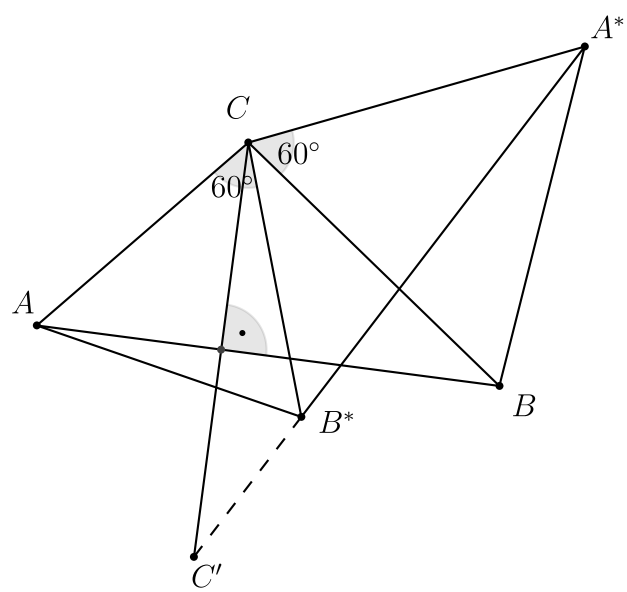
B. 4025.

Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.
redhat24@freemail.hu

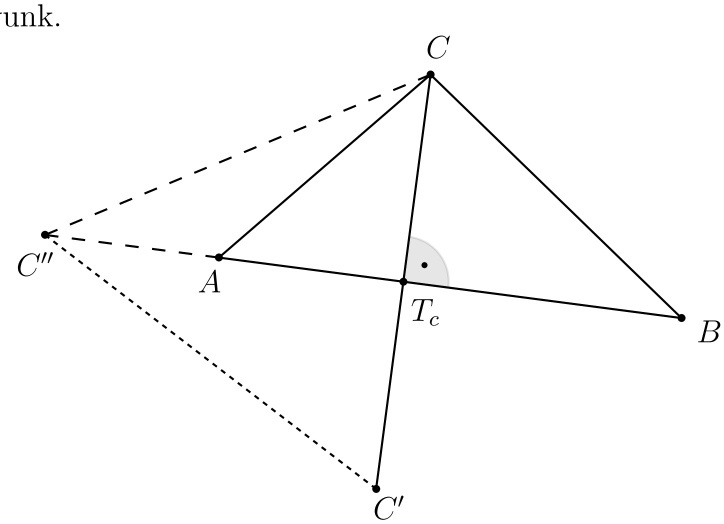
Feladat:

Az ABC háromszög BC oldalára kifelé, CA oldalára pedig befelé emelt szabályos háromszög harmadik csúcsa A^* és B^*. A C pontnak az AB egyenesre való tükörképe C'. Bizonyítsuk be, hogy az A^*, B^* és C' pontok egy egyenesre illeszkednek.

Megoldás:



C körül forgassuk el A-t $+60°$-al, ekkor B^*-ot kapjuk, hiszen a feladat szövege szerint ACB^* szabályos háromszög. Hasonlóképpen, ha B-t forgatjuk el $+60°$-al C körül, akkor A^*-ot kapjuk, hiszen CBA^* a feladat szövege alapján szabályos háromszög. Tehát, ha az AB egyenesét elforgatjuk C körül $+60°$-al, akkor B^*A^* egyenesét kapjuk. Tehát ha az állításunk az, hogy C' rajta van a B^*A^* egyenesén, akkor ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy C' C körüli $-60°$-al való elforgatottja rajta van az AB egyenesén. Ha ezt belátjuk, akkor készen vagyunk.



Forgassuk el C'-t C körül $-60°$-al, így C''-t kapjuk. Ebből következik, hogy $CC'C''$

szabályos háromszög (hiszen egy olyan egyenlő szárú háromszög, aminek az alappal szemközti szöge $60°$). Mivel T_c felezőpontja a CC'-nek (a tengelyes tükrözés miatt), ezért $C''T_c$ súlyvonala a $CC'C''$ háromszögnek. Viszont egy szabályos háromszögben a súlyvonal merőleges az oldalra, tehát $C''T_cC\sphericalangle = 90°$. Mivel $C''T_cC\sphericalangle$ és a $CT_cB\sphericalangle$ $180°$-ra egészítik ki egymást, ezért C'' rajta van T_cB egyenesén, azaz az AB egyenesén.

Mivel C' $-60°$-os elforgatottja C körül rajta lesz az AB egyenesén, ezért C' rajta lesz az AB egyenesének C körül $+60°$-os elforgatottján azaz a B^*A^*-n, tehát beláttuk az állítást, **hogy $\mathbf{A^*}, \mathbf{B^*}$ és $\mathbf{C'}$ egy egyenesre illeszkednek**.