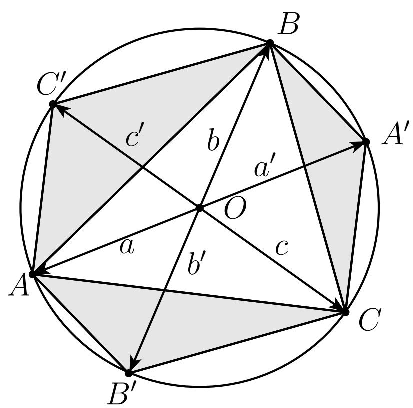
B. 4014.

Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.
redhat24@freemail.hu

Feladat:
Az ABC hegyesszögű háromszög csúcsainak a körülírt kör középpontjára vonatkozó tükörképei rendre A', B' és C'. Bizonyítsuk be, hogy az $A'BC$, $AB'C$, ABC' háromszögek területének összege egyenlő az ABC háromszög területével.

Megoldás:

Rajzoljunk egy ábrát:



Vegyük fel az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$, illetve $\underline{a'}, \underline{b'}$ és $\underline{c'}$ vektorokat, az ábrán látható módon (O, azaz a körülírt kör középpontja legyen a vektorok kezdőpontja a végpontok pedig rendre A, B és C, illetve A', B' és C'). Nyílvánvaló, hogy $\underline{a} = -\underline{a'}$, $\underline{b} = -\underline{b'}$ és $\underline{c} = -\underline{c'}$, hiszen egy egyenesre esnek, abszolút értékük azonos (a körülírt kör sugara), de ellentétes irányúak.

Írjuk fel a szürkén megjelölt háromszögek, azaz az $A'BC$, $AB'C$, ABC' háromszögek területeit a vektorok segedelmével. Ehhez a vektoriális szorzatot használjuk, amiről tudjuk, hogy ha $\underline{x}$ és $\underline{y}$ egy háromszög egy csúcsából indított oldalvektorai, akkor e két vektor vektoriális szorzatának abszolútértékének a fele egyenlő a háromszög területével (ezért hívjuk az $\frac{\underline{x}\times\underline{y}}{2}$-t a háromszög területvektorának). Jelen esetben nem foglalkozunk az abszolútértékkel, hanem mint előjeles területvektorral dolgozunk. Viszont fontos, hogy a területvektorokat úgy írjuk fel, hogy egy irányba mutassanak.

$$T_{A'BC} = \frac{\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA'}}{2} = \frac{(\underline{b} - \underline{c}) \times (\underline{a'} - \underline{c})}{2} = \frac{\underline{b} \times \underline{a'} + \underline{b} \times \underline{-c} + \underline{-c} \times \underline{a'}}{2} =$$
$$= \frac{\underline{a} \times \underline{b} + \underline{c} \times \underline{b} + \underline{c} \times \underline{a}}{2}$$

A $(\underline{-c} \times \underline{-c})$-t, azért nem írjuk le, mert rögtön tudjuk róla, hogy nullvektor, hiszen párhuzamos vektorok vektoriális szorzata nullvektor. Az átalakításoknál a vektoriális szorzás tulajdonságait használjuk fel. Hasonlóan a másik két háromszög területe:

$$T_{AB'C} = \frac{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB'}}{2} = \frac{(\underline{c} - \underline{a}) \times (\underline{b'} - \underline{a})}{2} = \frac{\underline{c} \times \underline{b'} + \underline{c} \times \underline{-a} + \underline{-a} \times \underline{b'}}{2} =$$
$$= \frac{\underline{b} \times \underline{c} + \underline{a} \times \underline{c} + \underline{a} \times \underline{b}}{2}$$

$$T_{ABC'} = \frac{\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC'}}{2} = \frac{(\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{c}' - \underline{b})}{2} = \frac{\underline{a} \times \underline{c}' + \underline{a} \times \underline{-b} + \underline{-b} \times \underline{c}'}{2} =$$
$$= \frac{\underline{c} \times \underline{a} + \underline{b} \times \underline{a} + \underline{b} \times \underline{c}}{2}$$

Vizsgáljuk meg, hogy mit kapunk ezen területek összegére:

$$T_{A'BC} + T_{AB'C} + T_{ABC'} =$$
$$= \frac{\underline{a} \times \underline{b} + \underline{c} \times \underline{b} + \underline{c} \times \underline{a} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{a} \times \underline{c} + \underline{a} \times \underline{b} + \underline{c} \times \underline{a} + \underline{b} \times \underline{a} + \underline{b} \times \underline{c}}{2} =$$
$$= \frac{\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}} \times \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}}}{\mathbf{2}}$$

Nagyon szépen tudtunk egyszerűsíteni felhasználva, hogy $\underline{x} \times \underline{y} = -\underline{y} \times \underline{x}$, ha $\underline{x}$ és $\underline{y}$ két vektor, amit vektoriálisan szorzunk.

Vizsgáljuk meg, hogy mit kapunk az ABC háromszög területére, de figyeljünk, hogy úgy írjuk fel a területvektort, hogy az eddigiekkel egy irányba mutasson.

Az ABC háromszög felbontható 3 db háromszögre: AOB, BOC és COA háromszögekre.

$$T_{AOB} = \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{2}$$
$$T_{BOC} = \frac{\underline{b} \times \underline{c}}{2}$$
$$T_{COA} = \frac{\underline{c} \times \underline{a}}{2}$$

Tehát:

$$T_{ABC} = T_{AOB} + T_{BOC} + T_{COA} = \frac{\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{c}} \times \underline{\mathbf{a}}}{\mathbf{2}}$$

Észrevehetjük, hogy ugyanazt kaptunk T_{ABC}-re, illetve $T_{A'BC} + T_{AB'C} + T_{ABC'}$-re, tehát beláttuk az állítást.