Jelek és rendszerek 2. házi

Kriván Bálint CBVOEN
Gyakorlat vezető: Farkasvölgyi Andrea

2014. április 26.

2 (a)
Nézzük először az FI-t:

$$\underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1,2 & -0,5 \\ 2 & -1,2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + 0,45u(t)$$

Használva a szokványos jelöléseket:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1,2 & -0,5 \\ 2 & -1,2 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \end{bmatrix} \quad D = 0,45$$

Tudjuk, hogy:

$$H(j\omega) = \frac{\underline{C}^T \operatorname{adj}(j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})\underline{B}}{\det(j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})} + D$$

Felírva $j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}$ mátrixot, majd ennek adjungáltját és determinánsát:

$$j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} j\omega + 1,2 & 0,5 \\ -2 & j\omega + 1,2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = \begin{bmatrix} j\omega + 1,2 & -0,5 \\ 2 & j\omega + 1,2 \end{bmatrix}$$

$$\det(j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = (j\omega + 1,2)^2 + 1 = (j\omega)^2 + 2,4j\omega + 2,44$$

Innen már kiszámolhatjuk $H(j\omega)$-t:

$$H(j\omega) = \frac{\begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega + 1,2 & -0,5 \\ 2 & j\omega + 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{bmatrix}}{(j\omega)^2 + 2,4j\omega + 2,44} + 0,45 =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (0,8j\omega - 0,24) & (-0,6j\omega - 1,12) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{bmatrix}}{(j\omega)^2 + 2,4j\omega + 2,44} + 0,45 =$$

$$= \frac{0,18j\omega - 1,744}{(j\omega)^2 + 2,4j\omega + 2,44} + 0,45 = \boxed{\frac{0,45(j\omega)^2 + 1,26j\omega - 0,646}{(j\omega)^2 + 2,4j\omega + 2,44}}$$

Nézzük a DI-t:

$$\underline{x}[k+1] = \begin{bmatrix} -1 & -0,7 \\ 0,8 & 0,8 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} -0,4 & 0,5 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + 1,3u[k]$$

Ebből:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -0,7 \\ 0,8 & 0,8 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} -0,4 & 0,5 \end{bmatrix} \quad D = 1,3$$

Tudjuk, hogy:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\underline{C}^T \operatorname{adj}(e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})\underline{B}}{\det(e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})} + D$$

Felírva $e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}$ mátrixot, majd ennek adjungáltját és determinánsát:

$$e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} + 1 & 0,7 \\ -0,8 & e^{j\vartheta} - 0,8 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} - 0,8 & -0,7 \\ 0,8 & e^{j\vartheta} + 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = e^{2j\vartheta} + 0,2e^{j\vartheta} - 0,24$$

Ebből kiszámíthatjuk $H(e^{j\vartheta})$-t:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\begin{bmatrix} -0,4 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} - 0,8 & -0,7 \\ 0,8 & e^{j\vartheta} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix}}{e^{2j\vartheta} + 0,2e^{j\vartheta} - 0,24} + 1,3 =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (-0,4e^{j\vartheta} + 0,72) & (0,5e^{j\vartheta} + 0,78) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix}}{e^{2j\vartheta} + 0,2e^{j\vartheta} - 0,24} + 1,3 =$$

$$= \frac{0,02e^{j\vartheta} + 0,972}{(e^{j\vartheta})^2 + 0,2e^{j\vartheta} - 0,24} + 1,3 = \boxed{\frac{1,3e^{2j\vartheta} + 0,28e^{j\vartheta} + 0,66}{e^{2j\vartheta} + 0,2e^{j\vartheta} - 0,24}}$$

2 (b)

Kezdjük az FI jellel:

$$u(t) = -2,75t + 11\varepsilon(t) \cdot t - 16,5 \quad \text{ha} \ -6 \leqslant t \leqslant 2 \quad \text{illetve, } u(t+8) = u(t)$$

A komplex Fourier-sor p. együtthatójának kiszámítása:

$$\overline{U}_p^C = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-j\omega_0 pt} \, dt$$

Ahol $T = 8$, illetve $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Jelenleg egyszerűbb, ha az integrálási határt nem -4-től 4-ig, hanem -6-tól 2-ig válasszuk:

$$\overline{U}_p^C = \frac{1}{8} \int_{-6}^{2} u(t) e^{-j\omega_0 pt} \, dt = \frac{1}{8} \int_{-6}^{0} (-2,75t - 16,5) e^{-j\omega_0 pt} \, dt + \frac{1}{8} \int_{0}^{2} (8,25t - 16,5) e^{-j\omega_0 pt} \, dt =$$

$$= \frac{1}{8} \int_{-6}^{0} (-2,75t) e^{-j\omega_0 pt} \, dt + \frac{1}{8} \int_{0}^{2} (8,25t) e^{-j\omega_0 pt} \, dt + \frac{1}{8} \int_{-6}^{2} (-16,5) e^{-j\omega_0 pt} \, dt =$$

$$= \frac{-2,75}{8}\int_{-6}^{0} te^{-j\omega_0 pt}\,dt + \frac{8,25}{8}\int_{0}^{2} te^{-j\omega_0 pt}\,dt + \frac{1}{8}\left[\frac{(-16,5)e^{-j\omega_0 pt}}{-j\omega_0 p}\right]_{-6}^{2} =$$

$$= \frac{-2,75}{8}\left(\left[\frac{te^{-j\omega_0 pt}}{-j\omega_0 p}\right]_{-6}^{0} - \left[\frac{e^{-j\omega_0 pt}}{(j\omega_0 p)^2}\right]_{-6}^{0}\right) + \frac{8,25}{8}\left(\left[\frac{te^{-j\omega_0 pt}}{-j\omega_0 p}\right]_{0}^{2} - \left[\frac{e^{-j\omega_0 pt}}{(j\omega_0 p)^2}\right]_{0}^{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\left[\frac{(-16,5)e^{-j\omega_0 pt}}{-j\omega_0 p}\right]_{-6}^{2} =$$

$$= \frac{-2,75}{8}\left(\frac{(-6)e^{6j\omega_0 p}}{j\omega_0 p} - \frac{1-e^{6j\omega_0 p}}{(j\omega_0 p)^2}\right) + \frac{8,25}{8}\left(\frac{2e^{-2j\omega_0 p}}{-j\omega_0 p} - \frac{e^{-2j\omega_0 p}-1}{(j\omega_0 p)^2}\right) - \frac{16,5}{8}\cdot\frac{(e^{-2j\omega_0 p} - e^{6j\omega_0 p})}{-j\omega_0 p} =$$

$$= \frac{-2,75}{8}\cdot\frac{(-6)j\omega_0 p\cdot e^{6j\omega_0 p} - 1 + e^{6j\omega_0 p}}{(j\omega_0 p)^2} + \frac{8,25}{8}\cdot\frac{-2j\omega_0 p\cdot e^{-2j\omega_0 p} - e^{-2j\omega_0 p} + 1}{(j\omega_0 p)^2} +$$

$$+\frac{16,5}{8}\cdot\frac{j\omega_0 p(e^{-2j\omega_0 p} - e^{6j\omega_0 p})}{(j\omega_0 p)^2} =$$

$$= \frac{-2,75}{8}\cdot\frac{-1+e^{6j\omega_0 p}}{(j\omega_0 p)^2} + \frac{8,25}{8}\cdot\frac{-e^{-2j\omega_0 p}+1}{(j\omega_0 p)^2} =$$

$$= \frac{2,75}{8}\cdot\frac{-1+e^{6j\omega_0 p}}{(\omega_0 p)^2} + \frac{8,25}{8}\cdot\frac{e^{-2j\omega_0 p}-1}{(\omega_0 p)^2} = \boxed{\frac{1}{8}\left(\frac{2,75e^{6j\omega_0 p} + 8,25e^{-2j\omega_0 p} - 11}{(\omega_0 p)^2}\right)}$$

Amire még szükségünk van az $\overline{U}_0^C$:

$$\overline{U}_0^C = \frac{1}{8}\int_{-6}^{2} u(t)\,dt = \frac{1}{8}\int_{-6}^{0}(-2,75t - 16,5)\,dt + \frac{1}{8}\int_{0}^{2}(8,25t - 16,5)\,dt =$$

Ez pedig két háromszög (előjeles) területe, azaz:

$$= \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{6\cdot(-16,5)}{2} + \frac{2\cdot(-16,5)}{2}\right) = -8,25$$

Mérnöki valós alak:

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} U_p \cos(p\omega t + \varrho_p)$$

ahol:

$$U_p = 2|\overline{U}_p^C|$$

$$U_0 = \overline{U}_0^C$$

$$\varrho_p = \mathrm{arc}\{\overline{U}_p^C\}$$

Tehát:

$$u(t) = -8,25 + \sum_{p=1}^{\infty} 2|\overline{U}_p^C|\cos(p\omega t + \mathrm{arc}\{\overline{U}_p^C\})$$

Az előzőekben kiszámolt $\overline{U}_p^C$-t $p = 1, 2, 3$-ra kiszámolhatjuk és az alábbi táblázatba foglalhatjuk a kérdéses értékeket:

p	$\overline{U}_p^C$	$2\lvert\overline{U}_p^C\rvert$	$\mathrm{arc}\{\overline{U}_p^C\}$
1	$-2,2291-2,2291j$	$6,3048$	$-\frac{3\pi}{4}$
2	$-1,1145$	$2,2291$	π
3	$-0,2477+0,2477j$	$0,7005$	$\frac{3\pi}{4}$

Tehát akkor a Fourier polinom, ami legalább 3 nem nulla felharmonikust tartalmaz:

$$u(t) \approx \boxed{-8,25+6,3048\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{3\pi}{4}\right)+2,2291\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\pi\right)+0,7005\cos\left(\frac{3\pi}{4}t+\frac{3\pi}{4}\right)}$$

Most nézzük meg a DI jelet:

$$u[k] = 18-3,6k \quad \text{ha } 0 \leqslant k \leqslant 5 \quad \text{illetve, } u[k+6]=u[k]$$

A komplex Fourier-sor p. együtthatója:

$$\overline{U}_p^C = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} u[k]\cdot e^{-jp\theta k}$$

Ahol $L=6$, illetve $\theta=\frac{2\pi}{L}=\frac{\pi}{3}$, tehát:

$$\overline{U}_p^C = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} u[k]\cdot e^{-jp\theta k}$$

Mérnöki valós alak, ha L páros:

$$u[k] = U_0+\sum_{p=1}^{\frac{L}{2}-1} 2|\overline{U}_p^C|\cos(p\theta k+\varrho_p)+|\overline{U}_{L/2}^C|(-1)^k$$

ahol $\varrho_p=\mathrm{arc}\{\overline{U}_p^C\}$ Számoljuk ki a komplex Fourier-sor együtthatókat $p=0,1,2,3$-ra:

$$\overline{U}_0^C = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} u[k] = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5}(18-3,6k) = 9$$

$$\overline{U}_1^C = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} u[k]e^{-j\theta k} = \frac{1}{6}\left(18+14,4e^{-j\theta}+10,8e^{-2j\theta}+7,2e^{-3j\theta}+3,6e^{-4j\theta}\right) =$$

$$= 3+2,4e^{-j\frac{\pi}{3}}+1,8e^{-2j\frac{\pi}{3}}+1,2e^{-j\pi}+0,6e^{-4j\frac{\pi}{3}} = 1,8+2,4e^{-j\frac{\pi}{3}}+1,8e^{-2j\frac{\pi}{3}}+0,6e^{-4j\frac{\pi}{3}} = \boxed{3,6e^{-j\frac{\pi}{3}}}$$

$$\overline{U}_2^C = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} u[k]e^{-2j\theta k} = \frac{1}{6}\left(18+14,4e^{-2j\theta}+10,8e^{-4j\theta}+7,2e^{-6j\theta}+3,6e^{-8j\theta}\right) =$$

$$= 3+2,4e^{-2j\frac{\pi}{3}}+1,8e^{-4j\frac{\pi}{3}}+1,2e^{-2j\pi}+0,6e^{-8j\frac{\pi}{3}} = 4,2+2,4e^{-2j\frac{\pi}{3}}+1,8e^{-4j\frac{\pi}{3}}+0,6e^{-8j\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{3,6}{\sqrt{3}}e^{-j\frac{\pi}{6}}}$$

$$\overline{U}_3^C = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} u[k]e^{-3j\theta k} = \frac{1}{6}\left(18+14,4e^{-3j\theta}+10,8e^{-6j\theta}+7,2e^{-9j\theta}+3,6e^{-12j\theta}\right) =$$

$$= 3+2,4e^{-j\pi}+1,8e^{-2j\pi}+1,2e^{-3j\pi}+0,6e^{-4j\pi} = 3-2,4+1,8-1,2+0,6 = \boxed{1,8}$$

Helyettesítsünk be a mérnöki valós alakba:

$$u[k] = U_0 + \sum_{p=1}^{\frac{L}{2}-1} |\overline{U}_p^C| \cos(p\theta k + \varrho_p) =$$

$$= 9 + |2\overline{U}_1^C| \cos(\theta k + \varrho_1) + |2\overline{U}_2^C| \cos(2\theta k + \varrho_2) =$$

$$= \boxed{9 + 7,2 \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{7,2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - \frac{\pi}{6}\right) + 1,8(-1)^k}$$

2 (c)

Kezdjük az FI rendszerrel:

Használjuk a komplex számítási módot! Legyenek a polinom tagjainak megfelelő komplex számok $\overline{U}_0, \overline{U}_1, \overline{U}_2$ és $\overline{U}_3$ a következő módon:

$$\overline{U}_0 = -8,25$$

$$\overline{U}_1 = 6,3048 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

$$\overline{U}_2 = 2,2291 \cdot e^{j\pi}$$

$$\overline{U}_3 = 0,7005 \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

Felhasználva, hogy:

$$H(j\omega) = \frac{0,45(j\omega)^2 + 1,26j\omega - 0,646}{(j\omega)^2 + 2,4j\omega + 2,44}$$

A rendszernek a gerjesztés egyes komponenseire adott válaszainak megfelelő komplex számok:

$$\overline{Y}_0 = H(0) \cdot \overline{U}_0 = \frac{-0,646}{2,44} \cdot (-8,25) = 2,1842$$

$$\overline{Y}_1 = H\left(j\frac{\pi}{4}\right) \cdot \overline{U}_1 = (0,5162e^{1,5196j})(6,3048 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}}) = 3,2544 \cdot e^{-0,8365j}$$

$$\overline{Y}_2 = H\left(j\frac{\pi}{2}\right) \cdot \overline{U}_2 = (0,7019e^{0,7185j})(2,2291 \cdot e^{j\pi}) = 1,5646 \cdot e^{-2,4231j}$$

$$\overline{Y}_3 = H\left(j\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \overline{U}_3 = (0,67e^{0,3110j})(0,7005 \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}) = 0,4693 \cdot e^{2,6672j}$$

Ebből felírhatóak a gerjesztés egyes komponenseire adott válaszok:

$$y_0(t) = 2,1842$$

$$y_1(t) = 3,2544 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - 0,8365\right)$$

$$y_2(t) = 1,5646 \cos\left(\frac{\pi}{2}t - 2,4231\right)$$

$$y_3(t) = 0,4693 \cos\left(\frac{3\pi}{4}t + 2,6672\right)$$

Így a rendszer válasza a megadott gerjesztésre:

$$y(t) \approx \boxed{2,1842 + 3,2544 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - 0,8365\right) +}$$

$$\boxed{+1,5646\cos\left(\frac{\pi}{2}t-2,4231\right)+0,4693\cos\left(\frac{3\pi}{4}t+2,6672\right)}$$

Nézzük a DI rendszert:
Hasonlóan az előzőnél, írjuk fel $\overline{U}_0, \overline{U}_1, \overline{U}_2$ és $\overline{U}_3$-mat:

$$\overline{U}_0 = 9$$

$$\overline{U}_1 = 7,2\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$\overline{U}_2 = \frac{7,2}{\sqrt{3}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\overline{U}_3 = 1,8$$

Felhasználva, hogy:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{1,3e^{2j\vartheta}+0,28e^{j\vartheta}+0,66}{e^{2j\vartheta}+0,2e^{j\vartheta}-0,24}$$

A rendszernek a gerjesztés egyes komponenseire adott válaszainak megfelelő komplex számok:

$$\overline{Y}_0 = H(e^{0j})\cdot\overline{U}_0 = \frac{7}{3}\cdot 9 = 21$$

$$\overline{Y}_1 = H(e^{j\frac{\pi}{3}})\cdot\overline{U}_1 = (1,1278e^{-0,6612j})(7,2\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}) = 8,1202\cdot e^{-1,7084j}$$

$$\overline{Y}_2 = H(e^{j\frac{2\pi}{3}})\cdot\overline{U}_2 = (0,82e^{0,7350j})\left(\frac{7,2}{\sqrt{3}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}\right) = 3,4087\cdot e^{0,2114j}$$

$$\overline{Y}_3 = H(je^{\pi})\cdot\overline{U}_3 = (3)(1,8) = 5,4$$

A gerjesztés egyes komponenseire adott válaszok:

$$y_0[k] = 21$$

$$y_1[k] = 8,1202\cos\left(\frac{\pi}{3}k-1,7084\right)$$

$$y_2[k] = 3,4087\cos\left(\frac{2\pi}{3}k+0,2114\right)$$

$$y_3[k] = 5,4\cdot(-1)^k$$

Így a rendszer válasza a megadott gerjesztésre:

$$\boxed{y[k] = 21+8,1202\cos\left(\frac{\pi}{3}k-1,7084\right)+3,4087\cos\left(\frac{2\pi}{3}k+0,2114\right)+5,4\cdot(-1)^k}$$

2 (d)
Kezdjük az FI rendszerrel:

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

$$u(t) = \begin{cases} -16,5-2,75t & \text{ha } -6\leqslant x\leqslant 0 \\ -16,5+8,25t & \text{ha } 0<x\leqslant 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Így az integrál egyszerűsödik:

$$U(j\omega) = \int_{-6}^{0} (-16,5 - 2,75t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{2} (-16,5 + 8,25t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

Ehhez nézzük meg a következő integrált:

$$\int t \cdot e^{-j\omega t}\, dt = t \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} - \int \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\, dt = t \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{-\omega^2} = \frac{e^{-j\omega t}}{\omega}\left(jt + \frac{1}{\omega}\right)$$

Akkor nézzük:

$$U(j\omega) = \int_{-6}^{0} (-16,5 - 2,75t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{2} (-16,5 + 8,25t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \left[-16,5 \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-6}^{0} - 2,75\left[\frac{e^{-j\omega t}}{\omega}\left(jt + \frac{1}{\omega}\right)\right]_{-6}^{0} + \left[-16,5 \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{0}^{2} + 8,25\left[\frac{e^{-j\omega t}}{\omega}\left(jt + \frac{1}{\omega}\right)\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left(16,5 \cdot \frac{1}{j\omega} - 16,5 \cdot \frac{e^{6j\omega}}{j\omega}\right) - 2,75\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{6j\omega}}{\omega}\left(-6j + \frac{1}{\omega}\right)\right) + \left(16,5 \cdot \frac{e^{-2j\omega}}{j\omega} - 16,5 \cdot \frac{1}{j\omega}\right) +$$

$$+8,25\left(\frac{e^{-2j\omega}}{\omega}\left(2j + \frac{1}{\omega}\right) - \frac{1}{\omega^2}\right) =$$

$$= -2,75\left(\frac{1 - e^{6j\omega}}{\omega^2}\right) + 8,25\left(\frac{e^{-2j\omega} - 1}{\omega^2}\right) = \boxed{\frac{2,75 \cdot e^{6j\omega} + 8,25 \cdot e^{-2j\omega} - 11}{\omega^2}}$$

A spektrum a következőképpen számolható:

$$|Y(j\omega)| = |U(j\omega) \cdot H(j\omega)|$$

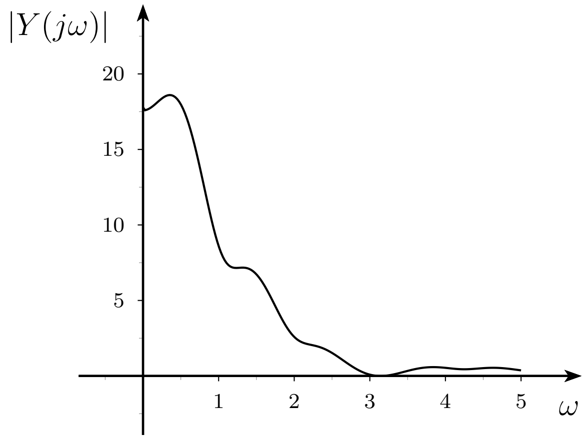
Mivel

$$H(j\omega) = \frac{0,45(j\omega)^2 + 1,26j\omega - 0,646}{(j\omega)^2 + 2,4j\omega + 2,44}$$

Ezért:

$$|Y(j\omega)| = \left|\frac{2,75 \cdot e^{6j\omega} + 8,25 \cdot e^{-2j\omega} - 11}{\omega^2} \cdot \frac{0,45(j\omega)^2 + 1,26j\omega - 0,646}{(j\omega)^2 + 2,4j\omega + 2,44}\right|$$

Ábrázolva $\omega \in [0, 5]$ intervallumon:



Folytassuk a DI rendszerrel:

$$U(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \cdot e^{-j\vartheta k}$$

$$u[k] = \begin{cases} 18 - 3,6k & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Így a szumma leegyszerűsödik:

$$U(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=0}^{5} (18 - 3,6k) \cdot e^{-j\vartheta k} =$$

$$= 18 + 14,4 \cdot e^{-j\vartheta} + 10,8 \cdot e^{-2j\vartheta} + 7,2 \cdot e^{-3j\vartheta} + 3,6 \cdot e^{-4j\vartheta}$$

A spektrum a következőképpen számolható:

$$|Y(e^{j\vartheta})| = |U(e^{j\vartheta}) \cdot H(e^{j\vartheta})|$$

Mivel

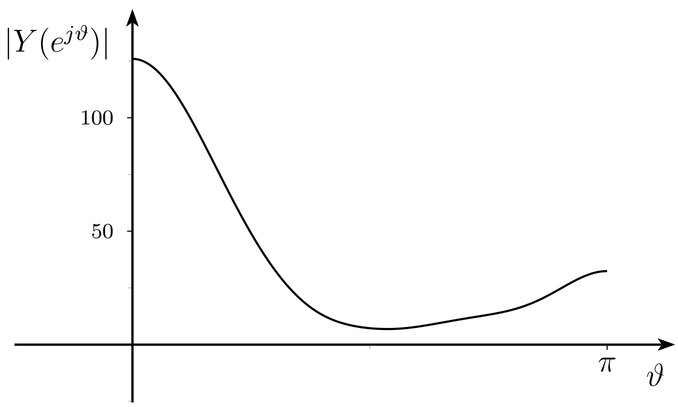
$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{1,3e^{2j\vartheta} + 0,28e^{j\vartheta} + 0,66}{e^{2j\vartheta} + 0,2e^{j\vartheta} - 0,24}$$

Ezért:

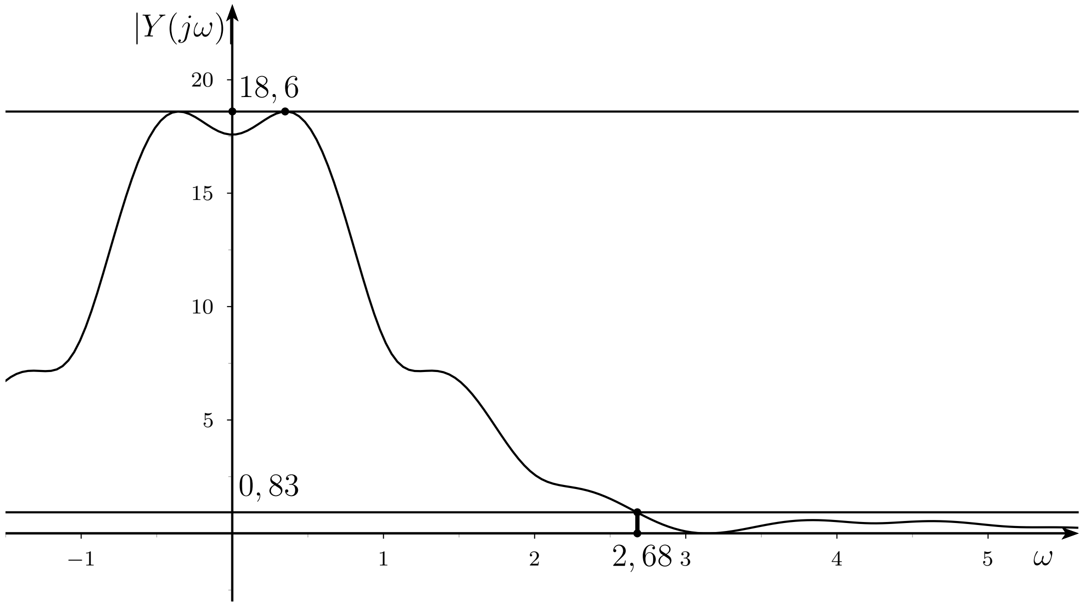
$$|Y(e^{j\vartheta})| = \left| (18 + 14,4 \cdot e^{-j\vartheta} + 10,8 \cdot e^{-2j\vartheta} + 7,2 \cdot e^{-3j\vartheta} + 3,6 \cdot e^{-4j\vartheta}) \cdot \frac{1,3e^{2j\vartheta} + 0,28e^{j\vartheta} + 0,66}{e^{2j\vartheta} + 0,2e^{j\vartheta} - 0,24} \right| =$$

$$= \left| \frac{29,952 + 21,888 \cdot e^{-j\vartheta} + 23,76 \cdot e^{j\vartheta} + 13,824 \cdot e^{-2j\vartheta} + 23,4 \cdot e^{2j\vartheta} + 5,76 \cdot e^{-3j\vartheta} + 2,376e^{-4j\vartheta}}{e^{2j\vartheta} + 0,2e^{j\vartheta} - 0,24} \right|$$

Ábrázolva $\vartheta \in [0, \pi]$ intervallumon:



2 (e)
Ábrázoljuk a spektrumot, és megkeressük a maximum helyet:



Ez $18,6$-nál van, így a kérdéses szávszélesség: $2,68$.