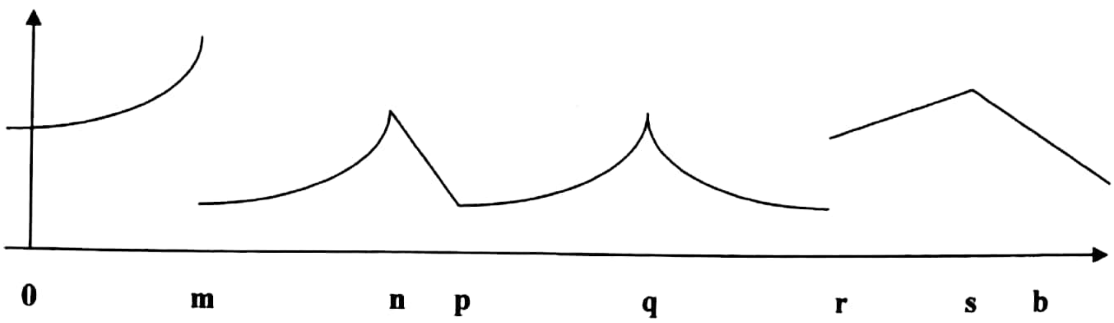
Fonctions définies par morceaux

Continuité-dérivabilité-régularisée

1

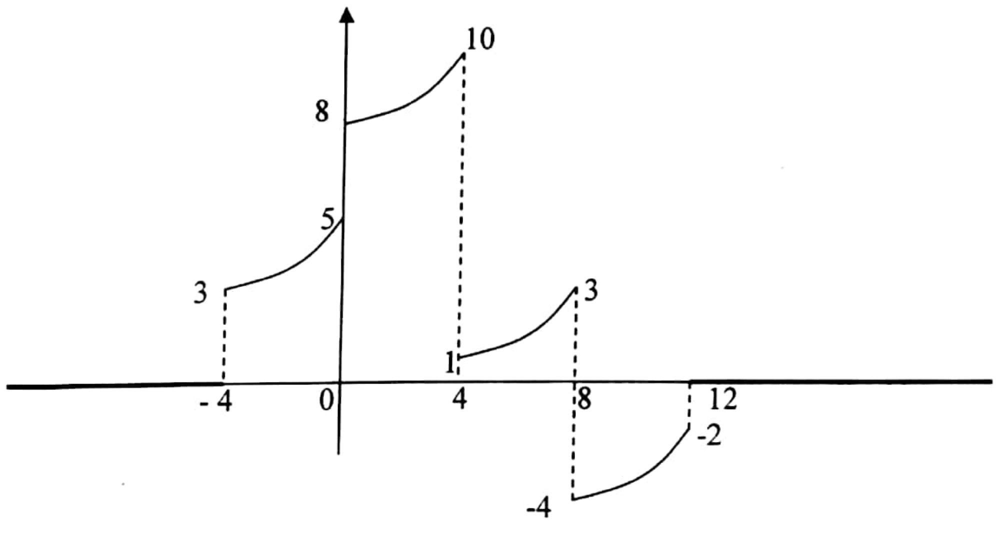


1)Préciser les points de discontinuité de f sur [0 b]

2)Préciser les points où f est continue mais non dérivable

2

Une fonction f a pour graphe la courbe ci-dessous :



1)Préciser $f(t_0^-)$, $f(t_0^+)$ et $f^*(t_0)$ lorsque t_0 est un point de discontinuité de f (endroit des sauts)

2)Tracer la courbe représentative la régularisée f^*

3

1)Tracer les courbes représentatives des fonctions définies ci-dessous en précisant par « un gros point » le point d'abscisse 2:

$f(t) = -1$ pour $t \in]-\infty, 2]$ $f(t) = 1$ pour $t \in]2, \infty[$

$g(t) = -1$ pour $t \in]-\infty, 2[$ $g(t) = 1$ pour $t \in [2, \infty[$

$h(t) = -1$ pour $t \in]-\infty, 2[$ $h(t) = 1$ pour $t \in]2, \infty[$ $h(2) = 3$

$r(t) = -1$ pour $t \in]-\infty, 2[$ $r(t) = 1$ pour $t \in]2, \infty[$ $r(2) = 0$

2)Devinette : une de ces quatre fonctions est la régularisée des trois autres, laquelle est-ce ?

4

Soit f la fonction définie sur $[-2\pi, 2\pi]$ par : $f(t) = t + 2\pi$ pour $t \in [-2\pi, 0[$ et
$f(t) = t$ pour $t \in [0, 2\pi]$
1)Calculer $f(0^-)$, $f(0^+)$, $f(0)$ et $f^*(0)$
a)Tracer la courbe représentative de f. et lire les résultats précédents sur la courbe
b)Tracer la courbe représentative de la régularisée f^*

2) Soit g la fonction définie sur $[-2\pi, 2\pi]$ par : $g(t) = t + 2\pi$ pour $t \in [-2\pi, 0]$
$g(t) = t$ pour $t \in]0, 2\pi]$
Tracer la courbe représentative de g.

5

$f(t) = t$ pour $t \in]-\infty, 3]$; $f(t) = 2t$ pour $t \in]3, 7[$; $f(t) = t - 5$ pour $t \in [7, 10]$;
$f(t) = 0$ pour $t \in]10, \infty[$

Tracer la courbe représentative de f^* et préciser $f^*(t_0)$ lorsque t_0 est un point de discontinuité de f

6

$f(t) = \sin(\pi t)$ pour $t \in]-\infty, 1]$; $f(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ pour $t \in]1, 2]$; $f(t) = t^2 - 6$ pour $t \in]2, \infty[$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 et en 2

7

$f(t) = t^2 + 5$ pour $t < 1$ $f(t) = 2t + a$ pour $t \geq 1$ Déterminer a pour que f soit continue en 1

8

La courbe représentative de $f(t)$ est celle d'une droite pour pour $t \leq 1$ et celle de $\ln(t)$ pour $t > 1$

Déterminer l'équation de cette droite sachant que f est dérivable en 1

9

$g(t) = \cos(t)$ pour $t \leq 0$ et $g(t) = t^2 + at + b$ pour $t > 0$ Déterminer a et b pour que g soit dérivable en 0

Tracés des fonctions périodiques et de leurs régularisées

1

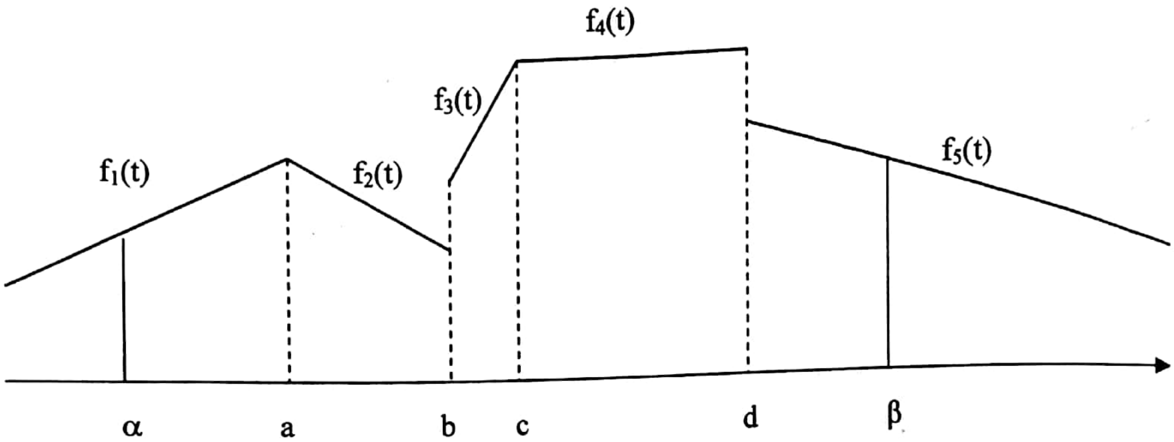
1)a)Tracer la courbe représentative de la fonction f_1 de période $T = 2\pi$ définie par
$f_1(t) = t^2$ pour $t \in [0, 2\pi[$
b)Tracer la courbe représentative de la fonction f_1 de période $T = 2\pi$ définie par
$f_2(t) = t^2$ sur $]0, 2\pi]$
2) Tracer la courbe représentative de la régularisée de ces deux fonctions. Préciser la valeur de la régularisée en 0
3a) Tracer la courbe représentative de la fonction g de période $T = 2\pi$ définie par
$g(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi, \pi[$
b) Tracer la courbe représentative de sa régularisée.

2

Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(t) = |\sin(t)|$

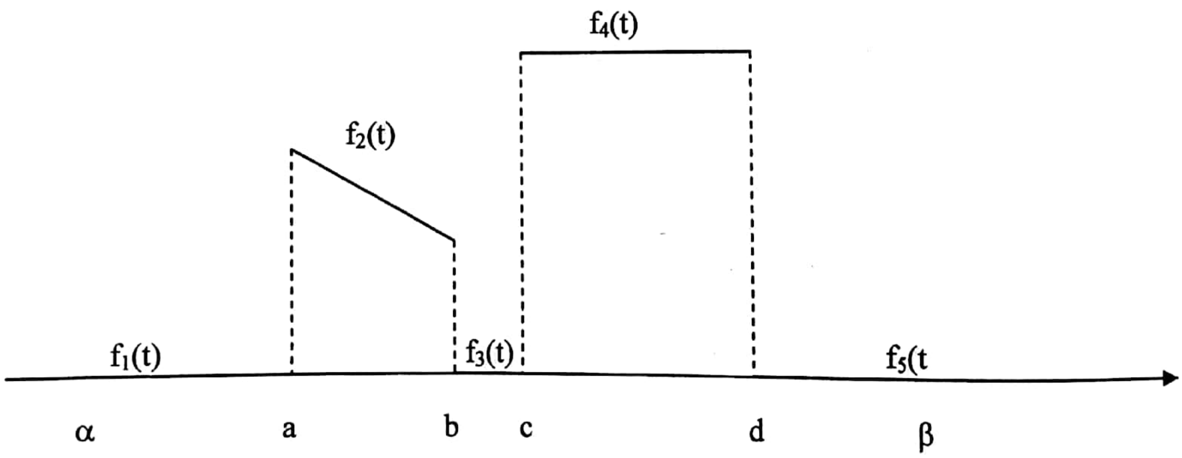
Intégration des fonctions définies par morceaux

Pour calculer $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ lorsque $f(t)$ change d'expression suivant les intervalles, il suffit de placer les bornes α et β de l'intervalle d'intégration :



Puis d'écrire : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{a} f_1(t)dt + \int_{a}^{b} f_2(t)dt + \int_{b}^{c} f_3(t)dt + \int_{c}^{d} f_4(t)dt + \int_{d}^{\beta} f_5(t)dt$

Si f est nulle sur certain intervalles, par exemple :



Plutôt que d'écrire $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} f_2(t)dt + \int_{b}^{c} 0dt + \int_{c}^{d} f_4(t)dt + \int_{d}^{\beta} 0dt$

Écrire directement : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{a}^{b} f_2(t)dt + \int_{c}^{d} f_4(t)dt$

1

Soit f la fonction définie par : $f(t) = t + 2\pi$ pour $t \in [-2\pi, 0[$, $f(t) = t$ pour $t \in [0, 2\pi]$ et nulle à l'extérieur de $[-2\pi, 2\pi]$ Calculer $\int_{-3\pi}^{\pi} f(t)dt$

2

$f(t) = t$ pour $t \in]-\infty, 3]$; $f(t) = 2t$ pour $t \in]3, 7]$; $f(t) = t - 5$ pour $t \in]7, 10]$;

$f(t) = 0$ pour $t \in]10, \infty[$ Calculer $\int_{0}^{15} f(t)dt$

3

La fonction f est définie par $f(t) = \cos(t)$ pour $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $f(t) = 0$ ailleurs

Calculer $\int_{0}^{\pi} f(t)dt$

Calculs pour les séries de Fourier

Les calculs qui suivent se retrouveront dans la recherche des séries de Fourier des signaux classiques. Vous devez savoir les mener.
n est dans ce qui suit un entier non nul

1

1))Montrer que $\int t\cos(nt)dt = = \frac{t\sin(nt)}{n} + \frac{\cos(nt)}{n^2}$ (+constante)

2) Montrer que $\int t\sin(nt)dt = -\frac{t\cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2}$ (+constante)

Dans ce qui suit il est indispensable de connaître les sinus et cosinus des multiples de 2π, π et $\frac{\pi}{2}$, dernière chance pour les apprendre.

2

1)~~a)~~ Calculer $\int_0^{2\pi} t\cos(nt)dt$

~~b)~~ Calculer $\int_0^{2\pi} t\sin(nt)dt$

2) a)Calculer $\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt$

b) Montrer que $\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}$

3)a)Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2nt)dt. = \frac{(-1)^n - 1}{4n^2}$

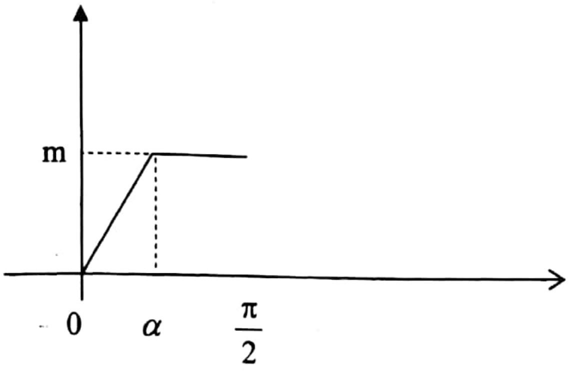
b)Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2nt)dt. = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{4n}$

3

Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(2nt)dt = \frac{1}{(1-4n^2)}$ (linéariser $\sin(a)\cos(b)$)

4

La fonction f est définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par sa courbe représentative ci-dessous :



1)Préciser $f(t)$ pour $t\in[0,\alpha]$ puis pour $t\in\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$

2) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin((2n+1)t)dt=\frac{m}{\alpha}\frac{\sin((2n+1)\alpha)}{(2n+1)^2}$

Valeur moyenne, énergie et valeur efficace

Définitions

-La valeur moyenne de f est l'intégrale de f sur une période divisée par la période.

$$V_{moyenne}(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt$$

-L'énergie E(f) de f est la valeur moyenne de f^2

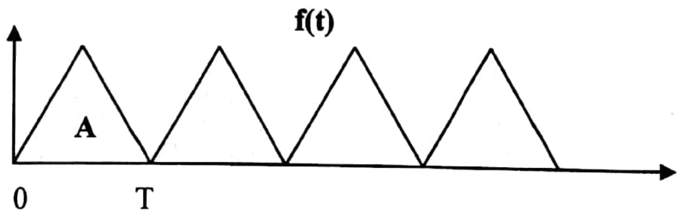
$$E(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^2(t)dt$$

-La valeur efficace de f est égale à la racine carrée de l'énergie de f

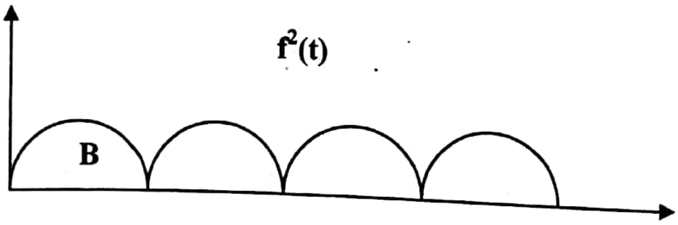
Lorsque f est donnée sur $[0, T[$ écrire $V_{moyenne}(f) = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)dt$ et $E(f) = \frac{1}{T}\int_0^{T} f^2(t)dt$

Lorsque f est donnée sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ écrire $V_{moyenne}(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ et $E(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt$

Géométriquement la valeur moyenne de f est l'aire (algébrique) A d'un motif de f sur une période T divisée par cette période : $V_{moyenne}(f) = \frac{A}{T}$



De même l'énergie de f est l'aire B d'un motif de f^2 sur une période T divisée par cette période $E(f) = \frac{B}{T}$



Pour les signaux géométriquement simples il peut être beaucoup plus rapide d'évaluer l'aire du motif plutôt de calculer l'intégrale

En particulier pour fonction constante f(t)=a

$$V_{moyenne}(a) = a \qquad E(a) = a^2$$

Symétries

Fonction paire

Lorsque f est paire le calcul de sa valeur moyenne peut être simplifié en intégrant sur une demi -période et en multipliant par deux : $V_{moyenne}(f) = 2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$

Lorsque f^2 est paire le calcul de son énergie peut être simplifié en intégrant sur une demi -période et en multipliant par deux : $E(f) = 2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt$

Fonction impaire

$V_{moyenne}(f) = 0$ La valeur moyenne d'une fonction impaire est **toujours nulle.**

f^2 est alors paire et le calcul de son énergie peut être simplifié en intégrant sur une demi -période et en multipliant par deux . $E(f) = 2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt$

Valeur moyenne et énergie de la somme de deux signaux

La valeur moyenne de la somme est égale à la somme des valeurs moyenne.
mais l'énergie de la somme n'est pas égale à la somme des énergies.
la valeur efficace de la somme n'est pas égale à la somme des valeurs efficaces.

$$V_{moyenne}(f+g) = V_{moyenne}(f) + V_{moyenne}(g) \qquad E(f+g) \neq E(f) + E(g)$$

1

1)a)Tracer la courbe représentative de la fonction f_1 de période $T = 2\pi$ définie par

$f_1(t) = t$ pour $t \in [0, 2\pi[$

b)Calculer la valeur moyenne, l'énergie et la valeur efficace de f_1

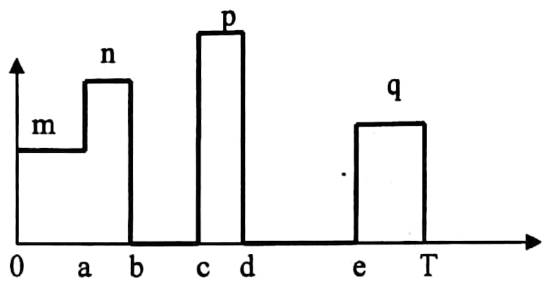
2)a)Tracer la courbe représentative de la fonction f_2 de période $T = 2\pi$ définie par

$f_2(t) = t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$

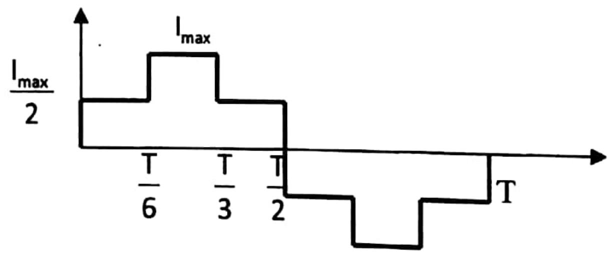
b)Calculer la valeur moyenne, l'énergie et la valeur efficace de f_2

2

1) Calculer de tête la valeur moyenne, l'énergie et la valeur efficace du signal f de période T :



2)Calculer la valeur moyenne, l'énergie et la valeur efficace du signal f de période T :



Harmoniques

Définition

Rappelons qu'une harmonique H est un signal de la forme :

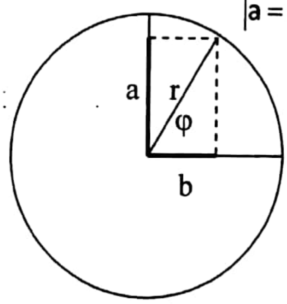
$$H(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \quad \omega \neq 0$$

H est alors de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Autre écriture des harmoniques

$H(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ On pose $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $b = r\cos(\varphi)$ et $a = r\sin(\varphi)$

$$\begin{cases} b = r\cos(\varphi) \\ a = r\sin(\varphi) \end{cases}$$



b étant l'abscisse et a l'ordonnée, φ est donc l'argument du nombre complexe $b + ia$ et par suite :

$$\varphi = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{a}{b}\right) \text{pour } b > 0 \\ \pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{a}{b}\right) \text{pour } b < 0 \end{cases}$$

1)a)Montrer que $H(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(\omega t + \varphi)$

b)Préciser la valeur maximale H_{max} de $H(t)$ et l'instant $t_0 > 0$ pour lequel ce maximum est atteint pour la première fois par H(t)

2) Écrire sous la forme $H_{max}\sin(\omega t+\varphi)$ les harmoniques ci-dessous :

$H_1(t)=3\cos(t)+4\sin(t)$ $\quad H_2(t)=6\cos(2t)+7\sin(2t)$ $\quad H_7(t)=10\cos(7t)+13\sin(7t)$

$H_3(t)=4\cos(3t)-5\sin(3t)$

Valeur moyenne et énergie des harmoniques

$$H(t)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega t+\varphi) \quad \omega\neq 0$$

1) Montrer que la valeur moyenne de H(t) est nulle

2) a)Calculer l'énergie de $H(t)$

b)Exprimer la valeur efficace de H(t) en fonction de H_{max}

3)Calculer l'énergie des harmoniques ci-dessous :

$H_2(t)=5\cos(2t)+4\sin(2t)$ $\quad H_3(t)=3\cos(3t)-9\sin(3t)$ $\quad H_4(t)=11\cos(4t)$

$H_5(t)=7\sin(5t)$ $\quad H_6(t)=\cos(6t)+13\sin(6t)$

Sommes d'harmoniques

La valeur moyenne d'une somme de fonctions est toujours égale à la somme des valeurs moyennes de ces fonctions. Ce qui est faux pour l'énergie.

En revanche pour le signal $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{p}a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)$ formé de la somme d'un terme constant a_0 et d'harmoniques $H_n(t)=\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)$, l'énergie de f(t) est alors égale à la somme des énergies de chacun de ses termes :

$$\underline{E(f(t))=E(a_0)+\sum_{n=1}^{p}E(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t))}$$

1)a) Calculer la valeur moyenne de $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{p}a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)$

b) Calculer l'énergie de $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{p}a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)$

2)Calculer la valeur moyenne et l'énergie des signaux ci-dessous :

a) $f(t)=10+(2\cos(t)+4\sin(t))+(3\cos(2t)+2\sin(2t))+(5\cos(3t)+2\sin(3t))+(7\cos(4t)+2\sin(4t))$

b) $2+3\cos(2t)+\sin(2t)+\cos(8t)+7\sin(8t)-5\cos(13t)+3\sin(20t)$

c) $\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{1}{3}\cos(2t)+\frac{1}{4}\cos(3t)+\frac{1}{5}\cos(4t)$

d) $\pi+\frac{1}{3}\sin(t)+\frac{1}{6}\sin(3t)+\frac{1}{9}\sin(5t)+\frac{1}{12}\cos(7t)$

3)Calculer sous forme de somme l'énergie des signaux ci-dessous :

a) $2\pi+\sum_{n=1}^{n=p}\frac{1}{n+1}\cos(nt)^{\circ}+\frac{1}{n^3}\sin(nt)$ b) $\sum_{n=1}^{n=p}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(nt)^{\circ}+\frac{1}{n}\sin(nt)$

c) $\pi+\sum_{n=1}^{n=p}\frac{1}{1-n}\cos(2nt)+\frac{1}{n^2}\sin(2nt)$ d) $5+\sum_{n=1}^{n=p}\frac{(-1)^n}{2n}\cos(nt)$ e) $\sum_{n=1}^{n=p}\frac{2}{(n+1)^2}\sin(nt)$

Coefficients de Fourier

Les coefficients $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_n}$ et $\mathbf{b_n}$ $(\mathbf{n \geq 1})$ de $\mathbf{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{p} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)}$ s'appellent **les coefficients de Fourier de f**. Ils peuvent se retrouver à l'aide d'intégrales portant sur f

$$\mathbf{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt} \quad \text{et pour } n\geq 1 : \mathbf{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt} \quad \mathbf{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt} \text{ avec } \mathbf{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Nous allons voir d'où viennent ces formules. Quelques ingrédients : pour k et n entiers > 0

- la valeur moyenne de $\cos(k\omega t)$ étant nulle $\int_0^T \cos(k\omega t)dt = 0$

-la valeur moyenne d'une fonction impaire étant nulle $\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(k\omega t)dt = 0$

-pour $n \neq k$: la linéarisation de $\cos(n\omega t)\cos(k\omega t)$ montre que $\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(k\omega t)dt = 0$

- pour $n = k$:le calcul de l'énergie de $\cos(k\omega t)$ montre que $\int_0^T \cos^2(k\omega t) = \frac{T}{2}$

1) Calcul de a_0

Rappeler quelle est la valeur moyenne de $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{p} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$. En déduire a_0

2)Calcul de a_k $\quad k \geq 1$

Commençons par faire sortir de la somme le terme qui nous intéresse $a_k \cos(k\omega t)$:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{p} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{p} b_n \sin(n\omega t) = a_0 + a_k \cos(k\omega t) + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{p} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{p} b_n \sin(n\omega t)$$

Multiplions les deux membres par $\cos(k\omega t)$:

$$f(t)\cos(k\omega t) = a_0 \cos(k\omega t) + a_k \cos^2(k\omega t) + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{p} a_n \cos(n\omega t)\cos(k\omega t) + \sum_{n=1}^{p} b_n \sin(n\omega t)\cos(k\omega t))$$

Intégrons les deux membres sur une période :

$$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t) = \int_0^T a_0 \cos(k\omega t) + a_k \cos^2(k\omega t) + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{p} a_n \cos(n\omega t)\cos(k\omega t) + \sum_{n=1}^{p} b_n \sin(n\omega t)\cos(k\omega t)dt$$

Avec ça vous devriez réussir à montrer que $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt$

Bilan à connaître par cœur :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{p} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \text{ est de période } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ses coefficients de Fourier sont :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \quad \text{et pour } n \geq 1 : \ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$$

Sa valeur moyenne est :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = a_0$$

Son énergie est :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = a_0^2 + \sum_1^p \frac{{a_n}^2 + {b_n}^2}{2}$$

Réciproquement un signal f de classe C^1 et de période T se décompose en une somme d'une infinité d'harmoniques (on parle alors de série) :

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ **appelée série ou développement de Fourier de f**

avec $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ **et pour $n \geq 1$:** $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$

Le fait que $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ **reconstitue $f(t)$ s'appelle le théorème de Dirichlet**

L'énergie de f : $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt$ **vue sous la forme de son développement en série d'harmoniques :**

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ **est alors égale à** $a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{a_n}^2 + {b_n}^2}{2}$**, cette reconstitution de l'énergie de f à partir de l'énergie de ses harmoniques s'appelle le théorème de Parseval.**

Lorsque f est seulement C^1 par morceaux et présente des sauts $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

reconstitue non pas $f(t)$ **mais sa régularisée** $f^*(t)$