

CPE723 Otimização Natural:

Lista de Exercícios #2

Data de entrega: Quinta, 28 de Março, 2019

Prof. José Gabriel Rodríguez Carneiro Gomes, Terças e Quintas: 08:00-10:00

Vinicius Mesquita de Pinho

Questão 1

Considere um processo de Markov $X(t)$ que tem três estados possíveis: 0, 1 e 2. A evolução temporal deste processo é dada pela matriz de transição a seguir:

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

- a) Considerando que a distribuição de probabilidade de $X(0)$ é dada pelo vetor $p_0 = \{0.3 \ 0.4 \ 0.3\}^T$, calcule a distribuição de probabilidade de $X(3)$ (ou seja, do processo de Markov no instante $t = 3$).
- b) Iniciando em $X(0) = 1$, e usando um gerador de números aleatórios (são necessários apenas três números aleatórios equiprováveis), calcule manualmente uma amostra do processo $X(t)$ até $t = 3$.
- c) Usando um computador, execute 100 repetições do item (b). Em cada uma das 100 repetições, comece a simulação com um valor diferente de $X(0)$, assumindo que os eventos $X(0) = 0$, $X(0) = 1$ e $X(0) = 2$ são equiprováveis. Armazene as 100 cadeiras obtidas em uma matriz X , com 4 colunas ($t = 0$ até $t = 3$) e 100 linhas.
- d) Fazendo histogramas de cada uma das 4 colunas, calcule as distribuições de probabilidade do processo $X(t)$ em cada um dos 4 instantes: $t = 0, 1, 2, 3$. Comente os resultados obtidos.

Questão 2

Considere um sistema em que só há 5 estados possíveis: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$. Os custos de $J(x)$ De cada um dos estados são indicados na tabela abaixo:

x	$J(x)$
1	0.5
2	0.2
3	0.3
4	0.1
5	0.5

- a) Considere um processo de Markov gerado pela aplicação do algoritmo de Metropolis aos dados da tabela acima, com temperatura fixa $T = 0.1$. Calcule a matriz de transição M que define o processo de $X(t)$. Obs: note que o estado $X(t)$ é unidimensional, e portanto a matriz M é 5×5 .
- b) Iniciando em $X(0) = 1$, calcule manualmente 4 amostras do processo $X(t)$.
- c) Qual é o vetor invariante da matriz M do item (a)? Obs: para facilitar os cálculos, pode-se usar o computador neste item.
- d) Calcule os fatores de Boltzmann (ou seja, $e^{-(J(x)/T)}$) associados aos dados da tabela acima, e compare-os com o resultado do item (c). Use $T = 0.1$.
- e) Simulated Annealing: Usando um computador, execute 1000 iterações do algoritmo de Metropolis em cada uma das 10 temperaturas a seguir. Na passagem de uma temperatura para a outra, use o estado atual. Comente as distribuições de probabilidade obtidas no final de cada temperatura.

Questão 3

Proponha uma função $J(\mathbf{x})$, sendo \mathbf{x} um vetor com 10 dimensões, cujo ponto mínimo você conheça. Evite propor funções que tenham um só ponto mínimo. Encontre o ponto mínimo global utilizando S.A. Obs: Neste exercício, entregue o código utilizando e alguns comentários sobre o resultado obtido.