Problema de Transportes

Pedro Coimbra Martins

Problema de Transportes

Considere-se o seguinte problema de transportes, com ***m*** origens e ***n*** destinos.

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_m$ as quantidades nas origens e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ as quantidades nos destinos, de um produto homogéneo.

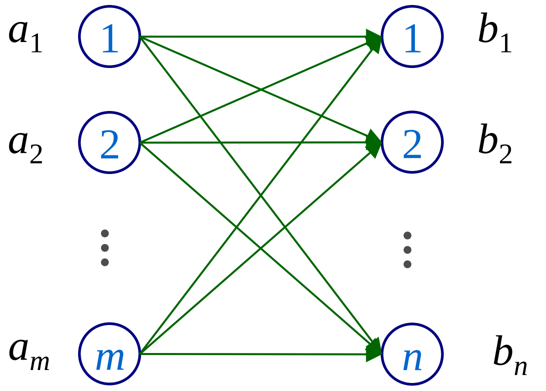
$c_{ij} \equiv$ custo unitário de transporte da origem i para o destino j ; $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$



$$\overline{\Sigma\, a_i} \quad = \quad \overline{\Sigma\, b_j}$$

(assumindo que oferta = procura)

$x_{ij} \equiv$ quantidade de mercadoria transportada da origem i para o destino j ; $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$

Problema de Transportes

Teorema: O problema de transportes tem sempre solução ótima (finita).

Propriedade: O problema de transportes tem sempre uma solução admissível.

sendo $\sum_i a_i = \sum_j b_j = Q \Rightarrow x_{ij} = \frac{a_i b_j}{Q}$ $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$

Propriedade: $0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$, para todo i e j. $\Rightarrow$ o prob. de transp. tem sempre solução ótima finita

Teorema: Qualquer solução básica admissível do problema de transportes tem $(m+n-1)$ variáveis básicas.

$\Leftarrow$ $\text{car}(A) = m + n - 1$

Problema de Transportes

Formulação dual

Primal:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, ..., m \quad \longleftarrow \; u_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, ..., n \quad \longleftarrow \; v_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Dual:

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$\text{s.a} \quad u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad \longleftarrow \; x_{ij}$$

$$i = 1, ..., m \; ; \quad j = 1, ..., n$$

u_i, v_j com sinal qualquer

Pelas condições de complementaridade:

se x_{ij} é básica $\Rightarrow$ $u_i + v_j = c_{ij}$

Problema de Transportes

A matriz A do sistema associado às restrições do problema de transportes tem $m+n$ linhas (restrições do sistema) e $m \times n$ colunas. Como car(A) = $m + n - 1$, então qualquer solução básica e admissível do problema tem ($m+n-1$) variáveis básicas, ou seja, qualquer solução básica do problema de transportes terá no máximo ($m+n-1$) variáveis não-nulas, em particular a solução ótima. Isto significa que qualquer solução ótima do problema recorrerá no máximo a ($m+n-1$) ligações com fluxo de mercadoria e que todas as restantes ligações (das $m \times n$ ligações totais) terão fluxo nulo. Assim, qualquer solução admissível com fluxo não-nulo em mais de ($m+n-1$) ligações não pode ser melhor do que a solução ótima do problema.

Algoritmo de Dantzig para o problema de transportes

Problema de Transportes

Algoritmo de Dantzig

Objetivo: determinar um par de soluções primal/dual que verifiquem as condições de complementaridade. Essas soluções serão ótimas.

1. Determinar uma solução básica admissível inicial *x*.

2. Construir um vector (*u*,*v*) que verifique as condições de complementaridade.

3. Se a solução (*u*,*v*) for admissível para o dual $\Rightarrow$ Terminar

x é solução ótima do problema de transportes

4. Escolher a variável x_{kl} a entrar na base:

$$u_k + v_l - c_{kl} = \max_{x_{ij}\text{ não básica}} \{u_i + v_j - c_{ij}\}$$

correspondente à maior violação

5. Escolher a variável que sai da base, garantindo que a nova solução é básica e admissível.

6. Construir a nova solução básica admissível, atribuindo a x_{kl} o maior valor possível.

O novo valor da função objectivo é $z = z - x_{kl}\,(u_k + v_l - c_{kl})$

7. Voltar ao passo 2.

Problema de Transportes

Determinação de uma solução básica admissível inicial:

Método do canto noroeste (NW):

Em cada iteração a variável escolhida para tornar básica é, entre as que ainda admitem valor, a que se localiza no canto superior esquerdo.

Método do mínimo da matriz de custos, ou de custo mínimo:

Em cada iteração a variável escolhida para tornar básica é, entre as que ainda admitem valor, a que apresenta menor custo (c_{ij}). Em caso de empate a escolha é arbitrária.

Método do Vogel, ou das penalidades:

Em cada iteração a variável escolhida para tornar básica é, entre as que ainda admitem valor, determinado da seguinte forma:

- calculam-se penalização para todas as linhas e todas as colunas, sendo o valor dessas penalizações igual à diferença entre os dois menores custos, entre os elementos da linha ou da coluna em questão;
- escolhe-se a linha ou a coluna com a maior penalização;
- a variável a tornar básica é a que apresenta menor custo, entre as variáveis da linha ou coluna seleccionadas.

Problema de Transportes (maximização)

Problema primal de maximização:

Primal:

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m \quad \longleftarrow u_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n \quad \longleftarrow v_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Dual:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$\text{s.a} \quad u_i + v_j \geq c_{ij} \qquad \longleftarrow x_{ij}$$

$$i = 1, \ldots, m \; ; \quad j = 1, \ldots, n$$

u_i, v_j com sinal qualquer

Pelas condições de complementaridade:

se x_{ij} é básica $\Rightarrow$ $u_i + v_j = c_{ij}$

Problema de Transportes (maximização)

Algoritmo de Dantzig

Objectivo: determinar um par de soluções primal/dual que verifiquem as condições de complementaridade. Essas soluções serão óptimas.

1. Determinar uma solução básica admissível inicial *x*.

2. Construir um vector (u,v) que verifique as condições de complementaridade.

3. Se a solução (u,v) for admissível para o dual ⇒ Terminar

x é solução óptima do problema de transportes.

4. Escolher a variável x_{kl} a entrar na base:

$$u_k + v_l - c_{kl} = \min_{x_{ij} \text{ não básica}} \{u_i + v_j - c_{ij}\}$$

correspondente à maior violação

5. Escolher a variável que sai da base, garantindo que a nova solução é básica e admissível.

6. Construir a nova solução básica admissível, atribuindo a x_{kl} o maior valor possível.

O novo valor da função objectivo é $z = z - x_{kl}\,(u_k + v_l - c_{kl})$

7. Voltar ao passo 2.

Problema de Transportes (maximização)

Determinação de uma solução básica admissível inicial:

Método do canto noroeste (NW):

Em cada iteração a variável escolhida para tornar básica é, entre as que ainda admitem valor, a que se localiza no canto superior esquerdo.

Método do máximo da matriz de custos, ou de custo máximo:

Em cada iteração a variável escolhida para tornar básica é, entre as que ainda admitem valor, a que apresenta maior custo (c_{ij}). Em caso de empate a escolha é arbitrária.

Método do Vogel, ou das penalidades:

Em cada iteração a variável escolhida para tornar básica é, entre as que ainda admitem valor, determinado da seguinte forma:

- calculam-se penalização para todas as linhas e todas as colunas, sendo o valor dessas penalizações igual à diferença entre os dois maiores custos, entre os elementos da linha ou da coluna em questão;
- escolhe-se a linha ou a coluna com a maior penalização;
- a variável a tornar básica é a que apresenta maior custo, entre as variáveis da linha ou coluna seleccionadas.

Análise de exemplo e análise de sensibilidade

Problema de Transportes

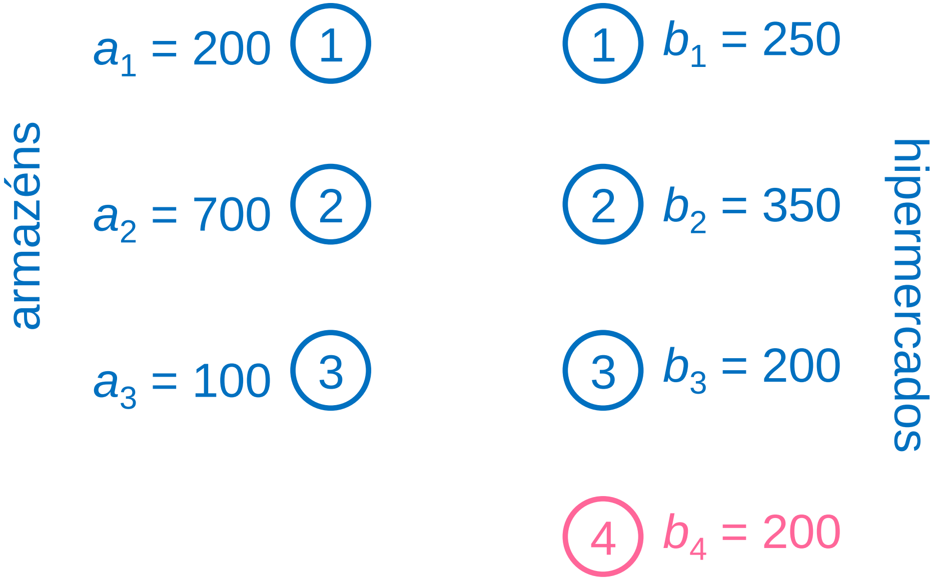
Exemplo:

Queremos transportar paletes de leite de 3 armazéns para 3 hipermercados. A matriz C descreve os custos unitários (em €) de transporte entre cada par (origem, destino). Pretende-se determinar o transporte das paletes dos armazéns para os hipermercados, respeitando as existências e as encomendas, respetivamente, minimizando o custo total de transporte. Para este efeito, e para equilibrar oferta/procura, acrescentámos um hipermercado fictício (4) ao qual associamos uma encomenda fictícia de 200 paletes. O custo unitário de transporte para este hipermercado fictício é nulo.

$m = 3\ ,\ \ n = 4$

hipermercados

	c_{ij} (€)	1	2	3	4
armazéns	1	8	3	5	0
	2	1	7	4	0
	3	3	8	2	0



Problema de Transportes

Exemplo: $m = 3\ ,\ \ n = 4$

c_{ij}	1	2	3	4
1	8	3	5	0
2	1	7	4	0
3	3	8	2	0

Primal:

$$\min\ \ z = 8x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 0x_{14} + 1x_{21} + 7x_{22} + 4x_{23} + 0x_{24} + 3x_{31} + 8x_{32} + 2x_{33} + 0x_{34}$$

$$\text{s. a}\quad \begin{array}{lcl}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & = 200 & \longleftarrow u_1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = 700 & \longleftarrow u_2 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = 100 & \longleftarrow u_3 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} & = 250 & \longleftarrow v_1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} & = 350 & \longleftarrow v_2 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} & = 200 & \longleftarrow v_3 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} & = 200 & \longleftarrow v_4
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i{=}1,2,3\ ;\ \ j{=}1,2,3,4$$

Problema de Transportes

Exemplo: $m = 3\,,\;\; n = 4$

c_{ij}	1	2	3	4
1	8	3	5	0
2	1	7	4	0
3	3	8	2	0

matriz de incidência do sistema (primal):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz totalmente unimodular: qualquer submatriz quadrada tem determinante 0, 1, ou –1

$\Downarrow$

se todos os a_i e b_j forem inteiros, então a solução ótima é inteira

$\text{car}(A) = m + n - 1 \;\;\Rightarrow\;\;$ há $(m + n - 1)$ variáveis básicas

(uma linha (qualquer) é combinação linear das restantes)

Problema de Transportes

Exemplo:

$m = 3\ ,\ \ n = 4$

c_{ij}	1	2	3	4
1	8	3	5	0
2	1	7	4	0
3	3	8	2	0

Dual:

max $\quad w = 200.u_1 + 700.u_2 + 100.u_3 + 250.v_1 + 350.v_2 + 200.v_3 + 200.v_4$

s. a

$u_1 + v_1 \leq 8 \longleftarrow x_{11}$

$u_1 + v_2 \leq 3 \longleftarrow x_{12}$

$u_1 + v_3 \leq 5 \longleftarrow x_{13}$

$u_1 + v_4 \leq 0 \longleftarrow x_{14}$

$u_2 + v_1 \leq 1 \longleftarrow x_{21}$

$u_2 + v_2 \leq 7 \longleftarrow x_{22}$

$u_2 + v_3 \leq 4 \longleftarrow x_{23}$

$u_2 + v_4 \leq 0 \longleftarrow x_{24}$

$u_3 + v_1 \leq 3 \longleftarrow x_{31}$

$u_3 + v_2 \leq 8 \longleftarrow x_{32}$

$u_3 + v_3 \leq 2 \longleftarrow x_{33}$

$u_3 + v_4 \leq 0 \longleftarrow x_{34}$

$u_i\ ,\ v_j$ com sinal qualquer , $i = 1,2,3\ ;\ j = 1,2,3,4$

Problema de Transportes

Exemplo:

$m = 3\ ,\ \ n = 4$

c_{ij}	1	2	3	4
1	8	3	5	0
2	1	7	4	0
3	3	8	2	0

Pelas condições de complementaridade:

dada uma solução primal admissível (x_{ij}) e uma solução dual admissível (u_i,v_j), se $x_{ij} \times (u_i + v_j - c_{ij}) = 0$ para todo i=1,2,3 , j=1,…,4 , então a solução é ótima

Os valores das variáveis u_i (i=1,2,3) e v_j (j=1,…,4) representam preços sombra associados às origens e aos destinos, respetivamente

(obter o relatório de sensibilidade a partir da versão da formulação com desigualdades)

Os valores de $(u_i + v_j - c_{ij})$ representam custos de oportunidade (ou reduzidos) associados a cada ligação origem/destino (variáveis x_{ij}), para todo i=1,2,3 ; j=1,…,4

Utilização das condições de complementaridade para determinar a solução ótima do dual:

se x_{ij} é básica $\rightarrow$ $u_i + v_j = c_{ij}$

Problema de Transportes

Exemplo:

$m = 3\ ,\ \ n = 4$

c_{ij}	1	2	3	4
1	8	3	5	0
2	1	7	4	0
3	3	8	2	0

Pelas condições de complementaridade:

dada uma solução primal admissível (x_{ij}) e uma solução dual admissível (u_i,v_j), se

$x_{ij} \times (u_i + v_j - c_{ij}) = 0$ para todo i=1,2,3 , j=1,…,4 , então a solução é ótima

(x_{ij}):	(u_i,v_j):		$(u_i + v_j - c_{ij})$:	cond. de complem.:		logo, é ótima!
$x_{11} = 0$	$u_1 = -4$		$(u_1+v_1-c_{11}) = -11$	$x_{11}\times(u_1+v_1-c_{11}) = 0$		$0 \times(-11) = 0$ ✓
$x_{12} = 200$	$u_2 = 0$	→	$(u_1+v_2-c_{12}) = 0$	$x_{12}\times(u_1+v_2-c_{12}) = 0$	→	$200 \times 0 = 0$ ✓
$x_{13} = 0$	$u_3 = -2$		$(u_1+v_3-c_{13}) = -5$	$x_{13}\times(u_1+v_3-c_{13}) = 0$		$0 \times (-5) = 0$ ✓
$x_{14} = 0$	$v_1 = 1$		$(u_1+v_4-c_{14}) = -4$	$x_{14}\times(u_1+v_4-c_{14}) = 0$		$0 \times (-4) = 0$ ✓
$x_{21} = 250$	$v_2 = 7$		$(u_2+v_1-c_{21}) = 0$	$x_{21}\times(u_2+v_1-c_{21}) = 0$		$250 \times 0 = 0$ ✓
$x_{22} = 150$	$v_3 = 4$		$(u_2+v_2-c_{22}) = 0$	$x_{22}\times(u_2+v_2-c_{22}) = 0$		$150 \times 0 = 0$ ✓
$x_{23} = 100$	$v_4 = 0$		$(u_2+v_3-c_{23}) = 0$	$x_{23}\times(u_2+v_3-c_{23}) = 0$		$100 \times 0 = 0$ ✓
$x_{24} = 200$			$(u_2+v_4-c_{24}) = 0$	$x_{24}\times(u_2+v_4-c_{24}) = 0$		$200 \times 0 = 0$ ✓
$x_{31} = 0$			$(u_3+v_1-c_{31}) = -4$	$x_{31}\times(u_3+v_1-c_{31}) = 0$		$0 \times (-4) = 0$ ✓
$x_{32} = 0$			$(u_3+v_2-c_{32}) = -3$	$x_{32}\times(u_3+v_2-c_{32}) = 0$		$0 \times (-3) = 0$ ✓
$x_{33} = 100$			$(u_3+v_3-c_{33}) = 0$	$x_{33}\times(u_3+v_3-c_{33}) = 0$		$100 \times 0 = 0$ ✓
$x_{34} = 0$			$(u_3+v_4-c_{34}) = -2$	$x_{34}\times(u_3+v_4-c_{34}) = 0$		$0 \times (-2) = 0$ ✓

Problema de Transportes

Exemplo: $m = 3\,,\ n = 4$

c_{ij}	1	2	3	4
1	8	3	5	0
2	1	7	4	0
3	3	8	2	0

Utilização das condições de complementaridade para determinar a solução ótima do dual:

se x_{ij} é básica → $u_i + v_j = c_{ij}$

solução básica e adm. para o primal (x_{ij}):

$x_{11} = 0$
$x_{12} = 200$
$x_{13} = 0$
$x_{14} = 0$
$x_{21} = 250$
$x_{22} = 150$
$x_{23} = 100$
$x_{24} = 200$
$x_{31} = 0$
$x_{32} = 0$
$x_{33} = 100$
$x_{34} = 0$

variáveis básicas → $u_i + v_j = c_{ij}$

$$\begin{array}{l} x_{12} = 200 \rightarrow \\ x_{21} = 250 \rightarrow \\ x_{22} = 150 \rightarrow \\ x_{23} = 100 \rightarrow \\ x_{24} = 200 \rightarrow \\ x_{33} = 100 \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_2 = 7 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_4 = 0 \\ u_3 + v_3 = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ v_2 = 3 \\ u_2 = 4 \\ v_1 = -3 \\ v_3 = 0 \\ v_4 = -4 \\ u_3 = 2 \end{array} \right.$$

Sistema possível e indeterminado com 1 grau de indeterminação (1 grau de liberdade). Se fixarmos 1 das variáveis obtemos uma solução única nas restantes.

Problema de Transportes

Exemplo: $m = 3\ ,\ \ n = 4$

c_{ij}	1	2	3	4
1	8	3	5	0
2	1	7	4	0
3	3	8	2	0

Utilização das condições de complementaridade para determinar (uma outra) solução ótima do dual:

$$\text{se } x_{ij} \text{ é básica } \rightarrow \ u_i + v_j = c_{ij}$$

solução básica e adm. para o primal (x_{ij}):

$x_{11} = 0$
$x_{12} = 200$
$x_{13} = 0$
$x_{14} = 0$
$x_{21} = 250$
$x_{22} = 150$
$x_{23} = 100$
$x_{24} = 200$
$x_{31} = 0$
$x_{32} = 0$
$x_{33} = 100$
$x_{34} = 0$

variáveis básicas → $u_i + v_j = c_{ij}$

$$\begin{array}{lcl} x_{12} = 200 & \rightarrow & \\ x_{21} = 250 & \rightarrow & \\ x_{22} = 150 & \rightarrow & \\ x_{23} = 100 & \rightarrow & \\ x_{24} = 200 & \rightarrow & \\ x_{33} = 100 & \rightarrow & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_2 = 7 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_4 = 0 \\ u_3 + v_3 = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_2 = 0 \\ v_1 = 1 \\ v_2 = 7 \\ v_3 = 4 \\ v_4 = 0 \\ u_1 = -4 \\ u_3 = -2 \end{array} \right.$$

se tivéssemos antes começado com $u_2 = 0$ (nodo origem com maior a_i), a solução viria:

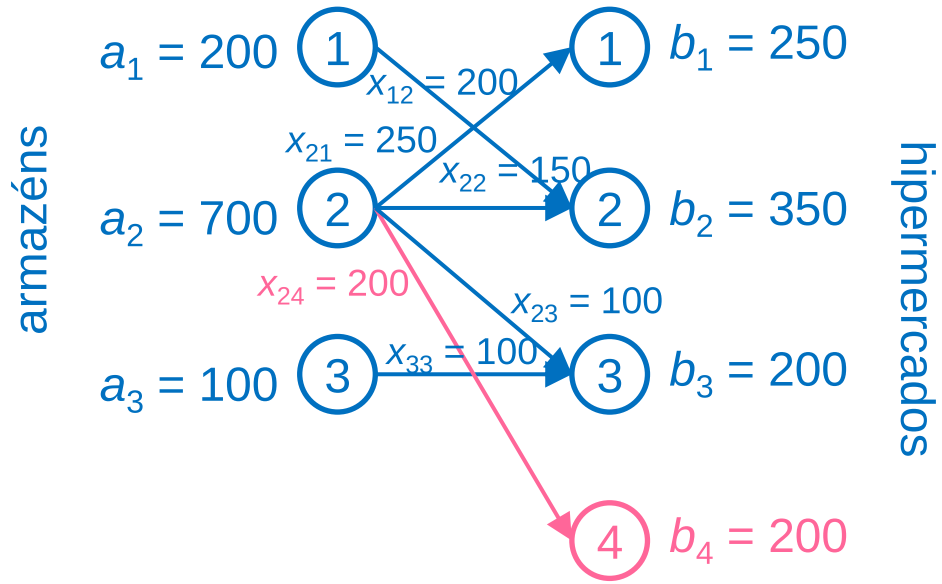
corresponde aos valores dos preços sombra que se obtêm na resolução pelo Excel/Solver

Problema de Transportes

Exemplo: $m = 3\ ,\ \ n = 4$

c_{ij}	1	2	3	4
1	8	3	5	0
2	1	7	4	0
3	3	8	2	0

Solução ótima:



$z^* = 2500$ €

Esta solução:

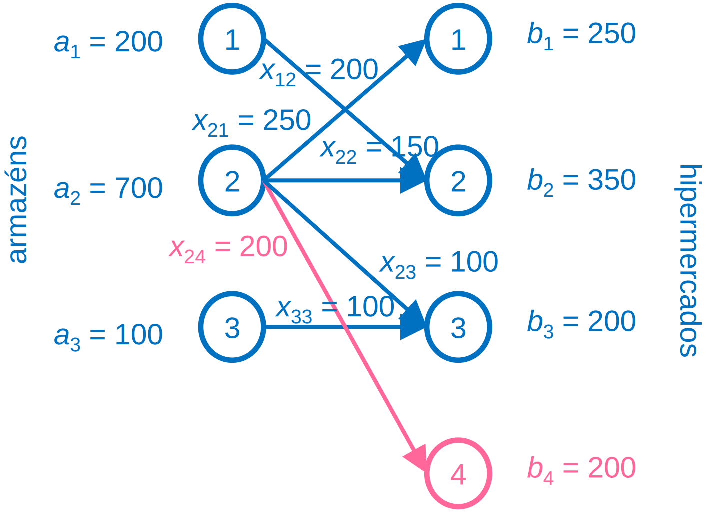
- é **admissível** porque satisfaz oferta e procura;
- é **básica** porque define uma árvore de suporte no grafo bipartido, ou seja, usa exatamente $m+n-1 = 6$ ligações (variáveis básicas) caracterizando um grafo conexo;
- é **ótima** porque satisfaz as condições de complementaridade.

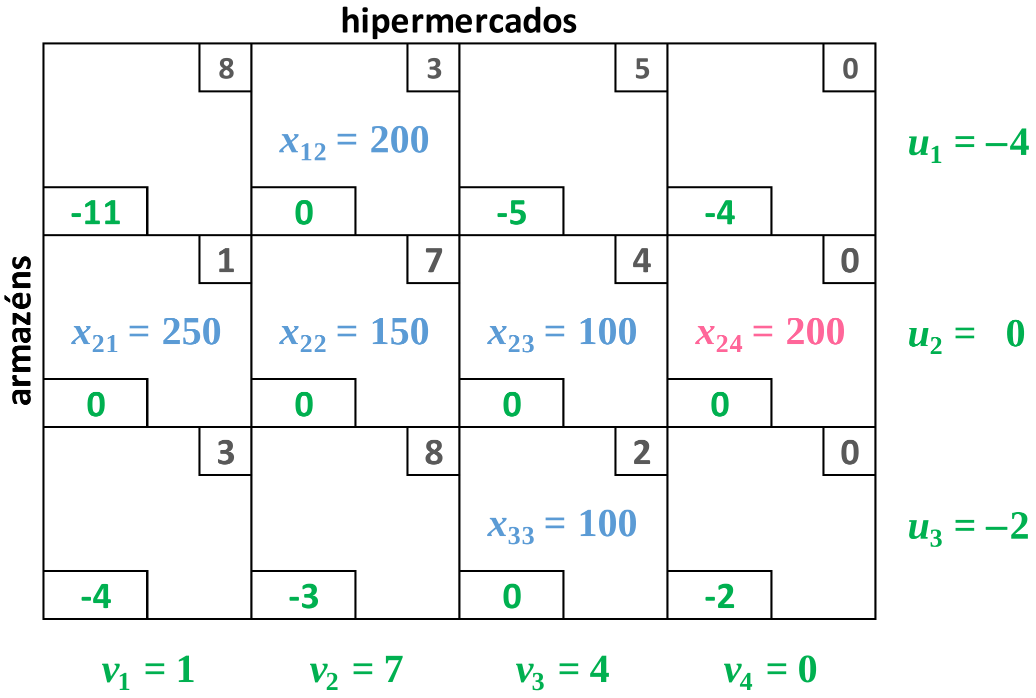
Problema de Transportes

Exemplo:

Solução ótima:

$z^* = 2500$ €

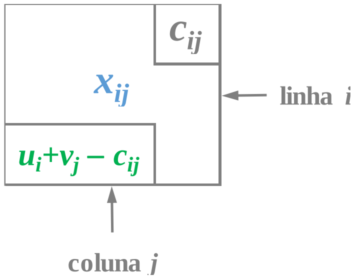



hipermercados

armazéns

8 -11	3 $x_{12} = 200$ 0	5 -5	0 -4	$u_1 = -4$
1 $x_{21} = 250$ 0	7 $x_{22} = 150$ 0	4 $x_{23} = 100$ 0	0 $x_{24} = 200$ 0	$u_2 = 0$
3 -4	8 -3	2 $x_{33} = 100$ 0	0 -2	$u_3 = -2$
$v_1 = 1$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 0$	

Se x_{ij} for não básica e $(u_i + v_j - c_{ij}) = 0$, então existem soluções ótimas alternativas.



Problema de Transportes

Exemplo:

assumindo, sem perda de generalidade,
que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Considere a formulação primal definida com desigualdades, da seguinte forma:

$$\min \quad z = 8x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 0x_{14} + 1x_{21} + 7x_{22} + 4x_{23} + 0x_{24} + 3x_{31} + 8x_{32} + 2x_{33} + 0x_{34}$$

$$\begin{array}{lllllllllllll}
\text{s. a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & & \leq 200 \\
 & & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & & \leq 700 \\
 & & & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & \leq 100 \\
 & x_{11} & + x_{21} & + x_{31} & \geq 250 \\
 & x_{12} & + x_{22} & + x_{32} & \geq 350 \\
 & x_{13} & + x_{23} & + x_{33} & \geq 200 \\
 & x_{14} & + x_{24} & + x_{34} & \geq 200
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i=1,2,3 \; ; \quad j=1,2,3,4$$

Problema de Transportes

Obteríamos a seguinte solução ótima e os quadros para análise de sensibilidade:

quadro associado às variáveis, determinado pelo Excel/Solver

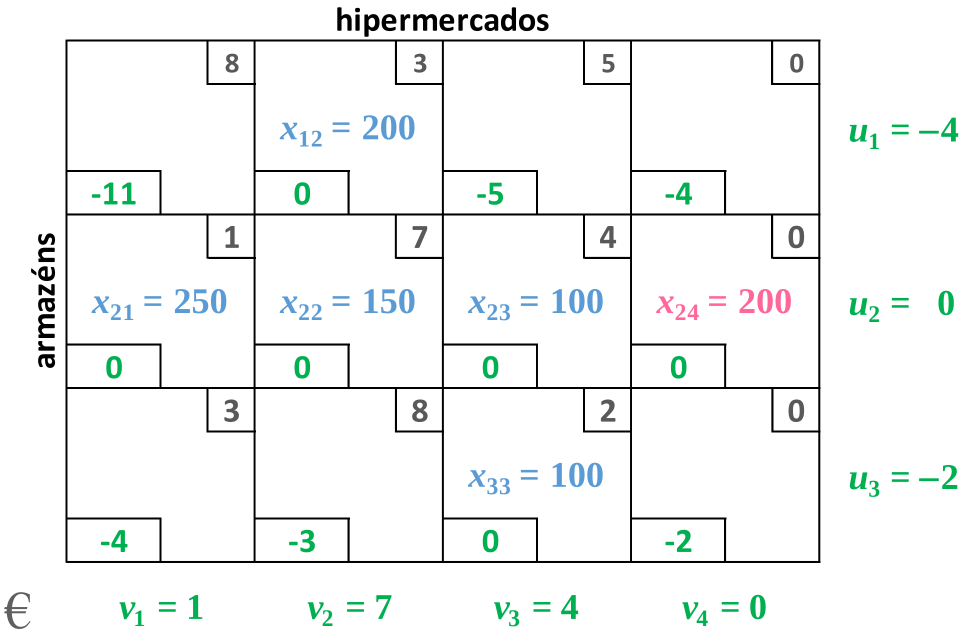
Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
x11	0	11	8	1E+30	11
x12	200	0	3	4	1E+30
x13	0	5	5	1E+30	5
x14	0	4	0	1E+30	4
x21	250	0	1	4	1
x22	150	0	7	3	4
x23	100	0	4	5	2
x24	200	0	0	2	0
x31	0	4	3	1E+30	4
x32	0	3	8	1E+30	3
x33	100	0	2	2	1E+30
x34	0	2	0	1E+30	2

quadro associado às restrições, determinado pelo Excel/Solver

Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
armaz. 1	200	-4	200	150	0
armaz. 2	700	0	700	1E+30	0
armaz. 3	100	-2	100	100	0
hiperm. 1	250	1	250	0	250
hiperm. 2	350	7	350	0	150
hiperm. 3	200	4	200	0	100
hiperm. 4	200	0	200	0	200

O Excel/Solver define os custos reduzidos como $-(u_i + v_j - c_{ij}) = (c_{ij} - (u_i+v_j))$

A solução ótima do dual (u_i,v_j) obter-se-ia a partir das condições de complementaridade, começado com $u_2 = 0$ (nodo origem com maior a_i).



hipermercados

armazéns

8 -11	3 $x_{12} = 200$ 0	5 -5	0 -4	$u_1 = -4$
1 $x_{21} = 250$ 0	7 $x_{22} = 150$ 0	4 $x_{23} = 100$ 0	0 $x_{24} = 200$ 0	$u_2 = 0$
3 -4	8 -3	2 $x_{33} = 100$ 0	0 -2	$u_3 = -2$
$v_1 = 1$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 0$	

$z^* = 2500$ €

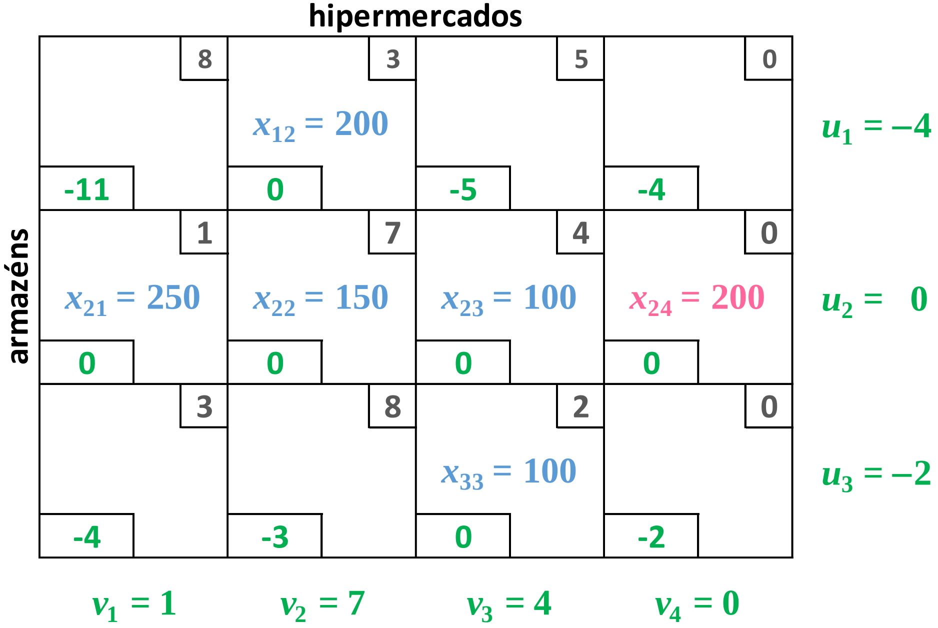
Problema de Transportes

Análise de sensibilidade

Solução ótima: $z^* = 2500$ €

quadro associado às variáveis, determinado pelo Excel/Solver

	Final	Reduzido	Objetivo	Permissível	Permissível
Nome	**Valor**	**Custo**	**Coeficiente**	**Aumentar**	**Diminuir**
x11	0	11	8	1E+30	11
x12	200	0	3	4	1E+30
x13	0	5	5	1E+30	5
x14	0	4	0	1E+30	4
x21	250	0	1	4	1
x22	150	0	7	3	4
x23	100	0	4	5	2
x24	200	0	0	2	0
x31	0	4	3	1E+30	4
x32	0	3	8	1E+30	3
x33	100	0	2	2	1E+30
x34	0	2	0	1E+30	2



hipermercados

armazéns

8 -11	3 $x_{12} = 200$ 0	5 -5	0 -4	$u_1 = -4$
1 $x_{21} = 250$ 0	7 $x_{22} = 150$ 0	4 $x_{23} = 100$ 0	0 $x_{24} = 200$ 0	$u_2 = 0$
3 -4	8 -3	2 $x_{33} = 100$ 0	0 -2	$u_3 = -2$
$v_1 = 1$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 0$	

Considere a imposição de transporte de 100 paletes do armazém 1 para o hipermercado 1. Qual deverá ser o agravamento no custo ótimo total?

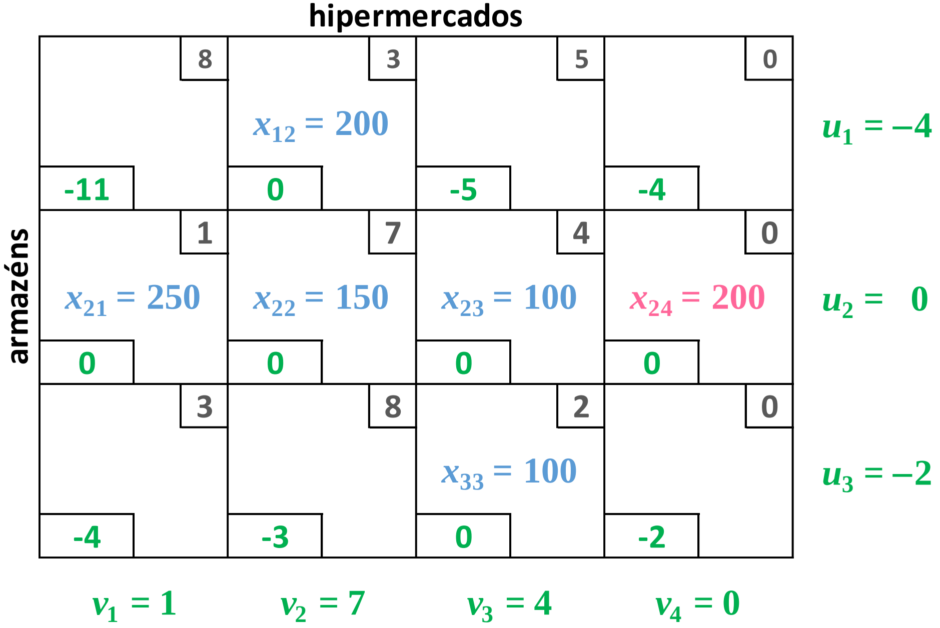
Atendendo que é admissível transportar 100 paletes da origem 1 para o destino 1, a partir do quadro ótimo obtido, então, usando o valor do custo reduzido $(u_1+v_1 - c_{11}) = -11$ associado a x_{11}, podemos afirmar que o agravamento será de 1100 € $(=x_{11}\times(u_1+v_1 - c_{11}))$, passando o novo custo total a 3600 €.

Problema de Transportes

Solução ótima: $z^* = 2500$ €

quadro associado às variáveis, determinado pelo Excel/Solver

Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
x11	0	11	8	1E+30	11
x12	200	0	3	4	1E+30
x13	0	5	5	1E+30	5
x14	0	4	0	1E+30	4
x21	250	0	1	4	1
x22	150	0	7	3	4
x23	100	0	4	5	2
x24	200	0	0	2	0
x31	0	4	3	1E+30	4
x32	0	3	8	1E+30	3
x33	100	0	2	2	1E+30
x34	0	2	0	1E+30	2



hipermercados

armazéns

8 -11	3 $x_{12} = 200$ 0	5 -5	0 -4	$u_1 = -4$
1 $x_{21} = 250$ 0	7 $x_{22} = 150$ 0	4 $x_{23} = 100$ 0	0 $x_{24} = 200$ 0	$u_2 = 0$
3 -4	8 -3	2 $x_{33} = 100$ 0	0 -2	$u_3 = -2$
$v_1 = 1$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 0$	

Suponhamos que se pretende que a mercadoria sobrante fique no armazém 1, em vez de no 2. Qual deverá ser o agravamento no custo ótimo total?

Atendendo que é admissível transferir as 200 paletes sobrantes da origem 2 para a origem 1, a partir do quadro ótimo obtido, então, usando o valor do custo reduzido $(u_1+v_4 - c_{14}) = -4$ associado a x_{14}, podemos afirmar que o agravamento será de 800 € $(= x_{14} \times (u_1+v_4 - c_{14}))$, passando o novo z^* a 3300 €.

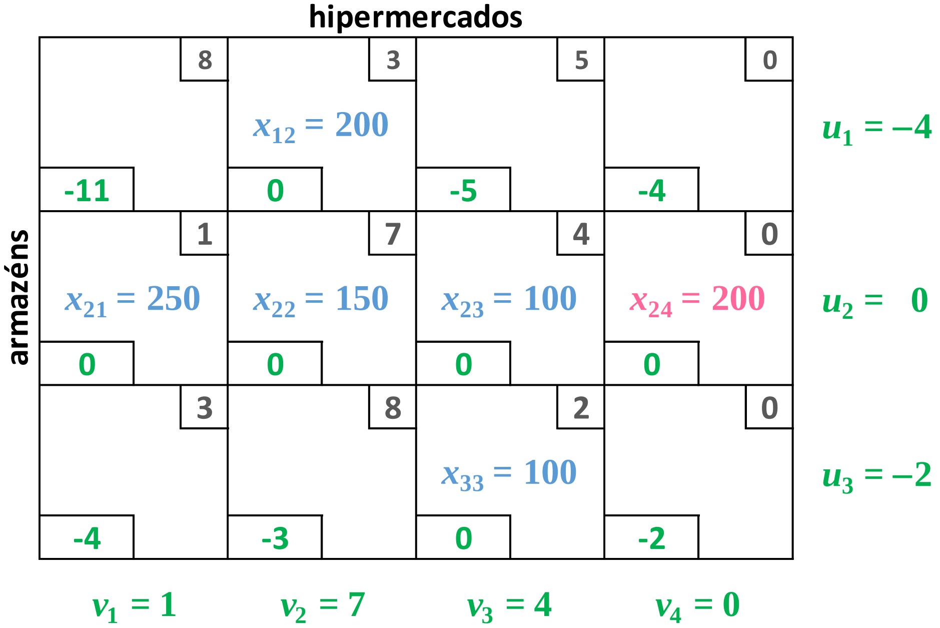
Problema de Transportes

Análise de sensibilidade

Solução ótima: $z^* = 2500$ €

quadro associado às variáveis, determinado pelo Excel/Solver

	Final	Reduzido	Objetivo	Permissível	Permissível
Nome	Valor	Custo	Coeficiente	Aumentar	Diminuir
x11	0	11	8	1E+30	11
x12	200	0	3	4	1E+30
x13	0	5	5	1E+30	5
x14	0	4	0	1E+30	4
x21	250	0	1	4	1
x22	150	0	7	3	4
x23	100	0	4	5	2
x24	200	0	0	2	0
x31	0	4	3	1E+30	4
x32	0	3	8	1E+30	3
x33	100	0	2	2	1E+30
x34	0	2	0	1E+30	2



hipermercados

armazéns

8 -11	3 $x_{12} = 200$ 0	5 -5	0 -4	$u_1 = -4$
1 $x_{21} = 250$ 0	7 $x_{22} = 150$ 0	4 $x_{23} = 100$ 0	0 $x_{24} = 200$ 0	$u_2 = 0$
3 -4	8 -3	2 $x_{33} = 100$ 0	0 -2	$u_3 = -2$
$v_1 = 1$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 0$	

Até que valor podemos reduzir o custo unitário de transporte do armazém 1 para o hipermercado 1 com a garantia de que a solução ótima obtida continua a ser ideal?

O quadro indica que o coeficiente na função objetivo da variável x_{11} (c_{11}=11) pode variar no intervalo [–11, +∞[com a garantia de que a solução ótima não se altera, podendo, nesse caso, ser reduzido em 11 €, passando $c_{11} = 8$ para $c'_{11} = 8 - 11 = -3$. Assim, mesmo que cada unidade transportada nesse trajeto passasse a dar uma renda de 3 €, a não utilização dessa ligação continuava a ser a “melhor” opção.

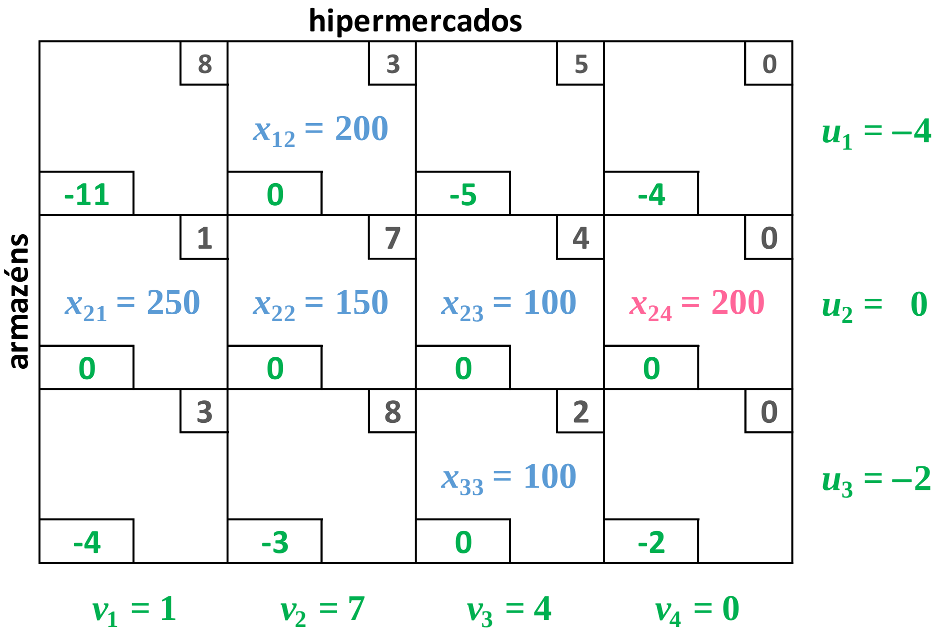
Problema de Transportes

Análise de sensibilidade

Solução ótima: $z^* = 2500$ €

quadro associado às variáveis, determinado pelo Excel/Solver

Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
x11	0	11	8	1E+30	11
x12	200	0	3	4	1E+30
x13	0	5	5	1E+30	5
x14	0	4	0	1E+30	4
x21	250	0	1	4	1
x22	150	0	7	3	4
x23	100	0	4	5	2
x24	200	0	0	2	0
x31	0	4	3	1E+30	4
x32	0	3	8	1E+30	3
x33	100	0	2	2	1E+30
x34	0	2	0	1E+30	2



hipermercados

armazéns

8 -11	3 $x_{12} = 200$ 0	5 -5	0 -4	$u_1 = -4$
1 $x_{21} = 250$ 0	7 $x_{22} = 150$ 0	4 $x_{23} = 100$ 0	0 $x_{24} = 200$ 0	$u_2 = 0$
3 -4	8 -3	2 $x_{33} = 100$ 0	0 -2	$u_3 = -2$
$v_1 = 1$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 0$	

Análise do custo unitário de transporte do armazém 2 para o hipermercado 3 ($c_{23} = 4$):

A informação no quadro mostra que qualquer variação (individual) no custo de transporte da origem 2 para o destino 3, e que respeite o intervalo [–2, 5], não altera a solução ótima (exceto soluções ótimas alternativas). Assim, esse custo unitário pode agravar-se até 5 €, passando de $c_{23} = 4$ para $c'_{23} = 9$ €; ou reduzir-se até 2 €, passando de $c_{23} = 4$ para $c'_{23} = 2$ €, garantindo que a solução obtida continua a ser ideal.

Problema de Transportes

Análise de sensibilidade

Solução ótima: $z^* = 2500$ €

quadro associado às restrições, determinado pelo Excel/Solver

Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
armaz. 1	200	-4	200	150	0
armaz. 2	700	0	700	1E+30	0
armaz. 3	100	-2	100	100	0
hiperm. 1	250	1	250	0	250
hiperm. 2	350	7	350	0	150
hiperm. 3	200	4	200	0	100
hiperm. 4	200	0	200	0	200

	hipermercados				
armazéns	8 -11	3 $x_{12} = 200$ 0	5 -5	0 -4	$u_1 = -4$
	1 $x_{21} = 250$ 0	7 $x_{22} = 150$ 0	4 $x_{23} = 100$ 0	0 $x_{24} = 200$ 0	$u_2 = 0$
	3 -4	8 -3	2 $x_{33} = 100$ 0	0 -2	$u_3 = -2$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 0$	

Análise da alteração no custo total ótimo caso haja um aumento da disponibilidade de mercadoria no armazém 1:

A informação no quadro mostra que o valor marginal da disponibilidade de produto no armazém 1 ($a_1 = 200$) é de –4 € (preço sombra $u_1 = -4$). Este valor marginal mantém-se constante para qualquer aumento na disponibilidade nesse armazém até 150 unidades. Assim, se a disponibilidade de produto no armazém 1 passar de $a_1 = 200$ paletes para $a'_1 = a_1 + \theta_1 = 300$, então haverá uma redução no custo total de transporte no valor de $(u_1 \times \theta_1) = -4 \times 100 = -400$ €, e o novo $z^* = 2500 - 400 = 2100$ €.

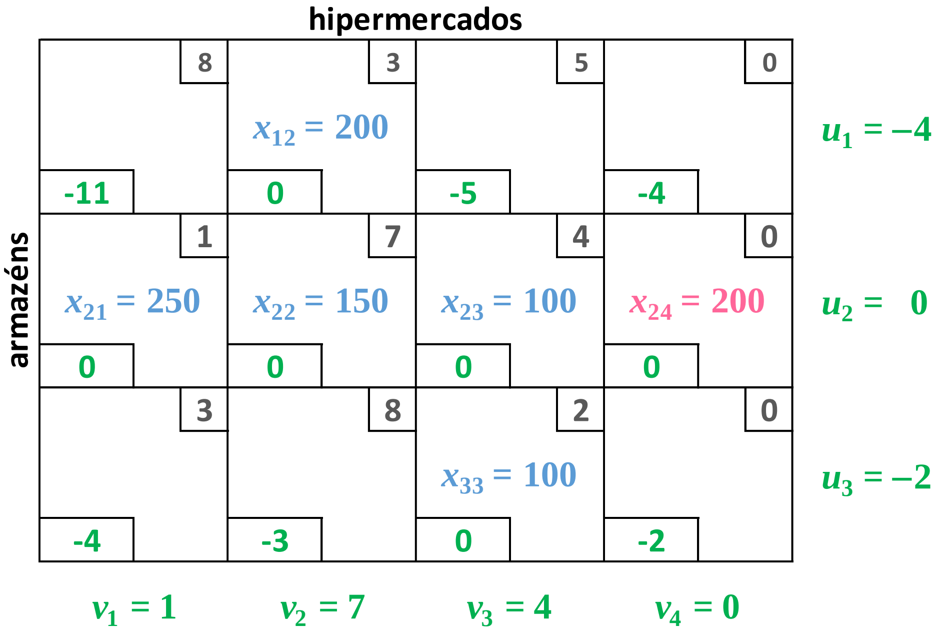
Problema de Transportes

Análise de sensibilidade

Solução ótima: $z^* = 2500$ €

quadro associado às restrições, determinado pelo Excel/Solver

Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
armaz. 1	200	-4	200	150	0
armaz. 2	700	0	700	1E+30	0
armaz. 3	100	-2	100	100	0
hiperm. 1	250	1	250	0	250
hiperm. 2	350	7	350	0	150
hiperm. 3	200	4	200	0	100
hiperm. 4	200	0	200	0	200



hipermercados

armazéns

armazéns	8 -11	3 $x_{12} = 200$ 0	5 -5	0 -4	$u_1 = -4$
	1 $x_{21} = 250$ 0	7 $x_{22} = 150$ 0	4 $x_{23} = 100$ 0	0 $x_{24} = 200$ 0	$u_2 = 0$
	3 -4	8 -3	2 $x_{33} = 100$ 0	0 -2	$u_3 = -2$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 0$	

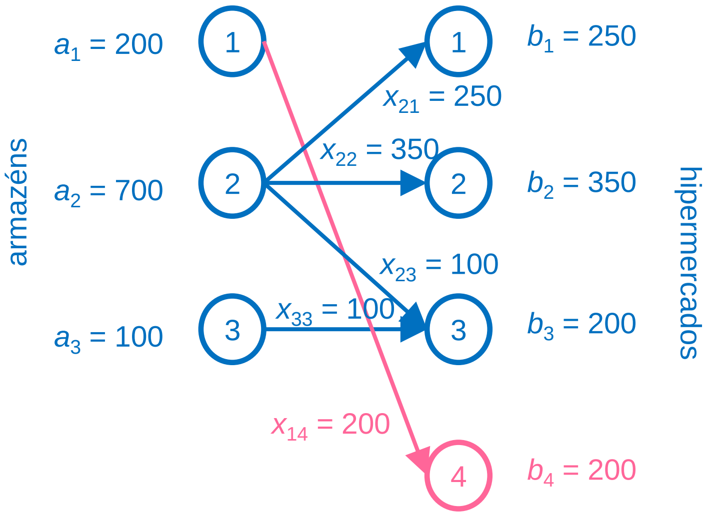
Análise da alteração no custo total ótimo caso haja uma redução na procura de mercadoria pelo hipermercado 2:

A informação no quadro mostra que o valor marginal da procura de produto pelo hipermercado 2 ($b_2 = 350$) é de 7 € (preço sombra $v_2 = 7$). Este valor marginal mantém-se constante para qualquer redução não superior a 150 unidades na procura por parte desse hipermercado. Assim, se a procura de produto pelo hipermercado 2 passar de $b_2 = 350$ paletes para $b'_2 = b_2 + \theta_2 = 250$, então haverá uma redução no custo total de transporte no valor de $(v_2 \times \theta_2) = 7 \times (-100) = -700$ €. Consequentemente, o novo $z^* = 2500 - 700 = 1800$ €.

Problema de Transportes

Solução básica degenerada

Considere-se a seguinte solução admissível:

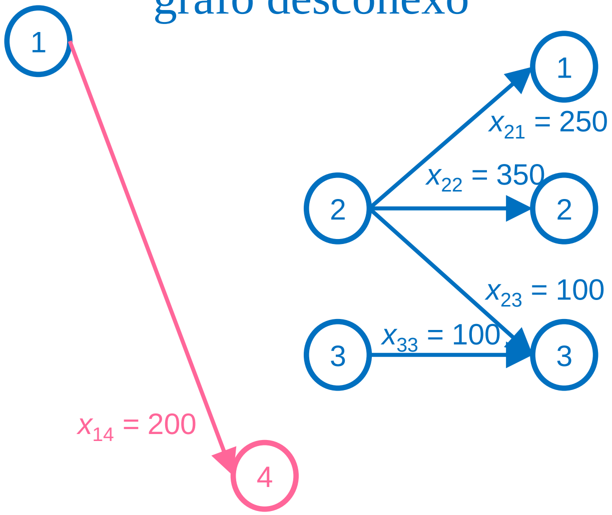


hipermercados

armazéns

8	3	5	0 $x_{14} = 200$
1 $x_{21} = 250$	7 $x_{22} = 350$	4 $x_{23} = 100$	0
3	8	2 $x_{33} = 100$	0

grafo desconexo



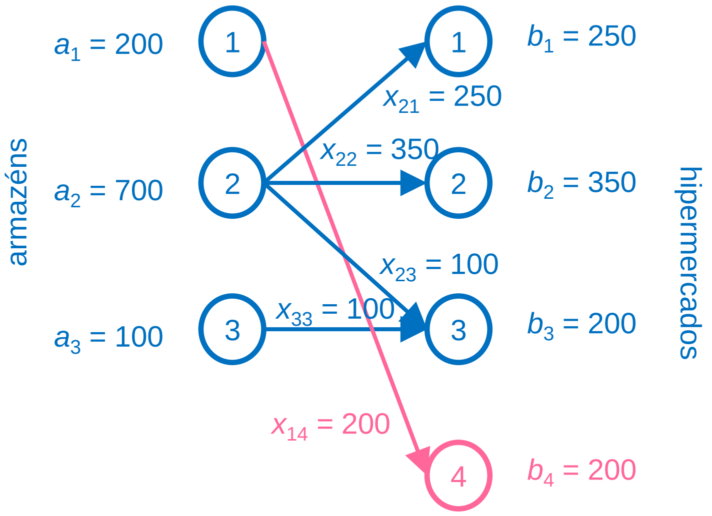
Esta solução é admissível (porque satisfaz oferta e procura) mas não é básica porque tem apenas 5 variáveis identificadas com fluxo. De facto, o grafo da solução é desconexo.

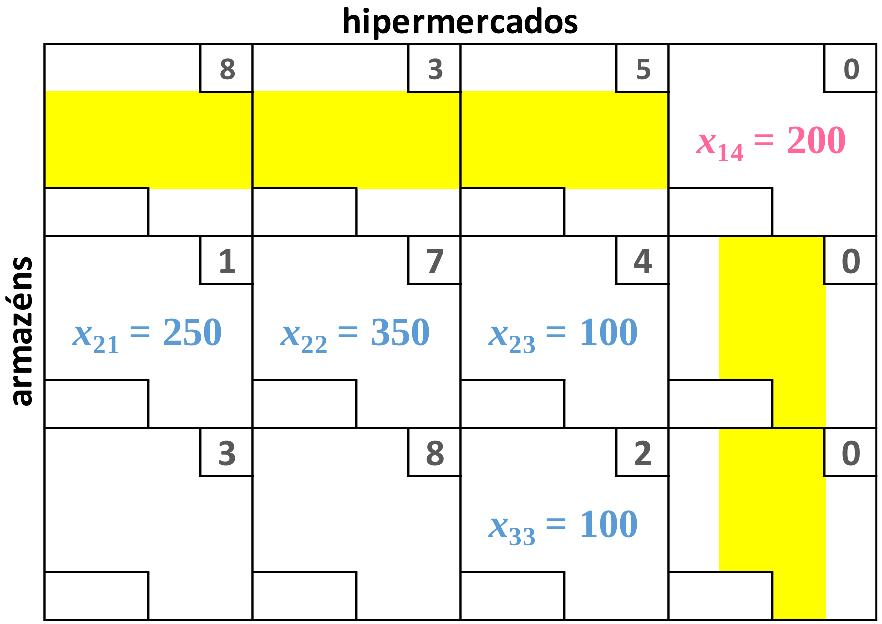
Para obter uma solução básica (a partir da solução apresentada) precisamos de identificar a 6ª variável básica ($m+n-1=6$), ainda que com valor nulo.

Problema de Transportes

Solução básica degenerada

Considere-se a seguinte solução admissível:

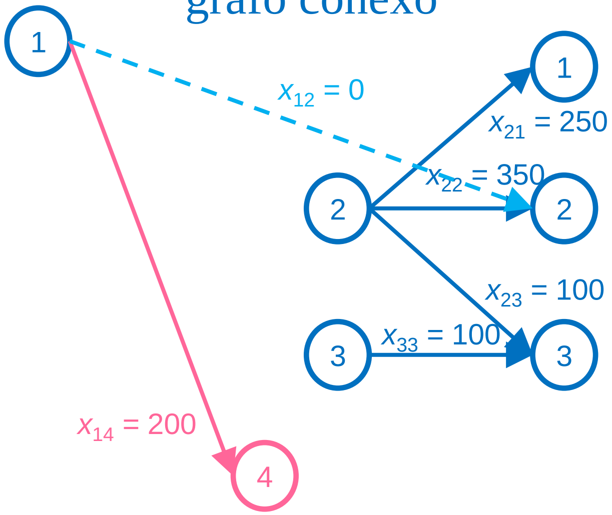




hipermercados

armazéns	8	3	5	0 $x_{14} = 200$
	1 $x_{21} = 250$	7 $x_{22} = 350$	4 $x_{23} = 100$	0
	3	8	2 $x_{33} = 100$	0

grafo conexo



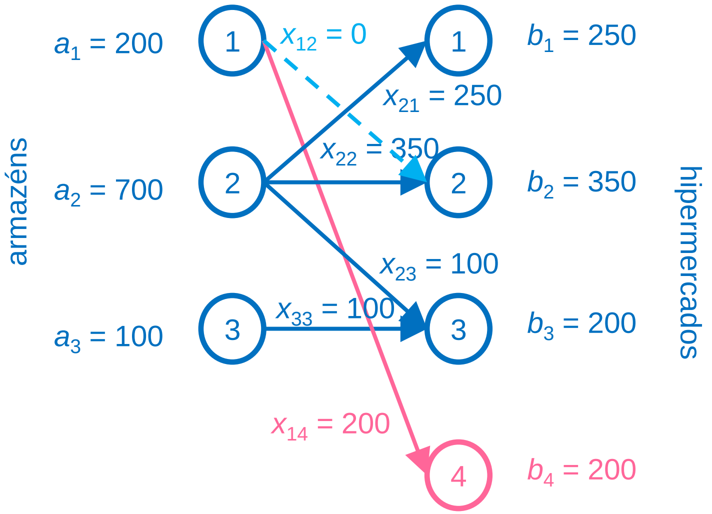
As variáveis candidatas ao papel de 6ª variável básica são as assinaladas nas células a amarelo. Qualquer dessas variáveis permite recuperar a conectividade do grafo.

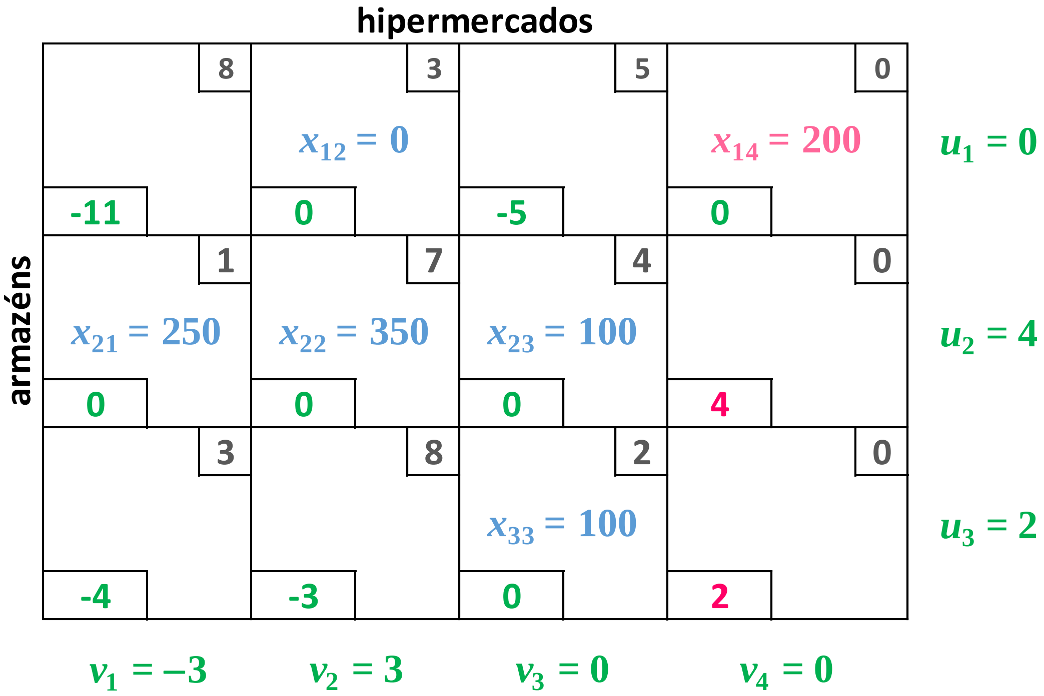
Assim, propomos que a 6ª variável básica seja a x_{12}. Esta variável terá fluxo nulo.

Problema de Transportes

Solução básica degenerada

Obtendo-se a seguinte solução básica degenerada:





hipermercados

armazéns					
	8 -11	3 $x_{12} = 0$ 0	5 -5	0 $x_{14} = 200$ 0	$u_1 = 0$
	1 $x_{21} = 250$ 0	7 $x_{22} = 350$ 0	4 $x_{23} = 100$ 0	0 4	$u_2 = 4$
	3 -4	8 -3	2 $x_{33} = 100$ 0	0 2	$u_3 = 2$
	$v_1 = -3$	$v_2 = 3$	$v_3 = 0$	$v_4 = 0$	

Agora sim, a solução é básica e admissível, ainda que degenerada.

Neste caso, esta solução básica não é ótima porque existem custos reduzidos com valor positivo ($(u_2+v_4 - c_{24}) = 4$ e $(u_3+v_4 - c_{34}) = 2$), violando a admissibilidade do dual, logo não satisfazendo as condições de complementaridade.

Reformulações para o problema de transportes

Problema de Transportes

Retomemos a formulação do problema de transportes com ***m*** origens e ***n*** destinos

(com eventual origem ou destino fictício)

Parâmetros:

$a_i \equiv$ quantidade de mercadoria disponível na origem i , $i=1,\dots,m$

$b_j \equiv$ quantidade de mercadoria requerida pelo destino j , $j=1,\dots,n$

$c_{ij} \equiv$ custo unitário de transporte da origem i para o destino j , $i=1,...,m$, $j=1,...,n$

Variáveis:

$x_{ij} \equiv$ quantidade de mercadoria transportada da origem i para o destino j , $i=1,...,m$, $j=1,...,n$

admite-se, sem perda de generalidade, que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i=1,\dots,m \; , \; j=1,\dots,n$$

Note: se os parâmetros a_i e b_j forem todos inteiros, então as soluções ótimas deste problema são também inteiras, permitindo resolvê-lo em otimização contínua

Problema de Transportes reformulações

Parâmetros:

$a_i \equiv$ quantidade de mercadoria disponível na origem i , $i=1,\ldots,m$

$b_j \equiv$ quantidade de mercadoria requerida pelo destino j , $j=1,\ldots,n$

$c_{ij} \equiv$ custo unitário de transporte da origem i para o destino j , $i=1,...,m$, $j=1,...,n$

Variáveis:

$x_{ij} \equiv$ quantidade de mercadoria transportada da origem i para o destino j , $i=1,...,m$, $j=1,...,n$

se a oferta for menor do que a procura:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s. a} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i=1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \quad , \quad j=1,\ldots,n \\ & x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad , \quad j=1,\ldots,n \end{aligned}$$

se a oferta for maior do que a procura:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s. a} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad , \quad i=1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j=1,\ldots,n \\ & x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad , \quad j=1,\ldots,n \end{aligned}$$

Problema de Transportes reformulações

Considere-se a inclusão de limites mínimos e máximos no fluxo em cada ligação

Parâmetros adicionais:

$m_{ij} \equiv$ limite mínimo no fluxo de i para j , $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ (com $m_{ij} \geq 0$)

$M_{ij} \equiv$ limite máximo no fluxo de i para j , $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

Reformulação:

admite-se, sem perda de generalidade, que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$m_{ij} \leq x_{ij} \leq M_{ij} \quad , \quad i=1,\dots,m \quad , \quad j=1,\dots,n$$

Considere-se a inclusão de custos fixos pela utilização de fluxo em cada ligação

Parâmetros adicionais:

d_{ij} ≡ custo fixo de transporte da origem i para o destino j , i=1,...,m , j=1,...,n (com $d_{ij} > 0$)

Variáveis adicionais: $y_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } x_{ij} > 0 \\ 0 \text{ se } x_{ij} = 0 \end{cases}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$

Reformulação:

admite-se, sem perda de generalidade, que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}y_{ij}$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i=1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \leq M.y_{ij} \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

(com M uma constante suficientemente grande)

$$x_{ij} \geq 0 \; , \quad y_{ij} \in \{0,1\} \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

Problema de Transportes reformulações

Se, adicionalmente, houver capacidades máximas no fluxo em cada ligação

Parâmetros adicionais:

d_{ij} ≡ custo fixo de transporte da origem *i* para o destino *j* , $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$ (com $d_{ij} > 0$)

M_{ij} ≡ capacidade máxima no transporte da origem *i* para o destino *j* , $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$

Variáveis adicionais: $y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } x_{ij} = 0 \end{cases}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$

Reformulação:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}y_{ij}$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i=1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \leq M_{ij}.y_{ij} \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \; , \quad y_{ij} \in \{0,1\} \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

admite-se, sem perda de generalidade, que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Problema de Transportes reformulações

Se a penalização em cada ligação puder tomar qualquer valor ($d_{ij} \in IR$)

Parâmetros adicionais:

$d_{ij} \equiv$ custo fixo de transporte da origem i para o destino j , $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$ (com $d_{ij} \in IR$)

$m_{ij} \equiv$ limite mínimo para o transporte da origem i para o destino j , $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$ ($m_{ij} \geq 0$)

$M_{ij} \equiv$ capacidade máxima no transporte da origem i para o destino j , $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$

Variáveis adicionais:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } x_{ij} = 0 \end{cases} \quad , \quad i = 1,\ldots,m \quad , \quad j = 1,\ldots,n$$

Reformulação:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_{ij}$$

admite-se, sem perda de generalidade, que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i=1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

$$\overbrace{m_{ij}.y_{ij} \leq x_{ij}}^{\text{se } d_{ij} < 0} \; \overbrace{\leq M_{ij}.y_{ij}}^{\text{se } d_{ij} > 0} \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

Problema de Transportes reformulações

Se pretendermos antes maximizar o fluxo total, sujeito a uma restrição orçamental

Parâmetros:

$a_i \equiv$ quantidade de mercadoria disponível na origem i , $i=1,\ldots,m$

$b_j \equiv$ quantidade de mercadoria requerida pelo destino j , $j=1,\ldots,n$

$c_{ij} \equiv$ custo unitário de transporte da origem i para o destino j , $i=1,...,m$, $j=1,...,n$

$K \equiv$ limite orçamental do custo total de transporte

Variáveis:

$x_{ij} \equiv$ quantidade de mercadoria transportada da origem i para o destino j , $i=1,...,m$, $j=1,...,n$

Reformulação:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad , \quad i=1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \le K$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

a restrição orçamental faz perder as condições de integralidade implícitas

se a mercadoria for fracionária

se a mercadoria for inteira, então considerar $x_{ij} \in IN_0$

Problema de Transportes reformulações

Se a restrição orçamental incluir custos fixos

Parâmetros adicionais:

$d_{ij} \equiv$ custo fixo de transporte da origem i para o destino j , $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ (com $d_{ij} \in IR$)

$m_{ij} \equiv$ limite mínimo para o transporte da origem i para o destino j , $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ ($m_{ij} \geq 0$)

$M_{ij} \equiv$ capacidade máxima no transporte da origem i para o destino j , $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

Variáveis adicionais:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } x_{ij} = 0 \end{cases} \quad , \quad i = 1,\dots,m \quad , \quad j = 1,\dots,n$$

Reformulação:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad , \quad i=1,\dots,m \qquad , \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_{ij} \leq K$$

$$\overbrace{m_{ij}.y_{ij} \leq x_{ij}}^{\text{se } d_{ij} < 0} \overbrace{\leq M_{ij}.y_{ij}}^{\text{se } d_{ij} > 0} \; , \quad i=1,\dots,m \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \; , \quad y_{ij} \in \{0,1\} \; , \quad i=1,\dots,m \quad , \quad j=1,\dots,n$$