



Месенёв Павел Ростиславович

**Оптимизационные методы решения обратных задач
сложного теплообмена**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Дальневосточный федеральный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Чеботарев Александр Юрьевич

Официальные оппоненты: **Фамилия Имя Отчество,**
доктор физико-математических наук, профессор,
Не очень длинное название для места работы,
старший научный сотрудник
Фамилия Имя Отчество,
кандидат физико-математических наук,
Основное место работы с длинным длинным
длинным длинным названием,
старший научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования с длинным длинным длинным длинным названием

Защита состоится **DD mmmmmmmmm YYYYY** г. в **XX** часов на заседании диссертационного совета **Д 123.456.78** при **Название учреждения** по адресу: **Адрес.**

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке **Название библиотеки.**

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: **Адрес,** ученому секретарю диссертационного совета **Д 123.456.78.**

Автореферат разослан **DD mmmmmmmmm**2024 года.
Телефон для справок: **+7 (0000) 00-00-00.**

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 123.456.78,
д-р физ.-мат. наук

Фамилия Имя Отчество

Общая характеристика работы

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена анализу диффузионных моделей сложного теплообмена. В разделе 1.1 приведена модель сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения, а также её нормализованный вариант. Раздел 1.2 посвящен выводу модели переноса излучения в P_1 приближении. Для получения которого интенсивность излучения и фазовая функция заменяются линейным приближением соответствующих функций.

$$\begin{aligned} I^*(x, \omega, t) &= \varphi(x, t) + \Phi(x, t) \cdot \omega, \\ P(\omega, \omega') &= 1 + A\omega \cdot \omega'. \end{aligned}$$

Таким образом, диффузионное P_1 приближение уравнения переноса излучения представляется в виде

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a\Delta \theta(x, t) + b\kappa_a (\theta^4(x, t) - \varphi(x, t)) = 0. \quad (1)$$

$$-\alpha \Delta \varphi(x, t) + \kappa_a (\varphi(x, t) - \theta^4(x, t)) = 0. \quad (2)$$

$$\alpha \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial n} + \gamma(x) (\varphi(x, t) - \theta_b^4(x, t)) = 0, \quad (3)$$

дополняется граничным условием для температуры

$$a \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial n} + \beta(x) (\theta(x, t) - \theta_b(x, t)) = 0, \quad (4)$$

а также начальными условиями

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x). \quad (5)$$

В разделе 1.3 приведены определения функциональных пространств, вспомогательных утверждений и определений, которые используются в дальнейшем.

В разделе 1.4 приведены теоретические результаты для стационарной модели сложного теплообмена в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$.

$$-\alpha \Delta \varphi + \kappa_a \varphi = \kappa_a \theta^4, \quad (6)$$

$$-a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0. \quad (8)$$

$$a \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad (9)$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, \mathbf{v} – заданное поле скоростей, κ_a – коэффициент поглощения. Постоянные a , b и α определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

где k – теплопроводность, c_v – удельная теплоемкость, ρ – плотность, σ – постоянная Стефана-Больцмана, n – показатель преломления, T_{\max} – максимальная температура в ненормализованной модели, $\kappa = \kappa_s + \kappa_a$ – коэффициент полного взаимодействия, κ_s – коэффициент рассеяния.

Раздел 1.5 посвящен квазистационарной модели сложного теплообмена. Представлена следующая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \quad (10)$$

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \quad (11)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (12)$$

Данная модель описывает систему связанных уравнений в частных производных, моделирующих квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен. Дано определение слабого решения, доказана лемма о существовании и единственности слабого решения, а также справедливости утверждений

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0, T; H).$$

Указанный результат используется в параграфе 2.3 в анализе оптимизационного метода для квазистационарной модели.

В разделе 1.6 рассмотрена квазилинейная модель сложного теплообмена, представленная начально-краевой задачей в ограниченной трехмерной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = f, \quad (13)$$

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) = g, x \in \Omega, 0 < t < T, \quad (14)$$

$$k(\theta) \partial_n \theta + p(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \quad (15)$$

Приведено определение слабой формулировки задачи (13)–(15), даны априорные оценки решений и доказано существование решения начально-краевой задачи. Представлены результаты единственности ограниченных решений, а также сходимости к решению начально-краевой задачи последовательности, построенной рекурсивно.

Вторая глава посвящена исследованию граничных обратных задач для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена. При решении таких задач часто встречаются краевые условия для эллиптических или параболических уравнений, когда на границе (части границы) задаётся неизвестная функция и её нормальная производная (условия Коши).

В разделе 2.1 рассмотрена нормализованная стационарная модель, описывающая процесс радиационного теплопереноса в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ . Модель имеет следующий вид

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

и дополняется граничными условиями на $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, где части границы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ не имеют пересечений.

$$\begin{aligned} \Gamma : a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) &= 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2 : \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) &= 0, \\ \Gamma_1 : \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Функции γ, θ_b, β – являются известными. Функция u характеризует отражающие свойства участка границы Γ_1 . Предполагается, что

$$0 < u_1 \leq u \leq u_2, \quad (18)$$

где u_1 и u_2 – заданные ограниченные функции.

Рассматриваемая экстремальная задача состоит в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \quad (19)$$

на решениях краевой задачи.

Далее ставится задача нахождения квазирешения, которая состоит в минимизации функционала (19) на компоненте θ решения системы

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) = g. \quad (20)$$

Для поставленной экстремальной задачи доказано существование решения, а также выведена система оптимальности, на котором основан численный алгоритм, представленный в 4.2.2.

Раздел 2.2 содержит постановку задачи без краевых условия для интенсивности излучения. Будем предполагать, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ известно температурное поле, и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n \theta = q_b. \quad (21)$$

Оптимизационный метода решения краевой задачи (16),(21) заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления с «искусственными» краевыми условиями

$$a(\partial_n \theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \quad (22)$$

Функция $r(x)$, $x \in \Gamma$ является заданной, а неизвестная функция $u(x)$, $x \in \Gamma$ играет роль управления. Экстремальная задача заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma \rightarrow \inf \quad (23)$$

на решениях краевой задачи (16),(22). Функция $\theta_b(x)$, $x \in \Gamma$ и параметр регуляризации $\lambda > 0$ заданы.

Для формулировки задачи оптимального управления определим оператор ограничений $F(\theta, \varphi, u) : V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$

$$F(\theta, \varphi, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\},$$

где

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma} yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_{\Gamma} wz d\Gamma.$$

Тогда задача оптимального управления (CP) заключается в отыскании тройки $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_{\Gamma}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{\Gamma}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0. \quad (24)$$

Доказана однозначная разрешимость краевой задачи (16),(22) и даны априорные оценки решения, которые далее используются для доказательства разрешимости задачи (CP).

Доказана следующая теорема

Теорема. Пусть выполняются условия $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$, $\theta_b, q_b \in U$, $r = a(\theta_b + q_b)$ и существует решение задачи (16),(21). Если $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$

– решение задачи (CP) для $\lambda > 0$, то существует последовательность $\lambda \rightarrow +0$ такая, что

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_*, \quad \varphi_\lambda \rightarrow \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

где θ_*, φ_* – решение задачи (16), (21).

В разделе 2.3 представлен анализ оптимизационного метода для квазистационарной модели. Квазистационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ моделируем следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi) &= 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \end{aligned} \quad (25)$$

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma; \quad (26)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (27)$$

Экстремальная задача состоит в том, чтобы найти тройку $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf \quad (28)$$

на решениях задачи (25)–(27).

Ставится задача оптимального управления (OC), доказывается существование решения задачи (OC) и выводится система оптимальности. Представлено доказательство сходимости решений задачи оптимального управления к решению задачи оптимального управления.

В разделе 2.4 рассмотрена задача сложного теплообмена с условиями Коши для температуры на части границы. В данном случае граница области состоит из двух участков, $\Gamma := \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, так что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. На всей границе Γ задается тепловой поток q_b , в качестве условия переопределения на Γ_1 , в дополнение к условию на φ , задается температурное поле θ_b ,

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad \theta = \theta_b \quad x \in \Gamma_1. \quad (29)$$

Для постановки задачи управления вводится новая неизвестная функция $\psi = a\theta + \alpha b\varphi$. Полученная краевая задача имеет вид

$$-a\Delta\theta + g(\theta) = \frac{\kappa_a}{\alpha}\psi, \quad \Delta\psi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (30)$$

$$a\partial_n\theta = q_b, \quad \text{на } \Gamma, \quad \alpha\partial_n\psi + \gamma\psi = r, \quad \theta = \theta_b \text{ на } \Gamma_1. \quad (31)$$

Здесь $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$, $r = \alpha b\gamma\theta_b^4 + \alpha q_b + a\gamma\theta_b$.

Для соответствующей задачи оптимального управления доказано существование и единственность решения. Приведено доказательство, что решения задачи оптимального управления аппроксимируют решение начальной краевой задачи.

Третья глава посвящена исследованию квазилинейных моделей. В разделе 3.1 рассмотрена задача оптимального управления для квазилинейных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена, моделирующих процесс внутривенной лазерной абляции в ограниченной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \int_0^T \int_{G_1} (\theta - \theta_d)^2 dxdt \rightarrow \inf$$

на решениях начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \sigma\partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) - \beta\varphi &= u_1\chi \\ -\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta\varphi &= u_2\chi, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\theta = 0|_{\Gamma}, \quad \alpha\partial_n\varphi + 2^{-1}\varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (33)$$

При этом учитываются ограничения:

$$u_{1,2} \geq 0, \quad u_1 + u_2 \leq P, \quad \theta|_{G_2} \leq \theta_*$$

Здесь G_1 и G_2 подмножества Ω , θ представляют разницу между реальной температурой и температурой на границе, которая является постоянной.

Доказано существование решения соответствующей задачи оптимального управления и даны априорные оценки решений. Показано, что решения задачи со штрафом сходятся к решению задачи оптимального управления.

В разделе 3.2 приведён анализ метода штрафных функций используемого для решения задачи оптимального управления с финальным наблюдением.

В **четвертой главе** приведено описание

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем: В диссертации в соответствии с паспортом специальности 1.2.2 представлен математический анализ диффузионных моделей сложного теплообмена, предложены новые постановки обратных задач, разработаны оптимизационные методы решения обратных задач, основанные на понятии квазирешения и сведения рассмотренных задач к задачам оптимального управления. Разработаны и программно реализованы новые алгоритмы решения прямых, обратных и экстремальных задач для моделей сложного теплообмена.

Получены новые априорные оценки решений начально-краевых задач для квазистационарных и квазилинейных уравнений сложного теплообмена и доказана их нелокальная однозначная разрешимость. Выполнен теоретический анализ возникающих новых экстремальных задач. Представлены априорные оценки решений регуляризованных задач и обоснована сходимость их решений к точным решениям обратных задач. Для решения задач с фазовыми ограничениями, предложены алгоритмы, основанные на аппроксимации экстремальными задачами со штрафом.

Таким образом, получены важные с теоретической и численной точки зрения результаты, которые могут быть полезны при дальнейшем использовании моделей сложного теплообмена и анализе обратных задач сложного теплообмена. Развитые методы исследования краевых, начально-краевых и экстремальных задач могут применяться для изучения различных моделей, описываемых нелинейными уравнениями типа реакции-диффузии. Численные алгоритмы решения задач оптимизации сложного теплообмена могут использоваться для выбора оптимальных характеристик процессов теплообмена.

В дальнейшем исследование обратных задач для диффузионных моделей сложного теплообмена может быть направлено на учет эффектов отражения и преломления на границе раздела сред и учет зависимости коэффициентов поглощения и рассеяния от частоты излучения.

Все рассмотренные в работе типы задач логически связаны следующим образом. Теоретический анализ математических моделей сложного теплообмена, представленный в первой главе, является основой для исследования оптимизационных методов решения обратных задач во второй и третьей главах. Соответственно, полученные там условия оптимальности дают возможность представить численные алгоритмы решения сформулированных задач и численно реализовать их в главе 4.

Конечно же, автору не удалось рассмотреть все важные вопросы в теории и методах решения обратных задач сложного теплообмена. В стороне осталось, например, исследование таких важных свойств решений экстремальных задач как регулярность, которая обеспечивает повышение скорости сходимости итерационных алгоритмов. Автор не касался в работе исследования необходимых и достаточных условий оптимальности второго порядка. Ряд постановок, которые нетрудно будет исследовать на основе предложенной методики, ожидает своего решения в том числе и в связи с вопросами нахождения наиболее эффективных механизмов и способов управления теплофизическими полями.

При использовании пакета `biblatex` список публикаций автора по теме диссертации формируется в разделе «Публикации.» файла `common/characteristic.tex` при помощи команды `\nocite`

Публикации автора по теме диссертации

- [1] П. Р. Месенев. — «Солвер обратной задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши». — Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет». — 25 сент. 2023.

Месенёв Павел Ростиславович

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____

