Le calcul des variations et ses applications

Mesnikovych Olena

21 mai 2018

Table des matières

1 Introduction

Le calcul des variations est l'un des sujets classiques en mathématiques. Plusieurs mathématiciens exceptionnels ont contribué, pendant plusieurs siècles, à son développement. C'est toujours un sujet très vivant et en évolution. Outre son l'importance mathématique et ses liens avec d'autres branches des mathématiques, telles comme la géométrie ou les équations différentielles, il est largement utilisé en physique, ingénierie, économie et biologie.

Le calcul des variations est l'une des branches classiques des mathématiques. C'était Euler qui, en regardant le travail de Lagrange, a donné le nom actuel, pas vraiment explicite, à ce domaine des mathématiques.

En fait, le sujet est beaucoup plus ancien. Cela commence par l'un des problèmes les plus anciens mathématiques : l'inégalité isopérimétrique. Une variante de cette inégalité est connue comme le problème de Didon (Didon était une princesse phénicienne semi historique et plus tard une reine carthaginoise). Lorsque, fuyant Tyr, elle s'était réfugiée en Afrique du Nord, elle avait demandé une terre. Les habitants du lieu lui avaient alors donné la peau d'un bœuf, lui promettant comme domaine ce qu'elle pourrait encercler avec cette peau. Elle avait réussi à tourner cette dérision à son avantage : en découpant la peau de bœuf en lanières extrêmement fines, elle avait fabriqué une très longue corde (environ 4 km) qui lui permit de délimiter un territoire assez vaste pour y fonder la ville de Carthage, la forme de ce territoire étant un demi-cercle ayant le rivage pour diamètre (solution dans un demi-plan). L'idée de former un cercle plutôt qu'un triangle, un rectangle, un carré ou tout autre forme géométrique fermée et sans point double, place Didon au pinacle desmathématiques : elle avait donc admis sans hésiter le résultat isopérimétrique ci-après que Jacques Bernoulli prouva dans le cadre du calcul des variations.

D'autres problèmes importants du calcul des variations ont été pris en compte le dix-septième siècle en Europe, comme le travail de Fermat sur géométrique optique (1662), le problème de Newton (1685) pour l'étude des corps en mouvement dans les fluides (voir aussi Huygens en 1691 sur le même problème) ou le problème de la brachistochrone formulée par Galilée en 1638. Ce dernier problème avait un très forte influence sur le développement du calcul des variations. Au XVII siécle, Jean Bernoulli lance un concours qui occupera les plus grands esprits de l'époque. Il fait insérer le problème suivant dans *Acta Editorum* de Leipzig : *"Deux points A et B étant donnés dans un plan vertical, déterminer la courbe AMB le long de laquelle un mobile M, abandonné en A, descend sous l'action de sa propre pesanteur et parvient à l'autre point B dans le moins de temps possible."* Le problème prend le nom de brachistochrone, qui veut dire, traduit textuellement, *"temps le plus court".*

Il est montré que la ligne de la rampe la plus rapide ne sera pas une ligne droite reliant les points A et B, bien qu'elle soit la plus courte distance entre eux. Il s'est avéré que la ligne de la rampe la plus rapide est une cycloïde dont l'équation a la forme

$$\begin{cases} x = a(\theta - sin\theta) \\ y = a(1 - cos\theta) \end{cases} .$$

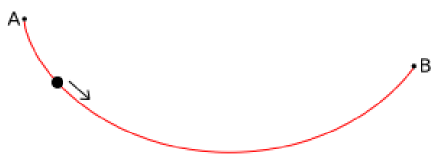


FIGURE 1 –

Ce probléme était résolu par John Bernoulli et presque immédiatement après aussi par James, son frère, Leibniz et Newton. Un pas décisif a été accompli avec le travail de Euler et Lagrange qui ont trouvé une manière systématique de traiter les problèmes dans ce en introduisant ce qu'on appelle maintenant l'équation d'Euler-Lagrange.

La généralisation de la brachistochrone pourrait, en théorie, complétement révolutionner le domaine des transports. Supposons que nous puissions percer l'intérieur de la Terre pour construire un tunnel allant d'une ville A à une ville B à la surface de la Terre. Si on n'églige le frottement, un train d'émarrant à vitesse nulle de A serait attiré vers le centre de la Terre par la gravité, accélérerait tant que le tunnel s'approcherait du centre de la Terre, puis d'écélererait quand le tunnel s'en éloignerait et, par conversion de l'énergie, ressortirait de ce tunnel en atteignant B à vitesse nulle ! Pas besoin de combustible, pas besoin de frein !

Ce projet révolutionnaire bute sur quelques difficultés. Si les villes sont assez éloignées, le ≪ meilleur tunnel ≫ s'enfonce assez profond ément dans la Terre, et il faudra creuser dans le magma. Donc pour l'instant, malheureusement, on ne peut pas traduire cela en réalité.

Ensuite, nous accorderons plus d'attention au problème, qui dans le monde actuel a déjà trouvé son application dans certains domaines. C'est le problème de Steiner, que nous résolvons pour des cas partiels, à savoir le problème des trois villes et le problème de Steiner pour quatre points qui se trouvent sur les sommets du carré. De plus, dans la section "Partie numérique", nous décrivons l'algorithme pour résoudre le problème de trois villes utilisant Matlab. Nous considérons également les propriétés surprenantes des bulles de savon, avec lesquelles on peut résoudre des ensembles de problèmes de calcul variationnel, y compris le problème de Steiner.

2 Partie théorique

Dans cette section, nous allons mentionner les principales définitions et les théorèmes du calcul des variations qui aideront à résoudre les problèmes mentionnés ci-dessus ainsi que les problèmes avec lesquels nous travaillerons dans le futur. Il y aura également plusieurs propositions de géométrie nécessaires pour résoudre le problème Steiner pour 3 points ou plus.

Considerons le problème fondamental du calcul des variations et considérons la théorie fondamentale qui permet de résoudre ce problème. Etant donné une fonction $f = f(x, y, y')$, trouves les fonctions $y(x)$ qui mènent à des extrema de l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$$

sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Comment faire pour savoir quelles fonctions $y(x)$ minimisent ou maximisent l'intégrale I ? C'est à cette question que répond l'équation d'Euler-Lagrange.

2.1 L'équation d'Euler-Lagrange

Théorème 1. *Une condition nécessaire pour que l'intégrale*

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx \tag{1}$$

atteigne un extremum sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases} \tag{2}$$

est que la fonction $y = y(x)$ satisfasse à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0. \tag{3}$$

Dans certains cas, nous pourrons utiliser des formes simplifiées de l'équation d'Euler-Lagrange, qui nous permettront de trouver la solution plus rapidement et plus facilement. Un de ces «raccourcis» se nomme l'identité de Beltrami.

Théorème 2. *Dans les cas où la fonction $f(x, y, y')$ à l'intérieur de l'intégrale* (1) *est explicitement indéoendante de x, une condition nécessaire pour que l'intégrale ait un extremum est donnée par l'identité de Beltrami, qui est une forme particulière de l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C$$

où C est une constante.

Les équations d'Euler-Lagrange et Beltrami sont des *équations différentielles* pour la fonction $y(x)$, c'est-à-dire que ce sont des équations reliant la fonction y à ses dérivées. Résoudre des équations différentielles est une des facettes les plus importantes du calcul diffeéntiel, qui a de multiples applications en sciences et en génie.

Comme le processus d'optimisation d'une fonction ne dependant que d'une variable réelle, l'équation d'Euler–Lagrange donne parfois plusieurs solutions, et il faut des tests supplémentaires pour savoir si celles-ci sont des minima, des maxima ou des points d'une autre nature. De plus, ces extrema pourraient etre locaux plutot que globaux. Qu'est-ce qu'un point critique ? Dans les fonctions d'une variable réelle, c'est un point où la dérivée s'annule. Un tel point peut etre un extremum ou encore, un point d'inflexion. Et dans les fonctions de plusieurs variables réelles, des points de selle peuvent apparaitre. Dans le cadre du calcul des variations mettant en jeu une fonctionnelle (1), on dit qu'une fonction y(x) est un point critique de la fonctionnelle si elle est une solution de l'équation d'Euler–Lagrange associée.

2.2 Théorème de Pompeiu

Théorème 3. *Si P est un point dans le plan d'un triangle équilatéral ΔABC, alors les longueurs des segments de ligne AP, BP et CP correspondent aux côtés d'un triangle, qui est dégénéré lorsque P se trouve sur le cercle circonscrit de ΔABC, c'est à dire $BP = AP + CP$.*

Démonstration. Considerons un triangle équilatéral ΔABC. Soit P un point arbitraire sur le plan. Connectons le avec tous les sommets du triangle ΔABC. Faisons tourner le triangle ΔAPB de 60° par rapport au sommet A dans le sens des aiguilles d'une montre (figure 2).

Le sommet B passe au sommet C, et le point P passe à un certain point P'. On a formé un triangle $\Delta AP'C$, qui est égal au triangle ΔAPB. Donc $AP = AP' \implies \Delta APP'$ est un triangle équilatéral. On a $PP' = PA$ et $P'C = PB$. Selon l'inégalité du triangle

$$PC \leq PP' + P'C = PA + PB.$$

L'égalité est atteint lorsque un point P se trouve sur la ligne droite $PC \implies \widehat{APB} = 120° \implies P$ se trouve sur le cercle circonscrit de ΔABC

□

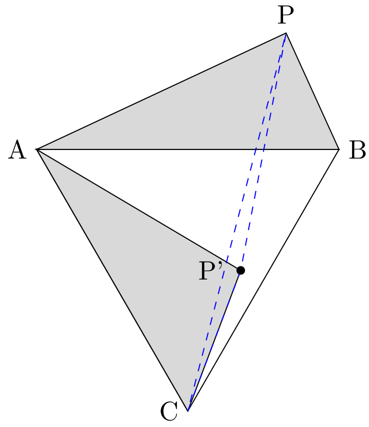


FIGURE 2 –

3 Pellicules de savon

Il est question ici des surfaces minimisant leur aire sous contrainte, problème plus connu sous le nom de problème des ≪ bulles de savon ≫. Après avoir étudié les propriétés de minimisation des films de savon dans une première partie, on va rechercer la route la plus courte reliant trois villes, et on considéra le problème connu sous le nom de problème de Steiner pour quatres points ou plus.

Quelle forme prend une pellicule élastique si elle est tendue sur un cadre ? Cette question possède une réponse évidente si le cadre a la forme d'un cercle. Tout le monde sait que la peau (la pellicule ≪ élastique ≫) tendue sur le pourtour d'un tambour (le cadre) repose dans le plan de ce cadre. Nous n'avons guère besoin du calcul des variations pour répondre à cette question. Mais qu'advient-il si le cadre n'appartient pas à un plan ? La réponse est beaucoup moins évidente ! Pourtant, un enfant a tous les outils pour y répondre. Muni de cintres métalliques qu'il peut déformer à sa guise et d'eau savonneuse, il peut obtenir une réponse explicite en plongeant les cintres dans la solution. Lorsqu'il les en retirera, la pellicule savonneuse donnera une solution expérimentale à la question que nous venons de poser.

4 Problème de Steiner

4.1 Le problème des trois villes

Example 1. Suposons que nous avyons trois villes disposées sur un terrain parfaitement plat. On cherche à relier ces trois villes par la route la plus courte. Comment procéder ?

Solution. Il est très simple de voir la solution de ce problème visuellement, en utilisant la propriété qu'a un film de savon de minimiser son aire. Tout ce qu'on a à faire, c'est construire un modèle formé de deux plaques parallèles d'un matériau transparent, reliées par trois chevilles perpendiculaires placées aux points de coordonnées A, B et C, et tremper cet ensemble dans une solution de savon. Quand on sort le modèle de la solution, un film relie les trois chevilles. Ce film étant une surface minimale, il nous donne exactement la forme que devrait prendre la route reliant directement les trois points.

On peut observer deux choses. La première est qu'au point d'intersection les trois droites se rencontrent avec des angles égaux (120 dégres) . Ce point minimise la longueur totale de la route entre les trois points et il s'appelle **point de Fermat**.

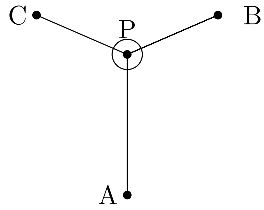
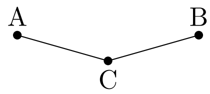


FIGURE 3 –

D'autre part si on choisit une configuration de points de sorte que l'angle formé par deux côtés du triangle soit supérieur à 120°, alors la solution est simplement composée par les deux côtés formant cet angle.



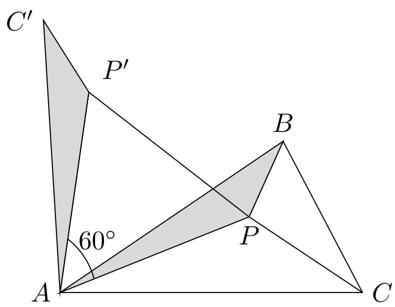
Considerons le premier cas. Comment trouver la position du point de Fermat dans le triangle avec tous les angles inférieurs à 120 degrés et esct-ce que ce point existe en général ?

Considerons le triangle ABC. Construisons sur le coté BC un triandle équilatéral $\Delta BA'C$ et construisons un cercle décrivant ce triangle.Si le point de Fermat existe, alors il se trouve sur ce cercle, donc $P \in \check{BC}$. COnstruisons un autre triangulaire équilatéral $\Delta AB'C$ sur le coté AC et le cercle. Là où les arcs se croisent, il y aura un point de Fermat. En effet, nos trianglesont tous les angles qui sont égaux à 60 dégres. L'angle $\widehat{BPC}$ est opposé au angle $\widehat{BA'C} = 60°$ d'un quadrilatère $BA'CP$ inscrit dans le cercle et donc $\widehat{BPC} = 120°$. De façon analogue $\widehat{APC} + \widehat{APB} = 120°$.

Une telle construction prouve non seulement l'existence d'un point de Fermat, mais montre aussi son unité. En effet, si un tel point existe, alors il se trouve à l'intersection des arcs, mais les arcs ont, en plus des points d'untersection A, B, seulement un seul point.

Maintenant nous montrons que le point de Fermat nous donne une solution à notre problème.

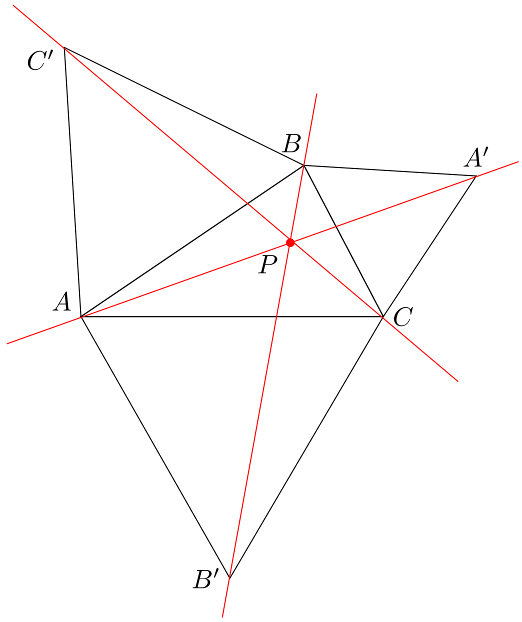
Considerons le triangle ABC. Soit P un point à l'intérieur du triangle. On considère alors l'image de APB par la rotation de centre A et d'angle 60°. On note $AP'C'$ l'image de APB par cette rotation.



Le triangle PAP' est équilatéral. En effet, par construction il est isocèle et possède un angle de $60°$. Donc $PP' = AP$ et, toujours par construction, $C'P' = BP$. On a donc

$$AP + BP + CP = PP' + P'C' + CP$$

Donc minimiser $AP+BP+CP$ revient à minimiser $PP'+P'C'+CP$. Or cette dernière quantité est minimale si C', P', P et C sont alignés. En effet C et C' (sommet du triangle équilatéral de coté AB) sont indépendants du choix de P. On doit donc choisir P de sorte que la longueur de la ligne brisée $CPP'C'$ soit minimale. Or le chemin le plus court entre C et C' est la ligne droite, donc il faut que P appartienne à la droite CC'. De façon analogue on construit les points A', B'. Le point de Fermat est alors le point de concours des droites AA', BB' et CC'.



D'où on peut trouver la position du point de Fermat simplement en dessinant un triangle équilatéral sur chaque coté du triangle formé par les trois points. On joint ensuite chaque sommet du triangle ABC au sommet du triangle équilatéral qui lui est opposé. Les trois droites AA', BB' et CC' s'intersectent en un point P.

Montrons maintenant que ces trois droites se rencontrent avec des angles égaux, c'est à dire $\frac{2\Pi}{3}$.

Considerons notre problème de la part du calcul variationelle. Soit le point S a les coordonnées (x,y). Alors nous devons chercher $\min_{(x,y)} F(x,y)$, où $F(x,y) = |SA| + |SB| + |SC|$. Puisque notre fonction F atteint son minimum au point (x,y), les dérivées partielles de cette fonction au point (x,y) sont égales à 0. Calculons les :

$$|SA| = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2}, |SB| = \sqrt{(x-x_B)^2 + (y-y_B)^2}, |SC| = \sqrt{(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2}$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(x-x_A)}{\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}} + \frac{(x-x_B)}{\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}} + \frac{(x-x_C)}{\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{(y-y_A)}{\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}} + \frac{(y-y_B)}{\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}} + \frac{(y-y_C)}{\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}} = 0. \end{cases}$$

Notons que $\frac{(x-x_A)}{\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}} = cos\gamma_A$ et $\frac{(y-y_A)}{\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}} = sin\gamma_A$, où γ_A c'est un angle formé par le vecteur $\overrightarrow{PA}$ avec l'axe des abscisses. De façon analogue nous notons $cos\gamma_B, sin\gamma_B$ et $cos\gamma_C, sin\gamma_C$. Alors on a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} cos\gamma_A + cos\gamma_B + cos\gamma_C = 0 \\ sin\gamma_A + sin\gamma_B + sin\gamma_C = 0 \end{cases}$$

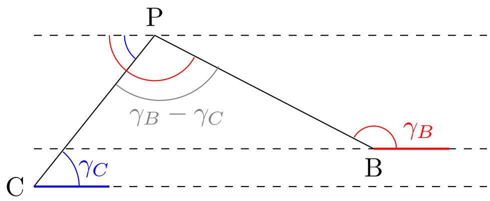
Exprimons A et B d'ici :

$$\begin{cases} cos\gamma_A = -cos\gamma_B - cos\gamma_C \\ sin\gamma_A = -sin\gamma_B - sin\gamma_C \end{cases}$$

La formule fondamentale de la trigonométrie dit que $sin^2\gamma_A + cos^2\gamma_A = 1$. Donc :

$$(-cos\gamma_B - cos\gamma_C)^2 + (-sin\gamma_B - sin\gamma_C)^2 = cos^2\gamma_B + 2cos\gamma_B cos\gamma_C + cos^2\gamma_C + \\ +^2\gamma_B + 2sin\gamma_B sin\gamma_C + sin^2\gamma_C = 2 + 2cos(\gamma_B - \gamma_C) = 1$$

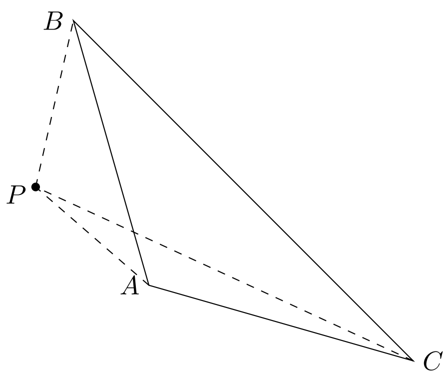
Donc $cos(\gamma_B - \gamma_C) = -\frac{1}{2} \implies \gamma_B - \gamma_C = \frac{2\Pi}{3}$.



D'où les trois droites PA, PB, PC se rencontrent au point de Fermat P avec des angles égaux de $\frac{2\Pi}{3}$.

Tournons-nous maintenant vers le second cas, où l'un des angles du triangle est supérieur ou égal à 120 degrés et montrons que la solution est simplement composée par les deux côtés formant cet angle.

Soit P un point arbitraire du plan. Si P ne se trouve pas à l'intérieur de l'angle A, alors l'un des angles $\widehat{PAC}$ ou $\widehat{PAB}$ est un angle obtus. Soit c'est $\widehat{PAC}$, donc $PC > AC$. D'autre part, selon l'inégalité du triangulaire $PA + PB > AB$. D'où $PA + PB + PC > AB + AC$ et le point Fermat se trouve au sommet A.



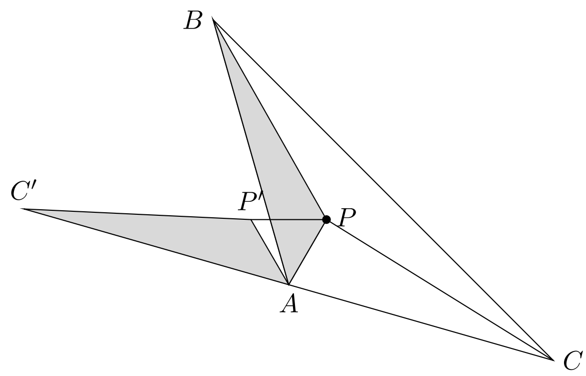
Soit P se trouve à l'intérieur de l'angle A. Faisons tourner le plan de 60°. Nous trouvons que le triangle ΔBAD est à l'intérieur du quadrilatère $BPP'C'$. Le périmètre du triangle est inférieur à périmètre du quadrilatère

$$AB + AC' + BC' < BP + PP' + P'C' + BC'$$

. Donc

$$AB + AC = AB + AC' < BP + PP' + P'C' = BP + AP + AC \implies P \text{ coincide avec } A$$

.



En conséquence, on a appris comment relier les trois villes par la route la plus courte et dans la section "Partie numerique" on va décriver l'algorithme pour résoudre ce problème en utilisant MatLab.

Ceci se généralise aussi aisément à plus de trois points. Là aussi, on pourrait trouver la route la plus courte qui les joint en construiant un modèle qu'on plongerait dans une solution de savon. Le problème généralisé est en fait un ancien problème d'optimisation appelé *problème de Steiner*.

4.2 Problème de l'arbre minimal de Steiner pour k points

Ce problème s'énonce comme suit : étant donné k points dans un plan, trouver le reseau le plus court permettant de les relier.

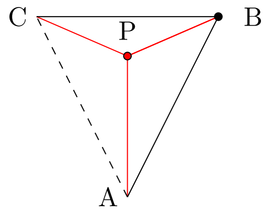
Pour résoudre le problème pour quatre points qui se trouvent sur les sommets du carré, nous caractérisons d'abord le réseau de routes de la plus petite longueur pour k points et dérivons un certain algorithme. Comme il s'est avéré, la solution du problème précédent de trois villes est suffisante pour sela.

4.2.1 Caractéristiques du réseau de Steiner

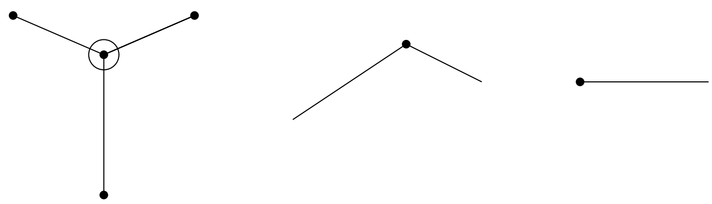
Notre réseau est un graphe constitué d'un certain nombre de sommets et d'aretes. Notons que :

1. Tous lles aretes de ce graphe sont des lignes droites. Si on veut obtenir le système de points le plus court, il n'y a pas aucun sens à relier deux points de la courbe, car sa longueur est supérieure à la longueur de la droite.
2. Il y a un nombre fini de sommets supplémentaires. Nous les dénotons par des cercles vides.

3. Pou deux points, il y a toujours un chemin d'un point à un autre.
4. Est-ce que le réseau peut etre fermé ? Non, car on peut supprimer l'un des aretes et notre propriété précédente sera toujours conservéé, mais la longueur du réseau sera moindre.
5. L'angle entre deux aretes qui sortent d'un sommet est toujours supérieur ou égal à 120°. En effet, supposons que l'angle entre les aretes qui sortent du sommet B soit inférieur à 120°. Considérons ensuite le triangle ΔABC formé par ces aretes. Donc il a un point de Fermat et on peut remplacer les aretes AB et AC par trois aretes nouveaux AP, BP et CP. En conséquence, la longueur totale des routes diminuera.



6. De n'importe quel sommet sortent trois aretes maximum. Cela résulte de l'affirmation précédente.
7. On a des sommets de trois types :
   – De sommet sortent trois aretes qui forment des angles de 120° ;
   – De sommet sortent deux aretes qui forment un angle supérieur ou égal à 120° ;
   – De sommet sort un arete.



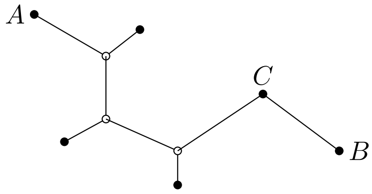
8. Les sommets supplémentaires ne peuvent etre que du premier type. En effet, si de sommet supplémentaire sort seulement un arete, alors il n'y a pas de sens de son existence, car il ne fait qu'accroitre le longueur totale.

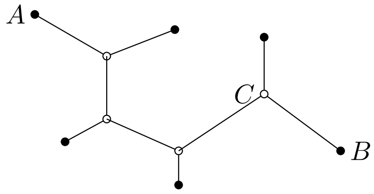
   Si deux aretes sortent du sommet supplémentaire, nous le rempaçons simplement par une ligne droite et le longueur totale diminuera.

Ce sont les principales choses que on doit savoir pour construire un réseau de Steiner.

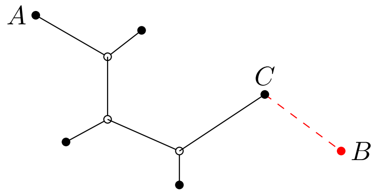
4.2.2 La construction de réseau

Nous avons donc k points sur un plan et nous voulons construire le plus petite réseau de routes pour eux. Sipposons qu'un réseau de Steiner a déja été construit. Nous prenons deux sommets de ce réseau, le chemin entre lesquels contient le plus grand nombre d'aretes. Nous anons indiqué ces sommets par A et B. Nous partons du point B. Ce sommet n'est pas un sommet supplémentaire, car il est du troisième type. Considérons un sommet C qui est avant du sommet B. Il peut etre supplémentaire ou originel. (figure...)



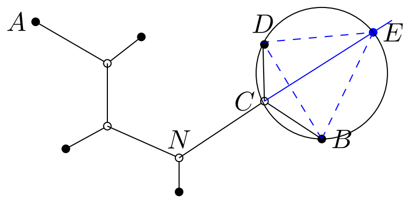


1-re cas Soit le sommet C est originel. Nous enlevons le sommet B avec l'arete qui en sort.



Mais les points qui restent sont également connectés par le réseau de Steiner. Donc si nous pouvons construire un réseau de Steiner pou $k-1$ points, alors nous pouvons le faire pour k points. Nous envolons simplement le sommet B, construissons un réseau de Steiner pour les $k-1$ points restants et puis nous retournons le sommet B. Bien sur, pendant le processus de retour, nous pouvons faire face à un problème : l'arete en sortant du sommet B forme un angle inférieur à 120° avec l'autre arete. Dans ce cas, il n'y aura pas un grand réseau de Steiner pour k points. Mais l'essentiel est que grace à cette construction nou ne manquerons pas un seul réseau.

2-me cas Soit le point C est un sommet supplémentaires, alors il contient trois aretes, dont l'un appartient au chemin que nous avons choisi initialement (CN) et deux aretes impasse (CB et CD).



B et D sont les sommets originels. On ne peut plus enlever léarete BC avec le sommet B, puisque le sommet C avec deux aretes existera en vain. De plus, on ne peut pas supprimer les sommets B et D avec les trois aretes BC, CD et CN. Donc on connecte les points B et D par un segment BD et construit un triangle équilatéral ΔBDE sur lui. Puis $\widehat{BCE} = \widehat{DCE} = 60°$ et les segmant EC et CN sont sur la meme ligne droite. Supprimons les sommets B et D avec les aretes DC et BC. Tout ce qui reste plus le sommet E forment aussi un réseau de Steiner. De plus, sa longueur est restée la meme par le théorème de Pompeiu (car $\widehat{BCD} = 120°$). D'où nous pouvons encore affirmer que si nous pouvons construire un réseau de Steiner pou $k-1$ points, alors nous pouvons le faire pour k points.

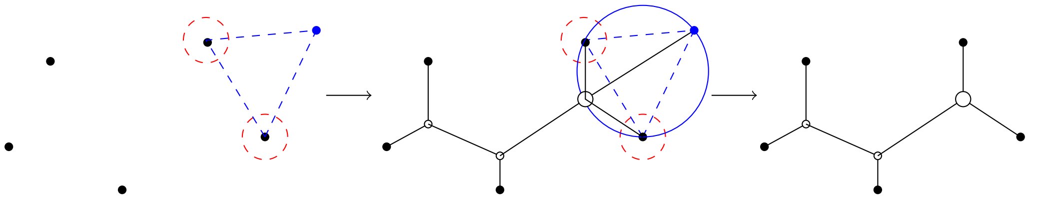
Conclusion On a donc k points sur le plan et on veut construit pour eux le plus court système de routes, c'est à dire le réseau de Steiner. Disons qu'on peut le construire pour $k-1$ points. Alors on agit de deux façons :

1. Choisissons un sommet arbitraire et supprimons-le. Pour les points restants, nous construisons un réseau de Steiner et puis renvoyons ce sommet et le relions à n'importe quel sommet originel d'une manière à former un angle qui est supérieur ou égal à 120°. Si ce n'est pas possible, nous utilisons la deuxième méthode.

2. Supprimons une paire arbitraire de sommets. Au lieu d'eux, nous allons créer un seul sommet artificiel. Ce sera le sommet d'un triangle équilatéral, qui est construit sur un segment reliant des points isolés par nous plus tôt. En outre, il sera nécessaire de considérer deux sous-cas, car un triangle peut être construit à la fois intérieurement et extérieurement. En conséquence, nous avons obtenu $k-1$ points pour lesquels nous devons construire un réseau de Steiner. Il est nécessaire qu'un sommet artificiel soit impasse sinon cela ne fonctionnera pas.

   Ensuite, nous décrivons le cercle autour d'un triangle équilatéral et prenons le point d'intersection du cercle avec l'arete qui relie le sommet artificiel avec un autre sommet. A ce point d'intersection, nous plaçons un sommet supplémentaire, puis nous le connectons aux sommets que nous avons supprimés au tout début, et nous supprimons le sommet artificiellement créé avec toutes les constructions auxiliaires.

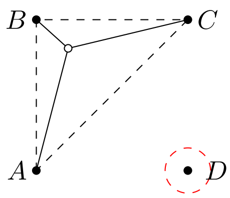
   En conséquence, nous obtenons un réseau Steiner. Si le bord ne se croise pas avec le cercle, vous devez supprimer l'autre paire de sommets.



4.3 L'arbre minimal de Steiner pour les sommets d'un carré

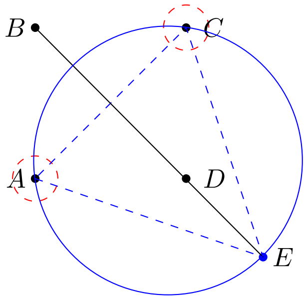
Maintenant, connaissant la caractéristique de base du réseau de Steiner et les méthodes pour le construire, nous pouvons le construire pour quatre points situés sur les sommets du carré. Soit $ABCD$ est un carré.

1-re méthode Supprimons le sommet D et construissons l'arbre de Steiner minimal pour le triangle ΔABC, nous l'avons déjà fait dans la section 3.1. Puisque l'angle $\widehat{ABC} = 90°$ et $AB = BC$, alors tous les angles du triangle sont inférieurs à 120°. Le réseau Steiner consistera donc en un sommet supplémentaire P et trois arêtes AP, BP, CP. Connectons maintenant le sommet D avec l'un des sommets spécifiés initialement, mais d'une manière à former un angle qui est supérieur ou égal à 120°. C'est impossible, donc utilisons deuxième méthode.



2-me méthode Nous supprimons un couple de sommets. En vertu de la symétrie, il suffit de considerer deux cas :

1. Supprimons A et C. Construisons un triangle équilatéral ΔACE. Les trois points B, D et E se trouvent sur la meme droite, donc le réseau de Steiner est constitué de deux segments ED et DB. ED n'intersecte pas le cercle circonscrit du triangle ΔACE et donc cette cas ne donne pas un réseau de Steiner.



2. Supprimons C et D. Construisons un triangle equilatéral ΔCDE. On doit d'abord construire un réseau Steiner pour les points A, E et B. Ils se trouvent sur les sommets du triangle, dont tous les angles sont inférieurs à 120°. Donc le réseau Steiner est constitué d'un sommet P supplémentaire et de trois arêtes AP, BP, EP. L'arete intersect le cercle circonscrit du triangle ΔDCE au point M, ce sera donc notre deuxième sommet supplémentaire lequel on doit connecter les sommets isolés par nous plus tôt. En conséquence, nous obtenons un réseau Steiner.