B. 4023.

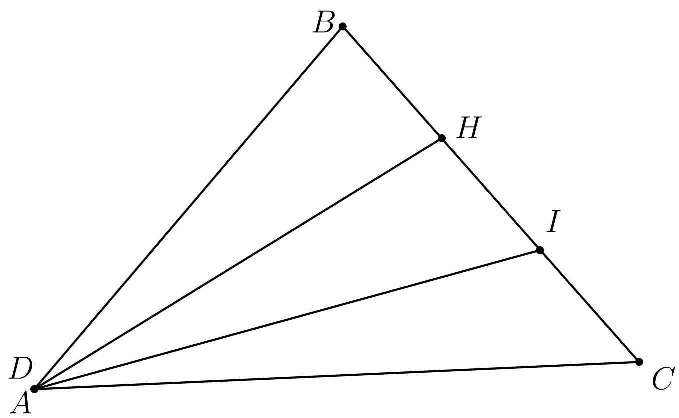
Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.
redhat24@freemail.hu

Feladat:

Egy háromszög egyik oldalán adott egy pont. Szerkesszünk ezen át két olyan egyenest, amelyek a háromszög területét harmadolják.

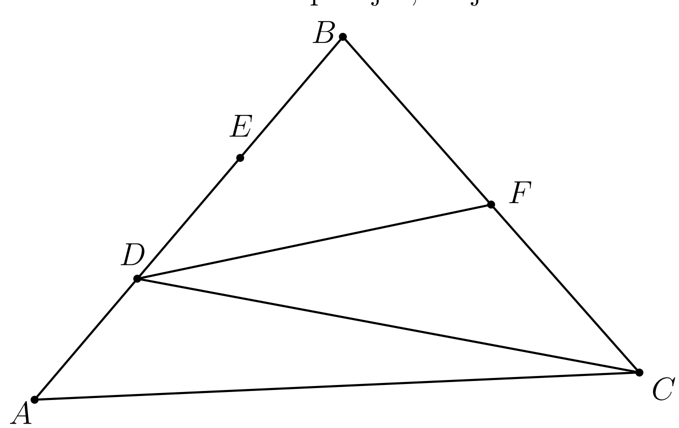
Megoldás:

Legyen az adott pont D. Legelőször nézzünk meg 2 speciális esetet: D rajta van az oldalhoz tartozó valamelyik csúcson (1. ábra), vagy D rajta van valamelyik az oldalon lévő harmadolóponton (2. ábra):



1. ábra

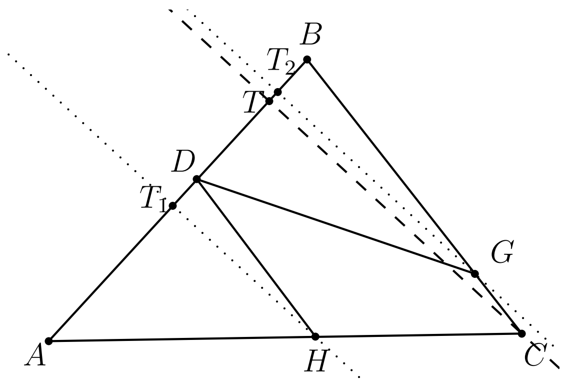
Ilyenkor nyilvánvaló, hogy a 2 egyenes a szemköztes oldalt 1-1 pontban metszi, ekkor 3 háromszög jön létre, de mivel mindhárom háromszögnek a D csúcshoz tartozó magassága azonos (megegyezik az eredeti ABC háromszög magasságával), ezért a D csúccsal szemköztes oldalak is egyenlőnek kell lennie egymással ($BH = HI = IC$), hogy mindhárom háromszög területe azonos legyen, így egy kis háromszög területe valóban a nagy háromszög területének harmada lesz. Ahhoz, hogy $BH = HI = IC$ igaz legyen, H-nak és I-nek a BC oldalnak a harmadolópontjának kell lennie. Így ahhoz hogy megszerkesszük a kérdéses 2 egyenest, amivel harmadoljuk a háromszöget, nem kell mást tennünk, mint megszerkeszteni a szemköztes oldal 2 harmadolópontját, majd őket összekötni a D-vel.



2. ábra

Ilyenkor, amikor a D pont rajta van valamelyik harmadolóponton, akkor is 3 darab háromszög keletkezik. Legyen F a BC oldal felezőpontja. Mivel a BF fele a BC-nek, a BF-hez tartozó magassága pedig az ABC háromszögben BC-hez tartozó magasság $\frac{2}{3}$-a, ezért az DBF háromszög területe $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$-a az eredeti ABC háromszögnek, hasonlóan DFC háromszög területe is harmada az eredeti háromszögnek, így a maradék ADC háromszög területének is az eredeti háromszög harmadának kell lennie, tehát valóban DF és DC egyenese harmadolja az ABC háromszög területét. Így a két egyenes megszerkesztése nem más, mint a D-t összekötjük a szemköztes csúccsal, illetve a távolabbi oldal felezőpontjával.

A fent bemutatott speciális eseteken kívül van még 2 eset: ha D az oldal középső harmadában van (3. ábra), illetve ha D az oldal valamelyik szélső harmadában van (4. ábra), hiszen mindkét esetben 1 négyszög, illetve 2 háromszög jön létre, de első esetben a 2 háromszög közrefogja a négyszöget, a másik esetben pedig nem – a szélén lesz a négyszög.



3. ábra

Azt szeretnénk, ha $T_{DBG\triangle} = T_{ADH\triangle} = \frac{T_{ABC\triangle}}{3}$ (így a maradék négyszög területe is egyharmad). DBG háromszög területe $\frac{DB \cdot T_2G}{2}$, hasonlóan ADH háromszög területe $\frac{AD \cdot T_1H}{2}$, ABC háromszög területe pedig $\frac{AB \cdot TC}{2}$.

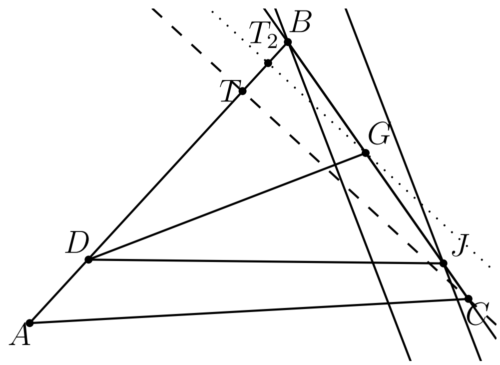
$$\frac{DB \cdot T_2G}{2} = \frac{AB \cdot TC}{6}$$
$$\frac{DB}{AB} = \frac{TC}{3T_2G}$$
$$\frac{AB}{3DB} = \frac{T_2G}{TC}$$

Innen T_2G-n kívül mindent ismerünk, tehát párhuzamos szelők tételek alapján megszerkeszthetjük a T_2G távolságot.

$$\frac{AD \cdot T_1H}{2} = \frac{AB \cdot TC}{6}$$
$$\frac{AD}{AB} = \frac{TC}{3T_1H}$$
$$\frac{AB}{3AD} = \frac{T_1H}{TC}$$

Itt is T_1H-n kívült mindent ismerünk, tehát az ő hossza is megszerkeszthető a párhuzamos szelők tétele alapján.

Ismerjük T_2G és T_1H hosszát. A TC egyenesre rámérjük T-től T_2G és T_1H hosszát. A végpontokban merőlegeseket állítunk a BC-re, és ahol ezek az egyensek elmetszik a megfelelő oldalakat, ott lesz a H, illetve G pont.
Mivel D-t AB középső harmadában vettük fel, ezért mindig lesz az oldalakkal metszéspont, tehát mindig kapunk H, illetve G pontokat.



4. ábra

Ebben az utolsó esetben, részben felhasználjuk az előző esetet. Megszerkesztjük az előző esetben megszerkeszthető egyeneset, jelen esetben az DG-t (ha D a másik szélső harmadban lenne, akkor a DH-t tudnánk megszerkeszteni). Mivel tudjuk, hogy DBG háromszög területe egyharmada a nagy háromszögnek, ezért vele már nem foglalkozunk, mert ő biztosan jó. DGJ háromszög területének is egyharmadának kell lennie a nagy háromszög területének, tehát $T_{DGJ\triangle} = T_{DBG\triangle}$. Mivel DG-ben közös a két háromszög, ezért a DG-hez tartozó magasságoknak is egyenlőnek kell lennie. Meghúzzuk a DBG háromszög DG-hez tartozó magasságát, majd centrálisan tükrözzük G-re. Ahol ez az egyenes elmetszi a BC oldalegyenesét, az lesz a J pont. D-t J-vel összekötve megkapjuk a második egyenest.