Jelek és rendszerek 3. házi

Kriván Bálint CBVOEN
Gyakorlat vezető: Farkasvölgyi Andrea

2014. április 26.

3.1 (a)

A feladat által adott impulzusválaszok:

$$h(t) = 4\delta(t) + \varepsilon(t)\{6e^{-0,2t} + (-4) \cdot e^{-0,3t}\}$$
$$h[k] = 4\varepsilon[k](0,5)^k \cos(0,3k + (-0,5))$$

Kezdjük az FI-vel, mert annak mindegyik tagjának a transzformáltja ismert:

$$H(s) = 4 + \frac{6}{s+0,2} - \frac{4}{s+0,3} = \frac{4(s+0,2)(s+0,3) + 6(s+0,3) - 4(s+0,2)}{(s+0,2)(s+0,3)} =$$
$$= \boxed{\frac{4(s^2+s+0,31)}{(s+0,2)(s+0,3)}}$$

A DI rendszert előtte egy kicsit alakítani kell:

$$h[k] = 4\varepsilon[k](0,5)^k \cos(0,3k + (-0,5)) =$$
$$= 4\varepsilon[k](0,5)^k \Big(\cos(-0,5)\cos(0,3k) - \sin(-0,5)\sin(0,3k) \Big)$$

Ezt pedig már könnyen transzformálhatjuk:

$$H(z) = 4\cos(0,5)\mathcal{Z}\{\varepsilon[k](0,5)^k\cos(0,3k)\} + 4\sin(0,5)\mathcal{Z}\{\varepsilon[k](0,5)^k\sin(0,3k)\} =$$
$$= 4\cos(0,5)\frac{\left(\frac{z}{0,5}\right)^2 - \cos(0,3)\left(\frac{z}{0,5}\right)}{\left(\frac{z}{0,5}\right)^2 - 2\cos(0,3)\left(\frac{z}{0,5}\right) + 1} + 4\sin(0,5)\frac{\sin(0,3)\left(\frac{z}{0,5}\right)}{\left(\frac{z}{0,5}\right)^2 - 2\cos(0,3)\left(\frac{z}{0,5}\right) + 1} =$$
$$= \frac{\Big(4\cos(0,5)\Big)\Big(4z^2 - 2\cos(0,3)\cdot z\Big) + \Big(4\sin(0,5)\Big)\Big(2\sin(0,3)\cdot z\Big)}{4z^2 - 4\cos(0,3)\cdot z + 1} =$$
$$= \frac{\Big(14,0413z^2 - 6,7071z\Big) + \Big(1,1334z\Big)}{4z^2 - 3,8213z + 1} = \boxed{\frac{14,0413z^2 - 5,5737z}{4z^2 - 3,8213z + 1}}$$

3.1 (b)

Kezdjük az FI rendszerrel, először a bemeneti jel Laplace-transzformáltját határozzuk meg:

$$u(t) = 9\{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1,6)\} \quad \Rightarrow \quad U(s) = 9\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-1,6s}}{s}\right)$$

Ezután beszorozzuk az impulzusválasz transzformáltjával:

$$Y(s) = U(s)H(s) = 9\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-1,6s}}{s}\right)\left(\frac{4(s^2+s+0,31)}{(s+0,2)(s+0,3)}\right) =$$
$$= \left(1 - e^{-1,6s}\right)\left(\frac{36(s^2+s+0,31)}{s(s+0,2)(s+0,3)}\right)$$

Bontsuk résztörtekre a jobb oldali tagot:

$$\frac{36(s^2+s+0,31)}{s(s+0,2)(s+0,3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0,2} + \frac{C}{s+0,3}$$
$$36(s^2+s+0,31) = A(s+0,2)(s+0,3) + B(s)(s+0,3) + C(s)(s+0,2)$$

$$A + B + C = 36$$
$$0,5A + 0,3B + 0,2C = 36$$
$$0,06A = 11,16$$

Innen $A = 186$, $B = -270$ és $C = 120$. Tehát:

$$Y(s) = \left(1 - e^{-1,6s}\right)\left(\frac{186}{s} + \frac{-270}{s+0,2} + \frac{120}{s+0,3}\right) =$$

$$= \left(\frac{186}{s} + \frac{-270}{s+0,2} + \frac{120}{s+0,3}\right) - e^{-1,6s}\left(\frac{186}{s} + \frac{-270}{s+0,2} + \frac{120}{s+0,3}\right)$$

Ennek kell az inverz Laplace-transzformáltját kiszámolni, kezdjük az első taggal:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{186}{s} + \frac{-270}{s+0,2} + \frac{120}{s+0,3}\right\} = 186\varepsilon(t) - 270\varepsilon(t)e^{-0,2t} + 120\varepsilon(t)e^{-0,3t}$$

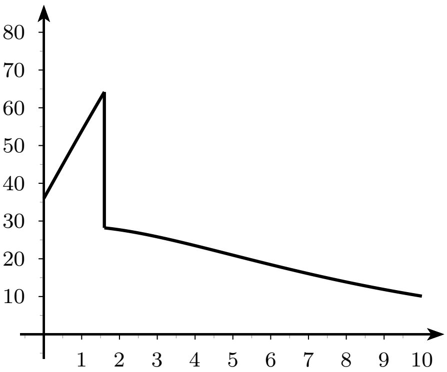
A második tag pedig hasonló ehhez, csak egy eltolást kap:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-e^{-1,6s}\cdot\left(\frac{186}{s} + \frac{-270}{s+0,2} + \frac{120}{s+0,3}\right)\right\} =$$
$$= -186\varepsilon(t-1,6) + 270\varepsilon(t-1,6)e^{-0,2(t-1,6)} - 120\varepsilon(t-1,6)e^{-0,3(t-1,6)}$$

Tehát:

$$y(t) = \varepsilon(t)\left(186 - 270e^{-0,2t} + 120e^{-0,3t}\right) +$$
$$+\varepsilon(t-1,6)\left(-186 + 270e^{-0,2(t-1,6)} - 120e^{-0,3(t-1,6)}\right) =$$
$$= \boxed{\varepsilon(t)\left(186 - 270e^{-0,2t} + 120e^{-0,3t}\right) + \varepsilon(t-1,6)\left(-186 + 371,824e^{-0,2t} - 193,929e^{-0,3t}\right)}$$

A válasz az 1. ábrán van ábrázolva.



1. ábra. FI rendszer válasza

Nézzük a DI rendszert, először transzformáljuk a bemeneti jelet:

$$u[k] = \varepsilon[k]\{7 + (-8) \cdot (0,5)^k\} \quad \Rightarrow \quad U(z) = \frac{7z}{z-1} - \frac{8z}{z-0,5} = z\left(\frac{7}{z-1} - \frac{8}{z-0,5}\right)$$

Ezután beszorozzuk az impulzusválasz transzformáltjával:

$$Y(z) = U(z)H(z) = z\left(\frac{7}{z-1} - \frac{8}{z-0,5}\right)\left(\frac{14,0413z^2 - 5,5737z}{4z^2 - 3,8213z + 1}\right) =$$

$$= z\left(\frac{50,2869}{z-1} - \frac{64,7767}{z-0,5} + \frac{43,918z - 79,2664}{4z^2 - 3,8213z + 1}\right) =$$

$$= \frac{50,2869z}{z-1} - \frac{64,7767z}{z-0,5} + z \cdot \frac{43,918z - 79,2664}{4z^2 - 3,8213z + 1}$$

Az utolsó tagot egy kis algebrával szintén szétbonthatjuk, de már komplex számokkal kell dolgoznunk.

$$\frac{43,918z - 79,2664}{4z^2 - 3,8213z + 1} = \frac{10,9795z - 19,8166}{(z - 0,478 + 0,148i)(z - 0,478 - 0,148i)} =$$

$$= \frac{A}{z - 0,478 + 0,148i} + \frac{B}{z - 0,478 - 0,148i}$$

Innen:

$$A(z - 0,478 - 0,148i) + B(z - 0,478 + 0,148i) = 10,9795z - 19,8166$$

Látszik, hogy $\mathrm{Re}\{A\} = \mathrm{Re}\{B\}$, így $\mathrm{Re}\{A\} = \mathrm{Re}\{B\} = 5,48975$, illetve $\mathrm{Im}\{A\} = c = -\mathrm{Im}\{B\}$, tehát:

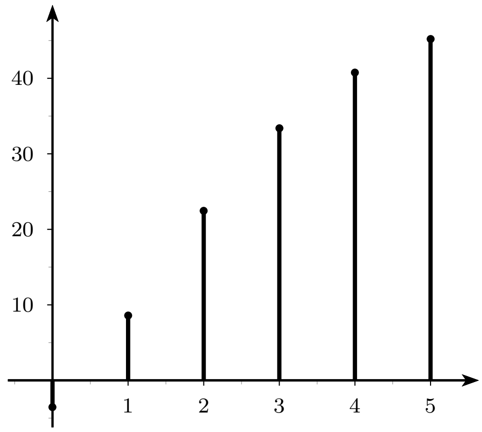
$$2c(0,148) - 2 \cdot 0,478 \cdot 5,48975 = -19,8166$$

Innen $c = -49,2176$, vagyis:

$$A = 5,48975 - 49,2176i \qquad B = 5,48975 + 49,2176i$$

Ellenőrzésképpen:

$$(5,48975-49,2176i)(z-0,478-0,148i)+(5,48975+49,2176i)(z-0,478+0,148i) = 10,9795z-19,8166$$



2. ábra. DI rendszer válasza

Tehát jól számoltunk. Így átalakítva $Y(z)$-t:

$$Y(z) = \frac{50,2869z}{z-1} - \frac{64,7767z}{z-0,5} + z \cdot \frac{5,48975-49,2176i}{z-0,478+0,148i} + z \cdot \frac{5,48975+49,2176i}{z-0,478-0,148i} =$$

$$= \underbrace{\frac{50,2869z}{z-1} - \frac{64,7767z}{z-0,5}}_{Y_1(z)} + \underbrace{z \cdot \frac{49,5228e^{-1,46i}}{z-0,5e^{-0,3i}} + z \cdot \frac{49,5228e^{1,46i}}{z-0,5e^{0,3i}}}_{Y_2(z)}$$

Ezen már könnyen végrehajthatunk egy inverz Z-transzformációt.

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y_1(z)\} = 50,2869\varepsilon[k] - 64,7767\varepsilon[k](0,5)^k$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y_2(z)\} = 49,5228e^{-1,46i}\varepsilon[k](0,5e^{-0,3i})^k + 49,5228e^{1,46i}\varepsilon[k](0,5e^{0,3i})^k$$

Itt felhasználhatjuk, hogy egy szám és konjugáltjának az összege a valós rész kétszerese, tehát:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y_2(z)\} = 2\mathrm{Re}\left(49,5228e^{-1,46i}(0,5e^{-0,3i})^k\right)\varepsilon[k] = 99,0456 \cdot (0,5)^k \cos(-0,3k-1,46) \cdot \varepsilon[k]$$

Tehát:

$$\boxed{y[k] = \varepsilon[k]\left\{50,2869 - 64,7767(0,5)^k + 99,0456 \cdot (0,5)^k \cos(-0,3k-1,46)\right\}}$$

Kiszámolva $k = 0$-ra, $k = 1$-re és $k = 2$-re, ugyanazok jönnek ki, mint az első háziban, tehát jól számoltunk. A választ a 2. ábrán ábrázoltuk.

3.3 (a)

Az 1. házifeladatban már felírtuk az állapotváltozós normál alakot és ezt kaptuk:

$$\underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0,8 & -2 \\ 0,56 & -0,4 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ -0,4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0,84 & 0,6 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + 0,6u(t)$$

Ezt és azt, hogy $H(s) = \underline{C}^T[s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}]^{-1}\underline{B} + D$ felhasználva meghatározhatjuk az átviteli függvényt:

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0,84 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-0,8 & 2 \\ -0,56 & s+0,4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -0,4 \end{bmatrix} + 0,6 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,84 & 0,6 \end{bmatrix} \frac{0,04}{s^2 - 0,4s + 0,8} \begin{bmatrix} 25s+10 & -50 \\ 14 & 25s-20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -0,4 \end{bmatrix} + 0,6 =$$

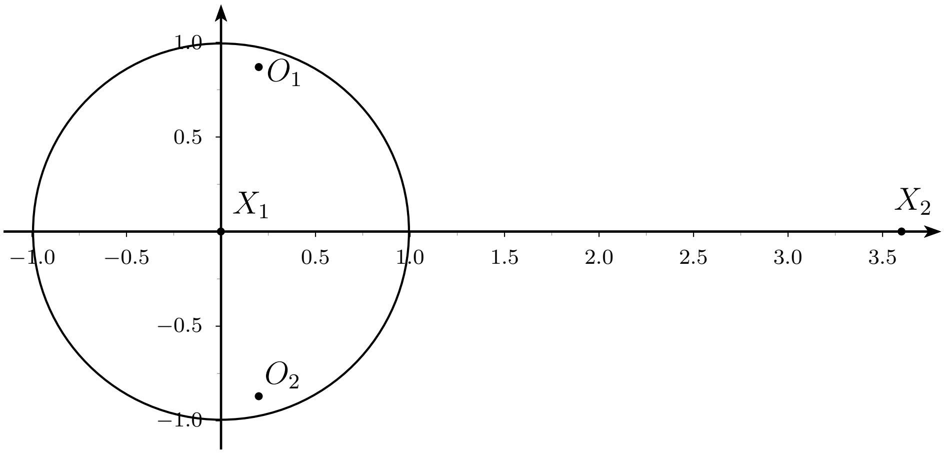
$$= \frac{0,04}{s^2 - 0,4s + 0,8} \begin{bmatrix} 21s + 16,8 & 15s - 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -0,4 \end{bmatrix} + 0,6 =$$

$$= \frac{0,04}{s^2 - 0,4s + 0,8} \cdot (-48s - 12) + 0,6 = \frac{-1,92s - 0,48}{s^2 - 0,4s + 0,8} + 0,6 = \frac{0,6s^2 - 2,16s}{s^2 - 0,4s + 0,8}$$

Formálisan DI-re ugyanezt kell csinálni, tehát:

$$H(z) = \frac{0,6z^2 - 2,16z}{z^2 - 0,4z + 0,8}$$

Így a zérusok $z_1 = s_1 = 0$ és $z_2 = s_2 = 3,6$, a pólusok pedig $p_{1,2} = q_{1,2} = 0,2 \pm 0,87178i$. A pólus-zérus elrendezést az alábbi ábrán láthatjuk:



Mivel minden pólus az egységkörön belül van, így a DI rendszer GV stabilis. Mivel van pólus a jobb félsíkon (mindkettő ott van), ezért az FI rendszer biztosan nem GV stabilis.

3.3 (b)

Egy FIR típusú rendszernek minden pólusa zérus. Mivel a kaszkád kapcsolásnál a két átviteli függvény összeszorzódik, ezért olyan hálózatot kell választani, aminek az átviteli függvénye az eredeti átviteli függvény minden pólusát „kiejti”. A legegyszerűbb ilyen az alábbi:

$$\boxed{H_K(z) = \frac{z^2 - 0,4z + 0,8}{z^2}}$$

A kettőt összeszorozva:

$$H_{\text{FIR}}(z) = \frac{0,6z^2 - 2,16z}{z^2 - 0,4z + 0,8} \cdot \frac{z^2 - 0,4z + 0,8}{z^2} = \frac{0,6z^2 - 2,16z}{z^2} = 0,6 - \frac{2,16}{z}$$

Tehát akkor kiválasztott DI hálózatunk:

$$H_K(z) = \frac{z^2 - 0,4z + 0,8}{z^2} = \frac{1 - 0,4z^{-1} + 0,8z^{-2}}{1}$$

Tehát a rajzoláshoz szükséges paramétereink: $b_0 = 1$, $b_1 = -0,4$ és $b_2 = 0,8$ illetve az a paraméterek 0-ák, tehát egy lehetséges megvalósítás: