B. 4021.

Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.
redhat24@freemail.hu

Feladat:

Igazoljuk, hogy ha n pozitív egész és az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok mindegyike legalább 1, akkor

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1) \geq 2^{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_n-n+2).$$

Megoldás:

Legyen $x_i = a_i - 1$, ahol $i \in \mathbb{Z}^+$ és $1 \leqslant i \leqslant n$. Ha jól megnézzük a jobb oldalt, akkor:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n-n+2) = ((x_1+1)+(x_2+1)+\ldots+(x_n+1)-n+2)$$

A jobb oldalt n darab 1-es, van, de a végén levonunk n-et, tehát tulajdonképpen:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n-n+2) = ((x_1+1)+(x_2+1)+\ldots+(x_n+1)-n+2) =$$

$$= (x_1+x_2+\ldots+x_n+2)$$

Így végül az alábbi egyenlőtlenséget kaptunk, ami teljesen ekvivalens a feladatban megfogalmazott egyenlőtlenséggel:

$$(x_1+2)(x_2+2)\cdot\ldots\cdot(x_n+2) \geq 2^{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_n+2)$$

Bontsuk ki a jobb oldalt:

$$2^{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_n+2) = 2^n + 2^{n-1}\cdot x_1 + 2^{n-1}\cdot x_2 + \ldots + 2^{n-1}\cdot x_n$$

Tehát kapunk egy 2^n-t, illetve az x_i-ket, 2^{n-1}-es együtthatóval. Gondolatban fejtsük ki a bal oldalt is:

Nyílvánvaló, hogy, ha a zárójelekből mindenhonnan a 2-t választjuk, akkor lesz egy 2^n-es tag. Ha minden zárójelből kiválasztjuk az x_i-t, a többiből pedig a 2-t, akkor lesznek $2^{n-1}\cdot x_i$-s tagok. Emelett pedig lesz $x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n$-es tag, illetve még jó pár tag, attól függően, hogy hogyan választjuk meg az egyes tagokat a zárójelekből. Tehát ha jól megnézzük, akkor kibontás után, az egyenlőtlenség ilyen alakú lesz:

$$\underbrace{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n+\ldots}_{\geqslant 0} + 2^{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_n) + 2^n \geq 2^n + 2^{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$

Mindkét oldalból levonjuk a $2^{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_n)+2^n$-t, akkor a jobb oldalt 0-át kapunk a bal oldalt, pedig olyan szorzatok összegét, amik biztosan nagyobb egyenlő mint 0, hiszen a szorzatok tényezői között 2-k, illetve x_i-k szerepelnek, de x_i-ről tudjuk, hogy $x_i \geqslant 0$, mivel $a_i \geqslant 1$ és $x_i = a_i - 1$. Tehát igaz a fenti egyenlőtlenség, és mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kezdő egyenlőtlenségünk is igaz, tehát **ha n pozitív egész és az $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ számok mindegyike legalább 1, akkor:**

$$\mathbf{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1) \geq 2^{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_n-n+2)}.$$