

B. 3974.

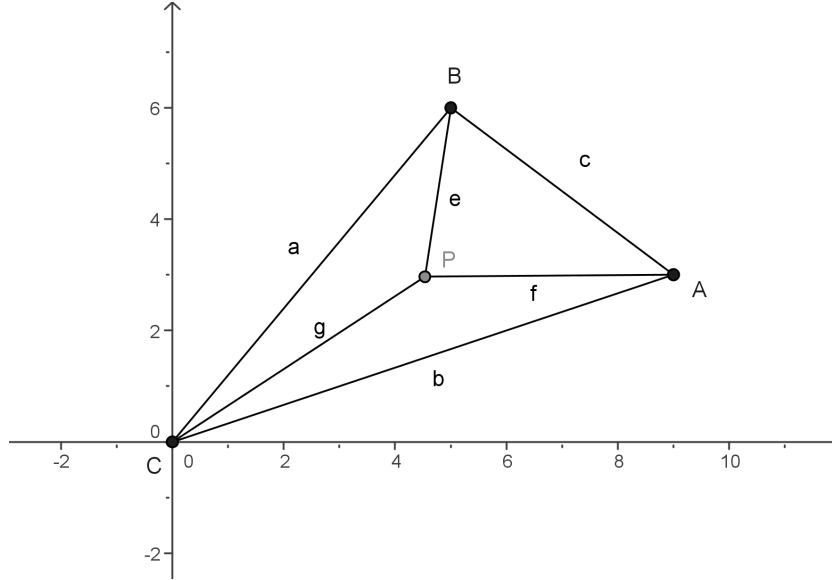
Kriván Bálint

Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 10. o. t.

redhat24@freemail.hu

Feladat:Adott egy ABC háromszög. Mi azon P pontok mértani helye a síkban, amelyekre $AP^2 + BP^2 = CP^2$?**Megoldás:**

Vegyük fel a háromszöget egy koordináta-rendszerben, úgy hogy a C pont legyen a $(0;0)$, az A pont legyen az $(x_1; y_1)$, a B pont pedig az $(x_2; y_2)$. P pontnak a koordinátája legyen $(x; y)$.



1. ábra.

Írjuk fel az állítást, és nézzük meg, hogy a szakaszokat, hogy írhatjuk fel a koordinátákkal:

$$AP^2 + BP^2 = CP^2$$

$$\begin{aligned} (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 &= x^2 + y^2 \\ x_1^2 + x^2 - 2xx_1 + y_1^2 + y^2 - 2yy_1 + x_2^2 + x^2 - 2xx_2 + y_2^2 + y^2 - 2yy_2 &= x^2 + y^2 \\ x_1^2 + x^2 - 2xx_1 + y_1^2 + y^2 - 2yy_1 + x_2^2 - 2xx_2 + y_2^2 - 2yy_2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2xx_1 - 2xx_2 - 2yy_1 - 2yy_2 &= 0 \\ x^2 - 2x(x_1 + x_2) + y^2 - 2y(y_1 + y_2) &= -(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) \end{aligned}$$

Ebből az alakból láthatjuk, hogy körről van szó. Alakítsuk át köregyenlet alakba (a bal oldalt teljes négyzeteket csinálunk, majd korrigálunk).

$$\begin{aligned} (x - (x_1 + x_2))^2 + (y - (y_1 + y_2))^2 - ((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2) &= -(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) \\ (x - (x_1 + x_2))^2 + (y - (y_1 + y_2))^2 &= -(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + ((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2) \end{aligned}$$

Innen leolvashatjuk a jellemzőket, hiszen a kör egyenlete:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2 \quad \text{ahol } (u; v) \text{ a középpont, illetve } r \text{ a sugár}$$

Tehát a P pont egy $(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ középpontú és $\sqrt{-(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + ((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2)}$ sugarú körön lesz rajta.

Ha a gyök alatti kifejezés negatív, akkor nem lesz a feladatnak megfelelő tulajdonságú P pont, ha nulla, akkor pedig csak egy pont lesz (hiszen 0 sugarú kör):

$$-\left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2\right) + \left((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2\right) \leq 0$$

$$-\left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2\right) + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 \leq 0$$

$$2x_1x_2 + 2y_1y_2 \leq 0$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leq 0$$

Tehát ha $x_1x_2 + y_1y_2 < 0$, akkor nincs olyan P pont, amire teljesül, ha $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, akkor pontosan egy ilyen pont van, mégpedig a $(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$, ha pedig pozitív, akkor az előbb felírt képlet által meghatározott kör a mértani helye a P pontoknak.