Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»

Представление на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Оптимизационные методы решения обратных задач сложного теплообмена

Выступающий: П. Р. Месенёв
Руководитель: проф.,д. физ.-мат. н. А. Ю. Чеботарев

Владивосток, 2024

Положения, выносимые на защиту

В области математического моделирования:

- Доказательство однозначной разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей квазистационарный сложный теплообмен в трехмерной области.
- Доказательство однозначной разрешимости квазилинейной начально-краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен с нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.
- Обоснование существования квазирешения обратной задачи с неизвестным коэффициентом отражения на части границы и условием переопределения на другой части.
- Вывод условий разрешимости экстремальных задач, аппроксимирую щих решения граничных обратных задач (задач с условиями Коши на границе области) для стационарной и квазистационарной моделей сложного теплообмена.
- Построение систем оптимальности и доказательство их невырожденности для задач оптимального управления стационарными, квазистационарными и квазилинейными уравнениями сложного теплообмена.

В области численных методов:

- Разработка численного алгоритма решения квазилинейной начально- краевой задачи, моделирующей сложный теплообмен и доказательство его сходимости.
- Обоснование сходимости последовательности решений задач оптималь ного управления к решениям задач с условиями Коши на границе при стремлении параметра регуляризации к нулю.
- Обоснование сходимости алгоритма решения экстремальных обратных задач с ограничениями температурных полей методом штрафа.

В области комплексов программ:

- Разработка программ, реализующих численное моделирование процессов сложного теплообмена на основе метода конечных элементов. Реализация и тестирование оптимизационных алгоритмов решения граничных обратных задач для стационарных, квазистационарных и квазилинейных моделей.

Содержание

Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, граница $\Gamma = \partial\Omega$.

$$-a\Delta\theta + +b\kappa_a\theta^4 = b\kappa_a\varphi, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a\theta^4, \tag{1}$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \beta\,(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Ω – липшицева ограниченная область, Γ состоит из конечного числа гладких кусков, исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i) $\theta_0, \beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma), 0 \leqslant \theta_0 \leqslant M, \beta \geqslant \beta_0 > 0, \gamma \geqslant \gamma_0 > 0;$

Здесь M, β_0, γ_0, и c_0 положительные постоянные.

Definition

Пара $\{\theta, \varphi\} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ называется слабым решением задачи, если для любых $\eta, \psi \in H^1(\Omega)$ выполняются равенства:

$$a(\nabla\theta, \nabla\eta) + \left(b\kappa_a\left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right), \eta\right) + \int_\Gamma \beta\left(\theta - \theta_0\right)\eta d\Gamma = 0,$$

$$\alpha(\nabla\varphi, \nabla\psi) + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|\theta^3, \psi\right) + \int_\Gamma \gamma\left(\varphi - \theta_0^4\right)\psi d\Gamma = 0.$$

Theorem (Chebotarev, 2015)

Пусть выполняются условия (i). Тогда существует единственное слабое решение задачи (1)–(2), *удовлетворяющее неравенствам:*

$$a\|\nabla\theta\|^2 \leqslant b\kappa_a M^5|\Omega| + \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)}M^2|\Gamma|, \tag{3}$$

$$\alpha\|\nabla\varphi\|^2 \leqslant \kappa_a M^8|\Omega| + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}M^8|\Gamma|, \tag{4}$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant M, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant M^4. \tag{5}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \phi) = 0, \quad (6)$$

$$-\alpha\Delta\phi + \kappa_a(\phi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \quad (7)$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta\,(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0 \text{ на } \Gamma; \quad (8)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (9)$$

Предполагаем, что

- (j) $a, b, \alpha, \kappa_a = \text{Const} > 0,$
- (jj) $\theta_b, q_b, u = \theta_b^4 \in U, r = a\,(\theta_b + q_b) \in L^5(\Sigma),\ \theta_0 \in L^5(\Omega).$

Здесь $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$, U – пространство $L^2(\Sigma)$ с нормой

$$\|u\|_\Sigma = \left(\int_\Sigma u^2 d\Gamma dt\right)^{1/2}.$$

Определим операторы $A: V \to V', B: U \to V'$, которые выполняются для любых $y, z \in V, w \in L^2(\Gamma)$:

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_\Gamma yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_\Gamma wz d\Gamma.$$

Definition

Пара $\theta \in W, \varphi \in L^2(0,T;V)$ называется слабым решением задачи (6)–(9) если

$$\theta' + aA\theta + b\kappa_a\left([\theta]^4 - \varphi\right) = Br, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a\left(\varphi - [\theta]^4\right) = Bu.$$

Здесь и далее будем обозначать через $[\theta]^s := |\theta|^s \mathrm{sign}\theta, \quad s \in \mathbb{R}$.

Lemma (1.20)

Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда существует единственное слабое решение задачи (6)–(9) *и справедливо*

$$\psi = [\theta]^{5/2} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), \quad [\theta]^4 \in L^2(0,T;H).$$

$$\sigma\partial\theta/\partial t - \mathrm{div}(k(\theta)\nabla\theta) + b\left(\theta^3|\theta| - \varphi\right) = f, \qquad (10)$$

$$-\mathrm{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta\left(\varphi - \theta^3|\theta|\right) = g, x\in\Omega, 0<t<T, \qquad (11)$$

$$k(\theta)\partial_n\theta + p\left(\theta-\theta_b\right)\big|_\Gamma = 0, \alpha\partial_n\varphi + \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right)\big|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \qquad (12)$$

Предполагаем, что:

- (k1) $\alpha,\beta,\sigma\in L^\infty(\Omega), \quad b = r\beta, r = Const > 0; \alpha\ge\alpha_0, \beta\ge\beta_0, \sigma\ge\sigma_0, \alpha_0,\beta_0,\sigma_0 =$ Const > 0.
- (k2) $0 < k_0 \le k(s) \le k_1, |k'(s)| \le k_2, s\in\mathbb{R}, \quad k_j =$ Const.
- (k3) $0\le\theta_b\in L^\infty(\Sigma), 0\le\theta_{\text{in}}\in L^\infty(\Omega);$
  $\gamma_0\le\gamma\in L^\infty(\Gamma), p_0\le p\in L^\infty(\Gamma), \gamma_0, p_0 =$ Const > 0.
- (k4) $0\le f, g\in L^\infty(Q)$.

Определим операторы $A_1 : V \to V_0'$ и $A_2 : V \to V'$ такие, что для всех $\theta, \varphi, v \in V$ выполняются следующие равенства:

$$(A_1(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma p\theta v d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_\Gamma p\theta v d\Gamma,$$

$$(A_2\varphi, v) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v d\Gamma,$$

где $h(s) = \int_0^s k(r)dr$.

Definition

Пару $\theta \in W, \varphi \in L^2(0,T;V)$ будем называть слабым решением задачи (10)–(12), если

$$\sigma\theta' + A_1(\theta) + b\left([\theta]^4 - \varphi\right) = f_b + f \quad \text{п. в. в } (0,T), \quad \theta(0) = \theta_{\text{in}}, \tag{13}$$

$$A_2\varphi + \beta\left(\varphi - [\theta]^4\right) = g_b + g \quad \text{п. в. в } (0,T). \tag{14}$$

Здесь $f_b, g_b \in L^2(0,T;V')$ и

$$(f_b, v) = \int_\Gamma p\theta_b v d\Gamma, \quad (g_b, v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 v d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

Рекурсивно определим последовательность
$\theta_m \in W, \quad \varphi_m \in L^2(0,T;V)$ такую, что

$$\theta_m = F_2\left(\theta_{m-1}, \varphi_{m-1}\right), \quad \varphi_m = F_1\left(\theta_m\right), \quad m = 1{,}2, \ldots \tag{15}$$

Здесь операторы $F_1 : L^\infty(\Omega) \to V$ и $F_2 : L^\infty(Q) \times L^2(0,T;V) \to W$ определены следующим образом. Пусть $\varphi = F_1(\theta)$, если

$$A_2\varphi + \beta\left(\varphi - [\theta]^4\right) = g_b + g, \tag{16}$$

и $\theta = F_2(\zeta, \varphi)$, если

$$\sigma\theta' + A(\zeta,\theta) + b\left([\theta]^4 - \varphi\right) = f_b + f \quad \text{п. в. в } (0,T), \quad \theta(0) = \theta_{in}. \tag{17}$$

Здесь $(A(\zeta,\theta), v) = (k(\zeta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma p\theta v d\Gamma \quad \forall v \in V$,

$$W = \left\{y \in L^2(0,T;V) : \sigma y' = \sigma dy/dt \in L^2\left(0,T,V'\right)\right\}.$$

Lemma

Если выполнены условия (k1)–(k4), то существует константа $C > 0$, не зависящая от m, такая, что

$$\|\varphi_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C,$$
$$\int_0^{T-\delta} \|\theta_m(s+\delta) - \theta_m(s)\|^2 \, ds \leq C\delta.$$

$\theta_m \to \widehat{\theta}$ слабо в $L^2(0,T;V)$, сильно в $L^2(0,T;H)$,

$\varphi_m \to \widehat{\varphi}$ слабо в $L^2(0,T;V)$.

Theorem

Если выполнены условия (k1)–(k4), то существует хотя бы одно решение задачи (10)–(12).

Теорема единственности и сходимость итеративного метода

Theorem

Если выполнены условия (k1)–(k4) и θ_*, φ_* является решением задачи (10)–(12) *так, что $\theta_*, \nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$, то других ограниченных решений этой задачи нет.*

Theorem

Если выполнены условия (k1)–(k4) и θ_*, φ_* является решением задачи (10)–(12) *так, что $\theta_*, \nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$. Тогда для последовательностей* (15) *справедливы следующие сходимости:*

$$\theta_m \to \theta_* \quad \text{в } L^2(0,T;V), \quad \varphi_m \to \varphi_* \quad \text{в } L^2(0,T;V).$$

Модель имеет следующий вид

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \tag{18}$$

и дополняется граничными условиями на $\Gamma := \partial\Omega = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, где части границы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ не имеют пересечений:

$$\begin{aligned} \Gamma:&\ a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_2:&\ \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \\ \Gamma_1:&\ \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Функции γ, θ_b, β известны. Неизвестная функция u характеризует отражающие свойства участка границы Γ_1. Предполагается, что $0 < u_1 \leq u \leq u_2$.

Обратная задача заключается в отыскании тройки θ, φ, u по дополнительному условию $\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0$.

Экстремальная задача заключается в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma.$$

Существование решения и условия оптимальности

Будем предполагать что исходные данные удовлетворяют условию

- (i) $\beta \in L^\infty(\Gamma); \gamma \in L^\infty(\Gamma_0 \cup \Gamma_2);\ u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma_1);$
  $0 < \beta_0 \le \beta; 0 < \gamma_0 \le \gamma;\ \beta_0,\gamma_0 = Const,\ 0 \le u_1 \le u_2.$

Theorem

Пусть выполняется условие (i). Тогда существует хотя бы одно решение задачи оптимального управления.

Theorem

Пусть $\hat{y} = \{\hat{\theta},\hat{\varphi}\} \in Y, \hat{u} \in U_{ad}$ *— решение экстремальной задачи. Тогда существует пара* $p = (p_1, p_2)$, $p \in Y$ *такая, что тройка* $(\hat{y}, \hat{u}, p)$, *удовлетворяет следующим условиям:*

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a (b p_1 - p_2) = f_c,\ \ (f_c,v) = -\int_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma,$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a (p_2 - b p_1) = g_c(p_2, \hat{u}),\ (g_c(p_2, \hat{u}), v) = -\int_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v d\Gamma,$$

$$\int_{\Gamma_1} p_2 (\hat{\varphi} - \theta_b^4)(u - w) d\Gamma \le 0 \quad \forall w \in U_{ad}.$$

Задача без краевых условий для интенсивности излучения

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \tag{20}$$

На Γ известно температурное поле и тепловой поток:

$$\theta = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b. \tag{21}$$

Заменяем на «искусственные» краевые условия

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \ \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma. \tag{22}$$

Функция $r(x), x \in \Gamma$ является заданной, а неизвестная функция $u(x), x \in \Gamma$ играет роль управления.
Экстремальная задача заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda,\varphi_\lambda,u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma(\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2}\int\limits_\Gamma u^2 d\Gamma \to \inf \tag{23}$$

на решениях краевой задачи.

Будем предполагать, что

- (j) a,b,α,κ_a, $\lambda = Const > 0$,
- (jj) $\theta_b,\ q_b \in U,\ \ r = a(\theta_b + q_b)$.

Определим оператор ограничений $F(\theta,\varphi,u) : V \times V \times U \to V' \times V'$,

$$F(\theta,\varphi,u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

Задача CP**.** Найти тройку $\{\theta,\varphi,u\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta,u) \equiv \frac{1}{2}\|\theta - \theta_b\|^2_\Gamma + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_\Gamma \to \inf\,,\ \ F(\theta,\varphi,u) = 0. \qquad (24)$$

Разрешимость задачи CP и условия оптимальности

Theorem

Пусть выполняются условия $(j),(jj)$. Тогда существует решение задачи CP.

Theorem

Пусть выполняются условия (j),(jj). Если $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ – решение задачи CP, то существует единственная пара $\{p_1, p_2\} \in V \times V$ такая, что

$$aAp_1 + 4|\hat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) = B(\theta_b - \hat{\theta}), \quad \alpha Ap_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0 \tag{25}$$

и при этом $\lambda\hat{u} = p_2$.

Theorem

Пусть выполняются условия (j),(jj) и существует решение задачи (20)–(21). Если $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ *– решение задачи* CP *для* $\lambda > 0$*, то существует последовательность* $\lambda \to +0$ *такая, что*

$$\theta_\lambda \to \theta_*, \;\; \varphi_\lambda \to \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

где θ_*, φ_* *– решение задачи (20)–(21).*

Из ограниченности последовательности u_λ в пространстве U следует ее слабая относительная компактность и существование последовательности (возможно не единственной) $\lambda \to +0$ такой, что $u_\lambda \to u_*$ слабо в U.

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a\left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right) = 0,$$
$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|\theta^3\right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \tag{26}$$

$$a\left(\partial_n\theta + \theta\right) = r, \quad \alpha\left(\partial_n\varphi + \varphi\right) = u \text{ на } \Gamma; \tag{27}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{28}$$

Экстремальная задача состоит в том, чтобы найти тройку $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma \left(\theta - \theta_b\right)^2 d\Gamma dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T\int_\Gamma u^2 d\Gamma dt \to \inf \tag{29}$$

на решениях задачи (26)–(28).

Будем считать, что

- (k) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$,
- (kk) $\theta_b, q_b \in U, r = a\,(\theta_b + q_b) \in L^5(\Sigma),\ \theta_0 \in L^5(\Omega)$.

Задача оптимального управления OC заключается в отыскании тройки $\{\theta, \varphi, u\} \in W \times L^2(0, T; V) \times U$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2}\,\|\theta - \theta_b\|^2_\Sigma + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_\Sigma \to \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0.$$

Theorem

Пусть выполняются условия $(k), (kk)$. Тогда существует решение задачи OC.

Условия оптимальности и аппроксимация обратной задачи

Theorem

Пусть выполнены условия $(k), (kk)$. *Если* $\{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}, \widehat{u}\}$ *— решение задачи* OC, *то существует единственная пара* $\{p_1, p_2\} \in W \times W$ *такая, что*

$$-p_1' + aAp_1 + 4|\widehat{\theta}|^3 \kappa_a (bp_1 - p_2) = B\left(\theta_b - \widehat{\theta}\right), p_1(T) = 0, \qquad (30)$$
$$\alpha A p_2 + \kappa_a (p_2 - bp_1) = 0,$$

а также $\lambda \widehat{u} = p_2|_\Sigma$.

Theorem

Пусть выполняются условия $(k), (kk)$ *и существует решение* $\theta, \varphi \in L^2\left(0, T; H^2(\Omega)\right)$ *задачи* **(??)**, **(??)**. *Если* $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ *— решение задачи* OC *при* $\lambda > 0$, *то при* $\lambda \to +0$

$$\theta_\lambda \to \theta \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \text{ сильно в } L^2(Q),$$
$$\varphi_\lambda \to \varphi \text{ слабо в } L^2(0, T; V).$$

- Впервые реализован ...
- Разработана программа ...
- Впервые проведён анализ ...
- Предложена схема ...

- Получены выражения для . . . .
- Определены условия . . . .
- Разработаны устройства . . . .

Свидетельства о регистрации программы


РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023680939

Солвер обратной задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет» (ДВФУ) (RU)*

Автор(ы): *Месенев Павел Ростиславович (RU)*

Заявка № 2023669496

Дата поступления **25 сентября 2023 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***06 октября 2023 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов


РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024615095

Программа для нахождения квазирешения обратной задачи сложного теплообмена с дополнительным температурным условием на границе

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет» (ДВФУ) (RU)*

Автор(ы): *Месенев Павел Ростиславович (RU)*

Заявка № 2024613068

Дата поступления **15 февраля 2024 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***01 марта 2024 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов


РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024618129

Программа для решения граничной обратной задачи сложного теплообмена с переопределением на части границы

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет» (RU)*

Автор(ы): *Месенев Павел Ростиславович (RU)*

Заявка № 2024617082

Дата поступления **04 апреля 2024 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***09 апреля 2024 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

Основные публикации

1. P. R. Mesenev. — «Optimization method for solving the inverse problem of complex heat transfer». — *Дальневост. матем. журн.* 23.1 (2023).
2. A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev и A. E. Kovtanyuk. — «Penalty method to solve an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation». — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 22 (2022), с. 158—163.
3. A. Yu. Chebotarev и P. R. Mesenev. — «An algorithm for solving the boundary value problem of radiation heat transfer without boundary conditions for radiation intensity». — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* (2020), с. 114—122.
4. P. R. Mesenev и A. Yu. Chebotarev. — «A boundary inverse problem for complex heat transfer equations». — *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal* 18.1 (2018), с. 75—84.
5. П. Р. Месенев и А. Ю. Чеботарев. — «Задача сложного теплообмена с условиями типа Коши на части границы». — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 63.5 (2023), с. 856—863.
6. P R Mesenev and A Yu Chebotarev. — "Analysis of an optimization method for solving the problem of complex heat transfer with Cauchy boundary conditions". — *Comput. Math. Math. Phys. 62.1* (Jan. 2022).

- Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (Владивосток, 2018, 2019);
- Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics (Вычислительные технологии и прикладная математика, Владивосток, 2022);
- International Conference DAYS on DIFFRACTION (Санкт-Петербург, 2021, 2023);
- International Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing (Мюнхен, 2020, 2022).