Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»

На правах рукописи

Месенёв Павел Ростиславович

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Чеботарев Александр Юрьевич

Владивосток — 2023

Оглавление

Стр.

Стр.

Стр.

Введение

Под сложным теплообменом понимают процесс распространения тепла, в котором участвуют несколько видов переноса тепла – радиационный, кондуктивный, конвективный. При чём в данном процессе радиационный перенос тепла занимает существенную роль при высоких температурах. С математической точки зрения процесс сложного теплообмена моделируется системой из дифференциального уравнения теплопроводности, а также интегро-дифференциального уравнения переноса излучения.

Решение уравнения переноса излучения является трудно вычислимой задачей из-за того, что помимо временной и пространственной переменной также задействовано векторное поле, задающее направление излучения. В связи с этим для уравнения переноса излучения применяют ряд аппроксимаций, в том числе диффузионное P_1 приближение, которое использует усреднённая интенсивность излучения по всем направлениям. Широко используемое P_1 приближение является частным случаем метода сферических гармоник (P_N-приближения) и упрощенного метода сферических гармоник (SP_N-приближения, SP_1 эквивалентно P_1).

В классических прямых задачах сложного теплообмена задаются параметры системы, и по ним вычисляется состояние системы – температурное поле и интенсивность теплового излучения. Обратные задачи сложного теплообмена состоят в разыскании исходных параметров системы по некоторым известным сведениям о температурном поле или интенсивности излучения. Например, обратные задачи, связанные с теплопроводностью, обычно связаны с оценкой неизвестного граничного теплового потока при известной температуре.

Отметим трудности, возникающие при решении обратных задач сложного теплообмена.

Эти задачи математически классифицируются как некорректные в общем смысле, из-за высокой нестабильности решений. Как следствие, обратные задачи теплообмена долгое время не представляли физического интереса. Появление в 50-х годах эвристических методов и в 60–70е годы методов оптимизации позволило исправить проблемы некорректности исследуемых задач. В основе таких методов лежит идея замены исходной задачи на задачу оптимизации с использованием регуляризации, которая и позволяет преодолеть проблемы нестабильности решений.

Диссертация посвящена теоретическому анализу обратных стационарных задач сложного теплообмена в трёхмерной области в рамках P_1-приближения уравнения переноса излучения. Теоретические результаты проиллюстрированы численными примерами.

Исследование математических моделей радиационного теплопереноса учитывающих одновременно вклад эффектов теплопроводности и излучения даёт теоретическую основу для инженерных решений в различных областях, таких как производство стекла, лазерная интерстициальная термотерапия, и другие. Главной особенностью данных процессов является существенное влияние излучения на теплообмен при высоких температурах.

Степень разработанности темы исследования. Основополагающие работы А.Н. Тихонова [1] и его коллег, которые исследовали уравнения математической физики, стали отправной точкой для разработки методов преодоления неустойчивостей в обратных задачах. О.М. Алифанов [2] в своих работах, посвященных обратным задачам в исследовании сложного теплообмена, также сделал значительный вклад в развитие этой области. J.V. Beck [3] предложил новые подходы к решению обратных задач, основанных на методах оптимизации и статистическом анализе.

Исследования, проведенные в работах [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15], позволили анализировать разрешимость моделей сложного теплообмена между телами, разделенными прозрачной средой. В рамках этих моделей было исследовано уравнение теплопроводности с нелинейным нелокальным краевым условием, имитирующим тепловое излучение границы области и теплообмен излучением между различными частями границы.

В работах Tiihonen et al. [4, 5] рассматриваются вопросы стационарного и нестационарного теплообмена с учетом радиационных и конвективных потоков. Metzger et al. [6] исследовали существование и единственность решений для уравнений теплообмена в двухфазных системах.

В серии работ Amosov et al. [7, 8, 10, 11, 12] авторы анализировали свойства существования и устойчивости стационарных и нестационарных решений в моделях теплообмена с нелокальными краевыми условиями, а также исследовали вопросы оптимального управления в таких системах. Результаты этих исследований позволили разработать новые методы и алгоритмы для определения оптимальных параметров управления и прогнозирования поведения системы в различных условиях.

Philip et al. [9] также занимались анализом разрешимости обратных задач в моделях теплообмена, основанных на уравнениях конвекции-диффузии-реакции. Это позволило разработать методы восстановления неизвестных параметров системы, таких как коэффициенты теплопроводности или плотности источников тепла.

Исследования, проведенные Druet et al. [13, 14], посвящены слабым решениям стационарных и нестационарных моделей теплообмена с нелинейными нелокальными краевыми условиями. Это позволило разработать новые методы исследования структуры решений и их свойств, а также применить полученные результаты для анализа реальных физических систем.

В работе Laitinen et al. [15] рассматривается проблема проводимости тепла в многослойных структурах с учетом радиационного и конвективного теплообмена. Результаты этого исследования позволили разработать методы оптимизации теплоизоляционных свойств материалов и технологий, используемых в различных отраслях промышленности.

В целом, проведенные исследования в области обратных задач теплообмена с учетом радиационных и конвективных процессов позволили разработать новые методы и подходы к анализу и оптимизации тепловых систем, что нашло широкое применение в теплоэнергетике, авиации, космической технике, микроэлектронике и других областях науки и техники.

В ряде исследований была изучена возможность решения моделей сложного теплообмена в полупрозрачной среде, где для описания радиационного теплообмена применяется уравнение переноса излучения. В работах [16, 17] доказана единственность решений одномерных стационарных задач радиационно-кондуктивного теплообмена, в то время как в [18, 19, 20] была доказана единственность решений трехмерных задач. В исследовании [20] рассматривается стационарная модель, в [19] – нестационарная, а в [18] – квазистационарная модель.

Квазистационарные модели сложного теплообмена представляют собой модели, которые включают нестационарное уравнение теплопроводности и стационарное уравнение переноса излучения. Эти модели позволяют учесть различные временные масштабы процессов, происходящих в системе, и использовать соответствующие численные методы для их решения.

Обратим внимание на работы [21, 22, 23, 24, 25, 26], которые посвящены разработке численных методов для ранее упомянутых моделей сложного теплообмена.

А.А. Амосов в своих работах [10, 11, 27, 28] доказал единственность решений для стационарных и квазистационарных моделей сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел. В этих моделях используется уравнение переноса излучения с краевыми условиями, которые моделируют отражение и преломление излучения на границах тел. Рассмотрена также зависимость интенсивности излучения и оптических свойств тел от частоты излучения. В работах [10, 11] предполагались условия диффузного отражения и преломления излучения, в то время как в [27, 28] рассматривались условия отражения и преломления излучения согласно законам Френеля.

Эти исследования представляют собой значительный вклад в разработку и анализ численных методов для моделей сложного теплообмена в полупрозрачных средах. Результаты позволяют глубже понять особенности этих моделей и принять во внимание различные физические процессы, такие как отражение и преломление излучения, а также зависимость оптических свойств материалов от частоты излучения.

В следующих работах акцент ставится на решении обратных задач в контексте моделей сложного теплообмена, основанных на полном уравнении переноса излучения. В статье [29], авторы разрабатывают численный алгоритм для решения задачи оптимального управления источниками тепла и излучения в стационарной модели сложного теплообмена, что позволяет управлять процессом с учетом радиационных эффектов.

В статье [30], теоретический анализ задачи оптимального управления источниками тепла проводится в рамках квазистационарной модели сложного теплообмена, включая полное уравнение переноса излучения. Авторы доказывают однозначную разрешимость прямой задачи, разрешимость задачи управления и представляют условия оптимальности. Это позволяет лучше понять возможности и ограничения оптимального управления тепловыми источниками в сложных системах с учетом радиационного теплообмена.

В работе [12], основной фокус направлен на теоретический и численный анализ обратной задачи восстановления начального распределения температуры, основываясь на известной зависимости температуры на границе области от времени. Это исследование проводится в рамках квазистационарной модели сложного теплообмена, что может облегчить понимание и оптимизацию процессов теплообмена с учетом радиационных эффектов.

Работы [31, 32, 33, 9] основываются на анализе задач оптимального управления для стационарных моделей сложного теплообмена в прозрачной среде. Они включают уравнение теплопроводности с нелинейным нелокальным краевым условием, моделирующим тепловое излучение границы области и теплообмен излучением между частями границы. Эти исследования разрабатывают методы для эффективного управления процессами теплообмена в прозрачных средах.

В статье [34] представлен численный алгоритм для решения задачи оптимального управления граничными коэффициентами в одномерной нестационарной модели, которая включает уравнение теплопроводности с нелинейным краевым условием, описывающим тепловое излучение границ. Этот подход позволяет адаптировать граничные коэффициенты для улучшения процессов теплообмена в динамических условиях.

Статьи [35, 36, 37, 38] посвящены численному моделированию в рамках диффузионных моделей сложного теплообмена. Они показывают различные подходы к аппроксимации и решению уравнений теплопроводности с учетом радиационных эффектов.

В работе [39] исследуется схема метода конечных объемов для решения квазистационарной системы уравнений сложного теплообмена, основанной на P_1-приближении уравнения переноса излучения. Это исследование предлагает новый подход к численному решению квазистационарных задач, связанных с радиационным теплообменом.

В статьях [40, 41, 26, 36, 42, 43] проводится сравнение P_1-приближения с другими методами аппроксимации уравнения переноса излучения. Авторы исследуют различные подходы к приближению уравнения переноса излучения, такие как дискретные углы, сферические гармоники и другие методы, для определения наиболее точных и эффективных способов моделирования радиационного теплообмена.

Статья [40] представляет сравнение P_1-приближения с эллиптическим уравнением переноса излучения, оценивая их точность и вычислительные затраты. В работе [41] рассматривается адаптивное изменение сетки (adaptive mesh refinement) для численного решения уравнения переноса излучения с использованием различных методов аппроксимации, включая P_1-приближение.

В статье [26] представлено сравнение P_1-приближения с методом дискретных углов для решения уравнения переноса излучения в полупрозрачных средах. Работа [36] сравнивает P_1-приближение с другими методами для решения уравнений радиационного переноса и теплопроводности.

Статьи [42] и [43] также оценивают эффективность и точность различных методов аппроксимации уравнения переноса излучения, включая P_1-приближение, для моделирования радиационного теплообмена в различных условиях.

В статьях [44, 45, 46, 41, 43] приведены вывод и численный анализ нестационарного P_1-приближения уравнения переноса излучения. Эти работы оценивают точность и эффективность данного подхода в моделировании радиационного теплообмена в различных условиях и сравнивают его с другими методами аппроксимации.

Работы R. Pinnau и O. Tse [47, 48] проводят теоретический анализ квазистационарных моделей сложного теплообмена, основанных на SP_1 и SP_3-приближениях. Эти модели включают уравнение теплопроводности, стационарное SP_N-приближение, а также в [48] уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска.

В результате анализа авторы определяют преимущества и недостатки различных приближений, позволяющих точнее и эффективнее моделировать сложные процессы теплообмена, такие как радиационный перенос, теплопроводность и конвективный теплообмен, описываемый уравнениями Навье – Стокса.

В работе [47] авторы доказывают существование, единственность и ограниченность решения задачи сложного теплообмена на основе P_1-приближения без источников тепла и излучения. В отличие от этого, в статье [48] авторы доказывают однозначную разрешимость задачи свободной конвекции с радиационным теплообменом на основе SP_3-приближения в двумерной области, где присутствуют источники тепла с ограниченной плотностью.

В свою очередь, в работах А.Е. Ковтанюка и А.Ю. Чеботарева [49, 50, 51] авторы исследуют стационарные модели сложного теплообмена на основе P_1-приближения. В этих статьях доказана однозначная разрешимость краевых задач и сходимость метода простой итерации для нахождения решения. Эти результаты важны для обоснования применимости и эффективности P_1-приближения в задачах сложного теплообмена.

Стоит отметить, что численная реализация метода, предложенного в работах А.Е. Ковтанюка и А.Ю. Чеботарева, затруднена, поскольку на каждой итерации требуется решить нелинейное эллиптическое уравнение. В статье [52] авторы доказывают однозначную разрешимость сходной субдифференциальной краевой задачи с многозначной зависимостью коэффициента излучения границы от интенсивности излучения.

В работах [53, 54] получены результаты о существовании и единственности решений обратных задач для стационарной диффузионной модели сложного теплообмена. Эти задачи заключаются в нахождении неизвестной плотности источников тепла в виде линейной комбинации заданных функционалов при известных значениях этих функционалов на решении краевой задачи.

Работы R. Pinnau и O. Tse [47, 48] посвящены теоретическому анализу задач оптимального управления температурой на границе области в рамках квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе SP_N-приближений. Авторы доказали разрешимость задач управления и нашли необходимые условия оптимальности, что является важным результатом для понимания и решения задач оптимального управления в рамках сложных теплообменных процессов.

В работах [55, 56, 57, 41, 58, 48] были разработаны численные методы решения задач оптимального управления граничной температурой для квазистационарной модели сложного теплообмена на основе P_1-приближения. Особенностью методов, предложенных в [55, 56, 57], является учет зависимости коэффициента поглощения от частоты излучения, что позволяет получать более точные результаты при моделировании сложных теплообменных процессов. Эти методы могут быть полезными для практических приложений в области управления и оптимизации теплообменных систем.

В [41, 58] авторы рассматривали задачу минимизации отклонения поля температуры от заданного. Для решения задачи оптимизации применялся метод Ньютона, который является эффективным итерационным методом для нахождения оптимального решения.

В работе [57] также рассматривалась задача минимизации отклонения поля температуры от заданного, но в данном случае использовался метод проекции градиента, который предлагает другой подход к оптимизации и может быть предпочтительным в некоторых ситуациях.

В работах [55, 48] авторы фокусировались на минимизации нормы градиента температуры и применяли метод проекции градиента для решения задачи оптимизации. Этот подход может быть полезен в задачах, где важна гладкость решения.

В работе [56] решалась задача минимизации отклонения поля температуры от заданного на основе серии из трех моделей, аппроксимирующих уравнение переноса излучения с разной точностью. Авторы использовали оптимизационный метод второго порядка, что позволяет учитывать кривизну целевой функции и может привести к более быстрой сходимости и точности решения.

Таким образом, в каждой из этих работ предложены различные методы оптимизации для решения задач минимизации отклонения температурного поля или нормы градиента температуры от заданных значений. Эти методы могут быть полезными для разработки и применения оптимальных стратегий управления температурой в различных теплообменных системах.

В работе [59] авторы провели теоретический анализ задачи оптимального управления температурой на границе области в рамках стационарной диффузионной модели сложного теплообмена. Для численного решения этой задачи управления был применен метод проекции градиента, который является эффективным итерационным методом оптимизации.

В ряде работ А.Е. Ковтанюка, А.Ю. Чеботарева и других [49, 60, 61, 62], исследовались задачи оптимального управления коэффициентом излучения границы области в рамках стационарной модели сложного теплообмена на основе P_1-приближения.

В [49, 62], авторы вывели необходимые условия оптимальности для задачи максимизации выходящей из среды энергии, доказали разрешимость задачи управления и получили достаточные условия регулярности системы оптимальности. Они также обнаружили, что эти условия выполняются при достаточно большой скорости движения среды и малых размерах области.

В работах [30, 16], авторы изучили оптимальное управление в задачах максимизации и минимизации полей температуры и излучения в области теплообмена. Они получили достаточные условия оптимальности для этих задач и доказали сходимость метода простой итерации для нахождения оптимального управления. Результаты этих исследований являются важным вкладом в разработку и применение оптимальных стратегий управления в теплообменных системах, особенно в случае, когда поле температуры или излучения должно быть максимизировано или минимизировано во всей области теплообмена.

В последние годы исследования моделей сложного теплообмена стали особенно актуальными в связи с практическими приложениями, такими как высокотемпературные процессы и передовые технологии. Ниже приведены некоторые примеры исследований практической применимости рассматриваемых моделей:

Производство стекла: Работы [46, 55] представляют собой примеры исследований, посвященных оптимальному управлению температурой в процессах производства стекла. В этих работах рассматриваются модели сложного теплообмена, которые позволяют управлять температурными полями и повышать эффективность производства.

Лазерная интерстициальная термотерапия: В работах [63, 64] изучается применение моделей сложного теплообмена для управления процессами лазерной интерстициальной термотерапии. Этот метод используется для локального лечения опухолей и требует точного управления температурными полями во время процедуры. Модели сложного теплообмена могут помочь в определении оптимальных параметров управления для достижения желаемого терапевтического эффекта.

Эти примеры исследований показывают, что модели сложного теплообмена имеют большой потенциал для практического использования в различных отраслях промышленности и медицине. Они могут помочь в определении оптимальных стратегий управления для повышения эффективности процессов и обеспечения безопасности и точности в различных приложениях.

Процедура эндовенозной лазерной абляции (EVLA) является безопасной и эффективной в лечении варикозных вен [65]. Математическое моделирование лучевых и тепловых процессов при ЭВЛА имеет решающее значение для определения оптимальных параметров излучения, обеспечивающих достаточно высокие температуры внутри вены для успешной облитерации, обеспечивая при этом сохранность окружающих тканей. Результаты численного моделирования для различных длин волн и диаметров жил обсуждались в ряде работ [66, 67, 68, 69].

Эти исследования демонстрируют важность математического моделирования для выбора оптимальной мощности лазерного излучения и скорости отвода волокна.

Наиболее перспективным подходом к выбору оптимальных параметров излучения является рассмотрение задачи оптимального управления для уравнений типа реакция-диффузия, описывающих процедуру EVLA. Различные подходы к анализу и оптимизации параметров для моделей реакция-диффузия, описывающих различные природные явления, можно найти в [70, 71, 54, 72].

Задачи оптимального управления для модели EVLA рассматриваются в [73, 74]. В [73] поставлена задача оптимального управления для модели реакция-диффузия, описывающей процедуру EVLA, которая заключается в аппроксимации заданного температурного профиля в определенной точке области модели. В [74] изучается аналогичная задача оптимального управления, как в [73]. Здесь целевой функционал выбран таким образом, что его минимизация позволяет достичь заданного распределения температуры в различных частях области модели. Это позволяет обеспечить достаточно высокую температуру внутри вены для успешной облитерации и безопасную температуру в окружающей вену ткани. Доказана единственная разрешимость начально-краевой задачи, на основе которой показана разрешимость задачи оптимального управления. Предложен алгоритм поиска решения задачи оптимального управления. Эффективность алгоритма проиллюстрирована численным примером.

Таким образом, ряд важных задач, относящихся к моделированию и оптимизации сложного теплообмена на основе диффузионного приближения, оставался нерешенным: исследование разрешимости нестационарной задачи сложного теплообмена с источниками тепла и излучения и нестационарной задачи свободной конвекции с радиационным теплообменом в трехмерной области, исследование устойчивости по Ляпунову стационарных решений, вывод диффузионной модели сложного теплообмена в многослойной среде, анализ сходимости метода Ньютона для уравнений сложного теплообмена, разработка численных методов решения задач оптимального управления коэффициентом излучения границы области в рамках нестационарных моделей сложного теплообмена, доказательство регулярности условий оптимальности для задачи оптимального управления коэффициентом излучения границы в рамках стационарной модели.

В целом, исследования моделей сложного теплообмена в практических приложениях подчеркивают важность этого направления для развития новых технологий и применений. Моделирование и оптимизация тепловых процессов в различных областях может привести к более эффективным и безопасным методам производства, лечения и управления температурой. С развитием вычислительных технологий и улучшением численных методов, можно ожидать дальнейшего прогресса в этой области исследований.

Цели и задачи диссертационной работы. Цели работы - теоретическое исследование разрешимости обратных стационарных задач сложной теплопроводности. Разработка численных методов решения исследуемых краевых задач, а также задач оптимального управления. Разработка вычислительных программ для постановки численных экспериментов и демонстрации результатов расчётов. Перед началом работы были поставлены следующие задачи:

– Исследовать разрешимость задачи по нахождению коэффициента отражения участка границы для стационарной модели, по дополнительной информации о температурном поле.
– Разработать численный метод по нахождению решения для соответствующей экстремальной задачи.
– Исследовать стационарную задачу оптимального управления для уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена в трехмерной области в рамках P_1–приближения уравнения переноса излучения.
– Результаты теоретического анализа проиллюстрировать численными примерами.

Научная новизна. Результатом работы является теоретический анализ разрешимости обратных задач сложного теплообмена. Доказано существование квазирешения для первой рассматриваемой задачи. Реализован алгоритм градиентного спуска для решения экстремальной задачи и представлены результаты численных экспериментов. Далее показано, что последовательность решений экстремальных задач сходится к решению краевой задачи с условиями типа Коши для температуры. Результаты теоретического анализа также проиллюстрированы численными примерами.

Теоретическая и практическая значимость. Исследование однозначной разрешимости экстремальных задач, а также задач оптимального управления крайне важно при реализации численных алгоритмов и позволяет судить об адекватности полученных решений.

Задачи оптимизации имеют крайне важное практическое применение при выборе параметров системы для получения желаемой температуры или теплового излучения. Необходимость выбора параметров системы возникает при проектировании инженерных установок в которых присутствуют процессы сложного теплообмена.

Разработанные комплексы программ служат практическим подтверждением теоретических результатов, а также могут быть использованы в качестве примеров для решения подобных задач.

Научная значимость данной работы состоит в теоретическом вкладе в исследования корректности и разрешимости задач сложного теплообмена. Реализация конкретных методов решения проблем оптимального управления, в свою очередь, имеет высокую значимость для решения прикладных инженерных задач по проектированию тепловых установок с заданными температурными свойствами.

Исследования в области моделирования сложного теплообмена и оптимального управления температурой продолжают расширять наше знание и понимание фундаментальных процессов, лежащих в основе разнообразных приложений.

Методология и методы исследования. В работе широко использовались методы математического и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории экстремальных задач. Для разработки численных алгоритмов решения применялись методы вычислительной математики, объектно-ориентированное и функциональное программирование, методы оптимизации и другие.

Положения, выносимые на защиту. В области математического моделирования

– Разрешимость экстремальной задачи для стандартной модели радиационно-диффузионного теплообмена

Степень достоверности и апробация результатов. Теоретические результаты, представленные в диссертации получены использованием методов функционального анализа, теорий дифференциальных уравнений и экстремальных задач. Теоремы имеют строгие математические доказательства. Достоверность численных экспериментов обеспечивается согласованностью с теоретическими результатами, доказательством сходимости итерационных процессов и тестированием разработанного программного обеспечения.

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в пяти статьях [65, 66] в изданиях, рекомендованных ВАК.

Личный вклад автора. Результаты в области математического моделирования получены совместно с научным руководителем. В области численных методов и комплексов программ результаты получены автором самостоятельно.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 156 страниц, включая 12 рисунков и 0 таблиц. Список литературы содержит 0 наименований.

Глава 1. Модели сложного теплообмена

1.1 Уравнение переноса теплового излучения

Уравнение переноса излучения описывает поле интенсивности излучения при взаимодействии теплового излучения с поглощающей, излучающей и рассеивающей средой (radiatively participating medium). Будем предполагать, что среда имеет постоянный показатель преломления n, является не поляризующей, находится в состоянии покоя (по сравнению со скоростью света) и в локальном термодинамическом равновесии [75, с. 280].

Спектральной интенсивностью излучения $I_\nu(x\omega, t)$ [Вт/(^{2}·стер·Гц)] называется количество энергии излучения, проходящего через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения ω, внутри единичного телесного угла, осью которого является направление ω, в единичном интервале частот, включающем частоту ν, и в единицу времени. Считаем, что направления излучения ω связаны с точками единичной сферы $S = \{\omega \in R^3 : \|\omega\| = 1\}$.

Рассмотрим пучок излучения интенсивностью $I_\nu(x\omega, t)$, распространяющегося в поглощающей, излучающей и рассеивающей среде в заданном направлении. Энергия излучения будет уменьшаться вследствие поглощения излучения веществом и отклонения части его от первоначальной траектории в результате рассеяния во всех направлениях, но одновременно она будет возрастать вследствие испускания излучения веществом.

Обозначим через $\kappa_{a\nu}$[м$^{-1}$] спектральный коэффициент поглощения, равный доле падающего излучения, поглощенной веществом на единице длины пути распространения излучения. Приращение интенсивности излучения за счет поглощения равно $(dI_\nu)_{\text{погл}} = -\kappa_{a\nu} I_\nu ds$, где ds — элемент пути. Отметим, что $1/\kappa_{a_\nu}$ есть средняя длина свободного пробега фотона до его поглощения веществом [75, с. 281].

Для получения выражения для испускания излучения элементом объема часто используется предположение о локальном термодинамическом равновесии. Оно означает, что любой малый элемент объема среды находится в локальном термодинамическом равновесии, вследствие чего состояние любой точки может быть охарактеризовано локальной температурой $T(x)$. Это предположение законно, когда столкновения атомов в веществе происходят столь часто, что это приводит к локальному термодинамическому равновесию в каждой точке x среды. В этом случае испускание излучения элементом объема можно описать с помощью функции Планка [76, с. 36] Приращение интенсивности излучения за счет испускания равно $(dI_\nu)_{\text{исп}} = j_\nu ds$ j_ν – коэффициент испускания. В локальном термодинамическом равновесии справедлива формула [76, с. 36] [75, с. 282]. $j_\nu = \kappa_{a\nu} I_{b\nu}$, где $I_{b\nu}$ — интенсивность излучения абсолютно черного тела.

Абсолютно черным называется тело, которое поглощает все падающее со всех направлений излучение любой частоты без отражения, пропускания и рассеяния. Из закона Кирхгофа следует, что абсолютно черное тело также излучает максимальное количество энергии при данной температуре [76, с. 25][75, с. 5]. Интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре T равна

$$I_{b\nu}(T) = \frac{2h\nu^3 n^2}{c_0^2(e^{h\nu/kT} - 1)},$$

где h – постоянная Планка, k - постоянная Больцмана, c_0 – скорость света в вакууме, T – абсолютная температура, n – показатель преломления. Интегральная интенсивность излучения абсолютно черного тела $I_b(T)$ вычисляется по формуле [68, с. 28], [67, с. 10]

$$I_b(T) = \int_0^\infty I_{b\nu}(T) d\nu = \frac{n^2 \sigma T^4}{\pi},$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Рассеяние излучения учитывается так же, как поглощение, с той разницей, что рассеянная энергия просто перенаправляется и возникает в приращении интенсивности излучения в другом направлении. Различают когерентное и некогерентное рассеяние. Рассеяние называется когерентным, если рассеянное излучение имеет ту же самую частоту, что и падающее излучение, и некогерентным, если частота рассеянного излучения отличается от частоты падающего излучения. В дальнейшем мы будем рассматривать только когерентное рассеяние. Обозначим через $\kappa_{s\nu}$ [м$^{-1}$] спектральный коэффициент рассеяния, равный доле падающего излучения, рассеянной веществом во всех направлениях на единице длины пути распространения излучения. Тогда приращение интенсивности излучения за счет «рассеяния вне» равно $(dI_{nu})_{\text{расс.вне}} = -\kappa_{s\nu} I_{nuds}$. Для описания “рассеяния в“ вводится неотрицательная фазовая функция рассеяния $P_{nu} = (\omega, \omega')$ такая, что $\frac{1}{4\pi}\int_S P_{nu}(\omega, \omega')d\omega = 1$. Величина $\frac{1}{4\pi}\int_S P_{nu}(\omega, \omega')d\omega$ определяет вероятность того, что излучение частоты ν, падающее в направлении ω', будет рассеяно в пределах элементарного телесного угла $d\omega$ в направлении ω. Случай $P_\nu \equiv 1$ соответствует изотропному рассеянию. Тогда для того, чтобы получить приращение интенсивности излучения за счет «рассеяния в», нужно проинтегрировать $I_\nu(\omega')P_\nu(\omega,\omega')/4\pi$ по всем входящим направлениям ω' [75, с. 283]: $(dI_\nu)_{\text{расс.в}} = ds\frac{\kappa_{s\nu}}{4\pi}\int_S I_\nu(\omega')P_{nu(\omega,\omega')d\omega'}$. Учитывая приращения интенсивности излучения с учетом поглощения, испускания и рассеяния, получим искомое уравнение переноса излучения [76, с. 272] [75, с. 284]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial I_v(x,\omega,t)}{\partial t} + \omega\cdot\nabla_x I_v(x,\omega,t) + \kappa_v I_v(x,\omega,t) = \\ = \kappa_{av} I_{bv}(T(x,t)) + \frac{\text{K}_{sv}}{4\pi}\int_S I_v\left(x,\omega',t\right)P_v\left(\omega,\omega'\right)d\omega'.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\kappa_{nu} = \kappa_{a\nu} + \kappa_{s\nu}$ – полный спектральный коэффициент взаимодействия, c – скорость света в среде.

Далее получим граничные условия для уравнения переноса излучения. Будем считать, что граница области непрозрачна, испускает излучение диффузно и отражает излучение диффузно и зеркально. Степенью черноты поверхности $\varepsilon\nu(x)$ называется отношение количества энергии, испускаемого данной поверхностью, к количеству энергии, испускаемому абсолютно черным телом при той же температуре. При диффузном испускании излучения степень черноты не зависит от направления и определяется формулой $\varepsilon_\nu(x) = \frac{I_{\nu,\text{исп}}(x)}{I_{b\nu}(T(x))}$, где $I_{\nu,\text{исп}}(x)$ – интенсивность излучения, испускаемого поверхностью при температуре $T(x)$ [76, с. 53]

При диффузном поглощении степень черноты равняется поглотительной способности, которая равна доле поглощенного излучения [75, с. 66]. Также введем коэффициенты зеркального и диффузного отражения $\rho_\nu^s(x), \rho_\nu^d(x)$ как части зеркально и диффузно отраженного излучения соответственно. Отметим, что в случае непрозрачной поверхности $\varepsilon_\nu + \rho_\nu^s + \rho_{nu=1}^d$. Граничное условие имеет вид [75, с. 289][77].

$$\begin{aligned}I_v(x,\omega,t) = \varepsilon_v(x)I_{bv}(T(x,t)) + \rho_v^s(x)I_v\left(x,\omega_R,t\right) + \\ + \frac{\rho_v^d(x)}{\pi}\int_{\omega'\cdot\mathbf{n}>0} I_v\left(x,\omega',t\right)\omega'\cdot\mathbf{n}d\omega', \omega\cdot\mathbf{n} < 0,\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к границе области, ω – входящее направление, ω_R – направление отражения, определяемое из соотношения $\omega+(-\omega_R) = 2\cos\theta = \omega\cdot\mathbf{n}$ косинус угла между вектором нормали и направлением падающего излучения. Таким образом, $\omega_R = \omega - 2(\omega\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$.

Поле температуры описывается уравнением теплопроводности [75, с. 297]:

$$\rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - k\Delta T(x,t) + \rho c_p \mathbf{v}(x,t)\cdot\nabla T(x,t) = -\operatorname{div}\mathbf{q}_r(x,t),$$

где $T[K]$ – температура, $\mathbf{v}$ [м/с] поле скоростей, k [Вт/м $\cdot$] – коэффициент теплопроводности, c_p [Дж/(кг$\cdot K$)] – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, ρ [кг/м^3] – плотность, $\mathbf{q}_r$ – вектор плотности потока излучения, определяемый формулой [67, с. 292] $\mathbf{q}_r(x,t) = \int_0^\infty \int_S I_\nu(x,\omega,t)\omega d\omega d\nu$. Дивергенция вектора плотности потока излучения $\operatorname{div}\mathbf{q}_r$ характеризует изменение в единицу времени энергии излучения, заключенной в единице объема среды, по всему спектру частот вследствие испускания излучения во всё сферическое пространство и поглощения падающего из него излучения [76, с. 274]. Для нахождения $\operatorname{div}\mathbf{q}_r$ проинтегрируем уравнение (1.1) по $\boldsymbol{\omega}\in S$, получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S I_v(x,\boldsymbol{\omega},t)d\boldsymbol{\omega} + \operatorname{div}\int_S I_v(x,\boldsymbol{\omega},t)\boldsymbol{\omega}d\boldsymbol{\omega} + \kappa_v\int_S I_v(x,\boldsymbol{\omega},t)d\boldsymbol{\omega} = \\ = 4\pi\kappa_{av}I_{bv}(T(x,t)) + \frac{\kappa_{sv}}{4\pi}\int_S\int_S I_v\left(x,\boldsymbol{\omega}',t\right)P_v\left(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}'\right)d\boldsymbol{\omega}'d\boldsymbol{\omega}.\end{gathered}$$

Поменяем порядок интегрирования во втором слагаемом в правой части:

$$\begin{gathered}\int_S\int_S I_v\left(x,\omega',t\right)P_v\&\left(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}'\right)d\boldsymbol{\omega}'d\boldsymbol{\omega} = \\ \int_S I_v\left(x,\boldsymbol{\omega}',t\right)\int_S P_v\left(\boldsymbol{\omega},\omega'\right)d\boldsymbol{\omega}d\boldsymbol{\omega}' = \\ 4\pi\int_S I_v\left(x,\boldsymbol{\omega}',t\right)d\boldsymbol{\omega}'.\end{gathered}$$

Обозначим через $G_v(x,t) = \int_S I_v(x,\omega,t)d\omega$ пространственную плотность падающего излучения. Тогда

$$\frac{1}{c}\frac{\partial G_v(x,t)}{\partial t} + \operatorname{div}\int_S I_v(x,\boldsymbol{\omega},t)\boldsymbol{\omega}d\omega + \kappa_v G_v(x,t) = 4\pi\kappa_{av}I_{bv}(T(x,t)) + \kappa_{sv}G_v(x,t),$$

отсюда

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\int_S I_v(x,\omega,t)\omega\boldsymbol{\omega}d\boldsymbol{\omega} = 4\pi\kappa_{av}I_{bv}(T(x,t)) - \kappa_{av}G_v(x,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial G_v(x,t)}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{q}_r(x,t) = \int_0^\infty \kappa_{av}\left(4\pi I_{bv}(T(x,t)) - G_v(x,t)\right)dv - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty G_v(x,t)dv.\end{gathered}$$

Таким образом, уравнение теплопроводности принимает вид

$$\rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - k\Delta T(x,t) + \rho c_p \mathbf{v}(x,t)\cdot\nabla T(x,t) =$$
$$= -\int_0^\infty \int_S \kappa_{av}\left(I_{bv}(T(x,t)) - I_v(x,\omega,t)\right) d\omega dv + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \int_S I_v(x,\omega,t) d\omega dv.$$

Получим граничные условия для уравнения теплопроводности из закона Ньютона-Рихмана. Согласно этому закону, плотность теплового потока пропорциональна разности температур поверхности тела T и окружающей среды T_b : $q = h\,(T - T_b)$. Здесь $h\left[\text{ Вт } / \left({}^2 \cdot \text{К}\right)\right]$ - коэффициент теплоотдачи, характеризующий интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству тепла, отдаваемому (воспринимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью и средой в 1 К[70]. Отметим, что непосредственно на поверхности контакта тела с окружающей средой $T = T_b$, однако мы считаем, что температура T на границе поверхности - это температура за пределами пограничного слоя [71]. Рассматривая граничное условие для уравнения переноса излучения (1.2), будем считать, что поверхностное излучение происходит из пограничного слоя, поэтому в качестве аргумента функции $I_{bv}(T)$ будем использовать T_b. По закону сохранения энергии количество тепла, отводимое с единицы поверхности вследствие теплоотдачи, должно равняться теплу, подводимому к единице поверхности вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, тогда $h\,(T - T_b) = \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = -k\nabla T\cdot\mathbf{n} = -k\frac{\partial T}{\partial n}$. Таким образом, граничное условие имеет вид:

$$k\frac{\partial T(x,t)}{\partial n} + h(x)\left(T(x,t) - T_b(x,t)\right) = 0.$$

Следует отметить, что условия третьего рода для температуры обычно ставятся на твердой стенке, где $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$. В данном случае постановка условий третьего рода на всей границе и, в частности, на участке втекания моделирует процесс теплообмена при малых значениях нормальной компоненты скорости.

В дальнейшем мы будем рассматривать случай «серой» среды, когда κ_{av} и K_{sv} не зависят от частоты v, так что $\text{K}_{av} = \text{K}_a,\ \text{K}_{sv} = \text{K}_s$. Граница области также предполагается «серой». В этом случае уравнения и граничные условия принимают вид [77]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial I(x,\boldsymbol{\omega},t)}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_x I(x,\boldsymbol{\omega},t)+\kappa I(x,\boldsymbol{\omega},t)= \\ &=\frac{\kappa_s}{4\pi}\int_S P\left(\omega,\omega'\right)I\left(x,\omega',t\right)d\omega'+\kappa_a\frac{\sigma n^2T^4(x,t)}{\pi} \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &\rho c_p\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}-k\Delta T(x,t)+\rho c_p\mathbf{v}(x,t)\cdot\nabla T(x,t)= \\ &=-\kappa_a\left(4\sigma n^2T^4(x,t)-\int_S I(x,\boldsymbol{\omega},t)d\boldsymbol{\omega}\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S I(x,\boldsymbol{\omega},t)d\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} &I(x,\boldsymbol{\omega},t)=\varepsilon(x)\frac{\sigma n^2}{\pi}T_b^4(x,t)+\rho^s(x)I\left(x,\boldsymbol{\omega}_R,t\right)+ \\ &+\frac{\rho^d(x)}{\pi}\int_{\omega'\cdot\mathbf{n}>0}I\left(x,\omega',t\right)\omega'\cdot\mathbf{n}d\omega',\omega\cdot\mathbf{n}<0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$k\frac{\partial T(x,t)}{\partial n}+h(x)\left(T(x,t)-T_b(x,t)\right)=0. \tag{1.6}$$

Здесь $I=\int_0^\infty I_v dv.$

Поставим также начальные условия:

$$I(x,\boldsymbol{\omega},0)=I_0(x,\boldsymbol{\omega}),\quad T(x,0)=T_0(x). \tag{1.7}$$

Соотношения (1.3)–(1.7) представляют собой модель сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения.

Перейдем к безразмерным величинам. Обозначим

$$I(x,\omega,t)=\left(\frac{\sigma n^2}{\pi}T_{\max}^4\right)I^*(x,\boldsymbol{\omega},t),\quad T(x,t)=T_{\max}\theta(x,t), \tag{1.8}$$

Здесь I^*- нормализованная интенсивность излучения, $\theta-$ нормализованная температура, $T_{\max}$ - максимальная температура в ненормализованной модели. Подставив (1.8) в уравнения (1.3)(1.4), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial I^*(x,\omega,t)}{\partial t}+\omega\cdot\nabla_x I^*(x,\omega,t)+\kappa I^*(x,\omega,t)= \\ &=\frac{\kappa_s}{4\pi}\int_S P\left(\omega,\omega'\right)I^*\left(x,\omega',t\right)d\omega'+\kappa_a\theta^4(x,t), \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}-a\Delta\theta(x,t)+\mathbf{v}(x,t)\cdot\nabla\theta(x,t)= \\ &=-b\kappa_a\left(\theta^4(x,t)-\frac{1}{4\pi}\int_S I^*(x,\omega,t)d\omega\right)+\frac{b}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S I^*(x,\omega,t)d\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $a = \frac{k}{\rho c_p}, b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_p}$. Подставляя (1.8) в граничные условия (1.5)–(1.6) и полагая $T_b = T_{\max}\theta_b$, получим

$$I^*(x, \boldsymbol{\omega}, t) = \varepsilon(x)\theta_b^4(x,t) + \rho^s(x) I^*(x, \boldsymbol{\omega}_R, t) + \\ + \frac{\rho^d(x)}{\pi}\int_{\omega'\cdot\mathbf{n}>0} I^*(x, \omega', t)\, \omega'\cdot\mathbf{n} d\omega', \omega\cdot\mathbf{n} < 0, \tag{1.11}$$

$$a\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial n} + \beta(x)\left(\theta(x,t) - \theta_b(x,t)\right) = 0, \tag{1.12}$$

где $\beta = \frac{h}{\rho c_p}$.

Аналогично получаем начальные условия:

$$I^*(x, \boldsymbol{\omega}, 0) = I_0^*(x, \boldsymbol{\omega}), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \tag{1.13}$$

где $I_0^*(x, \boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{\sigma n^2}{\pi} T_{\max}^4\right)^{-1} I_0(x, \boldsymbol{\omega}), \quad \theta_0(x) = \frac{T_0(x)}{T_{\max}}$.

1.2 Диффузионное P_1 приближение уравнения переноса излучения

P_1 приближение уравнения переноса излучения является частным случаем метода сферических гармоник (P_N). Идея P_N приближений состоит в том, что функцию интенсивности излучения $I(x, \omega)$ раскладывают в ряд Фурье по сферическим гармоникам $\mathcal{Y}_l^m(\boldsymbol{\omega})$ [75, с. 496]:

$$I(x, \omega) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} I_l^m(x)\mathcal{Y}_l^m(\omega),$$

где $I_l^m(x)$ - коэффициенты, зависящие от x. Также в ряд раскладывают фазовую функцию $P(\omega, \omega')$. Тогда решение уравнения переноса излучения ищется в виде отрезка ряда Фурье для $l \leqslant N$. При подстановке указанной конечной суммы в исходное уравнение интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения относительно $I(x, \omega)$ сводится к $(N+1)^2$ дифференциальным уравнениям относительно $I_l^m(x)$.

В P_1 приближении используется линейное приближение для интенсивности излучения и фазовой функции:

$$I^*(x, \omega, t) = \varphi(x,t) + \mathbf{\Phi}(x,t)\cdot\omega, \tag{1.14}$$

$$P(\omega, \omega') = 1 + A\omega\cdot\omega'. \tag{1.15}$$

Для фазовой функции выполняется условие нормировки:

$$\frac{1}{4\pi}\int_S P\left(\omega,\omega'\right)d\omega = 1 + \frac{A}{4\pi}\int_S \omega\cdot\omega' d\omega = 1,$$

вычисление интеграла см. ниже. Коэффициент $A \in [-1{,}1]$ описывает анизотропию рассеяния, а величина $A/3$ имеет смысл среднего косинуса угла рассеяния, поскольку

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \left(\omega\cdot\omega'\right)P\left(\omega,\omega'\right)d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_S \omega\cdot\omega' d\omega + \frac{A}{4\pi}\int_S \left(\omega\cdot\omega'\right)\left(\omega\cdot\omega'\right)d\omega = \frac{A}{3},$$

вычисление интегралов см. ниже. Случай $A = 0$ соответствует изотропному рассеянию. Диапазон допустимых значений величины $A \in [-1{,}1]$ обусловлен тем, что при $|A| > 1$ фазовая функция может принимать отрицательные значения.

Отметим, что если функция I^* ищется в виде (1.14), то [75, с. 502]:

$$G(x,t) = \int_S I^*(x,\omega,t)d\omega = 4\pi\varphi(x,t),$$
$$\mathbf{q}_r(x,t) = \int_S I^*(x,\boldsymbol{\omega},t)\boldsymbol{\omega}d\boldsymbol{\omega} = \frac{4\pi}{3}\mathbf{\Phi}(x,t),$$

поэтому

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{4\pi}G(x,t), \quad \Phi(x,t) = \frac{3}{4\pi}\mathbf{q}_r(x,t),$$

где G - аппроксимация пространственной плотности падающего излучения, $\mathbf{q}_r$– аппроксимация плотности потока излучения. Следовательно, функция $\varphi(x,t)$ имеет физический смысл нормализованной интенсивности излучения в точке x в момент времени t, усредненной по всем направлениям.

Лемма 1. *Справедливы равенства:*

$$\int_S 1\cdot d\omega = 4\pi, \quad \int_S \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega}d\omega = 0, \quad \int_S (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\omega})d\omega = \frac{4\pi}{3}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$
$$\int_S \omega d\omega = 0, \quad \int_S (\mathbf{a}\cdot\omega)\omega d\omega = \frac{4\pi}{3}\mathbf{a},$$
$$\int_{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}>0} \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega}d\boldsymbol{\omega} = \pi, \quad \int_{\omega\cdot\mathbf{a}>0} (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\omega})d\omega = \frac{2\pi}{3}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

где a, b – любые векторы.

Доказательство. Первое равенство вытекает из определения поверхностного интеграла и представляет собой выражение для площади поверхности единичной сферы.

Для вычисления остальных интегралов воспользуемся формулой перехода от поверхностного интеграла к двойному

$$\int_S f(\omega)d\omega = \int_D f\left(\omega_1(u,v), \omega_2(u,v), \omega_3(u,v)\right) \left|\boldsymbol{\omega}_u \times \boldsymbol{\omega}_v\right| dudv, \qquad (1.16)$$

где $D = \left\{(u,v) : 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}, \omega_1(u,v) = \cos u \cos v, \omega_2(u,v) = \sin u \cos v, \omega_3(u,v) = \sin v, |\boldsymbol{\omega}_u \times \boldsymbol{\omega}_v|\, dudv = \cos v dudv -$ элемент площади поверхности единичной сферы. Тогда для вычисления остальных интегралов воспользуемся формулой перехода от поверхностного интеграла к двойному:

$$\int_S f(\omega)d\omega = \int_D f\left(\omega_1(u,v), \omega_2(u,v), \omega_3(u,v)\right) \left|\boldsymbol{\omega}_u \times \boldsymbol{\omega}_v\right| dudv$$

где $D = \left\{(u,v) : 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}, \omega_1(u,v) = \cos u \cos v, \omega_2(u,v) = \sin u \cos v, \omega_3(u,v) = \sin v, |\boldsymbol{\omega}_u \times \boldsymbol{\omega}_v|\, dudv = \cos v dudv$ – элемент площади поверхности единичной сферы. Тогда

$$\int_S f(\omega)d\omega = \int_D f\left(\omega_1(u,v), \omega_2(u,v), \omega_3(u,v)\right) \left|\boldsymbol{\omega}_u \times \boldsymbol{\omega}_v\right| dudv.$$

Для вычисления второго интеграла положим $f(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 a_i \boldsymbol{\omega}_i$,

$$\int_S \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\omega} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos u \cos v + a_2 \sin u \cos v + a_3 \sin v) \cos v dudv = 0.$$

получим

В третьем интеграле положим $f(\boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \boldsymbol{\omega}_i \boldsymbol{\omega}_j$,

$$\int_S (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{w}) d\boldsymbol{w} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}^T \begin{pmatrix} \cos^2 u \cos^2 v & \sin u \cos u \cos^2 v & \cos u \sin v \cos v \\ \sin u \cos u \cos^2 v & \sin^2 u \cos^2 v & \sin u \sin v \cos v \\ \cos u \sin v \cos v & \sin u \sin v \cos v & \sin^2 v \end{pmatrix} \mathbf{b} \cos v dudv =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{a}^T \begin{pmatrix} \pi \cos^2 v & 0 & 0 \\ 0 & \pi \cos^2 v & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \sin^2 v \end{pmatrix} \mathbf{b} \cos v dv = \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

здесь $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ - векторы-столбцы.

Равенства во второй строке получаются из доказанных равенств:

$$\int_S \omega d\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \int_S (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}_i)\, d\boldsymbol{\omega} = 0,$$

$$\int_S (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})\omega d\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \int_S (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}_i)\, d\boldsymbol{\omega} = \frac{4\pi}{3}\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}_i = \frac{4\pi}{3}\mathbf{a}.$$

Для доказательства первого равенства в третьей строке введем систему координат так, чтобы ось Oz была сонаправлена с вектором a. Воспользуемся формулой (1.16), в которой вместо S следует взять верхнюю полусферу, $D = \left\{(u,v) : 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$. Заметим, что $f(\omega) = \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega} = |\mathbf{a}|\sin v$.

Таким образом,

$$\int_{\omega\cdot\mathbf{a}>0} \mathbf{a}\cdot\omega d\omega = |\mathbf{a}|\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin v\cos v du dv = 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin v\cos v dv = \pi.$$

Для доказательства второго равенства в третьей строке заметим, что

$$\int_S (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega} = \int_{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}>0}(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{b}\cdot\omega)d\boldsymbol{\omega} + \int_{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}<0}(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega},$$

$$\int_{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}>0}(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega} = \int_{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}<0}(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega},$$

следовательно, $\int_{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}>0}(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\int_S(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{3}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Лемма доказана. $\square$

Подставляя (1.14)(1.15) в (1.9), получаем

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right) + \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\varphi(x,t)$$
$$+\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_x(\Phi(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega}) + \kappa\varphi(x,t) + \kappa\Phi(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega} =$$
$$\frac{\kappa_s}{4\pi}\int_S (1 + A\omega\cdot\boldsymbol{\omega}')\,(\varphi(x,t) + \boldsymbol{\Phi}(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega}')\,d\boldsymbol{\omega}' + \kappa_a\theta^4(x,t).$$

С учетом равенств

$$\int_S \Phi(x,t)\cdot\omega' d\omega' = 0, \quad \int_S \omega\cdot\omega' d\omega' = 0,$$
$$\int_S (\Phi(x,t)\cdot\omega')\,(\omega\cdot\omega')\,d\omega' = \frac{4\pi}{3}\Phi(x,t)\cdot\omega$$

имеем

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+\omega\cdot\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)$$
$$+\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\varphi(x,t)+\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_x(\boldsymbol{\Phi}(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega})+\kappa\varphi(x,t)+\kappa\boldsymbol{\Phi}(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega}=$$
$$=\mathrm{k}_s\left(\varphi(x,t)+\frac{A}{3}\boldsymbol{\Phi}(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega}\right)+\kappa_a\theta^4(x,t),$$

или

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+\omega\cdot\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)+\omega\cdot\nabla\varphi(x,t)+\omega\cdot\nabla_x(\Phi(x,t)\cdot\omega)$$
$$+\kappa_a\varphi(x,t)+(\kappa_a+\kappa_s')\,\Phi(x,t)\cdot\omega=\kappa_a\theta^4(x,t), \tag{1.17}$$

где $\kappa_s'=\kappa_s(1-A/3)$ - приведенный коэффициент рассеяния.

Проинтегрируем уравнение (1.17) по $\omega\in S$. Получим

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{3}\operatorname{div}\Phi(x,t)+\kappa_a\varphi(x,t)=\kappa_a\theta^4(x,t), \tag{1.18}$$

так как

$$\int_S\omega\cdot\nabla_x(\Phi(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega}=\sum_{i=1}^{3}\int_S(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}_i)\left(\omega\cdot\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x_i}\right)d\boldsymbol{\omega}=$$
$$=\frac{4\pi}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x_i}\cdot\mathbf{e}_i=\frac{4\pi}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Phi_i(x,t)}{\partial x_i}=\frac{4\pi}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}(x,t).$$

Умножим уравнение (1.17) на ω :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\omega+\frac{1}{c}\left(\omega\cdot\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)\omega+(\omega\cdot\nabla\varphi(x,t))\omega+(\omega\cdot\nabla_x(\Phi(x,t)\cdot\omega))\,\omega+$$
$$+\kappa_a\varphi(x,t)\omega+(\kappa_a+\kappa_s')\,(\Phi(x,t)\cdot\omega)\omega=\kappa_a\theta^4(x,t)\omega$$

и проинтегрируем полученное равенство по $\omega\in S$. Для вычисления четвертого слагаемого представим интеграл по единичной сфере S как сумму интегралов по верхней S_1 и нижней S_2 полусферам и воспользуемся тем, что

$$\int_{S_2}(\omega\cdot\nabla_x(\Phi(x,t)\cdot\omega))\,\omega d\omega=-\int_{S_1}(\omega\cdot\nabla_x(\Phi(x,t)\cdot\omega))\,\omega d\omega,$$

следовательно, интеграл равен 0. Таким образом,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}+(\kappa_a+\kappa_s')\,\Phi(x,t)+\nabla\varphi(x,t)=0. \tag{1.19}$$

Итак, уравнения (1.18)(1.19) представляют собой P_1 приближение для уравнения переноса излучения. Дальнейшие преобразования основываются на предположении, что выполняется закон Фика:

$$\Phi(x,t) = -3\alpha\nabla\varphi(x,t), \tag{1.20}$$

где $\alpha = \frac{1}{3(\kappa_a+\kappa_s')} = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$. Фактически мы пренебрегаем производной $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ в уравнении (1.19). Подставив (1.20) в (1.18), получим

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} - \alpha\Delta\varphi(x,t) + \kappa_a\left(\varphi(x,t) - \theta^4(x,t)\right) = 0. \tag{1.21}$$

Чтобы получить уравнение для температуры, подставим (1.14) в (1.10). Получим

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} - a\Delta\theta(x,t) + \mathbf{v}(x,t)\cdot\nabla\theta(x,t) + b\kappa_a\left(\theta^4(x,t) - \varphi(x,t)\right) = \frac{b}{c}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}. \tag{1.22}$$

Учитывая (1.21), уравнение (1.22) можно записать в виде с кросс-диффузией:

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} - a\Delta\theta(x,t) + \mathbf{v}(x,t)\cdot\nabla\theta(x,t) = b\alpha\Delta\varphi(x,t).$$

В дальнейшем вместо уравнения (1.22) будем использовать уравнение с нулевой правой частью (см., например [46])

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} - a\Delta\theta(x,t) + \mathbf{v}(x,t)\cdot\nabla\theta(x,t) + b\kappa_a\left(\theta^4(x,t) - \varphi(x,t)\right) = 0. \tag{1.23}$$

Далее выведем граничные условия типа Маршака для P_1 приближения (см. [78]). Для этого подставим (1.14) в граничное условие (1.11):

$$\begin{gathered}\varphi(x,t) + \mathbf{\Phi}(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega} = \varepsilon(x)\theta_b^4(x,t) + \rho^s(x)\left(\varphi(x,t) + \mathbf{\Phi}(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega}_R\right) + \\ +\frac{\rho^d(x)}{\pi}\int_{\omega'\cdot\mathbf{n}>0}\left(\varphi(x,t) + \mathbf{\Phi}(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega}'\right)\omega'\cdot\mathbf{n}d\omega', \\ \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} < 0, \quad \boldsymbol{\omega}_R = \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.\end{gathered}$$

Для вычисления интеграла применим лемму 1:

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) + \mathbf{\Phi}(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega} = \varepsilon(x)\theta_b^4(x,t) &+ \rho^s(x)[\varphi(x,t) + \\ &+ \mathbf{\Phi}(x,t)\cdot\boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{\Phi}(x,t)\cdot\mathbf{n})] + \\ &+ \rho^d(x)\left(\varphi(x,t) + \frac{2}{3}\mathbf{\Phi}(x,t)\cdot\mathbf{n}\right), \quad \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} < 0.\end{aligned}$$

Умножим данное равенство на $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}$ и проинтегрируем по множеству входящих направлений, для которых $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} < 0$. Получим

$$-\pi\varphi(x,t) + \frac{2\pi}{3}\boldsymbol{\Phi}(x,t)\cdot\mathbf{n} = -\pi\varepsilon(x)\theta_b^4(x,t) - \pi\rho^s(x)\varphi(x,t) + \frac{2\pi\rho^s(x)}{3}\boldsymbol{\Phi}(x,t)\cdot\mathbf{n} -$$
$$-\frac{4\pi\rho^s(x)}{3}\boldsymbol{\Phi}(x,t)\cdot\mathbf{n} - \pi\rho^d(x)\left(\varphi(x,t) + \frac{2}{3}\boldsymbol{\Phi}(x,t)\cdot\mathbf{n}\right),$$

или

$$\varepsilon(x)\varphi(x,t) = \varepsilon(x)\theta_b^4(x,t) + \frac{2(2-\varepsilon(x))}{3}\boldsymbol{\Phi}(x,t)\cdot\mathbf{n}.$$

Воспользуемся равенством (1.20), будем иметь

$$\alpha\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n} + \gamma(x)\left(\varphi(x,t) - \theta_b^4(x,t)\right) = 0, \tag{1.24}$$

где $\gamma = \frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}$. Отметим, что на участках втекания и вытекания среды можно принять $\gamma = 1/2$ [79].

Дополним полученные соотношения граничным условием для температуры (1.12):

$$a\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial n} + \beta(x)\left(\theta(x,t) - \theta_b(x,t)\right) = 0 \tag{1.25}$$

и начальными условиями

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x). \tag{1.26}$$

Соотношения (1.21)(1.23)(1.24)–(1.26) образуют диффузионную модель сложного теплообмена.

Укажем возможные пути обоснования закона Фика (1.20). В [80, с. 136] [81, с. 222] [82, с. 96] указано, что в уравнении (1.19) можно пренебречь слагаемым $\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, если

$$\frac{1}{|\Phi|}\frac{\partial|\Phi|}{\partial t} \ll c\left(\kappa_a + \kappa_s'\right).$$

Это предположение означает, что относительное изменение плотности потока излучения во времени много меньше частоты столкновений фотонов, так как величина $\frac{1}{\mathrm{K}_a+\mathrm{K}_s'}$ есть средняя длина свободного пробега (transport mean free path) [82].

В диффузионном приближении предполагается, что среда имеет большое альбедо ($\kappa_a \ll \kappa_s$) и излучение почти изотропно [82, с. 88]. В [82, с. 97] указано, что предположения о почти изотропности излучения (направленное расширение) и о малом относительном изменении плотности потока излучения (временное расширение потока фотонов по отношению к среднему времени свободного пробега) выполняются при большом числе рассеяний фотонов, так что оба приближения можно свести к предположению $\kappa_s' \gg \kappa_a$. Кроме того, необходимо, чтобы точка наблюдения находилась достаточно далеко от источников и от границ.

В [83, 84] делается предположение $3\omega_0\alpha \ll c$, где ω_0 – частота синусоидально модулированного источника. Авторы [85, 84] сначала выводят из (1.18)(1.19) уравнение второго порядка по времени, а затем отбрасывают некоторые слагаемые, которые можно считать малыми в силу указанного предположения. Применив к уравнению (1.18) операцию дифференцирования по t, а к уравнению (1.19) операцию дивергенции, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\Phi + \kappa_a\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \kappa_a\frac{\partial\left(\theta^4\right)}{\partial t}\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\Phi + (\kappa_a + \kappa_s')\operatorname{div}\Phi + \Delta\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Умножим второе уравнение на $c/3$ и вычтем из первого уравнения. Учитывая (1.18), будем иметь

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - \theta^4\right) + \frac{3\alpha\kappa_a}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{3\alpha}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{3\alpha\kappa_a}{c}\frac{\partial\left(\theta^4\right)}{\partial t}. \tag{1.27}$$

Подчеркнутые слагаемые отбрасываем, принимая во внимание, что $3\alpha\kappa_a = \frac{\kappa_a}{\kappa_a+\kappa_s'} \ll 1$. Более точные оценки с переходом в частотную область указаны в [85, 83]. Однако их применение для нашей задачи требует дополнительных оценок правой части (1.27), содержащей θ.

Также автор [75, с. 509] отмечает, что P_1 приближение может давать ошибочный результат в оптически тонкой среде со слишком анизотропным распределением интенсивности, в частности, в многомерных областях с длинными узкими конфигурациями и/или когда излучение поверхности преобладает над излучением среды. Среда называется оптически толстой, если средняя длина свободного пробега фотона мала по сравнению с ее характерным размером [76, с. 343]. Авторы [86, с. 228] также указывают, что для применения диффузионного P_1 приближения альбедо k_s/k должно быть близко к единице и среда должна быть оптически толстой. В [85, с. 8] указано, что фазовая функция не должна быть слишком анизотропной ($\|A/3\|$ не слишком близко к 1).

Таким образом, благоприятными условиями для применения P_1 приближения являются:

1. $\kappa_a \ll \kappa_s'$;
2. оптически толстая среда;
3. удаление от границ области.

1.3 Стационарная модель сложного теплообмена

1.3.1 Постановка краевой задачи

Стационарная нормализованная диффузионная модель, описывающая радиационный, кондуктивный и конвективный теплообмен в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^3$, имеет следующий вид [75]:

$$-a\Delta\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\mu_a\theta^4 = b\mu_a\varphi, \tag{1.28}$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \mu_a\varphi = \mu_a\theta^4. \tag{1.29}$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, $\mathbf{v}$ – заданное поле скоростей, μ_a – коэффициент поглощения. Постоянные a, b и α определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\mu - A\mu_s},$$

где k – теплопроводность, c_v – удельная теплоемкость, ρ – плотность, σ – постоянная Стефана-Больцмана, n – показатель преломления, $T_{\max}$ – максимальная температура в ненормализованной модели, $\mu = \mu_s + \mu_a$ – коэффициент полного взаимодействия, μ_s – коэффициент рассеяния. Коэффициент $A \in [-1, 1]$ описывает анизотропию рассеяния, случай $A = 0$ соответствует изотропному рассеянию.

Будем предполагать, что функции θ и φ, описывающие процесс сложного теплообмена, удовлетворяют следующим условиям на границе $\Gamma = \partial G$:

$$\theta|_\Gamma = \Theta_0, \tag{1.30}$$

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \beta(\varphi - \Theta_0^4)|_\Gamma = 0. \tag{1.31}$$

Здесь через $\partial/\partial\mathbf{n}$ обозначаем производную в направлении внешней нормали. Неотрицательная функция Θ_0, определенная на Γ, и функция β, описывающая, в частности, отражающие свойства границы Γ, являются заданными.

Основные результаты, представленные в данном параграфе, состоят в получении новых априорных оценок решения краевой задачи (1.28)–(1.31), на основе которых доказана разрешимость задачи и выведены достаточные условия единственности решения. Кроме того, найдены условия на параметры модели, геометрию области G и поле скоростей $\mathbf{v}$, гарантирующие однозначную разрешимость в случае равномерного потока среды. Результаты теоретического анализа иллюстрируются примерами численного моделирования температурных полей в канале прямоугольной формы.

1.3.2 Слабое решение краевой задачи

Пусть G – липшицева ограниченная область, граница Γ которой состоит из конечного числа гладких кусков, а исходные данные удовлетворяют условиям:

(i) $\quad \mathbf{v} \in H^1(G) \cap L^\infty(G), \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0;$
(ii) $\Theta_0 \in L^\infty(\Gamma),\ 0 \leqslant m \leqslant \Theta_0 \leqslant M;\ \exists\,\widetilde{\theta} \in H^1(G),\ \widetilde{\theta}|_\Gamma = \Theta_0,\ m \leqslant \widetilde{\theta} \leqslant M;$
(iii) $\beta \in L^\infty(\Gamma),\ \beta \geqslant \beta_0 > 0.$

Здесь и далее через L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначаем пространство Лебега, а через H^s – пространство Соболева W_2^s. Через $(\cdot,\cdot)$ обозначаем скалярное произведение в $L^2(G)$,

$$(f,g) = \int_G f(r)g(r)dr, \quad \|f\|^2 = (f,f).$$

Кроме этого будем использовать пространство

$$H_0^1(G) = \{\eta \in H^1(G) :\ \eta|_\Gamma = 0\}$$

с нормой $\|\eta\|_{H_0^1(G)} = (\nabla\eta, \nabla\eta)^{1/2}$.

Определение 1. *Пара* $\{\theta, \varphi\} \in H^1(G) \times H^1(G)$ *называется слабым решением задачи* (1.28)-(1.31), *если*

$$a(\nabla\theta, \nabla\eta) + (\mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\mu_a(\theta^4 - \varphi), \eta) = 0 \quad \forall\eta \in H_0^1(G), \tag{1.32}$$

$$\alpha(\nabla\varphi, \nabla\psi) + \mu_a(\varphi - \theta^4, \psi) + \int\limits_\Gamma \beta(\varphi - \Theta_0^4)\psi d\Gamma = 0 \quad \forall\psi \in H^1(G) \tag{1.33}$$

и при этом $\theta|_\Gamma = \Theta_0$.

Отметим, что в силу вложения $H^1(G) \subset L^6(G)$ выражение (θ^4, η) имеет смысл для любой функции $\eta \in H^1(G)$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)-(iii). Тогда существует слабое решение задачи* (1.28)-(1.31), *удовлетворяющее условиям*

$$m \leqslant \theta \leqslant M, \quad m^4 \leqslant \varphi < M^4. \tag{1.34}$$

Доказательство теоремы 1 основано на построении операторного уравнения, которое определяет слабое решение задачи (1.28)–(1.31), обосновании слабого принципа максимума и применении принципа Лере-Шаудера.

Рассмотрим пространство $V = H_0^1(G) \times H^1(G)$. Скалярное произведение в V удобно выбрать следующим образом:

$$((y,z)) = a(\nabla\zeta, \nabla\eta) + \alpha(\nabla\varphi, \nabla\psi) + \int\limits_\Gamma \beta\varphi\psi d\Gamma,$$

где $y = \{\zeta, \varphi\} \in V, z = \{\eta, \psi\} \in V$. Отметим, что норма пространства V, соответствующая выбранному скалярному произведению, эквивалентна норме пространства $H^1(G) \times H^1(G)$. Через $\widetilde{y}$ обозначим элемент пространства V такой, что

$$((\widetilde{y}, z)) = a(\nabla\widetilde{\theta}, \nabla\eta) - \int\limits_\Gamma \beta\Theta_0^4\psi d\Gamma \quad \forall z = \{\eta, \psi\} \in V,$$

где $\widetilde{\theta}$ – функция из условия (ii).

Определим нелинейный оператор $F : V \to V$, используя равенство

$$((F(y),z)) = (\mathbf{v} \cdot \nabla\theta, \eta) + \mu_a b \left(\theta^4 - \varphi, \eta\right) + \mu_a(\varphi - \theta^4, \psi)\,, \tag{1.35}$$

справедливое для всех $y = \{\zeta, \varphi\}, z = \{\eta, \psi\} \in V$. Здесь $\theta = \widetilde{\theta} + \zeta$.

Из определения скалярного произведения в пространстве V и соотношения (1.35) следует утверждение.

Лемма 2. *Пара* $\{\theta, \varphi\} \in H^1(G) \times H^1(G)$ *является слабым решением задачи* (1.28)-(1.31), *если и только если элемент* $y = \{\theta - \widetilde{\theta}, \varphi\} \in V$ *удовлетворяет в пространстве* V *уравнению*

$$y + \widetilde{y} + F(y) = 0. \tag{1.36}$$

1.3.3 Разрешимость краевой задачи

Для доказательства разрешимости уравнения (1.36) предварительно рассмотрим в пространстве V уравнение

$$y + \widetilde{y} + F_M(y) = 0. \tag{1.37}$$

Здесь оператор $F_M : V \to V$ определяется равенством

$$((F_M(y), z)) = (\mathbf{v} \cdot \nabla\theta, \eta) + \mu_a b(|\theta|\theta^3 - g(\varphi), \eta) + \mu_a(\varphi - |\theta|\theta^3, \psi)$$

для всех $y = \{\zeta, \varphi\}, z = \{\eta, \psi\} \in V$, где $\theta = \widetilde{\theta} + \zeta$,

$$g(t) = \begin{cases} m^4, & \text{при} \quad t < 0, \\ t, & \text{при} \quad t \in [0, M^4], \\ M^4, & \text{при} \quad t > M^4. \end{cases}$$

Отметим, что если $y = \{\zeta, \varphi\}$ есть решение (1.37), удовлетворяющее условиям $m \leqslant \theta \leqslant M$, $m^4 \leqslant \varphi \leqslant M^4$, то y является решением уравнения (1.36), и поэтому пара $\{\theta, \varphi\}$ будет слабым решением задачи (1.28)–(1.31).

Лемма 3. *Оператор* $F_M : V \to V$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $y_1 = \{\zeta_1, \varphi_1\} \in V$, $y_2 = \{\zeta_2, \varphi_2\} \in V$, $\|\zeta_{1,2}\|_{H^1(G)} \leqslant \chi$, $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\theta_{1,2} = \widetilde{\theta} + \zeta_{1,2}$, $z = \{\eta, \psi\} \in V$. Оценим разность

$$((F_M(y_1) - F_M(y_2), z)) = (\mathbf{v} \cdot \nabla\zeta, \eta) + \mu_a b(|\theta_1|\theta_1^3 - |\theta_2|\theta_2^3 + g(\varphi_2) - g(\varphi_1), \eta)+$$
$$\mu_a(\varphi + |\theta_2|\theta_2^3 - |\theta_1|\theta_1^3, \psi) \leqslant \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(G)}\|\nabla\zeta\|\|\eta\|+$$
$$2\mu_a b\left(\|\theta_1\|^3_{L^6(G)} + \|\theta_2\|^3_{L^6(G)}\right)\|\zeta\|_{L^4(G)}\|\eta\|_{L^4(G)} + \mu_a b\|\varphi\|\|\eta\| + \mu_a\|\varphi\|\|\psi\|+$$

$$2\mu_a\left(\|\theta_1\|^3_{L^6(G)} + \|\theta_2\|^3_{L^6(G)}\right)\|\zeta\|_{L^4(G)}\|\psi\|_{L^4(G)}. \tag{1.38}$$

Обозначим $h = F_M(y_1) - F_M(y_2) = \{h_1, h_2\} \in V$, и в неравенстве (1.38) положим $z = h$. Учтем непрерывность операторов вложения $H^1(G)$ в $L^s(G)$, $1 \leqslant s \leqslant 6$. Отметим, что указанные операторы компактны, если $1 \leqslant s < 6$. Тогда

$$\|h\|_V^2 \leqslant C\left(\|\zeta\|\|\nabla h_1\| + \|\zeta\|_{L^4(G)}\|h\|_V\right). \tag{1.39}$$

Здесь через $C > 0$ обозначена постоянная, зависящая только от a, b, α, β, χ, $\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(G)}$ и норм соответствующих операторов вложения. Следствием оценки (1.39) является непрерывность оператора F_M, а также, в силу компактности вложения $H^1(G)$ в $L^2(G)$ и $L^4(G)$, компактность оператора F_M. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим далее операторное уравнение с параметром $\lambda \in (0,1]$:

$$y_\lambda + \widetilde{y} + \lambda F_M(y_\lambda) = 0, \tag{1.40}$$

для решения которого получим априорные оценки, равномерные по λ.

Лемма 4. *Пусть $y_\lambda = \{\zeta_\lambda, \varphi_\lambda\} \in V$ удовлетворяют (1.40), $\lambda \in (0,1]$. Тогда для функций $\theta_\lambda = \widetilde{\theta} + \zeta_\lambda \in H^1(G)$, $\varphi_\lambda \in H^1(G)$ справедливы оценки*

$$m \leqslant \theta_\lambda(r) \leqslant M, \quad m^4 \leqslant \varphi_\lambda(r) \leqslant M^4, \quad r \in G. \tag{1.41}$$

Доказательство. Умножим (1.40) скалярно в V на элемент $z = \{\eta_\lambda, 0\} \in V$, где $\eta_\lambda = \max(\theta_\lambda - M, 0) \in H_0^1(G)$. Тогда

$$a(\nabla\theta_\lambda, \nabla\eta_\lambda) + \lambda(\mathbf{v} \cdot \nabla\theta_\lambda, \eta_\lambda) + \lambda\mu_a b(|\theta_\lambda|\theta_\lambda^3 - g(\varphi_\lambda), \eta_\lambda) = 0.$$

Учтем, что

$$(\nabla\theta_\lambda, \nabla\eta_\lambda) = \|\nabla\eta_\lambda\|^2, \quad (\mathbf{v}\cdot\nabla\theta_\lambda, \eta_\lambda) = (\mathbf{v}\cdot\nabla\eta_\lambda, \eta_\lambda) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}, \nabla(\eta_\lambda^2)) = 0,$$

$$(|\theta_\lambda|\theta_\lambda^3 - g(\varphi_\lambda), \eta_\lambda) = \int\limits_{\theta_\lambda > M} (|\theta_\lambda|\theta_\lambda^3 - g(\varphi_\lambda))(\theta_\lambda - M)dr \geqslant 0.$$

Поэтому $\eta_\lambda = 0$ и соответственно $\theta_\lambda \leqslant M$ в области G.

Далее, умножая (1.40) скалярно в V на $z = \{0,\psi_\lambda\}$, где $\psi_\lambda = \max(\varphi_\lambda - M^4,0)$, получаем

$$\alpha\|\nabla\psi_\lambda\|^2 + \lambda\mu_a \int\limits_{\varphi_\lambda > M^4} (\varphi_\lambda - |\theta_\lambda|\theta_\lambda^3)\psi_\lambda dr + \int\limits_{\Gamma} \beta(\varphi_\lambda - \Theta_0^4)\psi_\lambda d\Gamma = 0.$$

Из неотрицательности каждого слагаемого следует, что $\psi_\lambda = 0$ и соответственно $\varphi_\lambda \leqslant M^4$ в области G.

Аналогичным образом, умножая (1.40) скалярно в V сначала на $z = \{\min(\theta_\lambda - m, 0), 0\} \in V$, затем на $z = \{0, \min(\varphi_\lambda - m^4,0)\} \in V$, приходим к неравенствам: $\theta_\lambda \geqslant m$, $\varphi_\lambda \geqslant m^4$. $\square$

Полученные оценки позволяют доказать равномерную по $\lambda \in (0,1]$ ограниченность решений уравнения (1.40) в пространстве V. Действительно, умножая (1.40) скалярно в V на $y_\lambda = \{\zeta_\lambda, \varphi_\lambda\} \in V$ и учитывая (1.41), получаем

$$\|y_\lambda\|_V^2 + ((\widetilde{y}, y_\lambda)) + \lambda(\mathbf{v}\cdot\nabla\theta_\lambda, \zeta_\lambda) + \lambda\mu_a b(\theta_\lambda^4 - \varphi_\lambda, \theta_\lambda - \widetilde{\theta}) + \lambda\mu_a(\varphi_\lambda - \theta_\lambda^4, \varphi_\lambda) = 0. \tag{1.42}$$

Заметим, что

$$|(\mathbf{v}\cdot\nabla\theta_\lambda, \zeta_\lambda)| = |(\mathbf{v}\cdot\nabla\zeta_\lambda, \theta_\lambda)| \leqslant \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(G)} M \|\nabla\zeta_\lambda\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{\sqrt{a}}\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(G)}\|y_\lambda\|_V \leqslant \frac{M^2}{a}\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(G)}^2 + \frac{1}{4}\|y_\lambda\|_V^2.$$

С учетом (1.41) из (1.42) следует оценка

$$\|y_\lambda\|_V^2 \leqslant \frac{1}{2}\|y_\lambda\|^2 + \frac{1}{2}\|\widetilde{y}\|_V^2 + \frac{M^2}{a}\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(G)}^2 + \frac{1}{4}\|y_\lambda\|_V^2 + \mu_a b M^5 mesG + \mu_a M^8 mesG.$$

Таким образом,

$$\|y_\lambda\|_V^2 \leqslant C, \tag{1.43}$$

где

$$C = 2\|\widetilde{y}\|_V^2 + \frac{4M^2}{a}\|\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(G)} + 4\mu_a M^5 mesG(b + M^3).$$

Здесь через $mesG$ обозначен объем G. Поскольку оператор $F_M : V \to V$ вполне непрерывен, оценка (1.43) гарантирует по теореме Лере-Шаудера разрешимость уравнения (1.37). На основании леммы 4, если $y = \{\zeta, \varphi\}$ – решение (1.37), то $m \leqslant \theta \leqslant M$, $m^4 \leqslant \varphi \leqslant M^4$, где $\theta = \widetilde{\theta} + \zeta$. Поэтому $F_M(y) = F(y)$ и в силу леммы 2 пара $\{\theta, \varphi\}$ является слабым решением задачи (1.28)-(1.31), что доказывает теорему 1

1.3.4 Достаточные условия единственности решения

Получим условия, гарантирующие однозначную разрешимость задачи (1.28)–(1.31) в классе функций из $H^1(G)$, удовлетворяющих ограничениям (1.34). Пусть $\{\theta_1, \varphi_1\}$ и $\{\theta_2, \varphi_2\}$ – слабые решения задачи (1.28)–(1.31) такие, что $m \leqslant \theta_{1,2} \leqslant M$ в области G. Положим $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Из определения слабого решения вытекают равенства

$$a(\nabla\theta, \nabla\eta) + (\mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\mu_a(f\theta - \varphi), \eta) = 0 \quad \forall\eta \in H_0^1(G), \tag{1.44}$$

$$\alpha(\nabla\varphi, \nabla\psi) + \mu_a(\varphi - f\theta, \psi) + \int\limits_\Gamma \beta\varphi\psi d\Gamma \quad \forall\psi \in H^1(G). \tag{1.45}$$

Здесь $f = (\theta_1 + \theta_2)(\theta_1^2 + \theta_2^2)$.

Положим $\eta = \theta$, $\psi = \varphi$ в (1.44), (1.45) и учтем, что $(\mathbf{v}\cdot\nabla\theta, \theta) = 0$ и $4m^3 \leqslant f \leqslant 4M^3$, тогда

$$\|\nabla\theta\|^2 \geqslant \gamma_1\|\theta\|^2, \quad \alpha\|\nabla\varphi\|^2 + \int\limits_\Gamma \beta\varphi^2 d\Gamma \geqslant \gamma_2\|\varphi\|^2,$$

где

$$\gamma_1 = \inf\{\|\nabla\zeta\|^2 : \zeta \in H_0^1(G), \|\zeta\| = 1\},$$
$$\gamma_2 = \inf\{\alpha\|\nabla\psi\|^2 + \int\limits_\Gamma \beta\psi^2 d\Gamma : \psi \in H^1(G), \|\psi\| = 1\}.$$

Отсюда следуют неравенства

$$(a\gamma_1 + 4m^3\mu_a b)\|\theta\| \leqslant \mu_a b\|\varphi\|, \quad (\gamma_2 + \mu_a)\|\varphi\| \leqslant 4M^3\mu_a\|\theta\|. \tag{1.46}$$

Таким образом, если выполняется условие

$$4M^3\mu_a^2 b < (a\gamma_1 + 4m^3\mu_a b)(\gamma_2 + \mu_a), \tag{1.47}$$

то из (1.46) следует, что $\theta = 0$, $\varphi = 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (*i*)-(*iii*) *и условие* (1.47). *Тогда задача* (1.28)-(1.31) *однозначно разрешима в классе слабых решений, удовлетворяющих* (1.34).

Приведем теперь пример условий единственности решения задачи сложного теплообмена, учитывающих скорость движения среды в канале длиной L, поперечное сечение которого является квадратом со стороной d. В этом случае

$$G = \{r = (x_1, x_2, x_3) : \ 0 < x_1 < L, \ 0 < x_{2,3} < d\}. \tag{1.48}$$

Пусть среда движется с постоянной скоростью $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. В равенствах (1.44) и (1.45), определяющих разности θ и φ двух возможных решений, полагаем

$$\theta = (\gamma - e^{-sx_1})q_1, \quad \eta = (\gamma - e^{-sx_1})^{-1}q_1,$$
$$\varphi = (\gamma - e^{-sx_1})q_2, \quad \psi = (\gamma - e^{-sx_1})^{-1}q_2.$$

Здесь $\gamma > 1$, $s > 0$. Тогда

$$a\|\nabla q_1\|^2 + \int\limits_G \left(\frac{vs}{\gamma e^{sx_1} - 1} - \frac{as^2}{(\gamma e^{sx_1} - 1)^2} + b\mu_a f\right) q_1^2 dr + b\mu_a(q_1, q_2) = 0,$$
$$\alpha\|\nabla q_2\|^2 + \int\limits_G \left(\mu_a - \frac{\alpha s^2}{(\gamma e^{sx_1} - 1)^2}\right) q_2^2 dr + \int\limits_\Gamma \beta q_2^2 d\Gamma - (f q_1, q_2) = 0.$$

Таким образом, аналогично тому, как выводилась оценка (1.46), получаем

$$\left(a\gamma_1 + 4m^3\mu_a b + \frac{vs}{\gamma e^{sL} - 1} - \frac{as^2}{(\gamma - 1)^2}\right)\|q_1\| \leqslant b\mu_a\|q_2\|,$$
$$\left(\gamma_2 + \mu_a - \frac{\alpha s^2}{(\gamma - 1)^2}\right)\|q_2\| \leqslant 4M^3\mu_a\|q_1\|.$$

Положим здесь, например, $s = 1/L$, $\gamma = 1 + s\sqrt{2\alpha/\mu_a}$. Тогда

$$\left(a\gamma_1 + 4m^3\mu_a b + \frac{v}{L(e-1) + e\sqrt{2\alpha/\mu_a}} - \frac{a\mu_a}{2\alpha}\right)\|q_1\| \leqslant b\mu_a\|q_2\|,$$

$$\left(\gamma_2 + \frac{\mu_a}{2}\right)\|q_2\| \leqslant 4M^3\mu_a\|q_1\|.$$

Следовательно, условие

$$4M^3\mu_a^2 b < \left(a\gamma_1 + 4m^3\mu_a b + \frac{v}{L(e-1) + e\sqrt{2\alpha/\mu_a}} - \frac{a\mu_a}{2\alpha}\right)\left(\gamma_2 + \frac{\mu_a}{2}\right) \quad (1.49)$$

обеспечивает единственность в классе ограниченных решений. Для данной геометрии канала нетрудно вычислить, что

$$\gamma_1 = \pi^2\left(\frac{2}{d^2} + \frac{1}{L^2}\right), \quad \gamma_2 \geqslant \left(2L\max\left(\frac{1}{\beta_0}, \frac{2L}{\alpha}\right)\right)^{-1}.$$

Таким образом, выполнение условия единственности (1.49) можно обеспечить как за счет малости размеров канала (d или L), так и за счет выбора достаточно большой скорости движения среды v.

В следующем разделе приводятся результаты численного моделирования сложного теплообмена с параметрами задачи, удовлетворяющими условию (1.49).

1.4 Квазистационарная модель сложного теплообмена

Квазистационарная модель - это тип математической модели, который описывает систему, претерпевающую медленные изменения со временем или имеющую относительно длительный период стабильности по сравнению с интересующим масштабом времени. Такие модели часто используются, когда изучаемая система находится в равновесии или близка к нему, но при этом может испытывать небольшие, медленные колебания со временем. Термин ‘квази‘ означает, что система не совсем стационарна (то есть, фиксирована или неизменна), а скорее, ее состояние меняется настолько медленно, что его можно считать почти стационарным для определенных анализов или целей.

В контексте теплообмена, излучения или других физических процессов квазистационарные модели могут использоваться для описания сценариев, когда параметры и свойства системы меняются очень медленно по сравнению с масштабом времени конкретного изучаемого явления. Такие модели могут упростить анализ и снизить вычислительную сложность, позволяя исследователям сосредоточиться на основных аспектах проблемы.

Квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ моделируется в рамках приближения P1 для уравнения радиационного теплообмена следующей начально-краевой задачей [16, 23]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0,$$
$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \tag{1}$$
$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{2}$$
$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{3}$$

Данная модель описывает систему связанных уравнений в частных производных (УЧП), моделирующих квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ в трехмерном пространстве. Используется приближение P1 для уравнения радиационного теплообмена, что является упрощенным подходом к решению задач радиационного теплообмена.

Задача состоит из начально-краевой задачи с тремя компонентами:

1. Первое уравнение представляет баланс энергии из-за радиационного теплообмена $\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)$ и проводящего теплообмена $(a\Delta\theta)$ с термом источника тепла $\left(b\kappa_a\left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right)\right)$ в ограниченной области Ω на промежутке времени $0 < t < T$. Радиационный теплообмен моделируется с использованием приближения P1, которое упрощает уравнение радиационного теплообмена.
2. Второе уравнение представляет баланс энергии из-за диффузионного теплообмена $(\alpha\Delta\varphi)$ с термом источника тепла $\left(\kappa_a\left(\varphi - |\theta|\theta^3\right)\right)$ в той же области Ω на промежутке времени $0 < t < T$. Это уравнение связано с первым уравнением через термы источника тепла.
3. Граничные условия задаются третьим уравнением, $a(\partial_n\theta + \theta) = r$ и $\alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u$ на границе Γ, которые являются условиями Робина,

представляющими смесь условий Дирихле (фиксированное значение) и Неймана (фиксированный градиент).

4. Наконец, начальное условие предоставляется четвертым уравнением, $\theta|_{t=0} = \theta_0$, которое дает начальное распределение температуры в области.

Здесь t - время, x - положение, а ω - направление излучения. Условие $n \cdot \omega < 0$ означает, что излучение движется в направлении, противоположном нормали к границе области, то есть входит в область Ω.

Система уравнений квазилинейна и связана, что делает ее решение сложным. Можно использовать численные методы, такие как методы конечных элементов или конечных разностей, для поиска приближенных решений этой задачи. Результаты могут предоставить информацию о поведении процессов теплообмена в данной области и могут быть использованы в различных приложениях, таких как изучение теплообмена в материалах или теплового управления в инженерных системах.

где S^{d-1} обозначает единичную сферу в $\mathbb{R}^d$. Для того чтобы получить корректно поставленную задачу, определим следующие граничные условия. Входящее излучение задается прозрачным условием на границе, и его интенсивность определяется как

$$I(t, x, \omega) = au^4, \quad n \cdot \omega < 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Температура предполагается подчиняться граничным условиям типа Робина, которые представляют закон охлаждения Ньютона. Эти условия определяются следующим образом:

$$n \cdot \nabla T = \frac{h}{\varepsilon k}(u - T), \quad x \in \partial\Omega.$$

Здесь n – нормаль к границе области, ∇T – градиент температуры, h – коэффициент теплоотдачи, ε – теплопроводность, k – коэффициент теплопроводности, u – температура окружающей среды, а T – температура внутри области. Эти условия описывают теплообмен между областью Ω и окружающей средой.

Вместе эти граничные условия определяют взаимодействие радиационного теплообмена и температуры с окружающей средой. Таким образом, включение этих условий в начально-краевую задачу позволяет получить корректно поставленную задачу, которую можно решить с использованием численных методов.

В начальный момент времени $t = 0$ температура равна $T(0,x) = T_0(x)$. В этих уравнениях $I(t,x,\omega)$ обозначает спектральную интенсивность излучения в точке $x \in \Omega$, движущегося в направлении $\omega \in S^{d-1}$, в момент времени $t \geqslant 0$. Внешнее излучение $I_b = au^4$ предполагается известным для входящих направлений (то есть, $n \cdot \omega < 0$) на границе. Обозначим нормаль к внешней стороне $\partial\Omega$ через n. Кроме того, $T(t,x)$ обозначает температуру материала, а u – внешнюю температуру на границе, которая действует как управляющая переменная.

Уравнения содержат параметры оптической плотности κ, теплопроводности k и коэффициента конвективного теплообмена h, которые предполагаются положительными константами. Масштабированная оптическая толщина обозначена через ε. В уравнениях вводится константа a для удобства обозначений, которая связана с постоянной Стефана-Больцмана через $a = \sigma/\pi$. Отметим, что согласно закону Стефана, полное тепловое излучение равно $B(T) = aT^4$.

Поскольку данная модель имеет высокую размерность фазового пространства из-за зависимости от направления $\omega \in S^{d-1}$, ее численная сложность слишком велика для оптимизационных задач, где нелинейная система состояний должна быть решена несколько раз. Вместо этого мы используем диффузионные аппроксимации типа SP_N [6,9] для уравнений радиационного теплообмена. Эти аппроксимации были разработаны недавно и широко протестированы для различных задач радиационного переноса, где они оказались достаточно точными [16].

SP_1-аппроксимация для уравнений радиационного теплообмена представлена системой

$$\begin{aligned}
\partial_t T &= k\Delta T + \frac{1}{3\kappa}\Delta\rho, \\
0 &= -\varepsilon^2 \frac{1}{3\kappa}\Delta\rho + \kappa\rho - \kappa 4\pi a|T|^3 T,
\end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
n \cdot \nabla T &= \frac{h}{\varepsilon k}(u - T), \\
n \cdot \nabla\rho &= \frac{3\kappa}{2\varepsilon}\left(4\pi a|u|^3 u - \rho\right),
\end{aligned}$$

Используя эту аппроксимацию, мы снижаем численную сложность модели, что делает ее подходящей для оптимизационных задач. и дополнен начальным условием $T(0, x) = T_0(x)$. Здесь ρ - радиационный поток, а заданная температура на границе обозначена через u.

Замечание 1.1. Радиационный поток для полной модели (1.1b) определяется как $\rho = \int_{S^{d-1}} I d\omega$. Мы заменили нелинейную функцию z^4 на $|z|^3 z$ для обеспечения монотонности.

В [12] вводится и численно исследуется оптимальная краевая задача управления с функционалами затрат типа слежения, например,

$$J(T, u) = \frac{1}{2} \|T - T_d\|^2_{L^2(0,1;L^2(\Omega))} + \frac{\delta}{2} \|u - u_d\|^2_{H^1(0,1;\mathbb{R})}$$

Решение этой задачи определяет оптимальные параметры управления температурой для радиационного теплообмена. где (T, ρ) есть решение (1.2). Здесь $T_d = T_d(t, x)$ - заданный температурный профиль, $u_d = u_d(t)$ - заданный контроль окружающей температуры, который должен быть улучшен. Кроме того, положительная константа δ позволяет регулировать вес штрафного слагаемого. Rраевая задача управления

$$\min J(T, u) \text{ с учётом } (T, \rho, u),$$
$$\text{в соответствии с системой (1.2).}$$

Эта оптимальная задача управления рассматривается как задача условной оптимизации, а сопряженные переменные используются для построения подходящего численного алгоритма [12]. В этой статье мы предоставляем анализ этого подхода. Мы доказываем существование оптимального управления u и уникальную разрешимость системы состояний, что существенно для введения сокращенного функционала затрат. Затем показывается уникальная разрешимость линеаризованной системы состояний и определяются сопряженные уравнения.

1.5 Математический аппарат моделирования сложного теплообмена

Предполагается, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ [87, с. 232], $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Вектор внешней нормали к границе области обозначается через n.

Введем следующие обозначения: $|\Omega|$ — объем области Ω, $|\Gamma|$ — площадь границы Γ, $\mu(E)$ — мера множества E; $L^p(\Omega)$, $L^p(\Gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ — пространства Лебега; $H^s(\Omega)$ — пространство Соболева $W^{2s}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0\}$, $C_0^\infty(\Omega)$ — пространство функций класса C^∞ с компактным носителем в Ω; аналогично определяются пространства вектор-функций $L_s^p(\Omega)$, $H^s(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$; $L^p(0,T;X)$ — пространство Лебега функций со значениями в банаховом пространстве X, $C([0,T];X)$ — пространство функций, непрерывных на $[0,T]$, со значениями в X, X' — пространство, сопряженное с пространством X.

Если $y \in L^p(0,T;X)$, то обозначаем $y' = \frac{dy}{dt}$.

Обозначим $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$. Пространство $\mathcal{H}$ отождествляем с пространством $\mathcal{H}'$, так что $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}' \subset \mathcal{V}'$. Через $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в $\mathcal{H}$, а через (f,v) — значение функционала $f \in \mathcal{V}'$ на элементе $v \in \mathcal{V}$, совпадающее со скалярным произведением в $\mathcal{H}$, если $f \in \mathcal{H}$. Определим пространство $\mathcal{W} = \{y \in L^2(0,T;\mathcal{V}) : y' \in L^2(0,T,\mathcal{V}')\}$.

Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ и нормы в $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ определяются формулами

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \|f\|^2 = (f,f),$$

$$\|f\|_{\mathcal{V}}^2 = \|f\|^2 + \|\nabla f\|^2,$$

$$\|f\|_{\mathcal{V}'} = \sup\{(f,v) : v \in \mathcal{V}, \|v\|_{\mathcal{V}} = 1\}.$$

Лемма 5 (неравенство Гёльдера). *[88, с. 35] Пусть $p,q \in [1,\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ выполнено неравенство:*

$$\left|\int_\Omega uv\,dx\right| \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Лемма 6 (неравенство Юнга). *[89, с. 38] Пусть $p,q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых $a,b \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:*

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{q\varepsilon}.$$

Лемма 7. *[89, с. 254] Всякое гильбертово пространство рефлексивно.*

Лемма 8. *[89, с. 255] Пусть X — рефлексивное банахово пространство. Если последовательность $x_n \in X$ ограничена, то в ней существует слабо сходящаяся подпоследовательность.*

Лемма 9. *[89, с. 260] Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Если последовательность $f_n \in X'$ ограничена, то в ней существует *-слабо сходящаяся подпоследовательность.*

Лемма 10. *[89, с. 258] Пусть X — банахово пространство. Если $x_n \in X$, $x_n \rightharpoonup x$ слабо в X, то последовательность x_n ограничена и $\|x\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Лемма 11. *[90, с. 47] Пусть U — выпуклое, замкнутое множество в банаховом пространстве X, $x_n \in U$, $x_n \rightharpoonup x$ слабо в X. Тогда $x \in U$.*

Определение 2. *[91, с. 48] Множество M банахова пространства X называется компактным, если из всякого бесконечного подмножества множества M можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого множества. Множество называется относительно компактным, если его замыкание компактно.*

Определение 3. *[91, с. 190] Пусть X, Y — банаховы пространства. Оператор $A : M \subset X \to Y$ называется компактным, если он переводит всякое ограниченное подмножество множества M в относительно компактное множество пространства Y. Если, кроме того, оператор A непрерывен, то он называется вполне непрерывным.*

Теорема 3 (Принцип Шаудера)**.** *[91, с. 193] Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ — выпуклое замкнутое множество, $A : M \to M$ — вполне непрерывный оператор. Тогда оператор A имеет неподвижную точку $x \in M$, т.е. $Ax = x$.*

Лемма 12. *[89, с. 365] Пусть X, Y, Z — банаховы пространства и $X \subset Y \subset Z$, причем вложение $X \subset Y$ компактно, а вложение $Y \subset Z$ непрерывно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_\varepsilon > 0$ такая, что $\|u\|_Y \leqslant \varepsilon\|u\|_X + C_\varepsilon\|u\|_Z$ $\forall u \in X$.*

Теорема 4. *[92, теорема 3] Пусть F — ограниченное множество в $L^2(0, T; V)$, и*

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|^2 dt \to 0$$

при $h \to 0$ равномерно относительно $f \in F$. Тогда F относительно компактно в $L^2(0, T; H)$.

Теорема 5 (Гильберт, Шмидт). *[93, с. 263] Пусть A — линейный, самосопряженный, компактный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда множество собственных элементов оператора A образует ортогональный базис в X.*

Теорема 6 (Лакс, Мильграм). *[94, с. 40] Пусть X — гильбертово пространство, $B : X \times X \to \mathbb{R}$ — непрерывная билинейная форма, $B(x, x) \geqslant C\|x\|_X^2$, $C > 0$. Тогда для любого $f \in X'$ задача $B(x, z) = (f, z) \quad \forall z \in X$ имеет единственное решение $x \in X$.*

Определение 4. *[90, с. 47] Пусть X — банахово пространство. Функционал $J : X \to \mathbb{R}$ называется слабо полунепрерывным снизу, если для любой последовательности $x_n \in X$ такой, что $x_n \rightharpoonup x$ слабо, выполняется неравенство $J(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} J(x_n)$.*

Лемма 13. *[90, с. 47] Пусть X — банахово пространство. Если функционал $J : X \to \mathbb{R}$ непрерывный и выпуклый, то он слабо полунепрерывен снизу.*

Следствие 1. *Пусть X — банахово пространство, $a \in X$. Тогда функционал $J : X \to \mathbb{R}$, $J(x) = \|x - a\|_X^2$ слабо полунепрерывен снизу.*

Лемма 14. *[89, с. 37] Вложение $L^p(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ непрерывно при $1 \leqslant s \leqslant p \leqslant \infty$.*

Лемма 15. *[88, с. 1020] Пространство $L^p(\Omega)$ сепарабельно при $1 \leqslant p < \infty$ и рефлексивно при $1 < p < \infty$.*

Лемма 16. *Пусть $f_k \to f$ в $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда $g_k \to g$ в $L^p(\Omega)$, где $g_k = \max\{f_k, 0\}$, $g = \max\{f, 0\}$.*

Доказательство. Так как $|g_k - g| \leqslant |f_k - f|$, то

$$\|g_k - g\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |g_k - g|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |f_k - f|^p \mathrm{d}x = \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

□

Лемма 17. *Пусть $f_k \to f$ в $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, $f_k \geqslant 0$ почти всюду в Ω. Тогда $f \geqslant 0$ почти всюду в Ω.*

Доказательство. По лемме 16 получаем, что $f_k = \max\{f_k, 0\} \to \max\{f, 0\}$ в $L^p(\Omega)$. Следовательно, $f = \max\{f, 0\}$, поэтому $f \geqslant 0$ почти всюду в Ω. □

Лемма 18. *Пусть $f_k, f \geqslant 0$, $f_k \to f$ в $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Тогда $f_k^s \to f^s$ в $L^1(\Omega)$, если $1 < s < p$.*

Доказательство. По формуле Лагранжа

$$|f_k^s - f^s| \leqslant s\xi^{s-1}|f_k - f| \leqslant s(f_k^{s-1} + f^{s-1})|f_k - f|,$$

где $\xi(x)$ находится между $f_k(x)$ и $f(x)$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями $p, q = \frac{p}{p-1}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \|f_k^s - f^s\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f_k^s - f^s|\,dx \leqslant s\int_\Omega (f_k^{s-1} + f^{s-1})|f_k - f|\,dx \\ \leqslant \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)}\left(\|f_k^{s-1}\|_{L^q(\Omega)} + \|f^{s-1}\|_{L^q(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p-1}{p-s}$ и $\frac{p-1}{s-1}$, получаем, что

$$\|f_k^{s-1}\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega f_k^{(s-1)p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant |\Omega|^{\frac{p-s}{p}}\left(\int_\Omega f_k^p\,dx\right)^{\frac{s-1}{p}} = |\Omega|^{\frac{s}{p}-1}\|f_k\|_{L^p(\Omega)}^{s-1}.$$

Следовательно, второй сомножитель в(1.50) ограничен, поэтому $\|f_k^s - f^s\|_{L^1(\Omega)} \to 0$. □

Теорема 7 (Лебег). *[93, с. 321] Пусть $G \subset \mathbb{R}^N$, $f_n \to f$ п.в. в G, $\forall n : |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ п.в. в G, где $\varphi \in L^1(G)$. Тогда $f \in L^1(G)$, $\int_G f_n(x)\,dx \to \int_G f(x)\,dx$.*

Теорема 8 (Леви). *[93, с. 322] Пусть $G \subset \mathbb{R}^N$, последовательность $f_n \in L^1(G)$ не убывает и $\forall n : \int_G f_n(x)\,dx \leqslant K$. Тогда $f_n \to f$ п.в. в G, где $f \in L^1(G)$, $\int_G f_n(x)\,dx \to \int_G f(x)\,dx$.*

Лемма 19. *[95, с. 47] Пусть $u \in H^1(\Omega)$, $\nabla u = 0$ п.в. в Ω. Тогда $u = const\,\theta\Omega$.*

Лемма 20. *[96, с. 47] Пусть $u \in H^1(\Omega)$, $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$. Тогда $u^+, u^- \in H^1(\Omega)$ и*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{если } u > 0, \\ 0, & \text{если } u \leqslant 0, \end{cases} \qquad \nabla u^- = \begin{cases} \nabla u, & \text{если } u < 0, \\ 0, & \text{если } u \geqslant 0. \end{cases}$$

Лемма 21. *[96, с. 50] Пусть $f(t), t \in \mathbb{R}$ - липшицева функция, производная которой существует всюду, за исключением, быть может, множества $\{a_1, \ldots, a_M\}$, $u \in H^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^N$. Тогда $f(u) \in H^1(G)$, $\frac{\partial f(u)}{\partial x_i} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$, где обе части этого равенства считаются равными нулю, когда $x \in \bigcup_{j=1}^M \{y : u(y) = a_j\}$.*

Лемма 22. *[88, с. 1026] Вложение $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ непрерывно при $1 \leqslant p \leqslant 6$ и компактно при $1 \leqslant p < 6$.*

Лемма 23. *[89, с. 239] Оператор следа $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ непрерывен.*

Лемма 24. *[97, с. 4] Образ оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ – плотное подпространство пространства $L^2(\Gamma)$.*

Лемма 25. *[98] Пусть $f(t), t \in \mathbb{R}$ - липшицева функция. Для любой функции $u \in H^1(\Omega)$ справедливо равенство $f(\gamma(u)) = \gamma(f(u))$, где $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ - оператор следа.*

Лемма 26. *Пусть $u \in H^1(\Omega), u \geqslant 0$ п.в. в Ω. Тогда $u|_\Gamma \geqslant 0$ п.в. на Γ.*

Доказательство. Применим лемму 25 для функции $f(t) = \max\{t, 0\}$:

$$\max\{u|_\Gamma, 0\} = \max\{u, 0\}|_\Gamma = u|_\Gamma$$

Следовательно, $u|_\Gamma \geqslant 0$ п.в. на Γ. □

Лемма 27. *[99, с. 41] Для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_\varepsilon > 0$ такая, что для любой функции $u \in H^1(\Omega)$ выполняется неравенство*

$$\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} \leqslant \varepsilon\|\nabla u\|^2 + C_\varepsilon\|u\|^2.$$

Лемма 28 (Гронуолл)**.** *[100, с. 191] Пусть $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция $b \geqslant 0$. Если*

$$f(t) \leqslant a + b\int_0^t f(\tau)d\tau \quad \forall t \in [0, T]$$

то $f(t) \leqslant ae^{bt} \forall t \in [0, T]$

Лемма 29. *Оператор $A : V \to V'$, определяемый формулой $(Au, v) = a(\nabla u, \nabla v) + \int_\Gamma buvd\Gamma$, где $a > 0, b \in L^\infty(\Gamma), b \geqslant b_0 > 0, b_0 = const$, непрерывен.*

Доказательство.

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V=1}(Au, v) \leqslant \sup_{\|v\|_V=1}\left(a\|\nabla u\|\|\nabla v\| + \|b\|_{L^\infty(\Gamma)}\|u\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant a\|u\|_V + \|b\|_{L^\infty(\Gamma)}C_1^2\|u\|_V = C\|u\|_V,$$

где C_1 - норма оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$. □

Лемма 30. *Пусть* $\mathbf{v} \in L^\infty\left(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)\right)$, *оператор* $B(t) : V \to V'$ *определяется формулой* $(B(t)u,v) = (\mathbf{v}\cdot\nabla u, v)$. *Тогда* $\exists C > 0 : |(B(t)u,w)| \leqslant C\|u\|_V\|w\|_V \forall u,w \in V, t\in(0,T)$.

Доказательство. Применяя неравенство Гёльдера с показателями 4, 2, 4, получаем, что

$$|(B(t)u,w)| = |(\mathbf{v}\cdot\nabla u, w)| \leqslant \|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla u\|\|w\|_{L^4(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1^2\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))}\|u\|_V\|w\|_V$$

где C_1- норма оператора вложения $H^1(\Omega)\subset L^4(\Omega)$ □

Лемма 31. *[89, с. 238] Функционал* $f(v) = (Av,v)^{1/2}$, *где* A *– оператор из леммы 1.25, определяет норму в пространстве* V, *эквивалентную стандартной норме в* V.

Лемма 32. *[89, с. 411] Если* X *- рефлексивное и сепарабельное банахово пространство, то* $L^p(0,T;X), 1<p<\infty$ *– рефлексивное и сепарабельное банахово пространство.*

Лемма 33. *[89, с. 449] Если* X *- рефлексивное и сепарабельное банахово пространство, то* $L^1(0,T;X)$ *- сепарабельное банахово пространство.*

Лемма 34. *Пусть* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, |f(x_1)-f(x_2)| \leqslant C|x_1-x_2|$. *Тогда отображение* $y\mapsto f(y)$ *непрерывно отображает пространство* $C([0,T];H)$ *в себя.*

Доказательство. Пусть $y\in C([0,T];H)$. Тогда $z=f(y)\in C([0,T];H)$, так как $\|z(t_1)-z(t_2)\| \leqslant C\|y(t_1)-y(t_2)\|$. Поскольку $\|z_1(t)-z_2(t)\| \leqslant C\|y(t_1)-y(t_2)\|$, то

$$\|z_1-z_2\|_{C([0,T];H)} = \max_{t\in[0,T]}\|z_1(t)-z_2(t)\| \leqslant C\max_{t\in[0,T]}\|y_1(t)-y_2(t)\| =$$
$$= C\|y_1-y_2\|_{C([0,T];H)}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 35. *[89, с. 423] Для любой функции* $u\in W$ *справедлива формуЛа*

$$\|u(t)\|^2 - \|u(0)\|^2 = 2\int_0^t (u'(\tau),u(\tau))\,d\tau, \quad 0\leqslant t\leqslant T$$

Лемма 36. *Для любой функции $u \in W$ справедливо равенство*

$$\frac{d\|u(t)\|^2}{dt} = 2\,(u'(t), u(t)) \qquad \text{п.в. на } (0,T)$$

Доказательство. Продифференцируем (1.24) по t согласно [93, с. 356] □

Лемма 37. *Пусть $y \in W, k \geqslant 0$. Тогда $z_1 = \max\{y-k, 0\} \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H), z_2 = \min\{y+k, 0\} \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$ и справедливы равенства*

$$2\int_0^t (y'(\tau), z_k(\tau))\,d\tau = \|z_k(t)\|^2 - \|z_k(0)\|^2\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1{,}2$$

Доказательство. Пространство $H^1(Q)$ плотно в W [89, с. 423] поэтому существует последовательность $y_j \in H^1(Q), y_j \to y$ в W. В силу непрерывности вложения $W \subset C([0,T];H)$ имеем $y_j \to y$ в $C([0,T];H)$.

Положим $z_{1j} = \max\{y_j - k, 0\}$. Отображение $y \mapsto \max\{y-k, 0\}$ непрерывно отображает пространство $C([0,T];H)$ в себя (лемма 1.30), поэтому $z_{1j} \to z_1$ в $C([0,T];H)$.

Поскольку $\|z_{1j}(t)\| \leqslant \|y_j(t)\|$ и $\|\nabla z_{1j}(t)\| \leqslant \|\nabla y_j(t)\|$, то $\|z_{1j}(t)\|_V \leqslant \|y_j(t)\|_V$, следовательно, последовательность z_{1j} ограничена в $L^2(0,T;V)$, поэтому в ней существует подпоследовательность $z_{1j} \to z_1$ слабо в $L^2(0,T;V)$.

По лемме 1.16 получаем, что

$$z'_{1j} = \begin{cases} y'_j, & \text{если } y_j > k\,(z_{1j} > 0)\,, \\ 0, & \text{если } y_j \leqslant k\,(z_{1j} = 0)\,. \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл

$$2\int_0^t \left(y'_j, z_{1j}\right) d\tau = 2\int_0^t \left(z'_{1j}, z_{1j}\right) d\tau = \int_\Omega \int_0^t \frac{d\left(z_{1j}^2\right)}{dt} d\tau dx = \\ = \|z_{1j}(t)\|^2 - \|z_{1j}(0)\|^2\,.$$

Перейдем к пределу в (1.25) при $j \to \infty$. Примем во внимание, что $y'_j \to y'$ сильно в $L^2\,(0,T;V')$ и $z_{1j} \to z_1$ слабо в $L^2(0,T;V)$, а также $z_{1j} \to z_1$ в $C([0,T];H)$, поэтому $\|z_{1j}(t)\| \to \|z_1(t)\|\,, t \in [0,T]$. Таким образом, получаем утверждение леммы для z_1. Утверждение для z_2 доказывается аналогично. □

Теорема 9. *[89, с. 426] Пусть $A(t) : V \to V'$ – линейный оператор, $\forall u, v \in V$ функция $t \mapsto (A(t)u, v)$ измерима на $(0,T), \exists C, c > 0, d \geqslant 0 : \forall u, v \in$*

$V, t \in (0,T) : |(A(t)u,v)| \leqslant C\|u\|_V\|v\|_V, (A(t)u,u) \geqslant c\|u\|_V^2 - d\|u\|_H^2, f \in L^2(0,T;V'), u_0 \in H$. *Тогда задача*

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t) \qquad \text{п.в. на } (0,T),$$
$$u(0) = u_0, \quad u \in W$$

имеет единственное решение.

Глава 2. Граничные обратные задачи и задачи с данными Коши

2.1 Квазирешение граничной обратной задачи

2.1.1 Постановка обратной задачи

Нормализованная стационарная модель, описывающая процесс радиационного теплопереноса в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ (см [47]), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усреднённая по всем направлениям, κ_a – коэффициент поглощения. Константы $a, b, \alpha, \gamma, \beta$ описываются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v},\ b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v},\ \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$$

где k – теплопроводность, c_v – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, σ – постоянная Стефана–Больцмана, n – индекс рефракции, $T_{\max}$ – максимальная температура, $\kappa := \kappa_s + \kappa_a$ – коэффициент полного взаимодействия, κ_s – коэффициент рассеяния. Коэффициент $A \in [-1{,}1]$ описывает анизотропию рассеивания; случай $A = 0$ отвечает изотропному рассеиванию.

Уравнения (2.1) дополняются граничными условиями на $\Gamma := \partial\Omega = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, где части границы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ не имеют пересечений.

$$\begin{aligned} \Gamma:\ & a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2:\ & \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \\ \Gamma_1:\ & \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Функции γ, θ_b, β – являются известными. Функция u характеризует отражающие свойства участка границы Γ_1. Предполагается, что

$$0 < u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \tag{2.3}$$

где u_1 и u_2 – заданные ограниченные функции.

Обратная задача состоит в нахождении функций $u(x), x \in \Gamma_1,\ \theta(x), \varphi(x), x \in \Omega$ удовлетворяющих условиям (2.1)–(2.3), а также дополнительному условию на участке границы Γ_2:

$$\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0 \tag{2.4}$$

где θ_0 известная функция.

Сформулированная обратная задача (2.1)–(2.4) сводится к экстремальной задаче, состоящей в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \tag{2.5}$$

на решениях краевой задачи (2.1)–(2.3). Решение задачи (2.1)–(2.3), (2.5) называется квазирешением задачи (2.1)–(2.4)

2.1.2 Формализация задачи нахождения квазирешения

Будем предполагать что исходные данные удовлетворяют следующему условию:

(i) $\beta \in L^\infty(\Gamma);\ \gamma \in L^\infty(\Gamma_0 \cup \Gamma_2);\ u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma_1);\ 0 < \beta_0 \leqslant \beta;\ 0 < \gamma_0 \leqslant \gamma;\ \beta_0,\gamma_0 = Const$,
$0 \leqslant u_1 \leqslant u_2$;

Пусть $H = L^2(\Omega), V = W_2^1(\Omega), Y = V \times V$. Пространство H отождествляем с сопряжённым пространством H' так, что $V \subset H = H' \subset V'$. Определим (f,v) как значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $f \in H, \|f\|^2 = (f,f)$. Пространство $U = L^2(\Gamma_1)$ является пространством управлений; $U_{ad} = \{u \in U, u_1 \leqslant u \leqslant u_2\}$ — множество допустимых управлений.

Пусть v произвольный элемент множества $H^1(\Omega)$.

Определим операторы:

$$A_{1,2}\colon V\to V',\quad F\colon V\times U\to V',\ f\in V',\ g\in V'.$$

$$(A_1\theta,v)=a(\nabla\theta,\nabla v)+\int_\Gamma \beta\theta v d\Gamma,\ (A_2\varphi,v)=\alpha(\nabla\varphi,\nabla v)+\int_{\Gamma_0\cup\Gamma_2}\gamma\varphi v d\Gamma,$$

$$(f,v)=\int_\Gamma \beta\theta_b v d\Gamma,\quad (g,v)=\int_{\Gamma_0\cup\Gamma_2}\gamma\theta_b^4 v d\Gamma,$$

$$(F(\varphi,u),v)=\int_{\Gamma_1}u(\varphi-\theta_b^4)v d\Gamma.$$

Пару $\{\theta,\varphi\}\in Y$ будем называть слабым решением задачи (2.1), (2.2), если

$$A_1\theta+b\kappa_a(|\theta|\theta^3-\varphi)=f, A_2\varphi+\kappa_a(\varphi-|\theta|\theta^3)+F(\varphi,u)=g. \tag{2.6}$$

Задача нахождения квазирешения состоит в минимизации функционала $J(\theta)$, определённом на компоненте θ решения системы (2.6). Таким образом

$$J(\theta)\to\inf,\ \{\theta,\varphi\}\ \text{решение (2.6), соответствующее функции}\ u\in U_{ad}. \tag{2.7}$$

Пара $\{\hat\theta,\hat\varphi\}$ соответствующая минимуму J, отвечающая функции $\hat u$ называется оптимальным состоянием. В таком случае $\hat u$ называется квазирешением обратной задачи (2.1)–(2.4).

2.1.3 Анализ экстремальной задачи

Для доказательства разрешимости задачи (2.7) нам необходимо также установить некоторые свойства решения задачи (2.1), (2.2).

Лемма 1. Пусть выполняется условие (i). Тогда для каждого $u\in U_{ad}$ существует единственное слабое решение $\{\theta,\varphi\}$ для задачи (2.1),(2.2) и справедливы оценки:

$$M_1\leqslant\theta\leqslant M_2,\ M_1^4\leqslant\varphi\leqslant M_2^4, \tag{2.8}$$

$$\|\nabla\varphi\|^2\leqslant C. \tag{2.9}$$

Здесь $M_1 = \text{ess inf } \theta_b, M_2 = \text{ess sup } \theta_b$, и константа $C > 0$ зависит только от $a, b, \alpha, \kappa_a, \beta, \gamma, \|u\|_{L^\infty(\Gamma)}$ и области Ω.

На основе оценок (2.8) и (2.9) аналогично [62] доказывается разрешимость экстремальной задачи (2.7).

Теорема 10. *Пусть выполняется условие (i). Тогда существует хотя бы одно решение задачи* (2.7).

Для вывода системы оптимальности, покажем дифференцируемость функционала J.

Лемма 38. *Функционал* $J : V \to \mathbb{R}$ *дифференцируем по Фреше.*

Доказательство. Покажем, что для произвольной функции $\theta \in V$ выполняется следующее равенство:

$$J(\theta + h) = J(\theta) + J'(\theta)\langle h\rangle + r(\theta, h)\ \forall h \in V, \text{ где } J'(\theta)\langle h\rangle = \int_{\Gamma_2}(\theta - \theta_0)h d\Gamma, \tag{2.10}$$

где для остаточного члена $r(\theta,h)$ справедливо соотношение:

$$\frac{|r(\theta,h)|}{\|h\|_V} \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_V \to 0. \tag{2.11}$$

Перепишем (2.10) в виде

$$\frac{1}{2}\|\theta + h - \theta_0\|^2_{L^2(\Gamma_2)} = \frac{1}{2}\|\theta - \theta_0\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + (\theta - \theta_0, h)_{L^2(\Gamma_2)} + \frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2(\Gamma_2)}.$$

Согласно теореме о следах $\|h\|_{L^2(\Gamma_2)} \leqslant C\|h\|_V$, где C не зависит от h. Поэтому

$$\frac{r(\theta,h)}{\|h\|_V} \leqslant \frac{1}{2}C^2\|h\|_V \to 0 \quad \text{при } \|h\|_V \to 0.$$

Лемма доказана. □

Вывод условий оптимальности основан на принципе множителей Лагранжа для гладко-выпуклых задач минимизации.

Теорема 11. *Пусть* $\hat{y} = \{\hat{\theta},\hat{\varphi}\} \in Y, \hat{u} \in U_{ad}$ *— решение экстремальной задачи* (2.7). *Тогда существует пара* $p = (p_1, p_2)$, $p \in Y$ *такая, что тройка* $(\hat{y}, \hat{u}, p)$, *удовлетворяет следующим условиям:*

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) = f_c, \ \ (f_c,v) = -\int_{\Gamma_2}(\hat{\theta} - \theta_0)v d\Gamma, \tag{2.12}$$

$$A_2p_2+\varkappa_a(p_2-bp_1)=g_c((p_2,\hat u),v),\ \ g_c((p_2,\hat u),v)=-\int_{\Gamma_1}\hat u p_2 v\Gamma, \tag{2.13}$$

$$\int_{\Gamma_1}p_2(\hat\varphi-\theta_b^4)(u-w)\leqslant 0\quad \forall w\in U_{ad}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Перепишем уравнения (2.6) следующим образом:

$$H(y,u)=0,\ \ y=\{\theta,\varphi\}\in Y,$$

где

$$H:Y\times U\to Y',$$
$$H(y,u)=\{A_1\theta+b\varkappa_a(|\theta|\theta^3-\varphi)-f,A_2\varphi+\varkappa_a(\varphi-|\theta|\theta^3)+F(\varphi,u)-g\}.$$

Заметим, что для всех $u\in U_{ad}$, отображение $y\to J(\theta)$ и $y\to H(y,u)$ непрерывно дифференцируемо в окрестности $\mathcal{O}(\hat y)$ точки $\hat y$. Непрерывная дифференцируемость членов в H следует из непрерывной дифференцируемости функции $t\in\mathbb{R}\to|t|t^3$, а также из непрерывности вложения $V\subset L^6(\Omega)$. В дополнение, отображение $u\to H(y,u)$ непрерывно из $U\to Y'$ и афинно. В [62] показано, что $\mathrm{Im}H'_y(\hat y,\hat u)=Y$, что влечёт невырожденность условий оптимальности.

Рассмотрим функцию Лагранжа $L(y,u,p)=J(\theta)+(H(y,u),p)$, где $y,p\in Y, u\in U_{ad}$. Согласно принципу Лагранжа [101, Гл.2, Теорема 1.5] существует пара $p=\{p_1,p_2\}\in Y$ такая, что

$$(L_\theta,\zeta)=\int_{\Gamma_2}(\hat\theta-\theta_0)\zeta d\Gamma+(A_1\zeta+4b\varkappa_a|\hat\theta|^3\zeta,p_1)-4\varkappa_a(|\hat\theta|^3\zeta,p_2)=0\ \forall\zeta\in V, \tag{2.15}$$

$$(L_\varphi,\zeta)=(A_2\zeta+\varkappa_a\zeta,p_2)-b\varkappa_a(\zeta,p_1)+\int_{\Gamma_1}\hat u\zeta p_2=0\ \forall\zeta\in V, \tag{2.16}$$

$$(L_u,\tau)=\int_{\Gamma_1}\tau(\varphi-\theta_b^4)p_2d\Gamma\leqslant 0,\ \tau:=\hat u-w\ \forall w\in U_{ad}. \tag{2.17}$$

Сопряжённые уравнения (2.12),(2.13) являются прямым следствием вариационных равенств (2.15) и (2.16). □

2.2 Анализ оптимизационного метода решения задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши

2.2.1 Постановка обратной задачи

Стационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ моделируется в рамках P_1–приближения для уравнения переноса излучения следующей системой эллиптических уравнений [47, 35, 77]:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, x \in \Omega. \tag{2.18}$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные физические параметры a, b, κ_a и α, описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [77]. Подробный теоретический и численный анализ различных постановок краевых и обратных задач, а также задач управления для уравнений радиационного теплообмена в рамках P_1–приближения для уравнения переноса излучения представлен в [47]–[102]. Отметим также серьезный анализ интересных краевых задач, связанных с радиационным теплообменом, представленный в [7]–[103].

Будем предполагать, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ известно температурное поле,

$$\theta = \theta_b. \tag{2.19}$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию, описывающую отражающие свойства границы [79]. В том случае, если указанная функция неизвестна, естественно вместо краевого условия для интенсивности излучения задавать тепловые потоки на границе

$$\partial_n\theta = q_b. \tag{2.20}$$

Здесь через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$.

Нелокальная разрешимость нестационарной и стационарной краевых задач для уравнений сложного теплообмена без краевых условий на интенсивность излучения и с условиями (2.19),(2.20) для температуры доказана в [104, 102].

Данная статья посвящена анализу предлагаемого оптимизационного метода решения краевой задачи (2.18)-(2.20) с условиями типа Коши для температуры. Указанный метод заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления для системы (2.18) с "искусственными" краевыми условиями

$$a(\partial_n\theta+\theta)=r,\ \ \alpha(\partial_n\varphi+\varphi)=u \text{ на } \Gamma. \tag{2.21}$$

Функция $r(x), x\in\Gamma$ является заданной, а неизвестная функция $u(x), x\in\Gamma$ играет роль управления. Экстремальная задача заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda,\varphi_\lambda,u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta,u)=\frac{1}{2}\int\limits_\Gamma(\theta-\theta_b)^2d\Gamma+\frac{\lambda}{2}\int\limits_\Gamma u^2d\Gamma\to\inf \tag{2.22}$$

на решениях краевой задачи (2.18),(2.21). Функция $\theta_b(x), x\in\Gamma$ и параметр регуляризации $\lambda>0$ заданы.

Как будет показано ниже, задача оптимального управления (2.18),(2.21),(2.22), если $r:=a(\theta_b+q_b)$, где q_b – заданная на Γ функция, является при малых λ аппроксимацией краевой задачи (2.18)-(2.20).

Статья организована следующим образом. В п.2 вводятся необходимые пространства и операторы, приводится формализация задачи оптимального управления. Априорные оценки решения задачи (2.18),(2.21), на основе которых доказана разрешимость указанной краевой задачи и задачи оптимального управления (2.18),(2.21),(2.22), получены в п. 3. В п. 4 выводится система оптимальности. В п. 5 показано, что последовательность $\{\theta_\lambda,\varphi_\lambda\}$, соответствующая решениям экстремальной задачи, сходится при $\lambda\to+0$ к решению краевой задачи (2.18)-(2.20) с условиями типа Коши для температуры. Наконец, в п.6 представлен алгоритм решения задачи управления, работа которого проиллюстрирована численными примерами.

2.2.2 Формализация задачи управления

В дальнейшем считаем, что $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная строго липшицева область, граница Γ которой состоит из конечного числа гладких кусков. Через

L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ обозначаем пространство Лебега, а через H^s – пространство Соболева W_2^s. Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, через V' обозначаем пространство, сопряженное с пространством V. Пространство H отождествляем с пространством H' так, что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную норму в H, а через (f,v) – значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $f \in H$. Через U обозначаем пространство $L^2(\Gamma)$ с нормой $\|u\|_\Gamma = \left(\int_\Gamma u^2 d\Gamma\right)^{1/2}$.

Будем предполагать, что

(i) $a,b,\alpha,\kappa_a,\lambda = Const > 0$,

(ii) $\theta_b,\ q_b \in U$, $r = a(\theta_b + q_b)$.

Определим операторы $A\colon V \to V'$, $B\colon U \to V'$, используя следующие равенства, справедливые для любых $y,z \in V$, $w \in U$:

$$(Ay,z) = (\nabla y, \nabla z) + \int\limits_\Gamma yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int\limits_\Gamma wz d\Gamma.$$

Билинейная форма (Ay,z) определяет скалярное произведение в пространстве V, а соответствующая норма $\|z\|_V = \sqrt{(Az,z)}$ эквивалентна стандартной норме V. Поэтому определен непрерывный обратный оператор $A^{-1} : V' \mapsto V$. Отметим, что для любых $v \in V$, $w \in U$, $g \in V'$ справедливы неравенства

$$\|v\|^2 \leqslant C_0\|v\|_V^2,\ \|v\|_{V'} \leqslant C_0\|v\|_V,\ \|Bw\|_{V'} \leqslant \|w\|_\Gamma,\ \|A^{-1}g\|_V \leqslant \|g\|_{V'}. \tag{2.23}$$

Здесь постоянная $C_0 > 0$ зависит только от области Ω.

Далее используем следующее обозначение $[h]^s := |h|^s \operatorname{sign} h$, $s > 0$, $h \in \mathbb{R}$ для монотонной степенной функции. **Определение.** Пара $\theta, \varphi \in V$ называется *слабым решением* задачи (2.18),(2.21), если

$$aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu. \tag{2.24}$$

Для формулировки задачи оптимального управления определим оператор ограничений $F(\theta, \varphi, u) : V \times V \times U \to V' \times V'$,

$$F(\theta, \varphi, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

Задача (CP)**.** Найти тройку $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2}\|\theta - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_\Gamma^2 \to \inf,\ \ F(\theta, \varphi, u) = 0. \tag{2.25}$$

2.2.3 Разрешимость задачи (CP)

Докажем предварительно однозначную разрешимость краевой задачи (2.18),(2.21).

Лемма 39. *Пусть выполняются условия (i),(ii), $u \in U$. Тогда существует единственное слабое решение задачи* (2.18),(2.21) *и при этом*

$$\begin{aligned} a\|\theta\|_V &\leqslant \|r\|_\Gamma + \frac{C_0\kappa_a}{\alpha}\|r+bu\|_\Gamma, \\ \alpha b\|\varphi\|_V &\leqslant \|r\|_\Gamma + \left(\frac{C_0\kappa_a}{\alpha}+1\right)\|r+bu\|_\Gamma. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Доказательство. Если второе уравнение в (2.24) умножить на b и сложить с первым, то получим равенства

$$A\,(a\theta+\alpha b\varphi) = B(r+bu),\; a\theta+\alpha b\varphi = A^{-1}B(r+bu),\; \varphi = \frac{1}{\alpha b}(A^{-1}B(r+bu)-a\theta).$$

Поэтому $\theta \in V$ является решением следующего уравнения:

$$aA\theta + \frac{\kappa_a}{\alpha}\theta + b\kappa_a[\theta]^4 = g. \tag{2.27}$$

Здесь

$$g = Br + \frac{\kappa_a}{\alpha}A^{-1}B(r+bu) \in V'.$$

Однозначная разрешимость уравнения (2.27) с монотонной нелинейностью хорошо известна (см. например [105]). Следовательно задача (2.24) однозначно разрешима.

Для получения оценок (2.26) умножим скалярно (2.27) на $\theta \in V$ и отбросим неотрицательные слагаемые в левой части. Тогда

$$a\|\theta\|_V^2 \leqslant (g,\theta) \leqslant \|g\|_{V'}\|\theta\|_V, \quad a\|\theta\|_V \leqslant \|g\|_{V'}.$$

Неравенства (2.23) позволяют оценить $\|g\|_{V'}$ и $\|\varphi\|_V$,

$$\|g\|_{V'} \leqslant \|r\|_\Gamma + \frac{C_0\kappa_a}{\alpha}\|r+bu\|_\Gamma, \quad \|\varphi\|_V \leqslant \frac{1}{\alpha b}\|r+bu\|_\Gamma + \frac{a}{\alpha b}\|\theta\|_V.$$

В результате получаем оценки (2.26). $\square$

Полученные оценки решения управляемой системы позволяют доказать разрешимость задачи оптимального управления.

Теорема 12. *Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда существует решение задачи* (CP).

Доказательство. Пусть $j_\lambda = \inf J_\lambda$ на множестве $u \in U$, $F(\theta, \varphi, u) = 0$. Выберем минимизирующую последовательность $u_m \in U$, $\theta_m \in V$, $\varphi_m \in V$,

$$J_\lambda(\theta_m, u_m) \to j_\lambda,$$

$$aA\theta_m + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi_m) = Br, \ \ \alpha A\varphi_m + \kappa_a(\varphi_m - [\theta]^4) = Bu_m. \tag{2.28}$$

Из ограниченности последовательности u_m в пространстве U следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_m\|_V \leqslant C, \ \|\varphi_m\|_V \leqslant C, \ \|\theta_m\|_{L^6(\Omega)} \leqslant C.$$

Здесь через $C > 0$ обозначена наибольшая из постоянных, ограничивающих соответствующие нормы и не зависящих от m. Переходя при необходимости к подпоследовательностям, заключаем, что существует тройка $\{\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\} \in U \times V \times V$,

$$u_m \to \hat{u} \text{ слабо в } U, \ \ \theta_m, \varphi_m \to \hat{\theta}, \hat{\varphi} \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^4(\Omega). \tag{2.29}$$

Заметим также, что $\forall v \in V$

$$|([\theta_m]^4 - [\hat{\theta}]^4, v) \leqslant 2\|\theta_m - \hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)}\|v\|_{L^4(\Omega)}\left(\|\theta_m\|^3_{L_6(\Omega)} + \|\hat{\theta}\|^3_{L_6(\Omega)}\right). \tag{2.30}$$

Результаты о сходимости (2.29),(2.30) позволяют перейти к пределу в (2.28). Поэтому

$$aA\hat{\theta} + b\kappa_a([\hat{\theta}]^4 - \hat{\varphi} = Br), \ \alpha A\hat{\varphi} + \kappa_a(\hat{\varphi} - [\hat{\theta}]^4) = B\hat{u},$$

и при этом $j_\lambda \leqslant J_\lambda(\hat{\theta}, \hat{u}) \leqslant \underline{\lim}\, J_\lambda(\theta_m, u_m) = j_\lambda$. Следовательно, тройка $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ есть решение задачи (CP). □

2.2.4 Условия оптимальности

Для получения системы оптимальности достаточно использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [106, 101]. Проверим справедливость ключевого условия, что образ производной оператора ограничений $F(y, u)$, где $y = \{\theta, \varphi\} \in V \times V$, совпадает с пространством $V' \times V'$. Именно это условие гарантирует невырожденность условий оптимальности. Напомним, что

$$F(y, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

Лемма 40. *Пусть выполняются условия (i),(ii). Для любой пары* $\hat{y} \in V \times V, \hat{u} \in U$ *справедливо равенство*

$$ImF'_y(y, u) = V' \times V'.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что задача

$$aA\xi + b\kappa_a(4|\hat{\theta}|^3\xi - \eta) = f_1, \;\; \alpha A\eta + \kappa_a(\eta - 4|\hat{\theta}|^3\xi) = f_2$$

разрешима для всех $f_{1,2} \in V'$. Данная задача равносильна системе

$$aA\xi + \kappa_a\left(4b|\theta|^3 + \frac{a}{\alpha}\right)\xi = f_1 + \frac{\kappa_a}{\alpha}f_3, \;\; \eta = \frac{1}{\alpha b}(f_3 - a\xi).$$

Здесь $f_3 = A^{-1}(f_1 + bf_2) \in V$. Разрешимость первого уравнения указанной системы очевидным образом следует из леммы Лакса-Мильграма.

В соответствии с леммой 2, лагранжиан задачи (CP) имеет вид

$$L(\theta, \varphi, u, p_1, p_2) = J_\lambda(\theta, u) + (aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, p_1) + (\alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu, p_2)$$

Здесь $p = \{p_1, p_2\} \in V \times V$ – сопряженное состояние. Если $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ – решение задачи (CP), то в силу принципа Лагранжа [106, Теорема 1.5] справедливы вариационные равенства $\forall v \in V, w \in U$

$$(\hat{\theta} - \theta_b, v)_\Gamma + (aAv + 4b\kappa_a|\hat{\theta}|^3 v, p_1) - \kappa_a(4|\hat{\theta}|^3 v, p_2) = 0, \; b\kappa_a(v, p_1) + (\alpha Av + \kappa_a v, p_2) = 0, \tag{2.31}$$

$$\lambda(\hat{u}, w)_\Gamma - (Bw, p_2) = 0. \tag{2.32}$$

Таким образом, из условий (2.31),(2.32) получаем следующий результат, который вместе с уравнениями (2.24) для оптимальной тройки определяет систему оптимальности задачи (CP). □

Теорема 13. *Пусть выполняются условия (i),(ii). Если* $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ *– решение задачи* (CP)*, то существует единственная пара* $\{p_1, p_2\} \in V \times V$ *такая, что*

$$aAp_1 + 4|\hat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) = B(\theta_b - \hat{\theta}), \;\; \alpha Ap_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0 \tag{2.33}$$

и при этом $\lambda\hat{u} = p_2$.

2.2.5 Аппроксимация задачи с условиями типа коши

Рассмотрим краевую задачу (2.18)–(2.20) для уравнений сложного теплообмена, в которой нет краевых условий на интенсивность излучения. Существование $\theta,\varphi \in H^2(\Omega)$, удовлетворяющих (2.18)–(2.20) для достаточно гладких θ_b, q_b и достаточные условия единственности решения установлены в [102]. Покажем, что решения задачи (CP) при $\lambda \to +0$ аппроксимируют решение задачи (2.18)-(2.20).

Теорема 14. *Пусть выполняются условия (i),(ii) и существует решение задачи* (2.18)–(2.20). *Если* $\{\theta_\lambda,\varphi_\lambda,u_\lambda\}$ *– решение задачи* (CP) *для* $\lambda > 0$*, то существует последовательность* $\lambda \to +0$ *такая, что*

$$\theta_\lambda \to \theta_*, \quad \varphi_\lambda \to \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

где θ_*,φ_* *– решение задачи* (2.18)-(2.20).

Доказательство. Пусть $\theta,\varphi \in H^2(\Omega)$ – решение задачи (2.18)–(2.20), $u = \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) \in U$. Тогда

$$aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu,$$

где $r := a(\theta_b + q_b)$. Поэтому, с учетом того, что $\theta|_\Gamma = \theta_b$,

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2}\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2}\|u_\lambda\|_\Gamma^2 \leqslant J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2}\|u\|_\Gamma^2.$$

Следовательно,

$$\|u_\lambda\|_\Gamma^2 \leqslant C, \;\; \|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 \to 0, \lambda \to +0.$$

Здесь и далее $C > 0$ не зависит от λ. Из ограниченности последовательности u_λ в пространстве U следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_\lambda\|_V \leqslant C, \;\; \|\varphi\|_\lambda \leqslant C.$$

Поэтому можно выбрать последовательность $\lambda \to +0$ такую, что

$$u_\lambda \to u_* \text{ слабо в } U, \;\; \theta_\lambda, \varphi_\lambda \to \theta_*,\varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^4(\Omega). \tag{2.34}$$

Результаты (2.34) позволяют перейти к пределу при $\lambda \to +0$ в уравнениях для $\theta_\lambda,\varphi_\lambda,u_\lambda$ и тогда

$$aA\theta_* + b\kappa_a([\theta_*]^4 - \varphi_*) = Br, \quad \alpha A\varphi_* + \kappa_a(\varphi_* - [\theta_*]^4) = Bu_*. \tag{2.35}$$

При этом $\theta_*|_\Gamma = \theta_b$. Из первого уравнения в (2.35), с учетом, что $r = a(\theta_b + q_b)$, выводим

$$-a\Delta\theta_* + b\kappa_a([\theta_*]^4 - \varphi_*) = 0 \text{ п.в. в } \Omega, \quad \theta_* = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b \text{ п.в. на } \Gamma.$$

Из второго уравнения в (2.35) следует, что $-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = 0$ почти всюду в Ω. Таким образом, пара θ_*, φ_* – решение задачи (2.18)–(2.20). □

Замечание. Из ограниченности последовательности u_λ в пространстве U следует ее слабая относительная компактность и существование последовательности (возможно не единственной) $\lambda \to +0$ такой, что $u_\lambda \to u_*$ слабо в U. Для практического решения задачи (2.18)-(2.20) важно то, что *для любой последовательности* $\lambda \to +0$ справедлива оценка $\|\theta_\lambda - \theta_b\|^2_\Gamma \leqslant C\lambda$, а поскольку $\partial_n\theta_\lambda = \theta_b + q_b - \theta_\lambda$, то также $\|\partial_n\theta_\lambda - q_b\|^2_\Gamma \leqslant C\lambda$. Указанные неравенства гарантируют, что граничные значения $\theta_\lambda, \partial_n\theta_\lambda$ при малых λ аппроксимируют краевые условия задачи (2.18)-(2.20).

2.3 Анализ оптимизационного метода для квазистационарной модели

2.3.1 Постановка задачи оптимального управления

Квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ моделируется P_1-аппроксимацией для уравнения переноса излучения со следующей начально-краевой задачей [107, 47]:

$$\begin{aligned} &a\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a\left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right) = 0, \\ &-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|\theta^3\right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$a\left(\partial_n\theta + \theta\right) = r, \quad \alpha\left(\partial_n\varphi + \varphi\right) = u \text{ на } \Gamma; \tag{2.37}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{2.38}$$

Здесь θ — нормированная температура, φ — нормированная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные параметры a, b, κ_a и α, описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [51]. Задана функция $r(x,t), x \in \Gamma, t \in (0,T)$, а неизвестная функция $u(x,t), x \in \Gamma, t \in (0,T)$ — управление. Через ∂_n мы обозначаем производную по направлению внешней нормали $\mathbf{n}$.

Экстремальная задача состоит в том, чтобы найти тройку $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 \, d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T \int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \to \inf \tag{2.39}$$

на решениях задачи (2.36)–(2.38).

Функция $\theta_b(x,t), x \in \Gamma, t \in (0,T)$, а также регуляризирующий параметр $\lambda > 0$ являются заданными.

Задача оптимального управления (2.36)–(2.39), если $r := a\,(\theta_b + q_b)$, где q_b — заданная функция на $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$, является при малых значениях λ аппроксимацией краевой задачи для уравнения (2.36), для которого неизвестны граничные условия для интенсивности излучения φ. Вместо них задаются граничные температура и внешний поток,

$$\theta|_\Gamma = \theta_b, \quad \partial_n \theta|_\Gamma = q_b. \tag{2.40}$$

Основные результаты главы заключаются в получении априорных оценок решения задачи (2.36), (2.37), на основании которых доказывается разрешимость задачи оптимального управления (2.36)–(2.39), и оптимальность система является производной. Показано, что последовательность $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ решений экстремальной задачи (2.36)–(2.39), при $\lambda \to +0$ сходится к решению начально-краевой задачи (2.36), (2.40), с условиями типа Коши для температуры. Представлен алгоритм решения задачи управления.

2.3.2 Формализация задачи управления

В дальнейшем предполагается, что $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ — ограниченная строго липшицева область, граница которой Γ состоит из конечного числа гладких кусков. Через $L^s, 1 \leqslant s \leqslant \infty$ обозначается пространство Лебега, а через H^s пространство Соболева W_2^s. Пусть $H = L^2(\Omega), V = H^1(\Omega)$. Через V' обозначим двойственное к V пространство, а через $L^s(0,T;X)$ пространство Лебега функций из L^s, определенных на $(0,T)$ со значениями в пространстве X. Пространство H отождествляется с пространством H' так, что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную норму в H, а через (f, v) значение функционала $f \in V'$ в элементе $v \in V$, что совпадает со скалярным произведением в H, если $f \in H$.

Через U обозначим пространство $L^2(\Sigma)$ с нормой

$$\|u\|_\Sigma = \left(\int_\Sigma u^2 d\Gamma dt\right)^{1/2}.$$

Мы также будем использовать пространство

$$W = \left\{y \in L^2(0,T;V): \quad y' \in L^2\left(0,T,V'\right)\right\},$$

где $y' = dy/dt$.

Будем считать, что

(i) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \mathrm{Const} > 0$,

(ii) $\theta_b, q_b \in U, r = a\left(\theta_b + q_b\right) \in L^5(\Sigma)\theta_0 \in L^5(\Omega)$.

Определим операторы $A : V \to V', B : U \to V'$, используя следующие равенства, справедливые для любых $y, z \in V, w \in L^2(\Gamma)$:

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_\Gamma yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_\Gamma wz d\Gamma.$$

Билинейная форма (Ay, z) определяет скалярное произведение в пространстве V, и соответствующая норма $\|z\|_V = \sqrt{(Az, z)}$ эквивалентна к стандартной норме в V. Следовательно, определен непрерывный обратный оператор $A^{-1} : V' \mapsto V$. Заметим, что для любых $v \in V, w \in L^2(\Gamma), g \in V'$ выполняются следующие неравенства:

$$\|v\|^2 \leqslant C_0\|v\|_V^2, \|v\|_{V'} \leqslant C_0\|v\|_V, \|Bw\|_{V'} \leqslant \|w\|_\Gamma, \left\|A^{-1}g\right\|_V \leqslant \|g\|_{V'}.$$

Здесь константа $C_0 > 0$ зависит только от домена Ω.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначение $[h]^s := |h|^s \operatorname{sign} h, s > 0, h \in \mathbf{R}$ для монотонной степенной функции.

Определение 5. *Пара* $\theta \in W, \varphi \in L^2(0,T;V)$ *называется слабым решением задачи* (2.36)–(2.38), *если*

$$\theta' + aA\theta + b\kappa_a\left([\theta]^4 - \varphi\right) = Br, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a\left(\varphi - [\theta]^4\right) = Bu. \quad (2.41)$$

Для формулировки задачи оптимального управления определим оператор ограничения $F(\theta, \varphi, u) : W \times L^2(0,T;V) \times U \to L^2(0,T,V') \times L^2(0,T,V') \times H$ таким, что

$$F(\theta, \varphi, u) = \left\{\theta' + aA\theta + b\kappa_a\left([\theta]^4 - \varphi\right) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a\left(\varphi - [\theta]^4\right) - Bu, \theta(0) - \theta_0\right\}$$

Таким образом задача (**OC**) заключается в отыскании тройки $\{\theta, \varphi, u\} \in W \times L^2(0,T;V) \times U$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2}\|\theta - \theta_b\|_\Sigma^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_\Sigma^2 \to \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0.$$

2.3.3 Разрешимость задачи (OC)

Докажем сначала однозначную разрешимость задачи (2.36)–(2.38).

Лемма 41. *Пусть выполняются условия (i), (ii),* $u \in U$. *Тогда существует единственное слабое решение задачи* (2.36)–(2.38) *и, кроме того,*

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0,T;H).$$

Доказательство. Выразим φ из последнего уравнения (2.41) и подставим его в первое. В результате получаем следующую задачу Коши для уравнения с операторными коэффициентами:

$$\theta' + aA\theta + L[\theta]^4 = Br + f, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2.42)$$

Здесь

$$L = \alpha b\kappa_a A\left(\alpha A + \kappa_a I\right)^{-1} : V' \to V', f = b\kappa_a\left(\alpha A + \kappa_a I\right)^{-1} Bu \in L^2(0,T;V).$$

Получим априорные оценки решения задачи (2.42), на основании которых стандартным образом выводится разрешимость этой задачи. Пусть $[\zeta,\eta]=\left(\left(\alpha I+\kappa_a A^{-1}\right)\zeta,\eta\right), \zeta\in V',\eta\in V$. Отметим, что выражение $[[\eta]]=\sqrt{[\eta,\eta]}$ определяет норму в H, эквивалентную стандартной.

Умножая скалярно в H уравнение в (2.42) на $\left(\alpha I+\kappa_a A^{-1}\right)\theta$, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[[\theta]]^2+a\alpha(A\theta,\theta)+a\kappa_a\|\theta\|^2+\alpha b\kappa_a\|\theta\|^5_{L^5(\Omega)}=[Br,\theta]+[f,\theta]. \tag{2.43}$$

Из равенства (2.43) следует оценка

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;H)}+\|\theta\|_{L^2(0,T;V)}+\|\theta\|_{L^5(Q)}\leqslant C_1, \tag{2.44}$$

где C_1 зависит только от $a,b,\alpha,\kappa_a,\|f\|_{L^2(0,T;H)},\|\ theta_0\|\ ,\|r\|_{L^2(\Sigma)}$.

Далее положим $\psi=[\theta]^{5/2}$. В таком случае

$$\left(\theta',[\theta]^4\right)=\frac{1}{5}\frac{d}{dt}\|\psi\|^2,\quad \left(A\theta,[\theta]^4\right)=\frac{16}{25}\|\nabla\psi\|^2+\|\psi\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Умножая скалярно в H уравнение в (2.42) на $[\theta]^4=[\psi]^{8/5}$, получаем

$$\frac{1}{5}\frac{d}{dt}\|\psi\|^2+a\left(\frac{16}{25}\|\nabla\psi\|^2+\|\psi\|^2_{L^2(\Gamma)}\right)+\left(L[\psi]^{8/5},[\psi]^{8/5}\right)=\left(Br+f,[\psi]^{8/5}\right). \tag{2.45}$$

Равенство (2.45) влечет оценку

$$\|\psi\|_{L^\infty(0,T;H)}+\|\psi\|_{L^2(0,T;V)}+\left\|[\theta]^4\right\|_{L^2(0,T;H)}\leqslant C_2, \tag{2.46}$$

где C_2 зависит только от $a,b,\alpha,\kappa_a,\|f\|_{L^2(0,T;H)},\|\ theta_0\|_{L^5(\Omega)}\ ,\|r\|_{L^5(\Sigma)}$. Дадим оценку $\|\theta'\|_{L^2(0,T;V')}$ с учетом $\theta'=Br+f-aA\theta-L[\theta]^4$. В силу условий на начальные данные верно $Br,f\in L^2\left(0,T;V'\right)$. Поскольку $\theta\in L^2(0,T;V)$, то $A\theta\in L^2\left(0,T;V'\right)$. Пусть $\zeta=L[\theta]^4$. Таким образом

$$\alpha\zeta+\kappa_a A^{-1}\zeta=\alpha b\kappa_a[\theta]^4.$$

Умножая в смысле скалярного произведения H последнее равенство на ζ, получаем

$$\alpha\|\zeta\|^2+\kappa_a\left(A^{-1}\zeta,\zeta\right)=\alpha b\kappa_a\left([\theta]^4,\zeta\right)\leqslant\alpha\left(\|\zeta\|^2+\frac{(b\kappa_a)^2}{4}\left\|[\theta]^4\right\|^2\right).$$

Следовательно, $\|\zeta\|^2_{V'} = \left(A^{-1}\zeta, \zeta\right) \leqslant \frac{\alpha\kappa_a b^2}{4}\left\|[\theta]^4\right\|^2$ и в силу оценок (2.44), (2.46) получаем

$$\|\theta'\|_{L^2(0,T;V')} \leqslant \|Br + f\|_{L^2(0,T;V')} + aC_1 + \sqrt{\alpha\kappa_a} bC_2. \tag{2.47}$$

Оценок (2.44)—(2.47) достаточно для доказательства разрешимости задачи.

Пусть $\theta_{1,2}$ — решения задачи (2.42), $\eta = \theta_1 - \theta_2$. Затем

$$\eta' + aA\eta + L\left([\theta_1]^4 - [\theta_1]^4\right) = 0, \quad \eta(0) = 0.$$

Умножая в смысле скалярного произведения H последнее уравнение на $\left(\alpha I + \kappa_a A^{-1}\right)\eta$, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[[\eta]]^2 + a\alpha(A\eta, \eta) + a\kappa_a\|\eta\|^2 + \alpha b\kappa_a\left([\theta_1]^4 - [\theta_1]^4, \theta_1 - \theta_2\right) = 0.$$

Последний член в левой части неотрицательный, поэтому, интегрируя полученное равенство по времени, получаем $\eta = \theta_1 - \theta_2 = 0$, что означает единственность решение. Лемма доказана. □

Теорема 15. *Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда есть решение проблемы* (OC).

Доказательство. Пусть $j_\lambda = \inf J_\lambda$ on the set $u \in U, F(\theta, \varphi, u) = 0$. Выберем минимизирующую последовательность $u_m \in U, \theta_m \in W, \varphi_m \in L^2(0,T;V), J_\lambda(\theta_m, u_m) \to j_\lambda$,

$$\begin{gathered}\theta'_m + aA\theta_m + b\kappa_a\left([\theta_m]^4 - \varphi_m\right) = Br, \theta_m(0) = \theta_0, \\ \alpha A\varphi_m + \kappa_a\left(\varphi_m - [\theta_m]^4\right) = Bu_m.\end{gathered} \tag{2.48}$$

Ограниченность последовательности u_m в пространстве U влечет по лемме 1 оценки

$$\|\theta_m\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C, \quad \|\theta_m\|_{L^\infty(0,T;L^5(\Omega))} \leqslant C, \|\theta'_m\|_{L^2(0,T;V')} \leqslant C,$$
$$\int_0^T\int_\Omega |\theta_m|^8\, dxdt \leqslant C, \quad \|\varphi_m\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C.$$

Здесь $C > 0$ обозначает наибольшую из констант, ограничивающих соответствующие нормы и не зависящих от m. Переходя, если необходимо, к подпоследовательностям, заключаем, что существует тройка $\{\widehat{u}, \widehat{\theta}, \widehat{\varphi}\} \in U \times W \times L^2(0,T;V)$,

$$u_m \to \widehat{u} \text{ слабо в } U$$
$$\theta_m \to \widehat{\theta} \text{ слабо в } L^2(0,T;V), \text{ сильно в } L^2(Q),$$
$$\varphi_m \to \widehat{\varphi} \text{ слабо в } L^2(0,T;V).$$

Более того, $\widehat{\theta} \in L^8(Q) \cap L^\infty\left(0,T;L^5(\Omega)\right)$.

Результаты сходимости позволяют перейти к пределу в (2.48). В этом случае предельный переход в нелинейной части следует из следующего неравенства, справедливого при $\xi \in C^\infty(\bar{Q})$:

$$\int_0^T \left|\left([\theta_m]^4 - [\widehat{\theta}]^4, \xi\right)\right| dt \leqslant$$
$$2\max_{\bar{Q}}|\xi|\left(\|\theta_m\|^{5/3}_{L^5(\Omega)}\|\theta_m\|^{4/3}_{L^8(\Omega)} + \|\widehat{\theta}\|^{5/3}_{L^5(\Omega)}\|\widehat{\theta}\|^{4/3}_{L^8(\Omega)}\right)\left\|\theta_m - \widehat{\theta}\right\|_{L^2(Q)}.$$

Получаем, что

$$\widehat{\theta}' + aA\widehat{\theta} + b\kappa_a\left([\widehat{\theta}]^4 - \widehat{\varphi}\right) = Br, \quad \widehat{\theta}(0) = \theta_0, \quad \alpha A\widehat{\varphi} + \kappa_a\left(\widehat{\varphi} - [\widehat{\theta}]^4\right) = B\widehat{u},$$

где $j_\lambda \leqslant J_\lambda(\widehat{\theta}, \widehat{u}) \leqslant \underline{\lim} J_\lambda(\theta_m, u_m) = j_\lambda$. Таким образом, тройка $\{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}, \widehat{u}\}$ есть решение задачи (OC). □

2.3.4 Условия оптимальности

Для получения системы оптимальности достаточно использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [15,17]. Проверим выполнение ключевого условия, что образ производной оператора связи $F'_y(y,u)$, где $y = \{\theta, \varphi\}$ $W \times L^2(0,T;V)$, совпадает с пространством $L^2(0,T;V') \times L^2(0,T;V') \times H$. Именно это условие гарантирует невырожденность условий оптимальности. Напомним, что

$$F(\theta,\varphi,u) = \left\{\theta' + aA\theta + b\kappa_a\left([\theta]^4 - \varphi\right) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a\left(\varphi - [\theta]^4\right) - Bu, \theta(0) -\right.$$

Лемма 42. *Пусть выполнены условия (i), (ii). Если* $\widehat{y} \in W \times L^2(0,T;V), \widehat{u} \in U$ *является решением задачи* (OC)*, то справедливо равенство:*

$$\operatorname{Im} F'_y(\widehat{y},\widehat{u}) = L^2\left(0,T;V'\right) \times L^2\left(0,T;V'\right) \times H.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что проблема

$$\xi' + aA\xi + b\kappa_a\left(4|\widehat{\theta}|^3\xi - \eta\right) = f_1, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad \alpha A\eta + \kappa_a\left(\eta - 4|\widehat{\theta}|^3\xi\right) = f_2$$

разрешима для всех $f_{1,2} \in L^2\left(0,T;V'\right), \xi_0 \in H$. Выразим η из последнего уравнения и подставим его в первое. В результате получаем следующую задачу:

$$\xi' + aA\xi + 4L\left(|\widehat{\theta}|^3\xi\right) = f_1 + b\kappa_a\left(\alpha A + \kappa_a I\right)^{-1} f_2, \xi(0) = \xi_0. \tag{2.49}$$

Единственная разрешимость линейной задачи (2.49) доказывается аналогично лемме 1. □

Согласно лемме 2 лагранжиан задачи (OC) имеет вид

$$L\left(\theta,\varphi,u,p_1,p_2,q\right) = J_\lambda(\theta,u) + \int_0^T \left(\theta' + aA\theta + b\kappa_a\left([\theta]^4 - \varphi\right) - Br, p_1\right)dt$$
$$+ \int_0^T \left(\alpha A\varphi + \kappa_a\left(\varphi - [\theta]^4\right) - Bu, p_2\right)dt + \left(q, \theta(0) - \theta_0\right).$$

Здесь $p = \{p_1,p_2\} \in L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;V)$ — сопряженное состояние, $q \in H$ — множитель Лагранжа для начального условия. Если $\{\widehat{\theta},\widehat{\varphi},\widehat{u}\}$ является решением задачи (OC), то в силу принципа Лагранжа [106, гл. 2, теорема 1.5] выполняются вариационные равенства $\forall\zeta \in L^2(0,T;V), v \in U$

$$\int_0^T \left(\left(B\left(\widehat{\theta} - \theta_b\right),\zeta\right) + \left(\zeta' + aA\zeta + 4b\kappa_a|\widehat{\theta}|^3\zeta, p_1\right) - \kappa_a\left(4|\widehat{\theta}|^3\zeta, p_2\right)\right)dt + (q,\zeta(0)) =$$
$$\int_0^T \left((\alpha A\zeta + \kappa_a\zeta, p_2) - b\kappa_a\left(\zeta,p_1\right)\right)dt = 0, \int_0^T \left(\lambda(\widehat{u},v)_\Gamma - (Bv,p_2)\right)dt = 0.$$

Таким образом, из полученных условий получаем следующий результат.

Теорема 16. *Пусть выполнены условия (i), (ii). Если* $\{\widehat{\theta},\widehat{\varphi},\widehat{u}\}$ *— решение задачи* (OC)*, то существует единственная пара* $\{p_1,p_2\} \in W \times W$ *такая, что*

$$-p_1' + aAp_1 + 4|\widehat{\theta}|^3\kappa_a\left(bp_1 - p_2\right) = B\left(\theta_b - \widehat{\theta}\right), p_1(T) = 0, \\ \alpha Ap_2 + \kappa_a\left(p_2 - bp_1\right) = 0 \tag{2.50}$$

и $\lambda\widehat{u} = p_2|_\Sigma$.

2.3.5 Аппроксимация задачи с граничными условиями типа Коши

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений комплексного теплообмена, в которой отсутствуют граничные условия на интенсивность излучения:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a\left([\theta]^4 - \varphi\right) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - [\theta]^4\right) = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{2.51}$$

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b \text{ на } \Sigma, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{2.52}$$

Существование и единственность функций $\theta \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right), \varphi, \Delta\varphi \in L^2(Q)$, удовлетворяющие (2.51),(2.52) для достаточно гладких θ_b, q_b, доказаны в [104]. Покажем, что решения задачи (OC) для $\lambda \to +0$ аппроксимируют решение задачи (2.51),(2.52)

Теорема 17. *Пусть выполняются условия (i), (ii) и существует решение* $\theta, \varphi \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right)$ *задачи (16), (17). Если* $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ *— решение задачи* (OC) *при* $\lambda > 0$*, то как* $\lambda \to +0$

$$\theta_\lambda \to \theta \text{ слабо в } L^2(0,T;V), \text{ сильно в } L^2(Q),$$
$$\varphi_\lambda \to \varphi \text{ слабо в } L^2(0,T;V).$$

Доказательство. Пусть $\theta, \varphi \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right)$ — решение задачи (2.51),(2.52), $u = \alpha\left(\partial_n\varphi + \varphi\right) \in U$. Тогда

$$\theta' + aA\theta + b\kappa_a\left([\theta]^4 - \varphi\right) = Br, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a\left(\varphi - [\theta]^4\right) = Bu,$$

где $r := a\left(\theta_b + q_b\right)$. Следовательно, принимая во внимание, что $\theta|_\Gamma = \theta_b$,

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2}\|\theta_\lambda - \theta_b\|^2_\Sigma + \frac{\lambda}{2}\|u_\lambda\|^2_\Sigma \leqslant J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_\Sigma.$$

Таким образом

$$\|u_\lambda\|^2_\Sigma \leqslant C, \quad \|\theta_\lambda - \theta_b\|^2_\Sigma \to 0, \lambda \to +0.$$

Здесь и далее $C > 0$ не зависит от λ. Ограниченность последовательности u_λ в пространстве U влечет по лемме 1 оценки

$$\|\theta_\lambda\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C, \quad \|\theta_\lambda\|_{L^\infty(0,T;L^5(\Omega))} \leqslant C, \quad \|\theta'_\lambda\|_{L^2(0,T;V')} \leqslant C,$$
$$\int_0^T \int_\Omega |\theta_\lambda|^8 \, dxdt \leqslant C, \quad \|\varphi_\lambda\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C.$$

Следовательно, можно выбрать последовательность $\lambda \to +0$ такую, что

$$u_\lambda \to u_* \text{ слабо в } U$$
$$\theta_\lambda \to \theta_* \text{ слабо в } L^2(0,T;V) \text{ сильно в } L^2(Q),$$
$$\varphi_\lambda \to \varphi_* \text{ слабо в } L^2(0,T;V).$$

Полученные результаты о сходимости позволяют, как и в теореме 1, перейти к пределу при $\lambda \to +0$ в уравнениях для $\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda$, а затем

$$\theta'_* + aA\theta_* + b\kappa_a\left([\theta_*]^4 - \varphi_*\right) = Br, \quad \theta_*(0) = \theta_0, \quad \alpha A\varphi_* + \kappa_a\left(\varphi_* - [\theta_*]^4\right) = Bu_*. \tag{2.53}$$

Где $\theta_*|_\Gamma = \theta_b$. Из первого уравнения в (2.53), учитывая, что $r = a(\theta_b + q_b)$, получаем

$$\frac{\partial\theta_*}{\partial t} - a\Delta\theta_* + b\kappa_a\left([\theta_*]^4 - \varphi_*\right) = 0 \text{ почти всюду в } Q, \quad \theta_* = \theta_b, quad\partial_n\theta = q_b \text{ почти вс}$$

Из второго уравнения в (2.53) следует, что $-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - [\theta]^4\right) = 0$ почти всюду в Q. Таким образом, пара θ_*, φ_* является решением задачи (2.51), (2.52). Поскольку решение этой задачи единственно [104], то $\theta_* = \theta, \varphi_* = \varphi$. $\square$

2.4 Задача сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы

2.4.1 Постановка обратной задачи

Рассмотрим следующую систему полулинейных эллиптических уравнений, которая моделирует радиационный и диффузионный (сложный) теплообмен в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ [47]-[77].

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, x \in \Omega. \tag{2.54}$$

Через θ – температура, φ – усредненная по всем направлениям интенсивность теплового излучения. Положительные параметры a, b, κ_a и α, описывающие свойства среды, являются заданными [77].

Пусть граница области состоит из двух участков, $\Gamma := \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, так что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$. На всей границе Γ задается тепловой поток q_b,

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad x \in \Gamma. \tag{2.55}$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию γ, описывающую отражающие свойства границы [79]. В случае, если эта функция неизвестна на части границы Γ_2, краевое условие для интенсивности излучения на Γ_2 не ставится, а в качестве условия переопределения на Γ_1, в дополнение к условию на φ, задается температурное поле θ_b,

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \ \theta = \theta_b \quad x \in \Gamma_1. \tag{2.56}$$

Здесь через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$.

В данной работе предлагается оптимизационный метод решения задачи (2.54)-(2.56), который заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления для эквивалентной системы эллиптических уравнений. Для постановки задачи управления введем новую неизвестную функцию $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$. Складывая первое уравнение в (2.54) со вторым, умноженным на b, заключаем, что ψ – гармоническая функция. Исключая φ из первого уравнения в (2.54) и используя краевые условия (2.55),(2.56), получаем краевую задачу

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \ x \in \Omega, \tag{2.57}$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \;\text{ на } \Gamma, \;\; \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \; \theta = \theta_b \text{ на } \Gamma_1. \tag{2.58}$$

Здесь $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$, $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$.

Сформулируем задачу оптимального управления, которая аппроксимирует задачу (2.57),(2.58). Задача состоит в отыскании тройки $\{\theta_\lambda,\psi_\lambda,u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta,u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_1}(\theta-\theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma \to \inf,$$
$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \; x\in\Omega,$$
$$a\partial_n\theta + s\theta = q_b + s\theta_b, \; \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \text{ на } \Gamma_1, \; a\partial_n\theta = q_b, \, \alpha\partial_n\psi = u \text{ на } \Gamma_2. \tag{2.59}$$

Здесь $\lambda, s > 0$ – регуляризирующие параметры.

Нелинейные модели сложного теплообмена в рамках P_1 приближения для уравнения переноса теплового излучения достаточно полно изучены. В работах [47]-[**Mesenev22**] представлены постановки и анализ различных краевых, обратных и экстремальных задач для таких моделей. Интересные результаты анализа краевых задач сложного теплообмена, без использования P_1 приближения, получены в [108]-[109].

2.4.2 Разрешимость задачи оптимального управления

Рассмотрим пространства $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$, V' – пространство, сопряженное с V. Пространство H отождествляем с пространством H' так, что $V \subset H = H' \subset V'$. Через U обозначаем пространство управлений $L^2(\Gamma_2)$. Стандартную норму в H обозначаем $\|\cdot\|$, (f,v) – значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $f \in H$.

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

(i) $\quad a,b,\alpha,\kappa_a,\lambda, s = Const > 0$,

(ii) $\quad 0 < \gamma_0 \leqslant \gamma \in L^\infty(\Gamma_1), \theta_b, r \in L^2(\Gamma_1), \;\; q_b \in L^2(\Gamma)$.

Определим операторы $A_{1,2}\colon V \to V'$, $B_1\colon L^2(\Gamma_1) \to V'$, $B_2\colon U \to V'$ используя равенства, справедливые для любых $y,z \in V$, $f,v \in L^2(\Gamma_1)$, $h,w \in U$:

$$(A_1 y,z) = a(\nabla y, \nabla z) + s\int\limits_{\Gamma_1} yz d\Gamma, \ \ (A_2 y,z) = \alpha(\nabla y, \nabla z) + \int\limits_{\Gamma_1} \gamma yz d\Gamma,$$

$$(B_1 f, v) = \int\limits_{\Gamma_1} fv d\Gamma, \ (B_2 h, w) = \int\limits_{\Gamma_2} hw d\Gamma.$$

Заметим, что билинейная форма $(A_1 y,z)$ определяет скалярное произведение в пространстве V и норма $\|z\|_V = \sqrt{(A_1 z,z)}$ эквивалентна стандартной норме V. Кроме того, определены непрерывные обратные операторы $A_{1,2}^{-1} : V' \mapsto V$. Для $y \in V$, $f \in L^2(\Gamma_1)$, $h \in V'$ справедливы неравенства

$$\|y\| \leqslant K_0 \|y\|_V, \ \|B_1 f\|_{V'} \leqslant K_1 \|w\|_{L^2(\Gamma_1)}, \ \|B_2 h\|_{V'} \leqslant K_2 \|h\|_U. \tag{2.60}$$

Здесь постоянные $K_j > 0$ зависят только от области Ω.

Используя введенные операторы, слабую формулировку краевой задачи, на решениях которой минимизируется функционал (2.59), нетрудно записать в виде

$$A_1\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi + f_1, \quad A_2\psi = f_2 + B_2 u, \tag{2.61}$$

где $f_1 = B_1(q_b + s\theta_b) + B_2 q_b$, $f_2 = B_1 r$.

Для формализации задачи оптимального управления определим оператор ограничений $F(\theta, \psi, u) : V \times V \times U \to V' \times V'$,

$$F(\theta, \psi, u) = \{A_1\theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi - f_1, A_2\psi - f_2 - B_2 u, \}.$$

Задача (P_λ)**.** Найти тройку $\{\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\|\theta - \theta_b\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_U \to \inf, \ F(\theta, \psi, u) = 0. \tag{2.62}$$

Лемма 43. *Пусть выполняются условия (i),(ii), $u \in U$. Тогда существует единственное решение системы* (2.61) *и при этом*

$$\begin{gathered} \|\theta\|_V \leqslant \frac{K_0^2 \kappa_a}{\alpha}\|\psi\|_V + \|f_1\|_{V'}, \\ \|\psi\|_V \leqslant \|A_2^{-1}\| \left(\|f_2\|_{V'} + K_2\|u\|_U\right). \end{gathered} \tag{2.63}$$

Доказательство. Из второго уравнения в (2.61) следует, что $\psi = A_2^{-1}(f_2 + B_2 u)$ и поэтому

$$\|\psi\|_V \leqslant \|A_2^{-1}\| \left(\|f_2\|_{V'} + K_2\|u\|_U\right).$$

Однозначная разрешимость первого уравнения (2.61) с монотонной нелинейностью хорошо известна (см. например [105]). Умножим скалярно это уравнение на на θ, отбросим неотрицательное слагаемое $(g(\theta),\theta)$ и оценим правую часть, используя неравенство Коши-Буняковского. Тогда, с учетом неравенств (2.60), получаем

$$\|\theta\|_V^2 \leqslant \frac{\kappa_a}{\alpha}\|\psi\|\|\theta\| + \|f_1\|_{V'}\|\theta\|_V \leqslant \frac{K_0^2\kappa_a}{\alpha}\|\psi\|_V\|\theta\|_V + \|f_1\|_{V'}\|\theta\|_V.$$

В результате получаем оценки (2.63). □

Теорема 18. *При выполнении условий (i),(ii) существует решение задачи* (P_λ).

Доказательство. Обозначим через j_λ точную нижнюю грань целевого функционала J_λ на множестве $u \in U$, $F(\theta, \psi, u) = 0$ и рассмотрим последовательности такие, что $u_m \in U,\ \theta_m \in V,\ \psi_m \in V,\ J_\lambda(\theta_m, u_m) \to j_\lambda$,

$$A_1\theta_m + g(\theta_m) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi_m + f_1, \quad A_2\psi_m = f_2 + B_2 u_m. \tag{2.64}$$

Из ограниченности последовательности u_m в пространстве U следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_m\|_V \leqslant C,\ \|\psi_m\|_V \leqslant C,\ \|\theta_m\|_{L^6(\Omega)} \leqslant C.$$

Здесь через $C > 0$ обозначена наибольшая из постоянных, ограничивающих соответствующие нормы и не зависящих от m. Переходя при необходимости к подпоследовательностям, заключаем, что существует тройка $\{\hat u, \hat\theta, \hat\psi\} \in U \times V \times V$,

$$u_m \to \hat u \text{ слабо в } U,\ \ \theta_m, \psi_m \to \hat\theta, \hat\psi \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^4(\Omega). \tag{2.65}$$

Заметим также, что $\forall v \in V$ имеем

$$|([\theta_m]^4 - [\hat\theta]^4, v)| \leqslant 2\|\theta_m - \hat\theta\|_{L^4(\Omega)}\|v\|_{L^4(\Omega)} \left(\|\theta_m\|^3_{L_6(\Omega)} + \|\hat\theta\|^3_{L_6(\Omega)}\right). \tag{2.66}$$

Результаты о сходимости (2.65) и неравенство (2.66) позволяют перейти к пределу в (2.64). В результате получим

$$A_1\hat\theta + g(\hat\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\hat\psi + f_1, \quad A_2\hat\psi = f_2 + B_2\hat u. \tag{2.67}$$

Поскольку целевой функционал слабо полунепрерывен снизу, то $j_\lambda \leqslant J_\lambda(\hat{\theta}, \hat{u}) \leqslant \underline{\lim}\, J_\lambda(\theta_m, u_m) = j_\lambda$ и поэтому тройка $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$ есть решение задачи (P_λ). $\square$

2.4.3 Условия оптимальности первого порядка

Воспользуемся принципом Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [106],[101]. Невырожденность условий оптимальности гарантируется условием, что образ производной оператора ограничений $F(y, u)$, где $y = \{\theta, \psi\} \in V \times V$, совпадает с пространством $V' \times V'$. Последнее означает, что линейная система

$$A_1\xi + g'(\theta)\xi - \frac{\kappa_a}{\alpha}\eta = q_1, \quad A_2\eta = q_2$$

разрешима для всех $\theta \in V$, $q_1,q_2 \in V'$. Здесь $g'(\theta) = 4b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{\kappa_a}{\alpha}$. Из второго уравнения получаем $\eta = A_2^{-1}q_2$. Разрешимость первого уравнения при известном $\eta \in V$ очевидным образом следует из леммы Лакса–Мильграма. Отметим, что справедливость остальных условий принципа Лагранжа также очевидна.

Функция Лагранжа задачи (P_λ) имеет вид

$$L(\theta, \psi, u, p_1, p_2) = J_\lambda(\theta, u) + \Big(A_1\theta + g(\theta) - \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi - f_1, p_1\Big) + (A_2\psi - f_2 - B_2u, p_2),$$

где $p = \{p_1,p_2\} \in V \times V$ – сопряженное состояние.

Пусть $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ – решение задачи (P_λ). Вычислив производные Гато функции Лагранжа по θ, ψ и u, получаем в силу принципа Лагранжа [106, Теорема 1.5] следующие равенства $\forall v \in V, w \in U$

$$(B_1(\hat{\theta} - \theta_b), v) + (A_1v + g'(\hat{\theta})v, p_1) = 0, \; -\frac{\kappa_a}{\alpha}(v,p_1) + (A_2v,p_2), = 0, \qquad (2.68)$$

$$\lambda(B_2\hat{u},w) - (B_2w, p_2) = 0. \qquad (2.69)$$

Из условий (2.68),(2.69) вытекают уравнения для сопряженного состояния, которые вместе с уравнениями (2.67) для оптимальной тройки дают систему оптимальности задачи (P_λ).

Теорема 19. *Пусть выполняются условия (i),(ii). Если $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{u}\}$ – решение задачи (P_λ), то существует единственная пара $\{p_1, p_2\} \in V \times V$ такая, что*

$$A_1p_1 + g'(\hat{\theta})p_1 = -B_1(\hat{\theta} - \theta_b), \; A_2p_2 = \frac{\kappa_a}{\alpha}p_1, \; \lambda\hat{u} = p_2|_{\Gamma_2}. \qquad (2.70)$$

Замечание. Если рассмотреть приведенный целевой функционал $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$, где $\theta(u)$ компонента решения задачи (2.61), соответствующая управлению $u \in U$, то градиент функционала $\tilde{J}_\lambda(u)$ равен $\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2$. Здесь p_2 – компонента решения сопряженной системы (2.70), где $\hat{\theta} := \theta(u)$.

2.4.4 Аппроксимация решения обратной задачи

Покажем, что если существует пара $\{\theta,\varphi\} \in V \times V$ – решение обратной задачи (2.54)-(2.56) и при этом $q = a\partial_n\varphi|_{\Gamma_2} \in L^2(\Gamma_2)$, то решения задачи (P_λ) при $\lambda \to +0$ аппроксимируют решение задачи (2.54)-(2.56).

Предварительно заметим, что указанная пара для всех $v \in V$ удовлетворяет равенствам

$$a(\nabla\theta, \nabla v) + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi, v) = \int\limits_{\Gamma} q_b v d\Gamma, \tag{2.71}$$

$$\alpha(\nabla\varphi,\nabla v) + \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\varphi v d\Gamma + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3, v) = \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_2} q v d\Gamma \tag{2.72}$$

и при этом $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$.

Теорема 20. *Пусть выполняются условия (i), (ii) и существует решение задачи* (2.54)-(2.56)*, удовлетворяющее равенствам* (2.71), (2.72)*, Если* $\{\theta_\lambda,\psi_\lambda,u_\lambda\}$ *– решение задачи* (P_λ) *для* $\lambda > 0$*, то существует последовательность* $\lambda \to +0$ *такая, что*

$$\theta_\lambda \to \theta_*, \ \ \frac{1}{\alpha b}(\psi_\lambda - a\theta_\lambda) \to \varphi_* \ \ \textit{слабо в } V, \ \ \textit{сильно в } H,$$

где θ_*,φ_* *– решение задачи* (2.54)-(2.56).

Доказательство. Умножим равенство (2.71) на α, (2.72) на αb и сложим равенства. Тогда, полагая $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$, $u = \alpha b q + \alpha q_b|_{\Gamma_2}$, получаем

$$\alpha(\nabla\psi,\nabla v) + \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\psi v d\Gamma = \int\limits_{\Gamma_1} r v d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_2} u v d\Gamma.$$

Здесь $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$. Поэтому $A_2\psi = f_2 + B_2 u$.

Из (2.71), с учетом условия $\theta|_{\Gamma_1} = \theta_b$ выводим равенство $A_1\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi + f_1$. Таким образом, тройка $\{\theta, \psi, u\} \in V \times V \times U$ является допустимой для задачи (P_λ) и следовательно

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2}\|\theta_\lambda - \theta_b\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{\lambda}{2}\|u_\lambda\|^2_U \leqslant J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_U.$$

Тогда

$$\|u_\lambda\|^2_U \leqslant \|u\|^2_U,\ \|\theta_\lambda - \theta_b\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \to 0, \lambda \to +0.$$

Из ограниченности последовательности u_λ в пространстве U следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_\lambda\|_V \leqslant C,\ \ \|\psi_\lambda\|_V \leqslant C,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от λ. Поэтому можно выбрать последовательность $\lambda \to +0$ такую, что

$$\begin{aligned} u_\lambda \to u_* \ \ \textit{слабо в } U,\ \ \theta_\lambda, \psi_\lambda \to \theta_*, \psi_* \ \ \textit{слабо в } V,\ \ \textit{сильно в } H, L^4(\Omega), \\ \theta_\lambda|_{\Gamma_1} \to \theta_*|_{\Gamma_1} \ \ \textit{сильно в } \ L^2(\Gamma_1). \end{aligned} \tag{2.73}$$

Результаты (2.73) позволяют перейти к пределу при $\lambda \to +0$ в уравнениях для $\theta_\lambda, \psi_\lambda, u_\lambda$ и тогда

$$A_1\theta_* + g(\theta_*) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi_* + f_1, \quad A_2\psi_* = f_2 + B_2 u_*, \quad \theta_*|_{\Gamma_1} = \theta_b. \tag{2.74}$$

Полагая $\varphi_* = \frac{1}{\alpha b}(\psi_* - a\theta_*$, заключаем, что пара θ_*, φ_* – решение задачи (2.54)-(2.56). $\square$

Глава 3. Анализ задач оптимального управления для квазистационарных уравнений сложного теплообмена

3.1 Корректность начально-краевой задачи для квазилинейной модели

3.1.1 Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу в ограниченной трехмерной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\sigma\partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) + b\left(\theta^3|\theta| - \varphi\right) = f, \tag{3.1}$$

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta\left(\varphi - \theta^3|\theta|\right) = g, x \in \Omega, 0 < t < T \tag{3.2}$$

$$k(\theta)\partial_n\theta + p\left(\theta - \theta_b\right)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right)|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \tag{3.3}$$

Здесь θ — нормированная температура, φ — нормированная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Нормирующими множителями для получения из θ и φ абсолютной температуры и средней интенсивности излучения являются $\mathcal{M}_\theta$ и $\mathcal{M}_\varphi$ соответственно.

Положительные параметры $b, \alpha, \beta, \gamma, p$ описывают радиационные и теплофизические свойства среды [110], $\sigma(x,t)$ - произведение удельной теплоемкости на объем плотность, $k(\theta)$ — коэффициент теплопроводности, f и g описывают вклад источников тепла и излучения соответственно. Символом ∂_n обозначена производная по направлению внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе Γ. Предположим, что Ω — липшицева ограниченная область, $\Gamma = \partial\Omega, Q = \Omega \times (0,T), \Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

Обозначим через $L^p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ пространство Лебега, через H^1 пространство Соболева W_2^1 и через $L^p(0,T;X)$ пространство Лебега функций из L^p, определенных на $(0,T)$, со значениями в банаховом пространстве X. Пусть $H = L^2(\Omega), V = H^1(\Omega)$, а пространство V' двойственно к V. Тогда мы отождествим H с его двойственным пространством H' таким, что $V \subset H = H' \subset V'$, и обозначим через $\|\cdot\|$ норму в H, а через (h,v) значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $h \in H$.

Будем далее предполагать, что исходные данные удовлетворяют следующим условиям:

(i) $\alpha, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega), b = r\beta, r = \mathrm{Const} > 0; \alpha \geqslant \alpha_0, \beta \geqslant \beta_0, \sigma \geqslant \sigma_0, \alpha_0, \beta_0, \sigma_0 = \mathrm{Const} > 0$.

(ii) $0 < k_0 \leqslant k(s) \leqslant k_1, |k'(s)| \leqslant k_2, s \in \mathbb{R}, \quad k_j = \mathrm{Const}$.

(iii) $0 \leqslant \theta_b \in L^\infty(\Sigma), 0 \leqslant \theta_{in} \in L^\infty(\Omega); \gamma_0 \leqslant \gamma \in L^\infty(\Gamma), p_0 \leqslant p \in L^\infty(\Gamma), \gamma_0, p_0 = \mathrm{Const} > 0$.

(iv) $0 \leqslant f, g \in L^\infty(Q)$.

Пусть

$$W = \left\{y \in L^2(0,T;V) : \sigma y' = \sigma dy/dt \in L^2\left(0,T,V'\right)\right\}$$

Определим операторы $A_1 : V \to V_0'$ и $A_2 : V \to V'$ такие, что для всех $\theta, \varphi v$ справедливы следующие равенства:

$$(A_1(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma p\theta v d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_\Gamma p\theta v d\Gamma,$$
$$(A_2\varphi, v) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v d\Gamma,$$

где

$$h(s) = \int_0^s k(r)dr$$

Определение 6. *Пара* $\theta \in W, \varphi \in L^2(0,T;V)$ *называется слабым решением задачи* (3.1)–(3.3), *если*

$$\sigma\theta' + A_1(\theta) + b\left([\theta]^4 - \varphi\right) = f_b + f \quad \text{a. e. on } (0,T), \quad \theta(0) = \theta_{in}, \tag{3.4}$$
$$A_2\varphi + \beta\left(\varphi - [\theta]^4\right) = g_b + g \quad \text{a. e. on } (0,T). \tag{3.5}$$

Здесь, $f_b, g_b \in L^2\left(0,T;V'\right)$ и

$$(f_b, v) = \int_\Gamma p\theta_b v d\Gamma, \quad (g_b, v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 v d\Gamma \quad \forall v \in V$$

Замечание 1. *Так как* $\theta \in W$, *то* $\theta \in C([0,T];V)$. *Следовательно, начальное условие имеет смысл.*

3.1.2 Итерационный метод

Определим операторы $F_1 : L^\infty(\Omega) \to V$ и $F_2 : L^\infty(Q) \times L^2(0,T;V) \to W$ следующим образом.

Пусть $\varphi = F_1(\theta)$, если

$$A_2\varphi + \beta\left(\varphi - [\theta]^4\right) = g_b + g \tag{3.6}$$

и $\theta = F_2(\zeta, \varphi)$ если

$$\sigma\theta' + A(\zeta,\theta) + b\left([\theta]^4 - \varphi\right) = f_b + f \quad \text{a. e. on } (0,T), \quad \theta(0) = \theta_{in}. \tag{3.7}$$

Здесь

$$(A(\zeta,\theta), v) = (k(\zeta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma p\theta v d\Gamma \quad \forall v \in V$$

Пусть $w(t) = M_0 + M_1 t, t \in [0,T]$, где

$$M_0 = \max\left\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_{in}\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}$$
$$M_1 = \sigma_0^{-1}\left(\|f\|_{L^\infty(Q)} + \max bM_2\right), \quad M_2 = \beta_0^{-1}\|g\|_{L^\infty(Q)}.$$

Лемма 44. *Пусть выполнены условия (i) - (iv),* $0 \leqslant \theta \leqslant w(t), \varphi = F_1(\theta)$. *В таком случае*

$$0 \leqslant \varphi \leqslant w^4(t) + M_2 \tag{3.8}$$

Доказательство. Умножая (3.6) в смысле внутреннего произведения H на $\psi = \max\left\{\varphi - M_2 - w^4, 0\right\} \in L^2(0,T;V)$, получаем

$$(A_2\varphi - g_b, \psi) + \left(\beta\left(\varphi - M_2 - [\theta]^4\right), \psi\right) = (g - \beta M_2, \psi) \leqslant 0.$$

Заметим, что с учетом ограничений на θ выполняются следующие неравенства:

$$(A_2\varphi - g_b, \psi) = (\alpha\nabla\psi, \nabla\psi) + \int_\Gamma \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right) d\Gamma \geqslant (\alpha\nabla\psi, \nabla\psi)$$
$$\left(\beta\left(\varphi - M_2 - [\theta]^4\right), \psi\right) = (\beta\psi, \psi) + \left(\beta\left(w^4 - [\theta]^4\right), \psi\right) \geqslant (\beta\psi, \psi).$$

Таким образом, $\psi = 0$ и $\varphi \leqslant w^4 + M_2$.

Далее, умножая (3.6) в смысле скалярного произведения H на $\xi = \min\{\varphi, 0\} \in L^2(0,T;V)$ аналогично получаем, что $\xi = 0$. Таким образом, $\varphi \geqslant 0$. □

Лемма 45. *Пусть выполняются условия (i)-(iv),* $0 \leqslant \varphi \leqslant w^4(t) + M_2, \theta = F_2(\zeta, \varphi), \zeta \in L^\infty(Q)$. *Тогда* $0 \leqslant \theta \leqslant w(t)$.

Доказательство. Пусть $\widehat{\theta} = \theta - w$. Перепишем уравнение (3.7) следующим образом

$$\sigma\widehat{\theta}' + A(\zeta, \theta) - f_b + b\left([\widehat{\theta} + w]^4 - (\varphi - M_2)\right) = f - \sigma M_1 + bM_2 \leqslant 0. \qquad (3.9)$$

Умножая (3.9) в смысле скалярного произведения H на $\eta = \max\{\widehat{\theta}, 0\} \in W$. Заметим, что значение правой части неположительно, а также

$$\left(\sigma\widehat{\theta}', \eta\right) = (\sigma\eta', \eta) = \frac{d}{2dt}(\sigma\eta, \eta)$$
$$(A(\zeta, \theta) - f_b, \eta) = (k(\zeta)\nabla\eta, \nabla\eta) + \int_\Gamma p\left(\widehat{\theta} + w - \theta_b\right)\eta d\Gamma \geqslant 0$$
$$\left([\widehat{\theta} + w]^4 - w^4\right)\max\{\widehat{\theta}, 0\} \geqslant 0, \quad \left(w^4 + M_2 - \varphi\right)\eta \geqslant 0.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(\sigma\eta, \eta) \leqslant 0, \quad \eta|_{t=0} = 0$$

Таким образом, $\eta = 0, \widehat{\theta} \leqslant 0, \theta \leqslant w$. Аналогично, умножая (9) в смысле скалярного произведения H на $\eta = \min\{\theta, 0\} \in W$, получаем, что $\eta = 0, \quad \theta \geqslant 0$.

Пусть $\theta_0 = \theta_{in}, \quad \varphi_0 = F_1(\theta_0)$. Определим рекурсивно последовательности $\theta_m \in W, \varphi_m \in L^2(0,T;V)$ таким образом, что

$$\theta_m = F_2(\theta_{m-1}, \varphi_{m-1}), \quad \varphi_m = F_1(\theta_m), \quad m = 1,2,\ldots \qquad (3.10)$$

Из лемм 1 и 2 следуют оценки

$$0 \leqslant \varphi_m \leqslant w^4(t) + M_2, \quad 0 \leqslant \theta_m \leqslant w(t), \quad m = 1,2,\ldots \qquad (3.11)$$

Лемма доказана. □

Лемма 46. *Пусть выполнены условия (i) — (iv). Тогда существует константа $C > 0$, не зависящая от m, такая, что*

$$\|\varphi_m\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C, \tag{3.12}$$

$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s+\delta) - \theta_m(s)\|^2 \, ds \leqslant C\delta. \tag{3.13}$$

Доказательство. Из определения последовательностей φ_m, θ_m следуют равенства

$$A_2\varphi_m + \beta\left(\varphi_m - [\theta_m]^4\right) = g_b + g. \tag{3.14}$$

$$\sigma\theta_m' + A\left(\theta_{m-1}, \theta_m\right) + b\left([\theta_m]^4 - \varphi_{m-1}\right) = f_b + f \quad \text{a. e. on } (0,T), \quad \theta_m(0) = \theta_{in}. \tag{3.15}$$

Оценки (3.12) выводятся стандартным образом из уравнений (3.14) и (3.15) и с учетом (3.11), т.е. ограниченности последовательностей в $L^\infty(Q)$.

Получим оценку, гарантирующую компактность последовательности θ_m в $L^2(Q)$. Перепишем (3.15) как

$$\sigma\theta_m' = \chi_m \text{ a.e. on } (0,T), \quad \theta_m(0) = \theta_{in} \tag{3.16}$$

где

$$-\chi_m = A\left(\theta_{m-1}, \theta_m\right) + b\left([\theta_m]^4 - \varphi_{m-1}\right) - f_b - f.$$

Отметим, что с учетом полученных оценок последовательность χ_m ограничена в $L^2\left(0,T;V'\right)$. Умножим (3.16) в смысле скалярного произведения произведения H на $\theta_m(t) - \theta_m(s)$ и проинтегрируем по t на интервале $(s, s+\delta)$ и над s на $(0, T-\delta)$, предполагая, что $\delta > 0$ достаточно мало. В результате получим

$$\frac{1}{2}\int_0^{T-\delta} \left\|\sqrt{\sigma}\left(\theta_m(s+\delta) - \theta_m(s)\right)\right\|^2 ds = \int_0^{T-\delta}\int_s^{s+\delta} c_m(t,s)\,dt\,ds$$

где

$$c_m(t,s) = (\chi_m(t), \theta_m(t) - \theta_m(s)) \leqslant \|\chi_m(t)\|_{V'}^2 + \frac{1}{2}\|\theta_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\theta_m(s)\|_V^2.$$

Для оценки интегралов от слагаемых, зависящих от t, достаточно изменить порядок интегрирования. Используя ограниченность последовательностей

θ_m в $L^2(0,T;V)$ и χ_m в $L^2(0,T;V')$, получаем оценку равностепенной непрерывности (13).

Полученные оценки (3.12),(3.13) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что существуют функции θ_*, φ_* такие, что

$$\begin{aligned} \theta_m \to \widehat{\theta} \text{ слабо в } L^2(0,T;V), \text{ сильно в } L^2(0,T;H), \\ \varphi_m \to \widehat{\varphi} \text{ слабо в } L^2(0,T;V). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Сходимости (3.17) достаточно, для перехода к пределу при $m \to \infty$ в равенствах (3.14), (3.15) и доказательства, что предельные функции $\widehat{\theta}, \widehat{\varphi} \in L^2(0,T;V)$ таковы, что $\sigma\widehat{\theta}' \in L^2(0,T;V')$ и для них выполняются равенства (3.4) (3.5). □

Теорема 21. *Пусть выполнены условия (i)-(iv). Тогда задача* (3.1) (3.3) *имеет хотя бы одно решение.*

3.1.3 Теорема единственности и сходимость итерационного метода

Покажем, что в классе функций с ограниченным градиентом температуры решение единственно. Это позволяет доказать сходимость итерационной процедуры.

Теорема 22. *Пусть выполнены условия (i)–(iv). Если θ_*, φ_* — решение задачи* (3.1)–(3.3) *такое, что $\theta_*, \nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$, то других ограниченных решений этой задачи нет.*

Доказательство. Пусть θ_1, φ_1 – другое решение задачи (3.1)–(3.3), $\theta = \theta_1 - \theta_*, \varphi = \varphi_1 - \varphi_*$. В таком случае

$$\sigma\theta' + A_1(\theta_1) - A_1(\theta_*) + b\left([\theta_1]^4 - [\theta_*]^4 - \varphi\right) = 0 \quad \text{a. e. on } (0,T), \quad \theta(0) = 0. \tag{3.18}$$

$$A_2\varphi + \beta\left(\varphi - \left([\theta_1]^4 - [\theta_*]^4\right)\right) = 0 \quad \text{a. e. on } (0,T). \tag{3.19}$$

Умножим (3.18) в смысле скалярного произведения H на θ и проинтегрируем по времени. Как результат

$$\frac{1}{2}\|\sqrt{\sigma}\theta\|^2 + \int_0^t \left(\left(k\left(\theta_1\right)\nabla\theta, \nabla\theta\right) + \int_\Gamma p\theta^2(s) d\Gamma \right) ds =$$
$$-\int_0^t \left(b\left([\theta_1]^4 - [\theta_*]^4 - \varphi \right), \theta \right) ds - \int_0^t \left(\left(k\left(\theta_1\right) - k\left(\theta_*\right)\right) \nabla\theta_*, \nabla\theta \right) ds.$$

Пусть $|\theta_1| \leqslant M, |\theta_*| \leqslant M$. С учетом ограничения на функцию k получаем неравенство

$$\frac{\sigma_0}{2}\|\theta\|^2 + k_0 \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 ds \leqslant$$
$$\int_0^t \left(4M \max b\|\theta\|^2 + \|\varphi\|\|\theta\|\right) ds + k_2 \left\|\nabla\theta_*\right\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|\theta\|\|\nabla\theta\| ds. \tag{3.20}$$

Принимая во внимание, что $\|\theta\|\|\nabla\theta\| \leqslant \varepsilon\|\nabla\theta\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\theta\|^2$ и предполагая

$$\varepsilon = \frac{k_0}{k_2 \left\|\nabla\theta_*\right\|_{L^\infty(Q)}}$$

из (3.20) получаем

$$\frac{\sigma_0}{2}\|\theta\|^2 \leqslant \int_0^t \left(4M \max b\|\theta\|^2 + \|\varphi\|\|\theta\|\right) ds + \frac{1}{4\varepsilon} k_2 \left\|\nabla\theta_*\right\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|\theta\|^2 ds. \tag{3.21}$$

Умножьте (19) на φ в смысле скалярного произведения H. Как результат

$$(A_2\varphi, \varphi) + (\beta\varphi, \varphi) = \left(\beta\left([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4\right), \varphi\right) \leqslant 4 \max \beta M^3 \|\theta\|\|\varphi\|.$$

Следовательно, $\|\varphi\| \leqslant 4\beta_0^{-1} \max \beta M^3 \|\theta\|$. Тогда из (21) и неравенства Гронуолла следует, что $\theta = 0, \theta_1$ совпадает с θ_* и, соответственно, φ_1 совпадает с φ_*. □

Теорема 23. *Пусть выполнены условия (i)-(iv). Если θ_*, φ_* — решение задачи* (3.1)–(3.3) *такое, что $\theta_*, \nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$, то для последовательностей (10) имеют место следующие сходимости:*

$$\theta_m \to \theta_* \ in \ L^2(0,T;V), \quad \varphi_m \to \varphi_* \ in \ L^2(0,T;V).$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\theta_m \to \theta_*$ в $L^2(0,T;H)$. Предполагая противное, заключаем, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\theta_{m'}$ такие, что $\|\theta_{m'} - \theta_*\|_{L^2(0,T;H)} \geqslant \varepsilon_0$. Оценки (3.12) (3.13) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что справедливы результаты сходимости (3.17), где $\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}$ также является решением задачи (3.1)–(3.3). Следовательно, $\left\|\widehat{\theta} - \theta_*\right\|_{L^2(0,T;H)} \geqslant \varepsilon_0$, что противоречит теореме 22 о единственности решения. Из уравнений (3.14) и (3.15) с учетом (3.11), т.е. ограниченности последовательностей в $L^\infty(Q)$, а также доказанной сходимости θ_m в $L^2(0,T;H)$ следует сходимость $\theta_m \to \theta_*, \varphi_m \to \varphi_*$ в $L^2(0,;V)$. $\square$

3.2 Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления для квазилинейных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена, моделирующих процесс эндовенозной лазерной абляции в ограниченной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Проблема заключается в том, чтобы свести к минимуму функционал

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 \, dxdt \to \inf$$

на решениях начально-краевой задачи:

$$\begin{gathered} \sigma\partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) - \beta\varphi = u_1\chi \\ -\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta\varphi = u_2\chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \end{gathered} \tag{3.22}$$

$$\theta = 0|_\Gamma, \quad \alpha\partial_n\varphi + 2^{-1}\varphi\big|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{3.23}$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geqslant 0, \quad u_1 + u_2 \leqslant P, \quad \theta|_{G_2} \leqslant \theta_*$$

Здесь G_1 и G_2 подмножества Ω, θ представляет собой разницу между реальной температурой (в единицах Цельсия) и постоянной граничной температурой, φ является ли интенсивность излучения усредненной по всем направлениям, α является коэффициентом диффузии фотонов, β является коэффициентом поглощения, $k(\theta)$ является коэффициентом теплопроводности,

$\sigma(x,t)$ является произведением удельной теплоемкости и объемной плотности, u_1 описывает мощность источника, затрачиваемую на нагрев наконечника волокна, u_2 это мощность источника, расходуемая на излучение, P является максимальной мощностью лазерного источника, χ является характерной функцией той части среды, в которой волокно наконечник расположен деленным на объем волоконного наконечника. Обратите внимание, что значения параметров u_1 and u_2 определяются методом карбонизации кончика волокна. Обзор некоторых способов карбонизации приведен в [73].

Таким образом, при моделировании процедуры EVLA мы будем использовать диффузионную модель, которая учитывает кондуктивный теплообмен, а также перенос излучения и поглощение с выделением тепла. Поток пузырьков, образующихся на нагретом наконечнике оптического волокна, вносит значительный вклад в температурное поле. В [66, 67, 68], основываясь на оценке экспериментальных данных, теплопередача потоком пузырьков моделируется с использованием кусочно-постоянного коэффициента теплопроводности, который зависит от температуры следующим образом: когда температура в некоторой точке достигает 95°C, коэффициент теплопроводность увеличивается в 200 раз.

Следуя задаче оптимального управления, требуется обеспечить заданное распределение температурного поля θ_d в поддомене G_1, при этом температура в поддомене G_2 не может превышать (если это возможно) критическое значение $\theta_* = \mathrm{Const} > 0$.

3.2.1 Формализация задачи оптимального управления

Будем далее предполагать, что Ω является липшицевой ограниченной областью, $\Gamma = \partial\Omega, Q = \Omega\times(0,T), \Sigma = \Gamma\times(0,T)$. Обозначим через $L^p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, пространство Лебега, через H^1 пространство Соболева W_2^1, через H_0^1 подпространство функций из H^1 с нулевыми граничными значениями, а через $L^p(0,T;X)$ пространство Лебега функций из L^p, определенный на $(0,T)$, со значениями в банаховом пространстве X.

Пусть $H = L^2(\Omega), V = H_0^1(\Omega)$, а пространство V' двойственно к V. Затем мы отождествляем H с его двойственным пространством H' таким, что

$V \subset H^1(\Omega) \subset H = H' \subset \left(H^1(\Omega)\right)' \subset V'$, и обозначим через $\|\cdot\|$ норму в H, а через (h, v) значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $h \in H$. Скалярный продукт в V определяется как $(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v)$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(c1) $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1, \quad |\partial\sigma/\partial t| \leqslant \sigma_2$

(c2) $k_0 \leqslant k(s) \leqslant k_1, \quad |k'(s)| \leqslant k_2, \quad s \in \mathbb{R},$

(c3) $\theta_0 \in H$

(c4) $\alpha_0 \leqslant \alpha(x) \leqslant \alpha_1, \beta_0 \leqslant \beta(x) \leqslant \beta_1, \quad x \in \Omega,$

где σ_i, k_i, α_i, и β_i положительные константы.

Определим нелинейный оператор $A : V \to V'$ и линейный оператор $B : H^1(\Omega) \to \left(H^1(\Omega)\right)'$ используя следующие равенства, справедливые для любого $\theta, v \in V, \varphi, w \in H^1(\Omega)$

$$(A(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) = (\nabla h(\theta), \nabla v)$$

$$(B\varphi, w) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla w) + (\beta\varphi, w) + 2^{-1}\int_\Gamma \varphi w d\Gamma$$

где

$$h(s) = \int_0^s k(r)dr.$$

Определение 7. *Пусть* $u_{1,2} \in L^2(0, T)$. *Пара функций* $\theta \in L^2(0, T; V), \varphi \in L^2\left(0, T; H^1(\Omega)\right)$ *тогда а является слабым решением задачи (1), (2) если* $\sigma\theta' \in L^2\left(0, T; V'\right)$ *и*

$$\sigma\theta' + A(\theta) - \beta\varphi = u_1\chi, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad B\varphi = u_2\chi \textit{ where } \theta' = d\theta/dt.$$

Из леммы Лакса-Мильграма следует, что для любой функции $g \in H$ существует единственное решение уравнения $B\varphi = g$. Более того, обратный оператор $B^{-1} : H \to H^1(\Omega)$ непрерывен. Поэтому можно исключить интенсивность излучения $\varphi = u_2 B^{-1}\chi$ и сформулировать задачу оптимального управления следующим образом.

Определение 8 (Problem (P))**.**

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 \, dxdt \to \inf$$

$$\sigma\theta' + A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta|_{G_2} \leqslant \theta_*, \quad u \in U_{ad},$$

где

$$U_{ad} = \big\{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in L^2(0,T),$$
$$u_{1,2} \geqslant 0, u_1 + u_2 \leqslant P\big\}$$

3.2.2 Предварительные результаты

Давайте рассмотрим проблему

$$\sigma\theta' + A(\theta) = f, \quad \theta(0) = \theta_0. \tag{3.24}$$

Справедлива следующая лемма [74].

Лемма 47. *Пусть выполняются условия (c1)-(c3) и* $f \in L^2(0,T;V')$. *Тогда существует решение задачи (3) такое, что* $\theta \in L^\infty(0,T;H)$ *и справедливы следующие оценки:*

$$\|\theta(t)\|^2 \leqslant \frac{K}{\sigma_0}\exp\frac{\sigma_2 t}{\sigma_0} \qquad a.e.\ on\ (0,T)$$
$$\int_0^T \|\theta(t)\|_V^2 dt \leqslant \frac{K}{k_0}\left(1 + \frac{\sigma_2 T}{\sigma_0}\exp\frac{\sigma_2 T}{\sigma_0}\right)$$

где $K = \sigma_1\|\theta_0\|^2 + k_0^{-1}\|f\|^2_{L^2(0,T;V')}$.

Следующий результат важен для установления непустоты множества допустимых пар управляющих состояний.

Лемма 48. *Пусть выполняются условия (c1)-(c3) и* $f = 0$, $\theta_0 \leqslant \theta_*$ *a.e. в* Ω, *и* θ *решение задачи* (3.24). *Тогда* $\theta \leqslant \theta_*$ *a.e. в* $\Omega \times (0,T)$.

Доказательство. Скалярно умножим в H первое уравнение (3) на $v = \max\{\theta - \theta_*, 0\} \in L^2(0,T;V)$ получаем

$$(\sigma v', v) + (k(\theta)\nabla v, \nabla v) = 0.$$

Отбрасывая неотрицательный второй член, приходим к оценке

$$\frac{d}{dt}(\sigma v, v) \leqslant (\sigma_t v, v) \leqslant \sigma_2\|v\|^2.$$

Учитывая, что $v|_{t=0} = 0$, проинтегрировать последнее неравенство по времени. Тогда

$$\sigma_0 \|v(t)\|^2 \leqslant (\sigma v(t), v(t)) \leqslant \sigma_2 \int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau$$

На основании леммы Гронуолла заключаем, что $v = 0$ и, следовательно, $\theta \leqslant \theta_*$ почти всюду в $\Omega \times (0,T)$. □

3.2.3 Разрешимость задачи оптимального управления

Теорема 24. *Пусть выполняются условия (c1)-(c3), и $\theta_0 \leqslant \theta_*$ a.e. в Ω. Тогда существует решение задачи* (P).

Доказательство. Согласно леммам 1 и 2 множество допустимых пар непусто. Рассмотрим минимизирующую последовательность допустимых пар $\{\theta_m, u_m\} \in L^2(0,T;V) \times U_{ad}$ такой, что $J(\theta_m) \to j = \inf J$, где

$$\sigma\theta'_m + A(\theta_m) = u_m, \quad \theta_m(0) = \theta_0, \quad \theta_m|_{G_2} \leqslant \theta_*. \tag{3.25}$$

Ограниченность в $L^2(0,T;H)$ множества допустимых управлений U_{ad} влечет по лемме 1 оценки:

$$\begin{gathered} \|\theta_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C, \\ \|h(\theta_m)\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Здесь и далее при доказательстве теоремы через C обозначаются константы, не зависящие от m. Оценки (5), используя при необходимости подпоследовательности, приводят к существованию функций $u \in U_{ad}$, $\theta \in L^2(0,T;V)$, $\chi \in L^2(0,T;V)$ такое, что

$$\begin{aligned} & u_m \to u \text{ слабо в } L^2(0,T;H), \\ & \theta_m \to \theta \text{ слабо в } L^2(0,T;V), \\ & \ ^*\text{-слабо в } L^\infty(0,T;H), \\ & h(\theta_m) \to \chi \text{ слабо в } L^2(0,T;V). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Результаты сходимости (3.27) достаточны для предельного перехода при $m \to \infty$ в системе (4) и доказательства того, что предельная функция $\theta \in L^2(0,T;V)$ такова, что $\sigma\theta' \in L^2(0,T;V')$ удовлетворяет равенству

$$(\sigma\theta', v) + (\nabla\chi, \nabla v) = (u, v) \quad \forall v \in V$$

и начальное условие верно.

Следующая оценка гарантирует компактность последовательности θ_m in $L^2(Q)$:

$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s+\delta) - \theta_m(s)\|^2 \, ds \leqslant C\delta. \tag{3.28}$$

Из неравенства (3.28), используя при необходимости подпоследовательности, получаем, что $\theta_m \to \theta$ in $L^2(Q)$. Следовательно, в силу неравенства

$$|h(\theta_m) - h(\theta)| \leqslant k_1 |\theta_m - \theta|,$$

следует, что $h(\theta_m) \to h(\theta)$ in $L^2(Q)$ и, следовательно $\chi = h(\theta)$. Кроме того, предельная функция θ удовлетворяет неравенству $\theta|_{G_2} \leqslant \theta_*$. Следовательно, допустима предельная пара $\{\theta, u\} \in L^2(0,T;V) \times U_{ad}$. Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу,

$$j \leqslant J(\theta) \leqslant \liminf J(\theta_m) = j,$$

тогда пара $\{\theta, u\}$ является решением задачи (P). $\square$

3.2.4 Задача штрафов

Чтобы численно решить задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями $\theta|_{G_2} \leqslant \theta_*$, рассмотрим следующую задачу штрафов.

Problem $(\mathbf{P}_\varepsilon)$: $J_\varepsilon(\theta) \to \inf$, где

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\theta) &= \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 \, dxdt \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F(\theta) dxdt, \\ \sigma\theta' &+ A(\theta) = u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Здесь,

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta \leqslant \theta_* \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{if } \theta > \theta_* \end{cases}$$

Оценки, представленные в лемме 1, также позволяют доказать разрешимость задачи со штрафом аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 25. *Пусть выполняются условия (с1)-(с3). Тогда существует решение задачи* (P_ε).

Рассмотрим аппроксимативные свойства решений задачи со штрафом. Пусть $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ — решения задачи (P_ε) и $\{\ theta, u\}$ — решение задачи (P). Затем,

$$\sigma\theta_\varepsilon' + A\left(\theta_\varepsilon\right) = u_\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon(0) = \theta_0. \tag{3.29}$$

Since $\theta|_{G_2} \leqslant \theta_*$, the following inequality is true:

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^T \int_{G_1} \left(\theta_\varepsilon - \theta_d\right)^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_2} F\left(\theta_\varepsilon\right) dxdt \\ \leqslant \textstyle\int_0^T \int_{G_1} \left(\theta - \theta_d\right)^2 dxdt = J(\theta).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^T \int_{G_1} \left(\theta_\varepsilon - \theta_d\right)^2 dxdt \leqslant J(\theta)$$

$$\int_0^T \int_{G_2} F\left(\theta_\varepsilon\right) dxdt \leqslant \varepsilon J(\theta)$$

Из полученных оценок, используя при необходимости подпоследовательности, соответствующие $\varepsilon_k \to +0$, аналогично доказательству теоремы 1, устанавливаем существование функций $\widehat{u} \in U_{ad}, \widehat{\theta} \in L^2(0,T;V)$, такой, что

$$u_\varepsilon \to \widehat{u} \text{ слабо в } L^2(0,T;H)$$

$$\theta_\varepsilon \to \widehat{\theta} \text{ слабо в } L^2(0,T;V)$$

$$\text{strongly in } L^2(0,T;H).$$

Заметим, что

$$\int_0^T \int_{G_2} F\left(\theta_\varepsilon\right) dxdt \to \int_0^T \int_{G_2} F(\widehat{\theta}) dxdt$$

$$\int_0^T \int_{G_2} F\left(\theta_\varepsilon\right) dxdt \to 0, \text{ as } \varepsilon \to +0$$

что гарантирует, что $F(\widehat{\theta}) = 0$ и $\widehat{\theta}\Big|_{G_2} \leqslant \theta_*$.

Результаты сходимости достаточны для предельного перехода по $\varepsilon \to +0$ в системе (8) и доказательства того, что предельная пара $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\} \in L^2(0,T;V) \times$

U_{ad} допустимо для задачи (P). Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу,

$$j \leqslant J(\widehat{\theta}) \leqslant \liminf J(\theta_\varepsilon) \leqslant J(\theta) = j = \inf J,$$

тогда пара $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$ есть решение задачи (P).

Теорема 26. *Пусть выполнены условия (c1)-(c3), и* $\theta_0 \leqslant \theta_*$ *a.e. in* Ω. *Если* $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ *есть решения проблемы* (P_ε) *for* $\varepsilon > 0$, *тогда существует такая последовательность*$\varepsilon \to +0$ *что*

$$u_\varepsilon \to \widehat{u} \text{ слабо в } L^2(0,T;H)$$
$$\theta_\varepsilon \to \widehat{\theta} \text{ strongly in } L^2(0,T;H),$$

где $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$ *есть решение проблемы* (P).

3.3 Корректность начально-краевой задачи для квазилинейной модели

3.3.1 Формализация задачи оптимального управления

В дальнейшем мы предполагаем, что Ω является ограниченной областью Липшица, $\Gamma = \partial\Omega, Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Обозначим через $L^p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ пространство Лебега и через H^1 пространство Соболева W_2^1. Пространство $L^p(0,T;X)$ (соответственно, $C([0,T];X)$) состоит из p-интегрируемых по $(0,T)$ (соответственно, непрерывных по $[0,T]$) функции со значениями в банаховом пространстве X. Обозначим $H = L^2(\Omega), V = H^1(\Omega)$ и V' двойственное значение V. Затем мы отождествляем H с его двойным пространством H' таким, что $V \subset H = H' \subset V'$ и обозначаем через $\|\cdot\|$ норму в H, и на (h,v) значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее с внутренним произведением в H, если $h \in H$.

Пусть выполняются следующие условия:

(i) $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1, \quad |\partial\sigma/\partial t| \leqslant \sigma_2, \quad \sigma_j = \mathrm{Const}.$

(ii) $0 < k_0 \leqslant k(s) \leqslant k_1, \quad |k'(s)| \leqslant k_2, s \in \mathbb{R}, k_j = \mathrm{Const}.$

(iii) $\theta_0 \in H, \gamma \in L^\infty(\Gamma), \gamma \geqslant \gamma_0 = \text{Const} > 0, \quad \theta_b \in L^\infty(\Sigma), \quad \theta_d \in G_d$.

(iv) $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha(x) \leqslant \alpha_1, \quad 0 < \beta_0 \leqslant \beta(x) \leqslant \beta_1, \quad x \in \Omega$ Мы определяем нелинейный оператор $A : V \to V'$ и линейный оператор $B : V \to V'$, используя следующее равенство, действительное для любого $\theta, v, \varphi, w \in V$:

$$(A(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\theta v d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\theta v d\Gamma,$$

где

$$h(s) = \int_0^s k(r)dr; \quad (B\varphi, w) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla w) + (\beta\varphi, w) + \frac{1}{2}\int_\Gamma \varphi w d\Gamma$$

Далее, с помощью следующей билинейной формы, мы определяем внутреннее произведение вV :

$$(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v) + \int_\Gamma uvd\Gamma.$$

Соответствующая норма эквивалентна стандартной норме пространства V.

Определение 1. Пусть $u_{1,2} \in L^2(0,T)$. Пара $\theta, \varphi \in L^2(0,T;V)$ слабое решение задачи (1), (2) если $\sigma\theta' \in L^2\left(0,T;V'\right)$ и

$$\sigma\theta' + A(\theta) - \beta\varphi = g + u_1\chi, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad B\varphi = u_2\chi,$$

где

$$\theta' = d\theta/dt, \quad g \in L^\infty\left(0,T;V'\right), \quad (g, v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b v d\Gamma$$

Замечание 1. Так как $(\sigma\theta)' = \sigma\theta' + \theta\partial\sigma/\partial t \in L^2\left(0,T;V'\right)$ and $\sigma\theta \in L^2(0,T;V)$, then $\sigma\theta \in C([0,T];H)$, и поэтому начальные условия имеют физические основания.

Из леммы Лакса-Мильграма следует, что для любой функции $g \in H$ существует единственное решение уравнения $B\varphi = g$. Более того, обратный оператор $B^{-1} : H \to V$ является непрерывным. Следовательно, мы можем исключить интенсивность излучения $\varphi = u_2 B^{-1}\chi$ и сформулировать задачу оптимального управления следующим образом. Проблема (CP)

$$J(\theta) = \int_{G_d} \left(\theta|_{t=T} - \theta_d\right)^2 dx \to \inf, \quad \sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

$$\theta|_{G_b} \leqslant \theta_*, \quad u \in U_{ad}.$$

Здесь

$$U_{ad} = \left\{u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in L^2(0,T), u_{1,2} \geqslant 0, u_1 + u_2 \leqslant P\right\}$$

3.3.2 Предварительные результаты

В статье [5] получен следующий результат.

Лемма 1. Пусть условия (i) - (iv) выполняются и $u \in L^2(0,T;V')$. Тогда есть решение проблемы

$$\sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

такое что $\theta \in L^\infty(0,T;H)$, а также верна следующая оценка:

$$\|\theta(t)\|^2 + \|\theta\|^2_{L^2(0,T;V')} \leqslant C\left(\|\theta_0\|^2 + \|g+u\|^2_{L^2(0,T;V')}\right),$$

где $C > 0$ не зависит от $\theta_0, g,$ и u.

Lemma 2. Пусть условия (i) - (iv) выполняются, $u = 0, \theta_0 \leqslant \theta_*$ другими словами, в $\Omega, \theta_b \leqslant \theta_*$ то есть Σ, и θ будут решением задачи (4). Тогда $\theta \leqslant \theta_*$ в $\Omega \times (0,T)$.

Доказательство. Умножая в смысле внутреннего произведения в H первое уравнение в (4) на $v = \max\{\theta - \theta_*, 0\} \in L^2(0,T;V)$, мы получаем

$$(\sigma v', v) + (k(\theta)\nabla v, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\theta v d\Gamma = 0.$$

Отбрасывая неотрицательные второе и третье слагаемые, мы приходим к оценке

$$\frac{d}{dt}(\sigma v, v) \leqslant (\sigma_t v, v) \leqslant \sigma_2\|v\|^2.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени и принимая во внимание, что $v|_{t=0} = 0$, мы получаем

$$\sigma_0\|v(t)\|^2 \leqslant (\sigma v(t), v(t)) \leqslant \sigma_2\int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau$$

Основываясь на лемме Гронуолла, мы приходим к выводу, что $v = 0$ и, следовательно, $\theta \leqslant \theta_*$ в $\Omega \times (0,T)$

Леммы 1 и 2 подразумевают непустое множество допустимых пар задачи (CP) и ограниченность минимизирующей последовательности допустимых пар $\{\theta_m, u_m\} \in L^2(0,T;V)\times U_{ad}$ так, что $J(\theta_m) \to j = \inf J$, где

$$\sigma\theta_m' + A(\theta_m) = g + u_m, \quad \theta_m(0) = \theta_0, \quad \theta_m|_{G_b} \leqslant \theta_*.$$

Аналогично [4], переходя к пределу в системе (5), можно установить разрешимость задачи (CP).

Theorem 1. Пусть условия (i)-(iv) выполняются, $\theta_0 \leqslant \theta_*$ a.e. в $\Omega, \theta_b \leqslant \theta_*$ a.e. в Σ. Тогда решение проблемы (CP) существует.

3.3.3 Метод штрафов

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления с параметром $\varepsilon > 0$, решения которой аппроксимируют решение задачи (CP) как $\varepsilon \to +0$. Problem (CP$_\varepsilon$)

$$J_\varepsilon(\theta) = \int_{G_d} \left(\theta|_{t=T} - \theta_d\right)^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \int_{G_b} F(\theta) dx dt \to \inf$$
$$\sigma\theta' + A(\theta) = g + u, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad u \in U_{ad}$$

Здесь,

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta \leqslant \theta_*, \\ (\theta - \theta_*)^2, & \text{if } \theta > \theta_* \end{cases}$$

Оценки, представленные в лемме 1, позволяют, аналогично доказательству теоремы 1, доказать разрешимость задачи со штрафом. **Теорема 2.** Пусть выполняются условия (i)-(iv). Тогда существует решение проблемы (CP_ε).

Рассмотрим аппроксимативные свойства решений задачи со штрафом. Пусть $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ будет решением проблемы (CP$_\varepsilon$) и $\{\theta, u\}$ будет решением проблемы(CP). Тогда,

$$\sigma\theta'_\varepsilon + A(\theta_\varepsilon) = g + u_\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon(0) = \theta_0.$$

так как $\theta|_{G_b} \leqslant \theta_*$, верны следующие неравенства:

$$\int_{G_d} \left(\theta_\varepsilon|_{t=T} - \theta_d\right)^2 dx \leqslant J(\theta), \quad \int_0^T \int_{G_b} F(\theta_\varepsilon) dx dt \leqslant \varepsilon J(\theta).$$

Из полученных оценок, используя при необходимости подпоследовательности в качестве $\varepsilon \to +0$, аналогично, как и в доказательстве теоремы 1, мы можем доказать существование функций $\widehat{u} \in U_{ad}, \widehat{\theta} \in L^2(0, T; V)$ таких, что

$u_\varepsilon \rightarrow \widehat{u}$ слабо в $L^2(0,T;H), \theta_\varepsilon \rightarrow \widehat{\theta}$ слабо в $L^2(0,T;V)$, сильно в $L^2(0,T;H)$;

$$\int_0^T \int_{G_b} F(\theta_\varepsilon)\, dxdt \rightarrow \int_0^T \int_{G_b} F(\widehat{\theta}) dxdt \quad \text{и} \quad \int_0^T \int_{G_b} F(\theta_\varepsilon)\, dxdt \rightarrow 0, \text{ как } \varepsilon \rightarrow +0$$

Следовательно, $F(\widehat{\theta}) = 0$ и $\widehat{\theta}\Big|_{G_b} \leqslant \theta_*$. Результатов сходимости достаточно, чтобы перейти к пределу как $\varepsilon \rightarrow +0$ в системе состояний (6) и доказать, что предельная пара $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\} \in L^2(0,T;V) \times U_{ad}$ является приемлемым для проблемы(CP). Поскольку функционал J является слабо полунепрерывным снизу, то есть

$$j \leqslant J(\widehat{\theta}) \leqslant \liminf J(\theta_\varepsilon) \leqslant J(\theta) = j = \inf J$$

Тогда пара $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$ это решение проблемы (CP). **Теорема 3.** Пусть выполняются условия (i)-(iv), $\theta_0 \leqslant \theta_*$ a.e. в $\Omega, \theta_b \leqslant \theta_*$ a.e. в Σ. If $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ решения проблемы (CP_ε) for $\varepsilon > 0$, тогда существует последовательность вида $\varepsilon \rightarrow +0$ $u_\varepsilon \rightarrow \widehat{u}$ слабо в $L^2(0,T;H)$, $\theta_\varepsilon \rightarrow \widehat{\theta}$ слабо в $L^2(0,T;V)$, сильно в $L^2(0,T;H)$, where $\{\widehat{\theta}, \widehat{u}\}$ есть решение проблемы (CP).

Глава 4. Численные методы и комплексы программ

4.1 Численные алгоритмы решения прямых задач сложного теплообмена

Стационарная модель сложного теплообмена в P_1 приближении записывается как

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|^3\theta = b\kappa_a\varphi$$
$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a|\theta|^3\theta$$
$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta\left(\theta - \theta_b\right)\big|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right)\big|_\Gamma = 0.$$

Основную сложность в решении прямой задачи представляет компонент температурного поля, который входит в систему дифференциальных уравнений с четвёртой степенью.

Метод простой итераций применяется для решения задач в двумерной области. Он был использован в работах [111, 51]. Однако, в трёхмерной области этот метод демонстрирует худшую сходимость, что может привести к долгим итерационным процессам и увеличению вычислительных затрат.

Вместо метода простой итераций для решения сложных задач оптимального управления температурой может быть применен метод Ньютона. Метод Ньютона является одним из наиболее эффективных методов оптимизации и решения нелинейных уравнений. Он использует локальную аппроксимацию функции в виде касательной плоскости и обновляет решение на основе градиента и гессиана функции. Этот метод обычно обеспечивает быструю сходимость и может быть применен для решения сложных задач оптимального управления температурой в трехмерных областях.

Метод Ньютона является усовершенствованным вариантом метода простой итерации, в котором нелинейное слагаемое $|\theta|^3\theta$ аппроксимируется выражением $\widetilde{\theta}^4+4\widetilde{\theta}^3(\theta-\widetilde{\theta})$. Эта аппроксимация обеспечивает более точное решение и быструю сходимость, что делает метод Ньютона более эффективным для решения задач с высокой степенью нелинейности. В результате модифицированная система уравнений примет следующий вид:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\left(\left(4\widetilde{\theta}^3\theta - 3\widetilde{\theta}^4\right) - \varphi\right) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - \left(4\widetilde{\theta}^3\theta - 3\widetilde{\theta}^4\right)\right) = 0,$$
$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta\left(\theta - \theta_b\right)\big|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right)\big|_\Gamma = 0.$$

монотонная сходимость метода Ньютона является важным свойством, которое позволяет обеспечить стабильность итерационного процесса и успешное решение эллиптических уравнений с монотонным и выпуклым нелинейным слагаемым. В литературе было проведено множество исследований, направленных на изучение сходимости метода Ньютона для таких уравнений.

В частности, в работах [112, 113] были представлены результаты анализа монотонной сходимости метода Ньютона для эллиптического уравнения с монотонным и выпуклым нелинейным слагаемым. Результаты этих исследований показывают, что метод Ньютона обладает хорошими свойствами сходимости и может быть применен для решения сложных задач оптимального управления в моделях сложного теплообмена.

Далее приведём некоторые численные методы решения краевых задач.

4.1.1 Методы конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) — это мощный численный метод решения дифференциальных уравнений в частных производных (УЧП), возникающих в различных инженерных и научных приложениях. Это универсальный и гибкий метод, который позволяет анализировать сложные геометрические формы, свойства материалов и условия нагрузки. В этом отчете представлен обзор FEM, включая его математическую формулировку, шаги, связанные с его реализацией, и его применение в различных областях.

Математическая формулировка Метод конечных элементов начинается с преобразования определяющих УЧП в их слабую форму, которая затем дискретизируется в систему алгебраических уравнений. Слабая форма получается путем умножения основного уравнения на тестовую функцию и интегрирования по области. Полученная система алгебраических уравнений решается для получения неизвестных переменных в дискретных точках, называемых узлами, внутри области.

Слабая формулировка Рассмотрим общую краевую задачу, описываемую следующим УЧП:

$$\mathcal{L}u = f$$

где $\mathcal{L}$ — линейный дифференциальный оператор, u — неизвестная функция, f — исходный член. Чтобы получить слабую форму этого уравнения, умножьте обе части на пробную функцию v и проинтегрируйте по области Ω:

$$\int_\Omega v\mathcal{L}u, d\Omega = \int_\Omega vf, d\Omega.$$

Применяя интегрирование по частям и учитывая соответствующие граничные условия, можно получить слабую форму уравнения.

Дискретизация Область Ω дискретизирована на конечное число подобластей, называемых элементами, которые соединены в узлах. Неизвестная функция u аппроксимируется внутри каждого элемента набором базисных функций:

$$u(\mathbf{x}) \approx u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\mathbf{x})u_i,$$

где N_i — функции формы, а u_i — узловые значения неизвестной функции. Функции формы выбираются так, чтобы они удовлетворяли разбиению единицы и обладали свойством $N_i(\mathbf{x}j) = \delta ij$, где δ_{ij} — дельта Кронекера.

Подставив приближенную функцию u_h в слабую форму и применив метод Галеркина, полученную систему линейных уравнений можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{K}$ — матрица жесткости, $\mathbf{u}$ — вектор неизвестных узловых значений, $\mathbf{F}$ — вектор силы. **Реализация** *Генерация сетки* Первым шагом в реализации МКЭ является построение сетки, включающее дискретизацию области Ω на конечное число элементов. Качество сетки значительно влияет на точность и эффективность решения методами конечных элементов. Существуют различные типы элементов, такие как треугольники, четырехугольники, тетраэдры и шестигранники, и выбор типа элемента зависит от геометрии задачи и желаемой точности.

Функции формы и интерполяция Функции формы используются для интерполяции неизвестной функции u внутри каждого элемента. Они определены таким образом, что равны единице в соответствующих узлах и нулю во всех остальных узлах. В зависимости от требуемой точности и гладкости решения могут использоваться линейные, квадратичные функции и функции формы более высокого порядка. Выбор функций формы зависит от типа используемого элемента и желаемой непрерывности решения по границам элементов. *Сборка* После определения функций формы следующим шагом является сборка глобальной матрицы жесткости $\mathbf{K}$ и вектора силы $\mathbf{F}$ из вкладов отдельных элементов.

Это включает в себя сопоставление матриц и векторов локальных элементов с их соответствующими глобальными позициями на основе связности между элементами. Процесс сборки приводит к разреженной линейной системе из-за локализованного характера функций формы.

Граничные условия Для решения линейной системы необходимо применить соответствующие граничные условия. Существует два основных типа граничных условий: граничные условия Дирихле, которые задают значение неизвестной функции на границе, и граничные условия Неймана, которые задают производную неизвестной функции на границе. Граничные условия применяются путем изменения матрицы жесткости и вектора силы, чтобы обеспечить выполнение заданных условий.

Решение После того, как глобальная матрица жесткости и вектор силы собраны и применены граничные условия, линейная система $\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$ может быть решена с использованием различных прямых или итерационных методов решения, такие как исключение Гаусса, метод сопряженных градиентов или метод предварительно обусловленных сопряженных градиентов. Вектор решения $\mathbf{u}$ предоставляет неизвестные значения функции в узлах, из которых решение может быть интерполировано в пределах каждого элемента с использованием функций формы.

Приложения Метод конечных элементов получил широкое распространение в различных областях благодаря своей гибкости и универсальности. Некоторые распространенные приложения FEM включают:

– Структурный анализ: МКЭ широко используется для анализа напряжений и деформаций в конструкциях при различных условиях нагрузки, включая статические, динамические и тепловые нагрузки.

– Гидродинамика: метод используется для решения сложных задач о потоках жидкости, таких как несжимаемые и сжимаемые потоки, турбулентные потоки и многофазные потоки.
– Теплопередача: МКЭ используется для анализа теплопроводности, конвекции и излучения в твердых телах и жидкостях.
– Электромагнетизм: метод применим для анализа электромагнитных полей в различных приложениях, таких как волноводы, антенны и электромагнитное экранирование.
– Геомеханика: МКЭ используется для изучения поведения грунтов и горных пород в различных геотехнических и геологических приложениях, таких как устойчивость откосов, прокладка туннелей и сейсморазведка.

Заключение Метод конечных элементов — это мощный численный метод решения дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в различных инженерных и научных приложениях. Метод включает в себя преобразование основных уравнений в их слабую форму, дискретизацию области на конечное число элементов, аппроксимацию неизвестной функции с использованием функций формы и решение полученной линейной системы. FEM широко используется во многих областях благодаря своей гибкости, точности и способности работать со сложной геометрией, свойствами материалов и условиями нагрузки. Несмотря на свои многочисленные преимущества, метод конечных элементов также имеет некоторые ограничения, такие как необходимость создания высококачественной сетки, потенциальные трудности с применением граничных условий и вычислительные затраты,связанные с решением больших линейных систем. Однако постоянное развитие передовых численных методов, эффективных алгоритмов и высокопроизводительных вычислительных ресурсов продолжает расширять область применения и возможности МКЭ, делая его незаменимым инструментом при анализе и проектировании сложных систем в различных областях науки и техники.

4.1.2 Методы конечных разностей

Метод конечных разностей (FDM) — широко используемый численный метод решения уравнений в частных производных (УЧП) в различных областях науки и техники. Этот метод включает дискретизацию интересующей области на конечное число узлов сетки и аппроксимацию производных в основных уравнениях с использованием конечных разностей. В этом отчете мы предоставим обзор метода конечных разностей, обсудим основные концепции и представим некоторые соответствующие математические формулы.

Конечно-разностные аппроксимации

Основная идея метода конечных разностей состоит в том, чтобы аппроксимировать производные в уравнении в частных производных, используя аппроксимации конечных разностей. Например, рассмотрим функцию $u(x)$, определенную над областью определения $[a, b]$. Производная первого порядка от $u(x)$ может быть аппроксимирована прямой разностью, обратной разностью или центральной разностью. Аппроксимация прямой разности определяется выражением

$$\frac{du(x)}{dx} \; \frac{u(x+h)-u(x)}{h},$$

где h — небольшое положительное число, часто называемое размером шага или шагом сетки.

Аппроксимация обратной разности определяется выражением

$$\frac{du(x)}{dx} \; \frac{u(x)-u(x-h)}{h}.$$

Аппроксимация центральной разности, которая обычно более точна, чем разность прямая или обратная разность, определяется выражением

$$\frac{du(x)}{dx} \approx \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}.$$

Производные более высокого порядка также можно аппроксимировать с помощью конечных разностей. Например, производная второго порядка может быть аппроксимирована формулой центральной разности:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}.$$

Дискретизация уравнений в частных производных

Чтобы проиллюстрировать применение метода конечных разностей при решении уравнений в частных производных, рассмотрим одномерное стационарное уравнение теплопроводности:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right) = q(x),$$

где $u(x)$ — температура, k — теплопроводность, $q(x)$ — член источника тепла.

Дискретизация области

Первым шагом в методе конечных разностей является дискретизация области $[a, b]$ на конечное число узлов сетки. Пусть N будет количеством узлов сетки, и пусть $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, будут узлами сетки, где $\Delta x = (b-a)/(N-1)$ - шаг сетки.

Дискретизация основного уравнения Затем мы дискретизируем основное уравнение в каждой точке сетки x_i, используя конечно-разностные приближения. Например, производная второго порядка в уравнении теплопроводности может быть аппроксимирована формулой центральной разности:

$$\frac{d^2u(x_i)}{dx^2} \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2}.$$

Следовательно, дискретизированная форма уравнения теплопроводности в узловой точке x_i может быть записана как

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2\Delta x}\right) = q(x_i).$$

Граничные условия

Для получения единственного решения дискретизированной задачи необходимо наложить соответствующие граничные условия. В контексте метода конечных разностей можно применять два типа граничных условий: граничные условия Дирихле, задающие значения зависимой переменной $u(x)$ на границах, и граничные условия Неймана, задающие значения нормальных производных $\frac{du(x)}{dx}$ на границах.

Например, предположим, что граничные условия для задачи теплопроводности имеют вид

$$u(a) = u_0 \quad \text{и} \quad \frac{du(b)}{dx} = g,$$

где u_0 — известная константа, g — тепловой поток на границе $x = b$. Граничное условие Дирихле при $x = a$ может быть включено непосредственно в дискретизированную задачу. Граничное условие Неймана при $x = b$ можно аппроксимировать односторонней разностной формулой:

$$\frac{du(b)}{dx} \approx \frac{u(b) - u(b - \Delta x)}{\Delta x} = g.$$

Решение дискретизированной задачи

После дискретизации основного уравнения и наложения граничных условий получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b},$$

где A — матрица, содержащая коэффициенты дискретизированной задачи, $\mathbf{u}$ — вектор неизвестных температур в узлах сетки, $\mathbf{b}$ — вектор известных членов, включая граничные условия и термин источника тепла.

Система линейных алгебраических уравнений может быть решена с использованием различных численных методов, таких как метод Гаусса-Зейделя, метод Якоби или метод сопряженных градиентов. После получения вектора решения $\mathbf{u}$ поле температур в области может быть восстановлено путем интерполяции температур в узлах сетки.

Заключение

В параграфе мы представили обзор метода конечных разностей для решения уравнений в частных производных. Метод включает в себя дискретизацию области на конечное число узлов сетки и аппроксимацию производных в основных уравнениях с использованием конечных разностей. Полученная система линейных алгебраических уравнений может быть решена с использованием различных численных методов для получения решения исходной задачи.

4.2 Численные алгоритмы минимизации функционалов

Градиентный спуск и его модификации, стохастические методы. Приведём работу Алексеева [114], где в которой задача управления решается методом роя частиц.

4.2.1 Градиентный спуск и модификации

Градиентный спуск - это способ минимизации целевой функции $J(\theta)$, параметризованной параметрами модели $\theta \in \mathbb{R}^d$, путем обновления параметров в направлении, противоположном градиенту целевой функции $\nabla_\theta J(\theta)$ относительно параметров. Скорость обучения η определяет размер шагов, которые мы делаем, чтобы достичь (локального) минимума. Иными словами, мы следуем направлению наклона поверхности, созданной целевой функцией, вниз до тех пор, пока не достигнем локального минимума.

Известны различные способы модификации градиентного спуска. Перечислим некоторые из них.

Градиентный спуск с проекцией

Метод градиентного спуска широко используется для минимизации дифференцируемой функции $f(\mathbf{x})$, итеративно двигаясь в направлении наибольшего убывания. Алгоритм осуществляется путем обновления параметров $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ в направлении, противоположном градиенту функции $\nabla f(\mathbf{x})$ с величиной шага (скорость обучения) η. Этот простой, но мощный алгоритм оптимизации используется во множестве приложений, таких как машинное обучение, компьютерное зрение и обработка сигналов. В некоторых случаях задача оптимизации имеет дополнительные ограничения, которые могут быть включены в алгоритм градиентного спуска с использованием проекции. В этом отчете представлен обзор метода градиентного спуска с проекцией, а также обсуждаются его основные особенности и приложения.

Цель алгоритма градиентного спуска - минимизировать функцию $f(\mathbf{x})$, итеративно обновляя параметры следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \eta \nabla f(x_k),$$

где $\mathbf{x}_k$ - вектор параметров на итерации k, η - величина шага, и $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ - градиент функции на итерации k. Когда задача оптимизации включает ограничения, алгоритм градиентного спуска должен быть изменен, чтобы учесть эти ограничения. Один из распространенных подходов состоит в использовании проекции на множество ограничений.

Пусть $\mathcal{C}$ - множество ограничений. Алгоритм градиентного спуска с проекцией можно описать следующим образом:

$$x_{k+1} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x_k - \eta \nabla f(x_k)),$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ - оператор проекции на множество ограничений $\mathcal{C}$. Проекция обеспечивает сохранение обновленного вектора параметров $\mathbf{x}_{k+1}$ в пределах множества ограничений, таким образом, удовлетворяя ограничения задачи.

Оператор проекции Оператор проекции $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ проецирует заданную точку на множество ограничений $\mathcal{C}$. Проекция точки $\mathbf{y}$ на множество $\mathcal{C}$ определяется как:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(y) = \arg\min_{x \in \mathcal{C}} \|y - x\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму. Оператор проекции находит точку в множестве ограничений $\mathcal{C}$, которая ближе всего к заданной точке $\mathbf{y}$.

Примеры множеств ограничений

Множество ограничений может иметь различные формы в зависимости от задачи оптимизации. Некоторые распространенные множества ограничений включают:

– **Ограничения-коробки:** Множество ограничений представляет собой коробку, определенную как $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, |, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, , i = 1, \ldots, n\}$. В этом случае оператор проекции можно вычислить поэлементно:

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(y))_i = \min(\max(y_i, a_i), b_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

– **Ограничения-шары:** Множество ограничений представляет собой закрытый шар с радиусом r и центром $\mathbf{c}$, определенный как $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, |, \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leqslant r\}$. Оператор проекции для этого множества ограничений:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(y) = c + \min\left(1, \frac{r}{\|y - c\|}\right)(y - c).$$

– **Ограничения-симплексы:** Множество ограничений представляет собой симплекс, определенный как $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, |, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, , \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Оператор проекции для этого множества ограничений включает более сложный алгоритм, такой как тот, который представлен, например [115].

Градиентный спуск с проекцией нашел различные применения в разных областях, включая:

– **Разреженная оптимизация:** В машинном обучении разреженность является желаемым свойством для интерпретируемости модели и отбора признаков. Добавление ограничения ℓ_1 к задаче оптимизации обеспечивает разреженность решения. Алгоритм градиентного спуска с проекцией может быть использован для решения таких задач.
– **Обработка изображений:** В обработке изображений минимизация полной вариации является популярным подходом для устранения шума и восстановления изображений. Задача оптимизации заключается в минимизации негладкой целевой функции с ограничениями на изображение. Градиентный спуск с проекцией может быть использован для решения этих типов задач.
– **Сжатое ощущение:** Сжатое ощущение (Compressed Sensing) - это метод, используемый в обработке сигналов для восстановления разреженного сигнала из небольшого количества линейных измерений. Задача восстановления формулируется как задача оптимизации с ограничениями на разреженность. Градиентный спуск с проекцией может быть использован для решения задачи восстановления сжатого ощущения.

Градиентный спуск с проекцией является универсальным алгоритмом оптимизации, который позволяет включать ограничения в стандартный метод градиентного спуска. Оператор проекции обеспечивает выполнение ограничений задачи при обновлении параметров. Алгоритм успешно применяется в различных областях, таких как машинное обучение, обработка изображений и обработка сигналов.

Момент Градиентный спуск испытывает трудности при навигации в оврагах, то есть в областях, где поверхность круче изгибается в одном измерении, чем в другом [116], что обычно встречается в окрестности локальных оптимумов. В таких сценариях SGD колеблется по склонам оврага, делая только неуверенный прогресс вдоль дна к локальному оптимуму, как на изображении 2.

Метод момента [117] помогает ускорить SGD в соответствующем направлении и сглаживает колебания, как видно на изображении 3. Он делает это, добавляя долю $\boldsymbol{\gamma}$ вектора обновления прошлого временного шага к текущему вектору обновления:

$$v_t = \gamma v_{t-1} + \eta \nabla_\theta J(\theta)$$

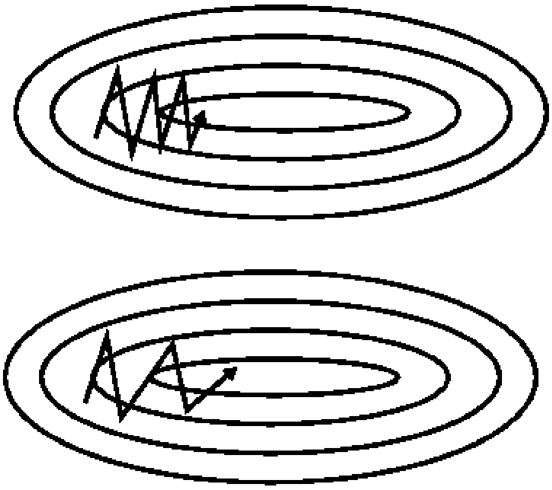


Рисунок 4.1 — Результаты второго эксперимента

$$\theta = \theta - v_t$$

Примечание: Некоторые реализации меняют знаки в уравнениях. Обычно момент инерции γ устанавливается равным 0.9 или близким к этому значению.

По сути, при использовании момента мы толкаем шар вниз по склону. Шар накапливает момент, катаясь вниз по склону, становясь все быстрее и быстрее по пути (пока не достигнет своей предельной скорости, если есть сопротивление воздуха, то есть $\gamma < 1$). То же самое происходит с нашими обновлениями параметров: момент увеличивается для измерений, чьи градиенты указывают в одном направлении, и уменьшает обновления для измерений, чьи градиенты меняют направления. В результате мы получаем более быстрое сходимости и уменьшение колебаний.

Ускоренный градиент Нестерова

Однако шар, который катится вниз по склону, слепо следуя склону, является крайне неудовлетворительным. Мы хотели бы иметь более умный шар, шар, который имеет представление о том, куда он движется, так что он знает, когда нужно замедлиться перед тем, как склон вновь поднимется.

Ускоренный градиент Нестерова (NAG) [6] - это способ придать нашему моменту такое видение будущего. Мы знаем, что мы будем использовать наш момент γv_{t-1} для перемещения параметров θ. Вычисление $\theta - \gamma v_{t-1}$ дает нам приближение следующей позиции параметров (градиент отсутствует для полного обновления), грубое представление о том, куда будут двигаться наши параметры. Теперь мы можем фактически заглянуть вперед, рассчитывая градиент не относительно наших текущих параметров θ, но относительно приблизительного будущего положения наших параметров:

$$v_t = \gamma v_{t-1} + \eta \nabla_\theta J(\theta - \gamma v_{t-1})$$

$$\theta = \theta - v_t$$

Опять же, мы устанавливаем момент γ равным значению около 0.9. В то время как момент сначала вычисляет текущий градиент (небольшой синий вектор на изображении 4), а затем делает большой скачок в направлении обновленного накопленного градиента (большой синий вектор), NAG сначала делает большой скачок в направлении предыдущего накопленного градиента (коричневый вектор), измеряет градиент и затем делает корректировку (красный вектор), что приводит к полному обновлению NAG (зеленый вектор). Это антиципаторное обновление предотвращает наше слишком быстрое движение и приводит к увеличению чувствительности, что существенно повысило производительность RNN на ряде задач [7].

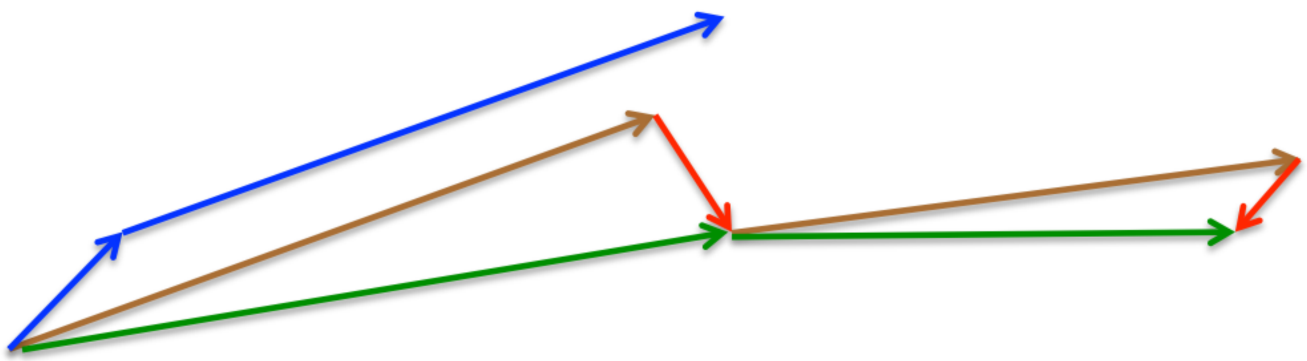


Рисунок 4.2 — Обновление Нестерова (Source: G. Hinton's lecture 6c)

Более подробный разбор механики градиента Нестерова можно найти в [118].

Теперь, когда мы можем адаптировать наши обновления к наклону нашей функции ошибок и ускорять SGD, мы также хотели бы адаптировать наши обновления к каждому отдельному параметру, чтобы выполнять большие или меньшие обновления в зависимости от их важности.

4.2.2 Метод роя частиц

Оптимизация на основе роя частиц (PSO) - популярный алгоритм метаэвристической оптимизации, вдохновленный природой, предложенный Кеннеди и Эберхартом в 1995 году [119]. Он вдохновлен социальным поведением стай птиц и косяков рыб. PSO широко применяется для решения различных задач оптимизации благодаря своей простоте, легкой реализации и быстрой сходимости.

Алгоритм оптимизации на основе роя частиц Алгоритм PSO состоит из роя частиц, каждая из которых представляет собой потенциальное решение задачи оптимизации. Частицы перемещаются по пространству поиска, корректируя свои позиции на основе своего собственного опыта и опыта своих соседей с целью найти глобальный минимум или максимум целевой функции.

Представление частиц и инициализация

Частица роя представляется вектором своего положения $\mathbf{x}i = (xi1, x_{i2}, \ldots, x_{id})^T$ и вектором скорости $\mathbf{v}i = (vi1, v_{i2}, \ldots, v_{id})^T$, где d - размерность пространства поиска. Рой инициализируется с N частицами, и их начальные положения и скорости обычно случайным образом генерируются в пределах границ пространства поиска.

Правила обновления частиц

На каждой итерации частицы обновляют свои скорости и положения в соответствии с следующими правилами:

$$\mathbf{v}i(t+1) = \boldsymbol{\omega}\mathbf{v}i(t) + c_1 r_1(\mathbf{p}i - \mathbf{x}i(t)) + c_2 r_2(\mathbf{p}g - \mathbf{x}i(t))$$

$$\mathbf{x}i(t+1) = \mathbf{x}i(t) + \mathbf{v}_i(t+1)$$

где:

– t - текущая итерация,

– $\boldsymbol{\omega}$ - вес инерции, который балансирует глобальные и локальные возможности поиска,

– c_1 и c_2 - когнитивные и социальные коэффициенты ускорения соответственно,

– r_1 и r_2 - случайные числа, равномерно распределенные в интервале $[0, 1]$,

– $\mathbf{p}_i$ - лучшее личное положение, найденное частицей i,

– $\mathbf{p}_g$ - лучшее глобальное положение, найденное всем роем.

Вес инерции ω может быть как постоянным, так и адаптивно корректироваться в процессе оптимизации. Общий подход к адаптивной корректировке - использование линейно убывающего веса инерции:

$$\omega(t) = \omega_{\max} - \frac{t(\omega_{\max} - \omega_{\min})}{T}$$

где T - максимальное число итераций, а $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$ - максимальное и минимальное значения веса инерции соответственно.

Критерии завершения

Алгоритм PSO обычно завершается, когда выполняется одно из следующих условий:

1. Достигнуто максимальное количество итераций.
2. Глобальное лучшее значение приспособленности не улучшается значительно в течение предопределенного числа последовательных итераций.
3. Глобальное лучшее значение приспособленности достигает предопределенного приемлемого порога.

Применение алгоритма оптимизации роем частиц

Алгоритм PSO был применен к широкому спектру задач оптимизации, включая:

– Оптимизация функций: PSO может быть использован для поиска глобального минимума или максимума сложных функций с несколькими переменными и ограничениями.
– Машинное обучение и интеллектуальный анализ данных: PSO применялся для выбора признаков, кластеризации и настройки параметров различных алгоритмов машинного обучения.
– Комбинаторная оптимизация: PSO был адаптирован для решения задач, таких как задача коммивояжера, задачи расписания и задачи маршрутизации транспортных средств.
– Инженерный дизайн: PSO использовался для оптимизации различных инженерных задач, таких как дизайн антенн, структурный дизайн и системы управления.

Заключение Метод роя частиц — это мощный алгоритм оптимизации, основанный на социальном поведении птичьих стай и косяков рыб. Его простота, легкая реализация и быстрая сходимость делают его привлекательным выбором для решения различных задач оптимизации. Алгоритм успешно применяется в различных областях, включая оптимизацию функций, машинное обучение, комбинаторную оптимизацию и инженерное проектирование.

4.3 Алгоритмы решения граничных обратных задач. Примеры.

4.3.1 Решение граничной обратной задачи

Пусть функционал $J(\theta)$ удовлетворяет условиям, указанным в разд. 2.1.3. Для удобства введём переобозначение $\hat{J}(u) \coloneqq J(\theta(u)), \hat{J} : L^2(\Gamma_1) \to \mathbb{R}$.

Здесь $\theta(u)$ – температурное поле задачи (2.1)–(2.2) отвечающее управлению $u \in L^2(\Gamma_1)$.

Согласно формуле (2.14) градиент функционала $\hat{J}(u)$ [107] имеет вид

$$\hat{J}'(u) = (\varphi(u) - \theta_b^4)p_2,$$

где $\varphi(u)$ есть интенсивность излучения, p_2 – соответствующая переменная сопряжённой системы.

Предлагаемый алгоритм решения выглядит следующим образом:

Algorithm: Gradient Descent with Projection

1. Choose the gradient step value λ.
2. Choose the number of iterations N.
3. Select an arbitrary initial value $u_0 \in U_{ad}$.
4. For $k = 0, 1, 2, \ldots, N$:

a. Calculate the state $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$ from equation (2.6) for the given u_k.

b. Calculate the quality functional value $J(\theta_k)$ from equation (2.5).

c. Calculate the conjugate state $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$ from equations (2.12)–(2.13), where $\hat{\theta} = \theta_k$ and $\hat{u} = u_k$.

d. Update the control $u_{(k+1)} = P_{ad}[u_k - \lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}]$.

End of algorithm.

Оператор проекции $P_{ad} : U \to U_{ad}$ определён следующим образом

$$P_{ad}[v] = \begin{cases} u_1, & \text{если } v \leqslant u_1 \\ v, & \text{если } u_1 < v < u_2 \\ u_2, & \text{если } v \geqslant u_2. \end{cases}$$

Приведём далее примеры расчётов для двумерного случая. Положим $\Omega = \{(x,y), 0 \leqslant x,y \leqslant 1\}$, $l = 1$ см. Граница $\partial\Omega$ состоит из участков:

$\Gamma_0 = \{x = \{0,1\}, y \in [0,1]\}$

$\Gamma_1 = \{x \in [0,1], y = 0\}$ – участок с неизвестными отражающими свойствами,

$\Gamma_2 = \{x \in [0,1], y = 1\}$ – участок наблюдения.

Будем также далее считать, что $a = 0.006$[см^2/с], $b = 0.025$[см/с], $\beta = 0.00005$[см/с], $\kappa = 1$[см$^{-1}$], $\kappa_s = 0$, $A = 0$, $\gamma = 0.3$. Указанные параметры соответствуют стеклу [107]. Температуру на границе Ω положим равной $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$.

При указанных параметрах для первого эксперимента выберем следующее тестовое значение функции u (рис. 4.3**??**):

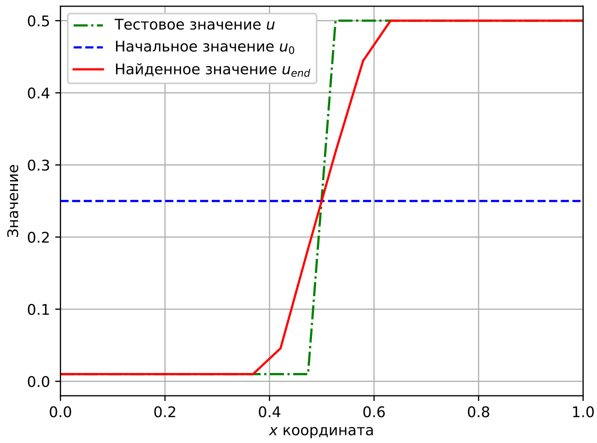
$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leqslant 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases} \tag{4.1}$$

и для второго эксперимента (рис. 4.3**??**):

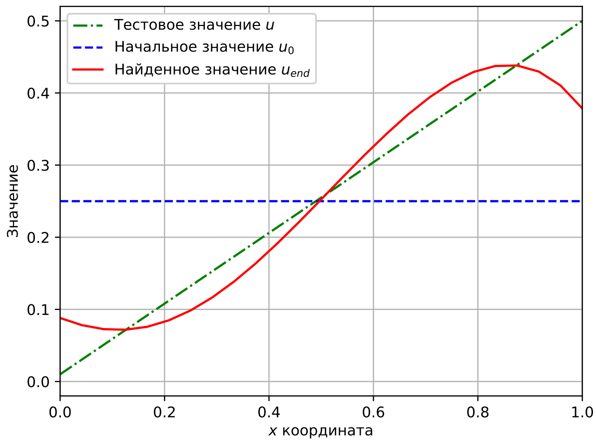
$$u(x) = 0.49x + 0.01. \tag{4.2}$$

Вычислим решение прямой задачи (2.1)–(2.2) для этих случаев. Полученное температурное поле на участке наблюдения Γ_2 выберем в качестве θ_0. Далее, применяя предложенный алгоритм находим квазирешение обратной задачи (2.1)–(2.4). Эффективность алгоритма, а также значение u_0 в первом и втором случаях иллюстрируются рис. 4.3. На рис. 4.4 показана динамика функционала качества по итерациям.

Замечание. В предложенных примерах потребовалось $2 * 10^6$ итераций для нахождения квазирешения u. В то же время температурное поле на участке наблюдения Γ_2 становится близким к θ_0 уже на 10^2 итерации. Также наблюдается существенное падение скорости уменьшения функционала качества с каждой итерацией после того, как среднее значение найденной функции контроля становится близко к тестовой функции.



[Первый эксперимент] [Второй



эксперимент]

Рисунок 4.3 — Тестовая функция u, начальная u_0, найденная функция u_{end}.

4.3.2 Решение квазистационарной задачи

Приведем алгоритм решения задачи управления. Пусть

$$\widetilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u),$$

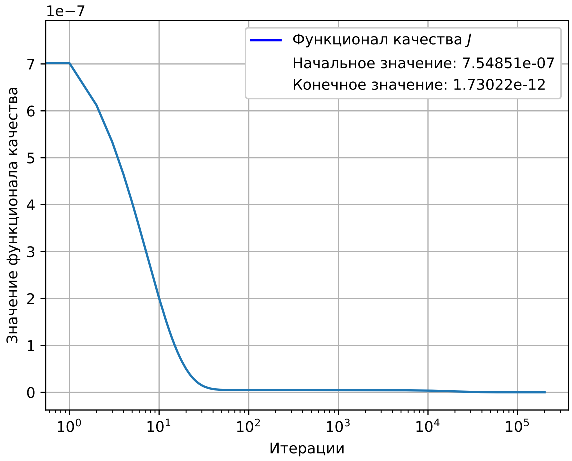
где $\theta(u)$ — компонента решения задачи (2.36)–(2.37), соответствующая управлению $u \in U$. Согласно (2.50) градиент функционала $\widetilde{J}_\lambda(u)$ определяется следующим образом: $\widetilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2$. Здесь p_2 — соответствующая компонента сопряженного состояния системы(2.50), где $\widehat{\theta} := \theta(u)$.

Предлагаемый алгоритм для решения задачи оптимального управления состоит из следующих шагов:

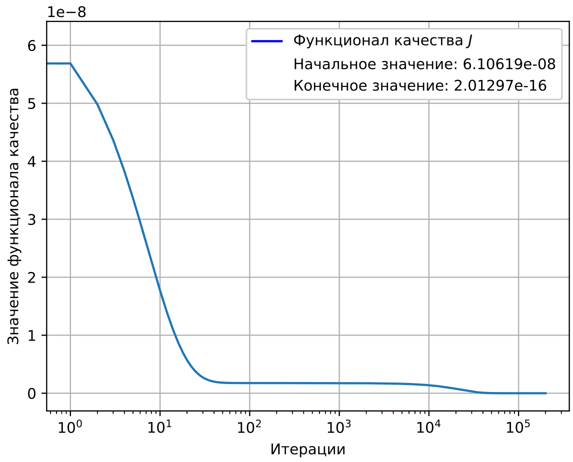
Алгоритм градиентного спуска

1: Выбор значения шага градиента ε,

2: Выбор числа итераций N,



[Первый эксперимент]



[Второй эксперимент]

Рисунок 4.4 — Динамика функции $\hat{J}(u)$ по итерациям.

3: Выбор начального приближения для управления $u_0 \in U$,

4: для $k \leftarrow 0{,}1{,}2,\ldots,N$ выполнять:

5: Для заданного u_k, вычислить состояние $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$, решение задачи (2.36)–(2.38).

6: Вычислить значение функционала качества $J_\lambda\left(\theta_k, u_k\right)$.

7: Из уравнений (2.50), вычислить сопряженное состояние $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$, где $\widehat{\theta} := \theta_k, \widehat{u} := u_k$.

8: Пересчитываем управление $u_{k+1} = u_k - \varepsilon\left(\lambda u_k - p_2\right)$

Параметр ε выбирается эмпирически таким образом, чтобы значение $\varepsilon\left(\lambda u_k - p_2\right)$ являлось существенной корректировкой для u_{k+1}. Число итераций N выбирается достаточным для удовлетворения условия $J_\lambda\left(\theta_k, u_k\right) - J_\lambda\left(\theta_{k+1}, u_{k+1}\right) < \delta$, где $\delta > 0$ определяет точность вычислений.

Рассмотренный ниже пример иллюстрирует работу предложенного алгоритма для малых, что важно, значений параметра регуляризации $\lambda \leqslant 10^{-12}$.

Заметим, что для численного решения прямой задачи с заданным управлением был использован метод простой итерации для линеаризации задачи и ее решения с помощью метода конечных элементов. Решение сопряженной системы, которая является линейной при заданной температуре, является прямолинейным. Для численного моделирования мы использовали солвер FEniCS [1,21]. Сравним работу предложенного алгоритма с результатами статьи [12]. Задача рассматривается в области $\Omega \times (-L, L)$, где $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_{1,2} < d\}$ и при большом L сводится к двумерной задаче для вычислительной области Ω.

Для задачи были выбраны следующие значения параметров: $d = 1(\ )$, $a = 0.9210^{-4}\left({}^{2}/\right)$, $b = 0.19(\ /)$, $\alpha = 0.0333(\ )$ $\kappa_a = 1\left({}^{-1}\right)$. Параметры соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400°C. Функции θ_b, q_b для граничного условия (2.40) задаются следующим образом: $\theta_b = \widehat{\theta}\Big|_{\Gamma}, q_b = \partial_n\widehat{\theta}\Big|_{\Gamma}$, где $\widehat{\theta} = (x_1 - 0.5)^2 - 0.5x_2 + 0.75$.

Приближенное решение задачи (2.51),(2.52) с данными Коши, представленными в [104] (рисунок 1), было получено путем решения четвертого порядка параболической задачи для температуры.

Решение стабилизировалось через 120 секунд, но вычисления на каждом временном шаге были довольно затратными [104].

На рисунке 2 показано стационарное поле температуры, полученное с помощью метода, предложенного в данной статье.

Представленный пример иллюстрирует, что предложенный алгоритм успешно находит численное решение задачи (2.51),(2.52) с граничными условиями типа Коши.

4.3.3 Решение квазилинейной модели

Перенос тепла и излучения будет рассматриваться в среде, состоящей из четырех частей, которые интерпретируются как кровь, стенки вены, около-венозная ткань и оптическое волокно. Вычислительная область в цилиндрической системе координат в случае угловой симметрии схематически изображена на рисунке 1 (линейные размеры указаны в миллиметрах).

Рисунок 1: Вычислительная область.

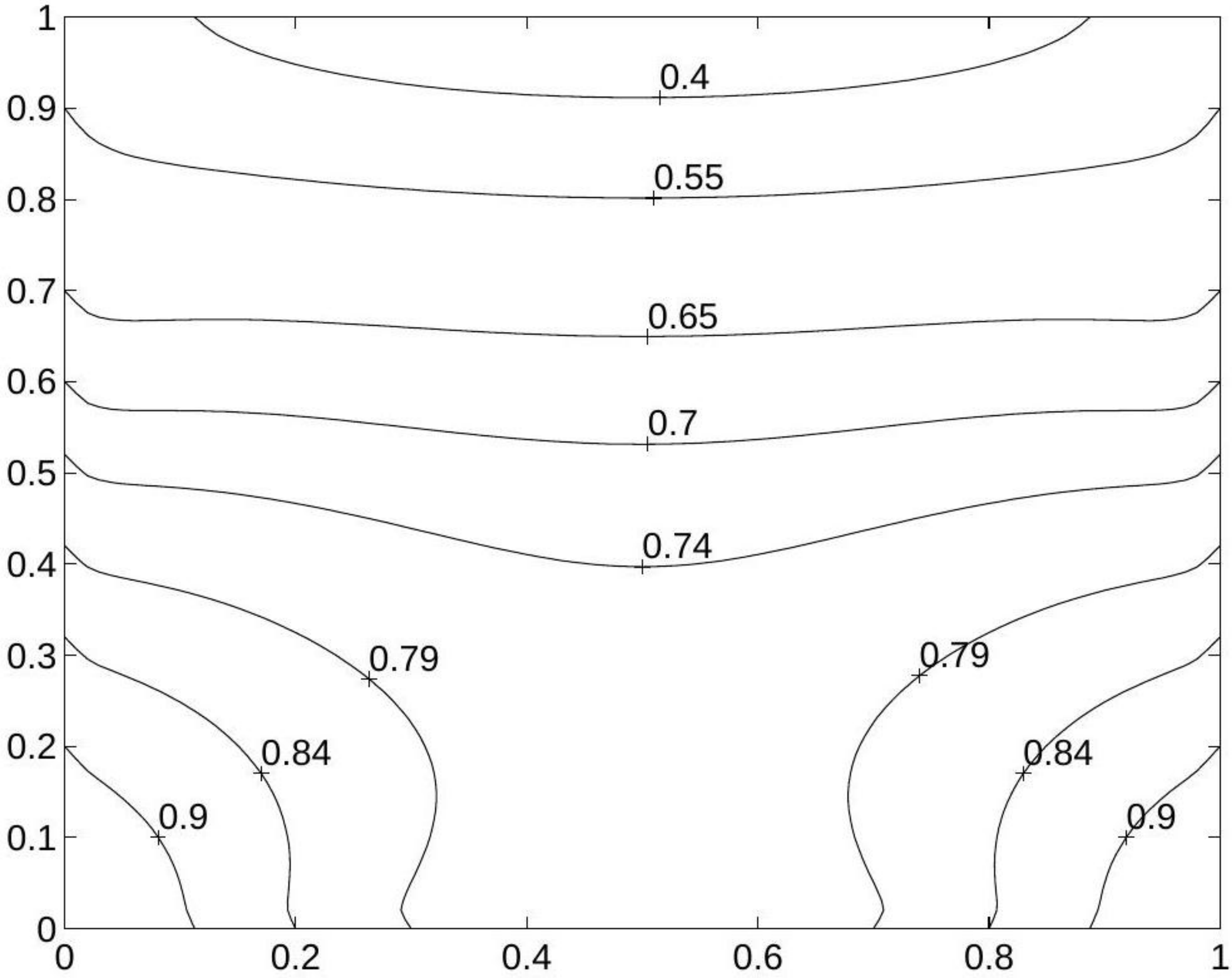


Рисунок 4.5 — Поле температуры, полученное в статье [104]

Для нахождения решения начально-краевой задачи (3.1)–(3.3) мы дискретизируем временной интервал $(0, T)$, $\quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$. Для каждого момента времени $t = t_l = l\Delta t$, $l = 1{,}2, \ldots, N$, используется итерационный алгоритм для нахождения решения соответствующей краевой задачи. n-й шаг итерационной процедуры $(n = 1{,}2, \ldots, M)$ записывается следующим образом:

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi_n) + \beta \left(\varphi_n - \theta_{n-1}^3 \left|\theta_{n-1}\right|\right) = g, \tag{4.3}$$

$$\sigma \partial \theta_n / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta_{n-1}) \nabla \theta_n) - b \left(\theta_{n-1}^3 \left|\theta_n\right| - \varphi_n\right) = f, \quad x \in \Omega, \tag{4.4}$$

$$k(\theta_{n-1}) \partial_n \theta_n + p(\theta_n - \theta_b)\big|_\Gamma = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi_n + \gamma \left(\varphi_n - \theta_b^4\right)\big|_\Gamma = 0, \tag{4.5}$$

где производная по времени в (4.4) аппроксимируется следующим образом

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} \simeq \frac{\theta_n|_{t=t_l} - \theta_M|_{t=t_{l-1}}}{\Delta t},$$

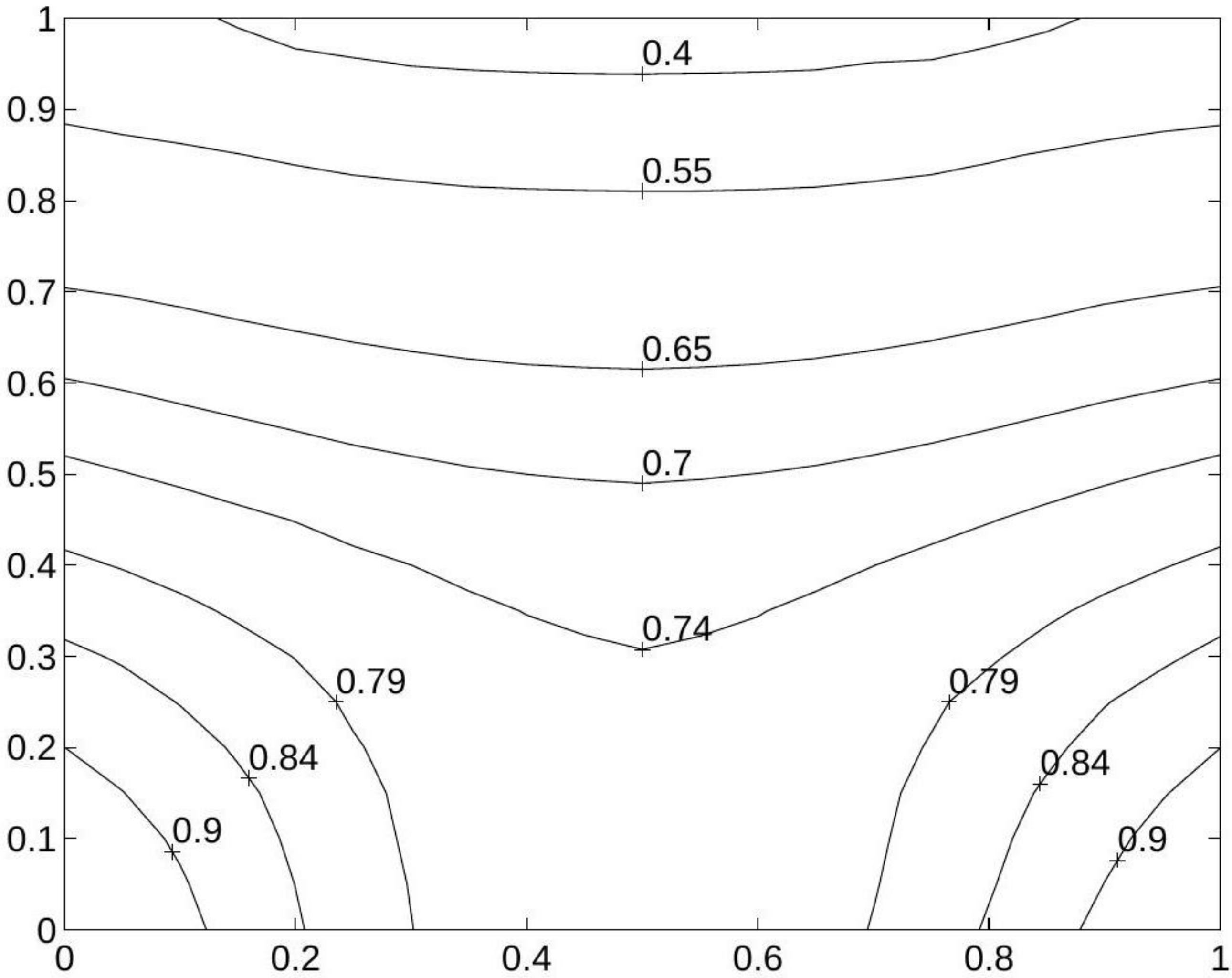


Рисунок 4.6

и функции $\theta_n, \theta_{n-1}, \varphi_n$ в (4.3)–(4.5) являются приближениями решения, соответствующими моменту времени $t = t_l$. Подстрочный индекс функций θ_n, θ_{n-1} и φ_n означает номер итерации. Для инициализации итерационной процедуры задаем начальное приближение температуры для каждого момента времени:

$$\theta_0|_{t=t_l} = \theta_M|_{t=t_{l-1}}, \quad l = 1,2,\ldots,N, \quad \theta_M|_{t=t_0} = \theta_{in}. \tag{4.6}$$

В уравнениях (4.3),(4.4) $g = P_\varphi \chi / \mathcal{M}\varphi, f = P\theta\chi/\mathcal{M}\theta$, где $P\varphi$ - мощность источника, расходуемая на излучение, P_θ описывает мощность источника, расходуемую на нагрев кончика волокна, χ - характеристическая функция части среды, в которой расположен кончик волокна, деленная на объем кончика волокна, $\mathcal{M}\varphi$ и $\mathcal{M}\theta$ - нормализующие коэффициенты для получения средней интенсивности излучения и абсолютной температуры из φ и θ.

Для реализации каждого шага итерационного алгоритма (4.3)–(4.6) использовался метод конечных элементов с использованием программного пакета

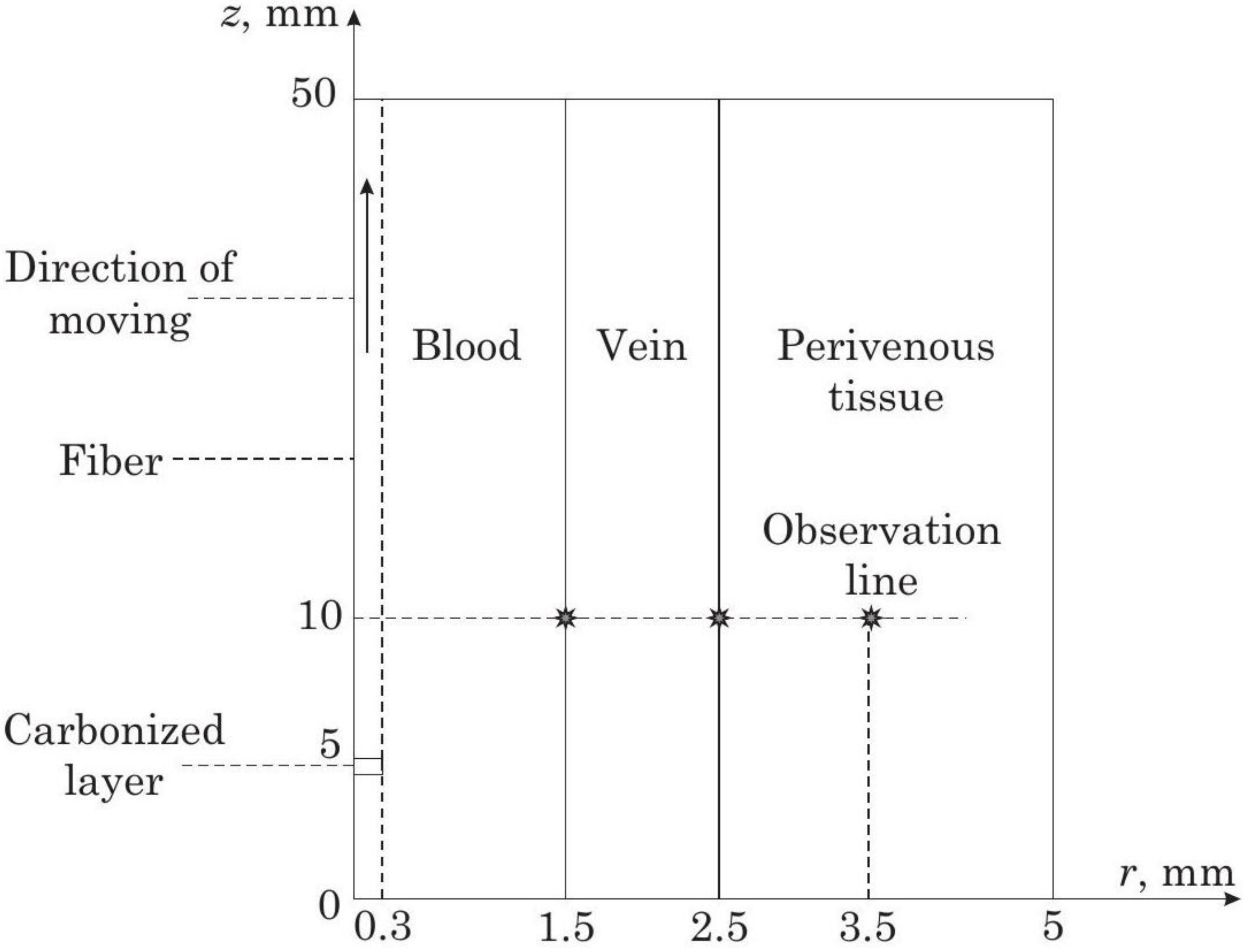


Рисунок 4.7

FreeFEM++[120]. Оптические и термофизические параметры среды взяты из [66]. Параметры θ_b и θ_{in} соответствуют температуре 37°C, а коэффициент γ равен 1. Во всех расчетах начальное положение кончика оптического волокна соответствует $(r, z) = (0{,}5)$, и его скорость отката составляет 2 /. Следуя [10, 11], мы моделируем теплоперенос потоком пузырьков, образующихся на горячем кончике волокна, через коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры, как следующим образом: когда температура в определенной точке достигает 95°C и выше, коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз.

Эффективность лазерной абляции можно оценить по поведению температурных профилей в различных точках вычислительной области. Основные параметры процедуры лазерной абляции – мощность лазера, длина волны излучения, скорость отката оптического волокна и соотношение между мощностями лазера, затрачиваемыми на излучение и нагрев кончика волокна.

Отметим,что решение проблемы (3.1)–(3.3) зависит от длины волны неявным образом, через параметры α и β, описывающие свойства излучения среды (смотрите таблицы значений коэффициента поглощения и коэффициента уменьшения рассеяния, определяющие параметры α и β [66, 67]. Как правило, лазерная абляция осуществляется излучением с длиной волны от 810 до 1950 . Достаточно широко используемые диапазоны скорости отката волокна и мощности лазерного излучения составляют $1-3$ / и $5-15$ соответственно [69, 66, 67].

Рисунок 2 показывает поведение температурных профилей в точке (1.5,10) для излучения с различными длинами волн: 810 , 1064 , 1470 и 1950 . Мощность источника устанавливается как $(P_\varphi, P_\theta) = (7\ , 3\ )$ во всех случаях. Как видно из Рисунка 2, изменение длины волны излучения оказывает значительное влияние на поведение температурного профиля. Тем не менее, возможно обеспечить достаточно близкую продолжительность кипения (когда температура выше 95°C) для температурных профилей, соответствующих разным длинам волн, изменив мощность лазера $P = P_\varphi + P_\theta$, сохраняя соотношение P_φ/P_θ равным 7/3 (смотри Рисунок 3). Отметим, что рассчитанная температура в точках перивенозной ткани, (2.5,10) и (3.5,10), довольно безопасна (смотри Рисунок 4).

Как видно из проведенных экспериментов, использование компьютерного моделирования является перспективным способом определения оптимальных параметров излучения, обеспечивающих эффективную и безопасную процедуру ЭВЛА.

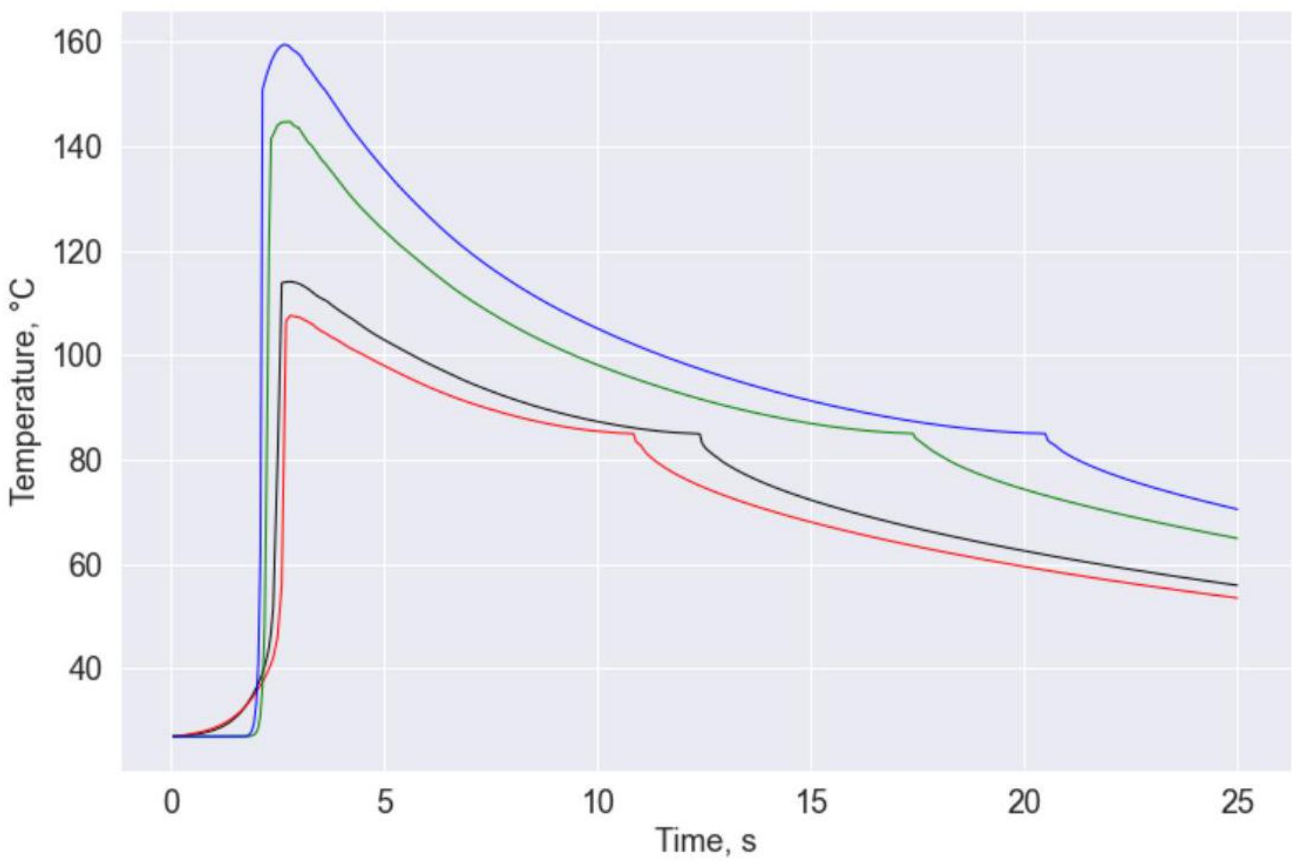


Рисунок 2: Температурные профили в точке (1.5,10) для мощности лазера 10 и для разных длин волн: 810 (черный), 1064 (красный), 1470 (зеленый) и 1950 (синий).

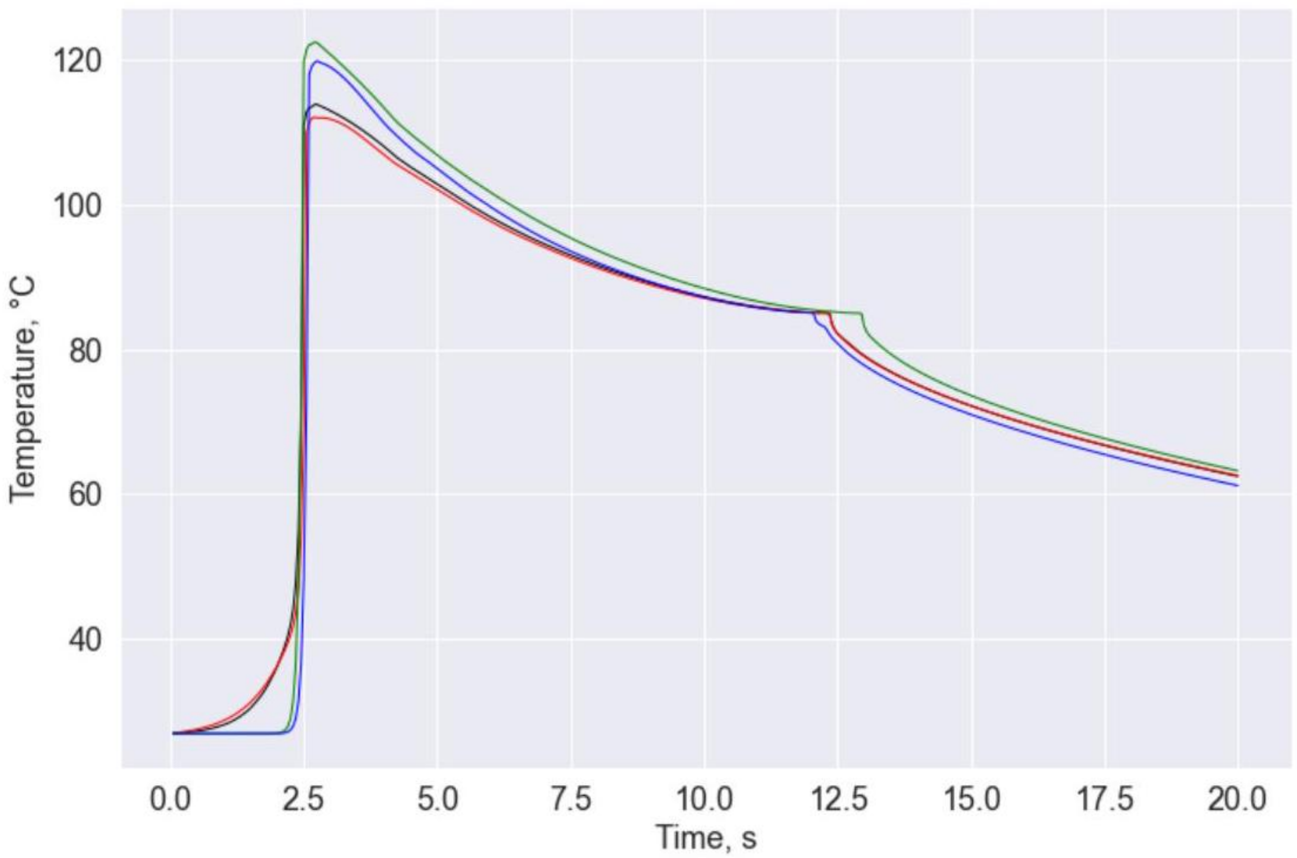


Рисунок 3: Температурные профили в точке (1.5,10) для разных длин волн и мощности лазера: 810 , $P = 10$ (черный); 1064 , $P = 11$ (красный); 1470 , $P = 7.5$ (зеленый); 1950 , $P = 6$ (синий).

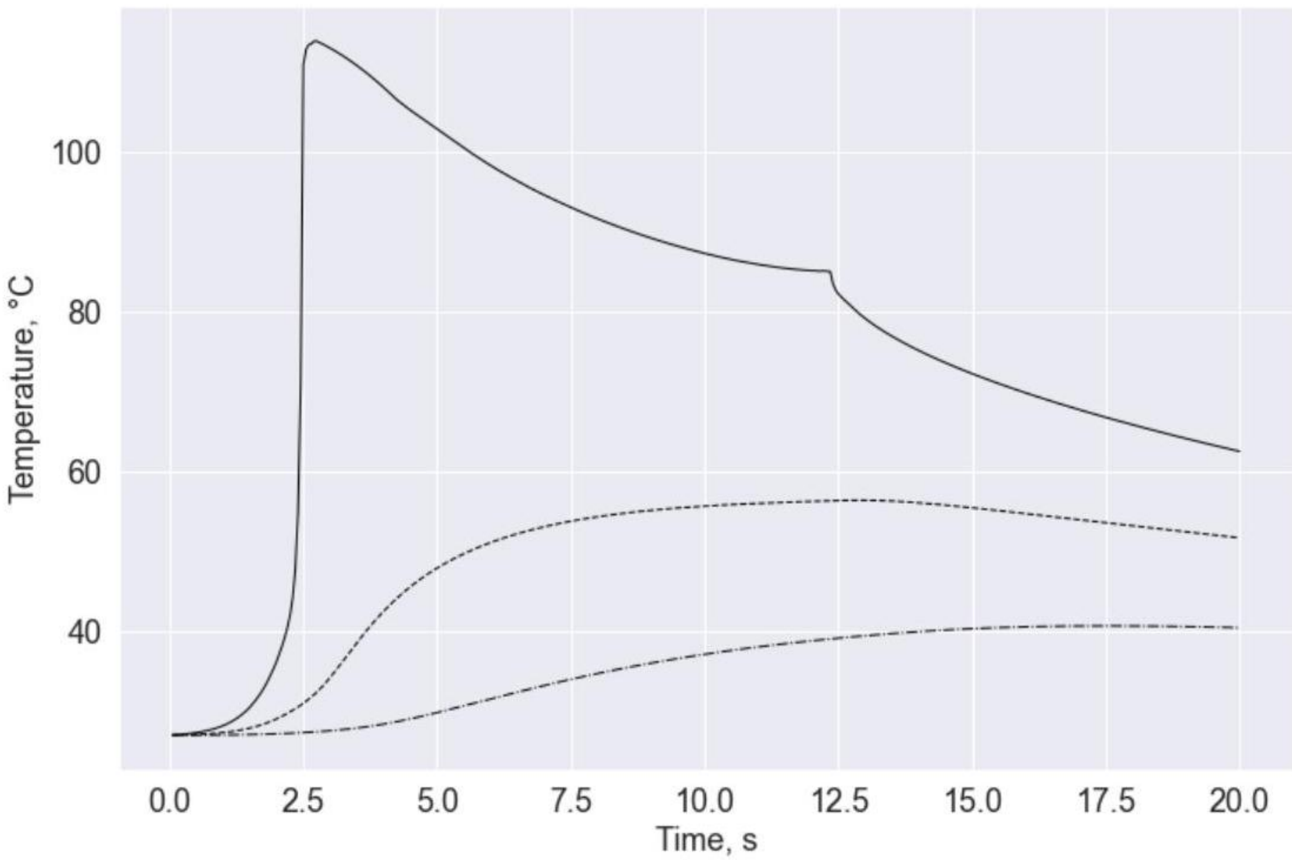


Рисунок 4: Температурные профили в точках (1.5,10) (сплошной), (2.5,10) (пунктирный) и (3.5,10) (точка-тире). Длина волны составляет 810 , $(P_\varphi, P_\theta) =$ (7 , 3)

4.3.4 метод штрафов для задачи с фазовыми ограничениям

Рассмотрим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления (P_ε) для случая, когда параметры управления u_1 и u_2 не зависят от времени. На каждой итерации алгоритма решается линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой требуется найти минимум функционала:

$$\begin{aligned} \widehat{J}_\varepsilon(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 \, dxdt \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{G_*} (\theta - \theta_*)^2 \, dxdt \to \inf, \quad u \in U_{ad} \end{aligned} \tag{4.7}$$

с соответствующими ограничениями

$$\begin{aligned} &\sigma\partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\widehat{\theta})\nabla\theta) = u, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \\ &\theta|_\Gamma = 0, \quad \theta(x,0) = \theta_0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь,

$$U_{ad} = \left\{ u = u_1\chi + u_2\beta B^{-1}\chi : u_{1,2} \in \mathbb{R}, \right.$$
$$\left. u_{1,2} \geqslant 0, u_1 + u_2 \leqslant P \right\},$$
$$G_* = \left\{ x \in G_2 : \hat{\theta}(x,t) > \theta_* \right\}.$$

Функция $\widehat{\theta}$ описывает поле температуры, найденное на предыдущей итерации.

В качестве зависимости коэффициента теплопроводности от температуры используется гладкая аппроксимация кусочно-постоянной функции, рассмотренной в [66, 67, 68],

Как легко видеть, задача (4.7),(4.8) сводится к нахождению минимума квадратичной функции параметров u_1 и u_2:

$$\widehat{J}_\varepsilon \left(u_1\Theta_1 + u_2\Theta_2 + \Theta_3 \right) \to \inf$$

на треугольнике $\{u_1, u_2 \in \mathbb{R} : u_{1,2} \geqslant 0, u_1 + u_2 \leqslant P\}$. Функции Θ_1, Θ_2 и Θ_3 вычисляются заранее как решения следующих линейных начально-краевых задач для $x \in \Omega, t \in (0,)$:

$$\begin{aligned} &\sigma\partial\Theta_1/\partial t - \operatorname{div}\left(k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_1\right) = \chi, \\ &\Theta_1|_\Gamma = 0, \quad \Theta_1(x,0) = 0 \\ &\sigma\partial\Theta_2/\partial t - \operatorname{div}\left(k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_2\right) = \beta B^{-1}\chi, \\ &\Theta_2|_\Gamma = 0, \quad \Theta_2(x,0) = 0 \\ &\sigma\partial\Theta_3/\partial t - \operatorname{div}\left(k(\widehat{\theta})\nabla\Theta_3\right) = 0 \\ &\Theta_3|_\Gamma = 0, \quad \Theta_3(x,0) = \theta_0. \end{aligned}$$

При проведении численных экспериментов использовалась модельная область в цилиндрической системе координат с угловой симметрией, как показано на рисунке 1. Толщина карбонизированного слоя равна 0,2 , скорость вытягивания волокна 2 /s. Рассматривалось излучение с длиной волны 1064 . Оптические и теплофизические параметры среды взяты из [66, 67, 68].

Для демонстрации сходимости итерационного алгоритма в качестве решения прямой начально-краевой задачи для $(u_1, u_2) = (3{,}7)$ (здесь и далее единицы в ваттах). Области G_1 и G_2 берутся как достаточно малые окрестности точек (1.5,10),(3.5,10). Для реализации итерационного алгоритма мы взяли $\varepsilon = 0.3$ и θ_*, соответствующие 47°C.

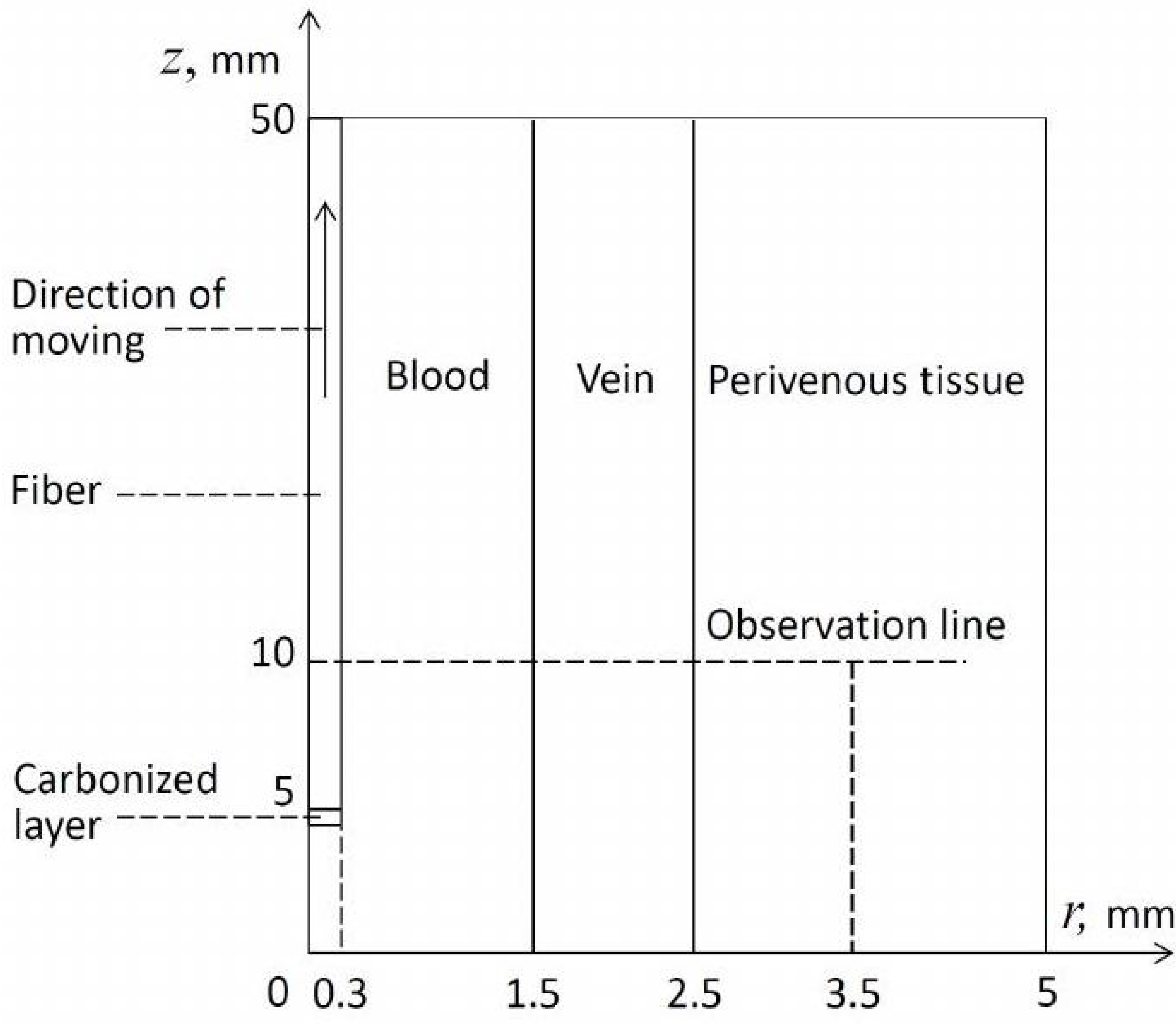


Рисунок 1: Область.

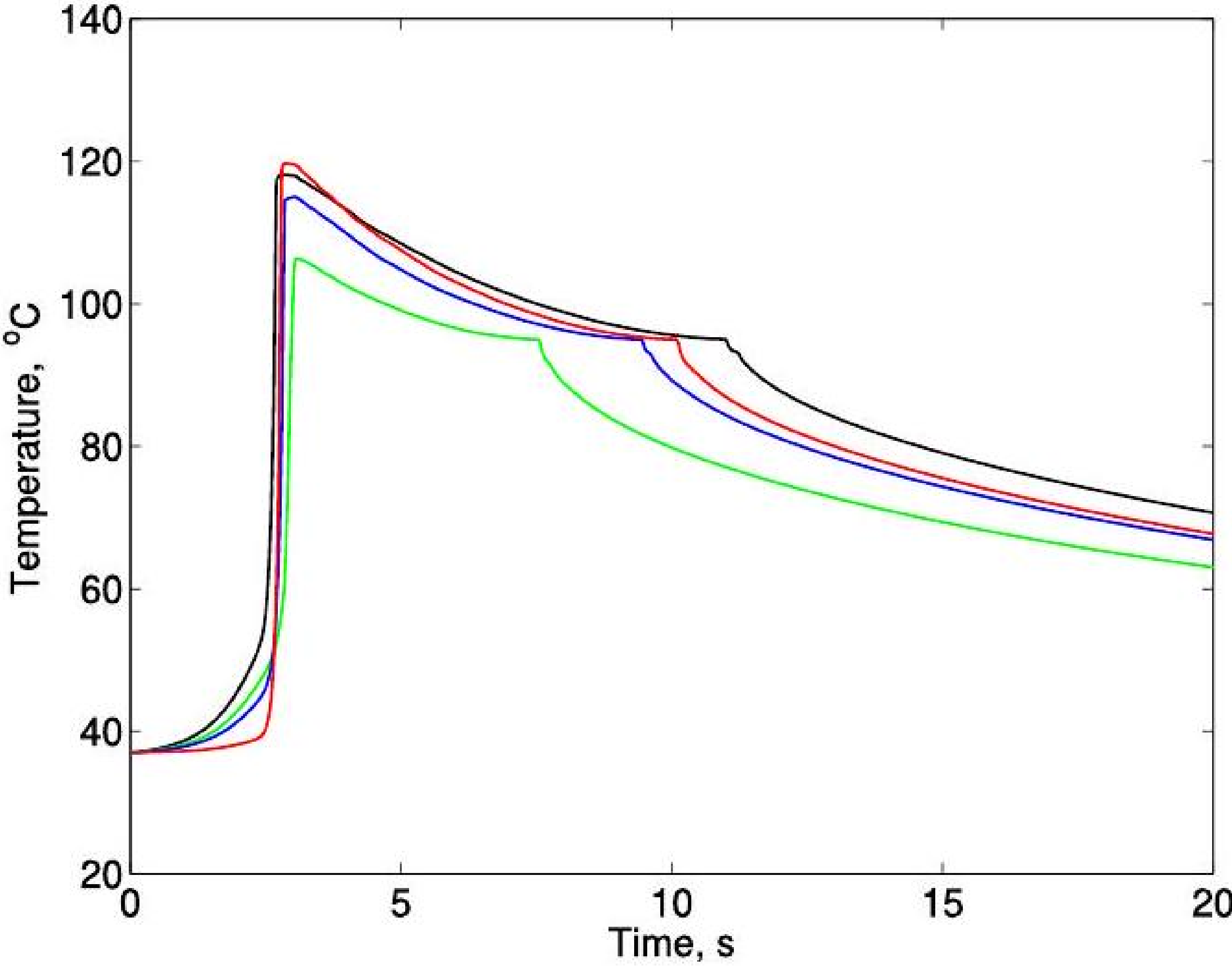


Рисунок 2: Температурные профили: желаемая температура (черный), 1-е (зеленое), 2-е (синее) и 3-е (красное) приближения.

Аппроксимации решения в точке (1.5,10) показаны на рисунке 2. Аппроксимации после 1-го, 2-го и 3-го шагов итерационного алгоритма отмечены зеленым цветом ($(u_1, u_2) =$ (2.5,4.8)), синим ($(u_1, u_2) =$ (3.4,3.5)) и красным ($(u_1, u_2) =$ (4.2,0.9)) соответственно. Черная линия показывает желаемую температуру, соответствующую (u_1, u_2) = (3,7). Максимальное значение температуры в точке (3.5,10) равно 48,8°C. Отметим, что при (u_1, u_2) = (3,7) максимальное значение температуры в точке (3.5,10) равно 50,2°C.

Эксперимент демонстрирует возможность снижения температуры в околовенозной ткани при сохранении температурного режима внутри вены.

4.4 Алгоритмы решения задач с данными Коши. Примеры.

4.4.1 Решение задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа коши

Представим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления. Пусть $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$, где $\theta(u)$ компонента решения задачи (2.18),(2.20), соответствующая управлению $u \in U$.

В соответствии с (2.33) градиент функционала $\tilde{J}_\lambda(u)$ равен

$$\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2.$$

Здесь p_2 – соответствующая компонента сопряженного состояния из системы (2.33), где $\hat{\theta} := \theta(u)$.

Значение параметра ε выбирается эмпирически таким образом, чтобы значение $\varepsilon(\lambda u_k - p_2)$ являлось существенной поправкой для u_{k+1}. Количество итераций N выбирается достаточным для выполнения условия $J_\lambda(\theta_k, u_k) - J_\lambda(\theta_{k+1}, u_{k+1}) < \delta$, где $\delta > 0$ определяет точность расчетов.

Примеры, рассмотренные ниже, иллюстрируют работоспособность предложенного алгоритма при малых, что важно, значениях параметра регуляризации $\lambda \leqslant 10^{-12}$. В первом примере выполнены тестовые расчеты для куба. Во втором примере приводится сравнение расчетов по предложенному алгоритму с результатами работы [104].

Отметим, что для численного решения прямой задачи с заданным управлением использовался метод простой итерации для линеаризации задачи и ее решения методом конечных элементов. Решение сопряженной системы, которая является линейной при заданной температуре, не вызывает трудностей. Для численного моделирования использовался солвер FEniCS [121, 122].

Исходный код экспериментов можно найти по ссылке [123].

Пример 1.

Приведем примеры расчетов для куба $\Omega = (x, y, z), 0 \leqslant x,y,z \leqslant l$. Будем считать, что $l = 1$ см, $a = 0.006$[см^2/с], $b = 0.025$[см/с], $\kappa_a = 1$[см$^{-1}$], $\alpha = 0.(3)$[см]. Указанные параметры соответствуют стеклу [107]. Параметр регуляризации $\lambda = 10^{-12}$.

Пусть граничные данные r и u в (2.19) имеют вид:

$$r = 0.7,$$
$$u = \hat{u} = 0.5.$$

Далее рассчитываем состояние θ и φ как решение задачи (2.18),(2.19) и в качестве θ_b выбираем граничное значение функции θ на Γ. Значения нормальной производной $\partial_n\theta$ на Γ должны соответствовать значениям $q_b = r/a - \theta_b$. Применяя предложенный алгоритм с начальным приближением $u_0 = 0.1$, находим приближенное решение $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ задачи (CP). Для демонстрации того, что алгоритм находит приближенное решение задачи с данными Коши для температуры, важно сравнить значения $\partial_n\theta_\lambda$ на Γ с q_b.

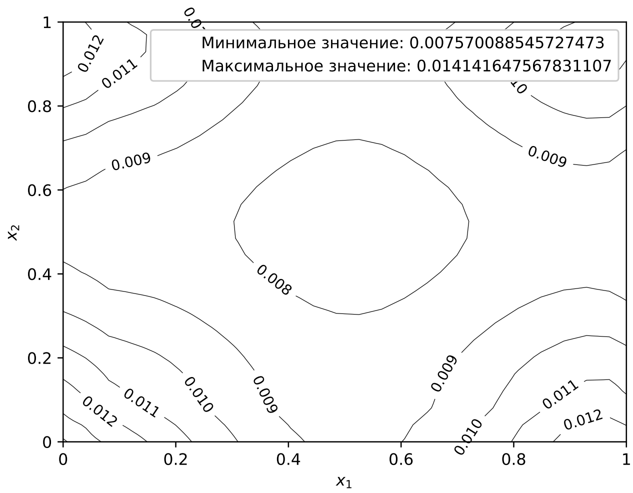
На рисунке **??** представлен модуль относительного отклонения $\partial_n\theta_\lambda$ от q_b на грани куба в плоскости $z = l$, где $\partial_n\theta_\lambda = \partial\theta_\lambda/\partial z$, а также динамика функционала качества, определяющего норму разности $\|\theta_\lambda - \theta_b\|^2_\Gamma$ на рисунке **??**. На остальных гранях куба значения относительного отклонения имеют тот же порядок малости.

Пример 2. Сравним работу предложенного алгоритма с результатами статьи [104], где соавтором был один из авторов данной работы. Задача рассматривается в области $\Omega \times (-L,L)$, где $\Omega = \{x = (x_1,x_2)\colon 0 < x_{1,2} < d\}$ и при больших L сводится к двумерной задаче с вычислительной областью Ω. Выбраны следующие значения параметров задачи: $d = 1$(m), $a = 0.92\ 10^{-4}$ (m^2/s), $b = 0.19$ (m/s), $\alpha = 0.0333$ (m) и $\kappa_a = 1$ (m^{-1}). Параметры соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400°C.

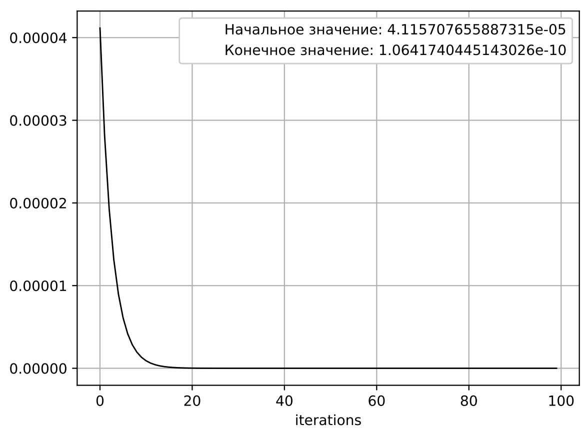
Функции θ_b, q_b в краевом условии (2.20) заданы следующим образом: $\theta_b = \widehat{\theta}|_\Gamma$, $q_b = \partial_n\widehat{\theta}|_\Gamma$, где $\widehat{\theta} = (x_1 - 0.5)^2 - 0.5x_2 + 0.75$.

Приближенное решение задачи с данными Коши, представленное в [104] получено путем решения эллиптической задачи четвертого порядка для температуры методом установления по времени. Использовались H^2 конформные конечные элементы Богнера-Фокса-Шмитта и солвер FeliCs, разработанный в техническом университете Мюнхена. Решение стабилизировалось через 120 секунд, но вычисления на каждом временном шаге потребовали довольно значительных затрат [104].

На рис. **??** представлено температурное поле, полученное предложенным в данной статье методом, достаточно точно совпадающее с результатом в [104]. Величина $\|\partial_n\theta_\lambda - q_b\|_{L^2(\Gamma)}/\|q_b\|_{L^2(\Gamma)}$ равна 0.000567. Значение функционала



[$|\partial_n \theta_\lambda - q_b|/|q_b|$] [Изменение



функционала качества по итерациям]

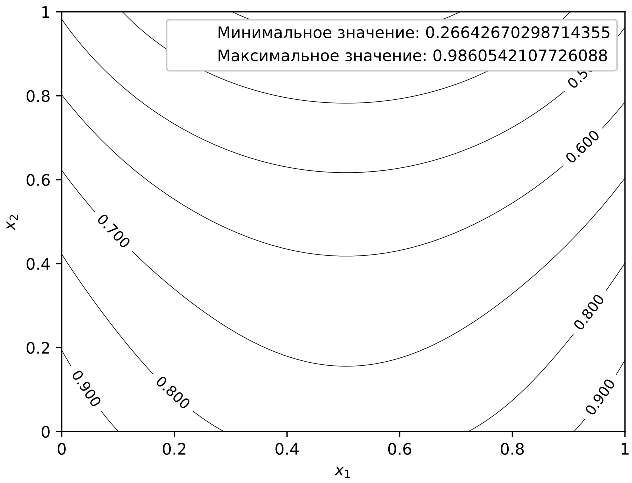
Рисунок 4.8 — Результаты первого эксперимента

качества, определяющего норму разности $\|\theta_\lambda - \theta_b\|^2_\Gamma$, равно 0.000255 и стабилизируется после 10 итераций **??**.

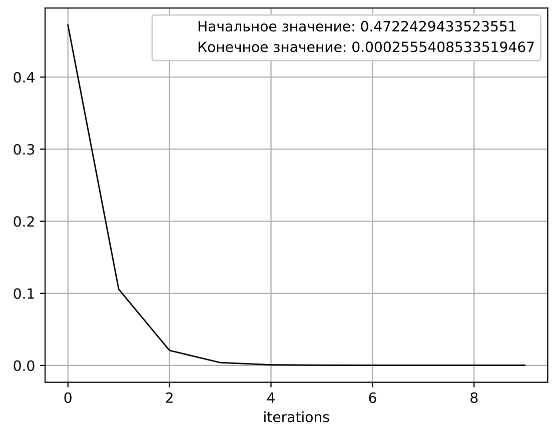
Представленные численные примеры иллюстрируют, что предложенный алгоритм успешно справляется с нахождением численного решения задачи (2.18)–(2.20).

Пример 3. Положим в условии (2.19) $r = 0.8\cos(x) + 0.1$, $u = \hat{u} = y$. Далее рассчитываем состояние θ и φ как решение задачи (2.18)–(2.20) и в качестве θ_b выбираем граничные значения функции θ на Γ. Применяя предложенный алгоритм с начальным приближением $u_0 = 0.1$, находим приближенное решение задачи (C). Квадрат разницы тестового и найденного решения представлен на рисунке **??**, а также динамика функционала качества рисунке **??**.

Пример 4. Зададим функции θ_b, q_b в краевом условии (2.20) следующим образом:



[Полученное решение θ] [Изменение



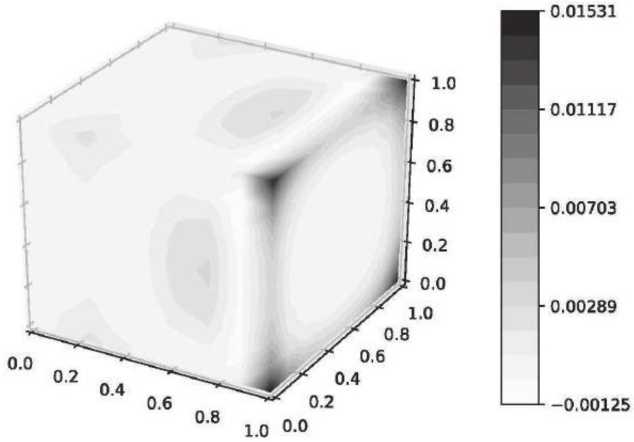
функционала качества]

Рисунок 4.9 — Результаты второго эксперимента

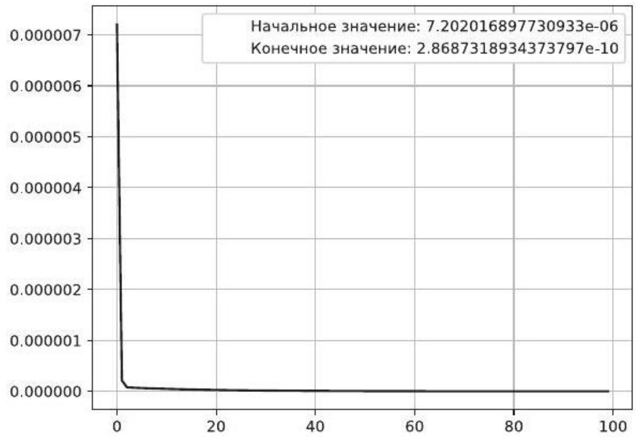
$$\theta_b = 0.1z + 0.3, \quad q_b = \begin{cases} 0.11, & \text{если } z = 1, \\ 0, & \text{если } 0 < z < 1, \\ -0.15, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

В данном примере оптимальное управление u в качестве тестового не задается. На рисунках **?? ??** представлен результат работы алгоритма.

Компоненты состояния, соответствующие найденному управлению, представлены на рисунках **????**.



$[(\hat{u} - u_{100})^2]$



[Изменение функционала в зависимости от числа итераций]

Рисунок 4.10 — Результаты третьего эксперимента

4.4.2 Задача сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы

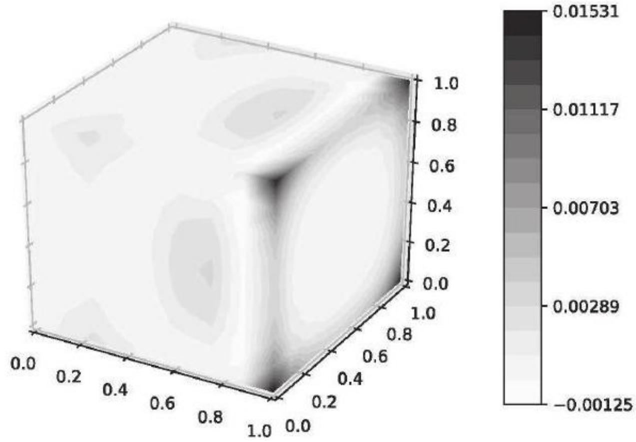
Представим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления. Пусть $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$, где $\theta(u)$ компонента решения задачи (2.54),(2.56), соответствующая управлению $u \in U$.

В соответствии с (2.70) градиент функционала $\tilde{J}_\lambda(u)$ равен

$$\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2.$$

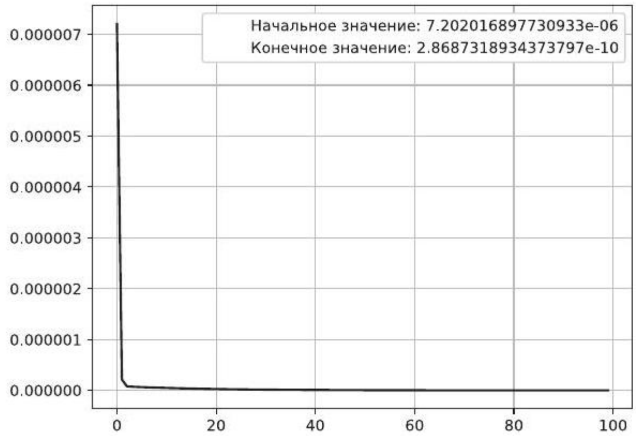
Здесь p_2 – соответствующая компонента сопряженного состояния из системы (2.70), где $\hat{\theta} := \theta(u)$.

Значение параметра ε выбирается эмпирически таким образом, чтобы значение $\varepsilon(\lambda u_k - p_2)$ являлось существенной поправкой для u_{k+1}. Количество итераций N выбирается достаточным для выполнения условия $J_\lambda(\theta_k, u_k) - J_\lambda(\theta_{k+1}, u_{k+1}) < \delta$, где $\delta > 0$ определяет точность расчетов.



[Оптимальное управление]

[Изменение функционала в зависимости от числа итераций]



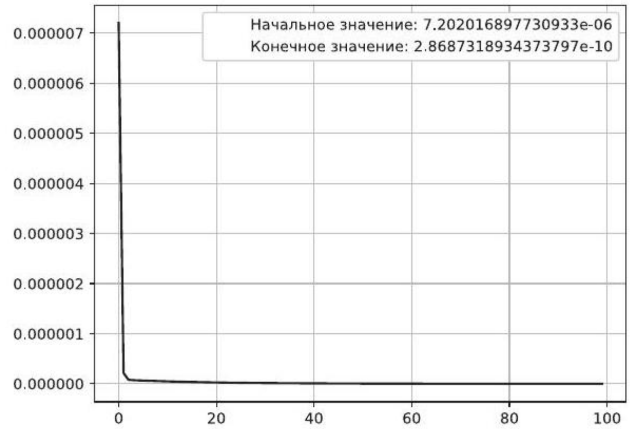
Примеры, рассмотренные ниже, иллюстрируют работоспособность предложенного алгоритма при малых, что важно, значениях параметра регуляризации $\lambda \leqslant 10^{-12}$. В первом примере выполнены тестовые расчеты для куба. Во втором примере рассмотрен куб с внутренней полостью. Для численного решения прямой задачи с заданным управлением использовался метод Ньютона для линеаризации задачи и ее решения методом конечных элементов. Решение сопряженной системы, которая является линейной при заданной температуре, не вызывает трудностей. Для численного моделирования использовался солвер FEniCS [121],[122].

Исходный код экспериментов можно найти по ссылке [123].

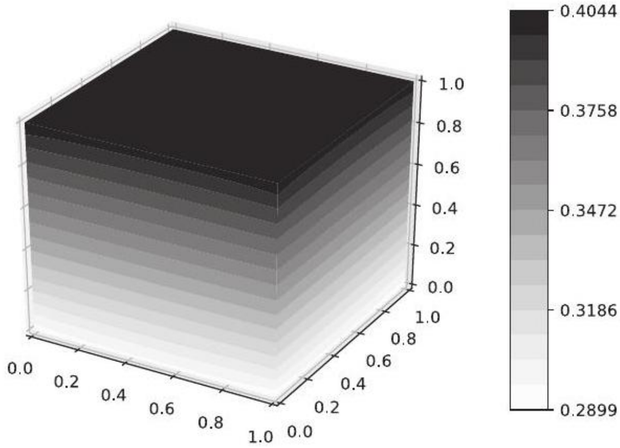
Пример 1. Рассмотрим куб $\Omega = (x, y, z), 0 \leqslant x,y,z \leqslant l$ с границей $\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z), 0 \leqslant x,y, \leqslant l, z \in 0, l\},\ \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \hat{\Gamma_1}.$$

Будем считать, что $l = 1$ см, $a = 0.6[\text{см}^2/\text{с}]$, $b = 0.025[\text{см/с}]$, $\kappa_a = 1[\text{см}^{-1}]$, $\alpha = 0.(3)[\text{см}]$. Указанные параметры соответствуют стеклу [107]. Параметр регуляризации $\lambda = 10^{-12}$.



[Температура θ] [Излучение φ]



Пусть граничные данные q_b и θ_b в (2.55),(2.56) имеют вид:

$$q_b = 0.5, \quad \theta_b = 0.1 + z/2$$

на все границе, а также начальное управление $u_0 = 0$. Используя предложенный алгоритм решим задачу оптимального управления.

На фиг. **??**, **??** представлены полученные решения θ и φ. Начальное значение функционала качества равно 0.025 и через сотню итераций становится равным $5.e-05$.

Пример 2. Рассмотрим двумерный случай: имеется квадрат $S = \{(x, y), 0 \leqslant x,y,z \leqslant 1$ см.$\}$ с круговой полостью R с центром $b_0 = \{0.5, 0.5\}$ $R = \{r, \|r - b_0\| \leqslant 0.15$ см.$\}$. Рассматриваемая область $\Omega = S \setminus R$. $\Gamma \equiv \partial\Omega = \partial C \cup \partial B$ при чём

$$\Gamma_2 = \partial R, \Gamma_1 = \partial S \setminus \Gamma_2.$$

$[\theta|_{z=1}]$ $[\varphi|_{z=1}]$

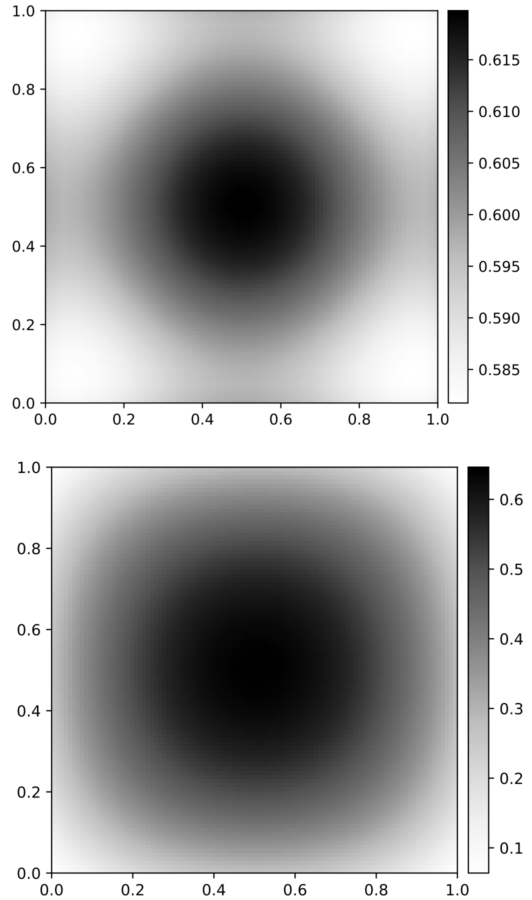


Рисунок 4.11 — Результаты первого эксперимента

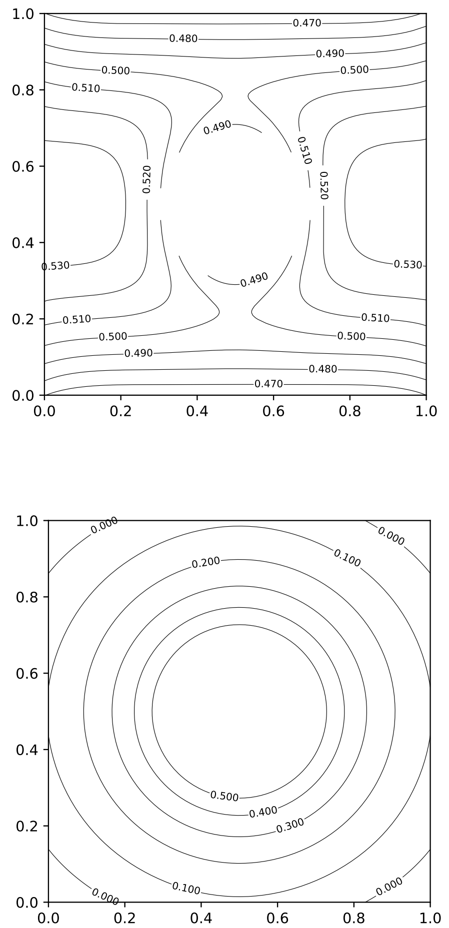
Параметры среды возьмём из примера 1. Граничные данные q_b и θ_b положим равными

$$\theta_b = 0.5,$$

$$q_b = \begin{cases} 0.2, & \text{если } x \in \Gamma_1 \\ -0.2, & \text{если } x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Начальное значение функционала качества 0.045. После тридцати итераций $6.2 - 05$. Полученное состояние представлено рисунками **??**,**??**.

Представленные численные примеры демонстрируют, что предложенный алгоритм успешно справляется с нахождением численного решения задачи (2.54)–(2.56).



[θ] [φ]

Рисунок 4.12 — Результаты второго эксперимента

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем. В диссертации доказано существование квазирешения задачи нахождения коэффициента отражения участка границы для стационарной модели, по дополнительной информации о температурном поле. Экспериментально поверена устойчивость получаемых решений методом градиентного спуска. Таким образом, получены важные с теоретической точки зрения результаты, которые могут быть полезны при дальнейшем использовании стационарных моделей сложного теплообмена и анализе обратных задач в рамках нестационарных моделей сложного теплообмена. Развитые методы исследования начально-краевых задач могут применяться для изучения различных моделей, описываемых нелинейными уравнениями со сходной структурой.

Разработанный комплекс программ для постановки численных экспериментов показал свою надёжность и может в дальнейшем быть использован как пример для решения подобных задач.

Разработан комплекс программ для проведения вычислительных экспериментов. Для презентации результатов расчётов, помимо самих солверов, был разработан программный комплекс для отрисовки полученных расчётов в трёхмерных областях.

Исследование нестационарных моделей сложного теплообмена и соответствующих им обратных задач является крайне перспективной областью математического моделирования и в то же время достаточно сложной для теоретического анализа и реализации численных решений. Более широкий класс процессов может быть покрыт задачами на оптимальное управление многими переменными среды, что позволяет более точно находить решения для инженерных задач. В заключении автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Чеботареву А. Ю. за его поддержку, помощь, терпеливость и личный пример, который сделал данную работу возможной.

Особую признательность автор хочет выразить Байдину А. В., Бризицкому Р. В., Артемьевой И. Л., чья поддержка оказалась неоценимой в написании данной работы, Кленину А. С., который стал источником мотивации в написании данного труда, и Алексееву Г. В. за помощь в первых шагах научной деятельности автора.

Автор хотел бы отдельно поблагодарить Месенева В. П. за его неоценимый вклад в становление автора и бесконечную сопричастность к данной работе.

Словарь терминов

TeX : Система компьютерной вёрстки, разработанная американским профессором информатики Дональдом Кнутом

панграмма : Короткий текст, использующий все или почти все буквы алфавита

Список литературы

[1] А.Н. Тихонов и А.А. Самарский. — *Уравнения математической физики.* — Москва: Наука, 1972, — С. 736.

[2] Олег Михайлович Алифанов. — *Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена.* — 2009.

[3] James V Beck, etc. и C R St. Clair. — *Inverse heat conduction.* — Nashville, TN: John Wiley & Sons, нояб. 1985.

[4] T. Tiihonen. — «A nonlocal problem arising from heat radiation on non-convex surfaces». — В: *European J. Appl. Math.* 8.4 (1997), с. 403—416.

[5] T. Tiihonen. — «Stefan-Boltzmann radiation on non-convex surfaces». — В: *Math. Methods Appl. Sci.* 20.1 (1997), с. 47—57.

[6] M Metzger. — «Existence for a time-dependent heat equation with non-local radiation terms». — В: *Math. Methods Appl. Sci.* 22.13 (1999), с. 1101—1119.

[7] А. А. Амосов. — «Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением». — В: *Дифференциальные уравнения* 41.1 (2005), с. 93—104.

[8] А. А. Амосов. — «Разрешимость стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в системе серых тел». — В: *Вестник МЭИ* 6 (2009), с. 72—93.

[9] P. Philip. — «Analysis, optimal control, and simulation of conductive-radiative heat transfer». — В: *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.* 2 (2010), с. 171—204.

[10] А. А. Амосов. — «Нестационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения». — В: *Современная математика. Фундаментальные направления* 59 (2016), с. 5—34.

[11] А. А. Амосов. — «Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения». — В: *Журнал вычислительной математики и математической физики* 57.3 (2017), с. 510—535.

[12] AA Amosov. — «Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency». — В: *J. Math. Sci.* 164.3 (2010), с. 309—344.

[13] Pierre-Emmanuel Druet. — «Weak solutions to a stationary heat equation with nonlocal radiation boundary condition and right-hand side in $L_p(p \geqslant 1)$». — В: *Math. Methods Appl. Sci.* 32.2 (2009), с. 135—166.

[14] Pierre-Emmanuel Druet. — «Weak solutions to a time-dependent heat equation with nonlocal radiation boundary condition and arbitrary p-summable right-hand side». — В: *Appl. Math.* 55.2 (2010), с. 111—149.

[15] M. Laitinen и T. Tiihonen. — «Conductive-radiative heat transfer in grey materials». — В: *Quart. Appl. Math.* 59 (2001), с. 737—768.

[16] F Asllanaj и др. — «Existence and uniqueness of a steady state solution of a coupled radiative-conductive heat transfer problem for a non-grey anisotropically and participating medium». — В: *Transport Theory and Statistical Physics* 32.1 (2003), с. 1—35.

[17] C. T. Kelley. — «Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations». — В: *Transport Theory Statist. Phys.* 25.2 (1996), с. 249—260.

[18] Mohamed Ghattassi, Jean-Rémi Roche и Denis Schmitt. — «Existence and uniqueness of a transient state for the coupled radiative-conductive heat transfer problem». — В: *Computers & Mathematics with Applications* 75.11 (2018), с. 3918—3928.

[19] M. M. Porzio и O. López-Pouso. — «Application of accretive operators theory to evolutive combined conduction, convection and radiation». — В: *Rev. Mat. Iberoamericana* 20.1 (2004), с. 257—275.

[20] M. Thompson, C. Segatto и M. de Vilhena. — «Existence theory for the solution of a stationary nonlinear conductive-radiative heat-transfer problem in three space dimensions». — В: *Transport Theory Statist. Phys.* 33.5-7 (2004), с. 563—576.

[21] F. Asllanaj, G. Jeandel и J. R. Roche. — «Convergence of a numerical scheme for a nonlinear coupled system of radiative-conductive heat transfer equations». — В: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 14.7 (2004), с. 943—974.

[22] F. Asllanaj, G. Parent и G. Jeandel. — «Transient radiation and conduction heat transfer in a gray absorbing-emitting medium applied on two-dimensional complex-shaped domains». — В: *Numerical Heat Transfer, Part B* 52.2 (2007), с. 179—200.

[23] J M Banoczi и CT Kelley. — «A fast multilevel algorithm for the solution of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations in two space dimensions». — В: *SIAM Journal on Scientific Computing* 20.4 (1999), с. 1214—1228.

[24] Mohamed Ghattassi и др. — «Galerkin method for solving combined radiative and conductive heat transfer». — В: *International Journal of Thermal Sciences* 102 (2016), с. 122—136.

[25] O. Klein и P. Philip. — «Transient conductive-radiative heat transfer: Discrete existence and uniqueness for a finite volume scheme». — В: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 15.2 (2005), с. 227—258.

[26] A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin и K.-H. Hoffmann. — «Numerical simulations of a coupled radiative-conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method». — В: *Int. J. Heat. Mass Transf.* 55.4 (2012), с. 649—654.

[27] AA Amosov. — «Unique solvability of a nonstationary problem of radiative-conductive heat exchange in a system of semitransparent bodies». — В: *Russ. J. Math. Phys.* 23.3 (2016), с. 309—334.

[28] AA Amosov. — «Unique solvability of stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system of semitransparent bodies». — В: *J. Math. Sci.* 224.5 (2017), с. 618—646.

[29] T End. — «On optimization of the full radiative heat transfer system». — В: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 10.1 (2010), с. 533—534.

[30] T End. — «On analytical results for the optimal control of the quasi-stationary radiative heat transfer system». — В: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 11.1 (2011), с. 793—794.

[31] K Birgelis и др. — «Optimal control in models with conductive-radiative heat transfer». — В: *Mathematical Modelling and Analysis* 8.1 (2003), с. 1—12.

[32] C Meyer, P Philip и F Tröltzsch. — «Optimal control of a semilinear PDE with nonlocal radiation interface conditions». — В: *SIAM J. Control Optim.* 45.2 (2006), с. 699—721.

[33] C Meyer и I Yousept. — «State-constrained optimal control of semilinear elliptic equations with nonlocal radiation interface conditions». — B: *SIAM J. Control Optim.* 48.2 (2009), с. 734—755.

[34] A Belmiloudi и F Mah'e. — «On nonlinear inverse problems of heat transfer with radiation boundary conditions: application to dehydration of gypsum plasterboards exposed to fire». — B: *Advances in Numerical Analysis* 2014 (2014).

[35] A. E. Kovtanyuk и A. Y. Chebotarev. — «An iterative method for solving a complex heat transfer problem». — B: *Appl. Math. Comput.* 219.17 (2013), с. 9356—9362.

[36] G. Thömmes, R. Pinnau, M. Seaïd и др. — «Numerical methods and optimal control for glass cooling processes». — B: *Transport Theory Statist. Phys.* 31.4-6 (2002), с. 513—529.

[37] R. Pinnau и M. Seaïd. — «Simplified P_N models and natural convection-radiation». — B: *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006.* — Под ред. U. Langer и др. — Springer, 2008, — С. 397—401.

[38] C. Siewert и J. Thomas. — «A computational method for solving a class of coupled conductive-radiative heat transfer problems». — B: *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 45.5 (1991), с. 273—281.

[39] T. Gallouët и др. — «Analysis of a fractional-step scheme for the P_1 radiative diffusion model». — B: *Comput. Appl. Math.* 35.1 (2016), с. 135—151.

[40] MF Modest и др. — «Elliptic formulation of the simplified spherical harmonics method in radiative heat transfer». — B: *Int. J. Heat Mass Tran.* 76 (2014), с. 459—466.

[41] M Frank, J Lang и M Sch"afer. — «Adaptive finite element simulation of the time-dependent simplified P_N equations». — B: *Journal of Scientific Computing* 49.3 (2011), с. 332—350.

[42] E. W. Larsen, G. Thömmes, A. Klar и др. — «Simplified P_N approximations to the equations of radiative heat transfer and applications». — B: *J. Comput. Phys.* 183.2 (2002), с. 652—675.

[43] M. Frank и др. — «Time-dependent simplified P_N approximation to the equations of radiative transfer». — B: *J. Comput. Phys.* 226.2 (2007), с. 2289—2305.

[44] M. Addam, A. Bouhamidi и M. Seaid. — «A frequency-domain approach for the P_1 approximation of time-dependent radiative transfer». — В: *J. Sci. Comput.* 62.3 (2015), с. 623—651.

[45] E Olbrant и др. — «Asymptotic derivation and numerical investigation of time-dependent simplified P_N equations». — В: *Journal of Computational Physics* 238 (2013), с. 315—336.

[46] M Frank, A Klar и R Pinnau. — «Optimal control of glass cooling using simplified P_N theory». — В: *Transport Theory and Statistical Physics* 39.2-4 (2010), с. 282—311.

[47] R. Pinnau. — «Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by SP_1 system». — В: *Commun. Math. Sci.* 5.4 (2007), с. 951—969.

[48] R. Pinnau и O. Tse. — «Optimal control of a simplified natural convection-radiation model». — В: *Commun. Math. Sci.* 11.3 (2013), с. 679—707.

[49] А. Е. Ковтанюк. — «Стационарные модели переноса излучения и сложного теплообмена». — Дис. … док. дисс. д-ра физ.-мат. наук, 2014.

[50] А. Е. Ковтанюк и А. Ю. Чеботарев. — «Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена». — В: *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 56.5 (2016), с. 816—823.

[51] A. E. Kovtanyuk и др. — «Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model». — В: *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 20.3 (2015), с. 776—784.

[52] А. Ю. Чеботарев, Г. В. Гренкин и А. Е. Ковтанюк. — «Однозначная разрешимость субдифференциальной краевой задачи для уравнений сложного теплообмена». — В: *Дальневост. матем. журн.* 16.2 (2016), с. 229—236.

[53] A A Astrakhantseva, A Y Chebotarev и A E Kovtanyuk. — «Analysis of the radiative-conductive heat transfer equations with unknown intensity of heat sources». — В: *2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium-Spring (PIERS).* — 2017, — С. 1359—1361.

[54] Anatoly Yu Chebotarev и др. — «Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange». — В: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 460.2 (2018), с. 737—744.

[55] Dominik Clever и Jens Lang. — «Optimal control of radiative heat transfer in glass cooling with restrictions on the temperature gradient». — В: *Optimal Control Applications and Methods* 33.2 (2012), с. 157—175.

[56] Dominik Clever, Jens Lang и Dominik Schröder. — «Model hierarchy-based optimal control of radiative heat transfer». — В: *International Journal of Computational Science and Engineering* 9.5/6 (2014), с. 509—525.

[57] Jochen Lang. — «Adaptive computation for boundary control of radiative heat transfer in glass». — В: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 183.2 (2005), с. 312—326.

[58] R. Pinnau и A. Schulze. — «Newton's method for optimal temperature-tracking of glass cooling processes». — В: *Inverse Probl. Sci. Eng.* 15.4 (2007), с. 303—323.

[59] A. E. Kovtanyuk и др. — «Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects». — В: *J. Math. Anal. Appl.* 439.2 (2016), с. 678—689.

[60] A A Astrakhantseva, A Y Chebotarev и A E Kovtanyuk. — «Design of the boundary reflection properties to minimize the energy flows». — В: *2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium-Spring (PIERS)*. — 2017, — С. 1332—1336.

[61] A. Yu. Chebotarev и др. — «Strong optimal controls in a steady-state problem of complex heat transfer». — В: *IFIP Conference on System Modeling and Optimization*. — Springer, 2015, — С. 209—219.

[62] A. E. Kovtanyuk и др. — «Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer». — В: *J. Math. Anal. Appl.* 412.1 (2014), с. 520—528.

[63] O. Tse, R. Pinnau и N. Siedow. — «Identification of temperature-dependent parameters in laser-interstitial thermo therapy». — В: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 22.9 (2012), с. 1250019.

[64] F. Hübner, C. Leithäuser, B. Bazrafshan и др. — «Validation of a mathematical model for laser-induced thermotherapy in liver tissue». — В: *Lasers Med. Sci.* 32.6 (2017), с. 1399—1409.

[65] R. R. van den Bos и др. — «Endovenous laser ablation-induced complications: Review of the literature and new cases». — В: *Dermatol. Surg.* 35.8 (2009), с. 1206—1214.

[66] P. W. M. van Ruijven и др. — «Opticalthermal mathematical model for endovenous laser ablation of varicose veins». — В: *Lasers Med. Sci.* 29 (2014), с. 431—439.

[67] A. A. Poluektova и др. — «Some controversies in endovenous laser ablation of varicose veins addressed by optical-thermal mathematical modeling». — В: *Lasers Med. Sci.* 29 (2014), с. 441—452.

[68] W. S. J. Malskat и др. — «Endovenous laser ablation (EVLA): A review of mechanisms, modeling outcomes, and issues for debate». — В: *Lasers Med. Sci.* 29 (2014), с. 393—403.

[69] S. Mordon, B. Wassmer и J. Zemmouri. — «Mathematical modeling of endovenous laser treatment (ELT)». — В: *BioMed. Eng. OnLine.* 5 (2006), с. 26.

[70] G. V. Alekseev, R. V. Brizitskii и Zh. Yu. Saritskaya. — «Stability estimates of extremum problem's solutions for nonlinear convectiondiffusion-reaction equation». — В: *Sib. J. Industrial Math.* 10 (2016), с. 155—167.

[71] R. V. Brizitskii и Zh. Yu. Saritskaya. — «Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusionreaction equation». — В: *J. Inv. Ill-Posed Probl.* 9 (2018), с. 821—834.

[72] A. G. Maslovskaya и др. — «Theoretical and numerical analysis of the Landau-Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis». — В: *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 93 (2021). 105524.

[73] A. E. Kovtanyuk и др. — «Optimal control of endovenous laser ablation». — В: *Opt. Spectrosc.* 128.9 (2020), с. 1508—1516.

[74] A. Kovtanyuk, A. Chebotarev и A. Astrakhantseva. — «Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation». — В: *J. Inv. Ill-Posed Probl.* 29.3 (2021), с. 467—476.

[75] MF Modest. — *Radiative heat transfer.* — Academic Press, 2013.

[76] М. Н. Оиисик. — *Сложный теплообмен.* — Москва: Мир, 1976.

[77] A. E. Kovtanyuk и др. — «The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem». — В: *J. Math. Anal. Appl.* 409.2 (2014), с. 808—815.

[78] R. E. Marshak. — «Note on the spherical harmonic method as applied to the Milne problem for a sphere». — В: *Phys. Rev.* 71.7 (1947), с. 443—446.

[79] А. Е. Ковтанюк и А. Ю. Чеботарев. — «Стационарная задача сложного теплообмена». — В: *Журнал вычислительной математики и математической физики* 54.4 (2014), с. 711—719.

[80] J.J. Duderstadt и L.J. Hamilton. — *Nuclear reactor analysis.* — Wiley, 1976.

[81] J.J. Duderstadt и W.R. Martin. — *Transport theory.* — Wiley, 1979.

[82] L.V. Wang и H. Wu. — *Biomedical optics.* — Wiley, 2007.

[83] J.B. Fishkin и E. Gratton. — «Propagation of photon-density waves in strongly scattering media containing an absorbing semi-infinite plane bounded by a straight edge». — В: *J. Opt. Soc. Am. A* 10.1 (1993), с. 127—140.

[84] R.C. Haskell и др. — «Boundary conditions for the diffusion equation in radiative transfer». — В: *J. Opt. Soc. Am. A* 11.10 (1994), с. 2727—2741.

[85] D.A. Boas. — «Diffuse photon probes of structural and dynamical properties of turbid media: theory and biomedical applications». — Дис. … док. University of Pennsylvania, 1996.

[86] К. Кейз и П. Цвайфель. — *Линейная теория переноса.* — Мир, 1972.

[87] E. Zeidler. — *Nonlinear functional analysis and its applications. I: Fixed-point theorems.* — Springer, 1986.

[88] E. Zeidler. — *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B: Nonlinear monotone operators.* — Springer, 1990.

[89] E. Zeidler. — *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A: Linear monotone operators.* — Springer, 1990.

[90] F. Tröltzsch. — *Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications.* — AMS, 2010.

[91] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. — *Краткий курс функционального анализа: Учеб. пособие.* — Москва: Высш. школа, 1982.

[92] J. Simon. — «Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$». — В: *Ann. Mat. Pura Appl.* 146.1 (1986), с. 65—96.

[93] А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин. — *Элементы теории функций и функционального анализа.* — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[94] Ж.-П. Обэн. — *Приближенное решение эллиптических краевых задач.* — Москва: Мир, 1977.

[95] W. P. Ziemer. — *Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation.* — Springer, 1989.

[96] Д. Киндерлерер и Г. Стампаккъя. — *Введение в вариационные неравенства и их приложения.* — Москва: Мир, 1983.

[97] Vivette Girault и Pierre-Arnaud Raviart. — *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations.* — Springer-Verlag, 1979.

[98] Hans Berninger. — «Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators». — В: *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII.* — Springer. 2009, — С. 169—176.

[99] Pierre Grisvard. — *Elliptic problems in nonsmooth domains.* — Pitman, 1985.

[100] Х. Гаевский, К. Грегер и К. Захариас. — *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* — Москва: Мир, 1978.

[101] A. D. Ioffe и V. M. Tikhomirov. — *Theory of Extremal Problems.* — Amsterdam: North-Holland, 1979.

[102] А.Г. Колобов, Т.В. Пак и А.Ю. Чеботарев. — «Стационарная задача радиационного теплообмена с граничными условиями типа Коши». — В: *Журнал вычислительной математики и математической физики* 59.7 (2019), с. 1258—1263.

[103] A. A. Amosov и N. E. Krymov. — «On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems». — В: *Journal of Mathematical Sciences* 244 (2020), с. 357—377.

[104] A. Y. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk и N. D. Botkin. — «Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type». — В: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 75 (2019), с. 262—269.

[105] S. Fučik и A. Kufner. — *Nonlinear differential equations.* — Amsterdam–Oxford–New York: Elsevier, 1980.

[106] A. V. Fursikov. — *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications.* — American Mathematical Society, 2000.

[107] G. V. Grenkin, A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk и др. — «Boundary optimal control problem of complex heat transfer model». — В: *J. Math. Anal. Appl.* 433.2 (2016), с. 1243—1260.

[108] A. Amosov. — «Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative-Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies». — В: *Russian Journal of Mathematical Physics* 23.3 (2016), с. 309—334.

[109] A. A. Amosov. — «Asymptotic Behavior of a Solution to the Radiative Transfer Equation in a Multilayered Medium with Diffuse Reflection and Refraction Conditions». — В: *Journal of Mathematical Sciences* 244 (2020), с. 541—575.

[110] A. Y. Chebotarev, G. V. Grenkin и A. E. Kovtanyuk. — «Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer». — В: *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* 51.6 (2017), с. 2511—2519.

[111] A Astrakhantseva и A Kovtanyuk. — «Numerical modeling the radiativeconvective-conductive heat transfer». — В: *2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA).* — 2014, — С. 106—107.

[112] Э. М. Мухамадиев и В. Я. Стеценко. — «Достаточные условия сходимости метода Ньютона-Канторовича при решении краевых задач для квазилинейных уравнений эллиптического типа». — В: *Сиб. матем. журн.* 12.3 (1971), с. 576—582.

[113] N. L. Schryer. — «Newton's method for convex nonlinear elliptic boundary value problems». — В: *Numer. Math.* 17.4 (1971), с. 284—300.

[114] «Simulation and Optimization in the Problems of Design of Spherical Layered Thermal Shells». — В: *Прикладная механика и техническая физика* 2 (2019). — DOI: 10.15372/pmtf20190213. — URL: https://doi.org/10.15372/pmtf20190213.

[115] John Duchi и др. — «Efficient projections onto the l1-ball for learning in high dimensions». — В: *Proceedings of the 25th international conference on Machine learning.* — 2011, — С. 272—279.

[116] R. S. Sutton. — «Two problems with backpropagation and other steepest-descent learning procedures for networks». — В: *Proc. 8th Annual Conf. Cognitive Science Society.* — 1986.

[117] Ning Qian. — «On the momentum term in gradient descent learning algorithms». — В: *Neural Networks* 12.1 (1999), с. 145—151. — DOI: https://doi.org/10.1016/S0893-6080(98)00116-6. — URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893608098001166.

[118] Ilya Sutskever. — «Training Recurrent Neural Networks». — Дис. … док. University of Toronto, 2013.

[119] James Kennedy и Russell Eberhart. — «Particle swarm optimization». — В: *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks.* — Т. 4. — 1995, — С. 1942—1948.

[120] F. Hecht. — «New development in freefem++». — В: *Journal of Numerical Mathematics* 20.3-4 (2012). — DOI: 10.1515/jnum-2012-0013. — URL: https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013.

[121] M. S. Alnaes и др. — «The FEniCS Project Version 1.5». — В: *Archive of Numerical Software* 3 (2015).

[122] A. Logg и G. N. Wells. — «DOLFIN: Automated Finite Element Computing». — В: *ACM Transactions on Mathematical Software* 37 (2010).

[123] *Mesenev's GitHub Repository.* — https://github.com/mesenev/articles_src.

Список рисунков

Список таблиц

Приложение A

Приложения