**B. 4027.**

Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.
redhat24@freemail.hu

**Feladat:**
Oldjuk meg az

$$\frac{x^2+1}{x^2+11}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$$

egyenletet.

---

**Megoldás:**

$$\frac{x^2+1}{x^2+11}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$$

Értelmezési tartomány vizsgálatnál kiderül, hogy $x \neq 6$, illetve $x \neq \pm i\sqrt{11}$. Emeljünk négyzetre:

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+11)^2}=\frac{1}{36}\cdot\frac{11x-6}{6-x}$$

$$\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+22x^2+121}=\frac{1}{36}\cdot\frac{11x-6}{6-x}$$

Felszorozhatunk $36(6-x)(x^4+22x^2+121)$-el, hiszen a szorzat egyik tényezője sem 0:

$$36(6-x)(x^4+2x^2+1)=(11x-6)(x^4+22x^2+121)$$

Bontsuk ki fenti kifejezéseket:

$$(216-36x)(x^4+2x^2+1)=-36x^5+216x^4-72x^3+432x^2-36x+216$$

$$(11x-6)(x^4+22x^2+121)=11x^5-6x^4+242x^3-132x^2+1331x-726$$

Tehát:

$$-36x^5+216x^4-72x^3+432x^2-36x+216=11x^5-6x^4+242x^3-132x^2+1331x-726$$

Egy oldalra rendezve:

$$-47x^5+222x^4-314x^3+564x^2-1367x+942=0$$

Ez az egyenlet csak értelmezési tartományában tér el az eredeti egyenlettől, tehát ha ezt megoldjuk, akkor megkapjuk az eredeti egyenlet gyökeit, kivéve a hamis gyököket (hiszen $x \neq 6$, illetve $x \neq \pm i\sqrt{11}$).
Mivel ötödfokú egyenletre nincs megoldóképlet, ezért a következő eljárást alkalmazzuk: megvizsgálunk 1-2 számot, hogy gyöke-e a fenti egyenletnek, ha pedig igen, akkor kiemeljük a talált gyökhöz tartozó gyöktényezőt a Horner-elrendezés segítségével.

Elsőnek megvizsgáljuk az $x=\pm 1$-et, hogy valamelyik kielégíti-e a fenti egyenletet. $x=1$ valóban megoldása a fenti egyenletnek, hiszen $-47+222-314+564-1367+942=0$, viszont $x=-1$-re nem teljesül a fenti egyenlőség, tehát ő nem gyöke az egyenletnek.

Hasonlóan megvizsgálunk még 1-2 kicsi egész számot, és szerencsére nem kell sokáig próbálkoznunk: $x = 2$, illetve $x = 3$ is gyöke a fenti egyenletnek. Emeljük ki őket gyöktényezős alakban az egyenletből:

$$-47x^5 + 222x^4 - 314x^3 + 564x^2 - 1367x + 942 = 0$$

Horner-elrendezés:

| | -47 | 222 | -314 | 564 | -1367 | 942 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -47 | 175 | -139 | 425 | -942 | 0 |
| 2 | -47 | 81 | 23 | 471 | 0 | |
| 3 | -47 | -60 | -157 | 0 | | |

Tehát kiemelve az $(x-1)(x-2)(x-3)$-at a fenti egyenletből:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(-47x^2 - 60x - 157) = 0$$

Ötödfokú egyenletnél természetes, hogy csak 3 gyököt kerestünk, hiszen a gyöktényezők kiemelése után másodfokú kifejezést kapunk, amit viszont már megoldhatunk a megoldóképlettel:

$$-47x^2 - 60x - 157 = 0$$

$$x = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot -47 \cdot -157}}{2 \cdot -47} = \frac{60 \pm \sqrt{-25916}}{-2 \cdot 47} = -\frac{30 \pm \sqrt{-6479}}{47}$$

Tehát a

$$-47x^5 + 222x^4 - 314x^3 + 564x^2 - 1367x + 942 = 0$$

egyenletnek a gyökei:

$$x = \left\{1; 2; 3; \frac{-30 - i\sqrt{6479}}{47}; \frac{-30 + i\sqrt{6479}}{47}\right\}$$

Már csak meg kell vizsgálnunk, hogy ezek között van-e hamis gyök. $x \neq 6$, illetve $x \neq \pm i\sqrt{11}$, de ez egyik gyököt sem zárja ki, tehát a fent kapott 5 gyök gyöke a feladatban szereplő egyenletnek is. Több gyöke pedig nem is lehet a feladatban szereplő egyenletnek, hiszen a megoldás során az értelmezési tartomány csak tágítottuk, soha nem szűkült.

**Tehát a**

$$\mathbf{\frac{x^2 + 1}{x^2 + 11} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11x - 6}{6 - x}}}$$

**egyenletnek a megoldásai:**

$$\mathbf{x = \left\{1; 2; 3; \frac{-30 - i\sqrt{6479}}{47}; \frac{-30 + i\sqrt{6479}}{47}\right\}}$$

(Behelyettesítéssel ellenőrizzük és valóban megoldás mindegyik.)