

**B. 4028.**

Kriván Bálint

Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.

redhat24@freemail.hu

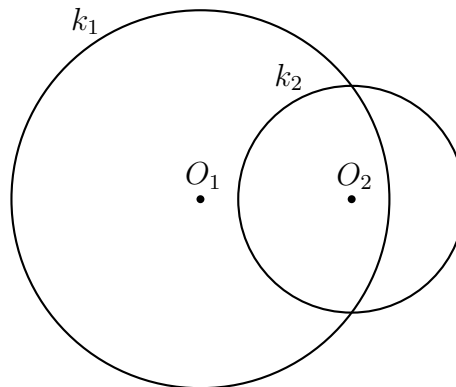
**Feladat:**

Két gömb sugara 5 és 3 egység, középpontjaik távolsága 4 egység. Számítsuk ki a két gömb közös részének térfogatát.

---

**Megoldás:**

A következő két kör a két gömb síkmetszete egy olyan síkkal, ami tartalmazza a két gömb középpontját:



Tulajdonképpen a két gömb közös részét feloszthatjuk 2 db gömbszeletre. Ehhez nem kell más tudnunk, mint a fenti ábrán lévő két kör hatványvonalát, mert ha tudjuk, akkor tudni fogjuk a két gömbszelet „magasságát”.

Segítségül hívjuk a koordináta geometriát: Legyen a  $k_1$  kör középpontja a  $(0; 0)$ -ban, a  $k_2$  kör középpontja pedig a  $(4; 0)$ -ban (tehát az egyik feltételnek, hogy a két középpont távolsága 4 egység eleget tettünk). Feladat szövege alapján tudjuk, hogy  $k_1$  sugara 5,  $k_2$  sugara 3:

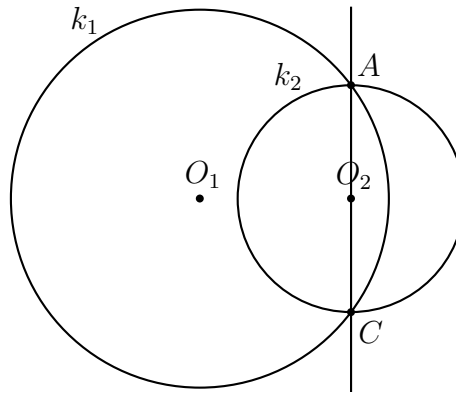
$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5^2 \\ (x - 4)^2 + y^2 = 3^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{egymásból kivonva őket} \\ \text{megkapjuk a hatványvonalat.} \end{array}$$

$$8x - 16 = 25 - 9$$

$$8x = 32$$

$$x = 4$$

Tehát az  $x = 4$  egyenes a fenti ábrán lévő két kör hatványvonala, ami jelen esetben pont átmegy a  $k_2$  kör középpontján:



Az előző ábra segítségével könnyen kiszámolhatjuk a két gömbszelet térfogatát: Az egyik gömbszelet térfogata a  $k_2$  gömb térfogatának a fele, vagyis:

$$V_{k_2\text{szelet}} = \frac{\frac{\pi}{6}d_2^3}{2} = \frac{\pi}{6}4r_2^3 = \frac{2\pi}{3}r_2^3 = \frac{2\pi}{3}3^3 \quad \text{ahol } d_2 \text{ a } k_2 \text{ gömb átmérője, } r_2 \text{ a sugara}$$

A másik pedig (a  $k_1$ -hez tartozó):

$$V_{k_1\text{szelet}} = \frac{\pi}{3}m^2(3r_1 - m) \quad (\text{ahol } r_1 \text{ a gömb sugara, } m \text{ a gömbszelet „magassága”})$$

Mivel  $k_1$  gömb sugara 5, illetve  $O_1O_2 = 4$ , ezért  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}m^2(3r_1 - m) &= \frac{\pi}{3}1^2(3r_1 - 1) = \\ &= \frac{\pi}{3}1^2(15 - 1) = \frac{\pi}{3}14 \end{aligned}$$

$$V_{k_2\text{szelet}} + V_{k_1\text{szelet}} = 18\pi + \frac{14\pi}{3} = \left(18 + \frac{14}{3}\right)\pi$$

**Tehát a két gömb közös részének térfogata  $\left(18 + \frac{14}{3}\right)\pi$ .**