На правах рукописи

Месенёв Павел Ростиславович

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Владивосток — 2024

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Дальневосточный федеральный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Чеботарев Александр Юрьевич**
Официальные оппоненты:	**Фамилия Имя Отчество,** доктор физико-математических наук, профессор, Не очень длинное название для места работы, старший научный сотрудник
	Фамилия Имя Отчество, кандидат физико-математических наук, Основное место работы с длинным длинным длинным длинным названием, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования с длинным длинным длинным длинным названием

Защита состоится DD mmmmmmmm YYYY г. в XX часов на заседании диссертационного совета Д 123.456.78 при Название учреждения по адресу: Адрес.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Название библиотеки.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: Адрес, ученому секретарю диссертационного совета Д 123.456.78.

Автореферат разослан DD mmmmmmmm2024 года.
Телефон для справок: +7 (0000) 00-00-00.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 123.456.78,
д-р физ.-мат. наук — Фамилия Имя Отчество

Общая характеристика работы

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена анализу диффузионных моделей сложного теплообмена. В разделе 1.1 приведена модель сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения, а также её нормализованный вариант. Раздел 1.2 посвящен выводу модели переноса излучения в P_1 приближении. Для получения которого интенсивность излучения и фазовая функция заменяются линейным приближением соответствующих функций.

$$I^*(x,\omega,t) = \varphi(x,t) + \mathbf{\Phi}(x,t)\cdot\omega,$$
$$P\left(\omega,\omega'\right) = 1 + A\omega\cdot\omega'.$$

Таким образом, диффузионное P_1 приближение уравнения переноса излучения представляется в виде

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} - a\Delta\theta(x,t) + b\kappa_a\left(\theta^4(x,t) - \varphi(x,t)\right) = 0. \tag{1}$$

$$-\alpha\Delta\varphi(x,t) + \kappa_a\left(\varphi(x,t) - \theta^4(x,t)\right) = 0. \tag{2}$$

$$\alpha\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n} + \gamma(x)\left(\varphi(x,t) - \theta_b^4(x,t)\right) = 0, \tag{3}$$

дополняется граничным условием для температуры

$$a\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial n} + \beta(x)\left(\theta(x,t) - \theta_b(x,t)\right) = 0, \tag{4}$$

а также начальными условиями

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x). \tag{5}$$

В разделе 1.3 приведены определения функциональных пространств, вспомогательных утверждений и определений, которые используются в дальнейшем.

В разделе 1.4 приведены теоретические результаты для стационарной модели сложного теплообмена в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$.

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4, \tag{6}$$

$$-a\Delta\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \tag{7}$$

с граничными условиями

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0. \tag{8}$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \beta\,(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \tag{9}$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, $\mathbf{v}$ – заданное поле скоростей, κ_a – коэффициент поглощения. Постоянные a, b и α определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

где k – теплопроводность, c_v – удельная теплоемкость, ρ – плотность, σ – постоянная Стефана-Больцмана, n – показатель преломления, $T_{\max}$ – максимальная температура в ненормализованной модели, $\kappa = \kappa_s + \kappa_a$ – коэффициент полного взаимодействия, κ_s – коэффициент рассеяния.

Раздел 1.5 посвящен квазистационарной модели сложного теплообмена. Представлена следующая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a\left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right) = 0,\\ &-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|\theta^3\right) = 0, \quad x\in\Omega, \quad 0<t<T;\end{aligned} \tag{10}$$

$$a\,(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha\,(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \tag{11}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{12}$$

Данная модель описывает систему связанных уравнений в частных про изводных, моделирующих квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен. Дано определение слабого решения, доказана лемма о существовании и единственности слабого решения, а также справедливости утверждений

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0,T;H).$$

Указанный результат используется в параграфе 2.3 в анализе оптимизационного метода для квазистационарной модели.

В разделе 1.6 рассмотрена квазилинейная модель сложного теплообмена, представленная начально-краевой задачей в ограниченной трехмерной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\sigma\partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) + b\left(\theta^3|\theta| - \varphi\right) = f, \tag{13}$$

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta\left(\varphi - \theta^3|\theta|\right) = g, x \in \Omega, 0 < t < T, \tag{14}$$

$$k(\theta)\partial_n\theta + p\,(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \alpha\partial_n\varphi + \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right)\big|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \tag{15}$$

Приведено определение слабой формулировки задачи (13)–(15), даны априорные оценки решений и доказано существование решения начально-краевой задачи. Представлены результаты единственности ограниченных решений, а также сходимость к решению начально-краевой задачи последовательности, построенной рекурсивно.

Вторая глава посвящена исследованию граничных обратных задач для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена. При решении таких задач часто встречаются краевые условия для эллиптических или параболических уравнений, когда на границе (части границы) задаётся неизвестная функция и её нормальная производная (условия Коши).

В разделе 2.1 рассмотрена нормализованная стационарная модель, описывающая процесс радиационного теплопереноса в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ. Модель имеет следующий вид

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

и дополняется граничными условиями на $\Gamma := \partial\Omega = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, где части границы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ не имеют пересечений.

$$\begin{aligned} \Gamma:\ & a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2:\ & \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \\ \Gamma_1:\ & \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Функции γ, θ_b, β – являются известными. Функция u характеризует отражающие свойства участка границы Γ_1. Предполагается, что

$$0 < u_1 \leq u \leq u_2, \tag{18}$$

где u_1 и u_2 – заданные ограниченные функции.

Рассматриваемая экстремальная задача состоит в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}(\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \tag{19}$$

на решениях краевой задачи.

Далее ставится задача нахождения квазирешения, которая состоит в минимизации функционала (19) на компоненте θ решения системы

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) = g. \tag{20}$$

Для поставленной экстремальной задачи доказано существование решения, а также выведена система оптимальности, на котором основан численный алгоритм, представленный в 4.2.2.

Раздел 2.2 содержит постановку задачи без краевых условия для интенсивности излучения. Будем предполагать, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ известно температурное поле, и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b. \tag{21}$$

Оптимизационный метода решения краевой задачи (16),(21) заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления с «искусственными» краевыми условиями

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \;\; \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \tag{22}$$

Функция $r(x), x \in \Gamma$ является заданной, а неизвестная функция $u(x), x \in \Gamma$ играет роль управления. Экстремальная задача заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda,\varphi_\lambda,u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2}\int\limits_\Gamma u^2 d\Gamma \to \inf \tag{23}$$

на решениях краевой задачи (16),(22). Функция $\theta_b(x), x \in \Gamma$ и параметр регуляризации $\lambda > 0$ заданы.

Для формулировки задачи оптимального управления определим оператор ограничений $F(\theta, \varphi, u) : V \times V \times U \to V' \times V'$

$$F(\theta, \varphi, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\},$$

где

$$(Ay,z) = (\nabla y, \nabla z) + \int\limits_\Gamma yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int\limits_\Gamma wz d\Gamma.$$

Тогда задача оптимального управления (CP) заключается в отыскании тройки $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2}\|\theta - \theta_b\|^2_\Gamma + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_\Gamma \to \inf, \;\; F(\theta, \varphi, u) = 0. \tag{24}$$

Доказана однозначная разрешимость краевой задачи (16),(22) и даны априорные оценки решения, которые далее используются для доказательства разрешимости задачи (CP).

Доказана следующая теорема

Теорема. *Пусть выполняются условия* $a,b,\alpha,\kappa_a, \lambda = Const > 0$, θ_b, $q_b \in U$, $r = a(\theta_b + q_b)$ *и существует решение задачи* (16),(21). *Если* $\{\theta_\lambda,\varphi_\lambda,u_\lambda\}$

– решение задачи (CP) для $\lambda > 0$, то существует последовательность $\lambda \to +0$ такая, что

$$\theta_\lambda \to \theta_*,\ \ \varphi_\lambda \to \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

где θ_*,φ_* – решение задачи (16),(21).

В разделе 2.3 представлен анализ оптимизационного метода для квазистационарной модели. Квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ моделируем следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a\left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right) = 0, \\ &-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|\theta^3\right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \tag{25}$$

$$a\left(\partial_n\theta + \theta\right) = r, \quad \alpha\left(\partial_n\varphi + \varphi\right) = u \text{ на } \Gamma; \tag{26}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{27}$$

Экстремальная задача состоит в том, чтобы найти тройку $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma \left(\theta - \theta_b\right)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T\int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \to \inf \tag{28}$$

на решениях задачи (25)–(27).

Ставится задача оптимального управления (OC), доказывается существование решение задачи (OC) и выводится система оптимальности. Представлено доказательство сходимости решений задачи оптимального управления к решению задачи оптимального управления.

В разделе 2.4 рассмотрена задача сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы. В данном случае граница области состоит из двух участков, $\Gamma := \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, так что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. На всей границе Γ задается тепловой поток q_b, в качестве условия переопределения на Γ_1, в дополнение к условию на φ, задается температурное поле θ_b,

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \theta = \theta_b \quad x \in \Gamma_1. \tag{29}$$

Для постановки задачи управления вводится новая неизвестная функция $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$. Полученная краевая задача имеет вид

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0,\ x \in \Omega, \tag{30}$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \ \text{ на } \Gamma, \ \ \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r,\ \theta = \theta_b \text{ на } \Gamma_1. \tag{31}$$

Здесь $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$, $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$.

Для соответствующей задачи оптимального управления доказано существование и единственность решения. Приведено доказательство, что решения задачи оптимального управления аппроксимируют решение начальной краевой задачи.

Третья глава посвящена исследованию квазилинейных моделей. В разделе 3.1 рассмотрена задача оптимального управления для квазилинейных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена, моделирующих процесс внутривенной лазерной абляции в ограниченной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 \, dxdt \to \inf$$

на решениях начально-краевой задачи:

$$\begin{gathered} \sigma\partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) - \beta\varphi = u_1\chi \\ -\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta\varphi = u_2\chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{gathered} \tag{32}$$

$$\theta = 0|_\Gamma, \quad \alpha\partial_n\varphi + 2^{-1}\varphi\big|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{33}$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*$$

Здесь G_1 и G_2 подмножества Ω, θ представляют разницу между реальной температурой и температурой на границе, которая является постоянной.

Доказано существование решения соответствующей задачи оптимального управления и даны априорные оценки решений. Показано, что решения задачи со штрафом сходятся к решению задачи оптимального управления.

В разделе 3.2 приведён анализ метода штрафных функций используемого для решения задачи оптимального управления с финальным наблюдением. Задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_{G_d} \left(\theta|_{t=T} - \theta_d\right)^2 dx \to \inf,$$

на решениях начально-краевой задачи

$$\sigma\partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) - \beta\varphi = u_1\chi, \tag{34}$$

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta\varphi = u_2\chi, \tag{35}$$

$$k(\theta)\partial_n\theta + \gamma\left(\theta - \theta_b\right)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + 0.5\varphi|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \tag{36}$$

с учётом следующих ограничений:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_b} \leq \theta_*.$$

На основе этой задачи ставится задача оптимального управления. Доказано существование решения задачи оптимального управления, а также сходимость решений задачи со штрафом к решениям задачи оптимального управления.

В **четвертой главе** приведены разработанные численные методы решения параболических уравнений и задач оптимизаций. В разделе 4.1 приводятся алгоритмы решения прямых стационарных задач. Продемонстрированы примеры численного решения в двумерной и трёхмерной области.

Далее, в разделе 4.2, рассмотрены алгоритмы решения граничных обратных задач. Приведён пример реализации алгоритма градиентного спуска с проекцией в двумерном случае.

Приводятся алгоритмы нахождения решения для квазилинейной и квазистационарной модели. Алгоритмы решения задач с данными Коши, а также примеры численного моделирования подобных задач представлены в 4.3.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем: В диссертации в соответствии с паспортом специальности 1.2.2 представлен математический анализ диффузионных моделей сложного теплообмена, предложены новые постановки обратных задач, разработаны оптимизационные методы решения обратных задач, основанные на понятии квазирешения и сведения рассмотренных задач к задачам оптимального управления. Разработаны и программно реализованы новые алгоритмы решения прямых, обратных и экстремальных задач для моделей сложного теплообмена.

Получены новые априорные оценки решений начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных уравнений сложного теплообмена и доказана их нелокальная однозначная разрешимость. Выполнен теоретический анализ возникающих новых экстремальных задач. Представлены априорные оценки решений регуляризованных задач и обоснована сходимость их решений к точным решениям обратных задач. Для решения задач с фазовыми ограничениями, предложены алгоритмы, основанные на аппроксимации экстремальными задачами со штрафом.

Таким образом, получены важные с теоретической и численной точки зрения результаты, которые могут быть полезны при дальнейшем использовании моделей сложного теплообмена и анализе обратных задач сложного теплообмена. Развитые методы исследования краевых, начально-краевых и экстремальных задач могут применяться для изучения различных моделей, описываемых нелинейными уравнениями типа реакции-диффузии. Численные алгоритмы решения задач оптимизации сложного теплообмена могут использоваться для выбора оптимальных характеристик процессов теплообмена.

В дальнейшем исследование обратных задач для диффузионных моделей сложного теплообмена может быть направлено на учет эффектов отражения и преломления на границе раздела сред и учет зависимости коэффициентов поглощения и рассеяния от частоты излучения.

Все рассмотренные в работе типы задач логически связаны следующим образом. Теоретический анализ математических моделей сложного теплообмена, представленный в первой главе, является основой для исследования оптимизационных методов решения обратных задач во второй и третьей главах. Соответственно, полученные там условия оптимальности дают возможность представить численные алгоритмы решения сформулированных задач и численно реализовать их в главе 4.

Конечно же, автору не удалось рассмотреть все важные вопросы в теории и методах решения обратных задач сложного теплообмена. В стороне осталось, например, исследование таких важных свойств решений экстремальных задач как регулярность, которая обеспечивает повышение скорости сходимости итерационных алгоритмов. Автор не касался в работе исследования необходимых и достаточных условий оптимальности второго порядка. Ряд постановок, которые нетрудно будет исследовать на основе предложенной методики, ожидает своего решения в том числе и в связи с вопросами нахождения наиболее эффективных механизмов и способов управления теплофизическими полями.

При использовании пакета `biblatex` список публикаций автора по теме диссертации формируется в разделе «**Публикации.**» файла `common/characteristic.tex` при помощи команды `\nocite`

Публикации автора по теме диссертации

[1] П. Р. Месенев. — «Солвер обратной задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши». — Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет». — 25 сент. 2023.

Месенёв Павел Ростиславович

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________