B. 3994.
Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 10. o. t.
redhat24@freemail.hu

Feladat:
Határozzuk meg az összes olyan n nemnegatív egész számot, amelyhez találhatók olyan a és b egész számok, hogy $n^2 = a + b$ és $n^3 = a^2 + b^2$.

Megoldás:

$$n^2 = a + b \tag{1}$$
$$n^3 = a^2 + b^2 \tag{2}$$

Az n az nemnegatív egész szám, így $n \geqslant 0$. Nézzük meg az első pár n számra: $n = 0; 1; 2; 3$. Ha $n = 0$, akkor nyilvánvalóan, $a = 0$ és $b = 0$-ra teljesül a két egyenlet. Hasonlóan $n = 1$, ekkor például $a = 1$ és $b = 0$. Ha $n = 2$, akkor pedig $a = 2$ és $b = 2$ teljesíti az egyenleteket.

Viszont $n = 3$ esetében nem találunk megoldásokat. Bárhogy választjuk a-t és b-t, $a^2 + b^2$ mindig nagyobb lesz mint $3^3 = 27$. Tehát a sejtésünk az az, hogy $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{Z}$ esetekben, nem találunk a és b egészeket, melyekre teljesülnek a fenti egyenletek.

Mivel $n^2 = a + b$, ezért $a = \frac{n^2}{2} + y$, illetve $b = \frac{n^2}{2} - y$, ahol y racionális szám.

Sejtésünk, hogy a (2)-nek a jobb oldala, mindig nagyobb lesz mint a bal oldal, ha $n \geqslant 3$.

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{n^2}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{n^2}{2} - y\right)^2 = \frac{n^4}{2} + 2y^2$$

$$n^3 = \frac{n^4}{2} + 2y^2$$

Azt akarjuk bebizonyítani, a sejtés alapján, hogy $n \geqslant 3$ esetben a jobb oldal nagyobb lesz mint a bal oldal. Ehhez vegyük a jobb oldal minimumát és úgy vizsgáljuk az egyenlőtlenséget (ami a sejtésből ered). Látható, hogy a minimum ott van, ahol $y = 0$:

$$n^3 < \frac{n^4}{2}$$

Leoszthatunk n^3-el, hiszen n nemnegatív egész, illetve $n \neq 0$, mivel $n = 0$ esetet már vizsgáltuk.

$$1 < \frac{n}{2}$$
$$2 < n$$

Innen látható, hogy $n > 2$ esetben a jobb oldal biztosan nagyobb mint a bal (hiszen a jobb oldalon még ott van egy $2y^2$, ami nem negatív), tehát sejtésünket igazoltuk. Természetesen az $n > 2$ ekvivalens az $n \geqslant 3$-al, hiszen egész számokról van szó. $0 \leqslant n \leqslant 2$ esetekben viszont megtaláltunk minden megoldást: $n = \{0; 1; 2\}$.