

CPE723 Otimização Natural:

Lista de Exercícios #2

Data de entrega: Terça, 02 de Abril, 2019

Prof. José Gabriel Rodríguez Carneiro Gomeś, Terças e Quintas: 08:00–10:00

Vinicius Mesquita de Pinho

Questão 1

Considere um processo de Markov $X(t)$ que tem três estados possíveis: 0, 1 e 2. A evolução temporal deste processo é dada pela matriz de transição a seguir:

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

a) Considerando que a distribuição de probabilidade de $X(0)$ é dada pelo vetor $\mathbf{p}_0 = (0.3 \ 0.4 \ 0.3)^T$, calcule a distribuição de probabilidade de $X(3)$ (ou seja, do processo de Markov no instante $t = 3$).

A distribuição de probabilidade de $X(1)$ pode ser calculada a partir da cadeia de Markov da seguinte maneira:

$$\mathbf{p}_1 = M\mathbf{p}_0.$$

A distribuição de probabilidade de $X(2)$, seguindo a mesma ideia:

$$\mathbf{p}_2 = M^2\mathbf{p}_1.$$

Logo, a distribuição de probabilidade de $X(3)$, pode ser obtida por:

$$\mathbf{p}_3 = M^3\mathbf{p}_2.$$

Usando os valores dados pela questão, obtemos o seguinte vetor $\mathbf{p}_3^T = (0.3593 \ 0.3489 \ 0.3463)$.

b) Iniciando em $X(0) = 1$, e usando um gerador de números aleatórios (são necessários apenas três números aleatórios equiprováveis), calcule manualmente uma amostra do processo $X(t)$ até $t = 3$.

O código usado para a questão.

```

M = np.matrix('0.50 0.25 0.25; 0.25 0.50 0.25; 0.25 0.25 0.50')
estado_atual = 1
tempos_possiveis = np.array([1, 2, 3])
soma_coluna = 0
iterador = 0

5
    for t in tempos_possiveis:
        uniforme_sorteado = np.random.uniform(0,1)
        10    while uniforme_sorteado > soma_coluna:
            soma_coluna = soma_coluna + M[estado_atual,iterador]
            iterador += 1
        print(f'no tempo {t} => mudança de estado: de {estado_atual} para
            ... {iterador}. uniforme sorteado foi {uniforme_sorteado:.3}')
        estado_atual = iterador

```

As saídas encontradas:

No tempo 1 => Mudança de estado: de 1 para 2. Uniforme sorteado foi 0.441.

No tempo 2 => Mudança de estado: de 2 para 2. Uniforme sorteado foi 0.564.

No tempo 3 => Mudança de estado: de 2 para 3. Uniforme sorteado foi 0.773.

c) Usando um computador, execute 100 repetições do item (b). Em cada uma das 100 repetições, comece a simulação com um valor diferente de $X(0)$, assumindo que os eventos $X(0) = 0$, $X(0) = 1$ e $X(0) = 2$ são equiprováveis. Armazene as 100 cadeiras obtidas em uma matriz X , com 4 colunas ($t = 0$ até $t = 3$) e 100 linhas.

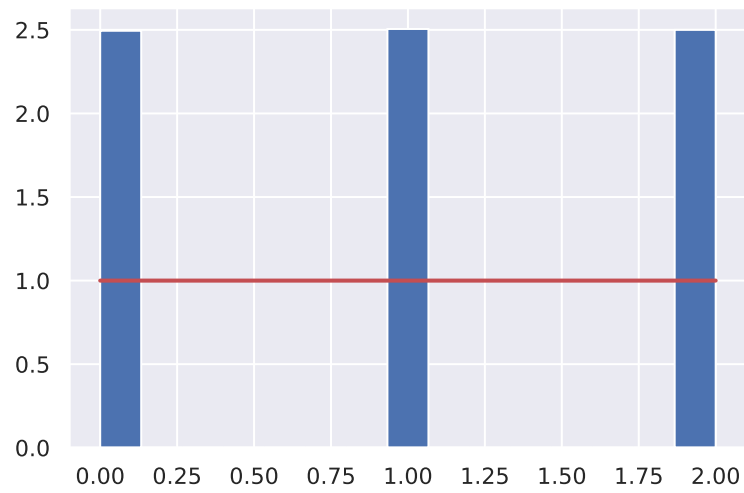
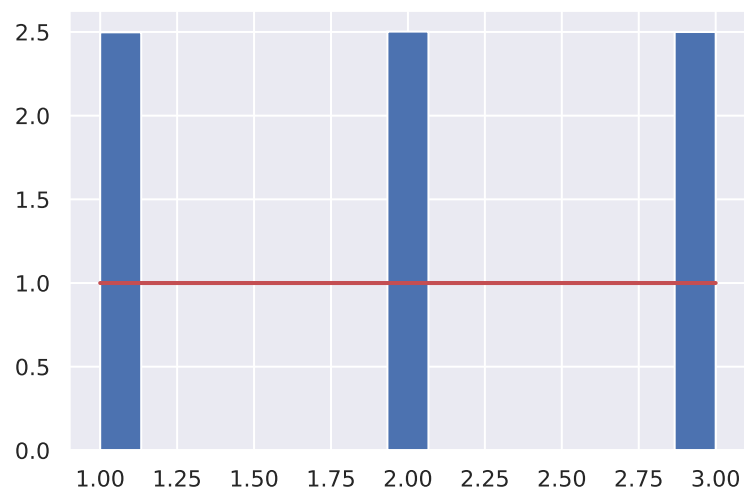
```
numero_iteracoes = 100
escolhas = np.random.choice(3, numero_iteracoes)
M = np.matrix('0.50 0.25 0.25; 0.25 0.50 0.25; 0.25 0.25 0.50')
tempos_possiveis = np.array([0, 1, 2, 3])
5 X = np.zeros((numero_iteracoes,4))

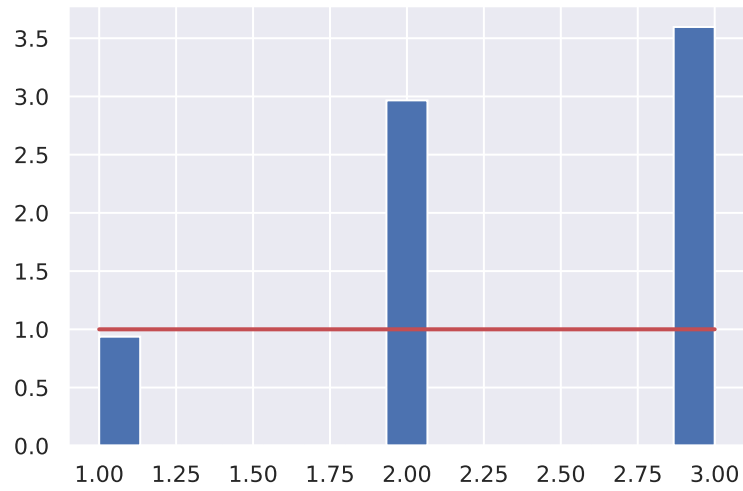
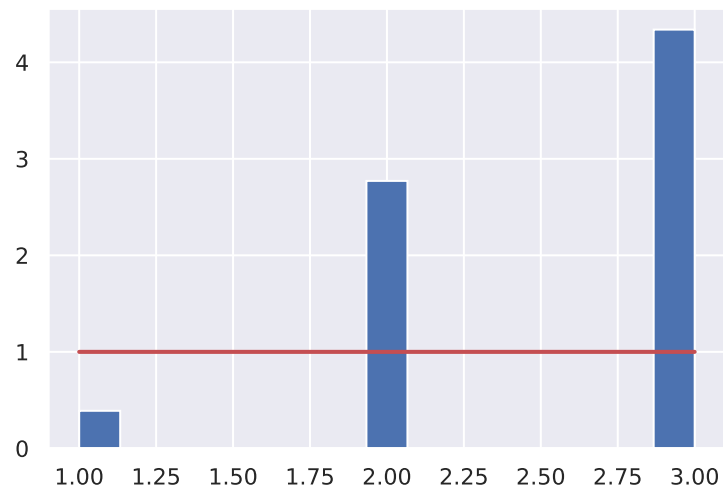
for iteracoes in range(0,numero_iteracoes):
    soma_coluna = 0
    iterador = 0
10 estado_inicial = escolhas[iteracoes]
    estado_atual = estado_inicial

    for t in tempos_possiveis:
        X[iteracoes,t] = estado_atual
        uniforme_sorteado = np.random.uniform(0,1)
15 while uniforme_sorteado > soma_coluna:
            soma_coluna = soma_coluna + M[estado_atual,iterador]
            iterador += 1
        estado_atual = iterador
```

d) Fazendo histogramas de cada uma das 4 colunas, calcule as distribuições de probabilidade do processo $X(t)$ em cada um dos 4 instantes: $t = 0, 1, 2, 3$. Comente os resultados obtidos.

Podemos ver que para 100 iterações, as probabilidades ainda não ficam concentradas em apenas um estado, mas é possível que seja essa situação em mais iterações.

Figura 1: $t = 0$ Figura 2: $t = 1$

Figura 3: $t = 2$ Figura 4: $t = 3$

Questão 2

Considere um sistema em que só há 5 estados possíveis: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$. Os custos de $J(x)$ De cada um dos estados são indicados na tabela abaixo:

x	$J(x)$
1	0.5
2	0.2
3	0.3
4	0.1
5	0.5

a) Considere um processo de Markov gerado pela aplicação do algoritmo de Metropolis aos dados da tabela acima, com temperatura fixa $T = 0.1$. Calcule a matriz de transição M que define o processo de $X(t)$. Obs: note que o estado $X(t)$ é unidimensional, e portanto a matriz M é 5×5 .

Para este exercício, o seguinte código de Python foi utilizado:

```

# estados possíveis
estados_possiveis = np.array([1, 2, 3, 4, 5])
energias_possiveis = np.array([0.5, 0.2, 0.3, 0.1, 0.4])
temperatura = 0.1

5
#A matriz de transição M, que será 5x5
M = np.zeros((5,5))
qtd_est_possi = len(estados_possiveis)

10
for ite_ou in range(0,qtd_est_possi):
    for ite_in in range(0,qtd_est_possi):
        delta_J = energias_possiveis[ite_ou] - energias_possiveis[ite_in]

        if (delta_J > 0):
            M[ite_in,ite_ou] = 1/qtd_est_possi
15
        else:
            if ite_in == ite_ou:
                M[ite_in,ite_ou] = M[ite_ou,ite_ou]
                + 1/(qtd_est_possi)*(np.exp(delta_J/temperatura))
20
                M[ite_ou,ite_ou] = M[ite_ou,ite_ou]
                + 1/(qtd_est_possi)*((1 - np.exp(delta_J/temperatura)))
            else:
                M[ite_in,ite_ou] = 1/(qtd_est_possi)*(np.exp(delta_J/temperatura))
                M[ite_ou,ite_ou] = M[ite_ou,ite_ou]
25
                + 1/(qtd_est_possi)*((1 - np.exp(delta_J/temperatura)))

```

A matriz M calculada:

$$M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.00995741 & 0.02706706 & 0.00366313 & 0.07357589 \\ 0.2 & 0.68939964 & 0.2 & 0.07357589 & 0.2 \\ 0.2 & 0.07357589 & 0.49935706 & 0.02706706 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.88573651 & 0.2 \\ 0.2 & 0.02706706 & 0.07357589 & 0.00995741 & 0.32642411 \end{bmatrix}$$

b) Iniciando em $X(0) = 1$, calcule manualmente 4 amostras do processo $X(t)$.

```

estado_atual = 1
tempos_possiveis = np.array([1, 2, 3, 4])
soma_coluna = 0

5  iterador = 0

for t in tempos_possiveis:
    uniforme_sorteado = np.random.uniform(0,1)
    while uniforme_sorteado > soma_coluna:
10     soma_coluna = soma_coluna + M[estado_atual,iterador]
        iterador += 1
    print(f'No tempo {t} => Mudança de estado: de {estado_atual}
        para {iterador}. Uniforme sorteado foi {uniforme_sorteado:.3}.')
    estado_atual = iterador

```

No tempo 1 => Mudança de estado: de 1 para 2. Uniforme sorteado foi 0.431.

No tempo 2 => Mudança de estado: de 2 para 2. Uniforme sorteado foi 0.227.

No tempo 3 => Mudança de estado: de 2 para 2. Uniforme sorteado foi 0.148.

No tempo 4 => Mudança de estado: de 2 para 2. Uniforme sorteado foi 0.145.

c) Qual é o vetor invariante da matriz M do item (a)? Obs: para facilitar os cálculos, pode-se usar o computador neste item.

```

autovalores, autovetores = np.linalg.eig(M)
vetor_pi = autovetores[:,0]/np.sum(autovetores[:,0])
vetor_pi

```

O vetor encontrado foi $\pi = (0.011 \ 0.23 \ 0.08 \ 0.63 \ 0.03)^T$

d) Calcule os fatores de Boltzmann (ou seja, $e^{-(J(x)/T)}$) associados aos dados da tabela acima, e compare-os com o resultado do item (c). Use $T = 0.1$.

```

fatores_boltzmann = np.exp(-energias_possiveis/temperatura)
outro_vetor_pi = fatores_boltzmann/np.sum(fatores_boltzmann)
outro_vetor_pi

```

O vetor encontrado foi $\pi = (0.011 \ 0.23 \ 0.08 \ 0.63 \ 0.03)^T$

e) Simulated Annealing: Usando um computador, execute 1000 iterações do algoritmo de Metropolis em cada uma das 10 temperaturas a seguir. Na passagem de uma temperatura para a outra, use o estado atual. Comente as distribuições de probabilidade obtidas no final de cada temperatura.

```

5  temperaturas = np.array([0.1, 0.0631, 0.05, 0.0431, ...
    0.0387, 0.0356, 0.0333, 0.0315, 0.0301, 0.0289])
    qtd_temp = len(temperaturas)
    total_iteracoes = 1000
    estados_possiveis = np.array([0, 1, 2, 3, 4])
    qtd_est_possi = len(estados_possiveis)

```

```

    energias_possiveis = np.array([0.5, 0.2, 0.3, 0.1, 0.4])

    histogram_matrix = np.zeros((qtd_est_possi,qtd_temp))
10 estado_inicial = np.random.choice(qtd_est_possi)
    estado_atual = estado_inicial
    J_inicial = energias_possiveis[estado_inicial]
    J_atual = J_inicial

15 todos_J = np.zeros((total_iteracoes,qtd_temp))
    todos_estados = np.zeros((total_iteracoes,qtd_temp))

    for ite_out in range(0,qtd_temp):
        for ite_in in range(0,total_iteracoes):
20             estado_possivel = np.random.choice(qtd_est_possi)
            J = energias_possiveis[estado_possivel]
            r = np.random.uniform(0,1)
            if (r < np.exp((J_atual-J)/temperaturas[ite_out])):
                estado_atual = estado_possivel
25                 J_atual = J
                todos_estados[ite_in,ite_out] = estado_atual
                todos_J[ite_in,ite_out] = J_atual
            histogram_matrix[:,ite_out], binq, outroq =
plt.hist(todos_estados[:,ite_out], qtd_est_possi, density=True)
30 histogram_matrix[:,ite_out] = histogram_matrix[:,ite_out] /
    np.sum(histogram_matrix[:,ite_out] )

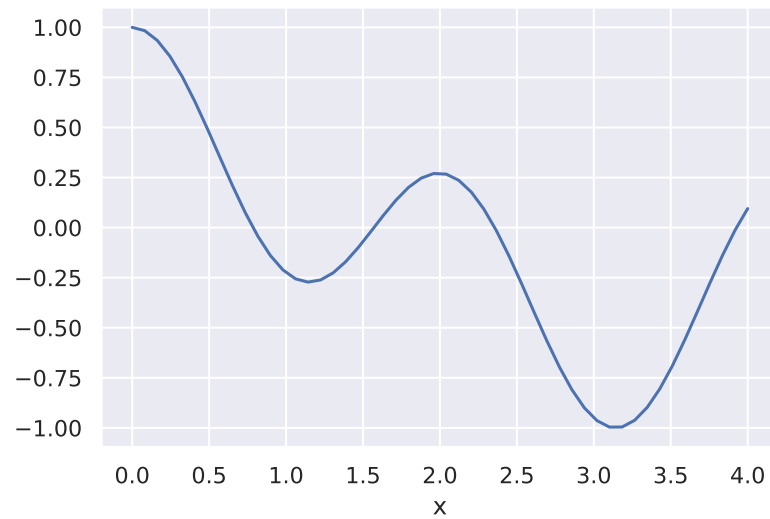
```

$$M = \begin{bmatrix} 0.009 & 0.159 & 0.111 & 0.051 & 0.046 & 0.039 & 0.057 & 0.012 & 0.057 & 0.022 \\ 0.216 & 0.028 & 0.008 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.064 & 0. & 0. & 0. & 0.001 & 0. & 0.004 & 0.001 & 0. & 0.002 \\ 0.693 & 0.81 & 0.88 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.018 & 0.003 & 0.001 & 0.949 & 0.953 & 0.961 & 0.939 & 0.987 & 0.943 & 0.976 \end{bmatrix}$$

É possível ver que temos uma concentração da probabilidade em um estado no final.

Questão 3

Proponha uma função $J(\mathbf{x})$, sendo \mathbf{x} um vetor com 10 dimensões, cujo ponto mínimo você conheça. Evite propor funções que tenham um só ponto mínimo. Encontre o ponto mínimo global utilizando S.A. Obs: Neste exercício, entregue o código utilizando e alguns comentários sobre o resultado obtido.



```
J_inicial = chosen_function(pt_inicial)
pt_atual = pt_inicial
J_atual = J_inicial

5  # Parametros utilizados
N = 100
K = 8
T_inicial = 5e-1
T = T_inicial
10 epsilon = 10e-2

fim = 0
n = 0
k = 1
15 J_min = J_atual
pt_min = pt_atual

while not (fim):
    n = n + 1
    pt = pt_atual + epsilon*(np.random.normal(0, 1))
    J = chosen_function(pt)
    todos_J = np.append(todos_J, J)
    20 if (np.random.uniform(0,1) < np.exp((J_atual-J)/T)):
        pt_atual = pt
        J_atual = J
    25 if (J < J_min):
        J_min = J
        pt_min = pt
    30 if (n % N == 0):
        k = k + 1
        T = T_inicial/(np.log(1+k))
        if k == K:
            fim = 1
```