Operációkutatás

Készítette:

Meskó Balázs

2011

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Ide majd jön egy kis rizsa arról, hogy mi ez a cucc, meg hogy honnan lett összelopva :-)

A dokumentum LaTeX-kel készült, az ábrák jelentős része pedig a TikZ csomag segítségével készülhetett el.

2. fejezet

Lineáris programozás

1. A lineáris programozás szimplex módszere

1.1. A szimplex módszer

1.2. Kiinduló szimplex módszer

1.3. Példafeladatok

$\boxed{1}$ Egy üzem kétféle terméket gyárt (T_1,T_2). A termékek három alkatrész (A_1,A_2,A_3) felhasználásával készülnek. Az első táblázat a termékek szerelési idejét, egységárát és az alkatrészigényüket tartalmazza. Az alkatrészek megmunkálását két gépen végzik (G_1,G_2). A második táblázat az alkatrészek gépenkénti megmunkálási igényét tartalmazza, és a megmunkálógépek kapacitását. A szerelőüzem kapacitása 220 perc/nap.

a) Határozza meg a szerelő- és gyártóüzem kapacitását nem meghaladó napi termelést úgy, hogy az árbevétel maximális legyen!

b) Végezzen érzékenységvizsgálatot az 1. termék egységárára illetve a 2. gép kapacitására!

c) Mennyivel kell megváltoztatni a G_1 gép kapacitását, hogy az árbevétel 1%-kal nőjön?

	A_1	A_2	A_3	Szerelés	Egységár
G_1	1	0	2	2	27
G_2	0	1	1	1	8

	A_1	A_2	A_3	Kapacitás
G_1	1	0	1	240
G_2	7	1	1	630

Először is a megoldáshoz fel kell írnunk a matematikai modellt, amelyhez ki kell hámoznunk az adatokat a táblázatokból:

$$
\begin{aligned}
1\cdot 1x_1+0\cdot 0x_2+1\cdot 2x_3+1\cdot 0x_1+0\cdot 1x_2+1\cdot 1x_3 &\leq 240\\
7\cdot 1x_1+1\cdot 0x_2+1\cdot 2x_3+7\cdot 0x_1+1\cdot 1x_2+1\cdot 1x_3 &\leq 630\\
2x_1+\quad 1x_2 &\leq 220\\
27x_1+8x_2 \longrightarrow \max!
\end{aligned}
$$

azaz

$$
\begin{aligned}
3x_1+\ \ x_2 &\leq 240\\
9x_1+2x_2 &\leq 630\\
2x_1+1x_2 &\leq 220\\
27x_1+8x_2 &\longrightarrow \max!\\
x_1,\quad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

A következő lépés az LP feladat sztenderdizálása:

$$
\begin{aligned}
3x_1+\ \ x_2+u_1 &= 240\\
9x_1+2x_2+u_2 &= 630\\
2x_1+1x_2+u_3 &= 220\\
-27x_1-8x_2 &\longrightarrow \min!\\
x_1, x_2, u_1, u_2, u_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	
u_1	2	1	220
u_2	3	1	240
u_3	9	2	630
	27	8	0

	x_1	u_1	
x_2	2	1	220
u_2	1	-1	20
u_3	5	-2	190
	11	-8	-1760

	u_2	u_1	
x_2	-2	3	180
x_1	1	-1	20
u_3	-5	3	90
	-11	3	-1980

	u_2	u_3	
x_2	3	-1	90
x_1	$-2/3$	$1/3$	50
u_1	$-5/3$	$1/3$	30
	-6	-1	-2070

Mivel a $\mathbf{z}-\mathbf{c}$ vektor ≤ 0, ezért megvan az optimális megoldás, amely az $\mathbf{x}=(50,90)$ vektor. A célfüggvény értéke ekkor -2070, azonban ez a segédfeladaté! Az eredeti feladatot maximumot keres, így az eredeti célfüggvény értéke 2070.

Az első termék ára $27 \longrightarrow 27+\lambda$. A célfüggvény az alábbi módon változik:

$$(-27-\lambda)x_1 - 8x_2 \longrightarrow \text{min!} \qquad (27+\lambda)x_1 + 8x_2 \longrightarrow \text{max!}$$

Mivel az x_1-hez tartozó paraméter változik, a táblázatban az x_1 sorát kell figyelni:

$$\begin{array}{rcr} -6+\frac{2}{3}\lambda \le 0 & \longrightarrow & \lambda \le 9 \\ -1-\frac{1}{3}\lambda \le 0 & \longrightarrow & \lambda \ge -3 \\ z_{\min} = -2070-50\lambda & & z_{\max} = 2070+50\lambda \end{array}$$

A második gép kapacitása $630 \longrightarrow 630+\lambda$. Az eredményoszlop eképpen változik:

$$\begin{array}{rcl} 90-1\lambda \ge 0 & \longrightarrow & \lambda \le 90 \\ 50+\frac{1}{3}\lambda \ge 0 & \longrightarrow & \lambda \ge -150 \\ 30+\frac{1}{3}\lambda \ge 0 & \longrightarrow & \lambda \ge -90 \\ z_{\min} = -2070-\lambda & & z_{\max} = 2070+\lambda \end{array}$$

A feladatrész megoldásához először érzékenységvizsgálatot kell végezni. Az első gép kapacitása $240 \longrightarrow 240+\lambda$. Az eredményoszlop az alábbiak szerint alakul:

$$\begin{array}{rcl} 90+3\lambda \ge 0 & \longrightarrow & \lambda \ge -30 \\ 50-\frac{2}{3}\lambda \ge 0 & \longrightarrow & \lambda \le 75 \\ 30-\frac{5}{3}\lambda \ge 0 & \longrightarrow & \lambda \le 18 \\ z_{\min} = -2070-6\lambda & & z_{\max} = 2070+6\lambda \end{array}$$

Az árbevétel növeléséhez a célfüggvényt értéket kell növelni, tehát:

$$2070+6\lambda = 2070\cdot 1,01$$
$$\lambda = 3,45$$

Ez belefér az érzékenységi intervallumba, a megoldás ekkor $\mathbf{x} = (47,7;100,35)^T$

$\boxed{2}$ Egy üzemben három terméket gyártanak, melyek megmunkálása két fázisban – egy esztergán és egy marógépen – történik. Az első termék esztergagépen történő megmunkálása 1 perc/db, a marógépen pedig 1 perc/db. A második terméké rendre 3 és 2 perc/db, a harmadiké pedig rendre 1 és 2 perc/db. Az esztergagép kapacitása 90 perc, a marógépé pedig 120 perc. A termékek várható eladási egységára rendre 1, 2 és 3 pénzegység, a tervezett árbevétel pedig 110 pénzegység. A gépek állásidejének költsége rendre 2 és 1 pénzegység/perc.

a) Adja meg azt a termelési tervet, amelynél a gépek állásidejéből eredő költsége minimális, feltéve, hogy a gépek kapacitását nem lépjük túl és árbevételben pontosan a tervezett mennyiséget biztosítjuk!
b) Írja fel a feladat duálisát, és adja meg a duál feladat optimális megoldását!
c) Végezzen érzékenységvizsgálatot az esztergа kapacitásának változására!

d) Végezzen érzékenységvizsgálatot az marógép kapacitásának változására!

e) Hány darab kell gyártáni a termékekből, ha a gépek kapacitása rendre 75 és 100 percre változik és az előírt árbevétel 120 pénzegység?

A megadott adatokat táblázatosan rendezve ezt kapjuk:

	E	M	
T_1	1	1	1
T_2	3	2	2
T_3	1	2	3
	90	120	110

A megadott feltételek matematikailag megfogalmazva az alábbiak:

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+\ \ x_3 &\leq 90 \\ x_1+2x_2+2x_3 &\leq 120 \\ x_1+2x_2+3x_3 &= 110 \\ x_1,\quad x_2,\quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

A célfüggvény pedig a következő:

$$\begin{gathered} 2(x_1+3x_2+x_3)+1(x_1+2x_2+2x_3) \longrightarrow \text{min!} \\ x_1+6x_2+2x_3+x_1+2x_2+2x_3 \longrightarrow \text{min!} \\ 3x_1+8x_2+4x_3 \longrightarrow \text{min!} \end{gathered}$$

Mivel a lineáris programozási feladat nem sztenderd alakú, ezért egy sztenderd segédfeladatot kell felírnunk, amely a következő:

$$\begin{gathered} x_1+3x_2+\ \ x_3+u_1 = 90 \\ x_1+2x_2+2x_3+u_2 = 120 \\ x_1+2x_2+3x_3+u_3^* = 110 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ u_1, u_2, u_3^* \geq 0 \\ 3x_1+8x_2+4x_3 \longrightarrow \text{min!} \end{gathered}$$

A feladatot már megoldhatjuk kiinduló szimplex módszerrel, az **1. fázis**:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	1	3	1	90
u_2	1	2	2	120
u_3^*	1	2	3	110
	−3	−8	−4	0
	1	2	3	110

	u_1	x_2	x_3	
x_1	1	3	1	90
u_2	−1	−1	1	30
u_3^*	−1	−1	2	20
	3	1	−1	270
	−1	−1	2	20

	u_1	x_2	u_3^*	
x_1	$3/2$	$7/2$	$-1/2$	80
u_2	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	20
x_3	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	10
	$5/2$	$1/2$	$1/2$	280
	0	0	-1	0

Az első fázisnak ezennel vége, következhet a **2. fázis**, az utolsó sort pedig törölhetjük.

	u_1	x_2		u_3^*
x_1	$3/2$	$7/2$	80	$-1/2$
u_2	$-1/2$	$-1/2$	20	$-1/2$
x_3	$-1/2$	$-1/2$	10	$1/2$
	$5/2$	$1/2$	280	$1/2$

	u_1	x_1		u_3^*
x_2	$3/7$	$2/7$	$160/7$	$-1/7$
u_2	$-2/7$	$1/7$	$220/7$	$-4/7$
x_3	$-2/7$	$1/7$	$150/7$	$3/7$
	$16/7$	$-1/7$	$1880/7$	$4/7$

	x_2	x_1		u_3^*
u_1	$7/3$	$2/3$	$160/3$	$-1/3$
u_2	$2/3$	$1/3$	$140/3$	$-2/3$
x_3	$2/3$	$1/3$	$110/3$	$1/3$
	$-16/3$	$-5/3$	$440/3$	$4/3$

A szimplex módszer itt megáll, mivel a vizsgálósor sehol sem pozitív. A módszer által szolgáltatott optimális megoldás a $x = (0,0,110/3)^T$ vektor, és a célfüggvény értéke ekkor $z_o = 440/3 \approx 146,6667$.

A duál feladat egyszerűen felírható a feladatból, az optimuma pedig a segédfeladat utolsó szimplex táblájából.

$$\begin{aligned} y_1 + \ \ y_2 + \ \ y_3 &\le 3 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\le 8 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\le 4 \\ y_1, y_2 &\le 0 \\ 90y_1 + 120y_2 + 110y_3 &\longrightarrow \max! \end{aligned}$$

Az optimális megoldás az $y = (0,0,-4/3)^T$ vektor, az optimum pedig $z_o = 440/3$.

Az eszterga kapacitása $90 \longrightarrow 90 + \lambda$. Mivel u_1 bázisban van a jobb oldal így változik:

$$\begin{aligned} \tfrac{160}{3} + 1\lambda &\ge 0 & &\longrightarrow & \lambda &\ge -\tfrac{160}{3} \\ \tfrac{140}{3} + 0\lambda &\ge 0 & & & -\tfrac{160}{3} \le \lambda &\le +\infty \\ \tfrac{110}{3} + 0\lambda &\ge 0 \\ z_o = \tfrac{440}{3} + 0\lambda \end{aligned}$$

A marógép kapacitása $120 \longrightarrow 120+\lambda$. Mivel u_2 bázisban van a jobb oldal így változik:

$$\begin{array}{rlcr} & \frac{160}{3}+0\lambda \geq 0 & & \\ & \frac{140}{3}+1\lambda \geq 0 & \longrightarrow & \lambda \geq -\frac{140}{3} \\ & \frac{110}{3}+0\lambda \geq 0 & & -\frac{160}{3} \leq \lambda \leq +\infty \\ z_o = & \frac{440}{3}+0\lambda & & \end{array}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 75 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \qquad y \cdot b' = \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 40 \\ 160 \end{pmatrix}$$

	x_2	x_1		u_3^*
u_1	7/3	2/3	35	−1/3
u_2	2/3	1/3	20	−2/3
x_3	2/3	1/3	40	1/3
	−16/3	−5/3	160	4/3

3. fejezet

Egészértékű lineáris programozás

1. Gomory-vágás

2. Dakin-algoritmus

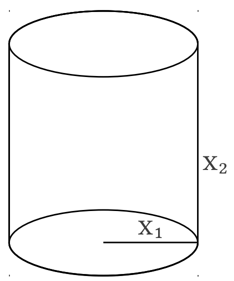
4. fejezet

Nemlineáris programozás

1. Karush-Kuhn-Tucker feltételek

1.1. Példafeladatok

$\boxed{3}$ Tervezzen henger alakú konzervdobozt, amely térfogata legalább 16π cm^3, és a felülete minimális. Tehát $V = x_1\pi x_2 \geq 16\pi$ és $A = 2x_1\pi + 2x_1\pi x_2 \longrightarrow \min!$



A KKT feltételek felírásához csoportosítjuk és egyszerűsítjük a feltételeket:

$$f : x_1^2 + x_1x_2$$
$$g_1 : 16 - x_1^2x_2$$

A Lagrange függvény és gradiensei ekkor a következőek:

$$L(x_1, x_2, u_1) = f + u_1 \cdot g_1 = x_1^2 + x_1 x_2 + u_1(16 - x_1^2 x_2)$$

$$\nabla L = \left(\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 u_1 \\ x_1 - x_1^2 u_1 \\ \hdashline 16 - x_1^2 x_2 \end{array}\right) \qquad H = \nabla^2 L = \left(\begin{array}{cc:c} 2 - 2x_2 u_1 & 1 - 2x_1 x_2 & -2x_1 x_2 \\ 1 - 2x_1 x_2 & 0 & -x_1^2 \\ \hdashline -2x_1 x_2 & -x_1^2 & 0 \end{array}\right)$$

A KKT feltételek ebből kiolvasva:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 u_1 &= 0 \\ x_1 - x_1^2 u_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{duál feltételek}$$

$$u_1(16 - x_1^2 x_2) = 0 \quad \text{komplementaritási feltétel}$$

$$\left.\begin{aligned} 16 - x_1^2 x_2 &\leq 0 \\ u_1 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{primál feltételek}$$

Ezután esetszétválasztással megkeressük az összes KKT pontot:
I. eset: $u_1 = 0$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ 16 - x_1^2 x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Ebből egyszerűen adódik, hogy $\mathbf{x} = (0,0)^T$, azonban ez nem KKT pont, mert $16 \not\leq 0$. Szemléletesen pedig nyilvánvaló hogy egy zérus átmérőjű és magasságú henger térfogata nem lesz megfelelő.

II. eset: $u_1 > 0$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 u_1 &= 0 \\ x_1(1 - x_1 u_1) &= 0 \\ 16 - x_1^2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

A második feltételnél szétválasztjuk az esetet:

II/a. eset: $x_1 = 0$. Ekkor $x_2 = 0$-t kapunk, de azt már beláttuk hogy en nem KKT pont.

II/b. eset: $x_1 u_1 = 1$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_2 &= 0 \text{ azaz } x_2 = 2x_1 \\ 16 - x_1^2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ebből egyszerűen kijön, hogy

$$\begin{aligned} 16 &= 2x_1^3 \\ x_1^3 &= 8 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Az u_1 Lagrange szorzó értéke ekkor 1/2. Az $\mathbf{x} = (2,4)^T$ pont KKT pont, hiszen teljesíti az összes feltételt. Azonban, hogy optimális megoldás legyen teljesülnie kell annak, hogy $H(\mathbf{x})$ pozitív definit mátrix legyen.

A Hesse-féle mátrix értéke az $\mathbf{x} = (2,4)^T$ helyen ($u_1 = 1/2$):

$$H(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -16 \\ -1 & 0 & -4 \\ -16 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Az inerciateszttel ellenőrízhetjük a definitségét:

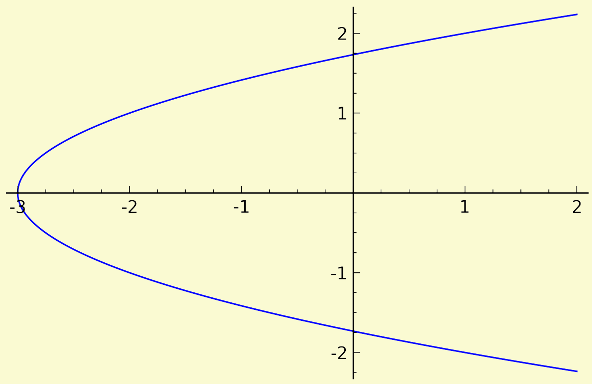
$$\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & -1 & -16 \\ -1 & 0 & -4 \\ -16 & -4 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{Iner}(1,0,0)} \sim \underbrace{\begin{vmatrix} 1/2 & 4 \\ 4 & 128 \end{vmatrix}}_{\text{Iner}(0,0,1)} \sim \underbrace{\begin{vmatrix} 3/8 \end{vmatrix}}_{\text{Iner}(0,0,1)}$$

Ez alapján az inercia értéke $\text{Iner}(1,0,2)$, tehát H feltételesen pozitív definit mátrix, ezért a $\mathbf{x} = (2,4)^T$ pont valóban optimális minimumpont.

$\boxed{4}$ Adott az $x_2^2 = x_1 + 3$ parabola. A parabola az (x_1, x_2) síkot két tartományra osztja. Tekintse azt a tartományt, amely az origót tartalmazza. Határozza meg a tartomány azon pontjait, amelyeknél az $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ függvény értéke a legkisebb! A megoldást az alábbi lépésekben végezze el:

a) Írja fel az optimalizációs feladatot matematikai formában!
b) Határozza meg az összes KKT pontot!
c) Döntse el, hogy az egyes KKT pontok közül melyik lokális minimumpont!
d) Határozza meg a globális minimumpontot!

Először is célszerű készíteni egy ábrát a paraboláról.



A feladat matematikailag megfogalmazva a következő:

$$x_2^2 - x_1 - 3 \le 0$$
$$x_1 x_2 \longrightarrow \min!$$

Most már kiszámolhatjuk a Lagrange függvényt és gradienseit:

$$L(x_1, x_2, u_1, u_2) = x_1 x_2 + u_1(x_2^2 - x_1 - 3)$$

$$\nabla L = \left(\begin{array}{c} x_2 - u_1 \\ x_1 + 2x_2 u_1 \\ \hline x_2^2 - x_1 - 3 \end{array}\right) \qquad H = \nabla^2 L = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2u_1 & 2x_2 \\ \hline -1 & 2x_2 & 0 \end{array}\right)$$

A KKT feltételeket kiolvasva:

$$\begin{aligned} \left.\begin{aligned} x_2 - u_1 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 u_1 &= 0 \end{aligned}\right\} &\text{ duális feltételek} \\ u_1(x_2^2 - x_1 - 3) = 0 \quad &\text{ komplementaritási feltétel} \\ \left.\begin{aligned} x_2^2 - x_1 - 3 &\leq 0 \\ u_1 &\geq 0 \end{aligned}\right\} &\text{ primál feltételek} \end{aligned}$$

Esetszétválasztás:
I. eset: $u_1 = 0$

$$x_2 = 0$$
$$x_1 = 0$$

Ez teljesíti is a KKT feltételeket (azaz KKT pont), nézzük meg a H definitását!

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{Iner(1,0,1)}} \sim \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}}_{\text{Iner(0,1,0)}}$$

Az inercia értéke Iner$(1, 1, 1)$, tehát a mátrix indefinit, így az $\mathbf{x} = (0, 0)^T$ csak nyeregpont.
II. eset: $u_1 > 0$

$$x_2 = u_1$$
$$x_1 + 2x_2 u_1 = 0$$
$$x_2^2 - x_1 - 3 = 0$$

A második egyenletbe az elsőt behelyettesítve: $x_1 = -2u_1^2$. Ezt és az első egyenletet a harmadikba behelyettesítve: $u_1^2 + 2u_1^2 - 3 = 0$ azaz $u_1^2 = 1$. Ez tehát két megoldást is szolgáltat:

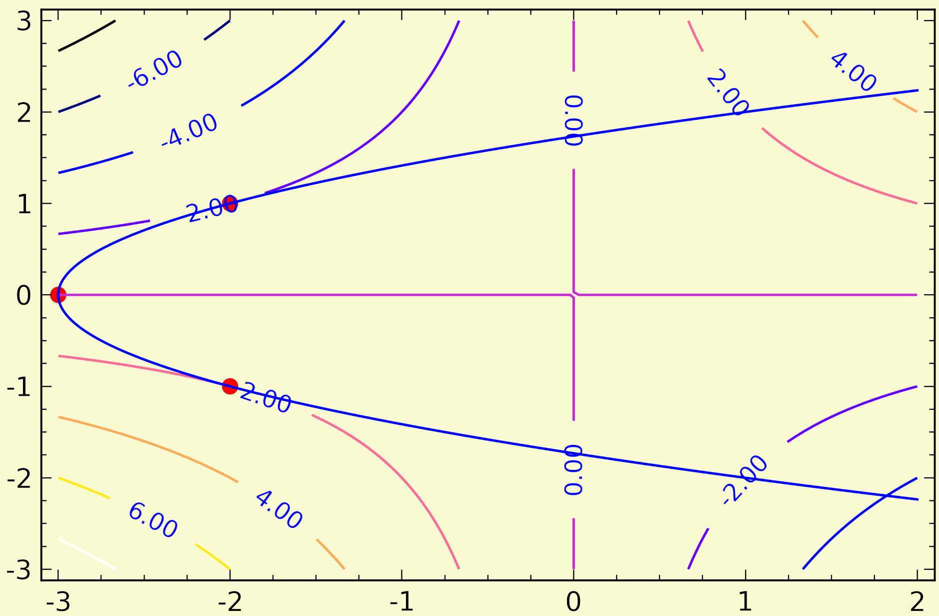
$$\begin{array}{ll} u_1 = 1 & u_1 = -1 \\ x_1 = -2 & x_1 = -2 \\ x_2 = 1 & x_2 = -1 \end{array}$$

Mindkettő KKT pontot szolgáltat, a Hesse-féle mátrix definitségét vizsgálni kell:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{Iner}(0,0,1)} \sim \underbrace{\begin{vmatrix} -1/2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{Iner}(1,0,0)} \sim \underbrace{\begin{vmatrix} 6 \end{vmatrix}}_{\text{Iner}(0,0,1)}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{Iner}(1,0,0)} \sim \underbrace{\begin{vmatrix} 1/2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{Iner}(0,0,1)} \sim \underbrace{\begin{vmatrix} -10 \end{vmatrix}}_{\text{Iner}(1,0,0)}$$

Az $\mathbf{x} = (-2, 1)^T$ KKT ponthoz tartozó Hesse-féle mátrix feltételesen pozitív definit, míg az $\mathbf{x} = (-2, -1)^T$ KKT ponthoz tartozó feltételesen negatív definit. Tehát az első pont lokális minimum, a második pedig lokális maximum pont. A következő kontúrrajzon ez jól látszik:

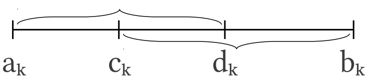


Globális minimuma pedig nem létezik a függvénynek, hiszen az x_1 tetszőlegesen nagy pozitív számnak, az x_2 pedig tetszőlegesen kicsi negatív számnak választható (természetesen csak a tartományon belül maradva), így az $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ célfüggvény tetszőlegesen kis értéket vehet fel.

2. Extrémum keresés

A következő keresési módszerek úgy működnek, hogy veszünk egy keresési intervallumot, amelyet különböző módokon felosztunk, majd megnézzük hogy melyik részében szerepel az optimum. Ezt rekurzívan folytatjuk a leállási feltétel teljesüléséig.

A felosztás mindig két részre bontja az intervallumot az alábbi módon:



A megfelelő intervallum kiválasztása, és a következő a és b paraméterek kiválasztása az alábbi módon történik:

$$\begin{array}{cc} \text{Ha } f(c_k) < f(d_k) & \text{Ha } f(c_k) \geq f(d_k) \\ a_{k+1} = a_k & a_{k+1} = c_k \\ b_{k+1} = d_k & b_{k+1} = b_k \end{array}$$

2.1. Dichotomous-módszer

A módszer során az intervallumok meghatározásához egy δ paramétert alkalmazunk, amelyet előre kiválasztunk. A keresés addig tart, amíg az intervallum hossza nagyobb, mint a megadott ε paraméter.

$$c_k = a_k + \frac{L_k}{2} - \delta \qquad d_k = a_k + \frac{L_k}{2} + \delta$$

2.2. Aranymetszés (Golden Section) módszer

A módszernél a keresési intervallumot az aranymetszés arányában osztjuk fel:

$$c_k = a_k + (1-\varphi)L_k \qquad d_k = a_k + \varphi L_k$$

ahol $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. A keresés szintén addig tart, amíg $L_k > \varepsilon$.

2.3. Fibonacci-módszer

A Fibonacci módszer esetén a Fibonacci-számok segítségével határozzuk meg az intervallumokat. A Fibonacci-számokat az alábbiak szerint definiáljuk:

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 0 \\ 1, & \text{ha } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{ha } n \geq 2 \end{cases}$$

Az intervallumok meghatározása pedig:

$$c_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} L_k \qquad d_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} L_k$$

A módszer használatához választunk egy kezdeti n paramétert, amely meghatározza a pontosságot.

2.4. Példafeladat

5 Adott az $f(x) = x^2 - 4x + 3 \longrightarrow \min!$ optimalizálási feladat. Adott továbbá az $[a_1, b_1] = [1, 3]$ bizonytalansági intervallum.

a) Határozza meg az $[a_2, b_2]$ bizonytalansági intervallumot:
   - Dichotomous módszerrel $\delta = 0,3$ paraméter esetén
   - Aranymetszés módszerrel
   - Fibonacci módszerrel $n = 8$ paraméter esetén

b) Határozza meg aranymetszés módszer esetén az $[a_6, b_6]$ bizonytalansági intervallum hosszát!

Az intervallum hossza $L_1 = 3 - 1 = 2$. A Dichotomous módszer esetén

$$c_1 = a_1 + \frac{L_1}{2} - \delta = 1 + \frac{2}{2} - 0,3 = 1,7 \qquad d_1 = a_1 + \frac{L_1}{2} + \delta = 1 + \frac{2}{2} - 0,3 = 2,3$$
$$f(c_1) = -0,91 \qquad f(d_1) = -0,91$$

Mivel $f(c_1) \geq f(d_1)$, ezért $a_2 = c_1 = 1,7$, és $b_2 = b_1 = 3$.
Az aranymetszés módszer esetén:

$$c_1 = a_1 + (1 - \varphi)L_1 = 1 + 0,38197 \cdot 2 = 1,7639 \qquad d_1 = a_1 + \varphi L_1 = 1 + 0,6180 \cdot 2 = 2,2361$$
$$f(c_1) = -0,9443 \qquad f(d_1) = -0,9443$$

Mivel $f(c_1) \geq f(d_1)$, ezért $a_2 = c_1 = 1,7639$, és $b_2 = b_1 = 3$.
A Fibonacci módszer esetén:

$$c_1 = a_1 + \frac{F_6}{F_8} L_1 = 1 + \frac{8}{21} \cdot 2 = 1,7619 \qquad d_1 = a_1 + \frac{F_7}{F_8} L_1 = 1 + \frac{13}{21} \cdot 2 = 2,2381$$
$$f(c_1) = -0,9433 \qquad f(d_1) = -0,9433$$

Mivel $f(c_1) \geq f(d_1)$, ezért $a_2 = c_1 = 1,7619$, és $b_2 = b_1 = 3$.

Az $[a_6, b_6]$ intervallum hossza $L_1 \cdot \varphi^5 = 0,1803$.

3. Gradiens-módszer

3.1. Konjugált gradiens módszer

Választunk egy x_0 kezdőpontot, ahonnan elindulunk. A kezdeti d_0 irány a szokásos módon $d_0 = -\nabla f(x_0)$. Az ezt követő elemeket az alábbiakból kaphatjuk:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \lambda d_k \\ d_k &= -\nabla f(x_{k+1}) + \alpha_{k+1} d_k \\ \alpha_{k+1} &= \frac{||\nabla f(x_{k+1})||_2^2}{||\nabla f(x_k)||_2^2} \end{aligned}$$

Másképp megfogalmazva, a gradiensek elemeinek a négyzetösszegét osztjuk el egymással. Az x_{k+1} pont meghatározásához szükséges λ-t a következő módon kaphatjuk meg:

1) Az $x_k + \lambda d_k$ vektort behelyettesítjük az f függvénybe. Ezt $\phi(\lambda)$-val jelöljük.
2) A $\phi'(\lambda) = 0$ megoldásai közül kerülhet ki a λ értéke, hiszen itt lehet lokális minimuma a függvénynek. Ha egyetlen λ érték jöhet szóba, akkor azt választjuk.
3) Az eljárás addig tart amíg λ nullától különböző vagy egy megadott értéknél abszolútértékben nagyobb.

3.2. Példafeladatok

$\boxed{6}$ Az alábbi függvény minimumát szeretnénk meghatározni konjugált gradiens módszerrel:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 7$$

Tegyük fel, hogy már néhány lépést elvégeztünk, és alábbi eredményeket kaptuk:

$$x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \quad d_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad x_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Határozza meg az x_8 közelítést, és a hozzá tartozó d_7 vektort!

Az irányvektort meghatározhatjuk a megadott adatokból, csak a gradiens értékére van szükségünk hozzá:

$$d_7 = -\nabla f(x_7) + \frac{||\nabla f(x_7)||_2^2}{||\nabla f(x_6)||_2^2} d_6$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 1 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

A behelyettesítés után:

$$d_7 = -\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{2^2 + 6^2}{2^2 + (-1)^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ezt felhasználva, most már meg tudjuk mondani x_8 értékét:

$$x_8 = x_7 + \lambda d_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3\lambda \\ 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

A λ értékének meghatározásához behelyettesítünk:

$$\varphi(\lambda) = (\tfrac{1}{2} + 3\lambda)^2 + (4 - \lambda)^2 + (\tfrac{1}{2} + 3\lambda) - 2(4 - \lambda) + 7$$
$$\varphi'(\lambda) = 18\lambda + 3 + 2\lambda - 8 + 3 + 2 = 20\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = 0$$

Tehát x_8 megegyezik x_7-tel, így az algoritmus meg is állna.

$\boxed{7}$ Oldja meg az alábbi optimalizálási feladatot konjugált gradiens módszerrel, ha az első öt lépés utáni eredmények az alábbiak:

$$x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad d_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 + x_2 + 3 \rightarrow \text{min!}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - 1 \\ 2x_2 + 3x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$d_6 = -\nabla f(x_6) + \frac{||\nabla f(x_6)||_2^2}{||\nabla f(x_5)||_2^2} d_5 = -\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{(-2)^2 + 2^2}{(-1)^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$x_7 = x_6 + \lambda d_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 6\lambda \\ -1 - 6\lambda \end{pmatrix}$$

A λ behelyettesítése után:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= (1+6\lambda)^2 - 3(1+6\lambda)^2 + 2(1+6\lambda^2) - (1+6\lambda) - (1+6\lambda) + 3 \\ &= -2(1+6\lambda) + 3 = -12\lambda + 1 \\ \varphi'(\lambda) &= -12 \neq 0 \end{aligned}$$

A λ értéke nem határozható meg, ezért az algoritmus megáll.

4. Newton és kvázi Newton módszerek

4.1. Newton-módszer

4.2. Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) módszer

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{(B_k s_k)(B_k s_k)^T}{(B_k s_k)^T s_k}$$

A képletben az s_k vektor az $B_k s_k = -\nabla f(x^{(k)})$ lineáris egyenletrendszer megoldása, az y_k pedig az $\nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)})$ különbség.

4.3. Davidon–Fletcher–Powell (DFP) módszer

$$D_{k+1} = D_k + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k} - \frac{(D_k y_k)(D_k y_k)^T}{(D_k y_k)^T y_k}$$

A képletben az s_k vektor az $-D_k \cdot \nabla f(x^{(k)})$ kifejezés értéke, az y_k pedig az $\nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)})$ különbség.

4.4. Példafeladatok

$\boxed{8}$ Adott az $x_1^2 + 1/2 x_2^2 \longrightarrow \min!$ optimalizási feladat. Adott továbbá egy $\mathbf{x}_5 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ közelítő vektor és a Hesse-féle mátrixot helyettesítő $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ mátrix. A megoldást kvázi-Newton módszerrel kívánjuk meghatározni.

a) Határozza meg az $\mathbf{x}_6$ közelítő megoldásvektort és a Hesse mátrixot helyettesítő új mátrixot, ha nem alkalmaz vonalmenti keresést!
b) Határozza meg az $\mathbf{x}_6$ közelítő megoldásvektort ha alkalmaz vonalmenti keresést! A Hesse mátrixot helyettesítő új mátrixot nem kell meghatározni, csak a kiszámításához szükséges két vektort számolja ki!

A feladat megoldható mind DFP, mind BFGS módszerrel. Mindkét módszerhez szükségünk van a f függvény gradiensére, így először ezt számoljuk ki:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A módszerek közül először tekintsük a DFP módszert! Ekkor a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} s_5 &= -D_5 \cdot \nabla f(\mathbf{x}_5) \\ s_5 &= -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ s_5 &= \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A D_6 mátrix kiszámításához az alábbi képletbe kell behelyettesítenünk:

$$D_6 = D_5 + \frac{s_5 s_5^T}{s_5^T y_5} - \frac{(D_5 y_5)(D_5 y_5)^T}{(D_5 y_5)^T y_5}$$

Az s_5-öt már kiszámoltuk, az y_5 értéke pedig $\nabla f(\mathbf{x}_6) - \nabla f(\mathbf{x}_5) = \nabla f(\mathbf{x}_5 + s_5) - \nabla f(\mathbf{x}_5) = \binom{12}{-7} - \binom{2}{-1} = \binom{10}{-8}$. Így a következőt kell kiszámolni:

$$D_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \frac{\overbrace{\binom{-5}{6} \cdot (-5\ 6)}^{\begin{pmatrix} 25 & -30 \\ -30 & 36 \end{pmatrix}}}{\underbrace{(-5\ 6) \cdot \binom{10}{-8}}_{-98}} - \frac{\overbrace{\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \binom{10}{-8}\right]\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \binom{10}{-8}\right]^T}^{\begin{pmatrix} 784 & -1176 \\ -1176 & 1764 \end{pmatrix}}}{\underbrace{\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \binom{10}{-8}\right]^T \cdot \binom{10}{-8}}_{616}}$$

A mátrix tehát a következő értékű:

$$D_6 = \begin{pmatrix} 2 - 25/98 - 784/616 & -1 + 30/98 + 1176/616 \\ -1 + 30/98 + 1176/616 & 4 - 36/98 - 1764/616 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}0176 & 1{,}2152 \\ 1{,}2152 & 0{,}7690 \end{pmatrix}$$

Iránymenti keresés esetén annyi változik, hogy $\mathbf{x}_6 = \mathbf{x}_5 + \lambda d_5$-re, ahol $d_5 = s_5$ (csak azért nevezzük át d-re, hogy jelezzük irányról van szó) és λ értéke az $\varphi(\lambda) = f(1 - 5\lambda, -1 + 6\lambda)$ függvény minimuma.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= (1 - 5\lambda)^2 + \tfrac{1}{2}(-1 + 6\lambda)^2 \\ &= 25\lambda^2 - 10\lambda + 1 + \tfrac{1}{2}(36\lambda^2 - 12\lambda + 1) \\ &= 43\lambda^2 - 16\lambda + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

A függvény minimuma ott található, ahol az első derivált értéke nulla:

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= 0 \\ 86\lambda - 16 &= 0 \\ 86\lambda &= 16 \\ \lambda &= {}^{16}/_{86} \end{aligned}$$

Ebből tehát az $\mathbf{x}_6$ értéke $\binom{0{,}0698}{0{,}1163}$. A DFP módszer Hesse mátrixot helyettesítő mátrixához már csak az y_5-ra van szükségünk az pedig:

$$y_5 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0{,}0698 - 2 \\ 0{,}1163 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}1395 \\ 1{,}1163 \end{pmatrix}$$

A BFGS módszer esetén a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} B_5 s_5 &= -\nabla f(\mathbf{x}_5) \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} s_5 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ s_5 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A B_6 mátrix kiszámításához az alábbi képletbe kell behelyettesítenünk:

$$B_6 = B_5 + \frac{y_5 y_5^T}{y_5^T s_5} - \frac{(B_5 s_5)(B_5 s_5)^T}{(B_5 s_5)^T s_5}$$

Az s_5-öt már kiszámoltuk, az y_5 értéke pedig $\nabla f(\mathbf{x}_6) - \nabla f(\mathbf{x}_5) = \nabla f(\mathbf{x}_5 + s_5) - \nabla f(\mathbf{x}_5) = \binom{0}{-1} - \binom{2}{-1} = \binom{-2}{0}$. Így a következőt kell kiszámolni:

$$D_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \frac{\overbrace{\binom{-2}{0} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}{\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \binom{-1}{0}}_{2}} - \frac{\overbrace{\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \binom{-1}{0}\right]\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \binom{-1}{0}\right]^T}^{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}}{\underbrace{\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \binom{-1}{0}\right]^T \cdot \binom{-1}{0}}_{2}}$$

$$D_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Iránymenti keresés esetén $\mathbf{x}_6 = \mathbf{x} + \lambda d_5$. A λ meghatározásához a következő egyenlet minimumát keressük:

$$\begin{gathered} \varphi(\lambda) = (1-\lambda)^2 + \tfrac{1}{2}(-1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \tfrac{1}{2} = \lambda^2 - 2\lambda + \tfrac{3}{2} \\ \varphi'(\lambda) = 0 \longrightarrow 2\lambda - 2 = 0 \longrightarrow \lambda = 1 \end{gathered}$$

Így tehát:

$$y_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jelen esetben az iránymenti keresés nélküli módszer egybeesik az iránymenti kereséssel.

5. fejezet

Hálózati folyamok

1. Szállítási feladat

$\boxed{9}$ Három raktárban (R) 100, 120 és 120 tonnányi nyersanyagunk van. Az anyagot 5 felhasználó üzembe (Ü) kell szállítani, amelyek igénye rendre 40, 50, 70, 90 és 90 tonna. Az anyagok tonnánkénti szállítási költségét az alábbi táblázat tartalmazza. A feladatunk olyan szállítási terv készítése, mely minimális költséggel juttatja el a 240 tonna anyagot, feltéve hogy a szállítási költség arányos a szállított nyersanyag mennyiségével.

	Ü$_1$	Ü$_2$	Ü$_3$	Ü$_4$	Ü$_5$
R_1	1	1	2	6	9
R_2	6	4	3	5	7
R_3	5	2	6	4	8

Mindenekelőtt vegyünk a költségmátrix sor-oszlopredukcióját:

0	0	1	3	4
0	1	0	0	0
0	0	4	0	2

Ez alapján jöhet az első lépés, melyben veszünk egy kezdeti szállítást (észak-nyugati sarok módszerrel), majd utat kersünk címkézéssel:

	0	0	0	0	$\boxed{90}$	
10	40	50	–	–	–	$+s$
0	0	–	70	$\boxed{50}$	0	$+4$
$\boxed{80}$	0	0	–	40	–	$+s$
	$+1$	$+1$	-2	$+3$	-2	$\delta = 50$

Folytatjuk az útkeresést:

	0	0	0	0	40	
10	40	50	–	–	–	$+s$
0	0	–	70	0	50	
30	0	0	–	90	–	$+s$
	$+1$	$+1$		$+3$		

Mivel nem találtunk új utat, ezért lefedjük a sor-oszlop redukált táblát:

0	0	1	3	4
0	1	0	0	0
0	0	4	0	2

Az ε értéke jelen esetben 1, frissítjük a táblát:

0	0	0	3	3
1	2	0	1	0
0	0	3	0	1

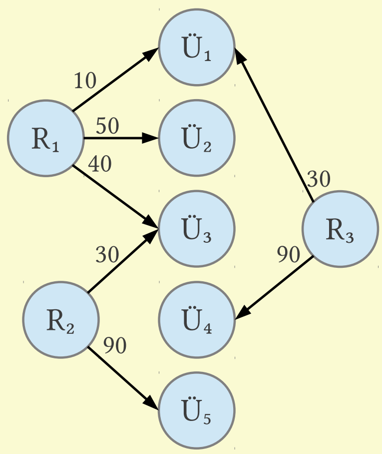
Folytatjuk a keresést az új táblán:

	0	0	0	0	$\boxed{40}$	
$\boxed{10}$	40	50	0	–	–	$+s$
0	–	–	$\boxed{70}$	–	50	$+3$
30	0	0	–	90	–	$-s$
	$+1$	$+1$	$+1$	$+3$	-2	$\delta = 10$

Frissítjük a táblát, majd folytatjuk a keresést:

	0	0	0	0	$\boxed{30}$	
0	$\boxed{40}$	50	10	–	–	$+1$
0	–	–	$\boxed{60}$	–	60	
$\boxed{30}$	0	0	–	90	–	$+s$
	$+3$	$+3$	$+1$	$+3$	-3	$\delta = 30$

Ezzel megkaptuk az optimális megoldást.



A szállítás teljes költsége így 1400 pénzegység.

2. Hozzárendelési feladat

A hozzárendelési feladat tekinthető egy olyan szállítási feladatnak, ahol minden egyes termelő és fogyasztó kapacitása illetve igénye pontosan 1.

10 Egy város A_1, A_2, A_3, A_4 pontján egy-egy azonos típusú teherautó áll rendelkezésünkre. A város B_1, B_2, B_3, B_4 pontjain szükség egy-egy teherautóra. Milyen utasítást adjunk ki, ha azt szeretnénk, hogy a kiszállás költsége a lehető legkisebb legyen, feltéve hogy a költség arányos a távolsággal.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	1	2	6
A_2	7	4	3	5
A_3	1	2	6	4
A_4	9	6	9	4

Legelőször vesszük a sor-oszlopredukciót:

6	0	1	5
4	1	0	2
0	1	5	3
5	2	5	0

Meghátorozunk egy kezdeti hozzárendelést az észak-nyugati sarok módszerrel:

	$*$		
		$*$	
$*$			
			$*$

Jelen esetben nagy szerencsénk volt, azonnal megkaptuk a hozzárendelést:

$$A_1 \to B_2 \qquad A_3 \to B_1$$
$$A_2 \to B_3 \qquad A_4 \to B_4$$

3. Futószalag feladat

Legyenek adottak $I_1.I_2,\ldots,I_n$ személyek, és $J_1,J_2,\ldots,J_n$ egy futószalag munkahelyei. Legyen adott egy T mátrix, amelynek $t_{i,j}$ eleme azt mutatja, hogy I_i személy az J_j munkahelyen mennyi idő alatt végez.

A feladatunk az, hogy megadjunk egy olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést, amely esetén a futószalag *ütemideje* a lehető legrövidebb. Az ütemidő a leghosszabb munkafázis hossza.

3.1. A megoldási algoritmus

A feladatot szintén házásság feladatok sorozatával fogjuk megoldani, de *nem* magyar módszerrel. Az alogritmus lépései az alábbiak:

1) Egy kezdeti hozzárendelés megadása (pl. a legkisebb időértékekkel).
2) A hozzárendeléshez tartozó ütemidő meghatározása, ezt jelöljük ε-nal.

3) Próbáljunk meg az előző ε-nál kisebb ütemidejű hozzárendelést készíteni. Ez egy olyan házasság feladat, ahol akkor lehet hozzárendelés, ha $t_{i,j} < \varepsilon$. Ezen alfeladat megoldhatósága szerint két elágazásunk van:
   (a) Ha nem tudtunk hozzárendelést megadni, akkor az előző hozzárendelés volt a legjobb → STOP !
   (b) Ha sikerült hozzárendelést találni, akkor ez határozottan jobb hozzárendelés, mint az előző volt. Az algoritmus folytatódik → UGRÁS 3) !

Elég nyilvánvaló, hogy az algoritmus véges lépésben mindenképp végetér.

4. Az utazó ügynök problémája

Az utazó ügynök problémája egy kombinatorikus optimalizálási feladat, és kiváló példa a bonyolultság-elmélet által NP-nehéznek nevezett problémaosztályra.

Adva van n város, illetve az útiköltség bármely két város között, keressük a legolcsóbb utat egy adott városból indulva, amely minden várost pontosan egyszer érint, majd a kiindulási városba ér vissza. Gyakorlatilag $\frac{(n-1)!}{2}$ út közül kell választanunk, ez ugyanis a Hamilton-körök száma az n pontú teljes gráfban (a képlet csak $n > 2$ esetén működik, de amúgy is csak ekkor érdekes vizsgálni a problémát).

4.1. Alkörút eliminációs módszer

A módszer során először felépítünk több alkörutat, majd ezekből egyetlen, optimális körutat hozunk létre.

11 Adott egy 6 városú utazó ügynök probléma, az alábbi költségmátrixszal:

	5	9	2	10	13
12		3	13	10	6
1	5		3	10	13
5	4	10		12	2
11	14	7	4		5
8	3	11	13	3	

Legelőször vesszük a sor-oszlopredukcióját, felírunk egy kezdeti hozzárendelést, majd címkézünk ha szükséges:

	3	7	0	8	11	+4
9		0	10	7	3	
0	5		2	9	12	
3	2	8		10	0	
7	10	3	0		1	$+s$
5	0	8	12	0		

			+5			$\varepsilon = 1$

Mivel nem találtunk megfelelő cserelehetőséget, ezért lefedtük a táblát. Az új tábla:

	2	6	0	7	10	+4
9		0	11	7	3	
0	5		3	9	12	
3	2	8		10	0	+6
7	10	3	0		0	$+s$
5	0	8	12	0		

			+5		+5	$\varepsilon = 2$

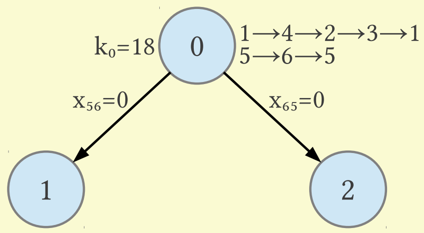
Ismét lefedtünk, az új tábla:

	0	4	0	5	10	0
9		0	13	7	5	+3
0	5		5	9	14	
1	0	6		8	0	+6
4	7	0	0		0	$+s$
5	0	8	13	0		

	−4	+5	+5		+5

A vonalkázott körök lesznek az új hozzárendelés tagjai, a tömör körök pedig kikerülnek a hozzárendelésből. Ez alapján két alkörutat kapunk: $1 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{4} 2 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{1} 1$ és $5 \xrightarrow{3} 6 \xrightarrow{5} 5$. A két út összsúlya 18.

Most már felírhatjuk a feladat gráfjának gyökerét is. A gráfot aszerint fogjuk elágaztatni, hogy az $5 \to 6$, vagy az $6 \to 5$ irányt tiltjuk le.



Most felírjuk az 1 gráfponthoz tartozó táblát. Ehhez a kezdeti T táblában beírunk a $t_{5,6}$ helyre egy M-et, jelezve hogy tiltott, majd sor-oszlop redukció után címkézünk:

	3	7	0	8	11	+4
9		0	10	7	3	
0	5		2	9	12	
3	2	8		10	0	
7	10	3	0		M	$+s$
5	0	8	10	0		
			+5			$\varepsilon = 3$

Itt megint lefedtünk, az új tábla a következő:

	0	4	0	5	8
9		0	13	7	3
0	5		5	9	11
3	2	8		10	0
4	7	0	0		M
5	0	8	13	0	

Az észak-nyugati sarok módszer most jó eredményt adott. A körutak most: $1 \xrightarrow{5} 2 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{1} 1$ és $4 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{3} 5 \xrightarrow{4} 4$. Az utak összsúlya $k_1 = 18$.

s.í.t.

4.2. Körút építő algoritmus

A módszer a körutat lépésenként fogjuk felépíteni.

12 Adott egy 5 városú utazó ügynök probléma, az alábbi költségmátrixszal:

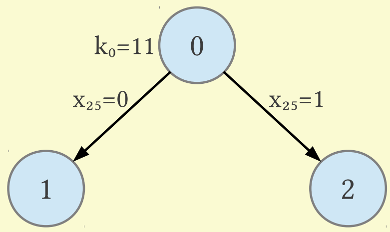
$C_0 =$

	8	3	7	4
13		4	5	1
2	6		5	3
8	5	1		7
7	4	8	2	

$\widehat{C}_0 =$

	3	0	4	1
12		3	4	0
0	2		3	1
7	2	0		6
5	0	6	0	

Az u és v vektorok elemeinek összege pedig 11. Ez lesz a k_0 értékünk. A továbblépéshez megkeressük a legkisebb költségű $x_{i,j}$ elemet, ahol a $\hat{c}_{i,j} = 0$. Itt két ilyen van, így választanunk egyet. Most a $x_{2,5}$ szerint haladunk tovább:



Ha a $2 \to 5$ utazást megtiltjuk, akkor $c_{2,5} = M$. Ekkor a költségmátrix:

$C_1 =$

	8	3	7	4
13		4	5	M
2	6		5	3
8	5	1		7
7	4	8	2	

Az u és v vektorok összege $\|u\| + \|v\| = 15$. Tehát $k_1 = 15$, most pedig visszalépünk a 0 gráfpontba. Ha $2 \to 5$ utazást elfogadjuk, akkor a fordított irányt tiltanunk kell és a 2. sort és az 5. oszlopot törölni. Így a C_2 költségmátrix a következő:

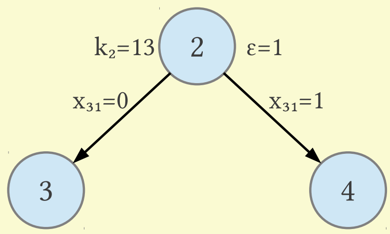
$C_2 =$

	8	3	7	
2	6		5	
8	5	1		
7	M	8	2	

Az $\|u\| + \|v\| = 12$, viszont itt ehhez hozzá kell adni $c_{2,5}$-t, így $k_2 = 13$. Mivel ez jobb mint a másik ág értéke, így inkább erre haladunk tovább. Mivel továbbágazzuk a gráfot, így szükség van a $\widehat{C}_2$ mátrixra:

$$\widehat{C}_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 1 & 0 & 4 & \\ \hline & & & & \\ \hline 0 & 0 & & 3 & \\ \hline 7 & 0 & 0 & & \\ \hline 5 & M & 6 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Ismét két legolcsóbb lehetőségünk van, most a $x_{3,1}$-et választjuk.



$$C_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 8 & 3 & 7 & \\ \hline & & & & \\ \hline M & 6 & & 5 & \\ \hline 8 & 5 & 1 & & \\ \hline 7 & M & 8 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\|u\| + \|v\| = 17$$
$$k_3 = 18$$

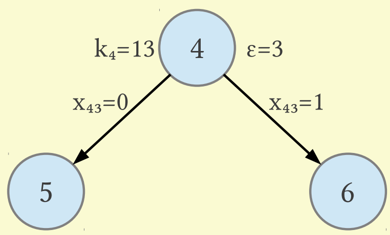
$$C_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 8 & M & 7 & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & 5 & 1 & & \\ \hline & M & 8 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\|u\| + \|v\| = 11$$
$$k_4 = 14$$

Mivel a 4-es gráfpontban kedvezőbb az k_4 érték, ezért arra megyünk tovább.

$$\widehat{C}_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 0 & M & 0 & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & 3 & 0 & & \\ \hline & M & 6 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Most csak egyetlen opciónk van, az $x_{4,3}$:



$$C_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 8 & M & 7 & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & 5 & M & & \\ \hline & M & 8 & 2 & \\ \hline\end{array} \qquad C_6 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 8 & & 7 & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & M & & 2 & \\ \hline\end{array}$$

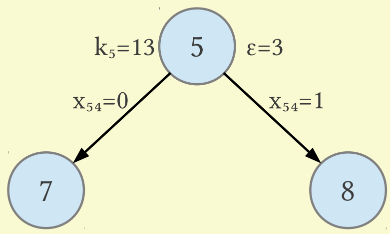
$$\|u\| + \|v\| = 10 \qquad \|u\| + \|v\| = 10$$

$$k_5 = 13 \qquad z_6 = 14$$

Most így kaptunk egy lehetséges megoldást, de az alsó határokat is megnézve nem biztos hogy ez az optimális. A 3-mas gráfpontból továbbmenve jobb megoldást biztosan nem kaphatunk, az 5-ösből viszont még lehetséges. Ezért lássuk a $\widehat{C}_5$ mátrixot:

$$\widehat{C}_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 1 & M & 0 & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & 0 & M & & \\ \hline & M & 6 & 0 & \\ \hline\end{array}$$

Az $x_{5,4}$-et választjuk:

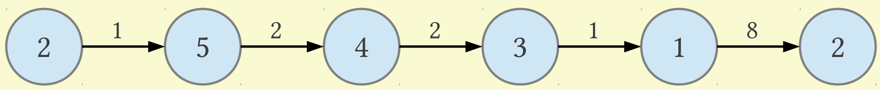


$$C_7 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 8 & M & 7 & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & 5 & M & & \\ \hline & M & 8 & M & \\ \hline\end{array} \qquad C_8 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 8 & M & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & 5 & M & & \\ \hline & & & & \\ \hline\end{array}$$

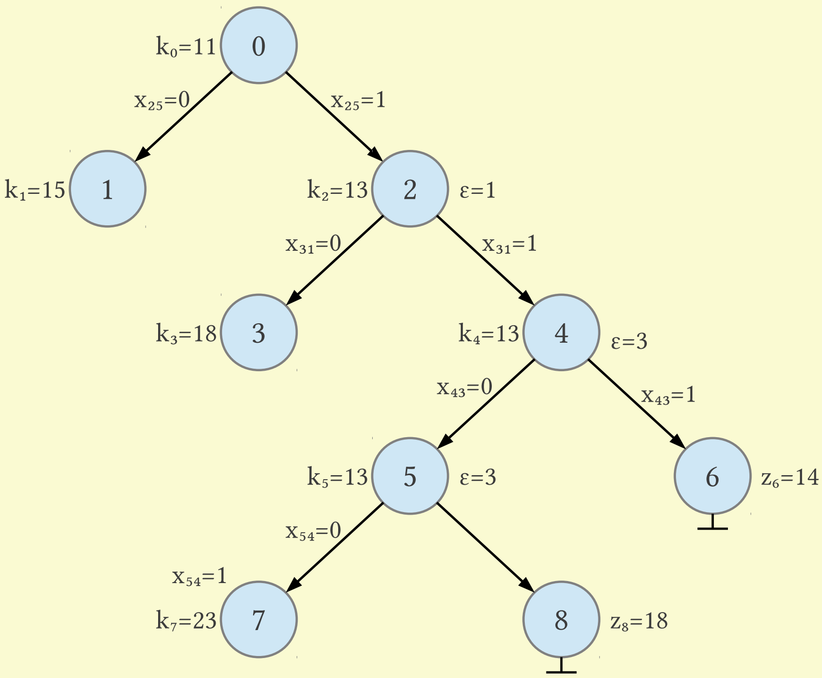
$$\|u\| + \|v\| = 20 \qquad \|u\| + \|v\| = 13$$

$$k_7 = 23 \qquad z_8 = 18$$

Jól látható, hogy ez rosszabb, mint a z_6 érték, tehát ez nem lehet optimális megoldás. Tehát az egyetlen optimum a 6-os gráfpontnál található, ez pedig:



Ezzel megoldottuk a feladatot, a teljesség kedvéért még lerajzoljuk a teljes gráfot:



Innen nagyon jól láthatjuk, hogy az 1-es, 3-mas és 7-es gráfpontokból továbbhaladva sem kaphatunk a z_6 értéknél kisebbet.