集合与参数（符号解释

集合

- $I=\{1,\ldots,N\}$：车身集合，按涂装→ PBS 出口到达顺序编号；
- $S=\{1,\ldots,N\}$：PBS → 总装的出车序列位置集合；
- $K=\{1,\ldots,6\}$：PBS 进车道集合（共6 条进车道）；
- $P=\{1,\ldots,10\}$：进车道车位编号（1 靠近出车端，10 靠近接车端）；
- $R=\{1,\ldots,10\}$：返回道车位编号（1 靠近出车端，10 靠近接车端）；
- 为了刻画滑动窗口，设窗口长度为L，窗口起始位置集合为
$$M=\{1,2,\ldots,N-L+1\},$$
对每个$m\in M$，定义窗口$W_m=\{m,m+1,\ldots,m+L-1\}$。

属性参数

- $H_i\in\{0,1\}$：车i 的动力属性，$H_i=1$ 表示混动车，$H_i=0$ 表示燃油车；
- $D_i\in\{2,4\}$：车i 的驱动属性，$D_i=2$ 表示两驱，$D_i=4$ 表示四驱；
- $\tilde{D}_i=\mathbb{W}(D_i=4)$：车$i$ 是否为四驱车型的指示参数，用于线性化；

时间与设备参数

- 车道格移动时间：$t^{\text{move}}=9$ s；
- 横移机每次从中心出发、完成一次任务并返回中心的时间：
  - 接车机从出车口/返回道10 → 进车道k 的停车位10：$t_k^{\text{in}}\in\{18,12,6,0,12,18\}$ 秒；
  - 送车机从进车道k 的停车位1 → 总装入口：$t_k^{\text{out}}\in\{18,12,6,0,12,18\}$ 秒；
  - 送车机从进车道k 的停车位1 → 返回道1：$t_k^{\text{ret}}\in\{24,18,12,6,12,18\}$ 秒；
  - 接车机从返回道10 → 进车道k 的停车位10：$t_k^{\text{fromR}}\in\{24,18,12,6,12,18\}$ 秒。

涂装侧到达时间

- a_i：车身i 到达PBS 接车口的时刻。

若附件只给出顺序而未给出精确时间，可假设固定节拍：
$$a_i=a_1+(i-1)\Delta,\quad i=1,\ldots,N,$$
并在论文中说明该假设。

权重参数（与题目评分对应）

$$w_1 = 0.4, \quad w_2 = 0.3, \quad w_3 = 0.2, \quad w_4 = 0.1.$$

理论最快完成时间（题目经验公式）：

$$T^{\min} = 9N + 72.$$

决策变量

1. 出车序列（PBS → 总装）

$$y_{i,s} = \begin{cases} 1, & \text{若车} i \text{ 在PBS→总装的出车序列中处于第} s \text{ 个位置}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

车i 的出车序位（线性化表示）：

$$\pi_i = \sum_{s \in S} s\, y_{i,s}, \qquad \forall i \in I.$$

2. 进车道与车位分配

$$x_{i,k,p} = \begin{cases} 1, & \text{若车} i \text{ 在PBS 中首次被放置于进车道} k \text{ 的车位} p, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

这里采用lane-position assignment 的方式，而不按秒建模，以保证MILP 的可解性。

3. 返回道使用

$$r_i = \begin{cases} 1, & \text{若车} i \text{ 至少使用过一次返回道（被送入再回来）}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

如需更精细，也可将其扩展为表示“使用次数”的整数变量，但本题评分仅按总使用次数惩罚，故采用0/1 近似即可。

4. 时间变量（粗粒度建模）

$$t_i^{\text{in}} \geq 0: \text{ 车} i \text{ 进入PBS（完成一次接车横移）的时间},$$
$$t_i^{\text{out}} \geq 0: \text{ 车} i \text{ 离开PBS 进入总装的时间},$$
$$T \geq 0: \text{ 总调度完成时间（最后一辆车出PBS 的时间）}.$$

目标函数（加权多目标）

总目标函数定义为

$$\max Z = w_1 Z_1 + w_2 Z_2 + w_3 Z_3 + w_4 Z_4,$$

其中Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 分别对应动力属性间隔、驱动属性比例、返回道使用以及总调度时间四个子目标。

1. 动力属性间隔目标Z_1（混动之间间隔2 台非混动）

首先定义出车序列位置上的动力属性：

$$u_s = \sum_{i \in I} H_i \, y_{i,s}, \quad s \in S.$$

若位置s 为混动车，则$u_s = 1$，否则$u_s = 0$。

为方便线性化，对每个位置s 定义混动间隔惩罚变量：

$$\delta_s \ge 0, \quad s = 1, \ldots, N-2.$$

理想模式（简化近似）：若在位置s 上为混动车，则位置$s+1, s+2$ 上优先希望是非混动。约束可写为：

$$\delta_s \ge u_s - (1 - u_{s+1}) - (1 - u_{s+2}), \quad s = 1, \ldots, N-2.$$

当$u_s = 1$ 且$u_{s+1} = u_{s+2} = 0$ 时，右端为-1，不约束δ_s，可令$\delta_s = 0$，表示间隔满足；若中间出现混动，则右端非负，迫使$\delta_s > 0$，体现对违规间隔的惩罚。

因此，动力属性间隔目标得分定义为

$$Z_1 = 100 - \sum_{s=1}^{N-2} \delta_s.$$

2. 驱动属性1:1 目标Z_2

参考文献中的窗口思想，使用滑动窗口近似"块内四驱与两驱1:1 分布"。

为避免不同窗口长度或重叠造成放大效应，将每个窗口的惩罚按窗口长度L 归一化，并将这些归一化后的惩罚值求和作为总惩罚。

定义出车位置上的四驱标记：

$$f_s = \sum_{i \in I} \tilde{D}_i \, y_{i,s}, \qquad g_s = 1 - f_s, \quad s \in S,$$

定义滑动窗口：

$$W_m = \{m, m+1, \ldots, m+L-1\}, \qquad m = 1, \ldots, M, \qquad M = N - L + 1.$$

窗口的偏差惩罚满足：

$$\zeta_m \ge 2 \sum_{s \in W_m} f_s - L, \qquad m = 1, \ldots, M,$$

$$\zeta_m \ge -\left(2 \sum_{s \in W_m} f_s - L\right), \qquad m = 1, \ldots, M,$$

$$\zeta_m \ge 0.$$

进一步将惩罚按窗口长度L 归一化：

$$\eta_m := \frac{\zeta_m}{L}, \qquad m = 1, \ldots, M.$$

其中$f_s = 1$ 表示位置s 为四驱车，$g_s = 1$ 表示位置s 为两驱车。

对每个窗口W_m，引入不平衡惩罚变量$\eta_m \geq 0$：

$$\eta_m \geq \sum_{s\in W_m} f_s - \sum_{s\in W_m} g_s,$$

$$\eta_m \geq -\Big(\sum_{s\in W_m} f_s - \sum_{s\in W_m} g_s\Big), \quad \forall m \in M.$$

从而驱动比例目标得分定义为

$$Z_2 = 100 - \sum_{m\in M} \eta_m.$$

窗口内四驱与两驱数量越接近平衡，则η_m 越小，Z_2 越高。

3. 返回道使用目标Z_3

返回道使用次数越少越好，可直接写为：

$$Z_3 = 100 - \sum_{i\in I} r_i.$$

4. 总调度时间目标Z_4

令理论最快完成时间为

$$T^{\min} = 9N + 72,$$

则以makespan T 与$T^{\min}$ 的差值作为惩罚：

$$Z_4 = 100 - \alpha_T (T - T^{\min}),$$

其中α_T 为单位时间惩罚系数，可通过标定使惩罚量级与题目评分尺度匹配。

约束条件

1. 出车序列排列约束

出车序列是一个排列：绑定π_i 与$y_{i,s}$ 每辆车占据一个唯一位置：

$$\sum_{s\in S} y_{i,s} = 1, \quad \forall i \in I.$$

每个位置有且仅有一辆车：

$$\sum_{i\in I} y_{i,s} = 1, \quad \forall s \in S.$$

为了确保出车序列$\{1,\dots,N\}$ 是一个严格的排列，必须将排名变量π_i 与分配变量$y_{i,s}$ 完全绑定：

$$\pi_i = \sum_{s\in S} s\, y_{i,s}, \qquad \forall i \in I.$$

说明： 该绑定确保每辆车唯一对应一个出车位置，并且序列中没有空缺或重复。

2. 进车道容量与分配约束

每辆车必须被放入某条进车道的某个初始车位：

$$\sum_{k\in K}\sum_{p\in P} x_{i,k,p} = 1, \quad \forall i \in I.$$

每个车道车位最多一辆车：

$$\sum_{i\in I} x_{i,k,p} \le 1, \quad \forall k \in K,\ \forall p \in P.$$

车道内"伪FIFO"顺序约束：到达早的车在同一车道中的位置编号不大于后到车。若$a_i < a_j$，则

$$\sum_{p\in P} p\, x_{i,k,p} \le \sum_{p\in P} p\, x_{j,k,p}, \quad \forall k \in K,\ \forall i,j \in I \text{ s.t. } a_i < a_j.$$

3. PBS 车道FIFO 与出车序列一致性约束

对于同一进车道k 上的两车i,j，若车i 在车道上的位置不"靠后"于车j（即车位编号不大于j），且两者都不使用返回道，则出车序列须保持i 先出。

引入辅助变量

$$\theta_{i,j,k} \in \{0,1\}:\ \text{车}i,j\ \text{同时在车道}k\ \text{上，且}i\ \text{在}j\ \text{之前}.$$

线性化约束：

$$\theta_{i,j,k} \le \sum_{p\in P} x_{i,k,p}, \quad \theta_{i,j,k} \le \sum_{p\in P} x_{j,k,p},$$

$$\theta_{i,j,k} \ge \sum_{p\in P} x_{i,k,p} + \sum_{p\in P} x_{j,k,p} - 1, \qquad \forall i,j,k.$$

$$\sum_{p\in P} p\, x_{i,k,p} + 1 \le \sum_{p\in P} p\, x_{j,k,p} + M(1-\theta_{i,j,k}),$$

其中M 为充分大的常数。

若两车均不使用返回道，则强制出车顺序满足：

$$\pi_i + 1 \le \pi_j + M\big(r_i + r_j + 1 - \theta_{i,j,k}\big),$$

当$\theta_{i,j,k} = 1$ 且$r_i = r_j = 0$ 时，上式退化为$\pi_i + 1 \le \pi_j$，即车道内先停的车必须先出；若某辆车使用了返回道（$r_i = 1$ 或$r_j = 1$），则约束被放松，允许通过返回道打破原FIFO 顺序。

4. 返回道使用与出车序列的关系（逻辑约束）

为避免模型“白用”返回道变量，引入车道内FIFO 排名思想。设车i 在所在车道中的FIFO 排名为

$$\phi_i = \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} x_{i,k,p} \left(1 + \sum_{j \in I} \sum_{\substack{p' \in P \\ p' \leq p}} x_{j,k,p'} \right),$$

即数出同一车道中车位编号不大于其位置的车辆数量。

若车i 在出车序列中的位置π_i 明显早于其自然FIFO 排名ϕ_i，则必须通过返回道实现“插队”：

$$\pi_i \leq \phi_i - 1 + M r_i, \quad \forall i \in I.$$

解释：

当$r_i = 0$ 时，约束变为

$$\pi_i \geq \phi_i,$$

即严格执行FIFO；

当$r_i = 1$ 时，右端变为

$$\phi_i - M,$$

若选择的M 足够大，则该约束变得无约束（被放松），允许π_i 取任意较小值（提前出车）。

最终形式为：

$$\pi_i + M r_i \geq \phi_i, \qquad \forall i \in I.$$

5. 时间约束与总调度时间

0.1 车辆进入PBS、车道位置与出车时间建模

入车道时间：

$$t_i^{\text{in}} \geq a_i + \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} t_k^{\text{in}} x_{i,k,p}, \qquad \forall i.$$

定义车辆在车道中的位置：

$$\bar{p}_i = \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} p \, x_{i,k,p}, \qquad \forall i.$$

车身从车道行驶到出口的距离：

$$d_i = \max(P) - \bar{p}_i, \qquad \forall i.$$

出车时间：

$$t_i^{\text{out}} \geq t_i^{\text{in}} + t^{\text{move}} d_i + r_i t^{\text{extra}}, \qquad \forall i.$$

解释：

- 若$r_i = 0$，车辆按车道FIFO 正常向出口行驶；
- 若$r_i = 1$，则会额外经历返回道，因此加上额外耗时t^{extra}，允许车辆更早从总队列中退出。

Makespan（最大完工时间）：

$$T \ge t_i^{\text{out}}, \qquad \forall i.$$

6. 变量域

$$y_{i,s} \in \{0,1\}, \quad x_{i,k,p} \in \{0,1\}, \quad r_i \in \{0,1\}, \quad \theta_{i,j,k} \in \{0,1\},$$
$$\delta_s, \eta_m \ge 0, \quad t_i^{\text{in}} \ge 0, \quad t_i^{\text{out}} \ge 0, \quad T \ge 0.$$