B. 4022.

Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.
redhat24@freemail.hu

Feladat:
Van-e olyan számrendszer, amelyben a 9-cel való oszthatóság szabálya olyan, mint a tízes számrendszerben a 4-gyel való oszthatósági szabály; a 4-gyel való oszthatóság szabálya olyan, mint a tízes számrendszerben a 9-cel való oszthatósági szabály; a 7-tel való oszthatóság pedig pusztán az utolsó számjegy alapján eldönthető?

Megoldás:

A példák kedvéért vegyünk fel egy tetszőleges számot a k számrendszerben, amire megpróbáljuk igazzá tenni a feltételeket: $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}_k$
Természetesen ennek az értéke:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}_k = a_0 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_2 + \ldots + k^n \cdot a_n$$

Haladjunk szépen sorjában, nézzük meg, hogy hanyas számrendszernek kell lennie a feladatban szereplő számrendszernek, hogy teljesüljenek a feltételek:

1.) <u>7-tel való oszthatóság eldönthető az utolsó számjegy alapján.</u>

Ez azt jelenti, hogy a kérdéses számunkat helyiértékenként felírva (ahogy azt fent tettük), mindegyik tag osztható 7-tel, kivéve az a_0. Így a_0 7-tel való osztása alapján dönthetjük el, hogy maga a szám osztható-e 7-tel, ahogy azt a feltétel kéri tőlünk (hiszen a_0 az utolsó számjegy). Ahhoz, hogy mindegyik tag az a_0-on kívül, tehát $k \cdot a_1, k^2 \cdot a_2, \ldots$ és $k^n \cdot a_n$ biztosan (tehát a számjegyektől függetlenül) osztható legyen 7-tel, igaznak kell lennie, hogy k osztható 7-tel.

2.) <u>9-cel való oszthatóság szabálya olyan, mint a tízes számrendszerben a 4-gyel való oszthatósági szabály.</u>

Ahhoz, hogy csak az utolsó két számjegyből alkotott szám döntse el, hogy 9-cel osztható-e a szám, vagy sem, igaznak kell lennie, hogy

$$9|(k^2 \cdot a_2 + \ldots + k^n \cdot a_n).$$

Ez csak akkor igaz feltétlenül (tehát a számjegyektől függetlenül), ha k^2 osztható 9-cel, azaz k osztható 3-al.

3.) <u>4-gyel való oszthatóság szabálya olyan, mint a tízes számrendszerben a 9-cel való oszthatósági szabály.</u>

Ez azt jelenti, hogy maguknak a számjegyeknek a 4-el való osztási maradékának egyeznie kell a számjegy által képviselt érték 4-el való osztási maradékával (egy a_i számjegy által képviselt érték alatt a $k^i \cdot a_i$ értjük, ahol k az adott számrendszer). Legyen $a_i \mod 4 = l$, azaz $a_i = 4k + l$, ahol $k, l \in \mathbb{N}$, ekkor $k^i \cdot a_i \mod 4 = l$-nek is igaznak kell lennie, hiszen így lesz igaz, hogy az osztási maradékok megegyeznek, tehát:

$$k^i \cdot a_i = 4m + l \quad (\text{ahol } m \in \mathbb{N})$$

$$k^i \cdot (4k + l) = 4m + l$$

Legyen $k^i \mod 4 = h$, így $k^i = 4j + h$, ahol $j, h \in \mathbb{N}$.

$$(4j + h) \cdot (4k + l) = 4m + l$$

$$16jk + 4kh + 4jl + lh = 4m + l$$

Nézzük mindkét oldalnak a 4-el való osztási maradékát:

$$lh = l$$

Ebből következik, hogy $h = 1$, tehát $k^i \mod 4 = 1$. Már csak az a kérdés, hogy mennyi ekkor k-nak a 4-el való osztási maradéka. $k^i \mod 4 = 1$, de ennek i-től függetlenül igaznak kell lennie, tehát $k \mod 4 = 1$. Minden egyéb más 4-el való osztási maradéknál ha valahanyadik hatványra emeljük a k-t akkor lesz olyan i. hatvány amikor $k^i \mod 4 \neq 1$.

Tehát miknek kell teljesülnie, hogy a fenti 3 feltétel teljesüljön:
1.) $7|k$
2.) $3|k$
3.) $k \mod 4 = 1$

Nincs más dolgunk, mint keresni egy ilyen számot, amire a fentiek teljesülnek. Ilyen például a $k = 21$.

Tehát a 21-es számrendszer a feladatban megfogalmazott tulajdonságokkal bír.