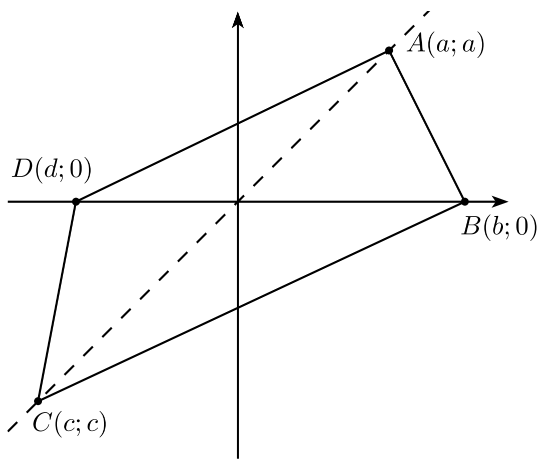
B. 4015.
Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.
redhat24@freemail.hu

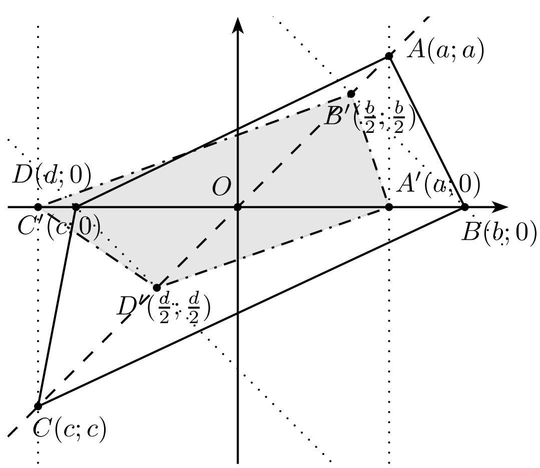
Feladat:
Egy konvex négyszög átlói 45°-os szöget zárnak be. Állítsunk merőlegest a négyszög minden csúcsából a vele szomszédos két csúcsot összekötő átló egyenesére. Hogyan aránylik a merőlegesek talppontjai által alkotott négyszög területe az eredeti négyszög területéhez?

Megoldás:

Vegyünk fel egy koordinátarendszert és helyezzük bele a négyszöget. De úgy, hogy az egyik átlója az $x = y$ egyenes legyen, a másik pedig az x tengely. Ekkor teljesül az, hogy 45°-os szöget zár be a két átló:



Vetítsük merőlegesen a megfelelő átlókra az A, B, C és D pontokat, így kapjuk rendre A', B', C' és D' pontokat:



Az magától adódik, hogy $A'(a;0)$ és $C'(c;0)$, hiszen x tengelyre való merőleges vetítésnél, x koordináta marad, y koordináta 0 lesz. $B'(\frac{b}{2};\frac{b}{2})$ és $D'(\frac{d}{2};\frac{d}{2})$ pedig azért, mert $OB'B$ és $OD'D$ egyenlőszárú háromszög, tehát első koordinátája A'-nek B'-nek, A és B első koordinátájának a fele. A' és B' második koordinátája viszont azonos az első koordinátával, hiszen mindkettő az $x = y$ egyenesen van rajta.

Nincs más dolgunk, mint kiszámolni az eredeti és a beszínezett négyszög területét és megvizsgálni a köztük lévő kapcsolatot. Ezt úgy tesszük meg, hogy mindkét négyszöget felbontjuk 4-4 háromszögre, és ezeknek a területösszegét vesszük. A háromszög területeit pedig vektoriális szorzattal számoljuk ki (ha $\underline{x}$ és $\underline{y}$ a háromszög egy csúcsából indított oldalvektorai, akkor a háromszög területe $|\frac{\underline{x}\times\underline{y}}{2}|$).

Írjuk fel az eredeti $ABCD$ négyszög területét:

$$T_{ABCD} = T_{AOB} + T_{BOC} + T_{COD} + T_{DOA}$$

$$T_{ABCD} = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| + |\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD}| + |\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OA}|}{2}$$

Egy háromszög területét az alábbi módon számolhatjuk ki:

$$T_{\text{háromszög}} = \left|\frac{\underline{x} \times \underline{y}}{2}\right| = \left|\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}{2}\right| = \left|\frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{2}\right|$$

Tehát

$$T_{ABCD} = \frac{|a \cdot 0 - a \cdot b| + |b \cdot c - 0 \cdot c| + |c \cdot 0 - c \cdot d| + |d \cdot a - 0 \cdot a|}{2} =$$

$$= \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| + |\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| + |\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}| + |\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}|}{\mathbf{2}}$$

Most vizsgáljuk meg, hogy mennyi az $A'B'C'D'$ négyszög területe:

$$T_{A'B'C'D'} = T_{B'OA'} + T_{A'OD'} + T_{D'OC'} + T_{C'OB'}$$

$$T_{A'B'C'D'} = \frac{|\overrightarrow{OB'} \times \overrightarrow{OA'}| + |\overrightarrow{OA'} \times \overrightarrow{OD'}| + |\overrightarrow{OD'} \times \overrightarrow{OC'}| + |\overrightarrow{OC'} \times \overrightarrow{OB'}|}{2}$$

Hasonlóan, ahogy a T_{ABCD}-nél tettük kiszámoljuk a vektoriális szorzatokat

$$T_{A'B'C'D'} = \frac{|\frac{b}{2} \cdot 0 - \frac{b}{2} \cdot a| + |a \cdot \frac{d}{2} - 0 \cdot \frac{d}{2}| + |\frac{d}{2} \cdot 0 - \frac{d}{2} \cdot c| + |c \cdot \frac{b}{2} - 0 \cdot \frac{b}{2}|}{2} =$$

$$= \frac{|\frac{b}{2} \cdot a| + |a \cdot \frac{d}{2}| + |\frac{d}{2} \cdot c| + |c \cdot \frac{b}{2}|}{2} = \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}| + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}| + |\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}| + |\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}|}{\mathbf{4}}$$

Látható, hogy

$$T_{ABCD} = \frac{T_{A'B'C'D'}}{2}$$

Tehát a merőlegesek talppontjai által alkotott négyszög területe fele az eredeti négyszögének.