Jelek és rendszerek 1. házi

Kriván Bálint CBVOEN
Gyakorlat vezető: Farkasvölgyi Andrea

2011. március 11.

1.1 (a)

Akkor gerjesztés-válasz stabilis az FI illetve a DI rendszer, ha $h(t)$ ill. $h[k]$ abszolút integrálható ill. összegezhető. Vagyis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big| h(t) \Big| dt < \infty \quad \text{és} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| h[k] \Big| < \infty$$

Nézzük először az FI-t:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big| h(t) \Big| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Big| 4\delta(t) + \varepsilon(t)\{6e^{-0,2t} + (-4)\cdot e^{-0,3t}\} \Big| dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \Big| 4\delta(t) \Big| dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \varepsilon(t)\{6e^{-0,2t} + (-4)\cdot e^{-0,3t}\} \Big| dt \leqslant$$
$$\leqslant 4 + \int_{0}^{\infty} \Big| 6e^{-0,2t} + (-4)\cdot e^{-0,3t} \Big| dt \leqslant 4 + \int_{0}^{\infty} \Big| 6e^{-0,2t} \Big| + \int_{0}^{\infty} \Big| 4e^{-0,3t} \Big| dt =$$
$$= 4 + \left[\frac{6e^{-0,2t}}{-0,2} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{4e^{-0,3t}}{-0,3} \right]_0^{\infty} = 4 + \left[0 - \frac{6}{-0,2} \right] + \left[0 - \frac{4}{-0,3} \right] < \infty$$

Tehát az FI rendszer GV stabilis. Nézzük a DI rendszert:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| h[k] \Big| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| 4\varepsilon[k](0,5)^k \cos(0,3k + (-0,5)) \Big|$$

A cos-os tagot becsülhetjük felülről 1-gyel:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| 4\varepsilon[k](0,5)^k \cos(0,3k + (-0,5)) \Big| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| 4\varepsilon[k](0,5)^k \Big| = \sum_{k=0}^{\infty} 4(0,5)^k = 4 \cdot \frac{1}{1-0,5} = 8 < \infty$$

Tehát a DI rendszer is GV stabilis.

1.1 (b)

FI-nél elegendó valamelyik e hatvány kitevőjét pozitívra cserélni, így nem lesz abszolút integrálható. DI-nél pedig a $0,5^k$-ból lecserélni a $0,5$-ös alapot 1-nél nagyobb számra, így nem lesz abszolút összegezhető.

1.1 (c)

Általánosan:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[k-i]h[i]$$

Mivel belépő gerjesztésről és belépő impulzusválaszról van szó, ezért:

$$y[k] = \varepsilon[k]\sum_{i=0}^{k} u[k-i]h[i] = \varepsilon[k]\sum_{i=0}^{k}\Big(4(0,5)^i \cdot \cos(0,3i + (-0,5)) \cdot (7 - 8(0,5)^{k-i})\Big) =$$

$$= \varepsilon[k]\sum_{i=0}^{k}\Big(\Big(28(0,5)^i - 32(0,5)^k\Big) \cdot \cos(0,3i - 0,5)\Big) =$$

Nézzük meg $k = 0$-ra:

$$y[0] = \Big\{\Big(28 - 32\Big) \cdot \cos(-0,5)\Big\} = \{-4\cos(-0,5)\} \approx -3,51$$

$k = 1$-re:

$$y[1] = \Big\{\Big(28 - 32(0,5)\Big) \cdot \cos(-0,5) + \Big(28(0,5) - 32(0,5)\Big) \cdot \cos(0,3 - 0,5)\Big\} =$$

$$= \{12 \cdot \cos(-0,5) - 2 \cdot \cos(-0,2)\} \approx 8,57$$

$k = 2$-re:

$$y[2] = \Big\{\Big(28 - 32(0,5)^2\Big) \cdot \cos(-0,5) + \Big(28(0,5) - 32(0,5)^2\Big) \cdot \cos(0,3 - 0,5) +$$

$$+ \Big(28(0,5)^2 - 32(0,5)^2\Big) \cdot \cos(0,6 - 0,5)\Big\} =$$

$$= \{20 \cdot \cos(-0,5) + 6 \cdot \cos(-0,2) - 1 \cdot \cos(0,1)\} \approx 22,437$$

1.1 (d)

Konvolúcióval számolhatjuk, kezdjük az FI-vel:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = 4\int_{-\infty}^{\infty} 4\delta(\tau) + \varepsilon(\tau)\{6e^{-0,2\tau} + (-4) \cdot e^{-0,3\tau}\}d\tau =$$

$$= 16 + 4\int_{0}^{\infty} 6e^{-0,2\tau} + (-4) \cdot e^{-0,3\tau}d\tau = 16 + 24\left[\frac{e^{-0,2\tau}}{-0,2}\right]_0^\infty - 16\left[\frac{e^{-0,3\tau}}{-0,3}\right]_0^\infty =$$

$$= 16 + 24\left(0 - \frac{1}{-0,2}\right) - 16\left(0 - \frac{1}{-0,3}\right) = 136 - 16 \cdot \frac{3}{10} = 82,6667$$

DI rendszer esetében:

$$y[k] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} h[t]u[k-t] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} 4\varepsilon[t](0,5)^t\cos(0,3t + (-0,5))5(4)^{k-t} =$$

$$= 20 \cdot 4^k \cdot \sum_{t=0}^{\infty}(0,5)^t\cos(0,3t - 0,5)\left(\frac{1}{4}\right)^t = 20 \cdot 4^k \cdot \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^t\cos(0,3t - 0,5) =$$

$$20 \cdot 4^k \cdot \sum_{t=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^t e^{(0,3t-0,5)i}\right) = 20 \cdot 4^k \cdot \mathrm{Re}\left(e^{-0,5i}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8} \cdot e^{0,3i}\right)^t\right) =$$

$$= 20 \cdot 4^k \cdot \mathrm{Re}\left(e^{-0,5i}\frac{1}{1 - \frac{1}{8} \cdot e^{0,3i}}\right) = 20 \cdot 4^k \cdot \mathrm{Re}\,(1.01764 - 0.501752i) = 20,3528 \cdot 4^k$$

1.2 (a)

Kezdjük a DI rendszerrel, a feladat alapján:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -0,7 \\ 0,8 & 0,8 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} -0,4 & 0,5 \end{bmatrix} \quad D = 1,3$$

Kezdjük az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeinek kiszámolásával:

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}| = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -0,7 \\ 0,8 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)(0,8-\lambda) + 0,7 \cdot 0,8 = \lambda^2 + 0,2\lambda - 0,24$$

Ebből $\lambda_1 = 0,4$ és $\lambda_2 = -0,6$. Ezután kiszámoljuk a Lagrange-mátrixokat:

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_2\underline{\underline{E}}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{0,4+0,6} \begin{bmatrix} -1+0,6 & -0,7 \\ 0,8 & 0,8+0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 & -0,7 \\ 0,8 & 1,4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}}_2 = \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_1\underline{\underline{E}}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{-0,6-0,4} \begin{bmatrix} -1-0,4 & -0,7 \\ 0,8 & 0,8-0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 & 0,7 \\ -0,8 & -0,4 \end{bmatrix}$$

Ezek alapján egy adott k-ra meg tudjuk mondani $\underline{C}^T\underline{\underline{A}}^k\underline{B}$ értékét, hiszen:

$$\underline{C}^T\underline{\underline{A}}^k\underline{B} = \underline{C}^T(\lambda_1^k\underline{\underline{L}}_1 + \lambda_2^k\underline{\underline{L}}_2)\underline{B} = \underline{C}^T\lambda_1^k\underline{\underline{L}}_1 + \underline{C}^T\lambda_2^k\underline{\underline{L}}_2\underline{B} =$$

$$= \lambda_1^k \begin{bmatrix} -0,4 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,4 & -0,7 \\ 0,8 & 1,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} + \lambda_2^k \begin{bmatrix} -0,4 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,4 & 0,7 \\ -0,8 & -0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda_1^k \begin{bmatrix} 0,56 & 0,98 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} + \lambda_2^k \begin{bmatrix} -0,96 & -0,48 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} =$$

$$= 0,98\lambda_1^k - 0,96\lambda_2^k$$

Ebből pedig már behelyettesíthetünk a képletbe, ami a következő alakot ölti:

$$h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\underline{C}^T\underline{\underline{A}}^{k-1}\underline{B} =$$

$$= 1,3\delta[k] + \varepsilon[k-1](0,98\lambda_1^{k-1} - 0,96\lambda_2^{k-1}) =$$

$$= \boxed{1,3\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(0,98 \cdot 0,4^{k-1} - 0,96 \cdot (-0,6)^{k-1}\right)}$$

Ábrázoltuk az 1. ábrán.

Most tekintsük az FI rendszert, ebben az alábbiak a mátrixok/vektorok:

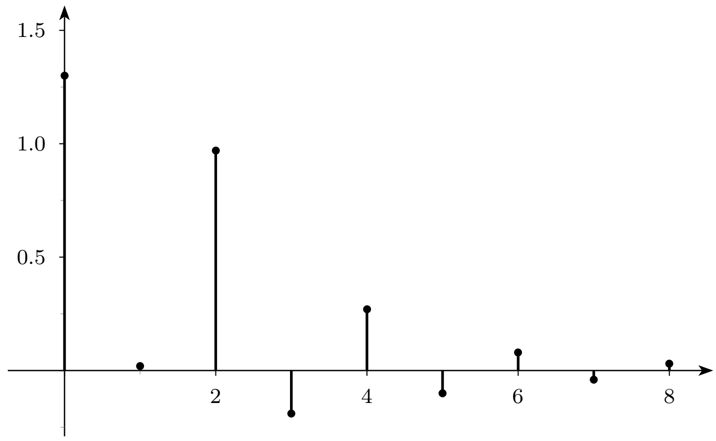
$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1,2 & -0,5 \\ 2 & -1,2 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \end{bmatrix} \quad D = 0,45$$

Meghatározzuk $\underline{\underline{A}}$ sajátértékeit: Kezdjük az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeinek kiszámolásával:

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}| = \det \begin{bmatrix} -1,2-\lambda & -0,5 \\ 2 & -1,2-\lambda \end{bmatrix} = (-1,2-\lambda)^2 + 0,5 \cdot 2 = \lambda^2 + 2,4\lambda + 2,44$$

Ebből $\lambda_{1,2} = -1,2 \pm i$. Ezután kiszámoljuk a Lagrange-mátrixokat:

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_2\underline{\underline{E}}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} -1,2-(-1,2-i) & -0,5 \\ 2 & -1,2-(-1,2-i) \end{bmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & -0,5 \\ 2 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25i \\ -i & 0,5 \end{bmatrix}$$



1. ábra. $h[k]$ ábrázolva $k = 0$-tól $k = 8$-ig

$$\underline{\underline{L}}_2 = \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} -1,2 - (-1,2+i) & -0,5 \\ 2 & -1,2 - (-1,2+i) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} -i & -0,5 \\ 2 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25i \\ i & 0,5 \end{bmatrix}$$

Ezek alapján felírható $\underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t} \underline{B}$:

$$\underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t} \underline{B} = \underline{C}^T \left(e^{\lambda_1 t} \underline{\underline{L_1}} + e^{\lambda_2 t} \underline{\underline{L_2}} \right) \underline{B}$$

Behelyettesítve a számokat:

$$\underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t} \underline{B} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \end{bmatrix} \cdot \left(e^{(-1,2+i)t} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25i \\ -i & 0,5 \end{bmatrix} + e^{(-1,2-i)t} \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25i \\ i & 0,5 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{bmatrix}$$

Ezt kiszámolva a következőt kapjuk:

$$\underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t} \underline{B} = (0,09 + 0,98i) e^{(-1.2+i)t} + (0,09 - 0,98i) e^{(-1,2-i)t}$$

Impulzusválasz kiszámolásához, nincs más dolgunk, mint a lenti képletbe behelyettesíteni:

$$h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t) \underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t} \underline{B} = 0,45\delta(t) + \varepsilon(t) \left((0,09 + 0,98i) e^{(-1,2+i)t} + (0,09 - 0,98i) e^{(-1,2-i)t} \right)$$

$$h(t) = 0,45\delta(t) + \varepsilon(t) e^{-1,2t} \left((0,09 + 0,98i) e^{it} + (0,09 - 0,98i) e^{-it} \right) =$$

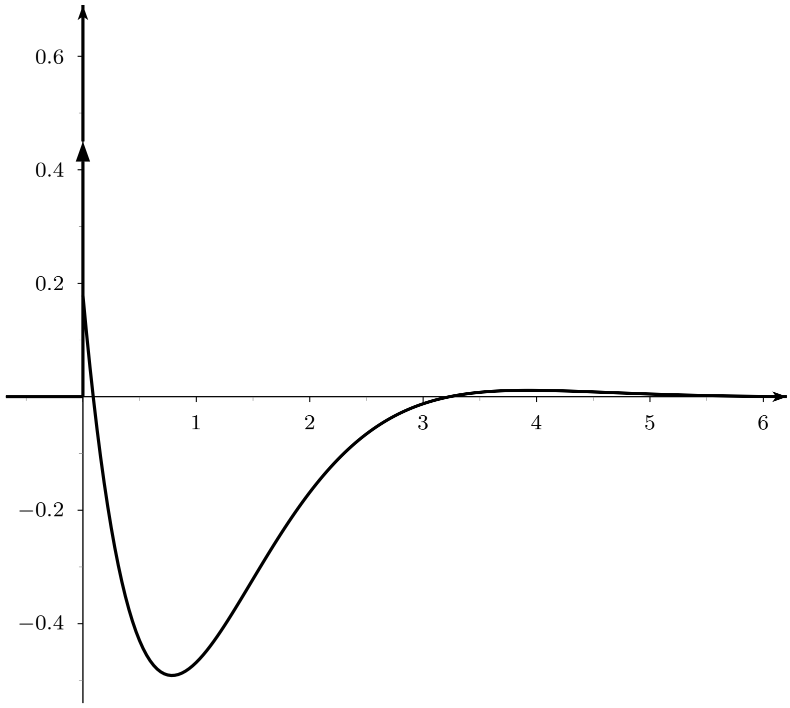
$$= 0,45\delta(t) + \varepsilon(t) e^{-1,2t} \left(0,9841 e^{1,479i} e^{it} + 0,9841 e^{-1,479i} e^{-it} \right)$$

$$= 0,45\delta(t) + \varepsilon(t) e^{-1,2t} \left(0,9841 e^{(1,479+t)i} + 0,9841 e^{-(1,479+t)i} \right) =$$

Látható, hogy a két tagban az e kitevője egymás -1-szerese, így ha átírjuk az $e^{\phi i}$ alakot $cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi)$ alakba, akkor a sin-os tag kiesik, így:

$$= 0,45\delta(t) + \varepsilon(t) e^{-1,2t} \left(2 \cdot 0,9841 \cos(1,479 + t) \right) =$$

$$= \boxed{0,45\delta(t) + \varepsilon(t) \cdot 1,9682 \cdot e^{-1,2t} \cos(1,479 + t)}$$



2. ábra. $h(t)$ ábrázolva

Ábrázoltuk a 2. ábrán.

1.2 (b)

Feladat szövegéből:

$$\underline{x}[k+1] = \begin{bmatrix} -1 & -0,7 \\ 0,8 & 0,8 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} -0,4 & 0,5 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + 1,3u[k]$$

Impulzusválaszt keresünk, így $u[0] = 1$, többi időpillantban pedig 0, azaz $u[k] = 0$, ha $k > 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Tudjuk, hogy $\underline{x}[0] = \underline{0}$, így:

$$h[0] = 1,3 \qquad \underline{x}[1] = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

Innen:

$$h[1] = \begin{bmatrix} -0,4 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 0,02 \qquad \underline{x}[2] = \begin{bmatrix} -1 & -0,7 \\ 0,8 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,12 \\ 1,04 \end{bmatrix}$$

És végül:

$$h[2] = \begin{bmatrix} -0,4 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1,12 \\ 1,04 \end{bmatrix} = 0,968$$

Behelyettesítéssel ellenőrizzük:

$$h[k] = 1,3\delta[k] + \varepsilon[k-1] \left(0,98 \cdot 0,4^{k-1} - 0,96 \cdot (-0,6)^{k-1}\right)$$

$$h[0] = 1,3$$
$$h[1] = \Big(0,98 \cdot 0,4^0 - 0,96 \cdot (-0,6)^0\Big) = 0,02$$
$$h[2] = \Big(0,98 \cdot 0,4^1 - 0,96 \cdot (-0,6)^1\Big) = 0,968$$

Ugyanazon eredményeket kaptuk, ez jót jelent.

1.2 (c)

1.1 (d)-hez hasonlóan, itt is konvolúcióval számolunk, kezdjük az FI-vel:

$$u(t) = 9\{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1,6)\}$$
$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)u(x-t)dt$$
$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(0,45\delta(t) + \varepsilon(t) \cdot 1,9682 \cdot e^{-1,2t}\cos(1,479+t)\Big)\, 9\{\varepsilon(x-t) - \varepsilon(x-t-1,6)\}dt =$$
$$= 0,45 \cdot 9\{\varepsilon(x) - \varepsilon(x-1,6)\} - \int_{0}^{\infty} \Big(1,9682 \cdot e^{-1,2t}\cos(1,479+t)\Big)\, 9\{\varepsilon(x-t) - \varepsilon(x-t-1,6)\}dt =$$
$$= 4,05\{\varepsilon(x) - \varepsilon(x-1,6)\} - \int_{0}^{\infty} \Big(1,9682 \cdot e^{-1,2t}\cos(1,479+t)\Big)\, 9\varepsilon(x-t)dt +$$
$$+ \int_{0}^{\infty} \Big(1,9682 \cdot e^{-1,2t}\cos(1,479+t)\Big)\, 9\varepsilon(x-t-1,6)dt =$$

Az első integrálnál az $\varepsilon(x-t)$-s tényező maitt $x - t > 0$, ezért az első integrál felső határa x lesz, a másodiknál hasonló okok miatt $x - 1,6$, tehát:

$$= 4,05\{\varepsilon(x) - \varepsilon(x-1,6)\} - \varepsilon(x)\int_{0}^{x} 17,7138 \cdot e^{-1,2t}\cos(1,479+t)dt +$$
$$+\varepsilon(x-1,6)\int_{0}^{x-1,6} 17,7138 \cdot e^{-1,2t}\cos(1,479+t)dt$$

Az integrálok elé, azért került egy $\varepsilon(x)$ és $\varepsilon(x-1,6)$, mert ha a határok kisebbek, mint 0, akkor az integrál 0, ezt ezzel könnyen jelölhetjük.

$$= 4,05\{\varepsilon(x) - \varepsilon(x-1,6)\} - \varepsilon(x)\Big[e^{-1,2t}\Big(9,34\sin(t) + 6,43\cos(t)\Big)\Big]_0^x +$$
$$+\varepsilon(x-1,6)\Big[e^{-1,2t}\Big(9,34\sin(t) + 6,43\cos(t)\Big)\Big]_0^{x-1,6} =$$
$$= \boxed{\varepsilon(x)\Big(9,34e^{-1,2x}\sin(x) + 6,43e^{-1,2x}\cos(x) - 2,38\Big) +}$$
$$+\boxed{\varepsilon(x-1,6)\Big(-64,96e^{-1,2x}\cos(x) + 41,98e^{-1,2x}\sin(x) - 2,38\Big)}$$

Nézzük a DI rendszert:

$$u[k] = \varepsilon[k]\{7 + (-8) \cdot (0,5)^k\}$$
$$y[k] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} h[t]u[k-t] =$$
$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \Big\{1,3\delta[t] + \varepsilon[t-1]\Big(0,98 \cdot 0,4^{t-1} - 0,96 \cdot (-0,6)^{t-1}\Big)\Big\}\Big(\varepsilon[k-t]\{7 + (-8) \cdot (0,5)^{k-t}\}\Big) =$$

$$= 1,3\left(\varepsilon[k]\{7+(-8)\cdot(0,5)^k\}\right)+$$

$$+\sum_{t=-\infty}^{\infty}\varepsilon[t-1]\left(0,98\cdot 0,4^{t-1}-0,96\cdot(-0,6)^{t-1}\right)\left(\varepsilon[k-t]\{7+(-8)\cdot(0,5)^{k-t}\}\right)=$$

A rövidség kedvéért, nem írom le a $\varepsilon[k-1]$-et a szumma elé a továbbiakban, de majd a végén ne felejtsük el, hiszen $k<1$ esetén nincs értelme a szummának, így annak értéke 0.

$$1,3\left(\varepsilon[k]\{7+(-8)\cdot(0,5)^k\}\right)+$$

$$+\sum_{t=1}^{k}\left(0,98\cdot 0,4^{t-1}-0,96\cdot(-0,6)^{t-1}\right)\left(7+(-8)\cdot(0,5)^{k-t}\right)=$$

$$= 1,3\left(\varepsilon[k]\{7+(-8)\cdot(0,5)^k\}\right)+$$

$$+\sum_{t=1}^{k}\left(6,86\cdot 0,4^{t-1}-6,72\cdot(-0,6)^{t-1}\right)+\sum_{t=1}^{k}\left(-7,84\cdot 0,4^{t-1}+7,68\cdot(-0,6)^{t-1}\right)(0,5)^{k-t}=$$

$$= 1,3\left(\varepsilon[k]\{7+(-8)\cdot(0,5)^k\}\right)+\sum_{t=1}^{k}\left(6,86\cdot 0,4^{t-1}\right)-\sum_{t=1}^{k}\left(6,72\cdot(-0,6)^{t-1}\right)+$$

$$+(0,5)^k\sum_{t=1}^{k}\left(-7,84\cdot 0,4^{-1}\cdot 0,4^t\cdot(0,5)^{-t}+7,68\cdot(-0,6)^{-1}\cdot(-0,6)^t\cdot(0,5)^{-t}\right)$$

$$= 1,3\left(\varepsilon[k]\{7+(-8)\cdot(0,5)^k\}\right)+\frac{6,86\cdot(0,4^k-1)}{0,4-1}-\frac{6,72\cdot((-0,6)^k-1)}{-0,6-1}+$$

$$+(0,5)^k\sum_{t=1}^{k}\left(-19,6\cdot 0,8^t\right)+(0,5)^k\sum_{t=1}^{k}\left(-12,8\cdot(-1,2)^t\right)=$$

$$= 1,3\left(\varepsilon[k]\{7+(-8)\cdot(0,5)^k\}\right)+\frac{6,86\cdot(0,4^k-1)}{0,4-1}-\frac{6,72\cdot((-0,6)^k-1)}{-0,6-1}+$$

$$+(0,5)^k\frac{-19,6\cdot 0,8\cdot(0,8^k-1)}{0,8-1}+(0,5)^k\frac{-12,8\cdot(-1,2)\cdot((-1,2)^k-1)}{-1,2-1}=$$

$$= 1,3\left(\varepsilon[k]\{7+(-8)\cdot(0,5)^k\}\right)-11,43\cdot(0,4^k-1)+4,2\cdot((-0,6)^k-1)+$$

$$+(0,5)^k\cdot 78,4\cdot(0,8^k-1)+(0,5)^k\cdot(-6,98)\cdot((-1,2)^k-1)=$$

$$= 1,3\left(\varepsilon[k]\{7+(-8)\cdot(0,5)^k\}\right)+66,97\cdot 0,4^k-2,78\cdot(-0,6)^k-71,42(0,5)^k+7,23$$

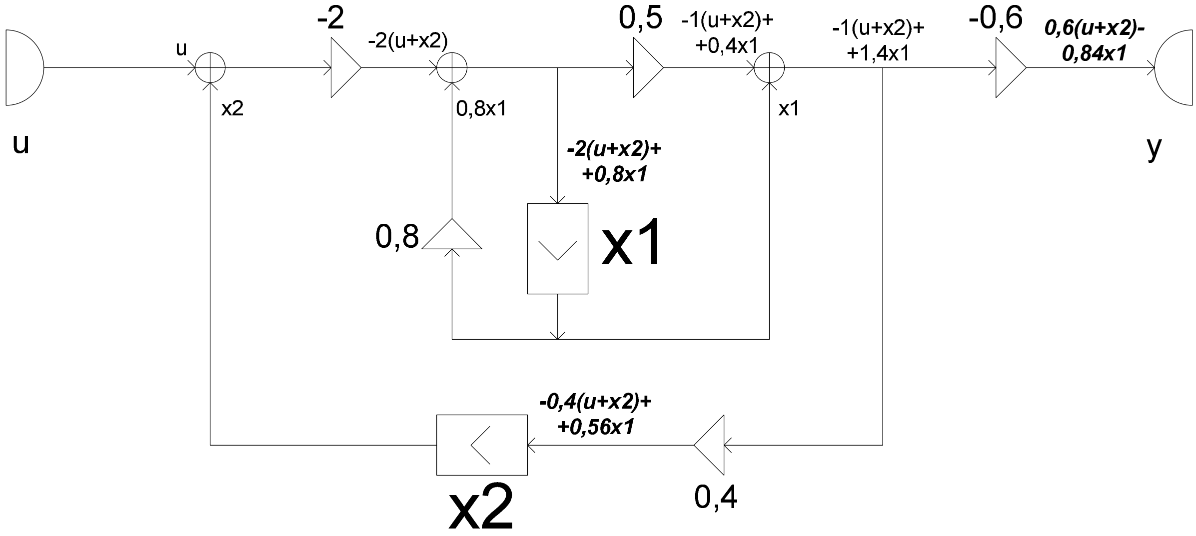
Mielőtt elfelejtenénk rakjuk vissza a $\varepsilon[k-1]$-et:

$$= 1,3\left(\varepsilon[k]\{7+(-8)\cdot(0,5)^k\}\right)+\varepsilon[k-1]\left(66,97\cdot 0,4^k-2,78\cdot(-0,6)^k-71,42(0,5)^k+7,23\right)$$

Ezt már nagyon nem lehet tovább pofozgatni:

$$y[k]=\boxed{\varepsilon[k]\left(9,1-10,4\cdot(0,5)^k\right)+\varepsilon[k-1]\left(66,97\cdot 0,4^k-2,78\cdot(-0,6)^k-71,42(0,5)^k+7,23\right)}$$

1.3 (a)



3. ábra. Hálózat állapotváltozós leírásának meghatározása

Miután elneveztük az integrátorok/késleltetők kimenetét, kiszámítjuk a kimeneteket/bementeket, ezek alapján könnyedén felírhatjuk a normál alakokat (lásd 3. ábra). DI rendszernek:

$$\underline{x}[k+1] = \begin{bmatrix} 0,8 & -2 \\ 0,56 & -0,4 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + \begin{bmatrix} -2 \\ -0,4 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 0,84 & 0,6 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + 0,6u[k]$$

FI rendszernek:

$$\underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0,8 & -2 \\ 0,56 & -0,4 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ -0,4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0,84 & 0,6 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + 0,6u(t)$$

1.3 (b)
Aszimptotikus stabilitáshoz, meghatározzuk az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit:

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}| = \det \begin{bmatrix} 0,8-\lambda & -2 \\ 0,56 & -0,4-\lambda \end{bmatrix} = (0,8-\lambda)(-0,4-\lambda) + 1,12 = \lambda^2 - 0,4\lambda + 0,8$$

Ebből $\lambda_{1,2} = 0,2 \pm 0,872i$.

Mivel $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{0,2^2 + 0,872^2} = 0,8946 < 1$, tehát a sajátértékek az egységsugarú körön belül vannak, ezért a DI-rendszer aszimptotikusan stabil. Viszont mivel nem a bal félsíkon helyezkednek el ($\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$), ezért az FI-rendszer nem aszimptotikusan stabil.