

繰り返し期待値の法則

今村隼人

繰り返し期待値の法則(law of iterated expectation)

以下の等式を繰り返し期待値の法則と呼ぶ

$$E[Y] = E[E[Y|X]]$$

(Y の期待値) = (全ての X に対する Y の期待値の平均)

ex)

X = 性別 Y = 身長

$$\begin{aligned} E[E[Y|X]] &= E[P(X = \text{男})E[Y|X = \text{男}] + P(X = \text{女})E[Y|X = \text{女}]] \\ &= E[Y] \\ &= (\text{標本全体の平均身長}) \end{aligned}$$

繰り返し期待値の法則の証明(連続確率変数)

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int \int y f(x, y) dy dx \\ &= \int \left(\int y f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int \left(\int y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy \right) f_X(x) dx \\ &= \int E[Y|X] f_X(x) dx \\ &= E[E[Y|X]] \left(\because E[Y|X] = \int y \frac{f(x, y)}{f_{X(x)}} dx \right) \end{aligned}$$

繰り返し期待値の法則の証明(離散確率変数)

$$\begin{aligned} E[E[Y|X]] &= \sum_x E[Y \mid X = x] P(X = x) \\ &= \sum_x \left(\sum_y y P(Y = y \mid X = x) \right) P(X = x) \\ &= \sum_x \sum_y y \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} P(X = x) \left(\because P(Y|X) = \frac{P(X,Y)}{P(X)} \right) \\ &= \sum_y y \sum_x P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_y y P(Y = y) \\ &= E[Y] \end{aligned}$$

問題例

火災保険会社 A がある家屋の掛け金について考えている。

災害の確率から損害額の期待値を求める。

	10 年で災害が起こる確率	損害額の期待値(万)
火災	0.05	5000
地震	0.20	1000
落雷	0.10	300

問題例 (ii)

X を災害が起こる確率, Y を損害額とする

$$\begin{aligned}E[Y] &= E[E[Y|X]] \\&= 0.05 \times 5000 + 0.20 \times 1000 + 0.10 \times 100 \\&= 480\end{aligned}$$

10年間での損害額の期待値は480万円とわかった.

このように個々の事象期待値はわかるが全体の期待値がわからない場合に繰り返し期待値の法則は有効である.