B. 4024.
Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.
redhat24@freemail.hu

Feladat:
Az első 1000 pozitív egész szám közül legfeljebb hányat választhatunk ki úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám összege ne legyen osztható a különbségükkel?

Megoldás:

Ha meggondoljuk, akkor a kiválasztott számok között nem lehet 2 olyan szám, aminek a különbsége 1, hiszen 1-el minden szám osztható. Nem választhatunk olyan számokat se, amik között van 2 olyan szám aminek különbsége 2, hiszen ha különbségük 2, akkor mindkét szám vagy páros, vagy páratlan, viszont két páros, illetve két páratlan összege páros, ami viszont osztható 2-vel.

Így legfeljebb olyan számokat választhatunk ki, amik közül bármelyik két szám különbsége legalább 3. Akkor választhatjuk ki az első 1000 pozitív szám közül a maximális darab számot, ha kiválasztjuk az összes olyan számot, amelyek közül bármelyik két szám különbsége legalább 3, magyarán ha minden 3. számot kiválasztjuk. Így kiválasztjuk az 1, 4, 7, 10, ..., 1000 számokat. Ez összesen 334 db szám.
Kérdés, hogy biztosan jó-e az összes szám, nem fordulhat-e elő az, hogy lesz ezek között 2 olyan szám, aminek az összege osztható a különbségükkel?
Ha jól megnézzük, akkor mindegyik számnak a 3-al való osztási maradéka 1. Így válasszunk ki két számot ebből a 334 db számból: legyen az egyik a $3k+1$, a másik pedig $3l+1$ ahol $k, l \in \mathbb{N}$ és $l \neq k$, akkor igaznak kell lennie, hogy:

$$\frac{3k+1\ +\ 3l+1}{3k+1\ -\ (3l+1)} \notin \mathbb{Z}$$

$$\frac{3k+1\ +\ 3l+1}{3k+1\ -\ (3l+1)} = \frac{3(k+l)+2}{3(k-l)}$$

Tehát egy 3-al osztva 2 maradékot adó számot osztunk el egy 3-al osztható számmal, ez triviálisan nem ad egész számot, tehát valóban nem lesz két olyan szám, amik összege osztható a különbségükkel.

Tehát legfeljebb 334 db számot választhatunk ki az első 1000 pozitív szám közül úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám összege ne legyen osztható a különbségükkel.