

**B. 3980.**

Kriván Bálint

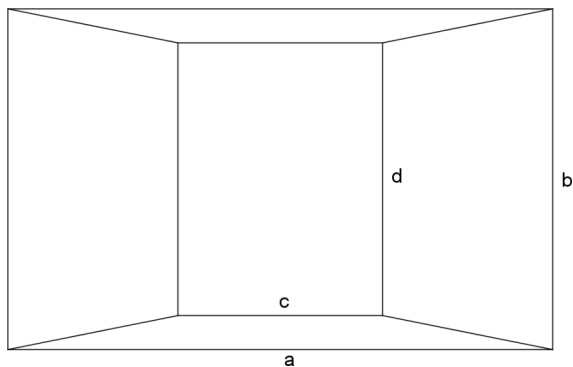
Budapest, Berzsényi D. Gimn., 10. o. t.

redhat24@freemail.hu

**Feladat:** Az ábrán (1. ábra) felülnézetben látható poliéder „alaplapjai” párhuzamos téglalapok, oldalélei egyenlő hosszúak, magassága  $m$ . Valaki a poliéder térfogatára a következő képletet találta:

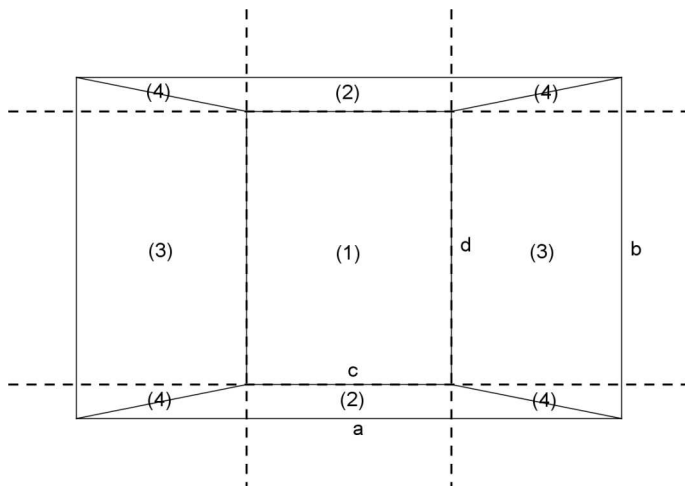
$$V = \frac{m}{6} [(2a + c)b + (2c + a)d]$$

Igaz-e, hogy a képlet megadja a test térfogatát?

**Megoldás:**

1. ábra.

Bontsuk szét a testet 9 db testre a 2. ábrán berajzolt síkokkal:



2. ábra.

Az ábrán azonos számokkal jelöljük az azonos testeket. A (2)-essel jelölt háromszög alapú hasábok nyilvánvalóan egybevágóak, hiszen alapjaik megegyeznek, illetve a magasságuk is (jelen esetben ez a magasság a  $c$  oldal hossza). Hasonlóképpen a (3)-assal jelölt hasábok is egybevágóak. A szélén lévő 4 darab gúla szintén egybevágó, hiszen: magasságuk egyenlő ( $m$ ), illetve mindegyik megfelelő él egymással egyenlő (illetve a lapok azonos szögeket zárnak be) (még egy megjegyzés: tulajdonképpen nekünk az is elég, hogy az alapok, illetve a magasságok egyenlőek a 4 szélén lévő gúlában, hiszen ez kell a térfogat képletéhez).

Tehát a 9 testet 4 különböző csoportba csoportosíthatjuk:

- (1) 1 db téglatest
- (2) 2 db háromszög alapú hasáb
- (3) 2 db háromszög alapú hasáb
- (4) 4 db téglalap alapú gúla

Nem kell mást tennünk mint kiszámoljuk 1-1 testnek a térfogatát, és besorozzuk annyival amennyi van belőle.

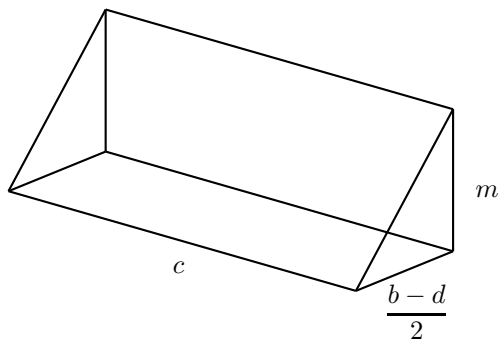
(1) Téglatest:

A téglatest térfogatának kiszámolása nem okoz gondot: Ismerjük az alapjának két oldalát és magasságát:

$$V_{\text{téglatest}} = cdm$$

(2) Háromszög alapú hasáb:

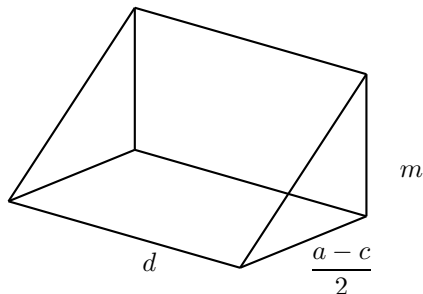
Az  $b$  és  $d$  oldal által határolt trapéz egyenlőszárú a feladat szövege szerint, így ismerjük a háromszög alapú hasáb alapját: egyik oldala a poliéder magassága ( $m$ ), a másik pedig  $\frac{b-d}{2}$ , illetve a magassága/hossza pedig  $c$ .



Térfogata könnyen kiszámolható:  $V = T \cdot h = \frac{(b-d) \cdot m}{4} \cdot c$  ( $T$  a hasáb alapjának területe,  $h$  a magassága)

(3) Háromszög alapú hasáb:

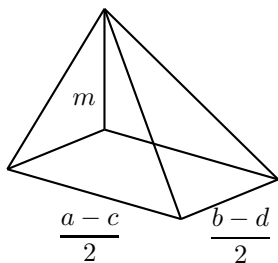
Az  $a$  és  $c$  oldal által határolt trapéz egyenlőszárú a feladat szövege szerint, így ismerjük a háromszög alapú hasáb alapját: egyik oldala a poliéder magassága ( $m$ ), a másik pedig  $\frac{a-c}{2}$ , illetve a magassága/hossza pedig  $d$ .



Térfogata könnyen kiszámolható:  $V = T \cdot h = \frac{(a-c) \cdot m}{4} \cdot d$  ( $T$  a hasáb alapjának területe,  $h$  a magassága)

(4) Téglalap alapú gúla:

A térfogatához ismernünk kell az alapjának a területét és a magasságát. A magassága természetesen  $m$ , az alapjának a területe pedig:  $\left(\frac{b-d}{2}\right)\left(\frac{a-c}{2}\right)$



Térfogata:  $V = \frac{Tm}{3} = \frac{\left(\frac{b-d}{2}\right)\left(\frac{a-c}{2}\right)m}{3}$

Már csak annyi a dolgunk, hogy a kiszámolt térfogatokat beszorozzuk a darabszámmal, majd összeadjuk őket:

$$V_{\text{poliéder}} = cdm + 2 \cdot \frac{(b-d) \cdot m}{4} \cdot c + 2 \cdot \frac{(a-c) \cdot m}{4} \cdot d + 4 \cdot \frac{\left(\frac{b-d}{2}\right)\left(\frac{a-c}{2}\right)m}{3}$$

Kiemelünk  $m$ -et, illetve egyszerűsítünk ahol lehet:

$$V = m \left[ cd + \frac{b-d}{2} \cdot c + \frac{a-c}{2} \cdot d + \frac{(b-d)(a-c)}{3} \right]$$

Kiemelünk  $\frac{1}{6}$ -ot:

$$V = \frac{m}{6} \left[ 6cd + 3(b-d) \cdot c + 3(a-c) \cdot d + 2(b-d)(a-c) \right]$$

$$V = \frac{m}{6} [6cd + 3bc - 3dc + 3ad - 3cd + 2ba + 2dc - 2bc - 2ad]$$

$$V = \frac{m}{6} [2cd + bc + ad + 2ba]$$

$$V = \frac{m}{6} [(2a+c)b + (2c+a)d]$$

Ugyanazt kaptuk, ami a feladatban volt, tehát igaz, a képlet megadja a poliéder térfogatát.