Házi feladat

Kriván Bálint - CBVOEN

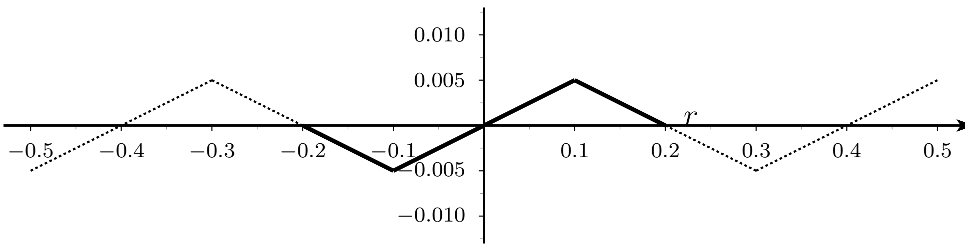
Ahogy azt az órai feladatban láttuk, az $u(x,t)$ felírható a következő alakban:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l} \cdot x\right) \left[A_k \cos\left(\frac{kc\pi}{l}t\right) + B_k \sin\left(\frac{kc\pi}{l}t\right)\right]$$

Jelen esetben $l = 0.2$, $c = 1$. Továbbá tudjuk, hogy a kezdeti alakunk a következő függvénnyel írható fel:

$$f^*(x) = \begin{cases} 0.05x & \text{ha } x \leq 0.1 \\ 0.01 - 0.05x & \text{ha } 0.1 < x \end{cases}$$

Természetesen a húrunk a 0 és a 0.2 között van kifeszítve, ezért a függvényt csak $[0, 0.2]$-n értelmezzük.
Terjesszük ki a függvényünket úgy, hogy egy páratlan függvényt kapjunk, legyen ez az $f(x)$:



Húr kezdeti alakja:

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{ha } 0 \leq x \leq 0.2$$

Fejtsük Fourier-sorba $f(x)$-et ($a_k = 0$, hiszen páratlan függvény):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x\right)$$

Illetve:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x\right) \, dx$$

Jelen esetben $T = 0.4$, tehát:

$$b_k = \frac{1}{0.2}\int_{-0.2}^{0.2} f(x)\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot x\right)\,dx = \frac{1}{0.1}\int_{0}^{0.2} f(x)\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot x\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{0.1}\left[\int_0^{0.1} 0.05x\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot x\right)\,dx + \int_{0.1}^{0.2}(0.01-0.05x)\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot x\right)\,dx\right] =$$

Paricális integrálás segítségével az alábbihoz jutunk:

$$= \frac{1}{0.1}\left[\frac{0.05\sin\left(0.1\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot k\right) - 0.005k\cos\left(0.1\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot k\right)}{\frac{\pi^2}{0.2^2}k^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{0.05\sin\left(0.1\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot k\right) - 0.05\sin\left(0.2\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot k\right) + 0.005k\cos\left(0.1\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot k\right)}{\frac{\pi^2}{0.2^2}k^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{0.1}\left[\frac{0.1\sin\left(0.1\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot k\right) - 0.05\sin\left(0.2\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot k\right)}{\frac{\pi^2}{0.2^2}k^2}\right] =$$

$$= \frac{0.2^2}{0.1}\left[\frac{0.1\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right) - 0.05\sin\left(\pi k\right)}{\pi^2 k^2}\right] =$$

Mivel $\sin(\pi k)$ az minden k egész számra 0, ezért:

$$= \boxed{\frac{4}{\pi^2 k^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right) = b_k}$$

Vagyis:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 k^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{0.2}\cdot x\right)$$

Tekintsük $u(x,t)$-t:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi}{l}\cdot x\right)\left[A_k\cos\left(\frac{kc\pi}{l}t\right) + B_k\sin\left(\frac{kc\pi}{l}t\right)\right]$$

A húr kezdeti alakja kifejezhető $u(x,t)$-vel, ha $t = 0$:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi}{l}\cdot x\right)\left[A_k\cos 0 + B_k\sin 0\right] = \sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}\cdot x\right)$$

Mivel $f(x) = u(x,0)$ (ha $0 \le x \le 0.2$), láthatjuk, hogy:

$$A_k = b_k = \frac{4}{\pi^2 k^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$$

Továbbá azt is tudjuk, hogy:

$$\frac{\delta u}{\delta t}(x,0) = 0 \qquad \text{hiszen csak elengedjük a húrt}$$

Mivel

$$\frac{\delta u}{\delta t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\Big(-A_k\alpha_k \sin(\alpha_k t) + B_k\alpha_k \cos(\alpha_k t)\Big) \qquad \alpha_k = \frac{kc\pi}{l}$$

ezért:

$$\frac{\delta u}{\delta t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = 0$$

Mivel $\forall k$-ra teljesülni kell, ezért $B_k = 0$. Ezzel meg is kaptuk $u(x,t)$-t:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}\cdot x\right)\left[\frac{4}{\pi^2k^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)\cos\left(\frac{kc\pi}{l}t\right)\right]}$$

Beírva a megadott értékeket:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{0.2}\cdot x\right)\left[\frac{4}{\pi^2k^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)\cos\left(\frac{k\pi}{0.2}t\right)\right]}$$