



Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Дальневосточный  
федеральный университет»

Представление на соискание учёной степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 1.2.2 Математическое  
моделирование, численные методы и комплексы программ

Оптимизационные методы решения обратных задач  
сложного теплообмена

П. Р. Месенёв  
*Науч. руководитель: д. ф.-м. н., проф. А. Ю. Чеботарев*

Владивосток, 2024

Интерес к изучению задач сложного теплообмена (одновременно учитываются радиационный, конвективный и кондуктивный факторы) обусловлен их важностью для многих инженерных применений, связанных с высокими температурами: оценки эффективности систем охлаждения, моделирования теплопередачи в деталях газотурбинных двигателей, космической техники и летательных аппаратов, контроль тепловых процессов при производстве стекла и др.



# Уравнение теплопереноса излучением

При построении диффузационной модели сложного теплообмена учитывается уравнение переноса излучения с источником, пропорциональным четвертой степени температуры.

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla_x I(x, \omega) + \kappa I(x, \omega) = \\ = \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S P(\omega, \omega') I(x, \omega') d\omega' + \kappa_a \frac{\sigma n^2 T^4(x)}{\pi}. \end{aligned}$$

$x \in \Omega$  – точки среды,  $\omega \in S$  – направления лучей

$S = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$  – единичная сфера,

$I(x, \omega)$  – интенсивность излучения,

$T(x)$  – температура,  $P(\omega, \omega')$  – фазовая функция рассеяния

# Диффузионное $P_1$ приближение переноса тепла

Интенсивность излучения и фазовая функция аппроксимируются как

$$I(x, \omega) \simeq \frac{\sigma n^2}{\pi} T_{\max}^4 (\varphi(x) + \omega \cdot \Phi(x)),$$
$$P(\omega, \omega') = 1 + A \omega \cdot \omega', \quad T = T_{\max} \theta$$

$\varphi$  – нормализованное излучение, усреднённое по всем направлениям,  
 $\theta$  – нормализованная температура.

- Теоретическое исследование моделей сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения (A. A. Амосов, C. T. Kelley, M. Laitinen, T. Tiihonen, P.-E. Druet и др.)
- Однозначная разрешимость различных задач радиационно-кондуктивного теплообмена (F. Asllanaj, M. Ghattassi, M. Porzio, M. Thompson и др.)
- Анализ квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе  $SP_1$  и  $SP_3$ -приближений (R. Pinna, O. Tse)
- Однозначная разрешимость краевых задач для моделей сложного теплообмена на основе  $P_1$ -приближения (А. Ю. Чеботарев, А. Е. Ковтанюк, Г. В. Гренкин)
- Теоретический анализ обратных задач тепломассопереноса представленный в работах (С. Г. Пятков и др.)

*Целью работы является теоретический и численный анализ граничных обратных задач, включая задачи с условиями типа Коши на границе области, и задач оптимального управления для моделей сложного теплообмена на основе  $P_1$ -приближения уравнения переноса излучения*

- исследование разрешимости краевых и начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных моделей сложного теплообмена;
- разработка оптимизационных алгоритмов решения обратных задач и задач с краевыми условиями Коши, теоретический анализ и обоснование их сходимости;
- разработка комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов и тестирования предложенных алгоритмов.

*В области математического моделирования:*

- Доказательство однозначной разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей квазистационарный сложный теплообмен в трехмерной области.
- Доказательство однозначной разрешимости квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен с нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.
- Обоснование существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на части границы и условием переопределения на другой части.
- Вывод условий разрешимости экстремальных задач, аппроксимирующих решения граничных обратных задач (задач с условиями Коши на границе области) для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена.
- Построение систем оптимальности и доказательство их невырожденности для задач оптимального управления стационарными, квазистационарными и квазилинейными уравнениями сложного теплообмена.

*В области численных методов:*

- Разработка численного алгоритма решения квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен и доказательство его сходимости.
- Обоснование сходимости последовательности решений задач оптимального управления к решениям задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю.
- Обоснование сходимости алгоритма решения экстремальных обратных задач с ограничениями температурных полей методом штрафа.

*В области комплексов программ:*

- Разработка программ, реализующих численное моделирование процессов сложного теплообмена на основе метода конечных элементов. Реализация и тестирование оптимизационных алгоритмов решения граничных обратных задач для стационарных, квазистационарных и квазилинейных моделей.

## 1 Модели сложного теплообмена

Стационарная модель

Квазистационарная модель

Квазилинейная модель

## 2 Границные обратные задачи и задачи с данными Коши

Границная обратная задача

Обратная задача с условиями типа Коши

Квазистационарная задача с данными Коши

Стационарная задача с условиями Коши на части границы

## 3 Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей

Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями

Задачи оптимального управления с финальным наблюдением

## 4 Численные методы и комплексы программ

Краевые задачи сложного теплообмена

Границные обратные задачи

Задача оптимального управления для квазистациц. модели

Квазилинейная модель в контексте ВВЛА

Задачи с данными Коши

# Глава 1. Модели сложного теплообмена

Рассматриваются диффузионные модели сложного теплообмена, основанные на  $P_1$  приближении уравнения теплового излучения. Представлены новые результаты, связанные с корректностью квазистационарной и квазилинейной моделями сложного теплообмена.

Область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , граница  $\Gamma = \partial\Omega$ .

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4, \quad (1)$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \beta(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\theta$  – нормализованная температура,  $\varphi$  – нормализованная интенсивность излучения, усреднённая по всем направлениям,  $\kappa_a$  – коэффициент поглощения. Константы  $a, b, \alpha, \gamma, \beta$  описываются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

$\Omega$  – липшицева ограниченная область,  $\Gamma$  состоит из конечного числа гладких кусков, исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i)  $\theta_0, \beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma), 0 \leq \theta_0 \leq M, \beta \geq \beta_0 > 0, \gamma \geq \gamma_0 > 0$ ;

Здесь  $M, \beta_0, \gamma_0$ , и  $c_0$  положительные постоянные.

# Слабая формулировка и существование решения

## Definition

Пара  $\{\theta, \varphi\} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  называется слабым решением задачи, если для любых  $\eta, \psi \in H^1(\Omega)$  выполняются равенства:

$$a(\nabla\theta, \nabla\eta) + (b\kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi), \eta) + \int_{\Gamma} \beta (\theta - \theta_0) \eta d\Gamma = 0,$$
$$\alpha(\nabla\varphi, \nabla\psi) + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3, \psi) + \int_{\Gamma} \gamma (\varphi - \theta_0^4) \psi d\Gamma = 0.$$

## Theorem (Chebotarev, 2015)

Пусть выполняются условия (i). Тогда существует единственное слабое решение задачи (1)–(2), удовлетворяющее неравенствам:

$$a\|\nabla\theta\|^2 \leq b\kappa_a M^5 |\Omega| + \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)} M^2 |\Gamma|, \quad (3)$$

$$\alpha\|\nabla\varphi\|^2 \leq \kappa_a M^8 |\Omega| + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} M^8 |\Gamma|, \quad (4)$$

$$0 \leq \theta \leq M, \quad 0 \leq \varphi \leq M^4. \quad (5)$$

# Квазистационарная модель

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \phi) = 0, \quad (6)$$

$$-\alpha\Delta\phi + \kappa_a(\phi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \quad (7)$$

$$a\frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0 \text{ на } \Gamma; \quad (8)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (9)$$

Предполагаем, что

- (j)  $a, b, \alpha, \kappa_a = \text{Const} > 0$ ,
- (jj)  $\theta_b, q_b, u = \theta_b^4 \in U, r = a(\theta_b + q_b) \in L^5(\Sigma), \theta_0 \in L^5(\Omega)$ .

Здесь  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ ,  $U$  – пространство  $L^2(\Sigma)$  с нормой

$$\|u\|_{\Sigma} = \left( \int_{\Sigma} u^2 d\Gamma dt \right)^{1/2}.$$

Определим операторы  $A : V \rightarrow V'$ ,  $B : U \rightarrow V'$ , которые выполняются для любых  $y, z \in V$ ,  $w \in L^2(\Gamma)$ :

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma} yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_{\Gamma} wz d\Gamma.$$

## Definition

Пара  $\theta \in W$ ,  $\varphi \in L^2(0, T; V)$  называется слабым решением задачи (6)–(9) если

$$\theta' + aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu.$$

Здесь и далее будем обозначать через  $[\theta]^s := |\theta|^s \operatorname{sign}\theta$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

## Lemma (1.20)

Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда существует единственное слабое решение задачи (6)–(9) и справедливо

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0, T; H).$$

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) + b (\theta^3 |\theta| - \varphi) = f, \quad (10)$$

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta (\varphi - \theta^3 |\theta|) = g, \quad x \in \Omega, 0 < t < T, \quad (11)$$

$$k(\theta) \partial_n \theta + p(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi + \gamma (\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \quad (12)$$

Предполагаем, что:

- (k1)  $\alpha, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega)$ ,  $b = r\beta$ ,  $r = \text{Const} > 0$ ;  $\alpha \geq \alpha_0$ ,  $\beta \geq \beta_0$ ,  $\sigma \geq \sigma_0$ ,  $\alpha_0, \beta_0, \sigma_0 = \text{Const} > 0$ .
- (k2)  $0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1$ ,  $|k'(s)| \leq k_2$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $k_j = \text{Const}$ .
- (k3)  $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$ ,  $0 \leq \theta_{in} \in L^\infty(\Omega)$ ;  
 $\gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $p_0 \leq p \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $\gamma_0, p_0 = \text{Const} > 0$ .
- (k4)  $0 \leq f, g \in L^\infty(Q)$ .

Определим операторы  $A_1 : V \rightarrow V'_0$  и  $A_2 : V \rightarrow V'$  такие, что для всех  $\theta, \varphi, v \in V$  выполняются следующие равенства:

$$(A_1(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} p\theta v d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_{\Gamma} p\theta v d\Gamma,$$

$$(A_2\varphi, v) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma\varphi v d\Gamma,$$

где  $h(s) = \int_0^s k(r)dr$ .

### Definition

Пару  $\theta \in W, \varphi \in L^2(0, T; V)$  будем называть слабым решением задачи (10)–(12), если

$$\sigma\theta' + A_1(\theta) + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f \quad \text{п. в. в } (0, T), \quad \theta(0) = \theta_{\text{in}}, \quad (13)$$

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - [\theta]^4) = g_b + g \quad \text{п. в. в } (0, T). \quad (14)$$

Здесь  $f_b, g_b \in L^2(0, T; V')$  и

$$(f_b, v) = \int_{\Gamma} p\theta_b v d\Gamma, \quad (g_b, v) = \int_{\Gamma} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

# Алгоритм решения начально-краевой задачи

Пусть  $\theta_0 = \theta_{\text{in}}$ ,  $\varphi_0 = F_1(\theta_0)$ . Рекурсивно определим последовательность  $\theta_m \in W$ ,  $\varphi_m \in L^2(0, T; V)$  такую, что

$$\theta_m = F_2(\theta_{m-1}, \varphi_{m-1}), \quad \varphi_m = F_1(\theta_m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Здесь операторы  $F_1 : L^\infty(\Omega) \rightarrow V$  и  $F_2 : L^\infty(Q) \times L^2(0, T; V) \rightarrow W$  определены следующим образом. Пусть  $\varphi = F_1(\theta)$ , если

$$A_2 \varphi + \beta (\varphi - [\theta]^4) = g_b + g, \quad (16)$$

и  $\theta = F_2(\zeta, \varphi)$ , если

$$\sigma \theta' + A(\zeta, \theta) + b ([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f \quad \text{п. в. в } (0, T), \quad \theta(0) = \theta_{in}. \quad (17)$$

Здесь  $(A(\zeta, \theta), v) = (k(\zeta) \nabla \theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} p \theta v d\Gamma \quad \forall v \in V$ ,

$$W = \left\{ y \in L^2(0, T; V) : \sigma y' = \sigma dy/dt \in L^2(0, T, V') \right\}.$$

# Существование решения квазилинейной задачи

## Lemma (1.23)

Если выполнены условия  $(k1)–(k4)$ , то существует константа  $C > 0$ , не зависящая от  $m$ , такая, что

$$\|\varphi_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C,$$
$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s+\delta) - \theta_m(s)\|^2 ds \leq C\delta.$$

$\theta_m \rightarrow \widehat{\theta}$  слабо в  $L^2(0, T; V)$ , сильно в  $L^2(0, T; H)$ ,  
 $\varphi_m \rightarrow \widehat{\varphi}$  слабо в  $L^2(0, T; V)$ .

## Theorem (1.7)

Если выполнены условия  $(k1)–(k4)$ , то существует хотя бы одно решение задачи (10)–(12).

# Теорема единственности и сходимость итеративного метода

## Theorem (1.8)

Если выполнены условия  $(k1)–(k4)$  и  $\theta_*, \varphi_*$  является решением задачи (10)–(12) так, что  $\theta_*, \nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$ , то других ограниченных решений этой задачи нет.

## Theorem (1.9)

Если выполнены условия  $(k1)–(k4)$  и  $\theta_*, \varphi_*$  является решением задачи (10)–(12) так, что  $\theta_*, \nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$ . Тогда для последовательностей (15) справедливы следующие сходимости:

$$\theta_m \rightarrow \theta_* \quad \text{в } L^2(0, T; V), \quad \varphi_m \rightarrow \varphi_* \quad \text{в } L^2(0, T; V).$$

## Глава 2. Границные обратные задачи и задачи с данными Коши

Глава посвящена теоретическому анализу граничных обратных задач для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена. При постановке таких задач часто возникают такие краевые условия для эллиптических или параболических уравнений, когда на границе (части границы) задается неизвестная функция, а также ее нормальная производная (условия Коши). Предложены оптимизационные методы решения сформулированных задач, выполнен анализ их корректности и установлены аппроксимационные свойства.

# Граничная обратная задача

Модель имеет следующий вид

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \quad (18)$$

и дополняется граничными условиями на  $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ , где части границы  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  не имеют пересечений:

$$\begin{aligned} \Gamma : & a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2 : & \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \\ \Gamma_1 : & \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции  $\gamma, \theta_b, \beta$  известны. Неизвестная функция  $u$  характеризует отражающие свойства участка границы  $\Gamma_1$ . Предполагается, что  $0 < u_1 \leq u \leq u_2$ .

**Обратная задача** заключается в отыскании тройки  $\theta, \varphi, u$  по дополнительному условию  $\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0$ .

**Экстремальная задача** заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma.$$

# Существование решения и условия оптимальности

Будем предполагать что исходные данные удовлетворяют условию

- (i)  $\beta \in L^\infty(\Gamma); \gamma \in L^\infty(\Gamma_0 \cup \Gamma_2); u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma_1);$   
 $0 < \beta_0 \leq \beta; 0 < \gamma_0 \leq \gamma; \beta_0, \gamma_0 = Const, 0 \leq u_1 \leq u_2.$

## Theorem (2.1)

Пусть выполняется условие (i). Тогда существует хотя бы одно решение задачи оптимального управления.

## Theorem (2.2)

Пусть  $\hat{y} = \{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\} \in Y, \hat{u} \in U_{ad}$  — решение экстремальной задачи.

Тогда существует пара  $p = (p_1, p_2), p \in Y$  такая, что тройка  $(\hat{y}, \hat{u}, p)$ , удовлетворяет следующим условиям:

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a (bp_1 - p_2) = f_c, \quad (f_c, v) = - \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma,$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a (p_2 - bp_1) = g_c(p_2, \hat{u}), \quad (g_c(p_2, \hat{u}), v) = - \int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma,$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2 (\hat{\varphi} - \theta_b^4) (u - w) d\Gamma \leq 0 \quad \forall w \in U_{ad}.$$

# Задача без краевых условий для интенсивности излучения

**Краевая задача:**

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \quad (20)$$

На  $\Gamma$  известно температурное поле и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b. \quad (21)$$

Заменяем на «искусственные» краевые условия

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \quad (22)$$

Функция  $r(x), x \in \Gamma$  является заданной, а неизвестная функция  $u(x), x \in \Gamma$  играет роль управления. Получаем **обратную задачу**.

**Экстремальная задача** заключается в отыскании тройки  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf \quad (23)$$

на решениях краевой задачи.

Будем предполагать, что

- (j)  $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$ ,
- (jj)  $\theta_b, q_b \in U, r = a(\theta_b + q_b)$ .

Определим оператор ограничений  $F(\theta, \varphi, u) : V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$ ,

$$F(\theta, \varphi, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

**Задача CP.** Найти тройку  $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$  такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2}\|\theta - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_\Gamma^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0. \quad (24)$$

## Theorem (2.3)

Пусть выполняются условия  $(j), (jj)$ . Тогда существует решение задачи  $CP$ .

## Theorem (2.4)

Пусть выполняются условия  $(j), (jj)$ . Если  $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$  – решение задачи  $CP$ , то существует единственная пара  $\{p_1, p_2\} \in V \times V$  такая, что

$$aAp_1 + 4|\hat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) = B(\theta_b - \hat{\theta}), \quad \alpha Ap_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0 \quad (25)$$

и при этом  $\lambda\hat{u} = p_2$ .

## Theorem (2.5)

Пусть выполняются условия  $(j), (jj)$  и существует решение задачи (20)–(21). Если  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  – решение задачи СР для  $\lambda > 0$ , то существует последовательность  $\lambda \rightarrow +0$  такая, что

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_*, \quad \varphi_\lambda \rightarrow \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

где  $\theta_*, \varphi_*$  – решение задачи (20)–(21).

Здесь  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega)$ .

Из ограниченности последовательности  $u_\lambda$  в пространстве  $U$  следует ее слабая относительная компактность и существование последовательности (возможно не единственной)  $\lambda \rightarrow +0$  такой, что  $u_\lambda \rightarrow u_*$  слабо в  $U$ .

# Квазистационарная модель с данными Коши

**Начально-краевая задача:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \tag{26}$$

$$a(\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \tag{27}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{28}$$

**Экстремальная задача** состоит в том, чтобы найти тройку  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf \tag{29}$$

на решениях задачи (26)–(28).

# Задача оптимального управления $OC$

Будем считать, что

- (k)  $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$ ,
- (kk)  $\theta_b, q_b \in U, r = a(\theta_b + q_b) \in L^5(\Sigma), \theta_0 \in L^5(\Omega)$ .

Задача оптимального управления  $OC$  заключается в отыскании тройки  $\{\theta, \varphi, u\} \in W \times L^2(0, T; V) \times U$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_\Sigma^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_\Sigma^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0.$$

Здесь и далее  $W = \{y \in L^2(0, T; V) : y' \in L^2(0, T, V')\}$ .

## Theorem (2.6)

Пусть выполняются условия (k), (kk). Тогда существует решение задачи  $OC$ .

Определим операторы  $A : V \rightarrow V'$ ,  $B : U \rightarrow V'$

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma} yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_{\Gamma} wz d\Gamma, \quad y, z \in V, w \in L^1(\Gamma).$$

# Условия оптимальности и аппроксимация обратной задачи

## Theorem (2.7)

Пусть выполнены условия  $(k), (kk)$ . Если  $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$  — решение задачи ОС, то существует единственная пара  $\{p_1, p_2\} \in W \times W$  такая, что

$$\begin{aligned} -p'_1 + aAp_1 + 4|\hat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) &= B\left(\theta_b - \hat{\theta}\right), \quad p_1(T) = 0, \\ \alpha Ap_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) &= 0, \quad \lambda\hat{u} = p_2|_{\Sigma}. \end{aligned} \tag{30}$$

## Theorem (2.8)

Пусть выполняются условия  $(k), (kk)$  и существует решение  $\theta, \varphi \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$  задачи (26)–(28). Если  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  — решение задачи ОС при  $\lambda > 0$ , то при  $\lambda \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \theta_\lambda &\rightarrow \theta \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \text{ сильно в } L^2(Q), \\ \varphi_\lambda &\rightarrow \varphi \text{ слабо в } L^2(0, T; V). \end{aligned}$$

# Стационарная задача с условиями Коши для температуры на части границы

Рассмотрим область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ .

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (31)$$

$\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$  так, что  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . На всей границе  $\Gamma$  задается тепловой поток  $q_b$ ,

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad x \in \Gamma. \quad (32)$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию  $\gamma$ . В случае, если эта функция неизвестна на части границы  $\Gamma_2$ , краевое условие для интенсивности излучения на  $\Gamma_2$  не ставится, а в качестве условия переопределения на  $\Gamma_1$ , в дополнение к условию на  $\varphi$ , задается температурное поле  $\theta_b$ ,

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (33)$$

# Постановка задачи управления

Введем новую неизвестную функцию  $\psi = a\theta + ab\varphi$ .

**Краевая задача:**

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (34)$$

$$a\partial_n\theta = q_b \text{ на } \Gamma, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \quad \theta = \theta_b \text{ на } \Gamma_1. \quad (35)$$

Здесь  $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$ ,  $r = ab\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$ .

Задача **оптимального управления**, аппроксимирующая краевую задачу, заключается в отыскании тройки  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf, \quad (36)$$

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (37)$$

$$a\partial_n\theta + s\theta = q_b + s\theta_b, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r \text{ на } \Gamma_1, \quad (38)$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad \alpha\partial_n\psi = u \text{ на } \Gamma_2. \quad (39)$$

$\lambda, s > 0$  – регуляризирующие параметры.

# Разрешимость задачи оптимального управления

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

- (l)  $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda, s = Const > 0$ .
- (ll)  $0 < \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma_1)$ ,  $\theta_b, r \in L^2(\Gamma_1)$ ,  $q_b \in L^2(\Gamma)$ .

**Задача** ( $P_\lambda$ ). Найти тройку  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\} \in V \times V \times U$  такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \psi, u) = 0. \quad (40)$$

Здесь  $F(\theta, \psi, u) : V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$ ,

$$(A_1 y, z) = a(\nabla y, \nabla z) + s \int_{\Gamma_1} y z d\Gamma, \quad (A_2 y, z) = \alpha(\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma_1} \gamma y z d\Gamma,$$

$$(B_1 f, v) = \int_{\Gamma_1} f v d\Gamma, \quad (B_2 h, w) = \int_{\Gamma_2} h w d\Gamma.$$

$$F(\theta, \psi, u) = \left\{ A_1 \theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha} \psi - f_1, A_2 \psi - f_2 - B_2 u \right\}.$$

## Theorem (2.9)

При выполнении условий (l), (ll) существует решение задачи  $(P_\lambda)$ .

### Theorem (2.10)

Пусть выполняются условия  $(l), (ll)$ . Если  $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$  – решение задачи оптимального управления, то существует единственная пара  $\{p_1, p_2\} \in V \times V$  такая, что

$$A_1 p_1 + g'(\hat{\theta}) p_1 = -B_1(\hat{\theta} - \theta_b), \quad A_2 p_2 = \frac{\kappa_a}{\alpha} p_1, \quad \lambda \hat{u} = p_2|_{\Gamma_2}. \quad (41)$$

Здесь  $g'(\theta) = 4b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{\kappa_a}{\alpha}$ .

Градиент функционала  $\tilde{J}_\lambda(u)$  равен  $\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2$ , где  $p_2$  – компонента решения сопряженной системы (41),  $\hat{\theta} := \theta(u)$ .

# Аппроксимация решения обратной задачи

Решение обратной задачи (31)–(33) удовлетворяет равенствам для всех  $v \in V$

$$a(\nabla\theta, \nabla v) + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi, v) = \int_{\Gamma} q_b v d\Gamma, \quad (42)$$

$$\alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma_1} \gamma\varphi v d\Gamma + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3, v) = \int_{\Gamma_1} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q v d\Gamma \quad (43)$$

и при этом  $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$ .

## Theorem (2.11)

Пусть выполняются условия  $(l), (ll)$ , и существует решение задачи (31)–(33), удовлетворяющее равенствам (42), (43). Если  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$  – решение задачи  $(P_\lambda)$  для  $\lambda > 0$ , то существует последовательность  $\lambda \rightarrow +0$  такая, что

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_*, \quad \frac{1}{\alpha b}(\psi_\lambda - a\theta_\lambda) \rightarrow \varphi_* \quad \text{слабо в } V, \quad \text{сильно в } H,$$

где  $\theta_*, \varphi_*$  – решение задачи (31)–(33).

## Глава 3. Задачи оптимального управления для квазилинейных уравнений сложного теплообмена

В данной главе рассматриваются задачи оптимального управления (обратные экстремальные задачи) для квазилинейных моделей.

Анализ задач управления для моделей теплообмена, учитывающих зависимость теплопроводности от температуры, а также изменение со временем плотности и теплоемкости среды, важен для приложений. Здесь изучены задачи с ограничением на температурное поле в некоторой подобласти.

Рассмотрены варианты распределенного и финального наблюдений температуры.

Предложены алгоритмы решения задач, основанные на методе штрафных функций и доказана их сходимость.

# Квазилинейная модель с фазовыми ограничениями

**Начально-краевая задача:**

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi \\ -\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \tag{44}$$

$$\theta = 0|_{\Gamma}, \quad \alpha \partial_n \varphi + 2^{-1} \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{45}$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*$$

**Задача оптимального управления** заключается в минимизации

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \rightarrow \inf$$

на решениях начально-краевой задачи.

Здесь  $G_1$  и  $G_2$  подмножества  $\Omega$ ,  $\theta$  представляет разницу между реальной температурой и постоянной температурой на границе.

# Ограничения на параметры среды

$\Omega$  является липшицевой ограниченной областью,

$\Gamma = \partial\Omega, Q = \Omega \times (0, T), \Sigma = \Gamma \times (0, T)$ .

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

- (c1)  $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, |\partial\sigma/\partial t| \leq \sigma_2$
- (c2)  $k_0 \leq k(s) \leq k_1, |k'(s)| \leq k_2, s \in \mathbb{R}$ ,
- (c3)  $\theta_0 \in H$
- (c4)  $\alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1, \beta_0 \leq \beta(x) \leq \beta_1, x \in \Omega$ ,

где  $\sigma_i, k_i, \alpha_i$ , и  $\beta_i$  положительные константы.

Определим нелинейный оператор  $A : V \rightarrow V'$  и линейный оператор  $B : H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))'$  используя следующие равенства, справедливые для любого  $\theta, v \in V, \varphi, w \in H^1(\Omega)$ :

$$(A(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) = (\nabla h(\theta), \nabla v)$$

$$(B\varphi, w) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla w) + (\beta\varphi, w) + 2^{-1} \int_{\Gamma} \varphi w d\Gamma,$$

где  $h(s) = \int_0^s k(r) dr$ .

# Разрешимость задачи оптимального управления

**Задача  $P$ .**

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt \rightarrow \inf,$$

$$\sigma\theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*, \quad u \in U_{ad},$$

где

$$U_{ad} = \{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in L^2(0, T), u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}.$$

## Theorem (3.1)

Пусть выполняются условия (c1)-(c3), и  $\theta_0 \leq \theta_*$  п. в. в  $\Omega$ . Тогда существует решение задачи  $P$ .

**Задача**  $P_\varepsilon$ .  $J_\varepsilon(\theta) \rightarrow \inf$ , где

$$J_\varepsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dx dt,$$

$$\sigma \theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad},$$

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_* \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_*. \end{cases}$$

### Theorem (3.2)

Пусть выполняются условия (c1)-(c3). Тогда существует решение задачи  $P_\varepsilon$ .

### Theorem (3.3)

Пусть выполнены условия (c1)-(c3), и  $\theta_0 \leq \theta_*$  п. в. в  $\Omega$ .  $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$  – решение задачи  $P_\varepsilon$  для  $\varepsilon > 0$ , тогда существует п-ть  $\varepsilon \rightarrow +0$

$$u_\varepsilon \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } L^2(0, T; H), \quad \theta_\varepsilon \rightarrow \hat{\theta} \text{ сильно в } L^2(0, T; H),$$

где  $\{\hat{\theta}, \hat{u}\}$  есть решение задачи  $P$ .

# Задача с финальным наблюдением

$G_d$  и  $G_b$  – подобласти  $\Omega$ . **Начально-краевая** задача

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi = u_1 \chi, \quad (46)$$

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi = u_2 \chi, \quad (47)$$

$$k(\theta) \partial_n \theta + \gamma (\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi + 0.5 \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (48)$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_b} \leq \theta_*.$$

Задача **оптимального управления** заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \rightarrow \inf$$

на решениях начально-краевой задачи.

# Существование решения задачи оптимального управления

**Задача CPP.**

$$J(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \rightarrow \inf, \quad \sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0,$$
$$\theta|_{G_b} \leq \theta_*, \quad u \in U_{ad}.$$

Здесь

$$U_{ad} = \{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in L^2(0, T), u_{1,2} \geq 0, u_1 + u_2 \leq P\}.$$

**Theorem (3.4)**

Пусть условия (c1)–(c4) выполняются,  $\theta_0 \leq \theta_*$  п. в. в  $\Omega$ ,  $\theta_b \leq \theta_*$  п. в. в  $\Sigma$ . Тогда решение задачи CPP существует.

# Метод штрафных функций

**Задача**  $CPP_\varepsilon$ .

$$J_\varepsilon(\theta) = \int_{G_d} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_b} F(\theta) dx dt \rightarrow \inf,$$
$$\sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}.$$

Здесь

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_*, \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_*. \end{cases}$$

## Theorem (3.5)

Пусть выполняются условия (c1)–(c4). Тогда существует решение задачи  $CPP_\varepsilon$ .

## Theorem (3.6)

Пусть выполняются условия (c1)–(c4),  $\theta_0 \leq \theta_*$  п. в. в  $\Omega$ ,  $\theta_b \leq \theta_*$  п. в. в  $\Sigma$ . Если  $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$  решения задачи  $CPP_\varepsilon$  для  $\varepsilon > 0$ , тогда существует последовательность  $\varepsilon \rightarrow +0$  такая, что

$u_\varepsilon \rightarrow \hat{u}$  слабо в  $L^2(0, T; H)$ ,

$\theta_\varepsilon \rightarrow \hat{\theta}$  слабо в  $L^2(0, T; V)$ , сильно в  $L^2(0, T; H)$ ,

где  $\{\hat{\theta}, \hat{u}\}$  есть решение задачи CPP.

## Глава 4. Численные методы и комплексы программ

Глава посвящена численным методам решения прямых, обратных и экстремальных задач, рассмотренных в главах 1–3, а также результатам численного моделирования, полученным при тестировании разработанного комплекса программ.

Комплекс программ работает на основе свободно распространяемых пакетов (солверов) и включает в себя программы решения прямых краевых и начально-краевых задач, программу нахождения квазирешений граничных обратных задач, реализует оптимизационные методы поиска решений задач с данными Коши для температурного поля, а также алгоритмы решения управления со штрафом.

Комплекс дополнен программой графической визуализации результатов моделирования.

# Алгоритм решения краевых задач

- Линеаризация задачи методом Ньютона.
- Триангуляция рассматриваемой области.
- Применение метода конечных элементов для решения системы дифференциальных уравнений.

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|^3\theta = b\kappa_a\varphi, \quad (49)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a|\theta|^3\theta, \quad (50)$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0. \quad (51)$$

Линеаризация методом Ньютона:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\left(\left(4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4\right) - \varphi\right) = 0, \quad (L1)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - \left(4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4\right)\right) = 0;$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0. \quad (L2)$$

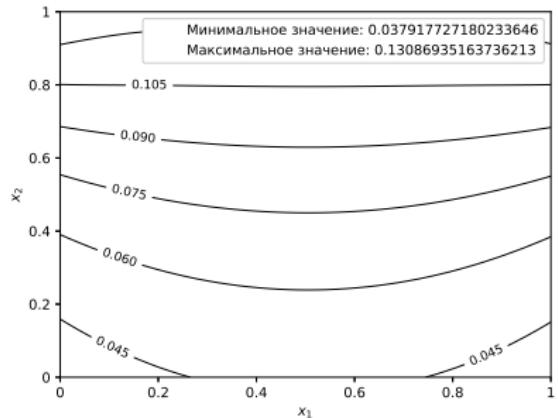
# Примеры решений граничных задач

**Пример 1** (двумерная область). Положим  $\Omega = \{(x,y), 0 \leq x, y \leq 1\}$ .

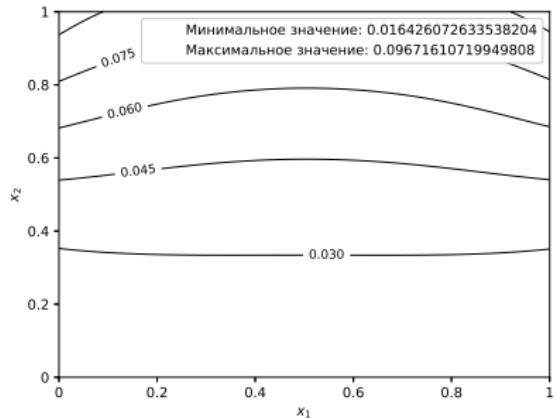
Параметры системы:

$$a = 0.6, \alpha = 0.333, k_a = 1, b = 0.025, \beta = 1,$$

$$\gamma = 0.8 \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) + 0.5, \theta_b = 0.1 + y/2.$$



a)  $\theta$



б)  $\varphi$

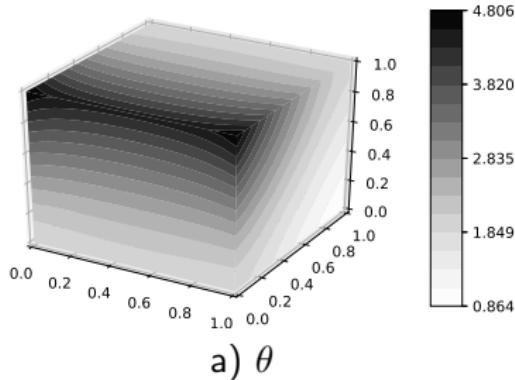
Рис.: Решение граничной задачи в двумерной области

**Пример 2** (трёхмерная область). Пусть  $\Omega = \{(x,y,z), 0 \leq x,y,z \leq 1\}$ .

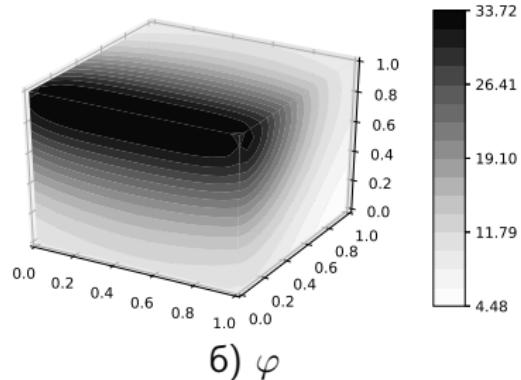
Определим функции  $\gamma, \theta_b$  следующим образом:

$$\gamma = 0.8 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) + 0.5, \quad \theta_b = 1 - y/2 + z/2.$$

Начальное приближение также выберем нулевым. Для нахождения состояния потребовалось шесть итераций, результат представлен на рисунке 2.



a)  $\theta$



б)  $\varphi$

Рис.: Решение граничной задачи в трёхмерной области

# Нахождение квазирешения обратной задачи

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (52)$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma, \quad (53)$$

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a(b p_1 - p_2) = f_c, \quad (f_c, v) = - \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma, \quad (54)$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - b p_1) = g_c(p_2, \hat{u}), \quad (g_c(p_2, \hat{u}), v) = - \int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma, \quad (55)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2 (\hat{\varphi} - \theta_b^4) (u - w) d\Gamma \leq 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (56)$$

## Алгоритм градиентного спуска с проекцией

- ① Выбор шага  $\lambda$ , числа итераций  $N$ , управления  $u_0 \in U_{ad}$ .
- ② для  $k \leftarrow 0, 1, 2, \dots, N$  выполнить:
  - Для  $u_k$ , вычислить  $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$  из (52).
  - Вычислить значение  $J(\theta_k)$  из уравнения (53).
  - Рассчитать  $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$  из (54)–(55),
  - Пересчитать управление  $u_{k+1} = P_{ad} [u_k - \lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}]$ .

# Численное моделирование двумерного случая

Положим  $\Omega = \{(x,y), 0 \leq x, y \leq 1\}$ ,  $l = 1$  см. Граница  $\partial\Omega$ :

$$\Gamma_0 = \{x = \{0,1\}, y \in [0,1]\}$$

$\Gamma_1 = \{x \in [0,1], y = 0\}$  – участок с неизвестными отр. свойствами,

$\Gamma_2 = \{x \in [0,1], y = 1\}$  – участок наблюдения.

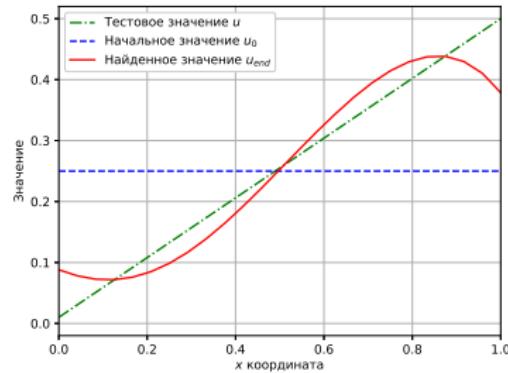
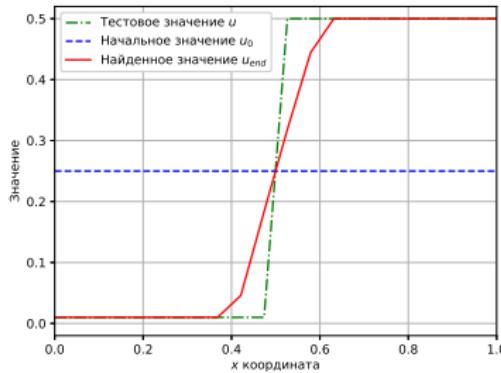
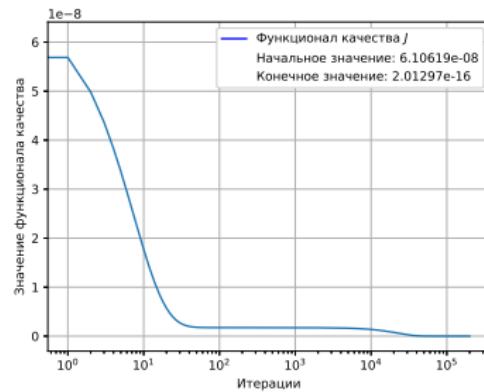
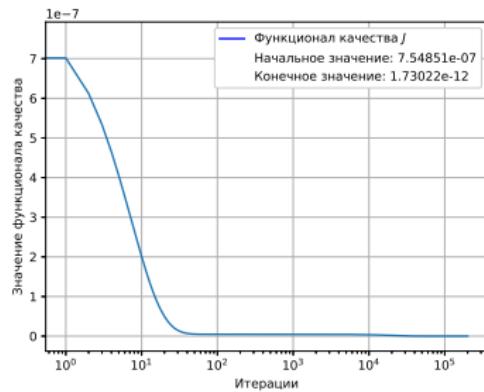
Будем также далее считать, что  $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$ ,  $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\beta = 0.00005[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\kappa = 1[\text{см}^{-1}]$ ,  $\kappa_s = 0$ ,  $A = 0$ ,  $\gamma = 0.3$ . Температуру на границе  $\Omega$  положим равной  $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$ .

При указанных параметрах для первого эксперимента выберем следующее тестовое значение функции  $u$ :

$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leq 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases}$$

и для второго эксперимента:  $u(x) = 0.49x + 0.01$ .

# Результаты моделирования обратной граничной задачи



# Моделирование квазистационарного процесса

Задача оптимального управления для квазистационарной модели:

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf$$

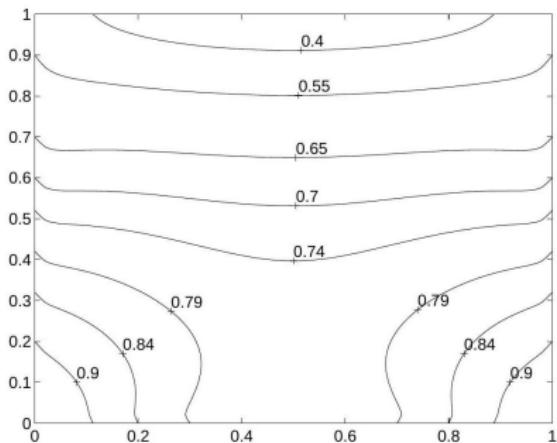
при ограничениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \\ a(\partial_n \theta + \theta) &= r, \quad \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \\ \theta|_{t=0} &= \theta_0. \end{aligned}$$

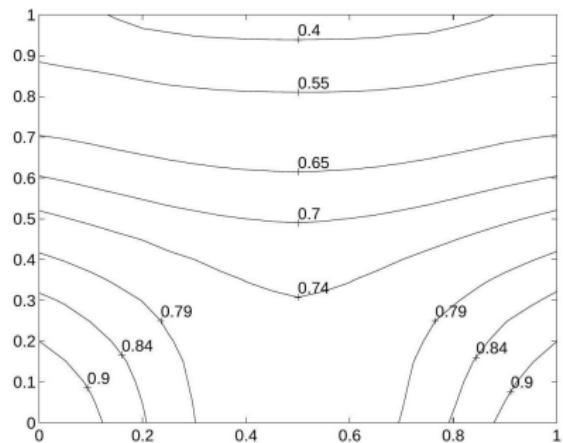
Задача аппроксимирует задачу с данными типа Коши для температуры.

Область  $\Omega \times (-L, L)$ , где  $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_{1,2} < d\}$ .

Определим параметры:  $d = 1(\text{м})$ ,  $a = 0.92 \cdot 10^{-4}(\text{м}^2/\text{с})$ ,  $b = 0.19(\text{м}/\text{с})$ ,  $\alpha = 0.0333(\text{м})$ ,  $\kappa_a = 1(\text{м}^{-1})$ ,  $T = 1(\text{с})$ .



а) Поле температуры, полученное  
в статье \*



б) Поле температуры, полученное  
предложенным алгоритмом

Рис.: Сравнение полученных температурных полей

\* A. Y. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk и N. D. Botkin. — «Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type». — Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 75 (2019), с. 262—269.

# Квазилинейная модель в контексте ВВЛА

Возьмём оптические и термофизические среды из статьи \*\*.

Параметры  $\theta_b$  и  $\theta_{in}$  соответствуют температуре  $37^\circ\text{C}$ , коэффициент  $\gamma$  равен 1. Начальное положение кончика оптического волокна  $(r, z) = (0,5)$ , скорость отката составляет 2 мм/с.

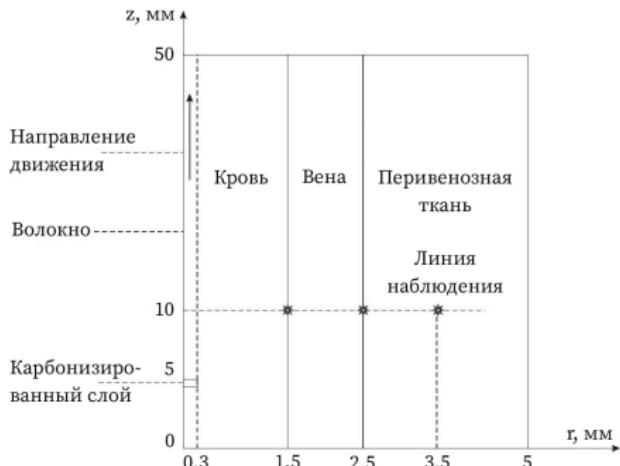
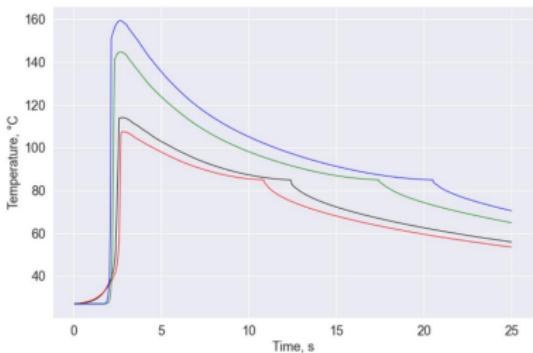


Рис.: Область вычисления

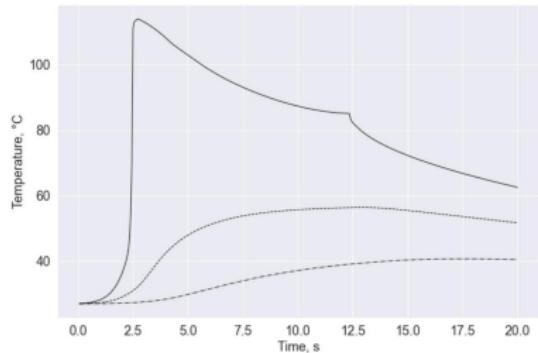
\*\* Peter WM van Ruijven и др. — «Optical-thermal mathematical model for endovenous laser ablation of varicose veins». — Lasers in medical science 29 (2014), с. 431—439

# Результаты вычисления

Поведение температуры в точке (1.5,10) при мощности лазера 10 Вт и следующих длинах волн: 810 нм (чёрный), 1064 нм (красный), 1470 нм (зелёный) и 1950 нм (синий).



Поведение температуры в точке (1.5,10) для следующих длин волн и мощностей лазера: 810 нм,  $P = 10$  Вт (чёрный); 1064 нм,  $P = 11$  Вт (красный); 1470 нм,  $P = 7,5$  Вт (зелёный); 1950 нм,  $P = 6$  Вт (синий).



# Решение задачи с финальным наблюдением

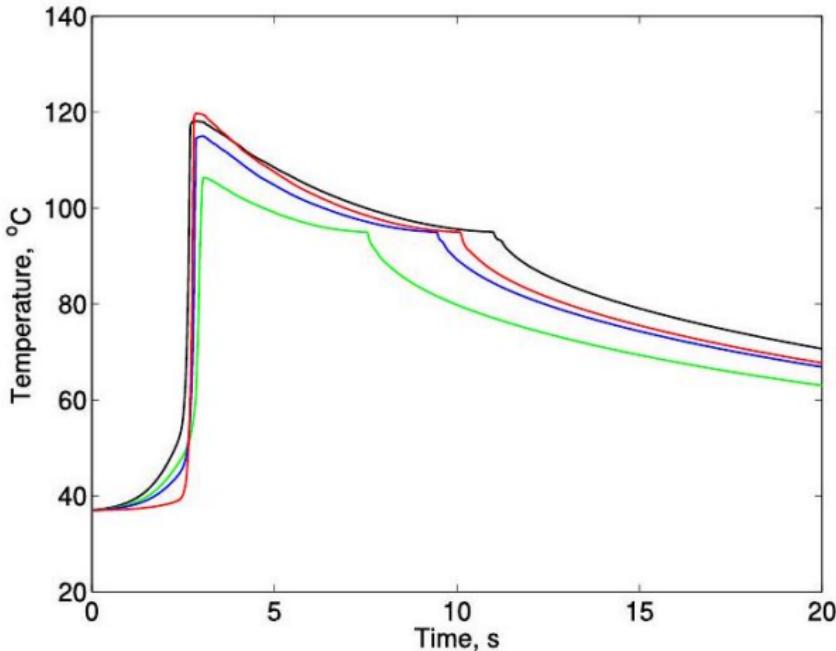


Рис.: Температурные профили: желаемая температура (черный), 1-е (зеленое), 2-е (синее) и 3-е (красное) приближения.

# Моделирование сложного теплообмена с условиями типа Коши на всей границе

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Будем предполагать, что на границе  $\Gamma = \partial\Omega$  известно температурное поле и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b.$$

Согласно системе оптимальности (25) градиент функционала  $\tilde{J}_\lambda(u)$  равен

$$\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2.$$

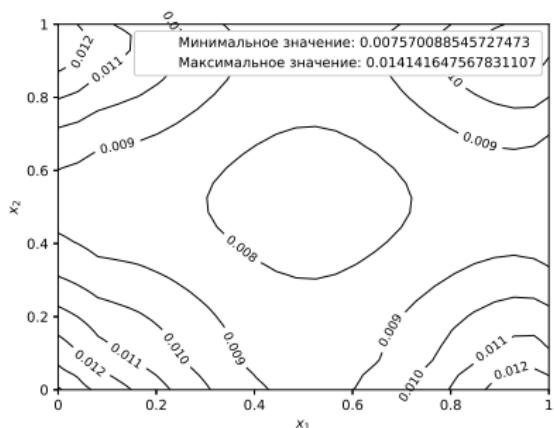
Приведем примеры расчетов для куба  $\Omega = (x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq l$ .

Будем считать, что  $l = 1$  см,  $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$ ,  $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\kappa_a = 1[\text{см}^{-1}]$ ,  $\alpha = 0.(3)[\text{см}]$ . Параметр регуляризации  $\lambda = 10^{-12}$ .

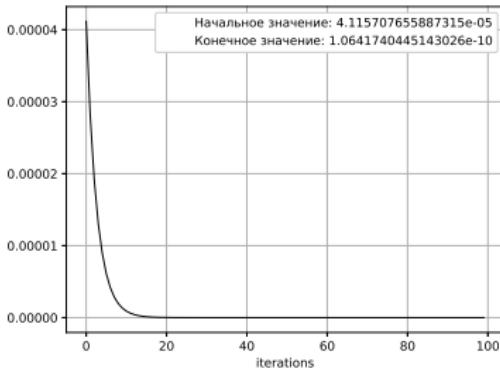
Определим  $r$  и  $u$  в (22) как  $r = 0.7$ ,  $u = \hat{u} = 0.5$ .

Для обозначенных параметров рассчитаем функции  $\theta$ ,  $\varphi$  из решения граничной задачи и положим  $\theta_b = \theta|_{\Gamma}$ . Нормальная производная  $\partial_n \theta = q_b = r/a - \theta_b$ .

Применяя алгоритм градиентного спуска найдем решение задачи *CP*.



a)  $|\partial_n \theta_\lambda - q_b| / |q_b|$

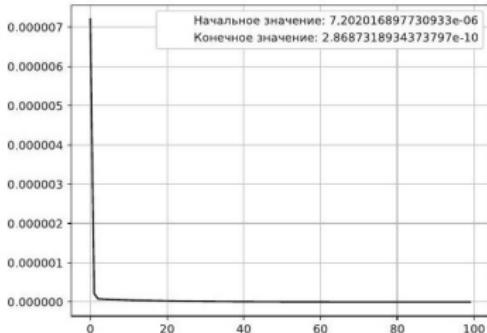


б) Значение функционала  
качества

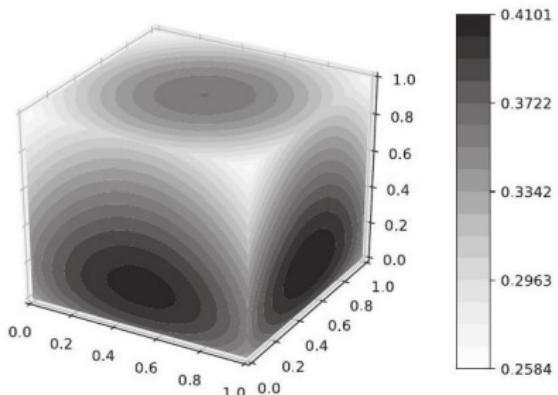
Зададим функции  $\theta_b, q_b$  в краевом условии (21) следующим образом:

$$\theta_b = 0.1z + 0.3, \quad q_b = \begin{cases} 0.11, & \text{если } z = 1, \\ 0, & \text{если } 0 < z < 1, \\ -0.15, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

В данном примере оптимальное управление  $u$  в качестве тестового не задается.

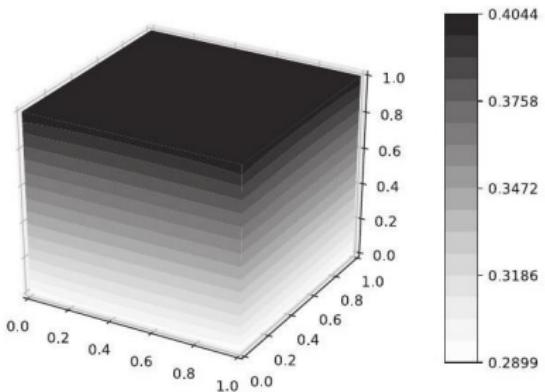


а) Изменение функционала в зависимости от числа итераций

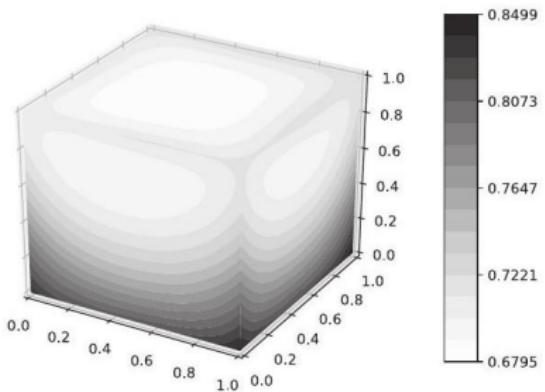


б) Оптимальное управление

Компоненты состояния, соответствующие найденному управлению, представлены на рисунках.



а) Температура  $\theta$



б) Излучение  $\varphi$

# Задача с условиями Коши на части границы

Задача оптимального управления заключается в отыскании тройки  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf,$$

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$a\partial_n\theta + s\theta = q_b + s\theta_b, \quad a\partial_n\psi + \gamma\psi = r \text{ на } \Gamma_1,$$

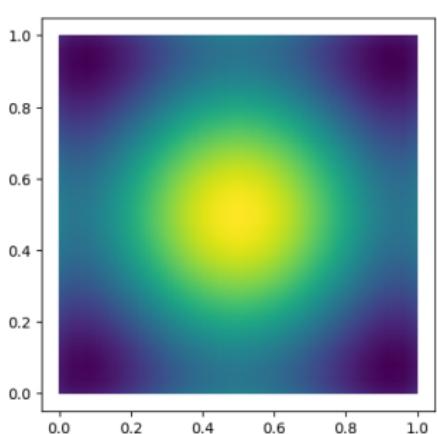
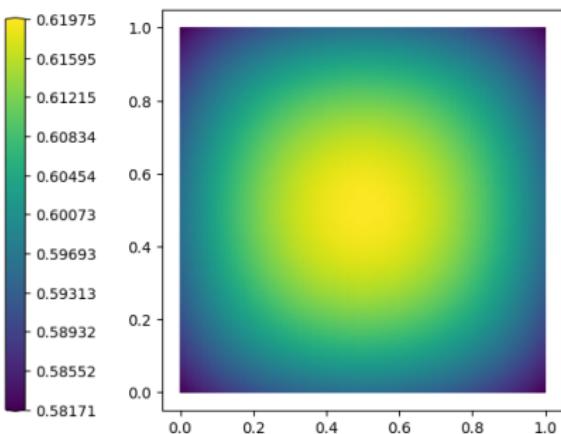
$$a\partial_n\theta = q_b, \quad a\partial_n\psi = u \text{ на } \Gamma_2,$$

где  $\lambda, s > 0$  – регуляризирующие параметры.

Будем считать, что  $l = 1$  см,  $a = 0.6$  [см<sup>2</sup>/с],  $b = 0.025$  [см/с],  $\kappa_a = 1$  [см<sup>-1</sup>],  $\alpha = 0.(3)$  [см]. Регуляризация  $\lambda = 10^{-12}$ .

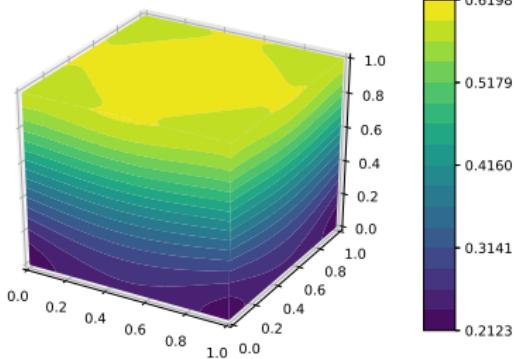
Рассмотрим куб  $\Omega = \{(x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq l\}$  с границей  $\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1 = \{(x, y, z), 0 \leq x, y, z \in [0, l]\}$ ,  $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ . Пусть граничные данные  $q_b$  и  $\theta_b$  в (32), (33) имеют вид:

$$q_b = 0.5, \quad \theta_b = 0.1 + z/2.$$

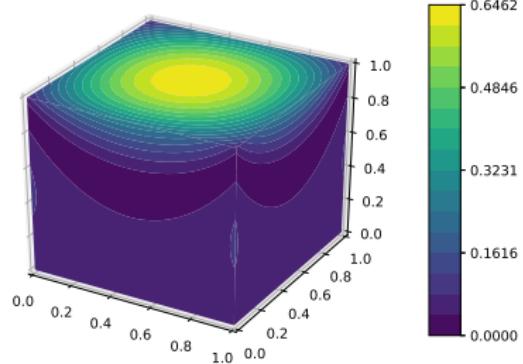
а)  $\theta|_{z=1}$ б)  $\varphi|_{z=1}$ 

Начальное значение функционала качества равно 0.025 и через сотню итераций становится равным  $5 \cdot 10^{-5}$ .

# Пример 1



a)  $\theta$



б)  $\varphi$

Рассмотрим двумерный случай:

Квадрат  $S = \{(x, y), 0 \leq x, y, z \leq 1 \text{ см.}\}$  с круговой полостью  $R$  с

центром  $b_0 = \{0.5, 0.5\}$   $R = \{r, \|r - b_0\| \leq 0.15 \text{ см.}\}$ .

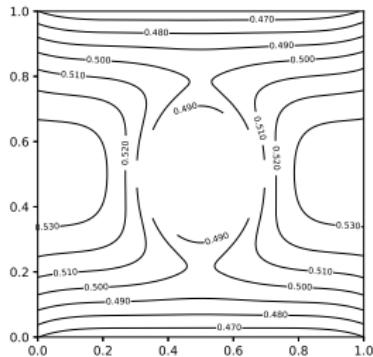
Рассматриваемая область  $\Omega = S \setminus R$ .  $\Gamma \equiv \partial\Omega = \partial C \cup \partial B$  при этом

$\Gamma_2 = \partial R$ ,  $\Gamma_1 = \partial S \setminus \Gamma_2$ . Границные данные  $q_b$  и  $\theta_b$  положим равными

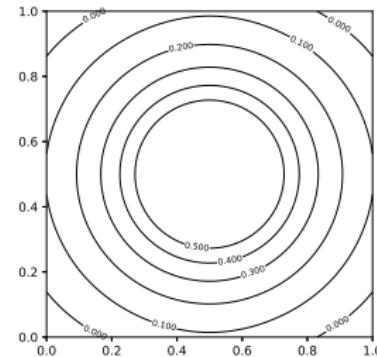
$$\theta_b = 0.5,$$

$$q_b = \begin{cases} 0.2, & \text{если } x \in \Gamma_1 \\ -0.2, & \text{если } x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

## Пример 2



а)  $\theta$



б)  $\varphi$

Рис.: Результаты второго эксперимента

Начальное значение функционала качества 0.045 после тридцати итераций становится равным  $6.2 \cdot 10^{-5}$ .

# Особенности реализации программ по моделированию процессов сложного теплообмена

- ① Выбор основного языка программирования
- ② Пакеты численного решения диф. уравнений
- ③ Архитектурные особенности при написании программ по моделированию
- ④ Улучшение эффективности расчётов

- Получены новые априорные оценки решений начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных уравнений сложного теплообмена и доказана их нелокальная однозначная разрешимость.
- Представлены априорные оценки решений регуляризованных задач и обоснована сходимость их решений к точным решениям обратных задач.
- Для решения задач с фазовыми ограничениями, предложены алгоритмы, основанные на аппроксимации экстремальными задачами со штрафом.
- Реализованы программные комплексы
  - ① По решению обратных задач, основанные на оптимизационных методах
  - ② Тестирования решений, получаемых в результате решения обратных задач
  - ③ Инструменты моделирования процессов сложного теплообмена для манипуляции 'in place'
  - ④ Инструменты визуализации получаемых значений в процессе моделирования

# Научная и практическая значимость

Указанные результаты могут быть полезны при дальнейшем использовании моделей сложного теплообмена и анализе обратных задач сложного теплообмена. Развитые методы исследования краевых, начально-краевых и экстремальных задач могут применяться для изучения различных моделей, описываемых нелинейными уравнениями типа реакции-диффузии. Численные алгоритмы решения задач оптимизации сложного теплообмена могут использоваться для выбора оптимальных характеристик процессов теплообмена.

# Свидетельства о регистрации программ



- ① P. R. Mesenev. — «Optimization method for solving the inverse problem of complex heat transfer». — *Дальневост. матем. журн.* 23.1 (2023).
- ② A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev и A. E. Kovtanyuk. — «Penalty method to solve an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation». — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 22 (2022), с. 158—163.
- ③ A. Yu. Chebotarev и P. R. Mesenev. — «An algorithm for solving the boundary value problem of radiation heat transfer without boundary conditions for radiation intensity». — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2020), с. 114—122.
- ④ P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev. — «A boundary inverse problem for complex heat transfer equations». — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 18.1 (2018), с. 75—84.
- ⑤ П. Р. Месенев и А. Ю. Чеботарев. — «Задача сложного теплообмена с условиями типа Коши на части границы». — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 63.5 (2023), с. 856—863.
- ⑥ P R Mesenev and A Yu Chebotarev. — “Analysis of an optimization method for solving the problem of complex heat transfer with Cauchy boundary conditions”. — *Comput. Math. Math. Phys.* 62.1 (Jan. 2022).

- Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (Владивосток, 2018, 2019);
- Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics (Вычислительные технологии и прикладная математика, Владивосток, 2022);
- International Conference DAYS on DIFFRACTION (Санкт-Петербург, 2021, 2023);
- International Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing (Мюнхен, 2020, 2022).