B. 3977.
Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 10. o. t.
redhat24@freemail.hu

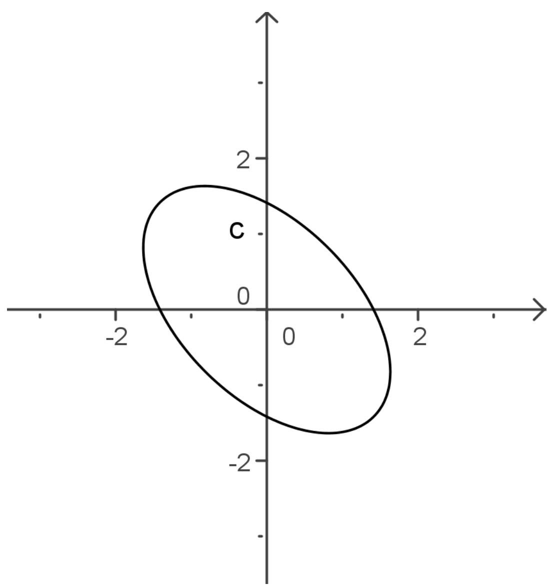
Feladat:
Legyenek x, y, z pozitív valós számok, melyekre:

$$x^2 + xy + y^2 = 2$$
$$y^2 + yz + z^2 = 5$$
$$z^2 + xz + x^2 = 3$$

Határozzuk meg $xy + yz + xz$ értékét!

Megoldás:

Ábrázoljuk az első egyenletet ($x^2 + xy + y^2 = 2$), mint függvényt:



1. ábra.

Láthatjuk, hogy ez egy ellipszis. Forgassuk el 45°-al.

Pont forgatása 45°-al:

$$P(x_1; y_1) = P(r \cdot \cos\alpha; r \cdot \sin\alpha)$$
$$P(r \cdot \cos(\alpha + 45°); r \cdot \sin(\alpha + 45°))$$
$$P(r \cdot \cos\alpha \cos 45° - r \cdot \sin\alpha \sin 45°; r \cdot \sin\alpha \cos 45° + r \cdot \cos\alpha \sin 45°)$$
$$P\Big(r \cdot \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} - r \cdot \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}; r \cdot \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} + r \cdot \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}\Big)$$
$$P\Big(\frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}; \frac{y_1 + x_1}{\sqrt{2}}\Big)$$

Tehát, akkor az elforgatott ellipszisünk képlete:

$$\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)\Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Big) + \Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Big)^2 = 2$$

Amit egyszerűsítünk:

$$\frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 2$$

Hasonlóan megtesszük ezt a többi egyenlettel/ellipszissel:

$$\frac{3y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 5$$

$$\frac{3z^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 3$$

Összeadva kapjuk, hogy:

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

Fontos, hogy az x, y és z már a 45°-al elforgatott koordinátarendszerünk pontjai!

[...]

Tehát a $xy + yz + xz$ kifejezés értéke (számológéppel találtam meg):

$$xy + yz + xz = \pm 2\sqrt{2}$$