**B. 4019.**
Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.
redhat24@freemail.hu

**Feladat:**
Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész számra

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

---

**Megoldás:**

Úgy fogjuk bebízonyítani az állítást, hogy megmutatjuk, hogy az $\frac{1}{4}$ egy felső korlátja a fenti sornak. Ehhez felhasználunk egy ismert határértéket: Tudjuk, hogy a négyzetszámok reciprokösszegének határértéke $\frac{\pi^2}{6}$ (Forrás: Urbán János - Határértékszámítás (I. fejezet/5., 75. gyakorlófeladat, megoldása megtalálható a fejezet utolsó részében)):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Ebből az $a_n=\frac{1}{n^2}$ sorozatból ki kell vennünk a páros négyzetszámok reciprokát, illetve az 1-et.

Vegyük ki először csak az 1-et, majd az első két páros, illetve az első két páratlan négyzetszám reciprok összegét $(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2})$. Mivel az $a_n$ sorozat szigorúan monoton nő, ezért a határértéke egyben egy felső korlát is, tehát:

$$\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}>\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Most ha megnézzük olyan lesz a sorozat, hogy felváltva jönnek a páros és páratlan négyzetszámok reciprokai. Tudjuk, hogy minden elem kisebb az előtte lévőnél (hiszen a nevező folyamatosan nő). Írjunk mindegyik páros négyzetszám reciprokának a helyére a nála nagyobb páratlan négyzetszám reciprokát (ami értékben kisebb, tehát végül az eredetinél egy kisebb sorozatot kapunk):

$$\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}>\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Tehát ebből következik, hogy:

$$\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}>\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Osszuk le mindkét oldalt kettővel:

$$\frac{\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}}{2}>\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Ha jól megnézzük ez a sorozat már majdnem olyan mint a feladatban kitűzött, csak hiányzik az elejéről a $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}$. Adjuk ezt hozzá:

$$\frac{\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}>\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

A bal oldalnak felső korlátja a 0,2418, így a jobb oldalnak is. Mivel a jobb oldalnak felső korlátja a 0,2418, ezért az $\frac{1}{4}$ is (hiszen $\frac{1}{4}>0,2418$), tehát beláttuk az állítást:

$$\mathbf{\frac{1}{4}>\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}}$$