UNIVERSITÉ DE TOULON

Le calcul des variations et ses applications

Mesnikovych Olena

08/05/2018

Table des matières

0.1 Introduction

Tout au long de l'histoire de son existence, une personne est engagée dans l'optimisation, c'est-à-dire qu'elle trouve la valeur minimale ou maximale d'une certaine valeur : la zone du terrain, le profit (maximum), l'énergie, les coûts en espèces, la chemin (minimum). Dans certains problèmes de ce type, pour résoudre le problème d'optimisation, il suffit d'étudier un extremum pour une fonction donnée. On sait qu'au point x0, où la fonction lisse a un extremum, sa dérivée s'annule.

Avec les problèmes dans lesquels il est nécessaire de déterminer la valeur maximale ou minimale de certaines fonctions y = f (x), en mathématiques, pour modéliser divers problèmes, il est nécessaire de déterminer les valeurs maximales et minimales d'objets mathématiques plus complexes, qui sont appelées fonctionnelles.

Une fonctionnelle est un mappage d'un ensemble de fonctions X dans un ensemble de nombres réels R, $J : X \to R$, et la signification de ce concept est que chaque fonction $f(x)$ dans X est associée à un nombre $J[f]$ par une règle, par exemple

où $f(x)$ est une fonction continue définie sur l'intervalle [0, 1].

Le calcul des variations développe des méthodes permettant de trouver les valeurs maximum et minimum des fonctionnelles. Il permet d'optimiser des quantités physique (comme le temps, la surface ou la distence). Il trouve des applications dans des domaines aussi variés que l'aéronautique, la conception d'équipements sportifs performants, la résistance des structues, l'optimisation des formes....

Dans le cadre des mathématiques, le calcul des variations a commencé à se développer à partir de la fin du XVII siècle et s'est transformé en discipline mathématique indépendante après les travaux fondamentaux d'Euler (1707-1783), qui peut être considéré comme le père du calcul des variations.

La formation du calcul des variations a été grandement influencée par les problèmes mathématiques suivants :

0.2 Partie théorique

Considerons le problème fondamental du calcul des variations et considérons la théorie fondamentale qui permet de résoudre ce problème.

Etant donné une fonction $f = f(x, y, y')$, trouves les fonctions $y(x)$ qui mènent à des extrema de l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$$

sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Comment faire pour savoir quelles fonctions $y(x)$ minimisent ou maximisent l'intégrale I ? C'est à cette question que répond l'équation d'Euler-Lagrange.

0.2.1 L'équation d'Euler-Lagrange

Théorème 1.1 Une condition nécessaire pour que l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$$

atteigne un extremum sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

est que la fonction $y = y(x)$ satisfasse à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0$$

Dans certains cas, nous pourrons utiliser des formes simplifiées de l'équation d'Euler-Lagrange, qui nous permettront de trouver la solution plus rapidement et plus facilement. Un de ces ≪raccourcis≫ se nomme l'identité de Beltrami.

Théorème 1.2 Dans les cas où la fonction $f(x, y, y')$ à l'intérieur de l'intégrale (1) est explicitement indéoendante de x, une condition nécessaire pour que l'intégrale ait un extremum est donnée par l'identité de Beltrami, qui est une forme particulière de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C$$

où Cest une constante.

Les équations d'Euler-Lagrange et Beltrami sont des *équations différentielles* pour la fonction $y(x)$,c'est-à-dire que ce sont des équations reliant la fonction y à ses dérivées. Résoudre des équations différentielles est une des facettes les plus importantes du calcul difféentiel, qui a de multiples applications en sciences et en génie.

Comme le processus d'optimisation d'une fonction ne dependant que d'une variable réelle, l'équation d'Euler–Lagrange donne parfois plusieurs solutions, et il faut des tests supplémentaires pour savoir si celles-ci sont des minima, des maxima ou des points d'une autre nature. De plus, ces extrema pourraient etre locaux plutot que globaux. Qu'est-ce qu'un point critique ? Dans les fonctions d'une variable réelle, c'est un point où la dérivée s'annule. Un tel point peut etre un extremum ou encore, un point d'inflexion. Et dans les fonctions de plusieurs variables réelles, des points de selle peuvent apparaitre. Dans le cadre du calcul des variations mettant en jeu une fonctionnelle (1), on dit qu'une fonction y(x) est un point critique de la fonctionnelle si elle est une solution de l'équation d'Euler–Lagrange associée.

0.3 Pellicules de savon

Il est question ici des surfaces minimisant leur aire sous contrainte, problème plus connu sous le nom de problème des ≪ bulles de savon ≫. Après avoir étudié les propriétés de minimisation des films de savon dans une première partie, on va rechercer la route la plus courte reliant trois villes, et on considéra le problème connu sous le nom de problème de Steiner pour quatres points ou plus.

Quelle forme prend une pellicule élastique si elle est tendue sur un cadre ? Cette question possède une réponse évidente si le cadre a la forme d'un cercle. Tout le monde sait que la peau (la pellicule ≪ élastique ≫) tendue sur le pourtour d'un tambour (le cadre) repose dans le plan de ce cadre. Nous n'avons guère besoin du calcul des variations pour répondre à cette question. Mais qu'advient-il si le cadre n'appartient pas à un plan ? La réponse est beaucoup moins évidente ! Pourtant, un enfant a tous les outils pour y répondre. Muni de cintres métalliques qu'il peut déformer à sa guise et d'eau savonneuse, il peut obtenir une réponse explicite en plongeant les cintres dans la solution. Lorsqu'il les en retirera, la pellicule savonneuse donnera une solution expérimentale à la question que nous venons de poser.

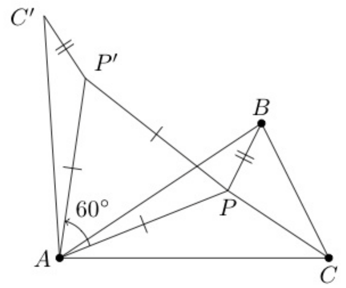
0.3.1 Les trois villes et les pellicules de savon

Exemple Suposons que nous avyons trois villes disposées sur un terrain parfaitement plat. On cherche à relier ces trois villes par la route la plus courte. Comment procéder ?

Solution Il est très simple de voir la solution de ce problème visuellement, en utilisant la propriété qu'a un film de savon de minimiser son aire. Tout ce qu'on a à faire, c'est construire un modèle formé de deux plaques parallèles d'un matériau transparent, reliées par trois chevilles perpendiculaires placées aux points de coordonnées A, B et C, et tremper cet ensemble dans une solution de savon. Quand on sort le modèle de la solution, un film relie les trois chevilles. Ce film étant une surface minimale, il nous donne exactement la forme que devrait prendre la route reliant directement les trois points.

On peut observer deux choses. La première est qu'au point d'intersection les trois droites se rencontrent avec des angles égaux. Ce point minimise la longueur totale de la route entre les trois points et il s'appelle **point de Fermat**.

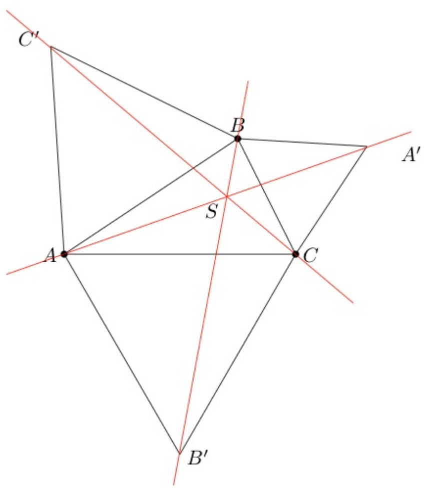
Comment trouver la position de ce point dans le triangle ? Considerons le triqngle ABC. Soit P un point à l'intérieur du triangle. On considère alors l'image de APB par la rotation de centre A et d'angle 60°. On note APC l'image de APB par cette rotation.



Le triangle PAP est équilatéral ; en effet, par construction il est isocèle et possède un angle de 60°. Donc $PP = AP$ et, toujours par construction, $CP = BP$. On a donc

$$AP + BP + CP = PP + PC + CP$$

Donc minimiser $AP + BP + CP$ revient à minimiser $PP + PC + CP$. Or cette dernière quantité est minimale si C, P, P et C sont alignés. En effet C et C (sommet « du » triangle équilatéral de côté AB) sont indépendants du choix de P. On doit donc choisir P de sorte que la longueur de la ligne brisée $CPPC$ soit minimale. Or le chemin le plus court entre C et C est la ligne droite, donc il faut que P appartienne à la droite CC. De façon analogue on construit les points A, B. Le point de Steiner S est alors le point de concours des droites (AA), (BB) et (CC).



D'où on peut trouver la position du point de Fermat simplement en dessinant un triangle équilatéral sur chaque coté du triangle formé par les trois points. On joint ensuite chaque sommet du triangle ABC au sommet du triangle équilatéral qui lui est opposé. Les trois droites AA', BB' et CC' s'intersectent en un point S.

Montrons maintenant que ces trois droites se rencontrent avec des angles égaux, c'est à dire $\frac{2\Pi}{3}$.

Considerons notre problème de la part du calcul variationelle. Soit le point S a les coordonnées (x,y). Alors nous devons chercher $\min_{(x,y)} F(x,y)$, où $F(x,y) = |SA| + |SB| + |SC|$. Puisque notre fonction F atteint son minimum au point (x,y), les dérivées partielles de cette fonction au point (x,y) sont égales à 0. Calculons les :

$$|SA| = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2}, |SB| = \sqrt{(x-x_B)^2 + (y-y_B)^2}, |SC| = \sqrt{(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2}$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(x-x_A)}{\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}} + \frac{(x-x_B)}{\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}} + \frac{(x-x_C)}{\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{(y-y_A)}{\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}} + \frac{(y-y_B)}{\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}} + \frac{(y-y_C)}{\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}} \end{cases}$$