

# Le calcul des variations et ses applications

Mesnikovych Olena

23 mai 2018

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Partie théorique</b>	<b>4</b>
2.1	L'équation d'Euler-Lagrange . . . . .	6
2.2	Théorème de Pompeiu . . . . .	6
2.3	Les méthodes de la plus grande pente et de Wolfe . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Brachistochrone</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Pellicules de savon</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Problème de Steiner</b>	<b>10</b>
5.1	Le problème des trois villes . . . . .	10
5.2	Problème de l'arbre minimal de Steiner pour $k$ points . . . . .	14
5.2.1	Caractéristiques du réseau de Steiner . . . . .	14
5.2.2	La construction de réseau . . . . .	15
5.3	L'arbre minimal de Steiner pour les sommets d'un carré . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Partie numérique</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Applications</b>	<b>19</b>
	Références	19

# 1 Introduction

Le calcul des variations est l'un des sujets classiques en mathématiques. Plusieurs mathématiciens exceptionnels ont contribué, pendant plusieurs siècles, à son développement. C'est toujours un sujet très vivant et en évolution. Outre son importance mathématique et ses liens avec d'autres branches des mathématiques, telles comme la géométrie ou les équations différentielles, il est largement utilisé en physique, ingénierie, économie et biologie.

Le calcul des variations est l'une des branches classiques des mathématiques. C'était Euler qui, en regardant le travail de Lagrange, a donné le nom actuel, pas vraiment explicite, à ce domaine des mathématiques.

En fait, le sujet est beaucoup plus ancien. Cela commence par l'un des problèmes les plus anciens mathématiques : l'inégalité isopérimétrique. Une variante de cette inégalité est connue comme le problème de Didon (Didon était une princesse phénicienne semi historique et plus tard une reine carthaginoise). Lorsque, fuyant Tyr, elle s'était réfugiée en Afrique du Nord, elle avait demandé une terre. Les habitants du lieu lui avaient alors donné la peau d'un bœuf, lui promettant comme domaine ce qu'elle pourrait encercler avec cette peau. Elle avait réussi à tourner cette dérision à son avantage : en découpant la peau de bœuf en lanières extrêmement fines, elle avait fabriqué une très longue corde (environ 4 km) qui lui permit de délimiter un territoire assez vaste pour y fonder la ville de Carthage, la forme de ce territoire étant un demi-cercle ayant le rivage pour diamètre (solution dans un demi-plan). L'idée de former un cercle plutôt qu'un triangle, un rectangle, un carré ou tout autre forme géométrique fermée et sans point double, place Didon au pinacle des mathématiques : elle avait donc admis sans hésiter le résultat isopérimétrique ci-après que Jacques Bernoulli prouva dans le cadre du calcul des variations.

D'autres problèmes importants du calcul des variations ont été pris en compte le dix-septième siècle en Europe, comme le travail de Fermat sur géométrie optique (1662), le problème de Newton (1685) pour l'étude des corps en mouvement dans les fluides (voir aussi Huygens en 1691 sur le même problème) ou le problème de la brachistochrone formulée par Galilée en 1638. Ce dernier problème avait une très forte influence sur le développement du calcul des variations. Au XVII<sup>e</sup> siècle, Jean Bernoulli lance un concours qui occupera les plus grands esprits de l'époque. Il fait insérer le problème suivant dans *Acta Editorum* de Leipzig : "*Deux points A et B étant donnés dans un plan vertical, déterminer la courbe AMB le long de laquelle un mobile M, abandonné en A, descend sous l'action de sa propre pesanteur et parvient à l'autre point B dans le moins de temps possible.*" Le problème prend le nom de brachistochrone, qui veut dire, traduit textuellement, "*temps le plus court*".

Il est montré que la ligne de la rampe la plus rapide ne sera pas une ligne droite reliant les points A et B, bien qu'elle soit la plus courte distance entre eux. Il s'est avéré que la ligne de la rampe la plus rapide est une cycloïde dont l'équation a la forme

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}.$$



FIGURE 1 – Une cycloïde

Ce problème était résolu par John Bernoulli et presque immédiatement après aussi par James, son frère, Leibniz et Newton. Un pas décisif a été accompli avec le travail de Euler et Lagrange qui ont trouvé une manière systématique de traiter les problèmes dans ce en introduisant ce qu'on appelle maintenant l'équation d'Euler-Lagrange.

La généralisation de la brachistochrone pourrait, en théorie, complètement révolutionner le domaine des transports. Supposons que nous puissions percer l'intérieur de la Terre pour construire un tunnel allant d'une ville  $A$  à une ville  $B$  à la surface de la Terre. Si on n'égale le frottement, un train d'embarquement à vitesse nulle de  $A$  serait attiré vers le centre de la Terre par la gravité, accélérerait tant que le tunnel s'approcherait du centre de la Terre, puis d'accélérerait quand le tunnel s'en éloignerait et, par conversion de l'énergie, ressortirait de ce tunnel en atteignant  $B$  à vitesse nulle ! Pas besoin de combustible, pas besoin de frein !

Ce projet révolutionnaire bute sur quelques difficultés. Si les villes sont assez éloignées, le « meilleur tunnel » s'enfonce assez profondément dans la Terre, et il faudra creuser dans le magma. Donc pour l'instant, malheureusement, on ne peut pas traduire cela en réalité.

Ensuite, nous accorderons plus d'attention au problème, qui dans le monde actuel a déjà trouvé son application dans certains domaines. C'est le problème de Steiner, que nous résolvons pour des cas partiels, à savoir le problème des trois villes et le problème de Steiner pour quatre points qui se trouvent sur les sommets du carré. De plus, dans la section "Partie numérique", nous décrivons l'algorithme pour résoudre le problème de trois villes utilisant Matlab. Nous considérons également les propriétés surprenantes des bulles de savon, avec lesquelles on peut résoudre des ensembles de problèmes de calcul variationnel, y compris le problème de Steiner.

## 2 Partie théorique

Dans cette section, nous allons mentionner les principales définitions et les théorèmes du calcul des variations qui aideront à résoudre les problèmes mentionnés ci-dessus ainsi que les problèmes avec lesquels nous travaillerons dans le futur. Il y aura également plusieurs propositions de géométrie nécessaires pour résoudre le problème Steiner pour 3 points ou plus.

D'abord nous devons décrire le chemin entre deux points selon la trajectoire. Soit il y a deux points  $A = (x_1, y_1)$  et  $B = (x_2, y_2)$ . Supposons que  $x_1 \neq x_2$  et qu'il est possible d'écrire la seconde coordonnée comme fonction de la première. Alors, le chemin est donné par  $(x, y(x))$  pour  $x \in [x_1, x_2]$ ,  $y(x_1) = y_1$  et  $y(x_2) = y_2$ . La quantité  $I$  est ici la longueur du chemin entre  $A$  et  $B$  selon la trajectoire. Cette quantité  $I(y)$  dépend évidemment de la trajectoire choisie et donc, de la fonction  $y(x)$ . Cette "fonction d'une fonction" est appelée une *fonctionnelle* par les mathématiciens.

À chaque incrément  $\Delta x$  le long d'une trajectoire correspond un court segment de la trajectoire dont la longueur, notée  $\Delta s$ , dépend de  $x$ . La longueur totale du chemin est donc

$$I(y) = \sum \Delta s(x).$$

À l'aide du théorème de Pythagore, cette longueur  $\Delta s$  peut être approximée, pour  $\Delta x$  suffisamment petit, par  $\Delta s(x) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$  comme l'indique la figure 2. Ainsi,

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x.$$

Si  $\Delta x$  tend vers zéro, le rapport  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  devient la dérivée  $\frac{dy}{dx}$ , et l'intégrale  $I$ ,

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (1)$$

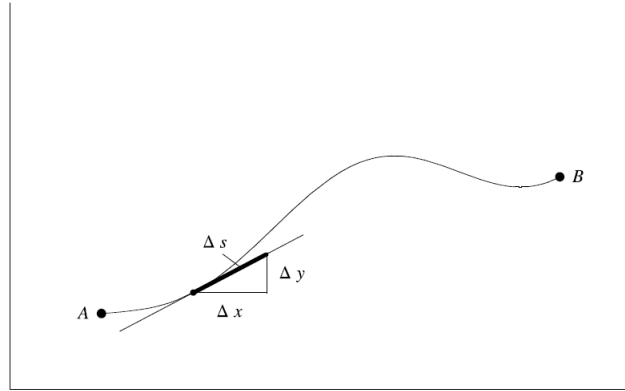


FIGURE 2 – Une trajectoire entre les deux points A et B

**Lemma 1.** Soit un système d'axes tel que l'axe des  $y$  pointe vers le bas comme sur la figure 3, et une courbe  $y(x)$  telle que  $A = (x_1, y(x_1))$  et  $B = (x_2, y(x_2))$ . Le temps de parcours d'un point matériel parcourant la courbe de A à B sous la seule action de son poids est donné par

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx. \quad (2)$$

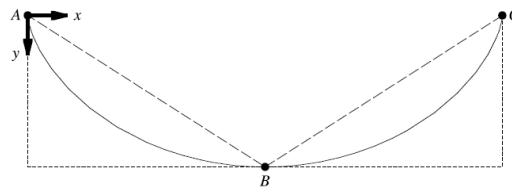


FIGURE 3 –

Considérons maintenant le **problème fondamental du calcul des variations** et considérons la théorie fondamentale qui permet de résoudre ce problème. Etant donné une fonction  $f = f(x, y, y')$ , trouvez les fonctions  $y(x)$  qui mènent à des extrema de l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Comment faire pour savoir quelles fonctions  $y(x)$  minimisent ou maximisent l'intégrale  $I$ ? C'est à cette question que répond l'équation d'Euler-Lagrange.

## 2.1 L'équation d'Euler-Lagrange

**Théorème 1.** Une condition nécessaire pour que l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (3)$$

atteigne un extremum sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases} \quad (4)$$

est que la fonction  $y = y(x)$  satisfasse à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (5)$$

Dans certains cas, nous pourrions utiliser des formes simplifiées de l'équation d'Euler-Lagrange, qui nous permettront de trouver la solution plus rapidement et plus facilement. Un de ces «raccourcis» se nomme l'identité de Beltrami.

**Théorème 2.** Dans les cas où la fonction  $f(x, y, y')$  à l'intérieur de l'intégrale (3) est explicitement indépendante de  $x$ , une condition nécessaire pour que l'intégrale ait un extremum est donnée par l'identité de Beltrami, qui est une forme particulière de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C. \quad (6)$$

où  $C$  est une constante.

Les équations d'Euler-Lagrange et Beltrami sont des *équations différentielles* pour la fonction  $y(x)$ , c'est-à-dire que ce sont des équations reliant la fonction  $y$  à ses dérivées. Résoudre des équations différentielles est une des facettes les plus importantes du calcul différentiel, qui a de multiples applications en sciences et en génie.

Comme le processus d'optimisation d'une fonction ne dépendant que d'une variable réelle, l'équation d'Euler-Lagrange donne parfois plusieurs solutions, et il faut des tests supplémentaires pour savoir si celles-ci sont des minima, des maxima ou des points d'une autre nature. De plus, ces extrema pourraient être locaux plutôt que globaux. Qu'est-ce qu'un point critique ? Dans les fonctions d'une variable réelle, c'est un point où la dérivée s'annule. Un tel point peut être un extremum ou encore, un point d'inflexion. Et dans les fonctions de plusieurs variables réelles, des points de selle peuvent apparaître. Dans le cadre du calcul des variations mettant en jeu une fonctionnelle (3), on dit qu'une fonction  $y(x)$  est un point critique de la fonctionnelle si elle est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée.

## 2.2 Théorème de Pompeiu

**Théorème 3.** Si  $P$  est un point dans le plan d'un triangle équilatéral  $\triangle ABC$ , alors les longueurs des segments de ligne  $AP, BP$  et  $CP$  correspondent aux côtés d'un triangle, qui est dégénéré lorsque  $P$  se trouve sur le cercle circonscrit de  $\triangle ABC$ , c'est à dire  $BP = AP + CP$ .

*Démonstration.* Considérons un triangle équilatéral  $\triangle ABC$ . Soit  $P$  un point arbitraire sur le plan. Connectons le avec tous les sommets du triangle  $\triangle ABC$ . Faisons tourner le triangle  $\triangle APB$  de  $60^\circ$  par rapport au sommet  $A$  dans le sens des aiguilles d'une montre comme sur la figure 4.

Le sommet  $B$  passe au sommet  $C$ , et le point  $P$  passe à un certain point  $P'$ . On a formé un triangle  $\Delta AP'C$ , qui est égal au triangle  $\Delta APB$ . Donc  $AP = AP' \implies \Delta APP'$  est un triangle équilatéral. On a  $PP' = PA$  et  $P'C = PB$ . Selon l'inégalité du triangle

$$PC \leq PP' + P'C = PA + PB.$$

L'égalité est atteinte lorsque un point  $P$  se trouve sur la ligne droite  $PC \implies \widehat{APB} = 120^\circ \implies P$  se trouve sur le cercle circonscrit de  $\Delta ABC$

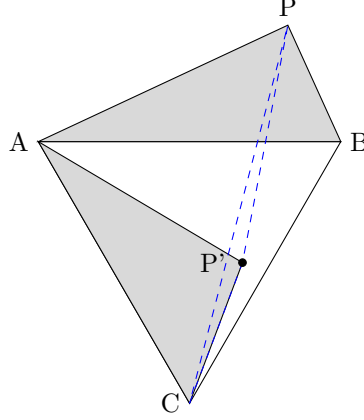


FIGURE 4 –

□

## 2.3 Les méthodes de la plus grande pente et de Wolfe

### Méthode de la plus grande pente a pas constant

**Définition 1.** Soit  $U$  un convexe de  $\mathbb{R}^d$ .  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  est **a-fortement convexe** ( $a > 0$ ), si l'une des propriétés équivalents suivantes est vérifiée :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in U \quad J(y) &\geq J(x) + \langle \nabla J(x), y - x \rangle + \frac{a}{2} \|y - x\|^2 \\ \Leftrightarrow \forall x, y \in U \quad \langle \nabla J(x) - \nabla J(y), x - y \rangle &\geq a \|y - x\|^2 \\ \Leftrightarrow \forall x \in U \quad D^2 J &\geq aI \end{aligned}$$

**Définition 2.**  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  a un **gradient L-Lipschitz** si

$$\begin{aligned} \forall x, y \in U \quad J(y) &\leq J(x) + \langle \nabla J(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|^2 \\ \Leftrightarrow \forall x, y \in U \quad \|\nabla J(x) - \nabla J(y)\| &\leq L \|y - x\| \\ \Leftrightarrow \forall x \in U \quad \|D^2 J(x)\| &\leq L \end{aligned}$$

**Théorème 4.** Soit  $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $a$ -fortement convexe ( $a > 0$ ) et a gradient  $L$ -Lipschitz. Alors la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$\begin{cases} x^0 \text{ fixé} \\ \forall \geq 0, x^{n+1} = x^n - h \nabla J(x^n) \end{cases} \quad (7)$$

converge linéairement vers l'unique solution  $\bar{x}$  de  $\inf(J)$  avec le taux  $\sqrt{1 - 2ah + h^2 L^2}$  si  $h \in ]0, \frac{2a}{L^2}[$ . Le coefficient est  $\sqrt{1 - \frac{a^2}{L^2}}$ , obtenu pour  $h = \frac{a}{L^2}$ .

#### Méthode de la plus grande pente à pas optimale

Il s'agit de définir la suite  $(x^n)_{n \geq 0}$  par la méthode itérative :

$$\begin{cases} x^0 \text{ fixé} \\ \forall \geq 0, x^{n+1} = x^n - h^n \nabla J(x^n), \end{cases} \quad (8)$$

où  $h_n$  est le pas optimal, solution du problème  $\text{Min}\{g_n(t) := J(x^n - t \nabla J(x^n)), t \geq 0\}$ .

#### Méthode de Wolfe

Dans le cas général, on ne calcule pas le pas optimal  $h_n$ , mais on choisit un pas "suffisamment" optimal par une méthode de recherche linéaire. La méthode la plus utilisée est la méthode de Wolfe.

La méthode de Wolfe pour résoudre le problème de recherche linéaire  $\text{Inf}\{g_n(t) = J(x^n - t \nabla J(x^n)), t \geq 0\}$  consiste à choisir  $h_n$  de la manière suivante :

1. On pose  $t_g = 0$  et  $t_d = +\infty$  et on choisit  $t \in ]t_g, t_d[$ .
2. On choisit deux paramètres  $0 < c_1 < c_2 < 1$ .
3. on a trois cas possibles :
  - $g_n(t) \leq g_n(0) + c_1 t g'_n(0)$  et  $g_n(t) \geq c_2 g'_n(0)$ . Alors  $h_n = t$  convient ;
  - $g_n(t) > g_n(0) + c_1 t g'_n(0)$ . Alors on pose  $t_d = t$ , après on choisit un nouveau  $t \in ]t_g, t_d[$  et on reprend 3 ;
  - $g_n(t) \leq g_n(0) + c_1 t g'_n(0)$  et  $g_n(t) < c_2 g'_n(0)$ . Alors on pose  $t_g = t$ , après on choisit un nouveau  $t \in ]t_g, t_d[$  et on reprend 3.

### 3 Brachistochrone

Fixons la théorie du calcul des variations dans la pratique et, en même temps, résolvons le problème de la brachistochrone, qui a été mentionné dans l'introduction.

**Exemple 1.** Deux points  $A$  et  $B$  étant donnés dans un plan vertical, déterminer la courbe  $AMB$  le long de laquelle un mobile  $M$ , abandonné en  $A$ , descend sous l'action de sa propre pesanteur et parvient à l'autre point  $B$  dans le moins de temps possible.

**Solution.** L'intégrale à minimiser, l'équation 4, est

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx,$$

et la fonction  $f = f(x, y, y')$  est donc

$$f(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}}.$$



Puisque  $x$  n'apparaît pas explicitement dans l'expression de  $f$ , nous pouvons appliquer l'identité de Beltrami au lieu de l'équation d'Euler-Lagrange (voir le théorème 2). On a donc

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C.$$

Un calcul direct donne

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} = C$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}} = C.$$

En isolant  $y'$ , nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k-y}{y}},$$

où  $k$  une constante égale à  $\frac{1}{C^2}$ .

La substitution trigonométrique suivante permet de résoudre l'équation :

$$\sqrt{\frac{y}{k-y}} = \tan \phi.$$

La fonction  $\phi$  est une nouvelle fonction de  $x$ . En isolant  $y$ , nous trouvons

$$y = k \sin^2(\phi).$$

La dérivée de la nouvelle fonction  $x$  peut être calculée à l'aide de la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2k(\sin\phi)(\cos\phi)} \cdot \frac{1}{(\tan\phi) = \frac{1}{2k\sin^2\phi}}.$$

Une méthode usuelle pour résoudre cette nouvelle équation est de la réécrire sous la forme

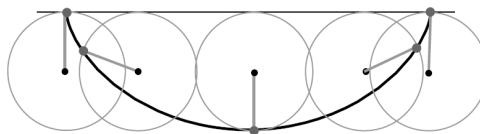
$$dx = 2k \sin^2 \phi d\phi,$$

qui indique la relation entre les deux accroissements infinitésimaux  $dx$  et  $d\phi$ . En trouvant les primitives des deux membres, nous obtenons

$$x = 2k \int \sin^2 \phi d\phi = 2k \int \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi = 2k \left( \frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4} \right) + C_1.$$

Nous avons choisi le point initial  $A$  de la trajectoire à l'origine du système de coordonnées (voir la figure 3). Ce choix permet de fixer la constante d'intégration  $C_1$ . En  $A$ , les deux coordonnées  $x$  et  $y$  sont nulles. L'équation  $y = k \sin^2 \phi$  donne, en ce point,  $\phi = 0$  (ou un multiple entier de  $\pi$ ). Et dans l'expression ci-dessus pour  $x$ ,  $\phi = 0$  donne  $x = C_1$ . Il faut donc poser  $C_1 = 0$ . Finalement, en posant  $\frac{k}{2} = a$  et  $2\phi = \theta$ , on obtient

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}.$$



Ces équations sont les équations paramétriques d'une cycloïde. Une cycloïde est une courbe engendrée par le déplacement d'un point fixé sur un cercle de rayon  $a$  qui roule sans glisser sur une droite (figure 3).

## 4 Pellicules de savon

Il est question ici des surfaces minimisant leur aire sous contrainte, problème plus connu sous le nom de problème des « bulles de savon ». Après avoir étudié les propriétés de minimisation des films de savon dans une première partie, on va rechercher la route la plus courte reliant trois villes, et on considèrera le problème connu sous le nom de problème de Steiner pour quatre points ou plus.

Quelle forme prend une pellicule élastique si elle est tendue sur un cadre ? Cette question possède une réponse évidente si le cadre a la forme d'un cercle. Tout le monde sait que la peau (la pellicule « élastique ») tendue sur le pourtour d'un tambour (le cadre) repose dans le plan de ce cadre. Nous n'avons guère besoin du calcul des variations pour répondre à cette question. Mais qu'advient-il si le cadre n'appartient pas à un plan ? La réponse est beaucoup moins évidente ! Pourtant, un enfant a tous les outils pour y répondre. Muni de cintres métalliques qu'il peut déformer à sa guise et d'eau savonneuse, il peut obtenir une réponse explicite en plongeant les cintres dans la solution. Lorsqu'il les en retirera, la pellicule savonneuse donnera une solution expérimentale à la question que nous venons de poser.

## 5 Problème de Steiner

### 5.1 Le problème des trois villes

**Exemple 2.** Supposons que nous ayons trois villes disposées sur un terrain parfaitement plat. On cherche à relier ces trois villes par la route la plus courte. Comment procéder ?

**Solution.** Il est très simple de voir la solution de ce problème visuellement, en utilisant la propriété qu'a un film de savon de minimiser son aire. Tout ce qu'on a à faire, c'est construire un modèle formé de deux plaques parallèles d'un matériau transparent, reliées par trois chevilles perpendiculaires placées aux points de coordonnées  $A$ ,  $B$  et  $C$ , et tremper cet ensemble dans une solution de savon. Quand on sort le modèle de la solution, un film relie les trois chevilles. Ce film étant une surface minimale, il nous donne exactement la forme que devrait prendre la route reliant directement les trois points.

On peut observer deux choses. La première est qu'au point d'intersection les trois droites se rencontrent avec des angles égaux (120 degrés). Ce point minimise la longueur totale de la route entre les trois points et il s'appelle **point de Fermat**.

D'autre part si on choisit une configuration de points de sorte que l'angle formé par deux côtés du triangle soit supérieur à  $120^\circ$ , alors la solution est simplement composée par les deux côtés formant cet angle.

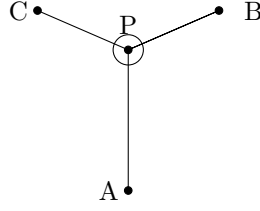
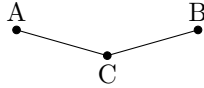


FIGURE 5 –



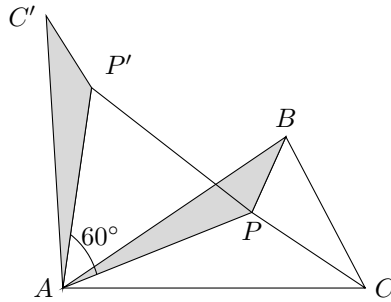
*Considerons le premier cas. Comment trouver la position du point de Fermat dans le triangle avec tous les angles inférieurs à 120 degrés et est-ce que ce point existe en général ?*

Considerons le triangle  $ABC$ . Construisons sur le coté  $BC$  un triangle équilatéral  $\triangle BA'C$  et construisons un cercle décrivant ce triangle. Si le point de Fermat existe, alors il se trouve sur ce cercle, donc  $P \in \widehat{BC}$ . Construisons un autre triangle équilatéral  $\triangle AB'C$  sur le coté  $AC$  et le cercle. Là où les arcs se croisent, il y aura un point de Fermat. En effet, nos triangles ont tous les angles qui sont égaux à 60 degrés. L'angle  $\widehat{BPC}$  est opposé au angle  $\widehat{BA'C} = 60^\circ$  d'un quadrilatère  $BA'CP$  inscrit dans le cercle et donc  $\widehat{BPC} = 120^\circ$ . De façon analogue  $\widehat{APC} + \widehat{APB} = 120^\circ$ .

Une telle construction prouve non seulement l'existence d'un point de Fermat, mais montre aussi son unité. En effet, si un tel point existe, alors il se trouve à l'intersection des arcs, mais les arcs ont, en plus des points d'intersection  $A, B$ , seulement un seul point.

*Maintenant nous montrons que le point de Fermat nous donne une solution à notre problème.*

Considerons le triangle  $ABC$ . Soit  $P$  un point à l'intérieur du triangle. On considère alors l'image de  $APB$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $60^\circ$ . On note  $AP'C'$  l'image de  $APB$  par cette rotation.

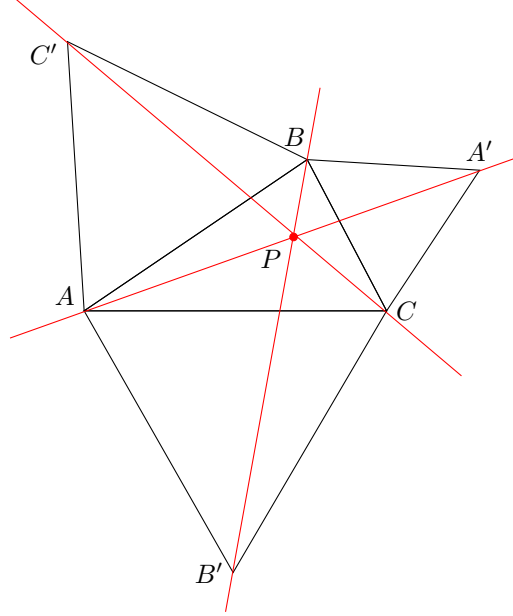


Le triangle  $PAP'$  est équilatéral. En effet, par construction il est isocèle et possède un angle de  $60^\circ$ . Donc  $PP' = AP$  et, toujours par construction,  $C'P' = BP$ . On a donc

$$AP + BP + CP = PP' + P'C' + CP$$

Donc minimiser  $AP + BP + CP$  revient à minimiser  $PP' + P'C' + CP$ . Or cette dernière quantité est minimale si  $C', P', P$  et  $C$  sont alignés. En effet  $C$  et  $C'$  (sommet du triangle équilatéral de coté  $AB$ ) sont indépendants du choix de  $P$ . On doit donc choisir  $P$  de sorte que la longueur de la

ligne brisée  $CPP'C'$  soit minimale. Or le chemin le plus court entre  $C$  et  $C'$  est la ligne droite, donc il faut que  $P$  appartienne à la droite  $CC'$ . De façon analogue on construit les points  $A', B'$ . Le point de Fermat est alors le point de concours des droites  $AA', BB'$  et  $CC'$ .



D'où on peut trouver la position du point de Fermat simplement en dessinant un triangle équilatéral sur chaque coté du triangle formé par les trois points. On joint ensuite chaque sommet du triangle  $ABC$  au sommet du triangle équilatéral qui lui est opposé. Les trois droites  $AA', BB'$  et  $CC'$  s'intersectent en un point  $P$ .

*Montrons maintenant que ces trois droites se rencontrent avec des angles égaux, c'est à dire  $\frac{2\pi}{3}$ .*

Considerons notre problème de la part du calcul variationnelle. Soit le point  $S$  a les coordonnées  $(x, y)$ . Alors nous devons chercher  $\min_{(x, y)} F(x, y)$ , où  $F(x, y) = |SA| + |SB| + |SC|$ . Puisque notre fonction  $F$  atteint son minimum au point  $(x, y)$ , les dérivées partielles de cette fonction au point  $(x, y)$  sont égales à 0. Calculons les :

$$|SA| = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}, |SB| = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}, |SC| = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(x - x_A)}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} + \frac{(x - x_B)}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}} + \frac{(x - x_C)}{\sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{(y - y_A)}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} + \frac{(y - y_B)}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}} + \frac{(y - y_C)}{\sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}} = 0. \end{cases}$$

Notons que  $\frac{(x - x_A)}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} = \cos \gamma_A$  et  $\frac{(y - y_A)}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} = \sin \gamma_A$ , où  $\gamma_A$  c'est un angle formé par le vecteur  $\vec{PA}$  avec l'axe des abscisses. De façon analogue nous notons  $\cos \gamma_B, \sin \gamma_B$  et  $\cos \gamma_C, \sin \gamma_C$ . Alors on a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \cos \gamma_A + \cos \gamma_B + \cos \gamma_C = 0 \\ \sin \gamma_A + \sin \gamma_B + \sin \gamma_C = 0 \end{cases}$$

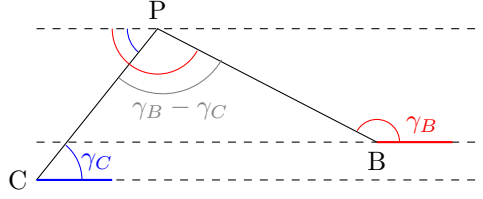
Exprimons  $A$  et  $B$  d'ici :

$$\begin{cases} \cos \gamma_A = -\cos \gamma_B - \cos \gamma_C \\ \sin \gamma_A = -\sin \gamma_B - \sin \gamma_C \end{cases}$$

La formule fondamentale de la trigonométrie dit que  $\sin^2 \gamma_A + \cos^2 \gamma_A = 1$ . Donc :

$$\begin{aligned} (-\cos \gamma_B - \cos \gamma_C)^2 + (-\sin \gamma_B - \sin \gamma_C)^2 &= \cos^2 \gamma_B + 2\cos \gamma_B \cos \gamma_C + \cos^2 \gamma_C + \\ &+ \sin^2 \gamma_B + 2\sin \gamma_B \sin \gamma_C + \sin^2 \gamma_C = 2 + 2\cos(\gamma_B - \gamma_C) = 1 \end{aligned}$$

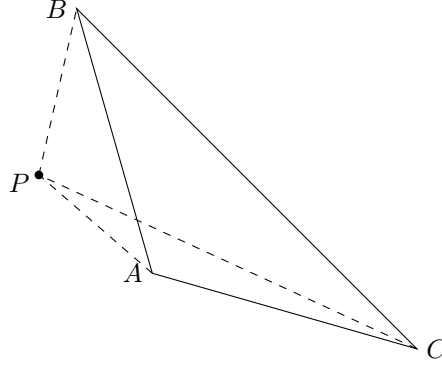
$$\text{Donc } \cos(\gamma_B - \gamma_C) = -\frac{1}{2} \implies \gamma_B - \gamma_C = \frac{2\pi}{3}.$$



D'où les trois droites  $PA, PB, PC$  se rencontrent au point de Fermat  $P$  avec des angles égaux de  $\frac{2\pi}{3}$ .

*Tournons-nous maintenant vers le second cas, où l'un des angles du triangle est supérieur ou égal à 120 degrés et montrons que la solution est simplement composée par les deux côtés formant cet angle.*

Soit  $P$  un point arbitraire du plan. Si  $P$  ne se trouve pas à l'intérieur de l'angle  $A$ , alors l'un des angles  $\widehat{PAC}$  ou  $\widehat{PAB}$  est un angle obtus. Soit c'est  $\widehat{PAC}$ , donc  $PC > AC$ . D'autre part, selon l'inégalité du triangulaire  $PA + PB > AB$ . D'où  $PA + PB + PC > AB + AC$  et le point Fermat se trouve au sommet  $A$ .

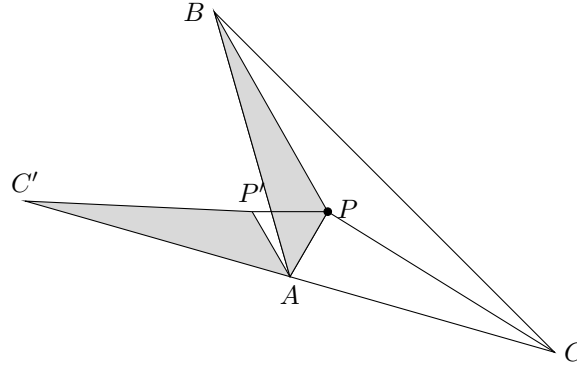


Soit  $P$  se trouve à l'intérieur de l'angle  $A$ . Faisons tourner le plan de  $60^\circ$ . Nous trouvons que le triangle  $\triangle BAD$  est à l'intérieur du quadrilatère  $BPP'C'$ . Le périmètre du triangle est inférieur à périmètre du quadrilatère

$$AB + AC' + BC' < BP + PP' + P'C' + BC'$$

. Donc

$$AB + AC = AB + AC' < BP + PP' + P'C' = BP + AP + AC \implies P \text{ coïncide avec } A$$



En conséquence, on a appris comment relier les trois villes par la route la plus courte et dans la section "Partie numérique" on va décrire l'algorithme pour résoudre ce problème en utilisant MatLab.

Ceci se généralise aussi aisément à plus de trois points. Là aussi, on pourrait trouver la route la plus courte qui les joint en construisant un modèle qu'on plongerait dans une solution de savon. Le problème généralisé est en fait un ancien problème d'optimisation appelé *problème de Steiner*.

## 5.2 Problème de l'arbre minimal de Steiner pour $k$ points

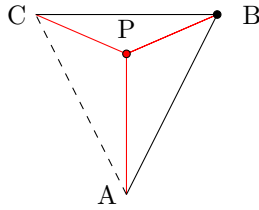
Ce problème s'énonce comme suit : étant donné  $k$  points dans un plan, trouver le réseau le plus court permettant de les relier.

Pour résoudre le problème pour quatre points qui se trouvent sur les sommets du carré, nous caractérisons d'abord le réseau de routes de la plus petite longueur pour  $k$  points et dérivons un certain algorithme. Comme il s'est avéré, la solution du problème précédent de trois villes est suffisante pour cela.

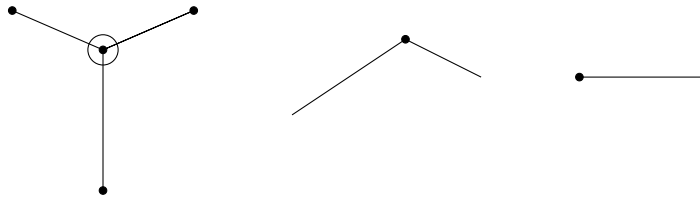
### 5.2.1 Caractéristiques du réseau de Steiner

Notre réseau est un graphe constitué d'un certain nombre de sommets et d'arêtes. Notons que :

1. Tous les arêtes de ce graphe sont des lignes droites. Si on veut obtenir le système de points le plus court, il n'y a pas aucun sens à relier deux points de la courbe, car sa longueur est supérieure à la longueur de la droite.
2. Il y a un nombre fini de sommets supplémentaires. Nous les dénotons par des cercles vides.
3. Pour deux points, il y a toujours un chemin d'un point à un autre.
4. Est-ce que le réseau peut être fermé ? Non, car on peut supprimer l'un des arêtes et notre propriété précédente sera toujours conservée, mais la longueur du réseau sera moindre.
5. L'angle entre deux arêtes qui sortent d'un sommet est toujours supérieur ou égal à  $120^\circ$ . En effet, supposons que l'angle entre les arêtes qui sortent du sommet  $B$  soit inférieur à  $120^\circ$ . Considérons ensuite le triangle  $\triangle ABC$  formé par ces arêtes. Donc il y a un point de Fermat et on peut remplacer les arêtes  $AB$  et  $AC$  par trois arêtes nouvelles  $AP$ ,  $BP$  et  $CP$ . En conséquence, la longueur totale des routes diminuera.



6. De n'importe quel sommet sortent trois arêtes maximum. Cela résulte de l'affirmation précédente.
7. On a des sommets de trois types :
  - De sommet sortent trois arêtes qui forment des angles de  $120^\circ$  ;
  - De sommet sortent deux arêtes qui forment un angle supérieur ou égal à  $120^\circ$  ;
  - De sommet sort un arête.



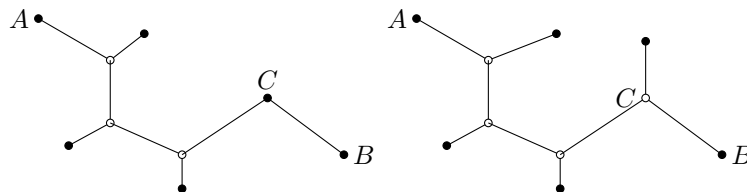
8. Les sommets supplémentaires ne peuvent être que du premier type. En effet, si de sommet supplémentaire sort seulement une arête, alors il n'y a pas de sens de son existence, car il ne fait qu'accroître la longueur totale.

Si deux arêtes sortent du sommet supplémentaire, nous le remplaçons simplement par une ligne droite et la longueur totale diminuera.

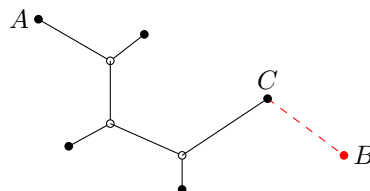
Ce sont les principales choses que on doit savoir pour construire un réseau de Steiner.

### 5.2.2 La construction de réseau

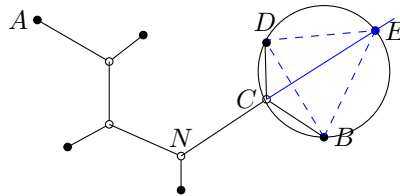
Nous avons donc  $k$  points sur un plan et nous voulons construire le plus petit réseau de routes pour eux. Supposons qu'un réseau de Steiner a déjà été construit. Nous prenons deux sommets de ce réseau, le chemin entre lesquels contient le plus grand nombre d'arêtes. Nous avons indiqué ces sommets par  $A$  et  $B$ . Nous partons du point  $B$ . Ce sommet n'est pas un sommet supplémentaire, car il est du troisième type. Considérons un sommet  $C$  qui est avant du sommet  $B$ . Il peut être supplémentaire ou originel. (figure...)



**1-re cas** Soit le sommet  $C$  est originel. Nous enlevons le sommet  $B$  avec l'arête qui en sort.



**2-me cas** Soit le point  $C$  est un sommet supplémentaires, alors il contient trois aretes, dont l'un appartient au chemin que nous avons choisi initialement ( $CN$ ) et deux aretes impasse ( $CB$  et  $CD$ ).

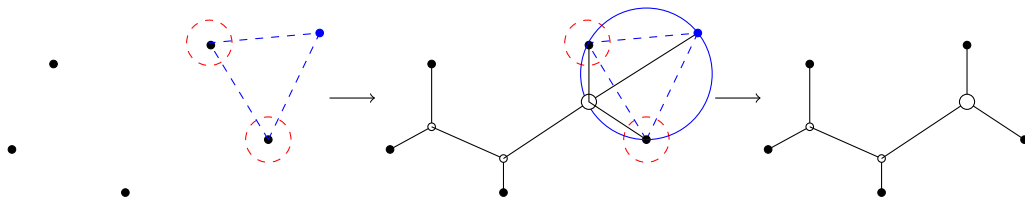


**Conclusion** On a donc  $k$  points sur le plan et on veut construire pour eux le plus court système de routes, c'est à dire le réseau de Steiner. Disons qu'on peut le construire pour  $k - 1$  points. Alors on agit de deux façons :

- Ensuite, nous décrivons le cercle autour d'un triangle équilatéral et prenons le point d'intersection du cercle avec l'arête qui relie le sommet artificiel avec un autre sommet. A ce point d'intersection, nous plaçons un sommet supplémentaire, puis nous le connectons aux sommets que nous avons supprimés au tout début, et nous supprimons le sommet artificiellement créé avec toutes les constructions auxiliaires.

16

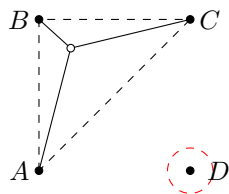




### 5.3 L'arbre minimal de Steiner pour les sommets d'un carré

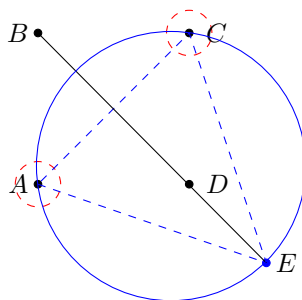
Maintenant, connaissant la caractéristique de base du réseau de Steiner et les méthodes pour le construire, nous pouvons le construire pour quatre points situés sur les sommets du carré. Soit  $ABCD$  est un carré.

**1-re méthode** Supprimons le sommet  $D$  et construisons l'arbre de Steiner minimal pour le triangle  $\triangle ABC$ , nous l'avons déjà fait dans la section 3.1. Puisque l'angle  $\widehat{ABC} = 90^\circ$  et  $AB = BC$ , alors tous les angles du triangle sont inférieurs à  $120^\circ$ . Le réseau Steiner consistera donc en un sommet supplémentaire  $P$  et trois arêtes  $AP, BP, CP$ . Connectons maintenant le sommet  $D$  avec l'un des sommets spécifiés initialement, mais d'une manière à former un angle qui est supérieur ou égal à  $120^\circ$ . C'est impossible, donc utilisons deuxième méthode.

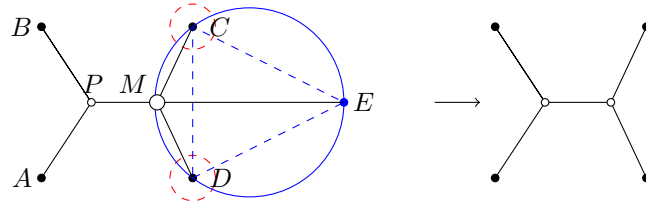


**2-me méthode** Nous supprimons un couple de sommets. En vertu de la symétrie, il suffit de considérer deux cas :

1. Supprimons  $A$  et  $C$ . Construisons un triangle équilatéral  $\triangle ACE$ . Les trois points  $B, D$  et  $E$  se trouvent sur la même droite, donc le réseau de Steiner est constitué de deux segments  $ED$  et  $DB$ .  $ED$  n'intersecte pas le cercle circonscrit du triangle  $\triangle ACE$  et donc cette cas ne donne pas un réseau de Steiner.



2. Supprimons  $C$  et  $D$ . Construisons un triangle équilatéral  $\triangle CDE$ . On doit d'abord construire un réseau Steiner pour les points  $A, E$  et  $B$ . Ils se trouvent sur les sommets du triangle, dont tous les angles sont inférieurs à  $120^\circ$ . Donc le réseau Steiner est constitué d'un sommet  $P$  supplémentaire et de trois arêtes  $AP, BP, EP$ . L'arête intersecte le cercle circonscrit du triangle  $\triangle DCE$  au point  $M$ , ce sera donc notre deuxième sommet supplémentaire lequel on doit connecter les sommets isolés par nous plus tôt. En conséquence, nous obtenons un réseau Steiner.



## 6 Partie numerique

Dans cette section, nous décrivons l'algorithme pour résoudre le problème des trois villes en utilisant Matlab, et aussi en utilisant la méthode de la plus grande pente et la méthode de Wolfe (voir la section 2.3).

On cherche à fabriquer la route la plus courte entre les trois points  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$ ,  $C = (x_C, y_C)$ . Par la section 5.1, nous savons qu'il existe un point de Fermat  $P = (x, y)$  qui relie ces points en créant le chemin le plus court. Donc notre tâche consiste à trouver une solution au problème suivant :

$$(P) \min\{d_A + d_B + d_C\},$$

où

$$d_A = \|AP\| = \sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2}$$

$$d_B = \|BP\| = \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2}$$

$$d_C = \|CP\| = \sqrt{(x_C - x)^2 + (y_C - y)^2}$$

Afin de résoudre ce problème de manière approchée, on le discrétise par la méthode des éléments finis. Pour  $N \geq 1$  fixé, on considère l'ensemble  $\mathcal{A}_N$  des fonctions  $f$  affines par morceaux telles que

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, f \text{ affine sur } \left[ \frac{n}{N+1}, \frac{n+1}{N+1} \right].$$

Toute fonction  $f \in \mathcal{A}_N$  est alors caractérisée par le vecteur  $y \in \mathbb{R}^{N+2}$  donné par

$$\forall n \in \{0, \dots, N+1\}, y_n = f\left(\frac{n}{N+1}\right).$$

qqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqq

Pour commencer, on va donc déclarer les variables du problème discrétisé sous Octave, et afficher les valeurs pour l'utilisateur. On définit donc  $N, y_A, y_B, y_C$  :

```
1 N=8;
2 printf("nombre de points de discretisation: N=%d \n", N);
3 yA=0;
4 yB=0;
5 yC=sqrt(3);
6 printf("valeurs de y A, y B et y C: y A=%f, y B=%f, y C=%f \n\n", yA,yB,yC);
```

```
nombre de points de discretisation: N=8
valeurs de y_A, y_B et y_C: y_A=0.000000, y_B=0.000000, y_C=1.732051
```

```
>> |
```

On aura aussi besoin d'un vecteur initial pour la méthode de la plus grande pente, on prend l'interpolation affine entre les valeurs

## 7 Applications

Le calcul des variations trouve des applications dans des domaines aussi variés que l'aéronautique (maximiser la portée d'une aile d'avion), la conception d'équipements sportifs performants (minimiser la friction de l'air sur un casque de cycliste, optimiser la forme d'un ski), la résistance des structures (maximiser la résistance d'une colonne, d'un barrage hydroélectrique, d'une voûte), l'optimisation des formes (profiler la coque d'un navire), la physique (calculer les trajectoires des corps en mécanique classique et les géodésiques en relative générale), etc [1].

Parlons de l'application du problème de Steiner. Si le problème de l'arbre de Steiner minimum a repris vie de nos jours, c'est qu'il se retrouve dans divers domaines d'application, où il joue un rôle important. La résolution du problème de Steiner permet de réaliser des économies considérables dans des cas concrets : réseau routier, ferroviaire, électrique, d'aqueducs ou d'oléoducs. Par exemple, les oléoducs dans la Toundra russe et canadienne, où le relief n'a pas d'importance, ils sont construits sur le système de réseau Steiner afin de minimiser la longueur des tuyaux. Les problèmes de trouver le réseau le plus court sont très importants aussi dans l'application à la planification de la topologie des réseaux téléphoniques et la construction de circuits électroniques intégrés (technologies VLSI).

Il existe également des cas d'utilisation des propriétés du réseau Steiner dans les processeurs électroniques. Afin de minimiser la longueur des fils et, en conséquence, de minimiser le temps de transit des charges électriques par le processeur. Plusieurs processeurs, à leur tour, sont également connectés par un système Steiner et ainsi de suite. Le problème de Steiner trouve également son application en biologie et en chimie pour la construction de molécules de polymères.

En outre, les échos de la construction de l'arbre Steiner sont visibles dans la nature. Par exemples, les alvéoles des ruches d'abeilles sont hexagonales, les angles au sommet sont de  $120^\circ$ . Elles permettent de maximiser le volume occupable et le nombre d'alvéoles tout en minimisant la matière utilisée.

## Références

- [1] Weinstock Robert. *Calculus of Variations/with applications to physics and engineering*-Toronto, McGraw-Hill Book Company, 1952.
- [2] Petrov Yu. P. *De l'histoire du calcul des variations et de la théorie des processus optimaux*//Recherches historiques et mathématiques.-Moscou, Nauka, 1990, N° 32/33 p. 53-73.
- [3] Brazil Marcus, Zachariasen Martin. *Optimal Interconnection Trees in the Plane :Theory, Algorithms and Applications*-Springer, 2015.