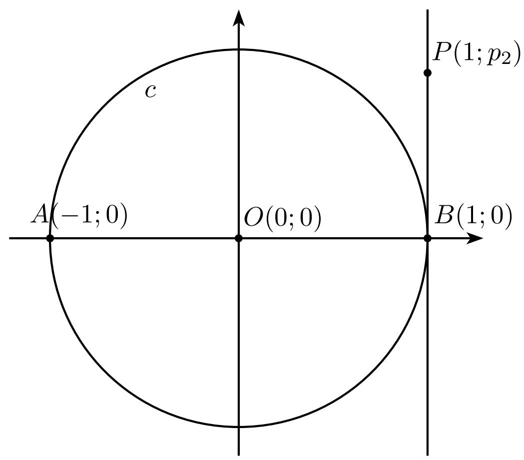
B. 4018.
Kriván Bálint
Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. o. t.
redhat24@freemail.hu

Feladat:
Az AB átmérőjű kör B-beli érintőjén adott egy P pont. A P-ből a körhöz húzott másik érintő érintési pontja C. A C pont merőleges vetülete az AB egyenesen T. Bizonyítsuk be, hogy AP felezi a CT szakaszt.

Megoldás:

Vegyünk fel egy koordináta rendszert, mégpedig úgy, hogy a kör sugara egységnyi legyen, illetve a kör középpontját rakjuk a koordinátarendszer középpontjába:



Első feladatunk, hogy egy másik (nem a PB) érintőt szerkesszünk a P pontból a c körhöz. Legyen az érintési pont $C(c_1;c_2)$.

Tudjuk, hogy az érintő egyenlete

$$c_1 \cdot x + c_2 \cdot y = r^2$$

ahol c_1 és c_2 az érintési pont (C) koordinátája r pedig a kör sugara.
Azt is tudjuk, hogy a P pont rajta lesz az érintőn, tehát ki fogja elégíteni a fenti egyenletet a P pont:

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot p_2 = r^2 = 1$$

Illetve mivel a C pont rajta van a körön ezért a kör egyenletét kielégíti a C pont:

$$c_1^2 + c_2^2 = r^2 = 1$$

Tehát az előző két egyenletből kifejezhetjük c_1-et és c_2-t p_2-vel:

$$\left.\begin{array}{ll} (1a) & c_1 + c_2 \cdot p_2 = 1 \\ (1b) & c_1^2 + c_2^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{tehát (1a)-ből } c_1 = 1 - c_2 \cdot p_2 \text{ és ezt behelyettesítve (1b)-be:} \\ (1 - c_2 \cdot p_2)^2 + c_2^2 = 1 \end{array}$$

Megoldjuk c_2-re a másodfokú egyenletet:

$$(1 - c_2 \cdot p_2)^2 + c_2^2 = 1$$

$$1 + c_2^2 \cdot p_2^2 - 2c_2 \cdot p_2 + c_2^2 = 1$$

$$c_2^2 \cdot p_2^2 - 2c_2 \cdot p_2 + c_2^2 = 0$$

$$(p_2^2+1)c_2^2 - 2p_2 \cdot c_2 = 0$$

Ha $c_2 = 0$, akkor kapjuk azt, hogy $C = B$, ami jelen esetben nem jó, hiszen a PB érintőjétől különböző érintőt keressük, tehát $c_2 \neq 0$, így leoszthatunk vele:

$$(p_2^2+1)c_2 - 2p_2 = 0$$

$$c_2 = \frac{2p_2}{(p_2^2+1)}$$

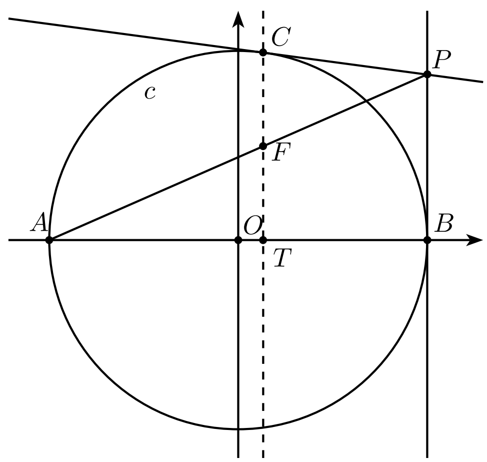
Innen c_1-et könnyen kapjuk (1b)-ből:

$$c_1 = 1 - c_2 \cdot p_2$$

$$c_1 = 1 - \frac{2p_2}{(p_2^2+1)} \cdot p_2 = 1 - \frac{2p_2^2}{(p_2^2+1)}$$

Tehát a P-ből a körhöz húzott PB-től különböző érintő a kört $C\left(1 - \frac{2p_2^2}{(p_2^2+1)}; \frac{2p_2}{(p_2^2+1)}\right)$ pontban érinti.

Ezt nagyon egyszerűen tudjuk merőlegesen vetíteni az AB szakaszra, hiszen x koordinátája marad, y koordinátája pedig 0 lesz: $T\left(1 - \frac{2p_2^2}{(p_2^2+1)}; 0\right)$



Már csak AP és CT metszéspontját azaz az F pontot keressük. Írjuk fel az AP és a CT egyenesek egyenletét. AP-nek $\overrightarrow{AP}$ egy irányvektora, azaz $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (2; p_2)$. Így az AP-nek a $(p_2; -2)$ egy normálvektora, tehát az AP egyenes egyenlete:

$$p_2 \cdot x + -2 \cdot y = (p_2 \cdot -1) + (-2 \cdot 0) = -p_2$$

CT-nek nyílvánvalóan

$$x = 1 - \frac{2p_2^2}{(p_2^2+1)}$$

az egyenlete, hiszen merőleges az x tengelyre, illetve a rajta lévő C pontnak az első koordinátája $1 - \frac{2p_2^2}{(p_2^2+1)}$.

Megvan mind a két egyenes egyenlete, és mivel az F pont (a metszéspont) rajta van a két egyenesen, ezért $F(x; y)$ kielégíti mindkét egyenletet:

$$\left.\begin{array}{ll} (2a) & p_2 x + -2y = -p_2 \\ (2b) & x = 1 - \frac{2p_2^2}{(p_2^2+1)} \end{array}\right\}$$

x-et behelyettesítjük (2a)-ba:

$$p_2\left(1 - \frac{2p_2^2}{(p_2^2+1)}\right) + -2y = -p_2$$

$$p_2\left(1 - \frac{2p_2^2}{(p_2^2+1)}\right) + p_2 = 2y$$

Ha jól megnézzük, ha most leosztanánk 2-vel, akkor megkapnánk az y-t, azaz az F pont második koordinátáját (f_2). De ha nekünk azt kell belátnunk, hogy $TF = FC$, akkor elég belátnunk azt, hogy $2f_2 = c_2$, hiszen F-nek és C-nek az első koordinátája azonos. Előzőek alapján

$$p_2\left(1 - \frac{2p_2^2}{(p_2^2+1)}\right) + p_2 = 2f_2$$

$$\frac{2p_2}{(p_2^2+1)} = c_2$$

Ebből (felhasználva, hogy $2f_2 = c_2$):

$$p_2\left(1 - \frac{2p_2^2}{(p_2^2+1)}\right) + p_2 = \frac{2p_2}{(p_2^2+1)}$$

Ha ez igaz, akkor beláttuk a feladatban szereplő állítást.
Szorozzunk fel (p_2^2+1)-vel:

$$p_2((p_2^2+1) - 2p_2^2) + p_2(p_2^2+1) = 2p_2$$

$$p_2(1-p_2^2) + p_2(p_2^2+1) = 2p_2$$

Ez triviálisan igaz, tehát $2f_2 = c_2$. Azaz, C pont második koordinátája kétszerese az F pont második koordinátájának, de mivel C és F első koordinátája azonos, ezért $2 \cdot TF = TC$, tehát $TF = FC$, azaz **beláttuk az állítást**.