

# Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»

Представление на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по  
специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ

## Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

П. Р. Месенёв

Науч. руководитель: д. ф.-м. н., проф. А. Ю. Чеботарев

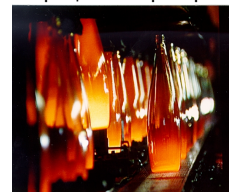
Владивосток, 2024

История к изучению задач сложного теплообмена (одновременно учитываются радиационный, конвективный и кондуктивный факторы) обусловлен важностью для многих инженерных применений, связанных с высокими температурами: оценки эффективности систем охлаждения, моделирования теплопередачи в деталях газотурбинных двигателей, космической техники, летательных аппаратов, контроль тепловых процессов при производстве стекла и др.



- Теоретическое исследование моделей сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения (А. А. Амосов, С. Т. Kelley, М. Laitinen, Т. Tiihonen, P.-E. Druet и др.)
- Однозначная разрешимость различных задач радиационно-кондуктивного теплообмена (F. Asllanaj, M. Ghattassi, M. Porzio, M. Thompson и др.)
- Анализ квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе  $SP_1$  и  $SP_3$ -приближений (R. Pinnau, O. Tse)
- Однозначная разрешимость краевых задач для моделей сложного теплообмена (А. Ю. Чеботарев, А. Е. Ковтанюк, Г. В. Гренкин)
- Теоретический анализ обратных задач (С. Г. Пятков и др.)

Интерес к изучению задач сложного теплообмена (одновременно учитываются радиационный, конвективный и кондуктивный факторы) обусловлен важностью для многих инженерных применений, связанных с высокими температурами: оценки эффективности систем охлаждения, моделирования теплопередачи в деталях газотурбинных двигателей, космической техники, летательных аппаратов, контроль тепловых процессов при производстве стекла и др.



- Теоретическое исследование моделей сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения (А. А. Амосов, С. Т. Kelley, М. Laitinen, Т. Tiihonen, P.-E. Druet и др.)
- Однозначная разрешимость различных задач радиационно-кондуктивного теплообмена (F. Asllanaj, M. Ghattassi, M. Porzio, M. Thompson и др.)
- Анализ квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе  $SP_1$  и  $SP_3$ -приближений (R. Pinnau, O. Tse)
- Однозначная разрешимость краевых задач для моделей сложного теплообмена (А. Ю. Чеботарев, А. Е. Ковтанюк, Г. В. Гренкин)
- Теоретический анализ обратных задач (С. Г. Пятков и др.)

## Цели и задачи работы

Цели работы является теоретический и численный анализ граничных обратных задач, включая задачи с условиями типа Коши на границе области, и задач оптимального управления для моделей сложного теплообмена на основе  $P_1$ -приближения уравнения переноса излучения

- исследование разрешимости краевых и начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных моделей сложного теплообмена;
- разработка оптимизационных алгоритмов решения обратных задач и задач с краевыми условиями Коши, теоретический анализ и обоснование их сходимости;
- разработка комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов и тестирования предложенных алгоритмов.

Цели и задачи работы

## Цели и задачи работы

*Целью работы* является теоретический и численный анализ граничных обратных задач, включая задачи с условиями типа Коши на границе области, и задач оптимального управления для моделей сложного теплообмена на основе  $P_1$ -приближения уравнения переноса излучения

- исследование разрешимости краевых и начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных моделей сложного теплообмена;
- разработка оптимизационных алгоритмов решения обратных задач и задач с краевыми условиями Коши, теоретический анализ и обоснование их сходимости;
- разработка комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов и тестирования предложенных алгоритмов.

## Положения, выносимые на защиту

## В области математического моделирования

- Доказательство однозначной разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей квазистационарный сложный теплообмен в трехмерной области.
- Доказательство однозначной разрешимости квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен с нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.
- Обоснование существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на части границы и условием переопределения на другой части.
- Вывод условий разрешимости экстремальных задач, аппроксимирующих решения граничных обратных задач с условиями Коши на границе области для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена.
- Построение систем оптимальности и доказательство их невырожденности для задач оптимального управления стационарными, квазистационарными и квазилинейными уравнениями сложного теплообмена.

*В области математического моделирования:*

- Доказательство однозначной разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей квазистационарный сложный теплообмен в трехмерной области.
- Доказательство однозначной разрешимости квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен с нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.
- Обоснование существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на части границы и условием переопределения на другой части.
- Вывод условий разрешимости экстремальных задач, аппроксимирующих решения граничных обратных задач (задач с условиями Коши на границе области) для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена.
- Построение систем оптимальности и доказательство их невырожденности для задач оптимального управления стационарными, квазистационарными и квазилинейными уравнениями сложного теплообмена.

## Положения, выносимые на защиту

Положения, выносимые на защиту

В области численных методов:

- Разработка численного алгоритма решения квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен и доказательство его сходимости.
- Обоснование сходимости последовательности решений задач оптимального управления к решению задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю.
- Обоснование сходимости алгоритма решения экстремальных обратных задач с ограничениями температурных полей методом штрафа.

В области комплексных программ:

- Разработка программ, реализующих численное моделирование процессов сложного теплообмена на основе метода конечных элементов. Реализация и тестирование оптимизационных алгоритмов решения граничных обратных задач для стационарных, квазистационарных и квазилинейных моделей.

*В области численных методов:*

- Разработка численного алгоритма решения квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен и доказательство его сходимости.
- Обоснование сходимости последовательности решений задач оптимального управления к решениям задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю.
- Обоснование сходимости алгоритма решения экстремальных обратных задач с ограничениями температурных полей методом штрафа.

*В области комплексных программ:*

- Разработка программ, реализующих численное моделирование процессов сложного теплообмена на основе метода конечных элементов. Реализация и тестирование оптимизационных алгоритмов решения граничных обратных задач для стационарных, квазистационарных и квазилинейных моделей.

Работа состоит из четырёх глав.

В первой главе ...

Во второй главе ...

Третья глава посвящена ...

В четвёртой главе ...

Содержание

- 1 Модели сложного теплообмена
  - Стационарная модель
  - Квазистационарная модель
  - Квазилинейная модель
- 2 Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши
  - Граничная обратная задача
  - Обратная задача с условиями типа Коши
  - Квазистационарная задача с данными Коши
  - Стационарная задача с условиями Коши на части границы
- 3 Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей
  - Задачи оптимального управления

- 1 Модели сложного теплообмена
  - Стационарная модель
  - Квазистационарная модель
  - Квазилинейная модель
- 2 Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши
  - Граничная обратная задача
  - Обратная задача с условиями типа Коши
  - Квазистационарная задача с данными Коши
  - Стационарная задача с условиями Коши на части границы
- 3 Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей
  - Задачи оптимального управления

Результаты, приведённые ниже служат теоретической основой для представленных в диссертации алгоритмов обратных задач.

где  $k$  – теплопроводность,  $c_v$  – удельная теплоёмкость,  $\rho$  – плотность,  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана,  $n$  – индекс рефракции,  $T_{\max}$  – максимальная температура,  $\kappa := \kappa_s + \kappa_a$  – коэффициент полного взаимодействия,  $\kappa_s$  – коэффициент рассеяния. Коэффициент  $A \in [-1, 1]$  описывает анизотропию рассеивания; случай  $A = 0$  отвечает изотропному рассеиванию.

Данная модель активно исследовалась моим научным руководителем А.Ю. Чеботарёвым, в 2015г. было доказано существование и единственность решения для данной модели.

Этот результат удалось обобщить для квазистационарного и квазилинейного случая. Об этом далее.

Область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , граница  $\Gamma = \partial\Omega$ .

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \beta(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\theta$  – нормализованная температура,  $\varphi$  – нормализованная интенсивность излучения, усреднённая по всем направлениям,  $\kappa_a$  – коэффициент поглощения. Константы  $a, b, \alpha, \gamma, \beta$  описываются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$$

$\Omega$  – липшицева ограниченная область,  $\Gamma$  состоит из конечного числа гладких кусков, исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i)  $\theta_b, \beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $\alpha \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\kappa_s, \kappa_a > 0$ ,  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ .

Здесь  $M, \beta_0, \gamma_0$  –  $\alpha$  – положительные постоянные.

Область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , граница  $\Gamma = \partial\Omega$ .

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4, \quad (1)$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \beta(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\theta$  – нормализованная температура,  $\varphi$  – нормализованная интенсивность излучения, усреднённая по всем направлениям,  $\kappa_a$  – коэффициент поглощения. Константы  $a, b, \alpha, \gamma, \beta$  описываются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

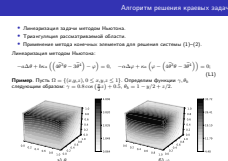
$\Omega$  – липшицева ограниченная область,  $\Gamma$  состоит из конечного числа гладких кусков, исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i)  $\theta_0, \beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $0 \leq \theta_0 \leq M$ ,  $\beta \geq \beta_0 > 0$ ,  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ ;

Здесь  $M, \beta_0, \gamma_0$ , и  $c_0$  положительные постоянные.

Линеаризируем её методом Ньютона. (Существенно улучшает сходимость алгоритмов! Что важно при решении задач типа Коши и др.)

Начальное приближение выберем нулевым. Для нахождения состояния потребовалось шесть итераций, результат представлен на рисунке 8.

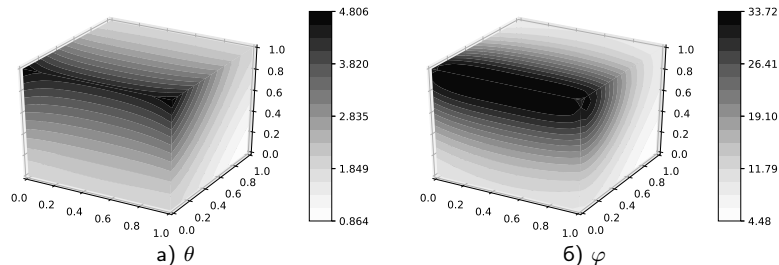


- Линеаризация задачи методом Ньютона.
- Триангуляция рассматриваемой области.
- Применение метода конечных элементов для решения системы (1)–(2).

Линеаризация методом Ньютона:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a \left( (4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4) - \varphi \right) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a \left( \varphi - (4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4) \right) = 0; \quad (L1)$$

**Пример.** Пусть  $\Omega = \{(x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ . Определим функции  $\gamma, \theta_b$  следующим образом:  $\gamma = 0.8 \cos(\frac{\pi}{2}z) + 0.5$ ,  $\theta_b = 1 - y/2 + z/2$ .





# Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

## Модели сложного теплообмена

### Квазистационарная модель

#### Квазистационарная модель

Квазистационарная модель Квазистационарная модель – медленные изменения со временем или имеющую относительно длительный период стабильности по сравнению с интересующим масштабом времени. Такие модели часто используются, когда изучаемая система находится в равновесии или близка к нему, но при этом может испытывать небольшие, медленные колебания со временем. Термин ‘квази’ означает, что система не совсем стационарна, ее состояние меняется настолько медленно, его можно считать почти стационарным для определенных анализов или целей.

В контексте теплообмена, излучения или других физических процессов квазистационарные модели могут использоваться для описания сценариев, когда параметры и свойства системы меняются очень медленно по сравнению с масштабом времени конкретного изучаемого явления. Такие модели могут упростить анализ и снизить вычислительную сложность, позволяя исследователям сосредоточиться на основных аспектах проблемы.

[Лемма] – теоретический результат является новым и используется для обоснования корректности оптимизационного метода для квазистационарной модели с данными Коши.

Квазистационарная модель

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b \kappa_a (|\theta|^3 - \phi) &= 0, & (3) \\ -\alpha \Delta \phi + \kappa_a (\phi - |\theta|^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, & (4) \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta (\theta - \theta_b)|_{\Gamma} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \gamma (\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0 \text{ на } \Gamma, & (5) \\ \theta|_{t=0} &= \theta_0. & (6) \end{aligned}$$

Предполагаем, что

- (i)  $a, b, \kappa_a = \text{Const} > 0$ ,
- (ii)  $\theta_0, \phi_0, u = \theta_b^4 \in U, r = a(\theta_b + \phi_b) \in L^5(\Sigma), \theta_0 \in L^5(\Omega)$ .

Здесь  $\Sigma = T \times (0, T), U$  – пространство  $L^5(\Sigma)$ .

**Lemma (1.20)**

Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда существует единственное слабое решение задачи (3)–(6) и справедливо

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0, T; H).$$

## Квазистационарная модель

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b \kappa_a (|\theta|^3 - \phi) = 0, \quad (3)$$

$$-\alpha \Delta \phi + \kappa_a (\phi - |\theta|^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \quad (4)$$

$$a \frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta (\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \gamma (\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0 \text{ на } \Gamma; \quad (5)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (6)$$

Предполагаем, что

- (j)  $a, b, \alpha, \kappa_a = \text{Const} > 0$ ,
- (jj)  $\theta_b, q_b, u = \theta_b^4 \in U, r = a(\theta_b + q_b) \in L^5(\Sigma), \theta_0 \in L^5(\Omega)$ .

Здесь  $\Sigma = \Gamma \times (0, T), U$  – пространство  $L^2(\Sigma)$ .

### Lemma (1.20)

Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда существует единственное слабое решение задачи (3)–(6) и справедливо

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0, T; H).$$

Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры,  $\sigma$  – произведение удельной теплоемкости на объемную плотность (кг на м3),  $f$  и  $g$  описывают вклад источников тепла и излучения соответственно. Положительные параметры ... описывают радиационные и теплофизические свойства среды.

Доказанность новых теорем 1.7, 1.8 позволяет говорить о корректности квазилинейной модели.

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) &= f, & (7) \\ -\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) &= g, x \in \Omega, 0 < t < T, & (8) \\ k(\theta)|_{\Omega} \theta + p(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} &= 0, \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. & (9) \end{aligned}$$

Предполагаем, что:

- (k1)  $\alpha, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega)$ ,  $b = r\beta, r = \text{Const} > 0; \alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \beta_0, \sigma \geq \sigma_0, \alpha_0, \beta_0, \sigma_0 = \text{Const} > 0$ .
- (k2)  $0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1, |k'(s)| \leq k_2, s \in \mathbb{R}, \quad k_j = \text{Const}$ .
- (k3)  $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma), 0 \leq \theta_{in} \in L^\infty(\Omega); \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma), p_0 \leq p \in L^\infty(\Gamma), \gamma_0, p_0 = \text{Const} > 0$ .
- (k4)  $0 \leq f, g \in L^\infty(Q)$ .

Теорема 1.7

Если выполнены условия (k1)–(k4), то существует хотя бы одно решение задачи (7)–(9).

Теорема 1.8

Если выполнены условия (k1)–(k4) и  $\theta_*, \varphi_*$  является решением задачи (7)–(9) так, что  $\theta_*, \nabla \theta_* \in L^\infty(Q)$ , то других ограниченных решений этой задачи нет.

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = f, \quad (7)$$

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) = g, x \in \Omega, 0 < t < T, \quad (8)$$

$$k(\theta) \partial_n \theta + p(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \quad (9)$$

Предполагаем, что:

- (k1)  $\alpha, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega)$ ,  $b = r\beta, r = \text{Const} > 0; \alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \beta_0, \sigma \geq \sigma_0, \alpha_0, \beta_0, \sigma_0 = \text{Const} > 0$ .
- (k2)  $0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1, |k'(s)| \leq k_2, s \in \mathbb{R}, \quad k_j = \text{Const}$ .
- (k3)  $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma), 0 \leq \theta_{in} \in L^\infty(\Omega); \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma), p_0 \leq p \in L^\infty(\Gamma), \gamma_0, p_0 = \text{Const} > 0$ .
- (k4)  $0 \leq f, g \in L^\infty(Q)$ .

## Theorem (1.7)

Если выполнены условия (k1)–(k4), то существует хотя бы одно решение задачи (7)–(9).

## Theorem (1.8)

Если выполнены условия (k1)–(k4) и  $\theta_*, \varphi_*$  является решением задачи (7)–(9) так, что  $\theta_*, \nabla \theta_* \in L^\infty(Q)$ , то других ограниченных решений этой задачи нет.

Граничная обратная задача

Модель имеет следующий вид

$$-\alpha \Delta \theta + b \kappa_a (\theta^3 |\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - \theta^3 |\theta|) = 0, \quad (10)$$

и дополняется граничными условиями на  $\Gamma := \partial \Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ , где части границы  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  не имеют пересечений:

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad \alpha \partial_n \theta + \beta (\theta - \theta_b) &= 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2 : \quad \alpha \partial_n \varphi + \gamma (\varphi - \theta_b^4) &= 0, \\ \Gamma_1 : \quad \alpha \partial_n \varphi + u (\varphi - \theta_b^4) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Функции  $\gamma, \theta_b, \beta$  известны. Известная функция  $u$  характеризует отражающие свойства участка границы  $\Gamma_1$ . Предполагается, что  $0 < u_1 \leq u \leq u_2$ . Обратная задача заключается в отыскании тройки  $\theta, \varphi, u$  по дополнительному условию  $\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0$ .

Экстремальная задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma.$$

Модель имеет следующий вид

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \quad (10)$$

и дополняется граничными условиями на  $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ , где части границы  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  не имеют пересечений:

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad \alpha\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) &= 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2 : \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) &= 0, \\ \Gamma_1 : \quad \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Функции  $\gamma, \theta_b, \beta$  известны. Известная функция  $u$  характеризует отражающие свойства участка границы  $\Gamma_1$ . Предполагается, что  $0 < u_1 \leq u \leq u_2$ .

**Обратная задача** заключается в отыскании тройки  $\theta, \varphi, u$  по дополнительному условию  $\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0$ .

**Экстремальная задача** заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma.$$

21. Решение экстремальной задачи называется квазирешением обратной задачи.

23. Не задано  $\varphi$ ! В основе разработанного алгоритма решения лежит анализ экстремальной задачи.

Задача без краевых условий для интенсивности излучения

Кривая задана:

$$-\alpha\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \quad (12)$$

На  $\Gamma$  известно температурное поле и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b. \quad (13)$$

Запишем на «искусственных» краевых условиях

$$\alpha(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \quad (14)$$

Функция  $r(x), x \in \Gamma$  является заданной, а неизвестна функция  $u(x), x \in \Gamma$  играет роль управления. Получаем обратную задачу.

Экстремальная задача заключается в отыскании тройки  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_\Gamma u^2 d\Gamma \rightarrow \inf \quad (15)$$

на решении краевой задачи.

- (jj)  $\alpha\Delta\kappa_a, \lambda = Const > 0$ ,
- (jjj)  $\theta_b, q_b \in U, \quad r = \alpha(\theta_b + q_b)$ .

Theorem (2.3)

Пусть выполняются условия (jj), (jjj). Тогда существует решение экстремальной задачи.

# Задача без краевых условий для интенсивности излучения

## Краевая задача:

$$- \alpha\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \quad (12)$$

На  $\Gamma$  известно температурное поле и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b. \quad (13)$$

Заменяем на «искусственные» краевые условия

$$\alpha(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \quad (14)$$

Функция  $r(x), x \in \Gamma$  является заданной, а неизвестная функция  $u(x), x \in \Gamma$  играет роль управления. Получаем **обратную задачу**.  
**Экстремальная задача** заключается в отыскании тройки  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_\Gamma u^2 d\Gamma \rightarrow \inf \quad (15)$$

на решениях краевой задачи.

- (j)  $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = Const > 0$ ,
- (jj)  $\theta_b, q_b \in U, \quad r = a(\theta_b + q_b)$ .

## Theorem (2.3)

Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда существует решение экстремальной задачи.

# Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

## Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

### Обратная задача с условиями типа Коши

#### Нахождение квазирешения обратной задачи

48. Соберём все необходимые уравнения вместе на 48(ом) слайде – Исходная задача в операторном виде, функционал качества Сопряженная система (линейная) (для решения задачи с 21го слайда)

Приведём алгоритм градиентного спуска с проекцией. Обратим внимание, что оператор проекции нужен из-за начальных ограничений на функцию управления (вызванных физичностью параметра, например)

Отметим, что в силу невыпуклости экстремальной задачи градиентные алгоритмы не обладают свойством глобальной сходимости.

Однако свойства диффузионных моделей сложного теплообмена представленные в диссертации и правильный выбор шага градиентного метода обеспечивают сходимость для рассматриваемых задач. Следующие примеры этот факт демонстрируют.

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (16)$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma, \quad (17)$$

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a(b p_1 - p_2) = f_c, \quad (f_c, v) = - \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma, \quad (18)$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - b p_1) = g_c(p_2, \hat{u}), \quad (g_c(p_2, \hat{u}), v) = - \int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma, \quad (19)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2(\hat{\varphi} - \theta_b^4)(u - w) d\Gamma \leq 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (20)$$

Алгоритм градиентного спуска с проекцией

1. Выбор шага  $\lambda$ , числа итераций  $N$ , управления  $u_0 \in U_{ad}$

2. для  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  выполнить:

- Для  $u_k$  вычислить  $y_k = \{y_k, \varphi_k\}$  по (16);
- Вычислить значение  $J(\theta_k)$  по уравнению (17);
- Рассчитать  $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$  по (18)–(19);
- Пересчитать управление  $u_{k+1} = P_{ad} [u_k - \lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}]$ .

## Нахождение квазирешения обратной задачи

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (16)$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma, \quad (17)$$

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a(b p_1 - p_2) = f_c, \quad (f_c, v) = - \int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma, \quad (18)$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - b p_1) = g_c(p_2, \hat{u}), \quad (g_c(p_2, \hat{u}), v) = - \int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma, \quad (19)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2(\hat{\varphi} - \theta_b^4)(u - w) d\Gamma \leq 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (20)$$

### Алгоритм градиентного спуска с проекцией

1. Выбор шага  $\lambda$ , числа итераций  $N$ , управления  $u_0 \in U_{ad}$ .
2. для  $k \leftarrow 0, 1, 2, \dots, N$  выполнить:
  - Для  $u_k$ , вычислить  $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$  из (16).
  - Вычислить значение  $J(\theta_k)$  из уравнения (17).
  - Рассчитать  $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$  из (18)–(19),
  - Пересчитать управление  $u_{k+1} = P_{ad} [u_k - \lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}]$ .

49. Положим параметры среды, соответствующие стеклу и зададим тестовую функцию управления как показано на слайде. Пластина, у которого боковые стороны "обычные верхняя грань - участок наблюдения, нижняя грань - участок под контролем.

Численное моделирование двумерного случая

Положим  $\Omega = \{(x,y), 0 \leq x,y \leq 1\}$ ,  $l = 1$  см. Граница  $\partial\Omega$ :

$\Gamma_0 = \{x = \{0,1\}, y \in [0,1]\}$   
 $\Gamma_1 = \{x \in [0,1], y = 0\}$  — участок с неизвестными отр. свойствами,  
 $\Gamma_2 = \{x \in [0,1], y = 1\}$  — участок наблюдения.

Будем также далее считать, что  $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$ ,  $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$ ,  
 $\beta = 0.00005[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\kappa = 1[\text{см}^{-1}]$ ,  $\kappa_s = 0$ ,  $A = 0$ ,  $\gamma = 0.3$ . Температуру на границе  $\Omega$  положим равной  $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$ .  
 При указанных параметрах для первого эксперимента выберем следующие тестовые значения функции  $u$ :

$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leq 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases}$$

и для второго эксперимента:  $u(x) = 0.49x + 0.01$ .

Положим  $\Omega = \{(x,y), 0 \leq x,y \leq 1\}$ ,  $l = 1$  см. Граница  $\partial\Omega$ :

$$\Gamma_0 = \{x = \{0,1\}, y \in [0,1]\}$$

$\Gamma_1 = \{x \in [0,1], y = 0\}$  — участок с неизвестными отр. свойствами,

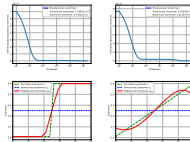
$\Gamma_2 = \{x \in [0,1], y = 1\}$  — участок наблюдения.

Будем также далее считать, что  $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$ ,  $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$ ,  
 $\beta = 0.00005[\text{см}/\text{с}]$ ,  $\kappa = 1[\text{см}^{-1}]$ ,  $\kappa_s = 0$ ,  $A = 0$ ,  $\gamma = 0.3$ . Температуру на границе  $\Omega$  положим равной  $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$ .

При указанных параметрах для первого эксперимента выберем следующее тестовое значение функции  $u$ :

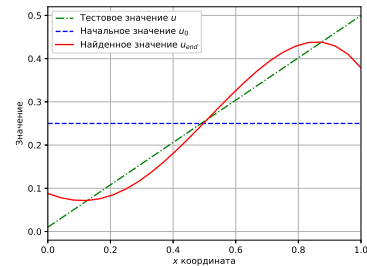
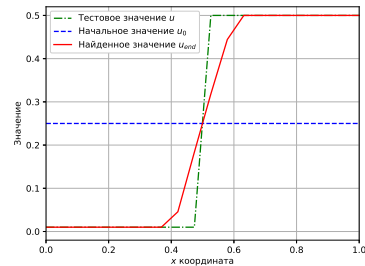
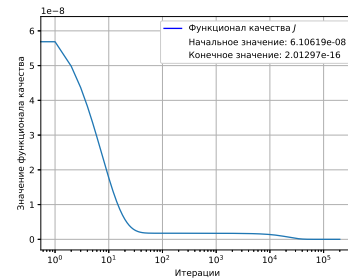
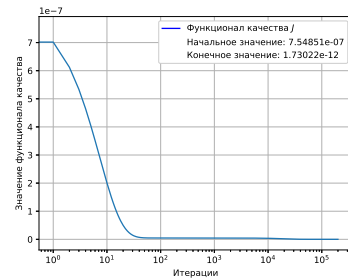
$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leq 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases}$$

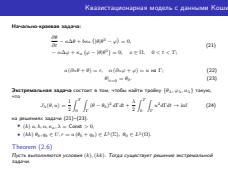
и для второго эксперимента:  $u(x) = 0.49x + 0.01$ .



50. Интересный эффект "среднего значения". Большое количество итераций. Обратить внимание на функционал качества.

## Результаты моделирования обратной граничной задачи





27. Аналог стационарной задачи с небольшими сдвигами по времени. Для оптимизационного метода решения задачи требуются результаты анализа кв.стц. модели из гл. 1! параметр  $u$  неизвестен.

Начально-краевая задача:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b \kappa_a (|\theta| \theta^3 - \varphi) = 0, \quad (21)$$

$$-\alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta| \theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T;$$

$$a (\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha (\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \quad (22)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (23)$$

Экстремальная задача состоит в том, чтобы найти тройку  $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$  такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf \quad (24)$$

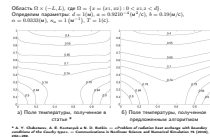
на решениях задачи (21)–(23).

- $(k)$   $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$ ,
- $(kk)$   $\theta_b, q_b \in U, r = a(\theta_b + q_b) \in L^5(\Sigma), \theta_0 \in L^5(\Omega)$ .

### Theorem (2.6)

Пусть выполняются условия  $(k), (kk)$ . Тогда существует решение экстремальной задачи.



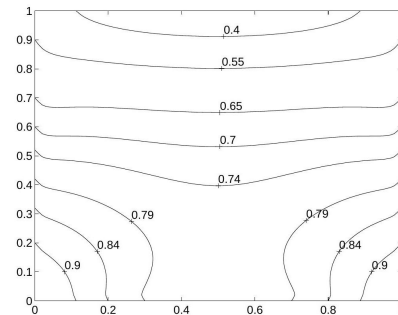


52. Приведены изображения сравнения полученных результатов в рамках работы над диссертацией и коллег из Мюнхена (финальный момент времени) Параметры среды соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400С.

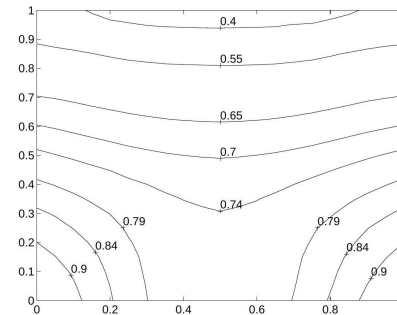
Эрмитов прямоугольный (конформный) элемент Богнера-Фокса-Шмидта и сведение задачи к нестационарной.

Область  $\Omega \times (-L, L)$ , где  $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_{1,2} < d\}$ .

Определим параметры:  $d = 1(\text{м})$ ,  $a = 0.9210 \cdot 10^{-4}(\text{м}^2/\text{с})$ ,  $b = 0.19(\text{м}/\text{с})$ ,  
 $\alpha = 0.0333(\text{м})$ ,  $\kappa_a = 1(\text{м}^{-1})$ ,  $T = 1(\text{с})$ .



а) Поле температур, полученное в статье \*



б) Поле температур, полученное предложенным алгоритмом

\* А. У. Чеботарев, А. Е. Ковтаныук и Н. Д. Боткин. — «Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type». — Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 75 (2019), с. 262—269.

Рассмотрим область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$   
$$-\alpha \Delta \theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha \Delta \varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (25)$$
$$\Gamma = \bar{\Omega} = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \text{ так, что } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset. \text{ На всей границе } \Gamma \text{ задан тепловой поток } q_b, \quad \alpha \partial_n \theta = q_b, \quad x \in \Gamma. \quad (26)$$
Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию  $\gamma$ . В случае, если эта функция известна на части границы  $\Gamma_1$ , краевое условие для интенсивности излучения на  $\Gamma_2$  не ставится, а в качестве условия переопределения на  $\Gamma_1$ , в дополнение к условию на  $\varphi$ , задается температурное поле  $\theta_b$ ,  
$$\alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad \text{ на } \Gamma_1. \quad (27)$$

Рассмотрим область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ .

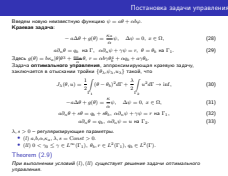
$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (25)$$

$\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$  так, что  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . На всей границе  $\Gamma$  задается тепловой поток  $q_b$ ,

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad x \in \Gamma. \quad (26)$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию  $\gamma$ . В случае, если эта функция известна на части границы  $\Gamma_2$ , краевое условие для интенсивности излучения на  $\Gamma_2$  не ставится, а в качестве условия переопределения на  $\Gamma_1$ , в дополнение к условию на  $\varphi$ , задается температурное поле  $\theta_b$ ,

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad \text{ на } \Gamma_1. \quad (27)$$



31. Используя замену, представленную на слайде, мы заменим исходную задачу, на крайевую задачу с функциями  $\theta, \psi$ . Вместо системы двух нелинейных уравнений одно уравнение стало линейным (для  $\Psi$ ) (!!!Где нелинейность в исходной задаче!!!) Два нелинейных заменили на нелинейное и линейное (пси - гармоническая, к тому же). Особо обратим внимание на параметр s, который пришлось добавить в данную постановку из-за того, что реализованный алгоритм не сходиллся. (Потеря точности решения.?)

Введем новую неизвестную функцию  $\psi = a\theta + \alpha b$ .

**Краевая задача:**

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (28)$$

$$a\partial_n\theta = q_b \text{ на } \Gamma, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \quad \theta = \theta_b \text{ на } \Gamma_1. \quad (29)$$

Здесь  $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$ ,  $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$ .

Задача **оптимального управления**, аппроксимирующая крайевую задачу, заключается в отыскании тройки  $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\}$  такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf, \quad (30)$$

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (31)$$

$$a\partial_n\theta + s\theta = q_b + s\theta_b, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r \text{ на } \Gamma_1, \quad (32)$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad \alpha\partial_n\psi = u \text{ на } \Gamma_2. \quad (33)$$

$\lambda, s > 0$  – регуляризирующие параметры.

- (I)  $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda, s = \text{Const} > 0$ .
- (II)  $0 < \gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma_1)$ ,  $\theta_b, r \in L^2(\Gamma_1)$ ,  $q_b \in L^2(\Gamma)$ .

**Theorem (2.9)**

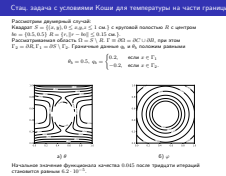
При выполнении условий (I), (II) существует решение задачи оптимального управления.

# Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

Стационарная задача с условиями Коши на части границы

Стац. задача с условиями Коши для температуры на части границы



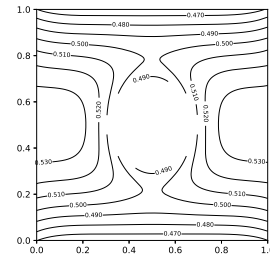
## Стац. задача с условиями Коши для температуры на части границы

Рассмотрим двумерный случай:

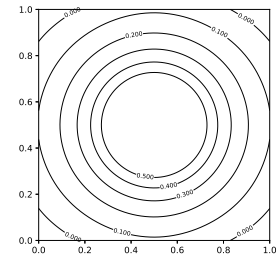
Квадрат  $S = \{(x, y), 0 \leq x, y, z \leq 1 \text{ см.}\}$  с круговой полостью  $R$  с центром  $b_0 = \{0.5, 0.5\}$   $R = \{r, \|r - b_0\| \leq 0.15 \text{ см.}\}$ .

Рассматриваемая область  $\Omega = S \setminus R$ .  $\Gamma \equiv \partial\Omega = \partial C \cup \partial B$ , при этом  $\Gamma_2 = \partial R$ ,  $\Gamma_1 = \partial S \setminus \Gamma_2$ . Граничные данные  $q_b$  и  $\theta_b$  положим равными

$$\theta_b = 0.5, \quad q_b = \begin{cases} 0.2, & \text{если } x \in \Gamma_1 \\ -0.2, & \text{если } x \in \Gamma_2 \end{cases}$$



а)  $\theta$



б)  $\varphi$

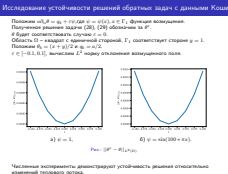
Начальное значение функционала качества 0.045 после тридцати итераций становится равным  $6.2 \cdot 10^{-5}$ .

# Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

Стационарная задача с условиями Коши на части границы

Исследование устойчивости решений обратных задач с данными Коши



Также приведем результаты по исследованию устойчивости решений обратных задач с данными Коши. Для этого переопределим в уравнении (29)  $a\partial_n\theta = q_b + \varepsilon\psi$ , где  $\psi = \psi(x)$ ,  $x \in \Gamma_1$  некоторая функция, моделирующая возмущение. Полученное таким образом решение задачи (28), (29) обозначим за  $\theta^\varepsilon$ . Следовательно,  $\theta$  будет соответствовать случаю  $\varepsilon = 0$ . Для проведения численного моделирования область  $\Omega$  определим как квадрат с единичной стороной, где  $\Gamma_1$  соответствует стороне  $y = 1$ . Положим  $\theta_b = (x + y)/2$  и  $q_b = a/2$  соответственно. Выполним расчеты температурного поля для различных малых значений параметра возмущений  $\varepsilon$  из промежутка  $[-0.1, 0.1]$  и вычислим  $L^2$  норму отклонения возмущенного поля.

## Исследование устойчивости решений обратных задач с данными Коши

Положим  $a\partial_n\theta = q_b + \varepsilon\psi$ , где  $\psi = \psi(x)$ ,  $x \in \Gamma_1$  функция возмущения.

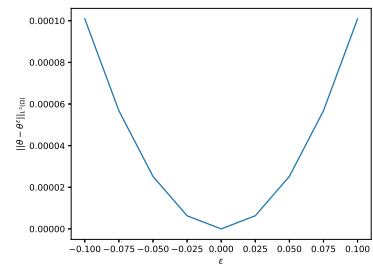
Полученное решение задачи (28), (29) обозначим за  $\theta^\varepsilon$ .

$\theta$  будет соответствовать случаю  $\varepsilon = 0$ .

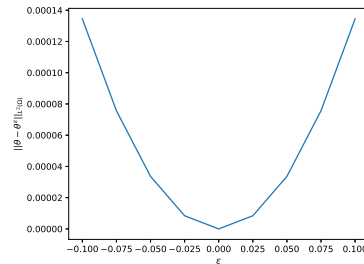
Область  $\Omega$  – квадрат с единичной стороной,  $\Gamma_1$  соответствует стороне  $y = 1$ .

Положим  $\theta_b = (x + y)/2$  и  $q_b = a/2$ .

$\varepsilon \in [-0.1, 0.1]$ , вычислим  $L^2$  норму отклонения возмущенного поля.



а)  $\psi = 1$ ,



б)  $\psi = \sin(100 * \pi x)$ .

Рис.:  $\|\theta^\varepsilon - \theta\|_{L^2(\Omega)}$

Численные эксперименты демонстрируют устойчивость решения относительно изменений теплового потока.

# Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

## Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей

### Задачи оптимального управления

#### Квазилинейная модель с фазовыми ограничениями

Дана область, в ней две подобласти. Мы хотим в одной достичь определенного температурного режима, в другой хотим не допустить превышения заранее заданного ограничения.  $P$  – максимальная мощность источника,  $\alpha$  – коэффициент диффузии фотонов,  $N$  – характеристическая функция той части среды, в которой он расположен, деленная на его объём.  $\beta$  – коэффициент поглощения,  $k(\theta)$  является коэффициентом теплопроводности,  $\sigma$  является произведением удельной теплоемкости и плотности среды,  $u_1$  описывает мощность источника тепла,  $u_2$  – мощность источника теплового излучения.

Квазилинейная модель с фазовыми ограничениями

Начально-краевая задача

$$\begin{aligned} \alpha \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi, \\ -\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ \theta &= \theta_0, \quad \alpha \partial_n \varphi + 2^{-1} \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \end{aligned} \quad (34)$$

При этом учитываются ограничения

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta_{\min} \leq \theta.$$

Задача оптимального управления  $P_\varepsilon: J_\varepsilon(\theta) \rightarrow \inf$ , где

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\theta) &= \int_0^T \int_{\Omega_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega_2} F(\theta) dx dt, \\ \alpha \theta' + A(\theta) &= u_1, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}, \\ F(\theta) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_* \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_* \end{cases} \end{aligned}$$

- (a1)  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \quad |\partial \theta / \partial t| \leq \theta_2$
- (a2)  $k_0 \leq k(x) \leq k_1, \quad |k'(x)| \leq k_2, \quad x \in \mathbb{R}$
- (a3)  $\theta_0 \in H$
- (a4)  $\alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1, \beta_0 \leq \beta(x) \leq \beta_1, \quad x \in \Omega$

Теорема (3.2)

Пусть выполняются условия (a1)-(a4). Тогда существует решение задачи  $P_\varepsilon$ .

## Квазилинейная модель с фазовыми ограничениями

### Начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - \beta \varphi &= u_1 \chi \\ -\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta \varphi &= u_2 \chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\theta = 0|_{\Gamma}, \quad \alpha \partial_n \varphi + 2^{-1} \varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (35)$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*$$

**Задача оптимального управления**  $P_\varepsilon: J_\varepsilon(\theta) \rightarrow \inf$ , где

$$J_\varepsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dx dt,$$

$$\sigma \theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad},$$

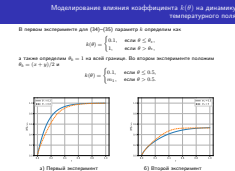
$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \theta_* \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{если } \theta > \theta_*. \end{cases}$$

- (c1)  $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, \quad |\partial \sigma / \partial t| \leq \sigma_2$
- (c2)  $k_0 \leq k(s) \leq k_1, \quad |k'(s)| \leq k_2, \quad s \in \mathbb{R}$
- (c3)  $\theta_0 \in H$
- (c4)  $\alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1, \beta_0 \leq \beta(x) \leq \beta_1, \quad x \in \Omega$

### Theorem (3.2)

Пусть выполняются условия (c1)-(c4). Тогда существует решение задачи  $P_\varepsilon$ .

Здесь показать анимацию.



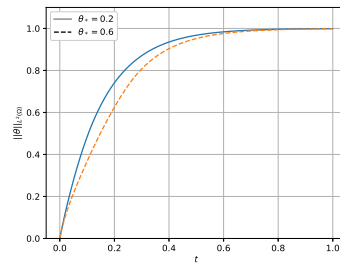
## Моделирование влияния коэффициента $k(\theta)$ на динамику температурного поля

В первом эксперименте для (34)–(35) параметр  $k$  определим как

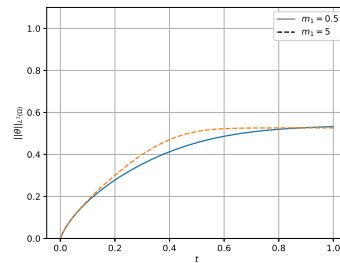
$$k(\theta) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } \theta \leq \theta_*, \\ 1, & \text{если } \theta > \theta_*, \end{cases}$$

а также определим  $\theta_b = 1$  на всей границе. Во втором эксперименте положим  $\theta_b = (x + y)/2$  и

$$k(\theta) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } \theta \leq 0.5, \\ m_1, & \text{если } \theta > 0.5. \end{cases}$$



а) Первый эксперимент



б) Второй эксперимент

# Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

## Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей

## Задачи оптимального управления

## Научная новизна



- Получены новые априорные оценки решений начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных уравнений сложного теплообмена и доказана их нелокальная однозначная разрешимость.
- Представлены априорные оценки решений регуляризованных задач и обоснована сходимость их решений к точным решениям обратных задач.
- Для решения задач с фазовыми ограничениями, предложены алгоритмы, основанные на аппроксимации экстремальными задачами со штрафом.
- Реализованы программные комплексы
  - По решению обратных задач, основанные на оптимизационных методах
  - Тестирования решений, получаемых в результате решения обратных задач
  - Инструменты моделирования процессов сложного теплообмена для манипуляции 'in place'
  - Инструменты визуализации получаемых значений в процессе моделирования





- Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена
  - Задачи оптимального управления для квазилинейных моделей
    - Задачи оптимального управления
      - Публикации, конференции

БАК:

- P. R. Mesenev — *Дальневост. матем. журн.* 23.1 (2023).
- P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* (2023).
- P. R. Mesenev and A. Yu. Chebotarev — *Comput. Math. Math. Phys.* 62.1 (Jan. 2022).
- A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev и A. E. Kovtanyuk — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2022).
- A. Yu. Chebotarev и P. R. Mesenev — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2020).
- P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2018).

Прочее:

- A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, P. Mesenev — *Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems – Dedicated to the Memory of Nikolai Botkin* (2020).
- A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev и A. E. Kovtanyuk — *Journal of Physics: Conference Series* (2023).
- A. Chebotarev, P. Mesenev и A. Kovtanyuk — *2023 Days on Diffraction (DD)* (2023).
- A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, N. Park, P. Mesenev — *2021 Days on Diffraction (DD)* (2021).
- P. R. Mesenev — *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам* (2018).

Конференции:

- Региональная научно-практическая конференция (Владивосток, 2018, 2019);
- Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics (Владивосток, 2022);
- Int. Conference DAYS on DIFFRACTION (Санкт-Петербург, 2021, 2023);
- Int. Workshop on Math. Modeling and Scientific Computing (Мюнхен, 2020, 2022).

БАК:

- 1 P. R. Mesenev — *Дальневост. матем. журн.* 23.1 (2023).
- 2 П. Р. Месенев и А. Ю. Чеботарев — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* (2023).
- 3 P R Mesenev and A Yu Chebotarev — *Comput. Math. Math. Phys.* 62.1 (Jan. 2022).
- 4 A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev и А. Е. Kovtanyuk — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2022).
- 5 А. Yu. Chebotarev и P. R. Mesenev — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2020).
- 6 P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2018).

Прочее:

- 1 А. Chebotarev, A. Kovtanyuk, P. Mesenev — *Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems – Dedicated to the Memory of Nikolai Botkin* (2020).
- 2 A Yu Chebotarev, N M Park, P R Mesenev и A E Kovtanyuk — *Journal of Physics: Conference Series* (2023).
- 3 А. Chebotarev, P. Mesenev и А. Kovtanyuk — *2023 Days on Diffraction (DD)* (2023).
- 4 А. Chebotarev, А. Kovtanyuk, N. Park, P. Mesenev — *2021 Days on Diffraction (DD)* (2021).
- 5 П. Р. Месенев — *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам* (2018)

Конференции:

- Региональная научно-практическая конференция (Владивосток, 2018, 2019);
- Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics (Владивосток, 2022);
- Int. Conference DAYS on DIFFRACTION (Санкт-Петербург, 2021, 2023);
- Int. Workshop on Math. Modeling and Scientific Computing (Мюнхен, 2020, 2022).