(x_i, 10, 100, 4)$
штрафная 2	$[-50, 50]^D$	$f_{13}(x) = 0.1 \left\{ \sin^2(3\pi x_1) + \right.$ $+ \sum_{i=1}^{D-1} (x_i - 1)^2 [1 + \sin^2(3\pi x_{i+1})] +$ $+ (x_D - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi x_D)] \left. \right\} +$ $+ \sum_{i=1}^D u(x_i, 5, 100, 4)$
Примечание — Для функций f_{12} и f_{13} используется $y_i = 1 + \frac{1}{4}(x_i + 1)$ и $u(x_i, a, k, m) = \begin{cases} k(x_i - a)^m, & x_i > a \\ 0, & -a \leq x_i \leq a \\ k(-x_i - a)^m, & x_i < -a \end{cases}$		

Б.4 Форматирование внутри таблиц

В таблице 3 пример с чересстрочным форматированием. В файле `userstyles.tex` задаётся счётчик `\newcounter{rowcnt}` который увеличивается на 1 после каждой строчки (как указано в преамбуле таблицы). Кроме того, задаётся условный макрос `\altshape` который выдаёт одно из двух типов форматирования в зависимости от чётности счётчика.

В таблице 3 каждая чётная строчка — синяя, нечётная — с наклоном и слегка поднята вверх. Визуально это приводит к тому, что среднее значение и среднеквадратичное изменение группируются и хорошо выделяются взглядом в таблице. Сохраняется возможность отдельные значения в таблице выделить цветом или шрифтом. К первому и второму столбцу форматирование не применяется по сути таблицы, к шестому общее форматирование не применяется для наглядности.

Так как заголовок таблицы тоже считается за строчку, то перед ним (для первого, промежуточного и финального варианта) счётчик обнуляется, а в `\altshape` для нулевого значения счётчика форматирования не применяется.

Таблица 3 — Длинная таблица с примером чересстрочного форматирования

	Итера- ции	JADE++	JADE	jDE	SaDE	DE/rand /1/bin	PSO
f1	1500	1.8E-60 (8.4E-60)	1.3E-54 (9.2E-54)	2.5E-28 (3.5E-28)	4.5E-20 (6.9E-20)	9.8E-14 (8.4E-14)	9.6E-42 (2.7E-41)
f2	2000	1.8E-25 (8.8E-25)	3.9E-22 (2.7E-21)	1.5E-23 (1.0E-23)	1.9E-14 (1.1E-14)	1.6E-09 (1.1E-09)	9.3E-21 (6.3E-20)
f3	5000	5.7E-61 (2.7E-60)	6.0E-87 (1.9E-86)	5.2E-14 (1.1E-13)	9.0E-37 (5.4E-36)	6.6E-11 (8.8E-11)	2.5E-19 (3.9E-19)
f4	5000	8.2E-24 (4.0E-23)	4.3E-66 (1.2E-65)	1.4E-15 (1.0E-15)	7.4E-11 (1.8E-10)	4.2E-01 (1.1E+00)	4.4E-14 (9.3E-14)
f5	3000	8.0E-02 (5.6E-01)	3.2E-01 (1.1E+00)	1.3E+01 (1.4E+01)	2.1E+01 (7.8E+00)	2.1E+00 (1.5E+00)	2.5E+01 (3.2E+01)
f6	100	2.9E+00 (1.2E+00)	5.6E+00 (1.6E+00)	1.0E+03 (2.2E+02)	9.3E+02 (1.8E+02)	4.7E+03 (1.1E+03)	4.5E+01 (2.4E+01)
f7	3000	6.4E-04 (2.5E-04)	6.8E-04 (2.5E-04)	3.3E-03 (8.5E-04)	4.8E-03 (1.2E-03)	4.7E-03 (1.2E-03)	2.5E-03 (1.4E-03)
f8	1000	3.3E-05 (2.3E-05)	7.1E+00 (2.8E+01)	7.9E-11 (1.3E-10)	4.7E+00 (3.3E+01)	5.9E+03 (1.1E+03)	2.4E+03 (6.7E+02)
f9	1000	1.0E-04 (6.0E-05)	1.4E-04 (6.5E-05)	1.5E-04 (2.0E-04)	1.2E-03 (6.5E-04)	1.8E+02 (1.3E+01)	5.2E+01 (1.6E+01)
f10	500	8.2E-10 (6.9E-10)	3.0E-09 (2.2E-09)	3.5E-04 (1.0E-04)	2.7E-03 (5.1E-04)	1.1E-01 (3.9E-02)	4.6E-01 (6.6E-01)
f11	500	9.9E-08 (6.0E-07)	2.0E-04 (1.4E-03)	1.9E-05 (5.8E-05)	7.8E-04 (1.2E-03)	2.0E-01 (1.1E-01)	1.3E-02 (1.7E-02)
f12	500	4.6E-17 (1.9E-16)	3.8E-16 (8.3E-16)	1.6E-07 (1.5E-07)	1.9E-05 (9.2E-06)	1.2E-02 (1.0E-02)	1.9E-01 (3.9E-01)
f13	500	2.0E-16 (6.5E-16)	1.2E-15 (2.8E-15)	1.5E-06 (9.8E-07)	6.1E-05 (2.0E-05)	7.5E-02 (3.8E-02)	2.9E-03 (4.8E-03)
f1	1500	1.8E-60 (8.4E-60)	1.3E-54 (9.2E-54)	2.5E-28 (3.5E-28)	4.5E-20 (6.9E-20)	9.8E-14 (8.4E-14)	9.6E-42 (2.7E-41)

продолжение следует

(окончание)

	Итера- ции	JADE++	JADE	jDE	SaDE	DE/rand /1/bin	PSO
f2	2000	1.8E-25 (8.8E-25)	3.9E-22 (2.7E-21)	1.5E-23 (1.0E-23)	1.9E-14 (1.1E-14)	1.6E-09 (1.1E-09)	9.3E-21 (6.3E-20)
f3	5000	5.7E-61 (2.7E-60)	6.0E-87 (1.9E-86)	5.2E-14 (1.1E-13)	9.0E-37 (5.4E-36)	6.6E-11 (8.8E-11)	2.5E-19 (3.9E-19)
f4	5000	8.2E-24 (4.0E-23)	4.3E-66 (1.2E-65)	1.4E-15 (1.0E-15)	7.4E-11 (1.8E-10)	4.2E-01 (1.1E+00)	4.4E-14 (9.3E-14)
f5	3000	8.0E-02 (5.6E-01)	3.2E-01 (1.1E+00)	1.3E+01 (1.4E+01)	2.1E+01 (7.8E+00)	2.1E+00 (1.5E+00)	2.5E+01 (3.2E+01)
f6	100	2.9E+00 (1.2E+00)	5.6E+00 (1.6E+00)	1.0E+03 (2.2E+02)	9.3E+02 (1.8E+02)	4.7E+03 (1.1E+03)	4.5E+01 (2.4E+01)
f7	3000	6.4E-04 (2.5E-04)	6.8E-04 (2.5E-04)	3.3E-03 (8.5E-04)	4.8E-03 (1.2E-03)	4.7E-03 (1.2E-03)	2.5E-03 (1.4E-03)
f8	1000	3.3E-05 (2.3E-05)	7.1E+00 (2.8E+01)	7.9E-11 (1.3E-10)	4.7E+00 (3.3E+01)	5.9E+03 (1.1E+03)	2.4E+03 (6.7E+02)
f9	1000	1.0E-04 (6.0E-05)	1.4E-04 (6.5E-05)	1.5E-04 (2.0E-04)	1.2E-03 (6.5E-04)	1.8E+02 (1.3E+01)	5.2E+01 (1.6E+01)
f10	500	8.2E-10 (6.9E-10)	3.0E-09 (2.2E-09)	3.5E-04 (1.0E-04)	2.7E-03 (5.1E-04)	1.1E-01 (3.9E-02)	4.6E-01 (6.6E-01)
f11	500	9.9E-08 (6.0E-07)	2.0E-04 (1.4E-03)	1.9E-05 (5.8E-05)	7.8E-04 (1.2E-03)	2.0E-01 (1.1E-01)	1.3E-02 (1.7E-02)
f12	500	4.6E-17 (1.9E-16)	3.8E-16 (8.3E-16)	1.6E-07 (1.5E-07)	1.9E-05 (9.2E-06)	1.2E-02 (1.0E-02)	1.9E-01 (3.9E-01)
f13	500	2.0E-16 (6.5E-16)	1.2E-15 (2.8E-15)	1.5E-06 (9.8E-07)	6.1E-05 (2.0E-05)	7.5E-02 (3.8E-02)	2.9E-03 (4.8E-03)

Б.5 Стандартные префиксы ссылок

Общепринятым является следующий формат ссылок: <prefix>:<label>. Например, \label{fig:knuth}; \ref{tab:test1}; label={lst:external1}. В таблице 4 приведены стандартные префиксы для различных типов ссылок.

Таблица 4 — Стандартные префиксы ссылок

Префикс	Описание
ch:	Глава
sec:	Секция
subsec:	Подсекция
fig:	Рисунок
tab:	Таблица
eq:	Уравнение
lst:	Листинг программы
itm:	Элемент списка
alg:	Алгоритм
app:	Секция приложения

Для упорядочивания ссылок можно использовать разделительные символы. Например, `\label{fig:scheemes/my_scheeme}` или `\label{lst:dts/linked_list}`.

Б.6 Очередной подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!

Б.7 И ещё один подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!

Перв. примен.		Приложение В			
Справ. №					
Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №	
Подп. и дата		Инв. № подл.		Изм.	
Лист		№ докум.		Подп.	
Разраб.		Автор		Дата	
Пров.					
Т.Контр.					
Н.Контр.					
Утв.					
Сферический куб				Лит.	
Вакуум				Масса	
				Масштаб	
				0 з.	
				2:1	
				Лист 1	
				Листов 1	
				РАН	

Копировал

Формат А4