Hubert-matek jegyzetek

Kriván Bálint

2007. március 4. - 2007. április 4.

Tartalomjegyzék

I. rész

Koordinátageometria

1. fejezet

Kezdetek

- A helyvektorokat és a koordinátákat 1-1 értelműen rendeljük egymáshoz.
- A helyvektorokat és a pontokat 1-1 értelműen rendeljük egymáshoz.
- $\Rightarrow$ **A pontokat és a koordinátákat 1-1 értelműen rendeljük egymáshoz.**

A koordinátageometria segítségével a geometriai problémákat algebrai módon tudjuk majd megoldani.

1. Definíció. *Vonal és sík egyenlete:*
Olyan 2 vagy 3 ismeretlenes egyenlet, egyenletrendszer amelynek megoldásai, mint koordinátákhoz tartozó pontok, rajta vannak a vonalon ill. a síkon.

Az egyenlet(rendszer) megoldásai és az alakzat pontjai összefüggnek $\rightarrow$ a megoldások rendezett számhármasokat alkotnak.

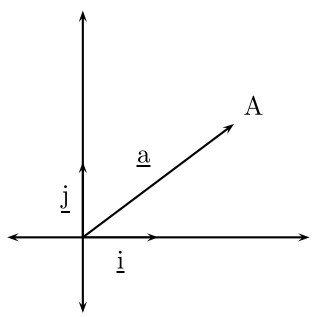
Ne felejtsük el: A háttérben megmaradnak a vektorok!

Először a síkgeometriával kezdünk.

2. fejezet

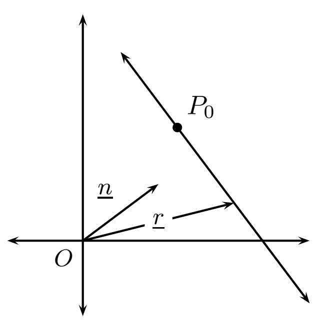
Síkgeometria

2.1. Egyenes egyenlete



$\underline{\mathrm{a}}(a_1;a_2)$
$\mathrm{A}(a_1;a_2)$

Látható, hogy milyen szoros a kapcsolat a pont és a hozzátartozó helyvektor között.



Egyenes egyenlete:
→ menjen át a P_0 ponton
→ $\underline{n}$-re legyen merőleges

$\underline{\mathrm{r}}$ → futó pontokhoz tartozó helyvektor

$P_0(p_1;p_2)$ $\quad \underline{r}(x;y)$ $\quad \underline{n}(n_1;n_2)$

Tudjuk, hogy $\underline{n}$ és a felírandó egyenes merőleges egymásra, így:

$$(\underline{r} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot \underline{n} = 0$$

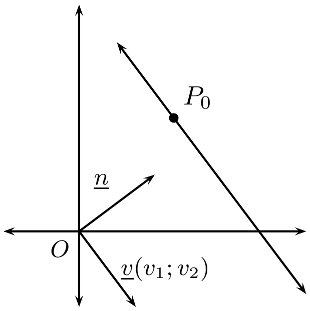
$$(x - p_1; y - p_2) \cdot \underline{n} = 0$$

$$n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} n_1x + n_2y = n_1p_1 + n_2p_2 \\ \textbf{Ez az egyenes normálvektoros alakja.} \end{array}}$$

2. Definíció. *Az egyenes normálvektora ($\underline{n}$) bármely az egyenesre merőleges nem nullvektor.*

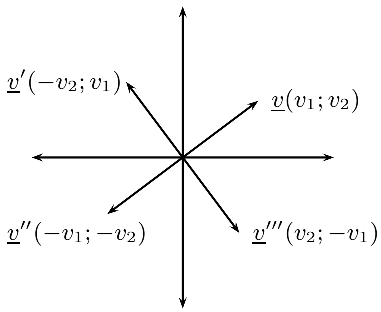
Most ne az egyenes *normálvektora*, hanem az *irányvektora* legyen adott:



Hogy megtudjuk határozni az egyenes egyenletét szükségünk van az egyik normálvektorra.

$\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$

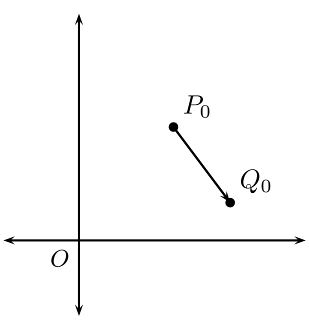
Egy vektor 90°-os elforgatottjait a következő ábra mutatja:



Észrevehetjük, hogy ha +90°-al forgatunk, akkor a koordinátákat felcseréljük, és az első koordinátának vesszük a -1-szeresét.

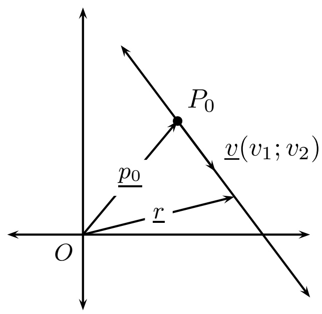
A mi esetünkben csak az a lényeg, hogy a $\underline{v}$ vektor egyik 90°-os elforgatottját találjuk meg, teljesen mindegy, hogy melyiket sőt nem is muszáj, hogy abszolútértékük megegyezzen, hiszen a definícióból tudjuk, hogy a *normálvektor* bármilyen olyan vektor ami nem nullvektor, és merőleges a meghatározandó egyenesre. Tehát akkor mondjuk legyen a normálvektorunk $\underline{n} = (-v_2; v_1)$. Innen már az előbb tanultak alapján felírhatjuk az egyenes normálvektoros egyenletét, P_0 ismeretében.

Ha az egyenes két pontja adott, akkor könnyedén meghatározhatjuk az egyenes irányvektorát, majd abból az egyik normálvektorát:



$\underline{v} = \overrightarrow{OQ_0} - \overrightarrow{OP_0}$
$\underline{v} = \underline{q_0} - \underline{p_0}$

Csak az irányvektorból is felírhatjuk egy egyenesnek a képletét:



$$\underline{r} = \underline{p_0} + t\underline{v} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Egyenes paraméteres vektoregyenlete

$$\begin{cases} x = p_1 + t \cdot v_1 \\ y = p_2 + t \cdot v_2 \end{cases}$$

Egyenes paraméteres egyenletrendszere

Az egyenes normálvektoros egyenletét az alábbi alakra hozhatjuk:

$$Ax + By = C \qquad A, B, C \in \mathbb{R}$$

Az x tengelyt ott metszi, ahol $y = 0$, tehát:

$$x_0 = \frac{C}{A}$$

Az y tengelyt ott metszi, ahol $x = 0$, tehát:

$$y_0 = \frac{C}{B}$$

Ha a fenti alakot leosztjuk C-vel (Ha $C \neq 0$, azaz az egyenes nem megy át az origón), és kicsit átrendezzük, akkor a következő alakot kapjuk:

$$\frac{x}{\frac{C}{A}} + \frac{y}{\frac{C}{B}} = 1$$

Láthatjuk, hogy az x-et az x tengellyel való metszéspontjával az y-t az y tengellyel való metszéspontjával osztjuk le. Így elég könnyen megjegyezhető. **Ezt az alakot hívjuk tengelymetszetes alaknak.**

3. Definíció. *Abszcisssza: A vektor/pont első koordinátája.*

4. Definíció. *Ordináta: A vektor/pont második koordinátája.*

2.2. Egyszerű feladatok

2.2.1. Előszó

A következőkben igencsak egyszerű, 1 perces feladatok lesznek bemutatva. A feladat szövegét általában beírom ide, hogy ne kelljen a jegyzet mellé a Geo II-t is forgatni. Aki az órán már elég rutint szerzett a következő feladatok megoldásához az hagyja ki ezt a részt.

2.2.2. Feladatok

2.2.2.1. Feladat. [Geo. II./569/b.]
Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az origón és az $(5; -2)$ ponton:

Ismerjük tehát az egyik irányvektorát, amit a 2 adott pontból kiszámolhatunk: $\underline{v}(5; -2)$. Ebből rögtön megadhatunk egy normálvektort (koordináta csere, és az egyiket beszorozzuk -1-el): $\underline{n}(2; 5)$. Tehát tudjuk az egyenes egy normálvektorát, illetve 2 pontját, amiből nekünk elég 1 is, mégpedig az origó, hogy felírjuk az egyenes normálvektoros egyenletét:

$$2x + 5y = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$$

2.2.2.2. Feladat. [Geo. II./566/b.]
Írjuk fel a $(-1;3)$ ponton áthaladó, és a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos egyenesek egyenletét:

Először nézzük az y tengellyel párhuzamos egyenest. Amiatt, hogy az y tengellyel párhuzamos tudjuk, hogy a normálvektora merőleges az y tengelyre, tehát pl. $\underline{n}(1;0)$. Megvan minden ami kellhet az egyenes normálvektoros egyenletéhez:

$$1x + 0y = -1 \cdot -1 + 3 \cdot 0$$

$$x = -1 \quad y \in \mathbb{R}$$

Tehát az egyenes olyan pontokból áll, aminek első koordinátája mindig -1, a második pedig bármely valós szám.
Az x tengellyel párhuzamos egyenest hasonlóképpen írhatjuk fel. Tudjuk, hogy az x tengellyel párhuzamos, tehát a normálvektora merőleges az x tengelyre, így egy normálvektora pl.: $\underline{n}(0;1)$

$$0x + 1y = -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1$$

$$y = 3 \quad x \in \mathbb{R}$$

Tehát ez az egyenes pedig olyan pontokból áll, aminek első koordinátája bármely valós szám, a második pedig mindig 3.

2.2.2.3. Feladat. [Geo. II./556/b.]
Mi az egyenlete annak az egyenesnek, amely áthalad a $(-2;1)$ ponton és irányvektora $(3;\sqrt{3})$

Az irányvektorból megadhatunk egy normálvektort: $\underline{n}(-\sqrt{3};3)$, majd egyszerűen felírjuk a normálvektoros alakot:

$$-\sqrt{3}x + 3y = 2\sqrt{3} + 3$$

2.2.2.4. Feladat. [Geo. II./638.]
Ennek a feladatnak a szövegét nem írom le ide, csak a megoldásmenetet:

Nem kell mást tennünk, minthogy megvizsgáljuk az egyenesek normálvektorait. Ha azok párhuzamosak, akkor a két egyenes is párhuzamos, ha merőleges, akkor pedig merőlegesek. A feladat szövege sugallja, hogy csak merőleges és párhuzamos egyenesek vannak, így elég csak a merőlegességet vizsgálni. Mert ami nem merőleges, az párhuzamos. A merőlegességet, pedig nagyon egyszerűen vizsgáljuk: megnézzük a két normálvektor skaláris szorzatát.

2.2.2.5. Feladat. [Geo. II./639./b.]
Határozzuk meg p értékét úgy, hogy az $y = \frac{p}{3}x - 4$ és az $y = \frac{12}{p}x + 3$ egyenesek párhuzamosak legyenek egymással.

Ha párhuzamosak, akkor a normálvektorok koordinátáinak aránya megegyezik. Tehát:

$$\frac{-\frac{p}{3}}{1} = \frac{-\frac{12}{p}}{1}$$

$$\frac{p}{3} = \frac{12}{p}$$

$$p^2 = 36$$

$$p = \pm 6$$

2.2.2.6. Feladat. [Geo. II./639./e.]
Határozzuk meg p értékét úgy, hogy a $3px - 8y + 13 = 0$ és a $(p+1)x - 2py - 20 = 0$ egyenesek párhuzamosak legyenek egymással.

Ha párhuzamosak, akkor a normálvektorok koordinátáinak aránya megegyezik. Tehát:

$$\frac{3p}{-8} = \frac{p+1}{-2p}$$

$$-6p^2 = -8p - 8$$

Ebből kapunk két gyököt: $p = \{2; -\frac{2}{3}\}$

2.2.2.7. Feladat. [Geo. II./641./b.]
Határozzuk meg p értékét úgy, hogy az $y = \frac{a}{b}x - 4$ egyenes merőleges legyen az $y = -px + 2$ egyenesre.

Nem kell másnak teljesülni, minthogy a normálvektorok skaláris szorzata egyenlő legyen 0-val:

$$(-\frac{a}{b}; 1)(p; 1) = 0$$

$$-\frac{a}{b} \cdot p + 1 = 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot p = 1$$

$$p = \frac{b}{a}$$

2.2.2.8. Feladat. [Geo. II./642./d.]
Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{4})$ ponton, és párhuzamos a $(-1; 3)$ irányvektorú egyenessel.

Tehát egy olyan egyenessel párhuzamos, aminek az egyik irányvektora $(-1; 3)$, azaz az egyik normálvektora $(3; 1)$, mivel ez a felírandó egyenesnek is a normálvektora, ezért könnyedén felírhatjuk az egyenletet:

$$3x + y = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

2.2.2.9. Feladat. [Geo. II./643./b.]
Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az origón, és merőleges az $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ egyenesre.

Lényegében arról van szó, hogy az $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ egyenes egy irányvektora megegyezik a felírandó egyenes egy normálvektorával. Mivel a megadott egyenes tengelymetszetes alakban van, így tudjuk, hogy mik a tengelymetszetei: $(a; b)$. Ebből rögtön adódik, hogy akkor egy irányvektora az $(a; -b)$. Tehát akkor a felírandó egyenes egyenlete:

$$ax - by = 0$$

2.2.2.10. Feladat. [Geo. II./643./d.]
Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az (5;2) ponton, és merőleges az $y = \frac{2}{3}x - 1$ egyenesre.

Itt a megadott egyenes normálvektorának a 90°-os elforgatottja lesz a felírandó egyenes normálvektora. A megadott egyenes normálvektora $(-\frac{2}{3}; 1)$, ennek elforgatottja az $(1; \frac{2}{3})$, tehát:

$$x + \frac{2}{3}y = 5 + \frac{4}{3} = \frac{19}{3}$$

2.2.2.11. Feladat. [Geo. II./644./a.]
Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az (1;5) ponton és párhuzamos, illetve merőleges a $(4; -2)$ és az $(5; 3)$ pontokon áthaladó egyenesre.

Először azt írjuk fel, ami merőleges a megadott egyenesre:
A megadott két pontból könnyen kiszámolható az adott egyenes irányvektora: $(1; 5)$. Mivel az adott egyenes merőleges a meghatározandó egyenesre, így annak irányvektora merőleges a meghatározandó egyenesre, azaz ő az egyik normálvektora, tehát a merőleges egyenes egyenlete:

$$x + 5y = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 26$$

Ha párhuzamos, akkor az előbb kapott egyenes normálvektora merőleges, a most használandóra, azaz a most meghatározandó egyenes normálvektora $(5; -1)$, így az egyenlet:

$$5x - y = 5 \cdot 1 - 1 \cdot 5 = 0$$

2.2.2.12. Feladat. [Geo. II./645.]
Egy egyenes áthalad a $(3\frac{2}{5};-3)$ és az $(x;4\frac{1}{3})$ pontokon, és merőleges az $y-4x+3=0$ egyenesre. Számítsuk ki a második pont ismeretlen abszcisszáját[1].

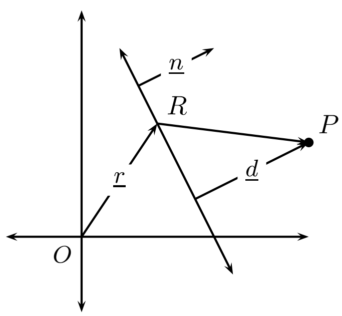
A megadott egyenes egyik normálvektora az egyenlete alapján: $(-4;1)$. Mivel a meghatározandó egyenes merőleges erre az egyenesre, ezért a normálvektorok is merőlegesek egymásra, így a meghatározandó egyenes normálvektora: $(1;4)$. Ez alapján könnyen felírható a normálvektoros egyenlet:

$$3\frac{2}{5}\cdot 1-3\cdot 4=1\cdot x+4\cdot 4\frac{1}{3}$$
$$\frac{17}{5}-12=x+\frac{52}{3}$$
$$-\frac{389}{15}=x$$

További feladatok: 651/a. 653/a. 655/a. 660.

2.3. Pont és egyenes távolsága, szakaszfelező

2.3.1. Elmélet



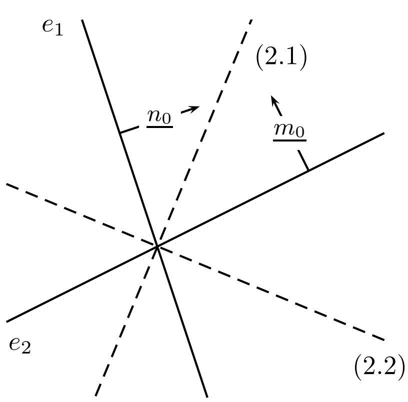
$d(P;e)=|\underline{d}|$
$\underline{d}$ az az $\overrightarrow{RP}$ vektor $\underline{n}$-el párhuzamos komponense.

$$\left|\frac{\underline{n}}{|\underline{n}|}\left(\underline{p}-\underline{r}\right)\right|=|\underline{d}|$$
$$\left|\underline{n}_0\underline{p}-\underline{n}_0\underline{r}\right|=|\underline{d}|$$

$$|\underline{d}|=\left|\underline{n}_0\underline{p}-\underline{n}_0\underline{r}\right|$$
$$d=\left|n_{0_1}p_1+n_{0_2}p_2-\left(n_{0_1}r_1+n_{0_2}r_2\right)\right|$$

Amikor a normálvektor abszolútértéke 1, akkor azt az egyenes normálegyenletének hívjuk. (Innen a *normálás*: $|\underline{n}|$-el való osztás)

A következő egyenesek szakaszfelezőit fogjuk meghatározni:



$e_1: n_{0_1}x+n_{0_2}y+c=0$
$e_2: m_{0_1}x+m_{0_2}y+d=0$

A szögfelező(k) a két egyenestől egyenlő távolságra van(nak):
$\left|n_{0_1}x+n_{0_2}y+c\right|=\left|m_{0_1}x+m_{0_2}y+d\right|$
Ez az egyenlet két egyenest ad. Ha mindkét kifejezés abszolútérték nélkül azonos (2.1), vagy ha egymás -1-szeresei (2.2).

$$\left(n_{0_1}-m_{0_1}\right)x+\left(n_{0_2}-m_{0_2}\right)y+c-d=0 \tag{2.1}$$
$$\left(n_{0_1}+m_{0_1}\right)x+\left(n_{0_2}+m_{0_2}\right)y+c+d=0 \tag{2.2}$$

[1]lásd 3. definíció a 8. oldalon

2.3.2. Feladatok

2.3.2.1. Feladat.
Határozzuk meg az $(-3;-2)$ és az $(5;8)$ ponton áthaladó egyenes és a $(2;7)$ pont távolságát!

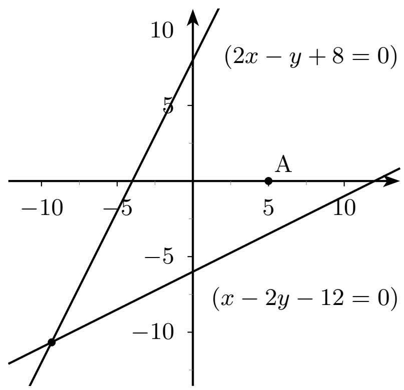
Ismerjük az irányvektorát az egyenesnek: $(4;5)$, így egy normálvektorát is: $(5;-4)$. De nekünk a távolsághoz, egység hosszúságú normálvektor kell, tehát: $\underline{n_0} = \left(\frac{5}{\sqrt{41}}; \frac{-4}{\sqrt{41}}\right)$.

$$d = \left| \frac{5}{\sqrt{41}} \cdot 2 - \frac{4}{\sqrt{41}} \cdot 7 - \left(\frac{5}{\sqrt{41}} \cdot 5 - \frac{4}{\sqrt{41}} \cdot 8 \right) \right| = \frac{11}{\sqrt{41}}$$

2.3.2.2. Feladat.
Egyenlő szárú háromszög száregyeneseinek egyenlete:

$$2x - y + 8 = 0 \quad \text{és} \quad x - 2y - 12 = 0.$$

Az alap egyik pontja $(5;0)$. Határozzuk meg az alap egyenletét és a csúcsok koordinátáit.



A két egyenes egyenletéből könnyen meghatározhatjuk a csúcspontot: $\left(\frac{-28}{3}; \frac{-32}{3}\right)$

Ha meghatározzuk a szögfelezőjét (a megfelelőt), akkor tudjuk, hogy annak az egyik normálvektora megegyezik az alap egyenes egyik irányvektorával, hiszen egyenlő szárú háromszögben a szögfelező merőleges az alapra. Ha megvan ez az irányvektor, akkor abból rögtön megvan az egyik normálvektor, ami segítségével, és amiatt, hogy tudjuk, hogy átmegy az $(5;0)$ ponton, könnyen meghatározhatjuk az alap egyenes egyenletét.

Melyik szögfelezőről van szó? Ezt a normálvektorok állásából meghatározhatjuk. Ha jól megnézzük, akkor az $(1;-2)$, illetve a $(2;-1)$ normálvektorok nem befele mutatnak, tehát a szükséges szögfelezőnk egyenese:

$$(1+2)x + (-2-1)y - 4 = 0$$

$$3x - 3y - 4 = 0$$

Nem normáltuk az egyenletet, hiszen a normálvektorok abszolútértéke megegyezik, tehát a végén úgyis felszoroznánk az abszolútértékkel.
Tehát a szögfelező egy normálvektora: $(1;-1)$. Így az alap egyenesének egy normálvektora, ennek a $90°$-os elforgatottja, azaz $(1;1)$. Az egyenes normálvektora és egy pontja segedelmével, felírhatjuk az egyenletét:

$$1 \cdot x + 1 \cdot y = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0$$

$$x + y = 5$$

Ezek után már csak a megfelelő oldalegyenesek metszéspontjai alapján meghatározhatjuk a csúcsokat:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - y + 8 &=& 0 \\ x + y &=& 5 \end{array}\right\} (x;y) = (-1;6)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 2y - 12 &=& 0 \\ x + y &=& 5 \end{array}\right\} (x;y) = \left(\frac{22}{3}; \frac{-7}{3}\right)$$

2.3.2.3. Feladat.
Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0; \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0; \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

egyenesek egy pontban messék egymást?

$$\left.\begin{array}{rcll} a_1x + b_1y + c_1 &=& 0 & / \cdot b2 \\ a_2x + b_2y + c_2 &=& 0 & / \cdot b1 \end{array}\right\} \ominus$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\left.\begin{array}{rcll} a_1x + b_1y + c_1 &=& 0 & / \cdot a2 \\ a_2x + b_2y + c_2 &=& 0 & / \cdot a1 \end{array}\right\} \ominus$$

$$(b_1a_2 - b_2a_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_1a_2 - b_2a_1}$$

Kifejeztük x-et és y-t, írjuk vissza őket a 3. egyenletbe:

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

$$a_3\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_3\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_1a_2 - b_2a_1} + c_3 = 0$$

$$a_3\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} - b_3\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{b_1a_2 - b_2a_1} + c_3 = 0$$

Ha jól meggondoljuk (kifejtjük és megvizsgáljuk), akkor ez egy 3×3-ad determináns:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Tehát, ennek kell teljesülnie, ahhoz hogy a megadott 3 egyenes egy pontban messe egymást.

2.3.2.4. Feladat.
Bizonyítsuk be, hogy az

$$mx + 3y - 4m + 1 = 0$$

egyenesek egy pontban metszik egymást.

Helyettesítjünk be két m-et, praktikusan $m = 0$, illetve $m = 1$. Majd határozzuk meg a metszéspontot:

$$\left.\begin{array}{rl} 3y + 1 = 0 & (m = 0) \\ x + 3y - 3 = 0 & (m = 1) \end{array}\right\} (x; y) = \left(4; -\frac{1}{3}\right)$$

Majd ezután írjuk vissza x és y helyére a kapott értéket:

$$mx + 3y - 4m + 1 = 0$$

$$4m + 3 \cdot -\frac{1}{3} - 4m + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

Mivel ez igaz, ezért minden ilyen tulajdonságú egyenes átmegy a $\left(4; -\frac{1}{3}\right)$ ponton, tehát ott metszik egymást.

2.3.2.5. Feladat.
Bizonyítsuk be, hogy az

$$(m^2+6m+3)x-(2m^2+18m+2)y-3m+2=0$$

egyenesek egy ponton metszik egymást.

Hasonlóan az előzőekhez, kipróbálunk két m értéket:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x-2y+2=0 & (m=0) \\ 10x-22y-1=0 & (m=1) \end{array}\right\} (x;y)=\Big(-1;-\frac{1}{2}\Big)$$

Majd visszahelyettesítjük a kapott x, y értéket:

$$(m^2+6m+3)x-(2m^2+18m+2)y-3m+2=0$$

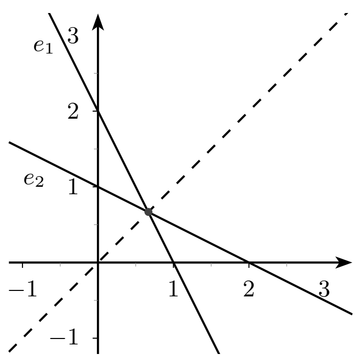
$$-(m^2+6m+3)+(m^2+9m+1)y-3m+2=0$$

$$0=0$$

Tehát valóban egy pontban metszik egymást, mégpedig a $(-1;-\frac{1}{2})$ pontban.

2.3.2.6. Feladat.
Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes úgy mozog a koodináta-síkon, hogy a tengelyekből lemetszett szeletek hosszának reciprok összege konstans, akkor ezek az egyenesek egy ponton mennek át.

Ha jól meggondoljuk, akkor ezek az egyenesek az $y=x$ egyenesen fogják egymást metszeni, hiszen egy adott e_1 egyenest, tükrözünk, az $y=x$ egyenesre, akkor a tengelyekből lemetszett szeletek hosszának reciprok összege azonos lesz. De mivel tengelyes tükrözésnél a tükörtengelyen lévő pontok helyben maradnak, ezért az $y=x$ egyenesen metszik egymást:



Vegyünk fel három egyenest:

$$a_1x+b_1y=c_1$$

$$a_2x+b_2y=c_2$$

$$a_3x+b_3y=c_3$$

Írjuk át őket tengelymetszetes alakba:

$$\frac{x}{\frac{c_1}{a_1}}+\frac{y}{\frac{c_1}{b_1}}=1$$

$$\frac{x}{\frac{c_2}{a_2}}+\frac{y}{\frac{c_2}{b_2}}=1$$

$$\frac{x}{\frac{c_3}{a_3}}+\frac{y}{\frac{c_3}{b_3}}=1$$

Tudjuk, hogy:

$$\frac{a_1+b_1}{c_1}=\frac{a_2+b_2}{c_2}=\frac{a_3+b_3}{c_3}$$

(Hiszen a tengelyekből lemetszett szakaszok reciprok összege konstans.)

Ahhoz, hogy az előbbiekben felvett három egyenes egy ponton menjen át teljesülnie, kell, hogy:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Adjuk hozzá az első oszlophoz a második oszlopot:

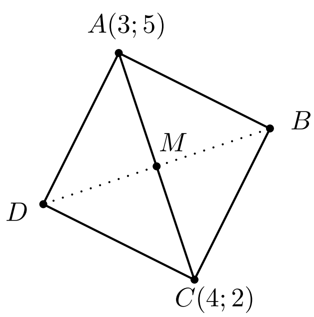
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

De mivel tudjuk, hogy

$$\frac{a_1 + b_1}{c_1} = \frac{a_2 + b_2}{c_2} = \frac{a_3 + b_3}{c_3}$$

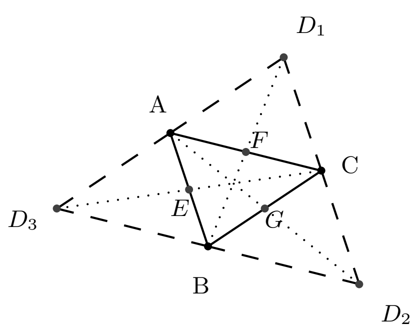
Ezért az első oszlop a harmadiknak konstans szorosa, tehát a determináns értéke 0. Így valóban egy ponton mennek át az ilyen típusú egyenesek.

2.3.2.7. Feladat.
Egy négyzet két csúcsa $A(3;5)$ és $C(4;2)$. Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit.



Meghátrozzuk az M pont koordinátáit: $(3\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{2})$.
Ezután ha jól megnézzük csak annyit kell tennünk, hogy például az $\overrightarrow{MA}$-t $\pm 90°$-kal elforgatjuk, majd hozzáadjuk az $\underline{m}$-et. Ezáltal megkapjuk a D és a B csúcsok koordinátáit.
$\overrightarrow{MA} = \underline{a} - \underline{m} = (-\frac{1}{2};\ \frac{3}{2})$.
Órajárással megegyező irányban elforgatva: $(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2})$. Tehát a B csúcs koordinátája: $\underline{m} + (\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}) = (5;4)$.
Hasonlóan órajárással ellentétes irányban elforgatva: $(-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2})$. Így a D csúcs koordinátája: $\underline{m} + (-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}) = (2;3)$

2.3.2.8. Feladat.
Egy paralelogramma három csúcsa $(-1;1)$; $(0;-2)$ és $(3;0)$. Számítsuk ki a hiányzó csúcs koordinátáit. (Hány megoldás van?)



Felvettük a megadott 3 pontot $A(-1;1)$, $B(0;-2)$ és $C(3;0)$ személyében. A lehetséges D pontot úgy kaphatjuk meg, hogy AB, BC, illetve AC oldalak felezőpontjára tükrüzzük, azaz 3 megoldás lehetséges.
D_1: Tükrözzük a B pontot F-re. F koordinátái: $(1;\frac{1}{2})$. $\overrightarrow{BF} = \underline{f} - \underline{b} = (1;2\frac{1}{2})$.
Így D_1 koordinátái: $\underline{f} + \overrightarrow{BF} = (2;3)$
D_2: Tükrözzük a A pontot G-re. G koordinátái: $(\frac{3}{2};-1)$. $\overrightarrow{AG} = \underline{g} - \underline{a} = (2\frac{1}{2};-2)$.
Így D_2 koordinátái: $\underline{g} + \overrightarrow{AG} = (4;-3)$
Hasonló módszerrel megkaphatjuk D_3 koordinátáit: $(-4;-1)$.

2.4. Mértani helyek

B E P Ó T O L N I   A Z   E L E J É T ! !

Coming soon...