CPE723 Otimização Natural:
Lista de Exercícios #2

Data de entrega: Quinta, 28 de Março, 2019

Prof. José Gabriel Rodríguez Carneiro Gomese, Terças e Quintas: 08:00-10:00

Vinicius Mesquita de Pinho

Questão 1

Considere um processo de Markov $X(t)$ que tem três estados possíveis: 0, 1 e 2. A evolução temporal deste processo é dada pela matriz de transição a seguir:

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

a) Considerando que a distribuição de probabilidade de $X(0)$ é dada pelo vetor $\mathbf{p}_0 = (0.3\ 0.4\ 0.3)^{\mathrm{T}}$, calcule a distribuição de probabilidade de $X(3)$ (ou seja, do processo de Markov no instante $t = 3$).

A distribuição de probabilidade de $X(1)$ pode ser calculada a partir da cadeia de Markov da seguinte maneira:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{M}\mathbf{p}_0.$$

A distribuição de probabilidade de $X(2)$, seguindo a mesma ideia:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{M}^2\mathbf{p}_1.$$

Logo, a distribuição de probabilidade de $X(3)$, pode ser obtida por:

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{M}^3\mathbf{p}_2.$$

Usando os valores dados pela questão, obtemos o seguinte vetor $\mathbf{p}_3^{\mathrm{T}} = (0.3593\ 0.3489\ 0.3463)$.

b)Iniciando em $X(0) = 1$, e usando um gerador de números aleatórios (são necessários apenas três números aleatórios equiprováveis), calcule manualmente uma amostra do processo X(t) até $t = 3$.

O código usado para a questão.

```
M = np.matrix('0.50 0.25 0.25; 0.25 0.50 0.25; 0.25 0.25 0.50')
estado_atual = 1
tempos_possiveis = np.array([1, 2, 3])
soma_coluna = 0
iterador = 0

for t in tempos_possiveis:
    uniforme_sorteado = np.random.uniform(0,1)
    while uniforme_sorteado > soma_coluna:
        soma_coluna = soma_coluna + M[estado_atual,iterador]
        iterador += 1
    print(f'no tempo {t} => mudança de estado: de {estado_atual} para
    ... {iterador}. uniforme sorteado foi {uniforme_sorteado:.3}')
    estado_atual = iterador
```

As saídas encontradas:
No tempo 1 => Mudança de estado: de 1 para 2. Uniforme sorteado foi 0.441.
No tempo 2 => Mudança de estado: de 2 para 2. Uniforme sorteado foi 0.564.
No tempo 3 => Mudança de estado: de 2 para 3. Uniforme sorteado foi 0.773.

Questão 1 continua na próxima página...

c) Usando um computador, execute 100 repetições do item (b). Em cada uma das 100 repetições, comece a simulação com um valor diferente de $X(0)$, assumindo que os eventos $X(0) = 0$, $X(0) = 1$ e $X(0) = 2$ são equiprováveis. Armazene as 100 cadeiras obtidas em uma matriz X, com 4 colunas ($t = 0$ até $t = 3$) e 100 linhas.

```
numero_iteracoes = 100
escolhas = np.random.choice(3, numero_iteracoes)
M = np.matrix('0.50 0.25 0.25; 0.25 0.50 0.25; 0.25 0.25 0.50')
tempos_possiveis = np.array([0, 1, 2, 3])
X = np.zeros((numero_iteracoes,4))

for iteracoes in range(0,numero_iteracoes):
     soma_coluna = 0
     iterador = 0
     estado_inicial = escolhas[iteracoes]
     estado_atual = estado_inicial

     for t in tempos_possiveis:
          X[iteracoes,t] = estado_atual
          uniforme_sorteado = np.random.uniform(0,1)
          while uniforme_sorteado > soma_coluna:
               soma_coluna = soma_coluna + M[estado_atual,iterador]
               iterador += 1
          estado_atual = iterador
```

d) Fazendo histogramas de cada uma das 4 colunas, calcule as distribuições de probabilidade do processo $X(t)$ em cada um dos 4 instantes: $t = 0, 1\,2\,3$. Comente os resultados obtidos.

Podemos ver que para 100 iterações, as probablidades ainda não ficam concentradas em apenas um estado, mas é possível que seja essa situação em mais iterações.

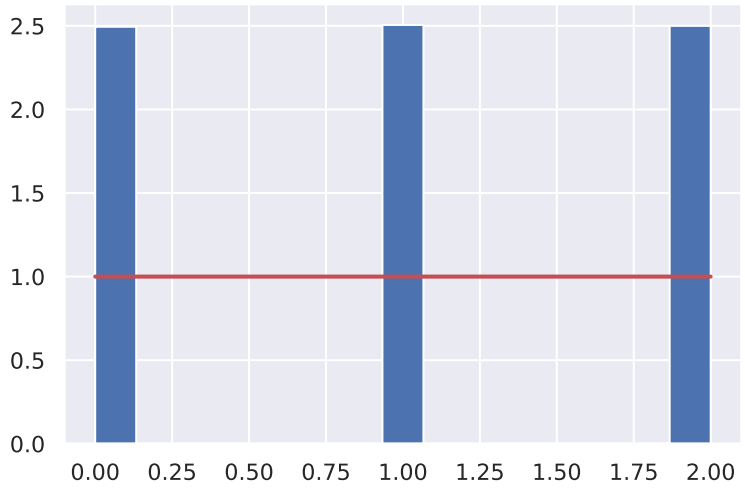


Figura 1: t = 0

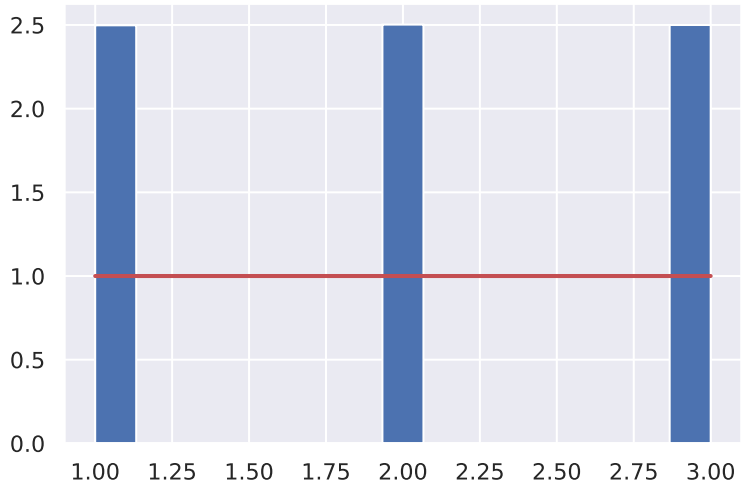


Figura 2: t = 1

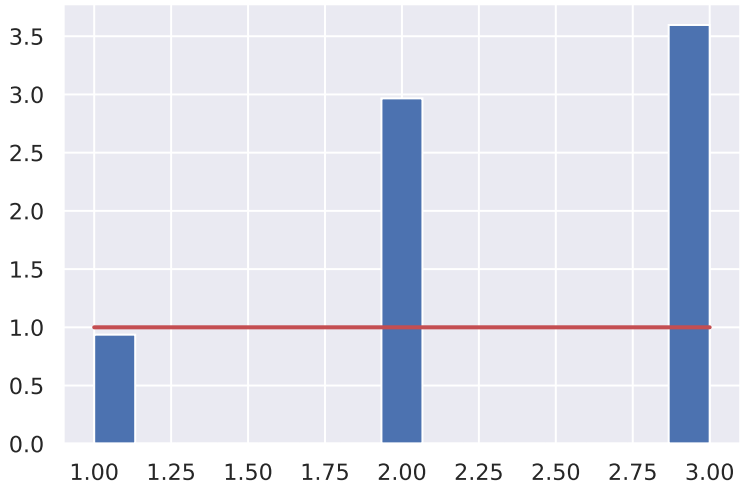


Figura 3: t = 2

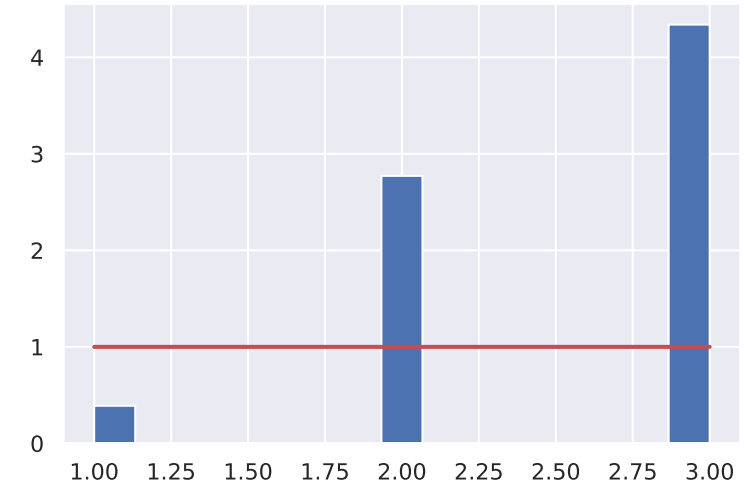


Figura 4: t = 3

Questão 2

Considere um sistema em que só há 5 estados possíveis: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$. Os custos de $J(x)$ De cada um dos estados são indicados na tabela abaixo:

x	$J(x)$
1	0.5
2	0.2
3	0.3
4	0.1
5	0.5

a) Considere um processo de Markov gerado pela aplicação do algoritmo de Metropolis aos dados da tabela acima, com temperatura fixa $T = 0.1$. Calcule a matriz de transição M que define o processo de $X(t)$. Obs: note que o estado $X(t)$ é unidimensional, e portanto a matriz M é 5×5.

Para este exercício, o seguinte código de Python foi utilizado:

```
# estados possíveis
estados_possiveis = np.array([1, 2, 3, 4, 5])
energias_possiveis = np.array([0.5, 0.2, 0.3, 0.1, 0.4])
temperatura = 0.1

#A matriz de transição M, que será 5x5
M = np.zeros((5,5))
qtd_est_possi = len(estados_possiveis)

for ite_ou in range(0,qtd_est_possi):
     for ite_in in range(0,qtd_est_possi):
          delta_J = energias_possiveis[ite_ou] - energias_possiveis[ite_in]

          if (delta_J > 0):
               M[ite_in,ite_ou] = 1/qtd_est_possi
          else:
               if ite_in == ite_ou:
                    M[ite_in,ite_ou] =  M[ite_ou,ite_ou]
                    + 1/(qtd_est_possi)*(np.exp(delta_J/temperatura))
                    M[ite_ou,ite_ou] =  M[ite_ou,ite_ou]
                    + 1/(qtd_est_possi)*((1 - np.exp(delta_J/temperatura)))
               else:
                    M[ite_in,ite_ou] = 1/(qtd_est_possi)*(np.exp(delta_J/temperatura))
                    M[ite_ou,ite_ou] =  M[ite_ou,ite_ou]
                    + 1/(qtd_est_possi)*((1 - np.exp(delta_J/temperatura)))
```

A matriz M calculada:

$$M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.00995741 & 0.02706706 & 0.00366313 & 0.07357589 \\ 0.2 & 0.68939964 & 0.2 & 0.07357589 & 0.2 \\ 0.2 & 0.07357589 & 0.49935706 & 0.02706706 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.88573651 & 0.2 \\ 0.2 & 0.02706706 & 0.07357589 & 0.00995741 & 0.32642411 \end{bmatrix}$$

Questão 2 continua na próxima página...

b) Iniciando em $X(0) = 1$, calcule manualmente 4 amostras do processo X(t).

```
estado_atual = 1
tempos_possiveis = np.array([1, 2, 3, 4])
soma_coluna = 0

iterador = 0

for t in tempos_possiveis:
    uniforme_sorteado = np.random.uniform(0,1)
    while uniforme_sorteado > soma_coluna:
        soma_coluna = soma_coluna + M[estado_atual,iterador]
        iterador += 1
    print(f'No tempo {t} => Mudança de estado: de {estado_atual}
     para {iterador}. Uniforme sorteado foi {uniforme_sorteado:.3}.')
    estado_atual = iterador
```

No tempo 1 => Mudança de estado: de 1 para 2. Uniforme sorteado foi 0.431.
No tempo 2 => Mudança de estado: de 2 para 2. Uniforme sorteado foi 0.227.
No tempo 3 => Mudança de estado: de 2 para 2. Uniforme sorteado foi 0.148.
No tempo 4 => Mudança de estado: de 2 para 2. Uniforme sorteado foi 0.145.

c) Qual é o vetor invariante da matriz M do item (a)? Obs: para facilitar os cálculos, pode-se usar o computador neste item.

```
    autovalores,autovetores = np.linalg.eig(M)
    vetor_pi = autovetores[:,0]/np.sum(autovetores[:,0])
    vetor_pi
```

O vetor encontrrado foi $\boldsymbol{\pi} = (0.011\ 0.23\ 0.08\ 0.63\ 0.03)^{\mathrm{T}}$

d) Calcule os fatores de Boltzmann (ou seja, $e^{-(J(x)/T)}$) associados aos dados da tabela acima, e compare-os com o resultado do item (c). Use $T = 0.1$.

```
    fatores_boltzmann = np.exp(-energias_possiveis/temperatura)
    outro_vetor_pi = fatores_boltzmann/np.sum(fatores_boltzmann)
    outro_vetor_pi
```

O vetor encontrrado foi $\boldsymbol{\pi} = (0.011\ 0.23\ 0.08\ 0.63\ 0.03)^{\mathrm{T}}$

e) Simulated Annealing: Usando um computador, execute 1000 iterações do algoritmo de Metropolis em cada uma das 10 temperaturas a seguir. Na passagem de uma temperatura para a outra, use o estado atual. Comente as distribuições de probabilidade obtidas no final de cada temperatura.

```
        temperaturas = np.array([0.1, 0.0631, 0.05, 0.0431, ...
        0.0387, 0.0356, 0.0333, 0.0315, 0.0301, 0.0289])
        qtd_temp = len(temperaturas)
        total_iteracoes = 1000
        estados_possiveis = np.array([0, 1, 2, 3, 4])
        qtd_est_possi = len(estados_possiveis)
```

```
        energias_possiveis = np.array([0.5, 0.2, 0.3, 0.1, 0.4])

        histogram_matrix = np.zeros((qtd_est_possi,qtd_temp))
        estado_inicial = np.random.choice(qtd_est_possi)
        estado_atual = estado_inicial
        J_inicial = energias_possiveis[estado_inicial]
        J_atual = J_inicial

        todos_J = np.zeros((total_iteracoes,qtd_temp))
        todos_estados = np.zeros((total_iteracoes,qtd_temp))

        for ite_out in range(0,qtd_temp):
            for ite_in in range(0,total_iteracoes):
                estado_possivel = np.random.choice(qtd_est_possi)
                J = energias_possiveis[estado_possivel]
                r = np.random.uniform(0,1)
                if (r <  np.exp((J_atual-J)/temperaturas[ite_out])):
                    estado_atual = estado_possivel
                    J_atual = J
                todos_estados[ite_in,ite_out] = estado_atual
                todos_J[ite_in,ite_out] = J_atual
            histogram_matrix[:,ite_out], binq, outroq =
            plt.hist(todos_estados[:,ite_out], qtd_est_possi, density=True)
            histogram_matrix[:,ite_out] = histogram_matrix[:,ite_out] /
            np.sum(histogram_matrix[:,ite_out] )
```

$$M = \begin{bmatrix} 0.009 & 0.159 & 0.111 & 0.051 & 0.046 & 0.039 & 0.057 & 0.012 & 0.057 & 0.022 \\ 0.216 & 0.028 & 0.008 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.064 & 0. & 0. & 0. & 0.001 & 0. & 0.004 & 0.001 & 0. & 0.002 \\ 0.693 & 0.81 & 0.88 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.018 & 0.003 & 0.001 & 0.949 & 0.953 & 0.961 & 0.939 & 0.987 & 0.943 & 0.976 \end{bmatrix}$$

É possível ver que temos uma concentração da probabilidade em um terminado estado no final.

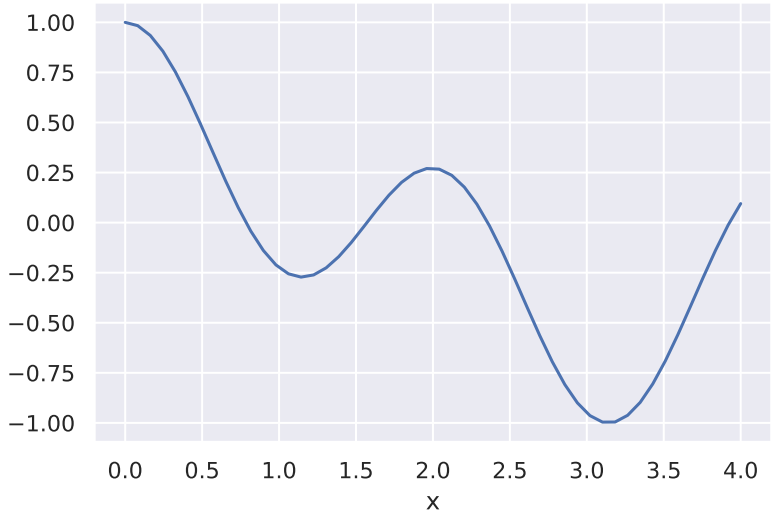
Questão 3

Proponha uma função $J(\mathbf{x})$, sendo $\mathbf{x}$ um vetor com 10 dimensões, cujo ponto mínimo você conheça. Evite propor funções que tenham um só ponto mínimo. Encontre o ponto mínimo global utilizando S.A. Obs: Neste exercício, entregue o código utilizando e alguns comentários sobre o resultado obtido.

```
    J_inicial = chosen_function(pt_inicial)
    pt_atual = pt_inicial
    J_atual = J_inicial

    # Parametros utilizados
    N = 100
    K = 8
    T_inicial = 5e-1
    T = T_inicial
    epsilon = 10e-2

    fim = 0
```




```
    n = 0
    k = 1
    J_min = J_atual
    pt_min = pt_atual

    while not(fim):
        n = n + 1
        pt = pt_atual + epsilon*(np.random.normal(0, 1))
        J = chosen_function(pt)
        todos_J = np.append(todos_J,J)
        if (np.random.uniform(0,1) < np.exp((J_atual-J)/T)):
            pt_atual = pt
            J_atual = J
        if (J < J_min):
            J_min = J
            pt_min = pt
        if (n % N == 0):
            k = k + 1
            T = T_inicial/(np.log(1+k))
            if k == K:
                fim = 1
    pt_min
```