# الموسوعة الشاملة في نظرية الأعداد التحليلية

## المجلد الأول

## النواة التحليلية وتوزيع الأوليات والبوابات الحديثة

mesuef1974

نسخة معاينة — الإصدار التطويري dev-0.30.0
26 يوليو 2026
نسخة تطويرية من مشروع موسوعي متعدد المجلدات

# تنبيه حول نسخة المعاينة

هذه نسخة تطويرية للمعاينة وليست إصدارًا نهائيًا. تخضع البراهين والمراجع والمصطلحات للمراجعة المستمرة، ويُرجع إلى سجل المشروع لمعرفة درجة اكتمال كل فصل.

# موضع هذا المجلد في المشروع الموسوعي

هذا المجلد لا يدّعي تغطية جميع فروع نظرية الأعداد التحليلية. وهو **المجلد الأول** من مشروع موسوعي ممتد، ويغطي النواة التحليلية الكلاسيكية، وتوزيع الأوليات، وأدوات الغربال والطريقة الدائرية، ومدخلًا إلى النظرية الطيفية ودوال $L$ الآلية على $GL(2)$، ثم عددًا من الجبهات البحثية الحديثة (العزوم، إحصاء الأصفار، الدوال الادعائية، فكّ الاقتران).

أما نظرية الأعداد الاحتمالية (Erdős--Kac، Turán--Kubilius)، والأعداد الملساء (Dickman--de Bruijn)، ودوال $L$ على حقول الأعداد (Chebotarev، Artin، Hecke، Dedekind)، ومسائل القواسم والهندسة الشبكية (مسألة ديريشليه، دائرة غاوس)، وحزمة من الأدوات الطيفية المتقدمة (Rankin--Selberg، الأسس المتناظرة، الغربال الطيفي الكبير، الالتفاف المزاح)، فمؤجَّلة صراحةً إلى مجلدات لاحقة، ومسجَّلة بهذه الصفة في خارطة الطريق.

## خريطة المجلدات (مبدئية، غير ملزمة بترتيب النشر)

**المجلد الأول** النواة التحليلية وتوزيع الأوليات والبوابات الحديثة (هذا المجلد).

**المجلد الثاني** الدوال الحسابية والتوزيعات الاحتمالية.

**المجلد الثالث** مسائل القواسم والهندسة الشبكية والمجاميع التحويلية.

**المجلد الرابع** دوال $L$ والطيف والأشكال الآلية على $GL(n)$.

**المجلد الخامس** الأصفار والعزوم والإحصاءات الحديثة.

# المحتويات


تنبيه حول نسخة المعاينة i

موضع هذا المجلد في المشروع الموسوعي ii

خريطة المجلدات ii

I الأسس التاريخية والمنهجية ١

١ ماهية نظرية الأعداد التحليلية وتطورها ٢
٠١١ نطاق الفصل ومخرجاته ٢
٠٢١ موضوع العلم ٢
٠٣١ الأسئلة المركزية ٣
٠٤١ من العد الدقيق إلى السلوك التقاربي ٣
٠٥١ المراحل التاريخية الكبرى ٤
٠١٠٥١ مرحلة أويلر ٤
٠٢٠٥١ مرحلة ديريشليه ٤
٠٣٠٥١ مرحلة ريمان ٤
٠٤٠٥١ القرن العشرون ٤
٠٦١ التقسيم البنيوي للمجال ٤
٠١٠٦١ النظرية الضربية ٤
٠٢٠٦١ النظرية الإضافية ٤
٠٣٠٦١ الجانب الطيفي والآلي ٥
٠٧١ منهج الموسوعة ٥
٠٨١ حدود دعوى الشمول ٥
٠٩١ تمارين تمهيدية ٥
٠١٠١ التحويلات الفكرية المؤسسة للمجال ٦
٠١٠١٠١ من الأعداد المفردة إلى الدوال الجامعة ٦
٠٢٠١٠١ من الصيغ الدقيقة إلى القوانين التقاربية ٦
٠٣٠١٠١ من المجال الحقيقي إلى المستوى العقدي ٦
٠٤٠١٠١ من العد المباشر إلى التحليل الطيفي ٦
٠١١١ النظرية الابتدائية والنظرية التحليلية ٧

١٢١. مثال نموذجي: حاصل ضرب أويلر . . . . . ٧
١٣١. مثال نموذجي ثان: لماذا تظهر اللوغاريتمات؟ . . . . . ٨
١٤١. خريطة العلاقات بين الأدوات والمسائل . . . . . ٨
١٥١. معايير قراءة النتائج في هذا الكتاب . . . . . ٨
١٦١. ملاحظات تاريخية منهجية . . . . . ٩
١٧١. المتطلبات السابقة ومسار القراءة . . . . . ٩
١.١٧١. الطبقة الأولى . . . . . ١٠
٢.١٧١. الطبقة الثانية . . . . . ١٠
٣.١٧١. الطبقة الثالثة . . . . . ١٠
١٨١. تمارين إضافية . . . . . ١٠
١٩١. مراجع الفصل ومسار التوسع . . . . . ١٠
٢٠١. خط زمني تحليلي لتطور المجال . . . . . ١٠
١.٢٠١. أويلر: تحويل التحليل الوحيد إلى حاصل ضرب . . . . . ١١
٢.٢٠١. ديريشليه: التعامد يفصل الفئات الحسابية . . . . . ١١
٣.٢٠١. تشيبيشيف: الحدود الكمية قبل القانون النهائي . . . . . ١١
٤.٢٠١. ريمان: الأصفار تتحكم في التذبذب . . . . . ١١
٥.٢٠١. هادامار ودي لا فاليه بوسان: من منطقة خالية من الأصفار إلى مبرهنة الأعداد الأولية . . . . . ١٢
٦.٢٠١. هاردي وليتلوود: تحليل فورييه لمسائل الجمع . . . . . ١٢
٧.٢٠١. فينوغرادوف: المجاميع الأسية أداة مركزية . . . . . ١٢
٨.٢٠١. سيلبرغ وإردوش: القوة الابتدائية والبنية الغربالية . . . . . ١٢
٩.٢٠١. بومبييري وفينوغرادوف: المتوسط يعوض الفرضية الفردية . . . . . ١٣
١٠.٢٠١. الأشكال الآلية: توسيع مفهوم دالة $L$ . . . . . ١٣
١١.٢٠١. المرحلة المعاصرة: مزج الأدوات . . . . . ١٣
٢١١. خلاصة الخط الزمني . . . . . ١٤
٢٢١. المدارس البحثية الكبرى في نظرية الأعداد التحليلية . . . . . ١٤
١.٢٢١. مدرسة دوال زيتا ودوال $L$ . . . . . ١٤
٢.٢٢١. مدرسة الغربال وتوزيع الأوليات . . . . . ١٤
٣.٢٢١. مدرسة المجاميع الأسية والتحليل التوافقي . . . . . ١٥
٤.٢٢١. المدرسة الطيفية والآلية . . . . . ١٥
٥.٢٢١. المدرسة الاحتمالية والادعائية . . . . . ١٥
٦.٢٢١. المدرسة الحاسوبية والصريحة . . . . . ١٥
٢٣١. حدود المجال وعلاقته بالفروع المجاورة . . . . . ١٥
١.٢٣١. نظرية الأعداد الجبرية . . . . . ١٥
٢.٢٣١. الهندسة الحسابية . . . . . ١٦
٣.٢٣١. التحليل التوافقي . . . . . ١٦
٤.٢٣١. نظرية التمثيلات وبرنامج لانجلاندز . . . . . ١٦
٥.٢٣١. الاحتمالات والمصفوفات العشوائية . . . . . ١٦

٢٤١. مبادئ النزاهة العلمية في عرض التاريخ والبحث الحديث . . . . . ١٦
٢٥١. قاموس مصطلحات أولي للفصل . . . . . ١٧
٢٦١. خاتمة الفصل . . . . . ١٧

**٢ اللغة التقاربية والجمع الجزئي لأبيل ١٨**
١٢. نطاق الفصل ومخرجاته . . . . . ١٨
٢٢. لماذا نحتاج إلى لغة تقاربية؟ . . . . . ١٨
٣٢. رمز لاندو الكبير . . . . . ١٨
٤٢. الاعتماد على المعلمات والانتظام . . . . . ١٩
٥٢. رمز لاندو الصغير . . . . . ١٩
٦٢. التكافؤ التقاربي . . . . . ٢٠
٧٢. رموز أخرى شائعة . . . . . ٢٠
٨٢. قواعد حسابية لرموز الرتبة . . . . . ٢١
٩٢. مقارنة القوى واللوغاريتمات . . . . . ٢١
١٠٢. المجاميع الجزئية . . . . . ٢١
١١٢. صيغة الجمع الجزئي المنفصلة . . . . . ٢٢
١٢٢. صيغة أبيل المستمرة . . . . . ٢٢
١٣٢. مثال: المجموع التوافقي . . . . . ٢٣
١٤٢. مثال: تحويل معلومة عدّ إلى مجموع موزون . . . . . ٢٣
١٥٢. نسخة على فترة . . . . . ٢٤
١٦٢. مبدأ إزالة الوزن . . . . . ٢٤
١٧٢. تكاملات ستيلتج في نظرية الأعداد . . . . . ٢٥
١٨٢. مثال تمهيدي مرتبط بالأعداد الأولية . . . . . ٢٥
١٩٢. أخطاء شائعة . . . . . ٢٦
٢٠٢. تمارين . . . . . ٢٦
٢١٢. خلاصة الفصل . . . . . ٢٧

**٣ التحليل المركب الموجّه لنظرية الأعداد ٢٨**
١٣. نطاق الفصل ومخرجاته . . . . . ٢٨
٢٣. مقدمة منهجية . . . . . ٢٨
٣٣. المستوى العقدي والدوال العقدية . . . . . ٢٩
٤٣. الاشتقاق العقدي ومعادلات كوشي--ريمان . . . . . ٢٩
٥٣. متسلسلات القوى . . . . . ٣٠
٦٣. المسارات والتكامل العقدي . . . . . ٣٠
٧٣. مبرهنة كوشي . . . . . ٣٠
٨٣. صيغة كوشي التكاملية . . . . . ٣١
٩٣. تقديرات كوشي . . . . . ٣١
١٠٣. مبدأ القيمة العظمى . . . . . ٣١
١١٣. الأصفار ورتبتها . . . . . ٣٢

١٢٣. المفردات المعزولة ٣٢
١٣٣. الباقي ٣٢
١٤٣. مبرهنة البواقي ٣٣
١٥٣. مثال: استخراج حد رئيسي من قطب بسيط ٣٣
١٦٣. مبدأ الحجة ٣٣
١٧٣. مبرهنة روشيه ٣٤
١٨٣. الاستمرار التحليلي ٣٤
١٩٣. مثال أولي للاستمرار التحليلي ٣٤
٢٠٣. تحويل المسارات ٣٥
٢١٣. تكاملات ميلين ٣٥
٢٢٣. تمهيد لصيغة بيرون ٣٦
٢٣٣. أخطاء شائعة ٣٦
٢٤٣. تمارين ٣٧
٢٥٣. خلاصة الفصل ٣٧

**٤ الدوال الحسابية والبنية الضربية ٣٨**
١٤. نطاق الفصل ومخرجاته ٣٨
٢٤. مقدمة ٣٨
٣٤. فضاء الدوال الحسابية ٣٨
٤٤. الدوال الضربية ٣٩
٥٤. تحديد الدالة الضربية على القوى الأولية ٣٩
٦٤. الالتفاف الديريشلي ٤٠
٧٤. الخواص الجبرية للالتفاف ٤٠
٨٤. عنصر الوحدة ٤١
٩٤. المعكوس الديريشلي ٤١
١٠٤. دالة موبيوس ٤٢
١١٤. الهوية الأساسية لموبيوس ٤٢
١٢٤. صيغة قلب موبيوس ٤٣
١٣٤. مثال: استرجاع دالة أويلر ٤٣
١٤٤. حفظ الضربية تحت الالتفاف ٤٤
١٥٤. الالتفاف على القوى الأولية ٤٥
١٦٤. الضرب النقطي والالتفاف ٤٥
١٧٤. الدوال المدعومة على القوى الأولية ٤٦
١٨٤. برهان هوية فون مانغولت ٤٦
١٩٤. التفافات مهمة ٤٧
٢٠٤. دوال القواسم العامة ٤٧
٢١٤. دالة ليوفيل ٤٧
٢٢٤. الدالة $\omega(n)$ والدالة $\Omega(n)$ ٤٨
٢٣٤. المعكوس الديريشلي للدالة الضربية ٤٨
٢٤٤. المتسلسلات المولدة المحلية ٤٩
٢٥٤. التفاف ديريشليه وسلاسل ديريشليه ٤٩

٢٦٤. البنية الحلقية ٥٠
٢٧٤. ملاحظات تاريخية ومنهجية ٥٠
٢٨٤. أخطاء شائعة ٥١
٢٩٤. تمارين ٥١
٣٠٤. خلاصة الفصل ٥٢

**٥ سلاسل ديريشليه والمنتجات الأويلرية ٥٣**
١٥. نطاق الفصل ٥٣
١٠١٥. المتطلبات السابقة ٥٣
٢٠١٥. نواتج التعلم ٥٣
٢٥. الترددات الضربية ٥٤
٣٥. التعريف والأمثلة الأولى ٥٤
٤٥. أنماط التقارب ٥٥
٥٥. الانتقال إلى يمين نقطة التقارب ٥٥
٦٥. فاصلا التقارب ٥٦
٧٥. المجاميع الجزئية والتمثيل التكاملي ٥٧
٨٥. الاشتقاق حدًا حدًا ٥٨
٩٥. فرادة معاملات سلسلة ديريشليه ٥٨
١٠٥. ضرب السلاسل والالتفاف ٥٩
١١٥. المنتج الأويلري العام ٥٩
١٢٥. حاصل ضرب أويلر لدالة زيتا ٦٠
١٣٥. المقلوب وسلسلة موبيوس ٦٠
١٤٥. المشتقة اللوغاريتمية وفون مانغولت ٦١
١٥٥. هويات أساسية أخرى ٦٢
١٠١٥٥. دالة القواسم ٦٢
٢٠١٥٥. دالة أويلر ٦٢
٣٠١٥٥. دالة ليوفيل ٦٢
٤٠١٥٥. دوال القواسم العامة ٦٢
١٦٥. مثال محلول: من هوية حسابية إلى هوية تحليلية ٦٢
١٧٥. أسئلة تفسير البرهان ٦٣
١٨٥. أخطاء شائعة ٦٣
١٩٥. تمارين ٦٤
١٠١٩٥. المستوى الأول: تثبيت المفاهيم ٦٤
٢٠١٩٥. المستوى الثاني: استعمال البنية ٦٤
٣٠١٩٥. المستوى الثالث: البرهان والتحليل ٦٥
٢٠٥. مراجع الفصل ومسار التوسع ٦٥
٢١٥. خلاصة الفصل ٦٥

**٦ دالة زيتا لريمان: الاستمرار التحليلي والمعادلة الوظيفية ٦٦**
١٦. نطاق الفصل ٦٦
١٠١٦. المتطلبات السابقة ٦٦

٠٢٠١٦ نواتج التعلم ٦٦
٠٢٦ من السلسلة إلى الدالة ٦٧
٠٣٦ الاستمرار الأول بصيغة الجزء الكسري ٦٧
٠٤٦ دالة غاما والعامل الأرخميدي ٦٨
٠٥٦ دالة ثيتا وتحويل جاكوبي ٦٨
٠٦٦ تمثيل ميلين لزيتا المكتملة ٦٩
٠٧٦ الاستمرار إلى المستوى والمعادلة الوظيفية ٦٩
٠٨٦ دالة ريمان $\xi$ ٧٠
٠٩٦ الصيغة الكلاسيكية للمعادلة الوظيفية ٧٠
١٠٦. الأصفار البديهية ٧٠
١١٦. الشريط الحرج وتناظرات الأصفار ٧١
١٢٦. النمو في الشرائط الرأسية ٧١
١٣٦. عد الأصفار: صيغة ريمان--فون مانغولت ٧٢
١٤٦. دالة هاردي $Z$ ٧٣
١٥٦. عقد التجربة العددية منخفضة الارتفاع ٧٤
١٦٦. جداء هادامار لدالة $\xi$ ٧٥
١٧٦. المشتقة اللوغاريتمية والانتقال من الأصفار إلى الأوليات ٧٥
١٨٦. صيغة فون مانغولت الصريحة ٧٦
١٩٦. منطقة كلاسيكية خالية من الأصفار ٧٧
٢٠٦. فرضية ريمان ٧٨
٢١٦. مثال: حساب $\zeta(0)$ ٧٨
٢٢٦. خريطة الاعتماد المنطقي ٧٨
٢٣٦. أخطاء شائعة ٧٩
٢٤٦. أسئلة تفسير البرهان ٨٠
٢٥٦. تمارين ٨٠
١٠٢٥٦. المستوى الأول ٨٠
٢٠٢٥٦. المستوى الثاني ٨١
٣٠٢٥٦. المستوى الثالث ٨١
٢٦٦. مراجع الفصل ومسار التوسع ٨١
٢٧٦. خلاصة الفصل ٨٢

**٧ دوال ديريشليه $L$: الشخصيات والبنية التحليلية ٨٣**
٠١٧ نطاق الفصل ٨٣
٠١٠١٧ المتطلبات السابقة ٨٣
٠٢٠١٧ نواتج التعلم ٨٣
٠٢٧ شخصيات زمرة منتهية ٨٤
٠٣٧ شخصيات ديريشليه ٨٥
٠٤٧ انعدام دورة كاملة وحد المجاميع الجزئية ٨٦
٠٥٧ تعريف دالة $L$ والمنتج الأويلري ٨٦
٠٦٧ الاستمرار الأول للشخصية غير الرئيسية ٨٧
٠٧٧ الشخصية الرئيسية وصلتها بزيتا ٨٨

٨٧. أمثلة أولى ٨٨
٩٧. أخطاء شائعة ٨٩
١٠٧. تمارين ٨٩
١١٧. امتداد الفصل والمسار التالي ٩٠
١٢٧. الشخصيات المستحثة والموصل ٩٠
١٣٧. مجاميع غاوس وتحويل فورييه المنتهي ٩٢
١٤٧. صيغة بواسون وتحويل ثيتا الملتوي ٩٣
١٥٧. الدالة المكتملة والمعادلة الوظيفية ٩٤
١٦٧. الأصفار البديهية والتناظرات ٩٥
١٧٧. مثال: دالة بيتا لديريشليه ٩٦
١٨٧. تمارين الدفعة الثانية ٩٧
١٩٧. ما بقي قبل اعتماد الفصل السابع ٩٧
٢٠٧. توافق جذر العدد والمشتقة اللوغاريتمية ٩٧
٢١٧. عدم الانعدام عند $s = 1$ ٩٩
٢٢٧. فرضية ريمان المعممة لدوال ديريشليه ٩٩
٢٣٧. عدم الانعدام عند الواحد للشخصيات غير الحقيقية ٩٩
٢٤٧. عدم الانعدام عند الواحد للشخصيات الحقيقية ١٠١
٢٥٧. خلاصة الفصل ١٠٢

٨ مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية ١٠٣
١٨. نطاق الفصل ١٠٣
٢٨. مرشح الفئة الحسابية ١٠٣
٣٨. لوغاريتم المنتج الأويلري ١٠٤
٤٨. فصل الشخصية الرئيسية ١٠٥
٥٨. تباعد مجموع مقلوبات الأوليات ١٠٦

٩ مبرهنة الأعداد الأولية ١٠٨
١٩. نطاق الفصل ١٠٨
١.١٩. المتطلبات السابقة ١٠٨
٢.١٩. نواتج التعلم ١٠٨
٢٩. دوال عد الأوليات ١٠٩
٣٩. حد تشيبيشيف وضبط القوى الأولية العليا ١٠٩
٤٩. المشتقة اللوغاريتمية وتمثيل ستيلتجس ١١٠
٥٩. المتراجحة الموزونة لزيتا ١١١
٦٩. عدم وجود أصفار على الخط $\Re(s) = 1$ ١١١
٧٩. مبرهنة Wiener--Ikehara ١١٢
٨٩. إزالة القطب عند الواحد ١١٣
٩٩. الصيغة المركزية لمبرهنة الأعداد الأولية ١١٣
١٠٩. الانتقال إلى $\vartheta$ و$\pi$ ١١٤
١١٩. ما الذي لم يثبته المسار النوعي؟ ١١٤

١٢٩. المسار الأولي المنفصل ١١٥
١٣٩. خريطة الاعتماد المنطقي ١١٥
١٤٩. أخطاء شائعة ١١٥
١٥٩. أسئلة تفسير البرهان ١١٦
١٦٩. تمارين ١١٦
١٠١٦٩. المستوى الأول ١١٦
٢٠١٦٩. المستوى الثاني ١١٦
٣٠١٦٩. المستوى الثالث ١١٧
١٧٩. المراجع ومسار التوسع ١١٧
١٨٩. خلاصة الفصل ١١٧

١٠ مبرهنة الأعداد الأولية في المتتاليات الحسابية ١١٨
١١٠. نطاق الفصل ١١٨
١٠١١٠. المتطلبات السابقة ١١٨
٢٠١١٠. نواتج التعلم ١١٨
٢١٠. دوال العد في فئة حسابية ١١٩
٣١٠. سلسلة فون مانغولت في الفئة ١١٩
٤١٠. المتراجحة الموزونة لدوال $L$ ١٢٠
٥١٠. عدم انعدام دوال $L$ على الخط الواحد ١٢١
٦١٠. عزل قطب الشخصية الرئيسية ١٢٢
٧١٠. الصيغة المركزية في الفئة ١٢٢
٨١٠. إزالة القوى الأولية العليا ١٢٣
٩١٠. الانتقال إلى دالة العد ١٢٣
١٠١٠ ماذا تعني النتيجة؟ ١٢٤
١١١٠ ما الذي لم يثبت؟ ١٢٤
١٢١٠ خريطة الاعتماد المنطقي ١٢٥
١٣١٠ أخطاء شائعة ١٢٥
١٤١٠ أسئلة تفسير البرهان ١٢٦
١٥١٠ تمارين ١٢٦
١٠١٥١٠ المستوى الأول ١٢٦
٢٠١٥١٠ المستوى الثاني ١٢٦
٣٠١٥١٠ المستوى الثالث ١٢٦
١٦١٠ المراجع ومسار التوسع ١٢٧
١٧١٠ خلاصة الفصل ١٢٧

١١ المناطق الخالية من الأصفار والأصفار الاستثنائية ١٢٨
١١١. نطاق الفصل ١٢٨
١٠١١١. المتطلبات السابقة ١٢٨
٢٠١١١. نواتج التعلم ١٢٨
٢١١. المقياس التحليلي وثلاثة معاني للفرادة ١٢٩
٣١١. الرد إلى الشخصية البدائية ١٢٩

١١٤. الدالة المكتملة والمشتقة اللوغاريتمية ١٣٠
١١٥. المتراجحة الموزونة ١٣١
١١٦. المنطقة القياسية الخالية ١٣١
١١٧. مبرهنة Landau--Page ١٣٣
١١٨. مبرهنة Siegel وعدم الفعالية ١٣٤
١١٩. ظاهرة Deuring--Heilbronn ١٣٥
١١١٠. الأثر في توزيع الأوليات ١٣٥
١١١١. حدود الفعالية ١٣٦
١١١٢. تمارين ١٣٦
١١١٣. خلاصة الفصل ١٣٧

١٢ مبرهنة سيغل--فالفش والتوزيع المنتظم للأعداد الأولية ١٣٨
١٢١. نطاق الفصل ١٣٨
١٢١.١. ثلاث طبقات يجب عدم خلطها ١٣٨
١٢١.٢. نواتج التعلم ١٣٨
١٢٢. دوال العد والمرشح بالشخصيات ١٣٩
١٢٣. الرد إلى الجد البدائي ١٣٩
١٢٤. مدخلان مقتبسان من النظرية الكمية ١٤٠
١٢٥. اختيار ارتفاع القطع وضبط الجزء غير الاستثنائي ١٤٠
١٢٦. الصفر الاستثنائي وموضع استعمال مبرهنة سيغل ١٤١
١٢٧. مبرهنة سيغل--فالفش ١٤٢
١٢٨. الادخار اللوغاريتمي الاعتباطي ١٤٣
١٢٩. الانتقال إلى $\vartheta(x;q,a)$ ١٤٣
١٢١٠. الانتقال إلى $\pi(x;q,a)$ ١٤٤
١٢١١. قراءة النتيجة وحدودها ١٤٥
١٢١١.١. ما الذي أضيف إلى الفصل العاشر؟ ١٤٥
١٢١١.٢. لماذا المجال لوغاريتمي؟ ١٤٥
١٢١١.٣. الفعالية وعدم الفعالية ١٤٥
١٢١١.٤. ما الذي لا تثبته المبرهنة؟ ١٤٦
١٢١٢. أمثلة تفسيرية ١٤٦
١٢١٣. تمارين ١٤٦
١٢١٤. خلاصة الفصل ١٤٧

١٣ مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف والتوزيع المتوسطي للأعداد الأولية ١٤٨
١٣١. نطاق الفصل ١٤٨
١٣١.١. نواتج التعلم ١٤٨
١٣٢. الأخطاء ومستوى التوزيع ١٤٩
١٣٣. حزمة الغربال الكبير ١٤٩
١٣٤. متراجحة بوليا--فينوغرادوف ١٥٠
١٣٥. هوية فوغان ١٥١

٦١٣. الرد إلى النمطين الأول والثاني ١٥٢
٧١٣. متوسط مجاميع الشخصيات ١٥٢
١٠٧١٣. تقدير النمط الأول ١٥٣
٢٠٧١٣. تقدير النمط الثاني ١٥٣
٨١٣. من الشخصيات إلى الفئات الحسابية ١٥٤
٩١٣. مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف ١٥٥
١٠١٣ نتائج تابعة ١٥٧
١١١٣ مقارنة النتائج الثلاث ١٥٨
١٢١٣ مثال تفسيري ١٥٨
١٣١٣ حدود الادعاء ١٥٩
١٤١٣ أسئلة تفسير وتمارين ١٥٩
١٥١٣ خلاصة الفصل ١٥٩

**١٤ مبرهنة باربان--دافنبورت--هالبرستام ومتوسط التباين التربيعي ١٦٠**
١١٤. نطاق الفصل ١٦٠
١٠١١٤. نواتج التعلم ١٦٠
٢١٤. التوسيط وتحويل التباين إلى الشخصيات ١٦١
٣١٤. رد الشخصيات إلى الموصلات ١٦٢
٤١٤. الغربال الكبير الموزون ١٦٤
٥١٤. فصل الموصلات ١٦٤
١٠٥١٤. الموصلات الصغيرة ١٦٥
٢٠٥١٤. الموصلات الكبيرة ١٦٥
٦١٤. مبرهنة باربان--دافنبورت--هالبرستام في المجال الكلاسيكي ١٦٦
٧١٤. المسار المؤجل وعائق التصادمات الضربية ١٦٦
٨١٤. الحدود المفتوحة ١٦٧
٩١٤. خلاصة الفصل ١٦٧

**١٥ طرق الغربال الأساسية وغربال سيلبرغ وعائق التكافؤ ١٦٨**
١١٥. نطاق الفصل ١٦٨
١٠١١٥. نواتج التعلم ١٦٨
٢١٥. بيانات الغربال المجردة ١٦٩
٣١٥. متراجحة سيلبرغ التربيعية ١٦٩
٤١٥. حل مسألة التصغير المنتهية ١٧٠
٥١٥. البعد الغربالي ومقام سيلبرغ ١٧١
٦١٥. اللمّة الأساسية وحدودها ١٧٢
٧١٥. تطبيق: الأزواج المنخولة ١٧٣
٨١٥. عائق التكافؤ ١٧٥
٩١٥. ملاحظات ختامية وتمارين ١٧٥

**١٦ تطبيقات الغربال والفجوات بين الأعداد الأولية ١٧٦**
١١٦. نطاق الفصل ١٧٦
١.١١٦. نواتج التعلم ١٧٦
٢١٦. فجوات الأوليات والكميات $H_m$ ١٧٧
٣١٦. حد علوي للأزواج الأولية ١٧٧
٤١٦. مجموع برون ١٧٨
٥١٦. الأعداد شبه الأولية ومبرهنة تشن ١٧٨
٦١٦. طريقة GPY: فجوات أصغر من المتوسط ١٧٩
٧١٦. اختراق Zhang ١٧٩
٨١٦. غربال Maynard--Tao متعدد الأبعاد ١٧٩
٩١٦. تحسين Polymath8b ١٨٠
١٠١٦ عائق التكافؤ بعد الفجوات المحدودة ١٨٠
١١١٦ خريطة الاعتماد وحدود الادعاء ١٨١
١٢١٦ خلاصة الفصل ١٨١

**١٧ الطريقة الدائرية ومدخل إلى غولدباخ وواريغ ١٨٢**
١١٧. من مسألة جمعيّة إلى معامل فورييه ١٨٢
٢١٧. تشريح الدائرة: الأقواس الكبرى والأقواس الصغرى ١٨٤
٣١٧. البنية المحلية والأرخميدية للحد الرئيس ١٨٤
١.٣١٧. قياس التكامل المفرد ١٨٦
٢.٣١٧. الكثافات المحلية وإيجابية السلسلة المفردة ١٨٦
٤١٧. مدخل واريغ ١٨٧
٥١٧. مدخل غولدباخ الثلاثي ١٨٧
٦١٧. غولدباخ الثنائية: الحد الفاصل بين المبرهنة والحدس ١٨٨
٧١٧. ما الذي أنجزته الطريقة الدائرية؟ ١٨٨

**١٨ المجاميع الأسية وطريقة فان دير كوربوت ١٩٠**
١١٨. المجموع الأسي ومعنى الإلغاء ١٩١
٢١٨. الجمع الجزئي ونقل الأوزان ١٩٢
٣١٨. متباينة فرق فان دير كوربوت ١٩٢
٤١٨. من الفروق إلى المشتقات ١٩٤
٥١٨. اختبار المشتقة الأولى ١٩٤
٦١٨. اختبار المشتقة الثانية ١٩٦
٧١٨. الأزواج الأسية: لغة لضغط التقديرات ١٩٧
٨١٨. عملية $A$: التفريق وخفض درجة الطور ١٩٧
٩١٨. عملية $B$: التحويل الثنائي والطور الساكن ١٩٩
١٠١٨ تركيب العمليتين وحدود الاستخدام ٢٠٠

**١٩ الأوليات في الفترات القصيرة ٢٠١**

١٩.١ أربعة أهداف مختلفة ٢٠٢
١٩.٢ فروق دوال تشيبيشيف ٢٠٢
١٩.٣ مبدأ نقل حد الخطأ ٢٠٣
١٩.٤ إزالة القوى الأولية العليا ٢٠٣
١٩.٥ الانتقال من $\vartheta$ إلى $\pi$ ٢٠٤
١٩.٦ المسار التاريخي: من Hoheisel إلى Huxley ٢٠٥
١٩.٧ السجل التقاربي الحديث ٢٠٥
١٩.٨ فترة أقصر بنتيجة أضعف نوعيًا ٢٠٦
١٩.٩ من وجود أولي إلى فجوة بين أوليين متتاليين ٢٠٦
١٩.١٠ ما الذي تصنعه الصيغة الصريحة؟ ٢٠٧
١٩.١١ تقريبًا كل فترة ٢٠٧
١٩.١٢ أخطاء شائعة ٢٠٨
١٩.١٣ تمارين ٢٠٨
١٩.١٣.١ المستوى الأول ٢٠٨
١٩.١٣.٢ المستوى الثاني ٢٠٨
١٩.١٣.٣ المستوى الثالث ٢٠٩
١٩.١٤ خلاصة الفصل ٢٠٩

**٢٠ الأشكال المعيارية وأشكال ماس وصيغ التتبع ٢١٠**

٢٠.١ الفضاء العلوي والهندسة الزائدية ٢١١
٢٠.٢ الأشكال المعيارية الهولومورفية ٢١٢
٢٠.٣ حاصل Petersson ٢١٣
٢٠.٤ مؤثرات Hecke ٢١٤
٢٠.٥ أشكال ماس ٢١٤
٢٠.٦ مجاميع Kloosterman ٢١٥
٢٠.٧ صيغة Petersson ٢١٦
٢٠.٨ صيغة Kuznetsov ٢١٦
٢٠.٩ مدخل بنيوي إلى صيغة Selberg ٢١٧
٢٠.١٠ مقارنة الصيغ الثلاث ٢١٨
٢٠.١١ كيف تخدم الصيغ نظرية الأعداد التحليلية؟ ٢١٨
٢٠.١٢ أخطاء شائعة ٢١٨
٢٠.١٣ تمارين ٢١٩
٢٠.١٣.١ المستوى الأول ٢١٩
٢٠.١٣.٢ المستوى الثاني ٢١٩
٢٠.١٣.٣ المستوى الثالث ٢١٩

**٢١ دوال $L$ الآلية، دون التحدب، ومدخل إلى لانجلاندز ٢٢٠**

٢١.١ من معاملات هيكه إلى السلسلة المعيارية ٢٢١
٢١.٢ حاصل أويلر من علاقات هيكه ٢٢٢

٣٢١. العوامل المحلية ٢٢٣
٤٢١. الدالة المكتملة والمعادلة الوظيفية ٢٢٤
٥٢١. الموصل الحسابي والموصل التحليلي ٢٢٤
٦٢١. حد التحدب ٢٢٥
٧٢١. ما معنى دون التحدب؟ ٢٢٥
٨٢١. مبرهنة Michel--Venkatesh ٢٢٦
٩٢١. التمثيل العالمي وبياناته المحلية ٢٢٦
١٠٢١ مدخل منضبط إلى برنامج لانجلاندز ٢٢٧
١١٢١. كيف تتصل الفصول السابقة بهذا الفصل؟ ٢٢٨
١٢٢١ أخطاء شائعة ٢٢٨
١٣٢١ تمارين ٢٢٩
١.١٣٢١ المستوى الأول ٢٢٩
٢.١٣٢١ المستوى الثاني ٢٢٩
٣.١٣٢١ المستوى الثالث ٢٢٩

**II الجبهات البحثية الحديثة ٢٣٠**

**٢٢ عزوم دالة زيتا والقيم الكبيرة والمتطرفة ٢٣١**
١٢٢. تعريف العزوم وتطبيعها ٢٣٢
٢٢٢. المعادلة الوظيفية التقريبية ٢٣٢
٣٢٢. قيمة متوسطة لكثيرات حدود ديريشليه ٢٣٣
٤٢٢. العزم الثاني ٢٣٣
٥٢٢. العزم الرابع: صيغة Ingham ٢٣٤
٦٢٢. حدود عليا عامة تحت فرضية ريمان ٢٣٤
٧٢٢. الحدود الدنيا غير المشروطة ٢٣٥
٨٢٢. حدسية Keating--Snaith ٢٣٥
٩٢٢. القيم الكبيرة والمتطرفة ٢٣٦
١٠٢٢ الانتقال إلى عائلات دوال $L$ ٢٣٦

**٢٣ إحصاء أصفار دالة زيتا والمصفوفات العشوائية ٢٣٨**
١٢٣. عد الأصفار والمقياس المحلي ٢٣٩
٢٢٣. الارتباط الثنائي واتفاقية فورييه ٢٣٩
٣٢٣. مبرهنة مونتغمري ومجال الدعم ٢٤٠
٤٢٣. حدسية الارتباط الثنائي الكاملة ٢٤٠
٥٢٣. نواة الجيب في نموذج GUE ٢٤١
٦٢٣. الدليل العددي: ما يثبته وما لا يثبته ٢٤٢
٧٢٣. الفواصل وتباين العدد وإحصاءات المستويات ٢٤٢
٨٢٣. عائلات دوال $L$ وأنواع التناظر ٢٤٢
٩٢٣. حدود الاستدلال ٢٤٣
١٠٢٣ الجبهة المفتوحة ٢٤٣

**٢٤ الدوال الضربية الادعائية** **٢٤٥**
٢٤.١ الدوال الضربية والمتوسط الطويل . . . . . ٢٤٥
٢٤.٢ المسافة الادعائية . . . . . ٢٤٦
٢٤.٣ النماذج الطورية ومقياس أفضل اقتراب . . . . . ٢٤٧
٢٤.٤ مبرهنة هالاش الكمية . . . . . ٢٤٧
٢٤.٥ أمثلة أساسية . . . . . ٢٤٨
٢٤.٦ ماذا يعني الادعاء؟ . . . . . ٢٤٨
٢٤.٧ حدود الاستدلال . . . . . ٢٤٨
٢٤.٨ الجبهة المفتوحة . . . . . ٢٤٨

**٢٥ فك الاقتران والتوافق الفعّال: مبرهنة القيمة المتوسطة لفينوغرادوف** **٢٥٠**
٢٥.١ مجموع فينوغرادوف والقيمة المتوسطة . . . . . ٢٥١
٢٥.٢ الوزن الحرج والحدود الدنيا البنيوية . . . . . ٢٥٢
٢٥.٣ مبرهنة القيمة المتوسطة الرئيسية . . . . . ٢٥٣
٢٥.٤ مسار التوافق الفعّال . . . . . ٢٥٣
٢٥.٥ مسار فك الاقتران للمنحنى اللحظي . . . . . ٢٥٣
٢٥.٦ الجسر إلى وارينغ والمجاميع الأسية . . . . . ٢٥٤
٢٥.٧ ما الذي لا تثبته المبرهنة؟ . . . . . ٢٥٤
٢٥.٨ الجبهة المفتوحة . . . . . ٢٥٤

**٢٦ خريطة الجبهات البحثية الحديثة** **٢٥٦**
٢٦.١ قاموس الحالات وحدود الاستعمال . . . . . ٢٥٦
٢٦.٢ الجبهة الأولى: القيم والأصفار . . . . . ٢٥٧
٢٦.٣ الجبهة الثانية: الأوليات والبنى الجمعية . . . . . ٢٥٧
٢٦.٤ الجبهة الثالثة: دوال $L$ والطيف . . . . . ٢٥٨
٢٦.٥ الجبهة الرابعة: التذبذب الضربي . . . . . ٢٥٨
٢٦.٦ الجبهة الخامسة: المجاميع الأسية والهندسة التوافقية . . . . . ٢٥٩
٢٦.٧ الإحصاء الحسابي: جبهة غير مكتملة التغطية . . . . . ٢٥٩
٢٦.٨ الحساب الموثق بوصفه بنية مساعدة . . . . . ٢٥٩
٢٦.٩ ما أنجزته الموسوعة وما لم تدع إنجازه . . . . . ٢٦٠
٢٦.١٠ بروتوكول تحديث الخريطة . . . . . ٢٦٠

**المراجع** **٢٦٢**

**فهرس العلماء** **٢٦٨**

**فهرس النظريات والنتائج** **٢٦٩**

**فهرس الرموز والمصطلحات** **٢٧٢**

# القسم I

# الأسس التاريخية والمنهجية

# باب ١

# ماهية نظرية الأعداد التحليلية وتطورها

## ١١. نطاق الفصل ومخرجاته

هذا فصل توجيهي لا يفترض إلا مبادئ نظرية الأعداد والمتسلسلات والأعداد المركبة. بنهايته ينبغي أن يميز القارئ بين السؤال الدقيق والسؤال التقاربي، وأن يشرح وظيفة سلاسل ديريشليه والمنتجات الأويلرية والأصفار في نقل المعلومة الحسابية، وأن يحدد موضع المناهج الضربية والإضافية والطيفية. أما البراهين التقنية المؤجلة فتُعطى لها معرّفات ثابتة ويحال إلى موضعها اللاحق بدل عرضها كحقائق غير موسومة.

## ٢١. موضوع العلم

نظرية الأعداد التحليلية هي دراسة الظواهر الحسابية المنفصلة بواسطة أدوات التحليل الحقيقي والمركب والتوافقي والطيفي. لا يكمن جوهر المجال في استعمال التحليل استعمالًا عرضيًا، بل في بناء كائنات تحليلية تشفّر المعلومات الحسابية، ثم استرجاع تلك المعلومات من مواضع الأقطاب والأصفار، ومعدلات النمو، والمعادلات الوظيفية، والتحويلات التكاملية.

أبسط مثال تأسيسي هو سلسلة ديريشليه

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \Re(s) > 1,$$

التي ترتبط بالأعداد الأولية بواسطة حاصل ضرب أويلر

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}.$$

تعبر هذه الهوية عن مبرهنة التحليل الوحيد للأعداد الصحيحة بلغة تحليلية: فالمجموع يمتد على جميع الأعداد الصحيحة الموجبة، بينما يمتد الضرب على الأوليات فقط.

## ٠.٣١ الأسئلة المركزية

تتوزع المسائل الأساسية على محاور مترابطة:

١. التوزيع الكلي والمحلي للأعداد الأولية.

٢. المتوسطات والتذبذبات للدوال الحسابية.

٣. الأصفار والقيم الخاصة لدوال زيتا ودوال $L$.

٤. تمثيل الأعداد بجمع عناصر من مجموعات حسابية، ولا سيما الأوليات.

٥. التوزيع المتساوي، والمجاميع الأسية، والظواهر شبه العشوائية.

٦. الطيف الآلي وصيغ التتبع ومبدأ التبادلية بين البيانات الطيفية والحسابية.

## ٠.٤١ من العد الدقيق إلى السلوك التقاربي

إذا رمزنا بعدد الأوليات التي لا تتجاوز $x$ بـ

$$\pi(x) = \#\{p \le x : p \text{ أولي}\},$$

فإن القانون الكلي الأساسي يأخذ الصيغة الآتية.

**مبرهنة ١١.** (مبرهنة الأعداد الأولية). لدينا

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty).$$

ومعنى الرمز $\sim$ هو أن نسبة الطرفين تؤول إلى 1 عندما $x \to \infty$. وستُفصل العلاقة بين صيغ $\pi$ و$\vartheta$ و$\psi$ في الفصول اللاحقة؛ وللسياق التاريخي والتحليلي انظر [Nar00; Dav00; New80]. لا تعطينا هذه الصيغة مواضع الأوليات منفردة، لكنها تكشف القانون الكلي الذي يحكم كثافتها.

الانتقال من سؤال دقيق من نوع ``هل العدد $n$ أولي؟" إلى سؤال متوسط من نوع ``كم عدد الأوليات حتى $x$؟" هو إحدى الحركات المنهجية الكبرى في المجال. ثم تعود النظرية بعد ذلك إلى الأسئلة المحلية، مثل الأوليات في الفترات القصيرة أو المتتاليات الحسابية، بأدوات أكثر حساسية.

# ٥١. المراحل التاريخية الكبرى

## ١.٥١. مرحلة أويلر

أظهر أويلر أن البنية الضربية للأعداد الصحيحة يمكن تمثيلها بحاصل ضرب تحليلي. ومن هذه الفكرة نشأ المبدأ العام القائل إن الدوال المولدة ليست أدوات ترميز محايدة، بل قد تحول مسائل حسابية إلى مسائل في التقارب والاستمرار التحليلي.

## ٢.٥١. مرحلة ديريشليه

أدخل ديريشليه المحارف ودوال $L$ لإثبات وجود عدد لا نهائي من الأوليات في كل متتالية حسابية أول حد لها وفارقها أوليان فيما بينهما. تكمن الأهمية المنهجية في تفكيك شروط التطابق باستخدام علاقات التعامد، ثم ربط المكوّنات الناتجة بدوال تحليلية.

## ٣.٥١. مرحلة ريمان

أعاد ريمان صياغة مسألة توزيع الأوليات بلغة أصفار دالة زيتا [Rie59; Nar00]. وتتمثل الفكرة العميقة في أن الحد الرئيسي لتوزيع الأوليات يرتبط بقطب $\zeta(s)$ عند $s = 1$، بينما ترتبط حدود الخطأ بالأصفار غير البديهية. ومن هنا أصبحت هندسة الأصفار في المستوى العقدي صورة دقيقة لتذبذب الأعداد الأولية.

## ٤.٥١. القرن العشرون

شهد القرن العشرون نشوء مدارس كبرى: الطرق التوبيرية، وطريقة الدائرة، وطرق الغربال، ونظرية المجاميع الأسية، والتحليل الطيفي للأشكال الآلية. وأدى هذا إلى استقلال أدوات تستطيع أحيانًا إثبات نتائج أولية من دون الاعتماد الكامل على معلومات دقيقة عن أصفار دوال $L$.

# ٦١. التقسيم البنيوي للمجال

## ١.٦١. النظرية الضربية

تدرس الدوال الضربية وسلاسل ديريشليه والقيم المتوسطة ودوال زيتا و$L$، وتشمل قضايا توزيع الأوليات، ومبرهنات القيم المتوسطة، ونظرية الدوال الضربية الادعائية.

## ٢.٦١. النظرية الإضافية

تبحث في تمثيل الأعداد الصحيحة كمجاميع، كما في مسألتي غولدباخ ووارينغ. أداتها النموذجية هي تحليل فورييه على الدائرة، إلى جانب الغربال والمجاميع الأسية.

### ٠.٣.٦١ الجانب الطيفي والآلي

يربط بين معاملات فورييه للأشكال الآلية، ودوال $L$، وصيغ التتبع، والتمثيلات. وهو من أكثر أجزاء النظرية الحديثة عمقًا واتصالًا ببرنامج لانجلاندز [GM03; IK04].

## ٠.٧١ منهج الموسوعة

سيُعرض كل موضوع وفق الطبقات الآتية:

١. الدافع والسياق التاريخي.

٢. التعريفات والنتائج الأساسية.

٣. البراهين الكاملة مع توضيح مواضع الأفكار الحاسمة.

٤. المقارنة بين المناهج البديلة.

٥. أمثلة عددية وحاسوبية.

٦. حدود النتائج الحالية والمسائل المفتوحة.

٧. خريطة محدثة للأبحاث الحديثة ذات الصلة.

## ٠.٨١ حدود دعوى الشمول

لا توجد موسوعة نهائية تحتوي حرفيًا على كل ما في نظرية الأعداد التحليلية؛ فالمجال يتوسع باستمرار، وبعض حدوده تندمج في التحليل التوافقي والهندسة الحسابية ونظرية التمثيلات. لذلك سيكون معنى ``الشمول" هنا هو تغطية البنية الأساسية والفروع الكبرى والأدوات المرجعية، مع سجل تحديث صريح للجبهات الحديثة، لا ادعاء الإحاطة بكل ورقة منشورة.

## ٠.٩١ تمارين تمهيدية

١. أثبت حاصل ضرب أويلر لـ$\zeta(s)$ عندما $\Re(s) > 1$، مع تبرير تبديل المجاميع والجداءات.

٢. بيّن أن تباعد $\sum_p 1/p$ يستلزم وجود عدد لا نهائي من الأوليات.

٣. اشرح الفرق المنطقي بين صيغة تقاربية وصيغة ذات حد خطأ صريح.

٤. أعط مثالًا لدالة حسابية تُدرس بصورة أكثر كفاءة من خلال سلسلة ديريشليه.

# ١٠١. التحويلات الفكرية المؤسسة للمجال

يمكن فهم تطور نظرية الأعداد التحليلية من خلال أربع تحويلات كبرى.

## ١٠١٠١. من الأعداد المفردة إلى الدوال الجامعة

بدلًا من فحص كل عدد صحيح على حدة، تجمع المعلومات الحسابية في دالة واحدة. فإذا كانت $a(n)$ دالة حسابية، فإن إحدى الأدوات الطبيعية هي سلسلة ديريشليه

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}.$$

وتعكس خواص $F$ غالبًا بنية $a$: فالضربية تظهر في صورة حاصل ضرب أويلري، والنمو المتوسط يظهر في طبيعة المفردات التحليلية، والتذبذب يظهر في مواضع الأصفار أو في حدود النمو على الخطوط الرأسية.

## ١٠١٠٢. من الصيغ الدقيقة إلى القوانين التقاربية

المعادلة الدقيقة قد تكون مستحيلة أو غير مفيدة، بينما تكشف الصيغة التقاربية عن القانون البنيوي. ولهذا تستعمل النظرية رموزًا مثل

$$f(x) = O(g(x)), \qquad f(x) = o(g(x)), \qquad f(x) \sim g(x).$$

وسنخصص فصلًا لاحقًا لتحديد هذه الرموز بدقة، لكن الفكرة العامة هي قياس رتبة الحجم، والتمييز بين الحد الرئيسي وحد الخطأ.

## ١٠١٠٣. من المجال الحقيقي إلى المستوى العقدي

تتيح المتغيرات العقدية الاستمرار التحليلي، ومبدأ الحجة، وصيغ البواقي، والتكاملات المحيطية. وهذه الأدوات لا تضيف لغة جديدة فحسب، بل تكشف معلومات حسابية لا تظهر على المحور الحقيقي. فمثلًا، يُعد غياب أصفار $\zeta(s)$ على الخط $\Re(s) = 1$ مكوّنًا حاسمًا في البراهين التحليلية لمبرهنة الأعداد الأولية، مع أدوات الانتقال من المعلومات العقدية إلى مجاميع المعاملات؛ بينما تتحكم الأصفار داخل الشريط الحرج في تذبذب حدود الخطأ [Dav00; Tit86].

## ١٠١٠٤. من العد المباشر إلى التحليل الطيفي

في التطورات الحديثة، تظهر المعلومات الحسابية في أطياف مؤثرات أو تمثيلات. وتحوّل صيغ التتبع المجموعات على الجانب الهندسي أو الحسابي إلى مجموعات على الجانب الطيفي. وهذه الفكرة تمهد لفهم الأشكال الآلية ودوال $L$ وبرنامج لانجلاندز.

## ٠.١١١ النظرية الابتدائية والنظرية التحليلية

لا تعني عبارة ``برهان ابتدائي" أن البرهان سهل، بل تعني عادة أنه لا يعتمد على التحليل العقدي. وأشهر مثال هو البرهان الابتدائي لمبرهنة الأعداد الأولية الذي ارتبط بأعمال سيلبرغ وإردوش [BS08; New80].

ويجب التمييز بين ثلاثة أسئلة:

١. هل النتيجة نفسها تحليلية في طبيعتها؟

٢. هل البرهان يستخدم أدوات التحليل العقدي؟

٣. هل البرهان يعطي حد خطأ فعالًا أو مناسبًا للتعميم؟

قد يثبت برهان ابتدائي النتيجة الأساسية، بينما يوفر البرهان العقدي تفسيرًا أعمق وحدود خطأ أفضل وروابط مع مسائل أخرى. لذلك لا تتبنى الموسوعة مفاضلة مطلقة بين المناهج، بل تدرس القوة التفسيرية والتقنية لكل منهج.

## ٠.١٢١ مثال نموذجي: حاصل ضرب أويلر

**مبرهنة ٠.٢١** (حاصل ضرب أويلر)**.** إذا كان $\Re(s) > 1$، فإن

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}.$$

برهان. بما أن $\Re(s) > 1$، فإن السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\Re(s)}$$

متقاربة تقاربًا مطلقًا. ولكل عدد أولي $p$ لدينا متسلسلة هندسية

$$\left(1 - p^{-s}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks}.$$

إذا أخذنا حاصل الضرب على مجموعة منتهية من الأوليات $p \le y$، فإن نشر الجداء يعطي

$$\prod_{p \le y} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} = \sum_{\substack{n \ge 1 \\ p \mid n \Rightarrow p \le y}} \frac{1}{n^s}.$$

وتظهر كل قيمة $n$ مرة واحدة فقط بسبب وحيدية التحليل إلى عوامل أولية. وعندما $y \to \infty$، يزداد مجموع الأعداد المسموح بها حتى يشمل جميع الأعداد الصحيحة الموجبة. ويبرر التقارب المطلق تمرير النهاية وترتيب الحدود، فنحصل على الهوية المطلوبة. □

ملاحظة ٠.٣١. هذا البرهان نموذج مصغر للمنهج كله: بنية حسابية هي وحيدية التحليل، تتحول إلى هوية تحليلية هي حاصل الضرب الأويلري.

## ٠.١٣١ مثال نموذجي ثان: لماذا تظهر اللوغاريتمات؟

تقترح مبرهنة الأعداد الأولية أن احتمال كون عدد قريب من $x$ أوليًا هو تقريبًا

$$\frac{1}{\log x}.$$

هذه ليست عبارة احتمالية حرفية عن اختيار عشوائي مستقل، لكنها حدس كثافة مفيد. ومنه نتوقع أن عدد الأوليات في مجال قصير طوله $h$ قرب $x$ يساوي تقريبًا

$$\frac{h}{\log x},$$

ما دام المجال طويلًا بما يكفي لتظهر السلوكيات المتوسطة. وتبدأ الصعوبة عندما يصبح $h$ صغيرًا جدًا؛ فحينها تكشف التذبذبات المحلية حدود المناهج المتاحة.

## ٠.١٤١ خريطة العلاقات بين الأدوات والمسائل

| المعلومة المستخرجة | المشكلة النموذجية | الأداة |
|---|---|---|
| الحدود الرئيسية والنمو | المتوسطات الحسابية | سلاسل ديريشليه |
| الصلة بالأعداد الأولية | البنية الضربية | المنتجات الأويلرية |
| الصيغ الصريحة وحدود الخطأ | توزيع الأوليات | التحليل العقدي |
| تمثيل الأعداد كمجاميع | مسائل الجمع | تحليل فورييه |
| قياس الإلغاء والتذبذب | التوزيع المتساوي | المجاميع الأسية |
| حدود علوية وسفلية | عزل الأعداد شبه الأولية | طرق الغربال |
| علاقات تبادلية وحدود دقيقة | الأشكال الآلية ودوال $L$ | التحليل الطيفي |

## ٠.١٥١ معايير قراءة النتائج في هذا الكتاب

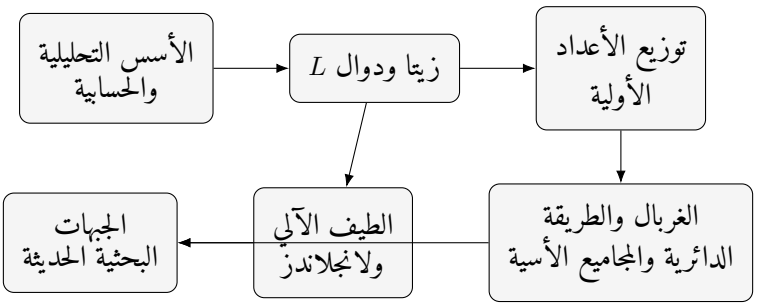
عند عرض أي نتيجة، يجب على القارئ أن يسأل:

١. ما المجال الذي تسري فيه؟

٢. هل الثوابت فعالة ويمكن حسابها؟

٣. هل النتيجة مشروطة بفرضية ريمان أو بفرضية أخرى؟

٤. هل الحد موحد بالنسبة إلى جميع المعلمات؟




شكل ٠.١١: خريطة اعتماد مبسّطة بين أجزاء الموسوعة الستة والعشرين فصلًا، مطابقة لتقسيم الأجزاء الفعلي في الفهرس: الأسس تُبنى أولًا، ثم زيتا ودوال $L$، ثم توزيع الأعداد الأولية، ثم يتفرع الكتاب إلى مسارين متوازيين (الغربال/الطريقة الدائرية من جهة، والطيف الآلي من جهة أخرى) يلتقيان في الجبهات البحثية الحديثة. الأسهم تشير إلى اعتماد لاحق على سابق، لا إلى ترتيب قراءة إلزامي وحيد.

٥. هل النتيجة تقاربية أم صريحة؟

٦. هل البرهان نوعي أم كمي؟

٧. ما الأداة التي تمنع تحسين النتيجة أكثر؟

هذه الأسئلة ليست شكلية، بل تميز بين نتائج قد تبدو متشابهة في الصياغة لكنها تختلف جذريًا في القوة.

## ٠.١٦١ ملاحظات تاريخية منهجية

تطور المجال لم يكن خطيًا. فقد ظهرت بعض الأدوات لحل مشكلة محددة ثم أصبحت نظريات مستقلة. كما أن نتائج كثيرة عادت إلى الظهور بصيغ أقوى بعد إدخال أدوات من فروع أخرى.
ومن الأمثلة البارزة:

- انتقال حاصل ضرب أويلر من هوية للسلاسل إلى مبدأ بنيوي لدوال $L$.
- انتقال طريقة الدائرة من مسائل التقسيم إلى مسائل الجمع في الأوليات.
- تحول طرق الغربال من أدوات حدود تقريبية إلى تقنيات مركزية في دراسة الفجوات بين الأوليات.
- دخول التحليل الطيفي ونظرية التمثيلات في مسائل كانت تبدو كلاسيكية بحتة.

## ٠.١٧١ المتطلبات السابقة ومسار القراءة

يمكن تقسيم المتطلبات إلى ثلاث طبقات:

### ٠.١٠.١٧١ الطبقة الأولى

التفاضل والتكامل، المتسلسلات، الأعداد المركبة، الجبر الخطي، ومبادئ نظرية الأعداد الابتدائية.

### ٠.٢٠.١٧١ الطبقة الثانية

التحليل الحقيقي، التحليل المركب، نظرية القياس، وتحليل فورييه الأساسي.

### ٠.٣٠.١٧١ الطبقة الثالثة

التحليل الدالي، التوزيعات، المجموعات الموضعية، الأشكال المعيارية، ونظرية التمثيلات. وهذه لا يحتاجها القارئ في البداية، بل تظهر تدريجيًا في المجلدات المتقدمة.

## ٠.١٨١ تمارين إضافية

١. أثبت أن حاصل ضرب أويلر لا يمكن أن ينعدم في نصف المستوى $\Re(s) > 1$.

٢. استخرج من حاصل ضرب أويلر الصيغة

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \qquad \Re(s) > 1.$$

٣. قارن بين المعاني الدقيقة للرموز $O$، و$o$، و$\sim$ عبر أمثلة من اختيارك.

٤. فسّر لماذا لا تكفي معرفة $\pi(x) \sim x/\log x$ وحدها لإثبات وجود عدد أولي في كل فترة قصيرة من شكل $[x, x + x^{0.1}]$.

٥. اكتب فقرة تشرح كيف يمكن لموقع أصفار دالة عقدية أن يؤثر في مسألة عدٍّ للأعداد الصحيحة.

## ٠.١٩١ مراجع الفصل ومسار التوسع

للقراءة التمهيدية المنظمة، يعد كتاب Apostol [Apo76] مدخلًا كلاسيكيًا مناسبًا، بينما يقدم Karatsuba [Kar92] و Iwaniec--Kowalski [IK04] مسارين أكثر تقدمًا. ولتاريخ تطور نظرية الأعداد الأولية انظر Narkiewicz [Nar00]، ولمدخل إلى دالة زيتا وما بعدها انظر [Tit86; GM03].

## ٠.٢٠١ خط زمني تحليلي لتطور المجال

لا يكفي سرد أسماء العلماء والتواريخ؛ فالمهم هو تحديد التحول المنهجي الذي أضافته كل مرحلة.

### ٠.١.٢٠١ أويلر: تحويل التحليل الوحيد إلى حاصل ضرب

أدخل أويلر الفكرة التي صارت نموذجًا مبكرًا لكثير من دوال $L$: إذا كانت المعاملات الحسابية تعكس بنية ضربيّة، فإن السلسلة المولدة قد تتحلل إلى عوامل محلية مرتبطة بالأعداد الأولية. لم يكن حاصل الضرب الأويلري مجرد حيلة لإعادة كتابة سلسلة، بل كشف أن الأوليات يمكن دراستها من خلال خواص دالة في متغير مركب.

### ٠.٢.٢٠١ ديريشليه: التعامد يفصل الفئات الحسابية

أضاف ديريشليه المحارف بوصفها أداة لتحليل شروط التطابق. فبدل دراسة الأعداد

$$n \equiv a \pmod{q}$$

مباشرة، تُستخدم علاقات التعامد لتحويل المؤشر الحسابي إلى تركيب خطي من المحارف. ومن ثم تظهر دوال

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

هذا الانتقال هو الأصل المبكر لفكرة التحليل التوافقي على الزمر المنتهية في نظرية الأعداد.

### ٠.٣.٢٠١ تشيبيشيف: الحدود الكمية قبل القانون النهائي

قبل إثبات مبرهنة الأعداد الأولية، أثبت تشيبيشيف حدودًا من الرتبة الصحيحة لـ$\pi(x)$. وتوضح هذه المرحلة أهمية النتيجة الجزئية الكمية: فقد لا نعرف الثابت التقاربي النهائي، لكننا نستطيع تحديد الحجم الصحيح وإثبات أن الظاهرة ليست بعيدة عن التخمين.

### ٠.٤.٢٠١ ريمان: الأصفار تتحكم في التذبذب

نقل ريمان المسألة من دراسة القيم الحقيقية لـ$\zeta(s)$ إلى بنيتها الميرومورفية على المستوى العقدي. وظهرت هنا ثلاثة مبادئ ستتكرر في أنحاء الموسوعة:

١. الاستمرار التحليلي يوسع مجال المعلومات.

٢. المعادلة الوظيفية تكشف تناظرًا خفيًا.

٣. الأصفار تترجم إلى حدود متذبذبة في الصيغ الحسابية.

ومن هذه المبادئ نشأت الصيغ الصريحة، التي تربط دوال عدّ الأوليات بمجاميع ممتدة على أصفار زيتا.

### ٠.٥.٢٠١. هادامار ودي لا فاليه بوسان: من منطقة خالية من الأصفار إلى مبرهنة الأعداد الأولية

كان إثبات عدم انعدام $\zeta(s)$ على الخط

$$\Re(s) = 1$$

المكوّن الحاسم في برهاني هادامار ودي لا فاليه بوسان، لكنه يعمل مع الامتداد التحليلي والتقديرات وصيغ الانتقال اللازمة لاستخراج القانون

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

لذلك لا يصح اختزال البرهان في عبارة عدم الانعدام وحدها. وظهر هنا مبدأ عام: منطقة كمية خالية من الأصفار، مع ضبط نمو الدالة وأداة انتقال مناسبة، تقود إلى تقدير لحد الخطأ، وكلما تحسنت المنطقة تحسن التقدير الحسابي [Nar00; Dav00; New80].

### ٠.٦.٢٠١. هاردي وليتلوود: تحليل فورييه لمسائل الجمع

حوّلت طريقة الدائرة مسائل تمثيل الأعداد إلى دراسة تكاملات لمتسلسلات مولدة على الدائرة الوحدة. وتنقسم الدائرة إلى أقواس كبرى، حيث تظهر البنية الحسابية المنظمة، وأقواس صغرى، حيث يجب إثبات الإلغاء.

هذا التقسيم بين ``بنية" و``عشوائية" صار نموذجًا متكررًا في التحليل الإضافي الحديث.

### ٠.٧.٢٠١. فينوغرادوف: المجاميع الأسية أداة مركزية

طوّر فينوغرادوف مناهج لتقدير المجاميع الأسية، وأثبت بها نتائج كبرى في مسائل جمع الأوليات والقوى. وأصبحت القدرة على قياس الإلغاء في مجموع من الشكل

$$\sum_{n \le N} e(f(n))$$

مقياسًا لقوة كثير من المناهج التحليلية، حيث $e(t) = e^{2\pi i t}$.

### ٠.٨.٢٠١. سيلبرغ وإردوش: القوة الابتدائية والبنية الغربالية

أظهر البرهان الابتدائي لمبرهنة الأعداد الأولية أن بعض الحقائق العميقة عن الأوليات يمكن الوصول إليها دون التحليل العقدي [BS08; New80]. وفي الوقت نفسه، طوّر سيلبرغ غرباله إلى أداة مرنة تعتمد على اختيار أوزان مثلى.

كما مهّد عمل سيلبرغ الطيفي لربط الأعداد بالهندسة والطيف من خلال صيغة التتبع ودالة زيتا لسيلبرغ.

### ٢٠١.٩. بومبييري وفينوغرادوف: المتوسط يعوض الفرضية الفردية

توضح مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف مبدأ بالغ الأهمية: قد نعجز عن إثبات حد قوي لكل مقياس على حدة، لكن يمكن الحصول على نتيجة قوية جدًا في المتوسط على المقاييس. وقد جعل هذا المبدأ أدوات الغربال قادرة على الوصول إلى نتائج كانت تبدو مشروطة بفرضيات أعمق.

### ٢٠١.١٠. الأشكال الآلية: توسيع مفهوم دالة $L$

في النظرية الحديثة لم تعد دوال $L$ مجرد تعميمات منفصلة لدالة زيتا، بل ترتبط بتمثيلات آلية وبيانات محلية عند كل عدد أولي. وتوحد هذه الرؤية عددًا واسعًا من الدوال التي ظهرت تاريخيًا في سياقات مختلفة.

وتعتمد التطبيقات التحليلية على:

- الاستمرار التحليلي والمعادلات الوظيفية.
- حدود المعاملات المحلية.
- صيغ التتبع.
- التقديرات الطيفية.
- مسائل التحدب ودون التحدب.

### ٢٠١.١١. المرحلة المعاصرة: مزج الأدوات

الحدود الحديثة نادرًا ما تعتمد على أداة منفردة. فالنتائج المهمة تمزج بين الغربال، والتحليل التوافقي، والأشكال الآلية، ونظرية الاحتمالات، والهندسة الجبرية، والحساب عالي الدقة.

ومن أمثلة هذا المزج:

١. استعمال صيغ التتبع في تقدير عزوم دوال $L$.

٢. استعمال أدوات الغربال مع معلومات توزيع متوسطة.

٣. استعمال نماذج المصفوفات العشوائية لصياغة تخمينات دقيقة.

٤. استعمال فك الاقتران في مسائل المجاميع الأسية.

٥. استعمال الحوسبة لتوجيه التخمينات والتحقق من الحدود الصريحة.

## ٠.٢١١ خلاصة الخط الزمني

يمكن تلخيص تطور المجال في السلسلة المفاهيمية الآتية:

الأصفار والصيغ الصريحة $\longrightarrow$ $L$دوال $\longrightarrow$ المنتجات الأويلرية $\longrightarrow$ التحليل الوحيد الطيف والأشكال الآلية $\longrightarrow$ فورييه والغربال $\longrightarrow$.

ولا تمحو مرحلة ما قبلها؛ بل تضيف طبقة جديدة تسمح بإعادة تفسير النتائج القديمة ضمن بنية أوسع.

## ٠.٢٢١ المدارس البحثية الكبرى في نظرية الأعداد التحليلية

لا تنقسم نظرية الأعداد التحليلية إلى مدارس منفصلة تمامًا، لكن يمكن تمييز تقاليد منهجية تختلف في نوع الأسئلة والأدوات ومفهوم ``التقدم" داخل كل منها.

### ٠.١.٢٢١ مدرسة دوال زيتا ودوال $L$

تركز هذه المدرسة على البنية التحليلية للدوال المرتبطة بالبيانات الحسابية. ومن أسئلتها النموذجية:

- أين تقع الأصفار؟
- ما كثافتها وإحصاؤها؟
- ما حجم الدالة على الخطوط الحرجة؟
- ما رتبة أقطابها وقيمها الخاصة؟
- كيف تنعكس هذه المعلومات على توزيع الأوليات أو المعاملات الحسابية؟

وتشمل أدواتها الاستمرار التحليلي، والمعادلات الوظيفية، وصيغ الضرب، والمبادئ الثلاثية للخطوط، وصيغ التقريب الدالية، ونظريات الكثافة الصفرية.

### ٠.٢.٢٢١ مدرسة الغربال وتوزيع الأوليات

تدرس هذه المدرسة كيفية عزل الأعداد التي لا تقبل القسمة بعوامل أولية صغيرة. يبدأ الغربال من بيانات قابلة للعد، ثم يختار أوزانًا تقلل الخطأ أو تزيد الحساسية تجاه البنية المطلوبة.

من تحدياتها الأساسية ``عائق التكافؤ"، الذي يمنع طرائق غربالية عامة من التمييز الكامل بين عدد له عدد زوجي من العوامل الأولية وآخر له عدد فردي منها. ولهذا كثيرًا ما تنجح الغربلة في إنتاج أعداد شبه أولية قبل أن تنجح في إنتاج أعداد أولية.

### ٠.٢٢١.٣ مدرسة المجاميع الأسية والتحليل التوافقي

المبدأ المركزي هنا هو أن الإلغاء في الأطوار المتذبذبة يقيس مقدار ابتعاد المتتالية عن التركز أو الانتظام غير المرغوب فيه. ومن ثم تُدرس مجاميع مثل

$$S(\alpha) = \sum_{n \le N} a_n e(\alpha f(n)).$$

وتدخل هذه المدرسة في التوزيع المتساوي، والطريقة الدائرية، ومسائل الحدود المحدبة، وتقديرات الفترات القصيرة.

### ٠.٢٢١.٤ المدرسة الطيفية والآلية

تربط هذه المدرسة البيانات الحسابية بأطياف مؤثرات وبتمثيلات آلية. وتظهر صيغ التتبع بوصفها مساواة بين جانب هندسي أو مداري وجانب طيفي.

قوة هذا المنهج أنه لا يدرس دالة $L$ منفردة فقط، بل يضع عائلات كاملة داخل بنية تمثيلية مشتركة. ومن هنا تأتي العلاقات بين معاملات فورييه، والقيم المركزية، والفترات الآلية، وصيغ التتبع النسبية.

### ٠.٢٢١.٥ المدرسة الاحتمالية والادعائية

تتعامل هذه المدرسة مع الدوال الضربية من زاوية السلوك المتوسط والشبه العشوائي. وفي الصياغة الادعائية، تقاس المسافة بين دالتين ضربيتين بمدى تشابه قيمهما على الأعداد الأولية. فإذا كانت دالة ما ``تدّعي" أنها قريبة من نموذج بسيط، انعكس ذلك على مجاميعها المتوسطة؛ وإلا ظهر إلغاء قوي.

### ٠.٢٢١.٦ المدرسة الحاسوبية والصريحة

تركز هذه المدرسة على الثوابت الفعلية، ونطاقات الصلاحية، والتحقق الموثق، والحساب عالي الدقة. وهي ضرورية عندما تكون النتيجة التقاربية غير كافية لتطبيق عددي، أو عندما يحتاج البرهان إلى فحص مجال منتهٍ بعد معالجة المجال الكبير تحليلياً.

## ٠.٢٣١ حدود المجال وعلاقته بالفروع المجاورة

### ٠.٢٣١.١ نظرية الأعداد الجبرية

تدخل الحقول العددية والمثاليّات والمحارف الهيكية في صميم كثير من دوال $L$. لكن التركيز يصبح تحليلياً عندما يكون السؤال عن التوزيع أو المتوسطات أو الأصفار أو الحدود الكمية.

### ٠.٢٠٢٣١ الهندسة الحسابية

ترتبط المتنوعات الجبرية بدوال زيتا ودوال $L$، وتظهر قضايا الرتب والقيم الخاصة. إلا أن المعالجة الكاملة تحتاج أدوات هندسية وجبرية لا يمكن اختزالها في التحليل وحده. لذلك ستقدم الموسوعة ما يلزم لفهم الجانب التحليلي، وتحيل إلى مراجع متخصصة في البنية الهندسية.

### ٠.٣٠٢٣١ التحليل التوافقي

التداخل عميق، خصوصًا في تحليل فورييه على الزمر، وتقديرات التقييد، وفك الاقتران. وتصبح المسألة عددية عندما تحدد البنية الحسابية شكل الأطوار أو المجموعات التي يُطبّق عليها التحليل.

### ٠.٤٠٢٣١ نظرية التمثيلات وبرنامج لانجلاندز

تمنح نظرية التمثيلات لغة توحيدية للأشكال الآلية ودوال $L$. ولا تهدف هذه الموسوعة إلى استبدال مقرر كامل في التمثيلات، بل إلى بناء الجسر الذي يحتاجه باحث نظرية الأعداد التحليلية لفهم الأدوات الآلية وتطبيقاتها.

### ٠.٥٠٢٣١ الاحتمالات والمصفوفات العشوائية

توفر النماذج الاحتمالية تنبؤات دقيقة لإحصاء الأصفار والقيم. لكنها لا تعد براهين في ذاتها؛ فقيمتها في كشف البنية المتوقعة، وتحديد الثوابت، واقتراح الصيغة الصحيحة للمبرهنات.

## ٠.٢٤١ مبادئ النزاهة العلمية في عرض التاريخ والبحث الحديث

ستلتزم الموسوعة بالمبادئ الآتية:

١. عدم نسبة نتيجة إلى شخص واحد إذا كان تاريخها مشتركًا أو متنازعًا عليه.

٢. التمييز بين تاريخ الإعلان وتاريخ النشر والتحكيم.

٣. عدم وصف ورقة أولية بأنها نتيجة مستقرة دون بيان حالتها.

٤. عدم تقديم حدس عددي على أنه دليل برهاني.

٥. ذكر الفرضيات كاملة عند عرض نتيجة مشروطة.

٦. مراجعة المصادر الأصلية في النتائج المحورية قدر الإمكان.

## ٢٥١. قاموس مصطلحات أولي للفصل

**الدالة الحسابية** دالة معرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة، وغالبًا ما تأخذ قيمًا حقيقية أو مركبة.

**سلسلة ديريشليه** سلسلة من الشكل $\sum a(n)n^{-s}$.

**حاصل ضرب أويلري** تمثيل لدالة في صورة جداء عوامل محلية ممتدة على الأعداد الأولية.

**الاستمرار التحليلي** توسيع دالة تحليلية إلى مجال أكبر مع الحفاظ على توافقها في منطقة التقاطع.

**الصيغة الصريحة** هوية تربط دالة عدّ حسابية بأقطاب وأصفار دالة تحليلية.

**المنطقة الخالية من الأصفار** جزء من المستوى العقدي يُثبت أن دالة $L$ لا تنعدم فيه.

**الحد الفعّال** حد يمكن، من حيث المبدأ، حساب ثوابته أو نطاق صلاحيته.

**النتيجة الموحدة** نتيجة تبقى ثوابتها مضبوطة عند تغير معلمة أو أكثر ضمن مجال محدد.

**الإلغاء** صغر مجموع متذبذب مقارنة بمجموع القيم المطلقة لحدوده.

**الطيف الآلي** البيانات الطيفية المرتبطة بالتمثيلات أو الأشكال الآلية.

## ٢٦١. خاتمة الفصل

قدمت هذه المقدمة صورة بنيوية للمجال: تبدأ من وحيدية التحليل إلى عوامل أولية، ثم تمر بالترميز في سلاسل ديريشليه والمنتجات الأويلرية، وتصل إلى الأصفار والصيغ الصريحة، ثم إلى الغربال وفورييه والطيف.

المبدأ الذي سيقود المجلدات التالية هو أن كل أداة تحليلية يجب أن تُفهم من ثلاث زوايا متلازمة:

الصياغة الدقيقة + الحدس البنيوي + قدرتها على إنتاج معلومات حسابية.

# باب ٢

# اللغة التقاربية والجمع الجزئي لأبيل

## ٠١٢ نطاق الفصل ومخرجاته

يفترض الفصل الإلمام بالنهايات والتكامل والتكامل بالتجزئة. بنهايته ينبغي أن يصرّح القارئ باعتماد الثوابت الضمنية، ويميز بين $O$ و$o$ و$\sim$، ويثبت صيغتي الجمع الجزئي، وينقل تقديرًا لدالة مجاميع جزئية إلى مجموع موزون. الصيغ القياسية والتطبيقات الإضافية يمكن مراجعتها في [Apo76; Dav00].

## ٠٢٢ لماذا نحتاج إلى لغة تقاربية؟

تهتم نظرية الأعداد التحليلية غالبًا بسلوك كميات حسابية عندما تكبر المعلمة الأساسية. وقد يكون إيجاد صيغة مغلقة دقيقة أمرًا مستحيلًا أو غير مفيد، بينما يمكن فصل الكمية إلى حد رئيسي يصف السلوك المنتظم وحد خطأ يقيس التذبذب.

إذا كانت $F(x)$ دالة عدّ أو مجموعًا حسابيًا، فإن الصيغة النموذجية تكون

$$F(x) = M(x) + E(x),$$

حيث $M(x)$ هو الحد الرئيسي و$E(x)$ حد الخطأ. ولا يكفي ذكر أن $E(x)$ ``صغير"؛ بل يجب تحديد معنى الصغر، ومجال الانتظام، واعتماد الثوابت على المعلمات.

## ٠٣٢ رمز لاندو الكبير

**تعريف ٠١٢.** لتكن $f$ و$g$ دالتين معرفتين عندما $x \geq x_0$، ولنفترض أن $g(x) > 0$ هناك. نكتب

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (x \to \infty)$$

إذا وُجد ثابت $C > 0$ وعدد $x_1 \geq x_0$ بحيث

$$|f(x)| \leq Cg(x)$$

لكل $x \geq x_1$.

ويقال أيضًا إن

$$f(x) \ll g(x).$$

والرمزان $O$ و$\ll$ متكافئان في هذا الكتاب، ما لم نصرح بخلاف ذلك.

**مثال ٠.٢٢** لدينا

$$\log x = O(x^{\varepsilon})$$

لكل $\varepsilon > 0$. لكن الثابت الضمني يعتمد عادة على $\varepsilon$.

**مثال ٠.٣٢** من

$$3x^2 - 7x + 1 = O(x^2)$$

لا نستنتج أن المقدار قريب نسبيًا من $3x^2$، بل نستنتج فقط أنه لا يتجاوز رتبة $x^2$.

## ٠.٤٢ الاعتماد على المعلمات والانتظام

إذا كان الثابت الضمني يعتمد على معلمة $\alpha$، نكتب

$$f(x, \alpha) = O_{\alpha}(g(x, \alpha))$$

أو

$$f(x, \alpha) \ll_{\alpha} g(x, \alpha).$$

**تعريف ٠.٤٢** نقول إن التقدير

$$f(x, \alpha) = O(g(x, \alpha))$$

منتظم بالنسبة إلى $\alpha \in A$ إذا أمكن اختيار ثابت واحد $C$ صالح لجميع $\alpha \in A$.

الانتظام ليس تفصيلًا شكليًا. ففي مسائل الأوليات في المتتاليات الحسابية، قد يكون التقدير صحيحًا لكل مقياس $q$ ثابت، لكنه عديم الفائدة إذا ازداد الثابت بسرعة عندما يكبر $q$.

## ٠.٥٢ رمز لاندو الصغير

**تعريف ٠.٥٢** إذا كانت $g(x) \neq 0$ لكل $x$ كبير بما يكفي، نكتب

$$f(x) = o(g(x)) \qquad (x \to \infty)$$

إذا

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

إذن $o(g)$ أقوى من $O(g)$. فإذا كان $f = o(g)$، فإن $f = O(g)$، لكن العكس غير صحيح عمومًا.

**مثال ٠.٦٢** لدينا

$$\log x = o(x^{\varepsilon})$$

لكل $\varepsilon > 0$، و

$$x = o(x \log x),$$

لكن

$$x \neq o(x).$$

## ٠.٦٢ التكافؤ التقاربي

**تعريف ٠.٧٢.** إذا كانت $g(x) \neq 0$ لكل $x$ كبير بما يكفي، نكتب

$$f(x) \sim g(x) \qquad (x \to \infty)$$

إذا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

وهذا يكافئ

$$f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

**قضية ٠.٨٢.** إذا كان $f(x) \sim g(x)$ و$g(x) \sim h(x)$، فإن

$$f(x) \sim h(x).$$

برهان. لدينا

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{h(x)},$$

وكل عامل في الطرف الأيمن يؤول إلى 1. □

ملاحظة ٠.٩٢. التكافؤ التقاربي لا يحفظ دائمًا العمليات غير الخطية دون شروط إضافية. فمثلًا، من $f \sim g$ لا يلزم تلقائيًا أن $\log f \sim \log g$، لأن ذلك يعتمد على رتبة نمو اللوغاريتمين.

**قضية ٠.١٠٢.** إذا كانت $f(x) > 0$ و$g(x) > 0$ في النهاية، وكان

$$f(x) \sim g(x) \qquad \text{و} \qquad g(x) \to \infty,$$

فإن

$$\log f(x) \sim \log g(x).$$

برهان. نكتب

$$\frac{\log f(x)}{\log g(x)} = 1 + \frac{\log(f(x)/g(x))}{\log g(x)}.$$

وبما أن $f(x)/g(x) \to 1$، فإن $\log(f(x)/g(x)) \to 0$، بينما $\log g(x) \to \infty$. ومن ثم يؤول الحد الثاني إلى الصفر. □

## ٠.٧٢ رموز أخرى شائعة

نكتب

$$f(x) \asymp g(x)$$

إذا كان

$$f(x) \ll g(x) \qquad \text{و} \qquad g(x) \ll f(x).$$

أما الرمز

$$f(x) = \Omega(g(x))$$

فيستخدم بأكثر من اصطلاح في الأدبيات. لذلك ستصرح الموسوعة دائمًا بالمعنى المقصود: هل هو نفي $o(g)$، أم وجود متتالية تحقق حدًا سفليًا، أم حد من جهة واحدة.

## ٠.٨٢ قواعد حسابية لرموز الرتبة

**قضية ٠.١١٢** إذا كان $f_1 = O(g_1)$ و$f_2 = O(g_2)$، فإن

$$f_1 + f_2 = O(|g_1| + |g_2|)$$

و

$$f_1 f_2 = O(g_1 g_2).$$

برهان. تتبع النتيجتان مباشرة من متباينة المثلث وضرب الحدين. □

**قضية ٠.١٢٢** إذا كان $f = o(g)$ و$h = O(k)$، حيث لا تنعدم $g$ و$k$ في النهاية، فإن

$$fh = o(gk).$$

برهان. نكتب

$$\frac{|f(x)h(x)|}{|g(x)k(x)|} = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \cdot \frac{|h(x)|}{|k(x)|}.$$

العامل الأول يؤول إلى الصفر، والثاني محدود. □

## ٠.٩٢ مقارنة القوى واللوغاريتمات

**مبرهنة ٠.١٣٢** لكل $\alpha > 0$ ولكل عدد حقيقي $A$، لدينا

$$(\log x)^A = o(x^\alpha) \qquad (x \to \infty).$$

برهان. يكفي عند $A > 0$ وضع $x = e^t$. عندئذ تصبح النسبة

$$\frac{(\log x)^A}{x^\alpha} = \frac{t^A}{e^{\alpha t}},$$

وهي تؤول إلى الصفر لأن الدالة الأسية تتغلب على كل قوة. أما إذا كان $A \leq 0$، فالنتيجة أبسط. □

هذا السلم من الرتب يظهر باستمرار:

$$1 \ll \log\log x \ll \log x \ll (\log x)^A \ll x^\varepsilon \ll x^\delta$$

عندما تكون $1 < A$ و$0 < \varepsilon < \delta$، مع تفسير كل علاقة في المجال المناسب.

## ٠.١٠٢ المجاميع الجزئية

لتكن $(a_n)$ متتالية عقدية، وعرّف

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n.$$

تسمى $A(x)$ دالة المجاميع الجزئية للمتتالية.

الفكرة الأساسية هي أن المعلومات عن $A(x)$ يمكن نقلها إلى مجموع موزون

$$\sum_{n \leq x} a_n f(n)$$

إذا كانت $f$ دالة منتظمة بما يكفي.

## ٠.١١٢ صيغة الجمع الجزئي المنفصلة

**مبرهنة ٠.١٤٢** (الجمع الجزئي)**.** لتكن $a_n$ و$b_n$ متتاليتين، ولتكن

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

عندئذ

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

**برهان.** بما أن $a_n = A_n - A_{n-1}$، مع $A_0 = 0$، فإن

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} (A_n - A_{n-1}) b_n.$$

نفصل المجموعين ثم نغير الفهرس في الثاني:

$$\sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} A_n b_{n+1}.$$

حد $n = 0$ يساوي صفراً، وبجمع الحدود المشتركة نحصل على

$$A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

□

هذه الصيغة هي النظير المنفصل للتكامل بالتجزئة.

## ٠.١٢٢ صيغة أبيل المستمرة

**مبرهنة ٠.١٥٢** (الجمع الجزئي لأبيل)**.** لتكن

$$A(t) = \sum_{n \le t} a_n,$$

ولتكن $f$ دالة من الصنف $C^1$ على $[1, x]$. عندئذ

$$\sum_{n \le x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t)\, dt.$$

برهان. الدالة $A(t)$ درجية، وتقفز بمقدار $a_n$ عند كل عدد صحيح $n$. لذلك يمكن كتابة المجموع كتكامل ستيلتج:

$$\sum_{n\le x} a_n f(n) = \int_{1^-}^{x} f(t)\, dA(t).$$

وبالتكامل بالتجزئة لستيلتج:

$$\int_{1^-}^{x} f\, dA = A(x)f(x) - \int_{1}^{x} A(t)f'(t)\, dt.$$

ويمكن أيضًا اشتقاق الصيغة مباشرة من النسخة المنفصلة بتطبيق مبرهنة القيمة الأساسية للتفاضل على الفروق $f(n) - f(n+1)$. □

## ٠.١٣٢ مثال: المجموع التوافقي

خذ $a_n = 1$، فيكون

$$A(t) = \lfloor t \rfloor.$$

وباختيار $f(t) = 1/t$، نحصل على

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_{1}^{x} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt.$$

وبما أن

$$\lfloor t \rfloor = t + O(1),$$

ينتج

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \log x + O(1).$$

وبتحليل أدق يمكن إثبات

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

حيث $\gamma$ ثابت أويلر؛ انظر مثلًا [Apo76].

## ٠.١٤٢ مثال: تحويل معلومة عدّ إلى مجموع موزون

افترض أن

$$A(x) = cx + O(x^{\theta})$$

لثابت $c$ و$0 \le \theta < 1$. نريد تقدير

$$\sum_{n\le x} \frac{a_n}{n}.$$

باختيار $f(t) = 1/t$، نحصل على

$$\sum_{n\le x} \frac{a_n}{n} = \frac{A(x)}{x} + \int_1^x \frac{A(t)}{t^2}\,dt.$$

وبالتعويض:

$$\frac{A(x)}{x} = c + O(x^{\theta-1}),$$

كما أن

$$\int_1^x \frac{A(t)}{t^2}\,dt = c\log x + O\left(\int_1^x t^{\theta-2}\,dt\right).$$

ولأن $\theta < 1$، فإن التكامل الأخير محدود، ومن ثم

$$\sum_{n\le x} \frac{a_n}{n} = c\log x + O(1).$$

هذه إحدى أهم وظائف الجمع الجزئي: تحويل معرفة مجموع غير موزون إلى معرفة مجموع ذي وزن سلس.

## ٠.١٥٢ نسخة على فترة

نعتمد الاصطلاح

$$A(t) = \sum_{n\le t} a_n,$$

وبذلك تكون $A$ دالة درجية متصلة من اليمين. وعند نقاط القفز يحدد هذا الاصطلاح بدقة أي الحدود الطرفية تدخل في المجموع.

إذا كان $1 \le y < x$، فإن

$$\sum_{y<n\le x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt.$$

وتستخدم هذه النسخة بكثرة في الفترات القصيرة وفي تقسيم المجاميع إلى كتل.

## ٠.١٦٢ مبدأ إزالة الوزن

إذا كان الوزن $f$ أملس ويتغير ببطء، فإن الجمع الجزئي يسمح بنقل صعوبة المسألة إلى المجاميع الجزئية لـ$a_n$. وعلى العكس، إذا كنا نعرف مجموعًا موزونًا مناسبًا، فقد نستعيد منه معلومة عدّ باستخدام اختيار ذكي للوزن أو تقريب دالة المؤشر.

لكن إزالة الوزن ليست مجانية دائمًا؛ فقد تفقد قوة في حد الخطأ، خصوصًا إذا كان مشتق الوزن كبيرًا أو إذا كانت المعلومات عن $A(t)$ غير منتظمة.

## ٠.١٧٢ تكاملات ستيلتج في نظرية الأعداد

تسمح الكتابة

$$\sum_{n\le x} a_n f(n) = \int_{1^-}^{x} f(t)\,dA(t)$$

بالتعامل مع المجاميع والتكاملات ضمن لغة واحدة. ومن الأمثلة المهمة:

$$\pi(x) = \int_{2^-}^{x} d\pi(t),$$

و

$$\sum_{p\le x} \log p = \int_{2^-}^{x} \log t\, d\pi(t).$$

ثم يؤدي التكامل بالتجزئة إلى علاقات بين دوال عدّ الأوليات المختلفة.

## ٠.١٨٢ مثال تمهيدي مرتبط بالأعداد الأولية

إذا عرفنا تقديرًا لدالة

$$\vartheta(x) = \sum_{p\le x} \log p,$$

فيمكن تحويله إلى تقدير لـ$\pi(x)$. بالفعل،

$$\pi(x) = \int_{2^-}^{x} \frac{1}{\log t}\, d\vartheta(t).$$

وبالتكامل بالتجزئة:

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_{2}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}\, dt.$$

والنتيجة التالية تعزل خطوة النقل ولا تفترض برهان التقدير $\vartheta(x) \sim x$ نفسه.

**مبرهنة ٠.١٦٢.** إذا كان

$$\vartheta(x) \sim x,$$

فإن

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

برهان. اكتب $\vartheta(t) = t + r(t)$، حيث $r(t) = o(t)$. الحد الطرفي يحقق

$$\frac{\vartheta(x)}{\log x} = \frac{x}{\log x}\big(1 + o(1)\big).$$

أما حد التكامل فإن

$$\int_{2}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}\, dt = \int_{2}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2} + \int_{2}^{x} \frac{r(t)}{t(\log t)^2}\, dt.$$

وبتقسيم التكامل الأول عند $\sqrt{x}$ نحصل على

$$\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} = O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right) = o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

ولكل $\varepsilon > 0$ يكون $|r(t)| \le \varepsilon t$ بعد عتبة مناسبة؛ لذا يعطي التقسيم نفسه، مع بقاء الجزء الابتدائي ثابتًا، أن التكامل الثاني $o(x/\log x)$. بالتعويض في صيغة الجمع الجزئي تنتج الدعوى. □

لا يثبت هذا الفصل الفرضية $\vartheta(x) \sim x$؛ فذلك هو الجزء العميق المؤجل إلى فصل مبرهنة الأعداد الأولية.

## ٠.١٩٢ أخطاء شائعة

١. إخفاء اعتماد الثابت الضمني على معلمة مهمة.

٢. استعمال $f = O(g)$ كما لو كان $f/g$ يملك نهاية.

٣. استبدال $O(g_1) + O(g_2)$ بـ$O(\min(g_1, g_2))$ بدلًا من الرتبة الأكبر.

٤. إجراء تكامل جزئي دون التحقق من انتظام الوزن.

٥. تطبيق تقدير غير منتظم داخل تكامل على مجال تعتمد حدوده على المعلمات.

٦. نسيان مساهمة الحد الطرفي $A(x)f(x)$.

## ٠.٢٠٢ تمارين

١. أثبت أن $f \sim g$ يكافئ $f = g + o(g)$، بشرط أن $g$ لا ينعدم في النهاية.

٢. أثبت أن

$$\log x = O_\varepsilon(x^\varepsilon)$$

وحدد ثابتًا صريحًا صالحًا عندما $x \ge 1$.

٣. استعمل الجمع الجزئي لإثبات

$$\sum_{n \le x} n^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha)$$

عندما $\alpha > 0$.

٤. إذا كان $A(x) = O(x^\theta)$، أثبت أن

$$\sum_{n \le x} \frac{a_n}{n^\sigma}$$

يبقى محدودًا عندما $\sigma > \theta$.

٥. اشتق العلاقة بين $\pi(x)$ و$\vartheta(x)$ بدقة مع مراعاة الحد السفلي.

٦. أعط مثالًا لتقدير صحيح لكل معلمة ثابتة لكنه غير منتظم في المعلمة.

٧. أثبت النسخة المنفصلة من الجمع الجزئي ثم استخرج منها نسخة الفترة.

## ٠.٢١٢ خلاصة الفصل

اللغة التقاربية هي البنية النحوية التي تصاغ بها معظم نتائج نظرية الأعداد التحليلية، والجمع الجزئي لأبيل هو أحد أكثر أدواتها استعمالًا. فهو ينقل المعلومات من دوال العد إلى المجاميع الموزونة، ويربط المجاميع المنفصلة بالتكاملات، ويمهد للصيغ التي تربط $\pi(x)$، و$\vartheta(x)$، و$\psi(x)$، ودوال زيتا و$L$.

# باب ٣

# التحليل المركب الموجّه لنظرية الأعداد

## ١٣. نطاق الفصل ومخرجاته

يفترض الفصل معرفة التفاضل والتكامل والمتسلسلات والمستوى العقدي. هدفه تثبيت الحزمة الدنيا التي ستستعمل لاحقًا، لا إحلاله محل مقرر كامل في التحليل المركب. بنهايته ينبغي أن يطبق القارئ صيغة كوشي والبواقي ومبدأ الحجة، ويميز بين مجال تقارب تمثيلٍ ما ومجال استمرار الدالة، ويعدّد الشروط التي يجب فحصها قبل نقل مسار. المرجع القياسي للنتائج المقتبسة هو [Ahl79]، ولتطبيقها على زيتا انظر [Tit86].

## ٢٣. مقدمة منهجية

لا تحتاج نظرية الأعداد التحليلية إلى كل موضوعات التحليل المركب بالدرجة نفسها. فالهدف في هذا الفصل ليس إعادة بناء نظرية الدوال العقدية كاملة، بل استخراج الأدوات التي تتكرر في دراسة دوال زيتا و$L$، والصيغ الصريحة، وتقدير المجاميع الحسابية.

سنركز على:

١. الدوال الهولومورفية والميرومورفية.

٢. التكاملات المسارية وصيغة كوشي.

٣. الأصفار والأقطاب والبواقي.

٤. مبدأ الحجة ومبرهنة روشيه.

٥. متسلسلات لوران والاستمرار التحليلي.

٦. تقديرات كوشي ومبدأ القيمة العظمى.

٧. تحويل المسارات واستخراج الحدود الرئيسية من الأقطاب.

## ٣٣. المستوى العقدي والدوال العقدية

نكتب

$$s = \sigma + it, \qquad \sigma, t \in \mathbb{R}.$$

في نظرية الأعداد التحليلية، يستخدم الرمز $s$ كثيرًا لأن سلاسل ديريشليه تكتب عادة على الصورة

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

إذا كان $n > 0$، فإن

$$n^{-s} = e^{-s \log n} = n^{-\sigma} e^{-it \log n}.$$

ومن هنا يظهر فصل مهم بين:

- الحجم، الذي تحكمه $n^{-\sigma}$.
- التذبذب، الذي يحكمه $e^{-it \log n}$.

ولهذا فإن الخطوط الرأسية ثابت $= \sigma$ تلعب دورًا مركزيًا في دراسة سلاسل ديريشليه.

## ٤٣. الاشتقاق العقدي ومعادلات كوشي--ريمان

لتكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$، حيث $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ مفتوحة. نقول إن $f$ قابلة للاشتقاق عقديًا عند $z_0$ إذا كانت النهاية

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

موجودة ولا تعتمد على اتجاه الاقتراب.

إذا كتبنا

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

فإن القابلية للاشتقاق العقدي تفرض، تحت فرضيات انتظام مناسبة، معادلتي كوشي--ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

**تعريف ١٣..** تسمى $f$ هولومورفية على $\Omega$ إذا كانت قابلة للاشتقاق عقديًا عند كل نقطة من $\Omega$.

القابلية للاشتقاق العقدي أقوى بكثير من القابلية للاشتقاق الحقيقي. فالدالة الهولومورفية قابلة للاشتقاق عددًا غير منتهٍ من المرات، بل تمثل محليًا بمتسلسلة قوى.

## ٥٣. متسلسلات القوى

إذا كانت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ذات نصف قطر تقارب $R > 0$، فإنها تتقارب تقاربًا مطلقًا ومحليًا منتظمًا داخل القرص $|z - z_0| < R$، وتمثل دالة هولومورفية هناك.

كما يمكن الاشتقاق حدًا حدًا:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

**ملاحظة ٢٣..** التقارب المحلي المنتظم هو الجسر الصحيح بين التحليل الحدّي والهولومورفية. أما التقارب النقطي وحده فلا يكفي عادة للحفاظ على الخواص التحليلية.

## ٦٣. المسارات والتكامل العقدي

ليكن $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ مسارًا أملسًا على أجزاء. نعرف

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

إذا عكسنا اتجاه المسار، تغيرت إشارة التكامل. وإذا وصلنا مسارين، كان التكامل على المسار المركب مجموع التكاملين.

**تعريف ٣٣..** إذا كان $\gamma$ مغلقًا، أي $\gamma(a) = \gamma(b)$، نكتب أحيانًا

$$\oint_\gamma f(z)\, dz.$$

في التطبيقات العددية، تكون المسارات غالبًا مستطيلات أو خطوطًا رأسية وأفقية، لأن تغيير خط التكامل يسمح بالتقاط بواقي الأقطاب.

## ٧٣. مبرهنة كوشي

**مبرهنة ٤٣.** (كوشي). إذا كانت $f$ هولومورفية على مجال بسيط الاتصال $\Omega$، وكان $\gamma$ مسارًا مغلقًا داخل $\Omega$، فإن

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

تكمن قوة هذه المبرهنة في أن التكامل لا يعتمد على الشكل التفصيلي للمسار ما دام التشوه لا يعبر مفردات.

## ٠.٨٣ صيغة كوشي التكاملية

**مبرهنة ٥٣.** (صيغة كوشي)**.** إذا كانت $f$ هولومورفية على جوار قرص مغلق مركزه $z_0$ ونصف قطره $R$، وكان $|z - z_0| < R$، فإن

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

وعلى وجه الخصوص،

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw.$$

## ٠.٩٣ تقديرات كوشي

**مبرهنة ٦٣.** (تقديرات كوشي)**.** إذا كانت

$$|f(w)| \leq M$$

على الدائرة $|w - z_0| = R$، فإن

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

برهان. نطبق صيغة كوشي للمشتقة:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw.$$

طول الدائرة $2\pi R$، ومن ثم

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{n!M}{R^n}.$$

□

هذه التقديرات مهمة عند التحكم في مشتقات دوال زيتا و$L$، أو عند تحويل حدود النمو على دائرة إلى معلومات محلية.

## ٠.١٠٣ مبدأ القيمة العظمى

**مبرهنة ٧٣.** (مبدأ القيمة العظمى)**.** إذا كانت $f$ هولومورفية وغير ثابتة على مجال متصل، فلا يمكن أن تحقق $|f|$ قيمة عظمى محلية داخل المجال.

ومن نتائجه:

- دالة هولومورفية محدودة على المستوى كله ثابتة، وهي مبرهنة ليوفيل.
- يمكن نقل تقديرات الحدود إلى داخل المجالات.
- تظهر مبادئ من نمط فراجمن--ليندلوف عند التعامل مع مجالات غير محدودة.

## ٠.١١٣ الأصفار ورتبتها

إذا كانت $f$ هولومورفية قرب $z_0$، وكان

$$f(z_0) = 0,$$

فإما أن $f$ منعدمة تطابقًا على المركبة المتصلة، أو يوجد عدد صحيح $m \geq 1$ ودالة هولومورفية $g$ لا تنعدم عند $z_0$ بحيث

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z).$$

يسمى $m$ رتبة الصفر.

**نتيجة ٠.٨٣** أصفار الدالة الهولومورفية غير المنعدمة تطابقًا معزولة.

هذه الحقيقة أساسية لأن أصفار دوال زيتا و$L$ يمكن عدها داخل مناطق محددة.

## ٠.١٢٣ المفردات المعزولة

إذا كانت $f$ هولومورفية في جوار مثقوب لـ$z_0$، فإنها تملك توسع لوران:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

تصنف المفردة إلى:

١. مفردة قابلة للإزالة إذا كان $a_n = 0$ لكل $n < 0$.

٢. قطب من الرتبة $m$ إذا كان $a_{-m} \neq 0$ ولا توجد حدود سالبة أدنى منه.

٣. مفردة جوهرية إذا ظهر عدد لا نهائي من الحدود السالبة.

**تعريف ٠.٩٣** الدالة الميرومورفية هي دالة هولومورفية عدا أقطاب معزولة.

دالة زيتا لريمان بعد الاستمرار التحليلي ميرومورفية على المستوى كله، ولها قطب بسيط عند $s = 1$ [Tit86].

## ٠.١٣٣ الباقي

**تعريف ٠.١٠٣** باقي $f$ عند $z_0$ هو معامل $(z - z_0)^{-1}$ في توسع لوران:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}.$$

إذا كان $z_0$ قطبًا بسيطًا، فإن

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

وإذا كان قطبًا من الرتبة $m$، فإن

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left( (z - z_0)^m f(z) \right).$$

## ٠.١٤٣ مبرهنة البواقي

**مبرهنة ١١٣.** (مبرهنة البواقي). إذا كانت $f$ ميرومورفية داخل مسار مغلق $\gamma$ وعلى جواره، ولا توجد أقطاب على المسار، فإن

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_\rho \mathrm{Res}_{z=\rho} f(z),$$

حيث يمتد المجموع على الأقطاب داخل المسار مع مراعاة عدد اللف.

هذه المبرهنة هي الآلة التي تحول الأقطاب إلى حدود رئيسية. ففي نظرية الأعداد، يؤدي نقل خط تكامل عبر قطب إلى ظهور مساهمة من باقي ذلك القطب.

## ٠.١٥٣ مثال: استخراج حد رئيسي من قطب بسيط

افترض أن $F(s)$ ميرومورفية قرب $s=1$، ولها قطب بسيط:

$$F(s) = \frac{A}{s-1} + H(s),$$

حيث $H$ هولومورفية.
إذا ظهر التكامل

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} F(s)\frac{x^s}{s}\,ds$$

مع $c>1$، ثم نقلنا الخط إلى يسار 1، فإن القطب عند $s=1$ يساهم بالمقدار

$$\mathrm{Res}_{s=1}\left(F(s)\frac{x^s}{s}\right) = Ax.$$

هذه الصورة المجردة تفسر ظهور الحدود الرئيسية الخطية في كثير من مسائل العد.

## ٠.١٦٣ مبدأ الحجة

**مبرهنة ١٢٣.** (مبدأ الحجة). إذا كانت $f$ ميرومورفية داخل $\gamma$ وعلى جواره، ولا تملك أصفاراً أو أقطاباً على $\gamma$، فإن

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P,$$

حيث $N$ عدد الأصفار و$P$ عدد الأقطاب داخل المسار، مع حساب الرتب.

برهان. إذا كان $\rho$ صفراً من الرتبة $m$، نكتب

$$f(z) = (z-\rho)^m g(z),$$

حيث $g(\rho) \neq 0$. ومن ثم

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{m}{z-\rho} + \frac{g'}{g}(z),$$

فيكون باقي $f'/f$ عند $\rho$ مساويًا $m$. وبالمثل، القطب من الرتبة $m$ يعطي باقيًا $-m$. ثم نطبق مبرهنة البواقي. □

هذه الصيغة هي الأساس في عد أصفار دوال زيتا و$L$.

## ٠.١٧٣ مبرهنة روشيه

**مبرهنة ٠.١٣٣** (روشيه)**.** لتكن $f$ و$g$ هولومورفيتين داخل مسار بسيط مغلق وعلى جواره. إذا

$$|g(z)| < |f(z)|$$

على المسار، فإن $f$ و$f+g$ لهما العدد نفسه من الأصفار داخل المسار، مع حساب الرتب.

المعنى العملي: إذا كانت $g$ اضطرابًا أصغر من $f$ على الحدود، فلا يغير عدد الأصفار داخل المنطقة.

## ٠.١٨٣ الاستمرار التحليلي

**تعريف ٠.١٤٣.** إذا كانت $f$ هولومورفية على مجال $\Omega_1$، و$F$ هولومورفية على مجال أكبر $\Omega_2 \supseteq \Omega_1$، وكان

$$F|_{\Omega_1} = f,$$

فإن $F$ استمرار تحليلي لـ$f$.

**مبرهنة ٠.١٥٣** (مبدأ الهوية)**.** إذا اتفقت دالتان هولومورفيتان على مجموعة لها نقطة تراكم داخل مجال متصل، فإنهما متطابقتان على المجال كله.

لذلك يكون الاستمرار التحليلي، إذا وجد، وحيدًا.

## ٠.١٩٣ مثال أولي للاستمرار التحليلي

السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

تتقارب فقط عندما $|z| < 1$، لكنها تساوي هناك

$$\frac{1}{1-z}.$$

والدالة $1/(1-z)$ معرفة ميرومورفيًا على المستوى عدا $z=1$. إذن التعبير الكسري استمرار تحليلي لمجموع السلسلة خارج قرص التقارب.

هذه الفكرة تتكرر مع دالة زيتا: السلسلة الأصلية تتقارب في نصف مستوى، لكن الدالة نفسها تمتد إلى مجال أكبر.

## ٢٠٣. تحويل المسارات

إذا كانت $f$ هولومورفية بين مسارين رأسيين، يمكن نقل التكامل من أحدهما إلى الآخر دون تغيير، بعد إضافة القطع الأفقية وإثبات أن مساهمتها صغيرة أو تزول.

أما إذا عبرنا أقطابًا، فإن الفرق بين التكاملين يساوي مجموع البواقي المضروبة في $2\pi i$.

ملاحظة ١٦٣.. الخطوة الأصعب غالبًا ليست كتابة مبرهنة البواقي، بل تبرير:

١. تقارب التكامل.

٢. زوال القطع الأفقية.

٣. عدم عبور أصفار أو أقطاب غير محسوبة.

٤. الانتظام في المعلمات.

## ٢١٣. تكاملات ميلين

تحويل ميلين لدالة $f$ هو

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx.$$

يحوّل هذا التحويل التدرج الضربي إلى تحليل عقدي في المتغير $s$. وهو نظير لتحويل فورييه بعد التغيير $x = e^u$.

في نظرية الأعداد، تتفاعل تحويلات ميلين طبيعيًا مع سلاسل ديريشليه، وتظهر في:

- الصيغ العكسية.
- النوى الملساء.
- المعادلات الوظيفية.
- تحليل الدوال الخاصة.

## ٠.٢٢٣ تمهيد لصيغة بيرون

إذا كانت

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

متقاربة مطلقًا عندما $\Re(s) > c_0$، فإن صيغة بيرون تربط مجموع المعاملات

$$\sum_{n \le x} a_n$$

بتكامل رأسي من الشكل

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) \frac{x^s}{s}\, ds.$$

جوهر الصيغة هو هوية الانقلاب الحدّية الآتية.

**مبرهنة ١٧٣.** (نواة بيرون). لكل $c > 0$ و$y > 0$، تُفهم النهاية المتناظرة على أنها

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\, ds = \begin{cases} 1, & y > 1, \\ \frac{1}{2}, & y = 1, \\ 0, & 0 < y < 1. \end{cases}$$

هذا التكامل ليس مطلق التقارب؛ ولذلك لا يجوز استعمال الصيغة غير المقطوعة من دون تحديد معنى النهاية وضبط إمكان تبديلها مع سلسلة ديريشليه. لم تُثبت النتيجة بعد داخل الموسوعة، وستُثبت مع نسختي بيرون المقطوعة والملساء وفروضهما في فصل مستقل؛ انظر مرجعًا [Tit86].

## ٠.٢٣٣ أخطاء شائعة

١. نقل المسار دون فحص النمو على القطع الأفقية.

٢. استعمال مبرهنة البواقي مع وجود قطب على المسار.

٣. الخلط بين نصف قطر تقارب السلسلة ومجال الاستمرار التحليلي للدالة.

٤. نسيان رتب الأصفار والأقطاب في مبدأ الحجة.

٥. افتراض أن التقارب النقطي يحفظ الهولومورفية.

٦. استعمال اللوغاريتم العقدي دون تحديد الفرع.

## ٢٤٣. تمارين

١. أثبت أن الدالة الهولومورفية التي تنعدم على متتالية لها نقطة تراكم داخل المجال منعدمة تطابقًا.

٢. احسب باقي

$$\frac{e^z}{(z-1)^2}$$

عند $z = 1$.

٣. استعمل مبرهنة البواقي لحساب

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z(z-1)}.$$

٤. أثبت أن

$$\frac{f'}{f}$$

له باقي يساوي رتبة الصفر عند كل صفر لـ$f$.

٥. طبق روشيه لإثبات أن كثير الحدود

$$z^5 + 10z + 1$$

له عدد محدد من الأصفار داخل دائرة مناسبة.

٦. أثبت تقديرات كوشي للمشتقات.

٧. فسّر كيف ينتج الحد $Ax$ من قطب بسيط ذي باقي $A$ في تكامل يحتوي على $x^s/s$.

## ٢٥٣. خلاصة الفصل

التحليل المركب في نظرية الأعداد ليس مجرد خلفية تقنية؛ بل هو آلة لتحويل البنية التحليلية إلى معلومات حسابية. فالأقطاب تنتج حدودًا رئيسية، والأصفار تنتج تذبذبًا، ومبدأ الحجة يعد الأصفار، وتحويل المسارات ينقل التكامل إلى مناطق أكثر فائدة، والاستمرار التحليلي يكشف معلومات تتجاوز مجال تقارب السلسلة الأصلية.

# باب ٤

# الدوال الحسابية والبنية الضربية

## ٤.١ نطاق الفصل ومخرجاته

يفترض الفصل وحيدية التحليل إلى عوامل أولية ومبادئ المجاميع المنتهية. بنهايته ينبغي أن يميز القارئ بين الضرب النقطي والالتفاف، ويحسب المعكوس الديريشلي محلياً، ويثبت هويات موبيوس وأويلر وفون مانغولت، وينقل الضربية إلى القوى الأولية. للمادة القياسية انظر [Apo76]، وللبنية الحلقية والتعميمات انظر [Sha72; Tot13].

## ٤.٢ مقدمة

الدالة الحسابية هي دالة معرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة وقيمها في مجموعة عددية، وغالباً في $\mathbb{C}$. وتظهر هذه الدوال عندما نريد ترميز خاصية حسابية لكل عدد صحيح في قيمة واحدة.

من أمثلتها:

$$1(n) = 1, \qquad \mathrm{id}(n) = n, \qquad \mu(n), \qquad \varphi(n), \qquad \Lambda(n), \qquad \tau(n).$$

القوة الحقيقية لهذه الدوال لا تأتي من قيمها منفردة، بل من العلاقات التي تربطها تحت عمليات مثل الالتفاف الديريشلي، ومن قدرتها على عكس البنية الضربية للأعداد الصحيحة.

## ٤.٣ فضاء الدوال الحسابية

لنرمز إلى مجموعة جميع الدوال الحسابية ذات القيم العقدية بالرمز

$$\mathcal{A} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}.$$

نعرف الجمع والضرب النقطي بواسطة

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n),$$

و

$$(fg)(n) = f(n)g(n).$$

بهاتين العمليتين تكون $\mathcal{A}$ جبرًا تبديليًا على $\mathbb{C}$. لكن العملية الأهم في نظرية الأعداد التحليلية ليست الضرب النقطي، بل الالتفاف الديريشلي.

## ٤٤. الدوال الضربية

**تعريف ١٤..** تسمى الدالة الحسابية $f$ ضربية إذا تحقق:

١. $f(1) = 1$.

٢. لكل $m, n$ أوليين فيما بينهما،

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

**تعريف ٢٤..** تسمى $f$ ضربية تمامًا إذا كان $f(1) = 1$ و

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

لكل $m, n \geq 1$، دون اشتراط $(m, n) = 1$.

شرط $f(1) = 1$ يستبعد الدالة الصفرية ويحافظ على كون كل دالة ضربية تمامًا دالة ضربية وفق اصطلاح هذا الكتاب.

كل دالة ضربية تمامًا ضربية، لكن العكس غير صحيح.

**مثال ٣٤..** الدالة

$$f(n) = n^s$$

ضربية تمامًا لكل $s \in \mathbb{C}$.

**مثال ٤٤..** دالة أويلر $\varphi$ ضربية، لكنها ليست ضربية تمامًا، لأن

$$\varphi(4) = 2$$

بينما

$$\varphi(2)\varphi(2) = 1.$$

## ٥٤. تحديد الدالة الضربية على القوى الأولية

**مبرهنة ٥٤.** (تحديد الدالة الضربية على القوى الأولية). إذا كانت $f$ ضربية، فإن قيمها تتحدد تمامًا من قيمها على القوى الأولية

$$f(p^k).$$

برهان. إذا كان

$$n = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j}$$

هو التحليل الأولي لـ$n$، فإن القوى الأولية المختلفة أولية فيما بينها. وبالضربية:

$$f(n) = \prod_{j=1}^{r} f(p_j^{\alpha_j}).$$

□

إذن دراسة الدالة الضربية تنقسم طبيعياً إلى دراسة محلية عند كل عدد أولي.

ملاحظة ٠.٦٤. هذا هو الأصل الحسابي لفكرة العوامل المحلية في المنتجات الأويلرية ودوال $L$.

## ٠.٦٤ الالتفاف الديريشلي

**تعريف ٠.٧٤.** إذا كانت $f, g \in \mathcal{A}$، فإن التفافهما الديريشلي هو الدالة

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

ويمكن كتابة الصيغة بصورة متناظرة:

$$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a) g(b).$$

**مثال ٠.٨٤.** إذا كانت $1(n) = 1$، فإن

$$(1 * 1)(n) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n),$$

حيث $\tau(n)$ عدد قواسم $n$.

**مثال ٠.٩٤.** إذا كانت $\mathrm{id}(n) = n$، فإن

$$(1 * \mathrm{id})(n) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

## ٠.٧٤ الخواص الجبرية للالتفاف

**مبرهنة ٠.١٠٤.** (الخواص الجبرية للالتفاف الديريشلي). الالتفاف الديريشلي تبديلي وتجميعي وتوزيعي على الجمع.

برهان. التبديلية تتبع من تبديل $d$ مع $n/d$:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d) = \sum_{d|n} g(d) f(n/d) = (g * f)(n).$$

أما التجميعية:

$$((f * g) * h)(n) = \sum_{abc=n} f(a) g(b) h(c) = (f * (g * h))(n).$$

والتوزيعية تتبع مباشرة من خطية المجموع. □

## ٠٨٤ عنصر الوحدة

**تعريف ٠٠١١٤** نعرف الدالة $\varepsilon$ بواسطة

$$\varepsilon(1) = 1, \qquad \varepsilon(n) = 0 \quad (n > 1).$$

**قضية ٠١٢٤** (عنصر الوحدة للالتفاف الديريشلي)**.** لكل $f \in \mathcal{A}$:

$$f * \varepsilon = \varepsilon * f = f.$$

برهان. لدينا

$$(f * \varepsilon)(n) = \sum_{d|n} f(d)\varepsilon(n/d).$$

الحد الوحيد غير الصفري يحدث عندما $n/d = 1$، أي $d = n$. لذا

$$(f * \varepsilon)(n) = f(n).$$

□

إذن $(\mathcal{A}, +, *)$ حلقة تبادلية ذات وحدة.

## ٠٩٤ المعكوس الديريشلي

**تعريف ٠٠١٣٤** تسمى $g$ معكوسًا ديريشليًا لـ$f$ إذا

$$f * g = \varepsilon.$$

**مبرهنة ٠١٤٤** (معيار وجود المعكوس الديريشلي)**.** تملك الدالة $f$ معكوسًا ديريشلياً إذا وفقط إذا

$$f(1) \neq 0.$$

برهان. إذا كان $f * g = \varepsilon$، فإن

$$f(1)g(1) = 1.$$

ومن ثم $f(1) \neq 0$.

عكسياً، إذا كان $f(1) \neq 0$، نعرف $g$ استقرائيًا. أولًا:

$$g(1) = \frac{1}{f(1)}.$$

ولكل $n > 1$، يجب أن يكون

$$0 = (f * g)(n) = f(1)g(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d)g(n/d).$$

إذن

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d)g(n/d).$$

وهذا يحدد $g(n)$ من قيم سابقة. □

## ١٠٤. دالة موبيوس

**تعريف ١٥٤..** تعرف دالة موبيوس $\mu$ بواسطة

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^r, & n \text{ حاصل ضرب } r \text{ أوليات متميزة}, \\ 0, & p^2 \mid n \text{ لبعض الأوليات } p. \end{cases}$$

**مثال ١٦٤..**

$$\mu(1) = 1, \qquad \mu(6) = 1, \qquad \mu(30) = -1, \qquad \mu(12) = 0.$$

**قضية ١٧٤.** (ضربية دالة موبيوس)**.** الدالة $\mu$ ضربية.

برهان. إذا كان $(m, n) = 1$، فإن مجموع العوامل الأولية المتميزة في $mn$ هو مجموعها في $m$ و$n$. كما أن $mn$ خال من المربعات إذا وفقط إذا كان كل من $m, n$ خالياً من المربعات. ومن ثم

$$\mu(mn) = \mu(m)\mu(n).$$

□

## ١١٤. الهوية الأساسية لموبيوس

**مبرهنة ١٨٤.** (الهوية الأساسية لدالة موبيوس)**.** لدينا

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

أي

$$\mu * 1 = \varepsilon.$$

برهان. إذا كان

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

فإن القواسم $d$ التي تسهم في المجموع هي فقط القواسم الخالية من المربعات، أي

$$d = \prod_{j \in S} p_j$$

لمجموعة جزئية $S \subseteq \{1, \ldots, r\}$. ومن ثم

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,r\}} (-1)^{|S|} = (1-1)^r.$$

إذا $n > 1$، فـ$r \geq 1$ ويكون المجموع صفراً. أما $n = 1$، فالمجموع يساوي 1. □

إذن $\mu$ هي المعكوس الديريشلي للدالة الثابتة 1.

## ٠.١٢٤ صيغة قلب موبيوس

**مبرهنة ٠.١٩٤** (قلب موبيوس)**.** إذا

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

فإن

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d).$$

برهان. الفرضية تعني

$$F = 1 * f.$$

بالتفاف الطرفين مع $\mu$:

$$\mu * F = \mu * (1 * f) = (\mu * 1) * f = \varepsilon * f = f.$$

□

**نتيجة ٠.٢٠٤** (صيغة مكافئة لقلب موبيوس)**.** إذا

$$F(n) = \sum_{d|n} f(n/d),$$

فإن

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d).$$

برهان. بالتبديل $e = n/d$ يصبح الفرض

$$F(n) = \sum_{e|n} f(e),$$

وهو فرض مبرهنة قلب موبيوس نفسها، فتنتج الصيغة المطلوبة. □

## ٠.١٣٤ مثال: استرجاع دالة أويلر

نعرف دالة أويلر بـ

$$\varphi(n) = \#\{1 \le a \le n : (a, n) = 1\}.$$

**مبرهنة ٠.٢١٤** (هوية أويلر)**.** لكل $n \ge 1$:

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

برهان. نقسم الأعداد $1 \leq a \leq n$ وفق قيمة $(a,n)$. لكل $d \mid n$، الأعداد التي تحقق $(a,n) = n/d$ تكتب على صورة $a = (n/d)b$، حيث $1 \leq b \leq d$ و$(b,d) = 1$، وعددها $\varphi(d)$. بجمع أحجام الأصناف المنفصلة نحصل على الهوية. □

وبقلب موبيوس نحصل على

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}.$$

أي

$$\varphi = \mu * \mathrm{id}\,.$$

وبالتالي:

$$\varphi(n) = n\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

إذا كان

$$n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p},$$

فإن

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

## ٠.١٤٤ حفظ الضربية تحت الالتفاف

**مبرهنة ٢٢٤.** (حفظ الضربية تحت الالتفاف). إذا كانت $f$ و$g$ دالتين ضربيتين، فإن $f * g$ ضربية.

برهان. لنفرض $(m,n) = 1$. كل قاسم $d \mid mn$ يكتب بصورة وحيدة:

$$d = d_1 d_2, \qquad d_1 \mid m, \quad d_2 \mid n.$$

وعندئذ:

$$\frac{mn}{d} = \frac{m}{d_1}\frac{n}{d_2}.$$

وباستخدام الضربية:

$$(f * g)(mn) = \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1 d_2) g\left(\frac{m}{d_1}\frac{n}{d_2}\right).$$

إذن

$$(f * g)(mn) = \left(\sum_{d_1|m} f(d_1) g(m/d_1)\right)\left(\sum_{d_2|n} f(d_2) g(n/d_2)\right),$$

أي

$$(f * g)(mn) = (f * g)(m)(f * g)(n).$$

□

**نتيجة ٢٣٤.** (ضربية المعكوس الديريشلي). إذا كانت $f$ ضربية ولها معكوس ديريشلي، فإن $f^{-1}$ ضربية.

برهان. لتكن $h$ الدالة الضربية المحددة محليًا بواسطة

$$h(p^k) = f^{-1}(p^k) \qquad (k \geq 0).$$

عند كل قوة أولية موجبة لدينا

$$(f * h)(p^k) = \sum_{j=0}^{k} f(p^j) f^{-1}(p^{k-j}) = 0,$$

كما أن $(f * h)(1) = 1$. وبما أن الالتفاف يحفظ الضربية، فإن $f * h$ ضربية؛ ومن تحديد الدوال الضربية على القوى الأولية ينتج $f * h = \varepsilon$. وبفرادة المعكوس يكون $h = f^{-1}$، ومن ثم $f^{-1}$ ضربية. □

## ١٥٤. الالتفاف على القوى الأولية

إذا كانت $f, g$ ضربيتين، فإن

$$(f * g)(p^\alpha) = \sum_{j=0}^{\alpha} f(p^j) g(p^{\alpha-j}).$$

هذه صيغة التفاف عادية للمتتاليتين المحليتين

$$\{f(p^j)\}_{j\geq 0}, \qquad \{g(p^j)\}_{j\geq 0}.$$

ومن هنا تظهر متسلسلات بيل المحلية، وتُفهم أولًا كمتسلسلات قوى صورية في $X$؛ وإذا أُسندت إلى $X$ قيمة عقدية لزم فحص التقارب:

$$\mathcal{B}_p(f; X) = \sum_{j=0}^{\infty} f(p^j) X^j.$$

وعندئذ:

$$\mathcal{B}_p(f * g; X) = \mathcal{B}_p(f; X) \mathcal{B}_p(g; X).$$

## ١٦٤. الضرب النقطي والالتفاف

يجب عدم الخلط بين:

$$(fg)(n) = f(n)g(n)$$

و

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d).$$

الضرب النقطي يحافظ على الضربية، والالتفاف أيضًا يحافظ عليها، لكنهما عمليتان مختلفتان جذريًا.

**مثال ٠.٢٤٤** إذا كانت $1(n) = 1$، فإن

$$1 \cdot 1 = 1.$$

بينما

$$1 * 1 = \tau.$$

## ٠.١٧٤ الدوال المدعومة على القوى الأولية

**تعريف ٠.٢٥٤** نقول إن $f$ مدعومة على القوى الأولية إذا

$$f(n) = 0$$

كلما لم يكن $n = p^k$ لقوة أولية.

دالة فون مانغولت مثال أساسي:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k, \\ 0, & \text{خلاف ذلك}. \end{cases}$$

وهي تحقق الهوية:

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

أي

$$\log = 1 * \Lambda.$$

وبقلب موبيوس:

$$\Lambda = \mu * \log.$$

## ٠.١٨٤ برهان هوية فون مانغولت

**مبرهنة ٠.٢٦٤** (هوية فون مانغولت)**.** لكل $n \geq 1$:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n.$$

برهان. إذا

$$n = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j},$$

فإن القواسم التي تعطي مساهمة غير صفرية هي القوى

$$p_j,\ p_j^2, \ldots, p_j^{\alpha_j}.$$

لذلك:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \log p_j = \log \left( \prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j} \right) = \log n.$$

□

## ٠.١٩٤ التفافات مهمة

من الهويات الأساسية:

$$\begin{aligned} 1 * 1 &= \tau, \\ 1 * \mathrm{id} &= \sigma, \\ \mu * 1 &= \varepsilon, \\ \mu * \mathrm{id} &= \varphi, \\ 1 * \Lambda &= \log. \end{aligned}$$

كما أن:

$$\tau_k = \underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{k \text{ مرات}},$$

حيث $\tau_k(n)$ عدد الطرق المرتبة لكتابة $n$ كحاصل ضرب $k$ أعداد موجبة.

## ٠.٢٠٤ دوال القواسم العامة

لكل $\alpha \in \mathbb{C}$، نضع

$$n^\alpha = e^{\alpha \log n} \qquad (n \geq 1),$$

حيث اللوغاريتم حقيقي، ونعرف

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha.$$

إذن:

$$\sigma_\alpha = 1 * \mathrm{id}_\alpha, \qquad \mathrm{id}_\alpha(n) = n^\alpha.$$

وللقوة الأولية:

$$\sigma_\alpha(p^k) = 1 + p^\alpha + \cdots + p^{k\alpha}.$$

إذا $p^\alpha \neq 1$، فإن

$$\sigma_\alpha(p^k) = \frac{p^{(k+1)\alpha} - 1}{p^\alpha - 1}.$$

أما إذا $p^\alpha = 1$ --- وقد يحدث ذلك لبعض $\alpha \neq 0$ العقدية --- فإن $\sigma_\alpha(p^k) = k + 1$.

## ٠.٢١٤ دالة ليوفيل

**تعريف ٠.٢٧٤** إذا

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

نعرف

$$\Omega(n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$$

و

$$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}.$$

الدالة $\lambda$ ضربية تمامًا، لأن:

$$\Omega(mn) = \Omega(m) + \Omega(n).$$

وترتبط بموبيوس بالهوية الآتية.

**قضية ٠٠٢٨٤.** لدينا

$$\lambda = \mu * 1_{\square},$$

حيث $1_{\square}(n) = 1$ إذا كان $n$ مربعًا كاملًا، و$0$ خلاف ذلك.

برهان. الدوال الثلاث ضربية، فيكفي الفحص على $p^a$. لا تسهم في

$$(\mu * 1_{\square})(p^a) = \sum_{j=0}^{a} \mu(p^j) 1_{\square}(p^{a-j})$$

إلا القيمتان $j = 0, 1$. إذا كان $a$ زوجيًا كانت القيمة $1$، وإذا كان فرديًا كانت $-1$. وهذا يساوي $(-1)^a = \lambda(p^a)$. $\square$

## ٠٢٢٤. الدالة $\omega(n)$ والدالة $\Omega(n)$

نعرف:

$$\omega(n) = \#\{p : p \mid n\},$$

أي عدد العوامل الأولية المتميزة.

أما:

$$\Omega(n) = \sum_{p^{\alpha} \| n} \alpha,$$

فتحسب العوامل الأولية مع التكرار.

ليستا ضربيتين، لكنهما جمعيتان بمعان مختلفة:

إذا $(m, n) = 1$، فإن

$$\omega(mn) = \omega(m) + \omega(n).$$

أما $\Omega$، فتتحقق لها الإضافة التامة:

$$\Omega(mn) = \Omega(m) + \Omega(n)$$

لكل $m, n$.

## ٠٢٣٤. المعكوس الديريشلي للدالة الضربية

إذا كانت $f$ ضربية و$f(1) = 1$، فإن معكوسها يحدد محليًا.

عند قوة أولية:

$$(f * f^{-1})(p^k) = 0 \qquad (k \geq 1).$$

أي:

$$\sum_{j=0}^{k} f(p^j) f^{-1}(p^{k-j}) = 0.$$

ومنها:

$$f^{-1}(p^k) = -\sum_{j=1}^{k} f(p^j) f^{-1}(p^{k-j}).$$

**مثال ٠.٢٩٤** إذا كانت $f = 1$، فإن:

$$1^{-1} = \mu.$$

## ٠.٢٤٤ المتسلسلات المولدة المحلية

للدالة الضربية $f$، ترتبط معلوماتها المحلية بمتسلسلة القوى الصورية:

$$\mathcal{B}_p(f; X) = \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) X^k.$$

إذا كان $f(1) = 1$، فإن:

$$\mathcal{B}_p(f^{-1}; X) = \frac{1}{\mathcal{B}_p(f; X)}.$$

هذه الهوية المحلية هي النموذج الجبري الذي سيتحول لاحقًا إلى حاصل ضرب أويلري عند وضع:

$$X = p^{-s}.$$

## ٠.٢٥٤ التفاف ديريشليه وسلاسل ديريشليه

**مبرهنة ٠.٣٠٤** (الالتفاف وضرب سلاسل ديريشليه)**.** إذا كانت:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

و

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$$

وكان التقارب مطلقًا، فإن:

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}.$$

برهان. بالتقارب المطلق:

$$F(s)G(s) = \sum_{a,b \geq 1} \frac{f(a)g(b)}{(ab)^s}.$$

نجمع الحدود بحسب $n = ab$:

$$F(s)G(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \sum_{ab=n} f(a)g(b).$$

وهذا يساوي:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(f * g)(n)}{n^s}.$$

□

هذه النتيجة تفسر لماذا الالتفاف هو الضرب الطبيعي لمعاملات سلاسل ديريشليه.

## ٠.٢٦٤ البنية الحلقية

يمكن تلخيص البنية كما يلي:

$$(\mathcal{A}, +, *)$$

حلقة تبادلية ذات وحدة $\varepsilon$.
وحداتها هي بالضبط الدوال $f$ التي تحقق:

$$f(1) \neq 0.$$

أما الدوال الضربية ذات $f(1) = 1$، فتشكل زمرة تحت الالتفاف الديريشلي.

## ٠.٢٧٤ ملاحظات تاريخية ومنهجية

تظهر صيغة قلب موبيوس في القرن التاسع عشر ضمن دراسة علاقات القواسم، لكنها أصبحت لاحقًا نموذجًا عامًا للانقلاب على المرتبات الجزئية وبنى التضمين والاستبعاد؛ ولتاريخ الصيغة وشروط نسخها اللانهائية انظر [LS80].

كما أن الالتفاف الديريشلي لم يعد مجرد أداة حسابية؛ بل صار بنية جبرية مركزية تظهر في:

- سلاسل ديريشليه.
- دوال زيتا و$L$.
- التوافقيات الجبرية.
- نظرية الاحتمالات الحسابية.
- التعميمات متعددة المتغيرات.

وتوجد تعميمات عديدة للالتفاف، منها الالتفاف الوحدوي، والالتفاف المرتبط بالقاسم المشترك، والالتفافات على أنصاف الزمر الحسابية [Tot13; Sha72]، لكن الالتفاف الديريشلي سيظل العملية الأساسية في هذه الموسوعة.

## ٠٢٨٤. أخطاء شائعة

١. نسيان شرط $f(1) = 1$ في تعريف الدالة الضربية.

٢. الخلط بين الضربية والضربية التامة.

٣. الخلط بين الضرب النقطي والالتفاف.

٤. استعمال قلب موبيوس دون التحقق من شكل مجموع القواسم.

٥. افتراض أن كل دالة لها معكوس ديريشلي.

٦. إهمال التقارب المطلق عند ضرب سلاسل ديريشليه.

٧. استنتاج الضربية من قيم قليلة دون إثبات على القوى الأولية.

## ٠٢٩٤. تمارين

١. أثبت أن حاصل الضرب النقطي لدالتين ضربيتين ضربي.

٢. أثبت أن معكوس الدالة الضربية تحت الالتفاف ضربي.

٣. احسب المعكوس الديريشلي للدالة id.

٤. أثبت:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

٥. استعمل قلب موبيوس لإثبات:

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

٦. أثبت:

$$\sum_{d|n} \mu^2(d) = 2^{\omega(n)}.$$

٧. أثبت أن:

$$\tau_k(p^\alpha) = \binom{\alpha + k - 1}{k - 1}.$$

٨. أوجد متسلسلة بيل المحلية لـ$\mu$، و$\tau$، و$\varphi$.

٩. أثبت:

$$\lambda(n) = \sum_{d^2|n} \mu(n/d^2).$$

١٠. إذا كانت $f$ ضربية تمامًا، أثبت أن:

$$f^{-1}(p) = -f(p),$$

وحدد $f^{-1}(p^2)$ و$f^{-1}(p^3)$.

١١. أثبت أن دالة فون مانغولت ليست ضربية.

١٢. برهن أن:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$

بطريقتين مختلفتين.

## ٠٣٠٤. خلاصة الفصل

الدوال الحسابية هي اللغة المحلية للبنية الضربية، والالتفاف الديريشلي هو العملية التي تجمع هذه البنية بصورة تتوافق مع ضرب سلاسل ديريشليه. وتؤدي دالة موبيوس دور المعكوس الأساسي، بينما تكشف صيغة قلب موبيوس كيف يمكن استرجاع المعلومات من مجاميع القواسم.

سيبنى الفصل التالي مباشرة على هذه اللغة لدراسة سلاسل ديريشليه والمنتجات الأويلرية، حيث يتحول الالتفاف إلى ضرب وتتحول الضربية إلى عوامل محلية عند الأعداد الأولية.

# باب ٥

# سلاسل ديريشليه والمنتجات الأويلرية

## ٠١٥ نطاق الفصل

يبني هذا الفصل الجسر التحليلي بين الدوال الحسابية المدروسة في الفصل السابق والدوال العقدية التي ستقود إلى دالة زيتا ودوال $L$. ونقطة البدء هي تحويل متتالية المعاملات $a(n)$ إلى دالة في المتغير العقدي

$$D_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}.$$

### ٠١٠١٥ المتطلبات السابقة

يفترض الفصل معرفة:

- رموز الرتبة والجمع الجزئي لأبيل من الفصل الثاني.
- التقارب المحلي المنتظم والهولومورفية من الفصل الثالث.
- الدوال الضربية والالتفاف الديريشلي من الفصل الرابع.

## ٠٢٠١٥ نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. التمييز بين التقارب العادي والمطلق والمحلي المنتظم لسلسلة ديريشليه.

٢. تفسير نصفي مستوى التقارب والتقارب المطلق.

٣. تبرير هولومورفية مجموع السلسلة في نصف المستوى المناسب.

٤. تحويل تقدير للمجاميع الجزئية إلى تمثيل تكاملي للسلسلة.

٥. ربط ضرب سلاسل ديريشليه بالالتفاف الديريشلي.

٦. اشتقاق المنتج الأويلري من الضربية والتقارب المطلق.

٧. استرجاع معاملات سلسلة ديريشليه من مجموعها.

٨. اشتقاق المتسلسلات الأساسية المرتبطة بـ$\mu$، و$\Lambda$، و$\varphi$، و$\lambda$.

## ٢٥. الترددات الضربية

نكتب دائمًا

$$s = \sigma + it, \qquad \sigma, t \in \mathbb{R}.$$

ولأن $n > 0$، نعرف

$$n^{-s} = e^{-s \log n} = n^{-\sigma} e^{-it \log n}.$$

إذن

$$|n^{-s}| = n^{-\sigma}.$$

يفصل هذا التحليل بين وظيفتين:

- الجزء الحقيقي $\sigma$ يضبط الحجم والتقارب.
- الجزء التخيلي $t$ يولد تذبذبًا بتردد $\log n$.

ولهذا تعد سلاسل ديريشليه نظيرًا ضربيًا لمتسلسلات فورييه: الترددات هنا ليست الأعداد الصحيحة $n$، بل اللوغاريتمات $\log n$.

## ٣٥. التعريف والأمثلة الأولى

**تعريف ١٥.** سلسلة ديريشليه العامة هي متسلسلة من الشكل

$$D_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s},$$

حيث $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ دالة حسابية.

**مثال ٢٥.** (دالة زيتا في مجال السلسلة). إذا كان $a(n) = 1$، فإن

$$D_a(s) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \sigma > 1.$$

هذا التعريف بالسلسلة لا يشمل بعد الاستمرار التحليلي إلى خارج النصف $\sigma > 1$.

**مثال ٣٥.** (دالة إيتا). إذا كان $a(n) = (-1)^{n-1}$، فإن

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

تتقارب هذه السلسلة عندما $\sigma > 0$، بينما تتقارب مطلقًا فقط عندما $\sigma > 1$. وهذا أول تنبيه إلى أن نصفي مستوى التقارب العادي والمطلق قد يختلفان.

**مثال ٤٥.** (سلسلة ذات دعم على المربعات). إذا كانت $1_{\square}(n)$ دالة مؤشر المربعات الكاملة، فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{\square}(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} = \zeta(2s), \qquad \sigma > \frac{1}{2}.$$

## ٤٥. أنماط التقارب

نميز بين ثلاثة أنماط:

١. التقارب النقطي عند قيمة محددة لـ$s$.

٢. التقارب المطلق إذا

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)| n^{-\sigma} < \infty.$$

٣. التقارب المحلي المنتظم على مجال إذا كان التقارب منتظمًا على كل مجموعة مدمجة داخله.

التقارب المحلي المنتظم هو النمط الذي يسمح بنقل الهولومورفية من المجاميع الجزئية إلى المجموع النهائي. أما التقارب النقطي وحده فلا يكفي لذلك.

## ٥٥. الانتقال إلى يمين نقطة التقارب

**مبرهنة ٥٥.** (نصف مستوى التقارب والهولومورفية). إذا تقاربت السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$$

عند $s = s_0$، فإنها تتقارب محلياً بانتظام في نصف المستوى

$$\Re(s) > \Re(s_0).$$

ومن ثم يكون مجموعها هولومورفياً هناك.

برهان. ضع

$$b_n = a(n)n^{-s_0}, \qquad B(x) = \sum_{n \le x} b_n.$$

تقارب $\sum b_n$ يقتضي أن $B(x) = O(1)$. وإذا كتبنا

$$w = s - s_0,$$

فإن الجمع الجزئي يعطي، لأي $N > M$،

$$\sum_{M<n\le N} b_n n^{-w} = B(N)N^{-w} - B(M)M^{-w} + w\int_M^N B(x)x^{-w-1}\,dx,$$

مع تعديل طرفي غير مؤثر إذا لم يكن $M$ عددًا صحيحًا.

لتكن $K$ مجموعة مدمجة داخل $\Re(w) > 0$. يوجد $\delta > 0$ و$C_K > 0$ بحيث

$$\Re(w) \ge \delta, \qquad |w| \le C_K$$

لكل $w \in K$. وبما أن $B$ محدودة، فإن ذيل السلسلة محكوم بكمية من رتبة

$$O_K(M^{-\delta}).$$

إذن تحقق السلسلة معيار كوشي بانتظام على $K$، فتتقارب محليًا بانتظام. وكل مجموع جزئي هولومورفي، ولذلك يكون المجموع هولومورفيًا على نصف المستوى. □

ملاحظة ٠.٦٥. لا تقول المبرهنة إن التقارب منتظم على نصف المستوى المفتوح كله؛ فالعبارة الصحيحة اللازمة للتحليل العقدي هي الانتظام على كل مجموعة مدمجة داخله.

## ٠.٦٥ فاصلا التقارب

**تعريف ٠.٧٥.** نعرف فاصل التقارب، في المستقيم الحقيقي الموسع، بـ

$$\sigma_c = \inf\left\{u \in \mathbb{R} : \text{ تتقارب السلسلة لكل } s \text{ ذي } \Re(s) > u\right\},$$

مع الاصطلاح $\inf \varnothing = +\infty$. ويعرف فاصل التقارب المطلق $\sigma_a$ باستبدال التقارب بالتقارب المطلق في المجموعة نفسها.

قد تكون إحدى القيمتين $-\infty$ أو $+\infty$، ولا يقرر التعريف وحده سلوك السلسلة على خط الحد. وفي الحالات غير المنحلة يكون لدينا نصف مستوى للتقارب ونصف مستوى التقارب المطلق المحتوى فيه.

**قضية ٠.٨٥.** (الفجوة بين فاصلي التقارب). لكل سلسلة ديريشليه عامة:

$$\sigma_c \le \sigma_a \le \sigma_c + 1.$$

برهان. المتباينة الأولى مباشرة، لأن التقارب المطلق يستلزم التقارب. إذا كان $\sigma_c = +\infty$ فلا يبقى ما يثبت. وإذا كان $\sigma_c = -\infty$، فيمكن في الحجة الآتية اختيار $u$ سالبًا كيفما نشاء، فتنتج $\sigma_a = -\infty$. لذا نعرض الحجة الأساسية للحالة $\sigma_c \in \mathbb{R}$.

اختر عددًا حقيقيًا $u > \sigma_c$. تتقارب

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-u},$$

ومن ثم تكون حدودها محدودة: يوجد $C > 0$ بحيث

$$|a(n)|n^{-u} \leq C.$$

إذا كان $\sigma > u + 1$، فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|n^{-\sigma} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\sigma-u)},$$

والسلسلة في الطرف الأيمن متقاربة. لذلك $\sigma_a \leq u + 1$. وبترك $u \downarrow \sigma_c$ نحصل على النتيجة. □

**مثال ٠.٩٥.** لدالة إيتا:

$$\sigma_c = 0, \qquad \sigma_a = 1.$$

إذن يمكن أن تبلغ الفجوة الحد الأقصى 1.

## ٠.٧٥ المجاميع الجزئية والتمثيل التكاملي

لتكن

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

تربط صيغة أبيل بين نمو $A(x)$ وتقارب سلسلة ديريشليه.

**مبرهنة ٠.١٠٥** (تمثيل أبيل لسلسلة ديريشليه)**.** إذا كان

$$A(x) = O(x^{\theta})$$

لبعض $\theta \in \mathbb{R}$، فإن السلسلة تتقارب عندما $\Re(s) > \theta$، ولدينا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = s \int_1^{\infty} A(x)x^{-s-1}\, dx$$

في هذا النصف من المستوى.

برهان. تطبيق الجمع الجزئي على $f(x) = x^{-s}$ يعطي

$$\sum_{n \leq X} a(n)n^{-s} = A(X)X^{-s} + s \int_1^{X} A(x)x^{-s-1}\, dx.$$

إذا كانت $\sigma = \Re(s) > \theta$، فإن

$$A(X)X^{-s} = O(X^{\theta-\sigma}) \longrightarrow 0.$$

كما أن التكامل يتقارب مطلقًا لأن

$$|A(x)x^{-s-1}| \ll x^{\theta-\sigma-1},$$

وأس القوة أصغر من $-1$. نترك $X \to \infty$ فنحصل على الصيغة. □

**مثال ١١٥.** (الإلغاء يوسع مجال التقارب). للمعاملات $a(n) = (-1)^{n-1}$ تكون المجاميع الجزئية محدودة، أي $A(x) = O(1)$. لذلك تتقارب $\eta(s)$ عندما $\sigma > 0$. أما سلسلة القيم المطلقة فهي $\zeta(\sigma)$، فلا تتقارب إلا عندما $\sigma > 1$.

ملاحظة ١٢٥. المبدأ البنيوي هنا هو أن صغر المجاميع الجزئية، أي وجود إلغاء بين المعاملات، يدفع نصف مستوى التقارب إلى اليسار.

## ٨٥. الاشتقاق حدًا حدًا

إذا كانت السلسلة متقاربة مطلقًا في $\Re(s) > \sigma_a$، فإنها قابلة للاشتقاق حدًا حدًا داخل هذا النصف:

$$D_a'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\log n}{n^s}.$$

والسبب أن كل مجموعة مدمجة تقع على مسافة موجبة من الحد $\Re(s) = \sigma_a$. نختار $\varepsilon > 0$ أصغر من تلك المسافة، ثم نستخدم

$$\log n \ll_\varepsilon n^\varepsilon$$

للحصول على تقارب مطلق منتظم لسلسلة المشتقات.

## ٩٥. فرادة معاملات سلسلة ديريشليه

**مبرهنة ١٣٥.** (مبرهنة الفرادة). لتكن

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}, \qquad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s}$$

متقاربتين مطلقًا في نصف مستوى مشترك. إذا كان $F(s) = G(s)$ هناك، فإن

$$a(n) = b(n)$$

لكل $n \geq 1$.

برهان. ضع $c(n) = a(n) - b(n)$. إذا لم تكن جميع المعاملات صفراً، فليكن $m$ أصغر عدد يحقق $c(m) \neq 0$. على المحور الحقيقي، ولـ$\sigma$ كبيرة، لدينا

$$0 = m^\sigma \sum_{n=m}^{\infty} c(n) n^{-\sigma} = c(m) + \sum_{n>m} c(n) \left(\frac{m}{n}\right)^\sigma .$$

اختر $\sigma_0$ في مجال التقارب المطلق. عندما $\sigma \geq \sigma_0$، يمكن السيطرة على الذيل بمتسلسلة متقاربة مشتقة من $\sum |c(n)| n^{-\sigma_0}$، بينما يؤول كل عامل $(m/n)^{\sigma-\sigma_0}$ إلى الصفر. بالتقارب المسيطر يؤول الذيل إلى الصفر، فنحصل على $c(m) = 0$، وهذا تناقض. □

ملاحظة ٠.١٤٥. تعني الفرادة أن هوية بين سلاسل ديريشليه في نصف مستوى مطلق التقارب ليست مجرد مساواة دوال؛ إنها هوية معامل بمعامل.

## ٠.١٠٥ ضرب السلاسل والالتفاف

أثبت الفصل الرابع، تحت التقارب المطلق، أن

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s}.$$

هذه الصيغة تجعل تحويل ديريشليه

$$f \longmapsto D_f(s)$$

يحول الالتفاف إلى ضرب. لكنها لا تجيز ضرب سلسلتين خارج مجال يبرر إعادة ترتيب المجموع المزدوج.

**مثال ٠.١٥٥.** بما أن $1 * 1 = \tau$، فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta(s)^2, \qquad \sigma > 1.$$

## ٠.١١٥ المنتج الأويلري العام

**مبرهنة ٠.١٦٥.** (المنتج الأويلري للدالة الضربية). لتكن $f$ دالة ضربية، ولنفترض أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} < \infty.$$

عندئذ، لكل $s$ يحقق $\Re(s) \geq \sigma$،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right),$$

حيث يعرف الجداء بوصفه نهاية الجداءات المنتهية المرتبة بحسب $p \leq y$.

برهان. لكل $y$ منتهٍ، يؤدي نشر الجداء إلى

$$\prod_{p\le y}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right)=\sum_{\substack{n\ge 1\\ p|n\Rightarrow p\le y}}\frac{f(n)}{n^s}.$$

وحيدية التحليل إلى عوامل أولية تضمن ظهور كل عدد مسموح به مرة واحدة، وضربية $f$ تحول حاصل ضرب العوامل المحلية إلى $f(n)$.

أما تبرير النشر والحد، فيأتي من التقارب المطلق. فإذا كان $\Re(s)\ge\sigma$، فإن $n^{-\Re(s)}\le n^{-\sigma}$، فالفرق بين السلسلة الكاملة والمجموع المقيد محكوم بذيل من

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|}{n^{\sigma}},$$

ويؤول هذا الذيل إلى الصفر عندما $y\to\infty$. لذلك تؤول الجداءات المنتهية إلى سلسلة ديريشليه المطلوبة. □

إذا كانت $f$ ضربية تمامًا، فإن

$$f(p^k)=f(p)^k,$$

ومن ثم يكون العامل المحلي متسلسلة هندسية:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}=\left(1-\frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

داخل مجال التقارب المطلق.

## ٠.١٢٥ حاصل ضرب أويلر لدالة زيتا

بتطبيق المبرهنة على الدالة الثابتة 1 نحصل على

$$\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1},\qquad \sigma>1.$$

هذه الهوية هي الصورة التحليلية لوحيدية التحليل الأولي: الطرف الأيسر يجمع على جميع الأعداد، والطرف الأيمن يبني كل عدد من قواه الأولية المحلية.

## ٠.١٣٥ المقلوب وسلسلة موبيوس

**نتيجة ٠.١٧٥** (مقلوب زيتا في نصف مستوى التقارب المطلق). إذا كان $\Re(s)>1$، فإن

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_p(1-p^{-s}).$$

وعلى وجه الخصوص، لا تنعدم $\zeta(s)$ في النصف $\Re(s)>1$.

برهان. لدينا في حلقة الالتفاف

$$1 * \mu = \varepsilon.$$

وتتقارب سلسلتا 1 و$\mu$ مطلقًا عندما $\sigma > 1$، لأن $|\mu(n)| \leq 1$. لذلك يعطي ضرب السلسلتين

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1.$$

وهذا يثبت المقلوب وعدم الانعدام. أما المنتج، فينتج من

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(p^k)}{p^{ks}} = 1 - p^{-s}.$$

□

ملاحظة ٠.١٨٥. عدم الانعدام المثبت هنا محصور في $\sigma > 1$. ولا يجوز نقله إلى حدود أخرى قبل بناء الاستمرار التحليلي وأدوات المناطق الخالية من الأصفار.

## ٠.١٤٥ المشتقة اللوغاريتمية وفون مانغولت

**مبرهنة ٠.١٩٥.** (المشتقة اللوغاريتمية لدالة زيتا). إذا كان $\Re(s) > 1$، فإن

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

برهان. يسمح التقارب المطلق بالاشتقاق حدًا حدًا:

$$-\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

ونضرب في

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

وبحسب قاعدة ضرب سلاسل ديريشليه، تكون المعاملات هي

$$(\mu * \log)(n).$$

وقد أثبت الفصل الرابع أن

$$\mu * \log = \Lambda.$$

فتنتج الصيغة. □

ملاحظة ٠.٢٠٥. تكشف المشتقة اللوغاريتمية العوامل الأولية: اللوغاريتم يحول الجداء إلى مجموع، والاشتقاق يعطي أوزان $\log p$ على القوى الأولية. لهذا تصبح $\Lambda$ المعامل الطبيعي عند دراسة توزيع الأوليات بواسطة زيتا.

## ٠.١٥٥ هويات أساسية أخرى

جميع الهويات الآتية صحيحة في أنصاف المستويات المذكورة، حيث تتقارب السلاسل اللازمة مطلقًا.

### ٠.١.١٥٥ دالة القواسم

من $\tau = 1 * 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta(s)^2, \qquad \sigma > 1.$$

### ٠.٢.١٥٥ دالة أويلر

من $\varphi = \mu * \mathrm{id}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \qquad \sigma > 2.$$

فالتحويل الديريشلي لـ$\mathrm{id}(n) = n$ هو

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \zeta(s-1).$$

### ٠.٣.١٥٥ دالة ليوفيل

من $\lambda = \mu * 1_{\square}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}, \qquad \sigma > 1.$$

### ٠.٤.١٥٥ دوال القواسم العامة

من $\sigma_\alpha = 1 * \mathrm{id}_\alpha$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-\alpha),$$

في النصف الآمن

$$\sigma > \max(1, 1 + \Re(\alpha)).$$

## ٠.١٦٥ مثال محلول: من هوية حسابية إلى هوية تحليلية

نريد اشتقاق سلسلة $\varphi$.

١. الهوية الحسابية هي

$$\varphi = \mu * \mathrm{id}\,.$$

٢. تحويل $\mu$ هو

$$D_\mu(s) = \frac{1}{\zeta(s)} \qquad (\sigma > 1).$$

٣. تحويل id هو

$$D_{\mathrm{id}}(s) = \zeta(s-1) \qquad (\sigma > 2).$$

٤. نختار تقاطع مجالي التقارب المطلق، أي $\sigma > 2$.

٥. نحول الالتفاف إلى ضرب:

$$D_\varphi(s) = D_\mu(s) D_{\mathrm{id}}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

الخطوة الرابعة ليست تجميلًا تقنيًا؛ فهي التي تمنع استعمال الهوية خارج المجال الذي يبرر ضرب المتسلسلتين وإعادة ترتيب الحدود.

## ٠.١٧٥ أسئلة تفسير البرهان

١. في مبرهنة نصف مستوى التقارب، أين استعملنا تقارب السلسلة عند $s_0$، ولماذا لا يكفي أن تكون حدودها فقط متجهة إلى الصفر؟

٢. لماذا أثبتنا التقارب المنتظم على المجموعات المدمجة بدل ادعائه على نصف المستوى كله؟

٣. في المنتج الأويلري، ما الدور المنفصل لكل من الضربية، ووحيدية التحليل الأولي، والتقارب المطلق؟

٤. لماذا تثبت هوية موبيوس عدم انعدام زيتا في $\sigma > 1$، ولا تقول شيئًا مباشرًا عن الشريط الحرج؟

٥. في مبرهنة الفرادة، لماذا نختار أصغر معامل غير صفري؟

## ٠.١٨٥ أخطاء شائعة

١. الخلط بين مجال تعريف السلسلة ومجال الاستمرار التحليلي للدالة.

٢. افتراض أن التقارب النقطي يكفي للاشتقاق حدًا حدًا.

٣. ضرب سلسلتين وإعادة ترتيب المجموع المزدوج دون تقارب مطلق أو بديل مبرهن.

٤. كتابة منتج أويلري لدالة غير ضربية.

٥. حذف شرط المجال من هويات صحيحة فقط في نصف مستوى معين.

٦. استنتاج عدم الانعدام من كون كل عامل محلي غير صفري من دون فحص تقارب الجداء اللانهائي.

٧. الخلط بين $\sigma_c$ و$\sigma_a$.

٨. استعمال $-D'(s)/D(s)$ عند نقاط يمكن أن ينعدم فيها $D(s)$.

# ٠.١٩٥ تمارين

## ٠.١.١٩٥ المستوى الأول: تثبيت المفاهيم

١. حدد نصفي مستوى التقارب والتقارب المطلق للسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

٢. أثبت أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{\square}(n)}{n^s} = \zeta(2s).$$

٣. اشتق حدًا حدًا سلسلة $\zeta(s)$ في $\sigma > 1$.

٤. فسّر لماذا يؤدي $A(x) = O(1)$ إلى التقارب في $\sigma > 0$.

## ٠.٢.١٩٥ المستوى الثاني: استعمال البنية

١. استعمل $\tau_k = 1 * \cdots * 1$ لإثبات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = \zeta(s)^k \qquad (\sigma > 1).$$

٢. أثبت حاصل الضرب الأويلري لـ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}$$

ثم عبّر عنه بدلالة $\zeta(s)$ و$\zeta(2s)$.

٣. اشتق هوية دالة ليوفيل بطريقتين: من الالتفاف، ومن العوامل المحلية.

٤. أثبت صيغة $\sigma_\alpha$ مع تحديد نصف مستوى مطلق التقارب.

### ٣٠١٩٥. المستوى الثالث: البرهان والتحليل

١. أكمل جميع تفاصيل التقدير المنتظم للذيل في برهان مبرهنة ٥٥..

٢. أثبت مبرهنة الفرادة باستخراج المعاملات واحدًا بعد آخر بواسطة نهايات على المحور الحقيقي.

٣. إذا كان $A(x) = cx + O(x^\theta)$ مع $\theta < 1$، فافصل من تمثيل أبيل الجزء الذي ينتج حدًا من شكل $c\,s/(s-1)$، وحدد مجال تكامل الباقي.

٤. ابحث عن مثال يحقق $0 < \sigma_a - \sigma_c < 1$، وبيّن بدقة أين تتقارب سلسلته وأين تتقارب مطلقًا.

## ٢٠٥. مراجع الفصل ومسار التوسع

للمعالجة الكلاسيكية لسلاسل ديريشليه والمنتجات الأويلرية يمكن الرجوع إلى [Apo76; Dav00; Tit86]. أما الانتقال من هذه المنطقة الآمنة إلى الاستمرار التحليلي والمعادلة الوظيفية ونظرية الأصفار، فسيبدأ في الفصل التالي المخصص لدالة زيتا لريمان.

## ٢١٥. خلاصة الفصل

سلسلة ديريشليه تحول معاملات حسابية إلى دالة عقدية، ويحدد نمو المجاميع الجزئية موضع تقاربها. ويحول التقارب المحلي المنتظم السلسلة إلى كائن هولومورفي، بينما يحول التقارب المطلق الالتفاف إلى ضرب ويبرر المنتج الأويلري. وعندما تكون المعاملات ضربية، تنقسم المعلومات إلى عوامل محلية عند الأوليات؛ وعندما نأخذ المشتقة اللوغاريتمية لدالة زيتا تظهر دالة فون مانغولت بوصفها الوزن الطبيعي للقوى الأولية.

هذه البنية هي نقطة الانطلاق الصحيحة لدراسة زيتا: لن نتعامل معها في الفصل التالي كسلسلة منفردة، بل كدالة تجمع بين معاملاتها، ومنتجها الأويلري، واستمرارها التحليلي، وأصفارها.

# باب ٦

# دالة زيتا لريمان: الاستمرار التحليلي والمعادلة الوظيفية

## ٠١٦ نطاق الفصل

### ٠١٠١٦ المتطلبات السابقة

يفترض الفصل:

- الجمع الجزئي وتمثيل أبيل من الفصل الثاني.
- الاستمرار التحليلي ومبدأ الهوية والتقارب المحلي المنتظم من الفصل الثالث.
- سلسلة زيتا ومنتجها الأويلري في $\Re(s) > 1$ من الفصل الخامس.
- الخصائص الأساسية لدالة غاما وتحويل فورييه للغاوسي.

### ٠٢٠١٦ نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. التمييز بين دالة زيتا وتمثيلها بسلسلة ديريشليه.
٢. اشتقاق استمرارها إلى $\Re(s) > 0$ بواسطة دالة الجزء الكسري.
٣. شرح دور تحويل جاكوبي لثيتا وتمثيل ميلين.
٤. إثبات المعادلة الوظيفية للدالة المكتملة.
٥. بناء دالة ريمان $\xi$ والتحقق من تماميتها وتناظرها.
٦. تحديد الأصفار البديهية وحصر غير البديهية في الشريط الحرج المغلق.
٧. تفسير صيغة ستيرلينغ وحد التحدب وصيغة ريمان--فون مانغولت.

٨. بناء دالة هاردي $Z(t)$ وبيان حدود الفحص العددي.

٩. تفسير جداء هادامار القانوني والمشتقة اللوغاريتمية لـ$\xi$.

١٠. قراءة صيغة فون مانغولت الصريحة مع اصطلاح جمع الأصفار.

١١. التمييز بين منطقة خالية من الأصفار وفرضية ريمان.

١٢. صياغة فرضية ريمان من دون عرضها كحقيقة مثبتة.

## ٠٢٦. من السلسلة إلى الدالة

في نصف المستوى $\Re(s) > 1$ عرّف الفصل الخامس

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

وأثبت المنتج الأويلري

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}.$$

هاتان الصيغتان تعطيان دالة هولومورفية غير منعدمة في ذلك النصف. لكن السلسلة لا تتقارب عندما $\Re(s) \leq 1$، وهذا لا يعني أن الدالة نفسها لا يمكن استمرارها. يجب التمييز دائمًا بين مجال تمثيل ومجال الدالة المستمرة منه.

## ٠٣٦. الاستمرار الأول بصيغة الجزء الكسري

نكتب

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor, \qquad 0 \leq \{x\} < 1.$$

**مبرهنة ١٦.** (استمرار زيتا إلى $\Re(s) > 0$). تمتد دالة زيتا ميرومورفياً إلى نصف المستوى $\Re(s) > 0$، وفيه

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1}\, dx.$$

ولها في هذا النصف قطب وحيد بسيط عند $s = 1$، والباقي عنده يساوي 1.

برهان. في $\Re(s) > 1$، يعطي تمثيل أبيل مع

$$A(x) = \sum_{n \leq x} 1 = \lfloor x \rfloor$$

الصيغة

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\, dx.$$

وباستعمال $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$ نحصل على

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty x^{-s}\,dx - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\,dx = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\,dx.$$

بما أن $0 \le \{x\} < 1$، يتقارب التكامل الأخير مطلقًا ومحليًا بانتظام عندما $\Re(s) > 0$، ومن ثم يعرف دالة هولومورفية هناك. أما $s/(s-1)$ فله قطب بسيط عند 1 وباقيه 1. تتفق الصيغة الجديدة مع السلسلة في منطقة التقاطع، فتكون استمرارها الوحيد. □

ملاحظة ٢٦.. هذه الصيغة لا تصل وحدها إلى النصف $\Re(s) \le 0$. للوصول إلى المستوى كله نحتاج تناظرًا يحول السلوك قرب الصفر إلى السلوك عند اللانهاية.

## ٤٦. دالة غاما والعامل الأرخميدي

نعرف، عندما $\Re(s) > 0$،

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx.$$

وتحقق دالة غاما

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

وتمتد ميرومورفيًا إلى المستوى، بأقطاب بسيطة عند الأعداد الصحيحة غير الموجبة ومن دون أصفار. سنستعمل كذلك صيغتي الانعكاس والتضعيف

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

و

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z).$$

هذه نتائج قياسية؛ انظر [Apo76; Tit86].

## ٥٦. دالة ثيتا وتحويل جاكوبي

لـ$t > 0$ نعرف

$$\Theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = 1 + 2\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}.$$

**مبرهنة ٣٦.** (تحويل جاكوبي لثيتا). لكل $t > 0$:

$$\Theta(t) = t^{-1/2}\Theta(1/t).$$

ينتج هذا التحويل من صيغة جمع بواسون للدالة الغاوسية. والنقطة البنيوية فيه أن قيمة ثيتا عند زمن صغير تُرد إلى قيمتها عند زمن كبير، حيث يكون التقارب الأسي سريعًا. كما أن

$$\Theta(t) - 1 = O(e^{-\pi t}) \qquad (t \to \infty).$$

## ٦٦. تمثيل ميلين لزيتا المكتملة

نعرف أولًا في $\Re(s) > 1$ الدالة المكتملة

$$\Lambda_\zeta(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\,\zeta(s).$$

بالتكامل حدًا حدًا،

$$\int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2}\,\frac{dt}{t} = \pi^{-s/2} n^{-s}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big),$$

ومن ثم

$$\Lambda_\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \big(\Theta(t)-1\big)t^{s/2}\,\frac{dt}{t}.$$

التبديل بين المجموع والتكامل مشروع في $\Re(s) > 1$ بالتقارب المطلق.

## ٧٦. الاستمرار إلى المستوى والمعادلة الوظيفية

**مبرهنة ٤٦.** (الاستمرار الميرومورفي والمعادلة الوظيفية). تمتد $\zeta(s)$ ميرومورفياً إلى $\mathbb{C}$ كلها، وليس لها إلا قطب بسيط عند $s = 1$ والباقي عنده يساوي 1. وتمتد الدالة المكتملة بحيث تحقق

$$\Lambda_\zeta(s) = \Lambda_\zeta(1-s).$$

وبصورة صريحة،

$$\Lambda_\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \big(\Theta(t)-1\big)\left(t^{s/2} + t^{(1-s)/2}\right)\frac{dt}{t}.$$

برهان. نقسم تكامل ميلين عند $t = 1$. في الجزء الممتد من 0 إلى 1 نستعمل

$$\Theta(t) - 1 = t^{-1/2}\big(\Theta(1/t) - 1\big) + t^{-1/2} - 1,$$

ثم نضع $u = 1/t$. ينتج

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \big(\Theta(t)-1\big)t^{s/2}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \big(\Theta(u)-1\big)u^{(1-s)/2}\frac{du}{u} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

بإضافة الجزء من 1 إلى $\infty$ نحصل على الصيغة المعلنة.

بسبب التناقص الأسي لـ$\Theta(t) - 1$، يعرف التكامل من 1 إلى $\infty$ دالة تامة في $s$: على كل مجموعة مدمجة تُقدَّر القوتان بمقدار كثير حدود في $t$، بينما يهيمن التناقص الأسي. إذن الطرف الأيمن ميرومورفي، وقطباه المحتملان البسيطان هما 0 و1. وهو ثابت تحت التبديل $s \mapsto 1 - s$، فتنتج المعادلة الوظيفية للدالة المكتملة.

وأخيرًا نكتب

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\Lambda_\zeta(s).$$

الدالة $1/\Gamma(s/2)$ تامة، وصفرها البسيط عند $s = 0$ يلغي قطب $\Lambda_\zeta$ هناك. أما عند $s = 1$ فلا يحدث إلغاء. وبالمطابقة مع الاستمرار السابق يبقى الباقي عند 1 مساويًا 1. □

## ٨٦. دالة ريمان $\xi$

**نتيجة ٥٦.** (تمامية $\xi$ وتناظرها)**.** الدالة

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

تامة على $\mathbb{C}$، وتحقق

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

برهان. يضرب العامل $s(s-1)$ قطبي $\Lambda_\zeta$ البسيطين عند 0 و1، فتنتج دالة تامة. كما أن

$$(1-s)(-s) = s(s-1),$$

فتنتقل معادلة $\Lambda_\zeta$ الوظيفية مباشرة إلى $\xi$. □

## ٩٦. الصيغة الكلاسيكية للمعادلة الوظيفية

**نتيجة ٦٦.** (المعادلة الوظيفية الكلاسيكية)**.** كهوية بين دوال ميرومورفية،

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

برهان. من معادلة الدالة المكتملة نحصل أولًا على

$$\zeta(s) = \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\zeta(1-s).$$

وبتطبيق صيغتي الانعكاس والتضعيف لغاما وتبسيط العوامل نحصل على الصيغة المعلنة. تصح المساواة أولًا بعيدًا عن الأقطاب، ثم في كل مكان بمبدأ الاستمرار الميرومورفي. □

## ١٠٦. الأصفار البديهية

**نتيجة ٧٦.** (الأصفار البديهية)**.** لكل $m \geq 1$، العدد

$$s = -2m$$

صفر بسيط لدالة زيتا.

برهان. عند $s = -2m$ ينعدم العامل

$$\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

انعدامًا بسيطًا، بينما تكون العوامل

$$2^s, \quad \pi^{s-1}, \quad \Gamma(1-s), \quad \zeta(1-s)$$

منتهية وغير صفرية؛ فـ$1-s = 1+2m > 1$، وفي هذا المجال لا تنعدم زيتا بفضل المنتج الأويلري. لذلك يكون الصفر بسيطًا. □

تسمى هذه الأصفار بديهية لأنها تظهر مباشرة من عامل الجيب في المعادلة الوظيفية، لا لأنها عديمة الأهمية.

## ٠.١١٦ الشريط الحرج وتناظرات الأصفار

**قضية ٠.٨٦** كل صفر غير بديهي لـ $\zeta$ يقع في الشريط الحرج المغلق

$$0 \leq \Re(s) \leq 1.$$

وإذا كان $\rho$ صفراً غير بديهي، فإن

$$\overline{\rho}, \qquad 1-\rho, \qquad 1-\overline{\rho}$$

أصفار أيضًا، مع الرتبة نفسها.

برهان. لا توجد أصفار في $\Re(s) > 1$ بسبب المنتج الأويلري. وإذا كان $\Re(s) < 0$، فإن $\Re(1-s) > 1$، ولذلك لا ينعدم $\zeta(1-s)$. كما أن $\Gamma(1-s)$ لا تنعدم ولا تملك قطبًا هناك؛ فتبيّن المعادلة الكلاسيكية أن الأصفار الوحيدة في هذا النصف هي أصفار عامل الجيب، أي الأعداد السالبة الزوجية.

ومن معاملات السلسلة الحقيقية في $\Re(s) > 1$ لدينا

$$\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)},$$

وتستمر الهوية إلى المجال الميرومورفي كله. أما التناظر حول الخط $\Re(s) = 1/2$ فينتج من $\xi(s) = \xi(1-s)$. وتتطابق أصفار $\xi$ مع الأصفار غير البديهية لزيتا: ففي الشريط الحرج المغلق، بعيدًا عن 0 و1، تكون العوامل الأخرى في تعريف $\xi$ منتهية وغير منعدمة، بينما $\xi(0) = \xi(1) = 1/2$. وتحفظ هاتان الهويتان رتب الأصفار. □

ملاحظة ٠.٩٦ حصر الأصفار في الشريط المغلق لا يثبت خلو الخطين $\Re(s) = 0$ و $\Re(s) = 1$. خلو الخط $\Re(s) = 1$ نتيجة عميقة تدخل في برهان مبرهنة الأعداد الأولية، ولن تُفترض هنا.

## ٠.١٢٦ النمو في الشرائط الرأسية

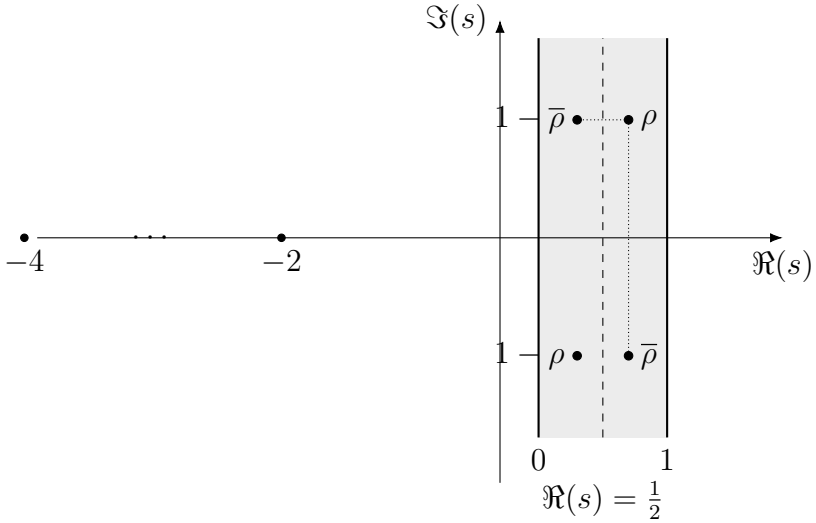
لا يكفي استمرار الدالة إلى مجال أكبر؛ فتطبيقات تحويل المسارات تحتاج إلى ضبط حجمها عندما يكبر $|\Im(s)|$. نقطة البدء هي صيغة ستيرلينغ لعامل غاما.

**مبرهنة ٠.١٠٦** (ستيرلينغ المنتظمة في شريط رأسي). لتكن $a < b$ ثابتتين. بانتظام عندما

$$a \leq \sigma \leq b, \qquad |t| \geq 2, \qquad s = \sigma + it,$$

لدينا، مع الفرع الرئيسي للوغاريتم،

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} s - s + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O_{a,b}\left(\frac{1}{|t|}\right).$$




شكل ١٦.: مخطط تخطيطي (لا يُقاس) للشريط الحرج $0 \le \Re(s) \le 1$ وتناظرات الأصفار غير البديهية الأربعة $\rho, \overline{\rho}, 1-\rho, 1-\overline{\rho}$ من القضية ٠.٨٦، مع أول صفرين بديهيين $-2, -4$ خارج الشريط. مواضع $\rho$ هنا افتراضية لغرض العرض ولا تمثل أصفارًا محسوبة فعليًا؛ فالشكل يوضح بنية التناظر لا قيمه العددية.

**نتيجة ٠.١١٦** (حجم عامل غاما الرأسي)**.** لكل شريط ثابت $a \le \sigma \le b$، وبانتظام عندما $|t| \ge 2$:

$$\left|\Gamma\left(\frac{\sigma+it}{2}\right)\right| = \sqrt{2\pi}\left(\frac{|t|}{2}\right)^{\sigma/2-1/2} e^{-\pi|t|/4}\left(1+O_{a,b}\left(\frac{1}{|t|}\right)\right).$$

برهان. نأخذ الجزء الحقيقي من صيغة ستيرلينغ بعد وضع $s=(\sigma+it)/2$. وبما أن

$$\arg(\sigma+it) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(t) + O_{a,b}(1/|t|),$$

ينتج العامل الأسي $e^{-\pi|t|/4}$، بينما ينتج الجزء الحقيقي من $(s-1/2)\operatorname{Log} s$ قوة $(|t|/2)^{\sigma/2-1/2}$. □

يقابل التناقص الأسي لعامل غاما نموًا كثير الحدود لزيتا في المعادلة الوظيفية. ومن الصيغ القياسية التي تجمع المعادلة الوظيفية مع مبدأ فراجمن--ليندلوف النتيجة الآتية.

**مبرهنة ٠.١٢٦** (حد التحدب الكلاسيكي)**.** لكل $\varepsilon > 0$، وبانتظام عندما $0 \le \sigma \le 1$ و $|t| \ge 2$:

$$\zeta(\sigma+it) \ll_\varepsilon |t|^{(1-\sigma)/2+\varepsilon}.$$

يسمى هذا حد التحدب، وليس أفضل حد معروف في جميع المواضع. ولا يُستنتج منه فرض ليندلوف أو فرضية ريمان؛ بل يمثل خط أساس كلاسيكيًا تقاس بالنسبة إليه حدود دون التحدب.

## ٠.١٣٦ عد الأصفار: صيغة ريمان--فون مانغولت

نرمز بـ$N(T)$ إلى عدد الأصفار غير البديهية

$$\rho = \beta + i\gamma, \qquad 0 < \gamma \le T,$$

مع حساب الرتب. وعندما يساوي $T$ ارتفاع صفر يلزم اصطلاح طرفي؛ لذلك نصوغ النسخة الدقيقة التالية عندما لا يكون $T$ ارتفاع صفر.

**مبرهنة ٠.١٣٦.** (صيغة ريمان--فون مانغولت). إذا كان $T \geq 2$ وليس ارتفاع صفر، فإن

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

حيث

$$S(T) = \frac{1}{\pi}\arg\zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right),$$

ويُحدد الجدل بالاستمرار على المسار

$$2 \longrightarrow 2 + iT \longrightarrow \frac{1}{2} + iT,$$

بدءًا من $\arg\zeta(2) = 0$. وعلى وجه الخصوص،

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

الحد الرئيسي لا يحدد موضع كل صفر منفرد. لكنه يعطي كثافة متوسطة مقدارها تقريبًا

$$\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right)$$

صفرًا لكل وحدة ارتفاع، ومن ثم يكون التباعد المتوسط قرب الارتفاع $T$ من رتبة

$$\frac{2\pi}{\log(T/(2\pi))}.$$

هذه عبارة عن المتوسط المستنتج من الحد الرئيسي، لا حد موحد لكل فجوة.

## ٠.١٤٦. دالة هاردي $Z$

نعرّف دالة ريمان--سيغل ثيتا باختيار فرع متصل بحيث $\vartheta_{\mathrm{RS}}(0) = 0$:

$$\vartheta_{\mathrm{RS}}(t) = \Im\log\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) - \frac{t}{2}\log\pi.$$

ثم نضع

$$Z(t) = e^{i\vartheta_{\mathrm{RS}}(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

**قضية ١٤٦.** (واقعية دالة هاردي)**.** لكل $t \in \mathbb{R}$، تكون $Z(t)$ حقيقية، و

$$Z(-t) = Z(t).$$

كما أن

$$Z(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0,$$

مع حفظ رتبة الصفر.

برهان. اكتب

$$A(t) = \pi^{-1/4-it/2}\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) = |A(t)|e^{i\vartheta_{\mathrm{RS}}(t)}.$$

عندئذ

$$\Lambda_\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = |A(t)|Z(t).$$

ومن المعادلة الوظيفية وهوية المرافق العقدي:

$$\Lambda_\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \Lambda_\zeta\left(\frac{1}{2} - it\right) = \overline{\Lambda_\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)},$$

فتكون القيمة حقيقية. وبما أن $|A(t)| > 0$، تتكافأ الأصفار وتحفظ رتبها. أما الزوجية فتنتج من $\vartheta_{\mathrm{RS}}(-t) = -\vartheta_{\mathrm{RS}}(t)$ ومن هوية المرافق لزيتا. □

يسمح تغير إشارة $Z$ بعزل صفر ذي رتبة فردية على الخط الحرج. لكنه قد يفوت صفراً ذا رتبة زوجية، وقد تفوت شبكة خشنة تغيرين متقاربين. لذلك لا تكفي قائمة تغيرات الإشارة لإثبات أن جميع أصفار مستطيل ما قد عُدت؛ يلزم شهادة مستقلة من مبدأ الحجة أو من صيغة عد الأصفار.

## ١٥٦. عقد التجربة العددية منخفضة الارتفاع

تُسجل التجربة

في مجلد Python. هدفها التحقق من تنفيذ $Z(t)$ وعزل عشرة أصفار منخفضة الارتفاع بتغير الإشارة، ثم مطابقة الإحداثيات مع قاعدة LMFDB الخارجية وفحص صغر الجزء التخيلي العددي، ومقارنة العدد بالحد السلس في صيغة ريمان--فون مانغولت. سقف الدعوى صريح:

- التجربة تعليمية ومنخفضة الارتفاع.
- لا تبحث عن أصفار خارج الخط الحرج ولا تشهد اكتمال العد بمفردها.
- مطابقة الإحداثيات الخارجية تتحقق من التنفيذ، ولا تستبدل شهادة مستقلة لاكتمال عد الأصفار في المستطيل.

- لا تقدم دليلًا على فرضية ريمان أو تقدمًا نحوها.
- لا تختبر إحصاء GUE، وأي اختبار إحصائي لاحق يجب أن يسجل مسبقًا تصحيحات الارتفاع المنتهي وخطة المقارنة.

## ٠.١٦٦ جداء هادامار لدالة $\xi$

الاستمرار التحليلي يعطي دالة تامة، لكن تحويل أصفارها إلى جداء يحتاج معلومة نمو عالمية. تؤدي تقديرات ثيتا وستيرلينغ إلى أن $\xi$ دالة تامة من الرتبة الأولى. نقتبس الصياغة القانونية التالية، بما فيها تقدير الرتبة ومشروعية الجداء.

**مبرهنة ٠.١٥٦** (جداء هادامار القانوني)**.** لتكن

$$E_1(z) = (1-z)e^{z}.$$

توجد ثابتتان $A, B \in \mathbb{C}$ بحيث

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} E_1\left(\frac{s}{\rho}\right),$$

حيث يجري الجداء على الأصفار غير البديهية لزيتا مع حساب الرتب، ويتقارب محلياً بانتظام بعد إدخال عوامل الجنس الأول $E_1$. ويمكن اختيار

$$A = \log \xi(0) = -\log 2.$$

العامل الأسي داخل $E_1$ ليس زينة شكلية؛ فهو الذي يجعل الجداء القانوني متقاربًا. أما الصيغة المختصرة

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho}^{*} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

فتحتاج اصطلاح ترتيب أو اقتران متناظر للأصفار، ولهذا لا نستعملها دون النجمة وبيان معنى الحد.

## ٠.١٧٦ المشتقة اللوغاريتمية والانتقال من الأصفار إلى الأوليات

نكتب

$$\psi_{\Gamma}(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

لدالة ديغاما، كي لا نخلطها بدالة تشيبيشيف $\psi(x)$.

**قضية ٠.١٦٦** (هويتان للمشتقة اللوغاريتمية)**.** بعيدًا عن الأصفار والأقطاب، ومع الاستمرار الميرومورفي حيث يلزم،

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = B + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right),$$

حيث تفهم السلسلة وفق الجداء القانوني السابق. ومن تعريف $\xi$:

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\psi_\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s).$$

برهان. يعطي التفاضل اللوغاريتمي للعامل

$$E_1(s/\rho) = (1 - s/\rho)e^{s/\rho}$$

المقدار

$$\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}.$$

ويجيز التقارب المحلي المنتظم للجداء القانوني التفاضل على المجموعات المدمجة البعيدة عن الأصفار. أما الهوية الثانية فتنتج بتفاضل

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

لوغاريتميًا حدًا حدًا. □

تظهر هنا الآلية البنيوية للصيغة الصريحة: المنتج الأويلري يجعل $-\zeta'/\zeta$ مجموعًا على القوى الأولية، بينما يجعل جداء هادامار $\xi'/\xi$ مجموعًا على الأصفار.

## ٠.١٨٦ صيغة فون مانغولت الصريحة

نعرف، لكل $x > 1$، النسخة المتماثلة عند نقاط القفز:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n<x}\Lambda(n) + \sum_{n\le x}\Lambda(n)\right).$$

فإذا لم يكن $x$ قوة أولية كانت $\psi_0(x) = \psi(x)$، وإذا كان قوة أولية أخذت الصيغة نصف القفزة عنده.

**مبرهنة ٠.١٧٦** (الصيغة الصريحة)**.** لكل $x > 1$:

$$\psi_0(x) = x - \lim_{T\to\infty}\sum_{\substack{\rho \\ |\Im\rho|\le T}}\frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}).$$

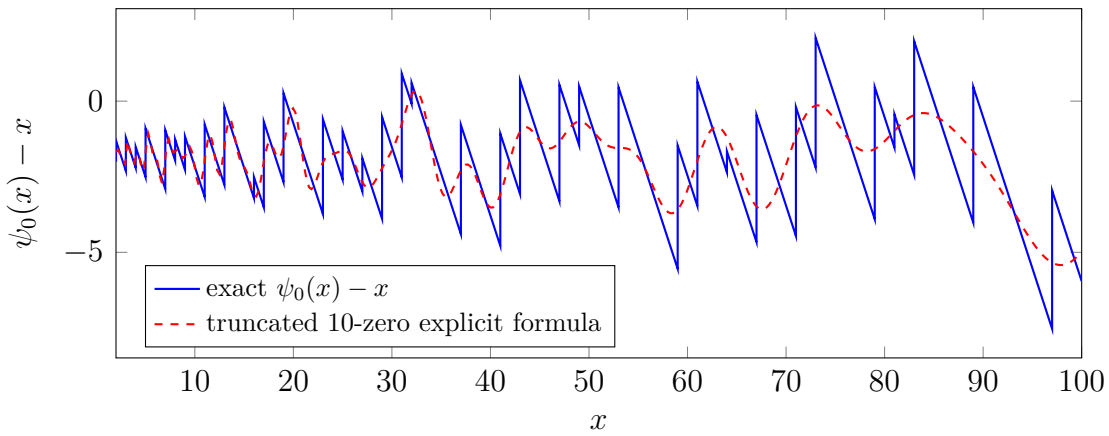
تحسب الأصفار مع الرتب، ويؤخذ مجموعها بالقطع المتناظر في الارتفاع، عبر قيم $T$ لا تساوي ارتفاع صفر.

لا يُفهم مجموع الأصفار هنا بوصفه مجموعًا مطلقًا غير مشروط. ويأتي الحد $x$ من قطب زيتا عند 1، ويأتي مجموع $\rho$ من الأصفار غير البديهية، ويجمع الحد

$$-\frac{1}{2}\log(1 - x^{-2})$$

مساهمات الأصفار البديهية $-2, -4, \ldots$. أما الثابت $-\log(2\pi)$ فينتج من السلوك عند الصفر.

البرهان القياسي يبدأ بصيغة بيرون لـ$-\zeta'/\zeta$، ثم يحرك مسار التكامل ويجمع البواقي. ولأن صيغة بيرون المقطوعة وشروط التحريك ما تزال موسومة DEFERRED في الفصل الثالث، نسجل الصيغة هنا كنتيجة مقتبسة ولا ندعي اكتمال برهانها داخل الموسوعة.




شكل ٢٦.: المنحنى الأزرق: تذبذب $\psi_0(x) - x$ الدقيق، محسوب مباشرة من $\Lambda(n)$ لكل $n \le 100$. المنحنى الأحمر المتقطع: تقريب الصيغة الصريحة عند اقتطاعها إلى أول عشرة أصفار غير بديهية فقط (الجزء 6.9 أعلاه)، مع الحدين الثابتين $-\log(2\pi)$ و$-\frac{1}{2}\log(1 - x^{-2})$. التباعد الظاهر بين المنحنيين متوقع ومقصود تعليمياً: تقارب الصيغة الصريحة إلى القيمة الدقيقة يتطلب مجموعًا على عدد كبير من الأصفار، لا عشرة فقط؛ فالشكل يوضّح طبيعة التذبذب لا دقة الاقتطاع.

## ١٩٦. منطقة كلاسيكية خالية من الأصفار

**مبرهنة ١٨٦.** (منطقة دي لا فاليه بوسان). يوجد ثابت مطلق $c_0 > 0$ بحيث

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0$$

كلما

$$|t| \ge 3, \qquad \sigma \ge 1 - \frac{c_0}{\log |t|}.$$

ملاحظة ١٩٦. (علاقة هذه النتيجة بالفصل الحادي عشر). لا تُستنتج هذه المبرهنة رسمياً من بوضع $q = 1$، لأن تلك المبرهنة مصاغة للشخصيات البدائية غير الرئيسية ذات الموصل $q \ge 3$. برهان منطقة $\zeta$ الكلاسيكية يستعمل المبدأ الموجب نفسه تقريباً، لكن مع معالجة مستقلة للقطب عند $s = 1$. لذلك تبقى النتيجة الحالية CITED، ولا ندعي أن الفصل الحادي عشر يبرهنها حالةً خاصة.

هذه المنطقة أقوى من مجرد عدم الانعدام على الخط $\sigma = 1$، لكنها لا تقارب دعوى فرضية ريمان؛ فهي تستبعد شريطًا رفيعًا قرب الحافة اليمنى فقط. وتوجد مناطق حديثة أقوى من نمط فينوغرادوف--كوروبوف، لكن ثوابتها وصيغها الصريحة تتغير مع تقدم الحدود الفعالة؛ لذلك تُحفظ في سجل الأدلة ولا تُدمج في متن المبرهنة الكلاسيكية قبل مطابقة المصادر الأصلية.

مع صيغة بيرون وتقديرات تحويل المسار تقود المنطقة الكلاسيكية إلى صيغة فعالة لمبرهنة الأعداد الأولية. يعرض فصل توزيع الأعداد الأولية نتيجة هذا المسار وحدود ما أُثبت داخلياً، من دون ادعاء اشتقاق الحد الفعّال الكامل ما دامت تفاصيل بيرون وتحويل المسار مؤجلة.

## ٢٠٦. فرضية ريمان

تنص فرضية ريمان على أن كل صفر غير بديهي $\rho$ يحقق

$$\Re(\rho) = \frac{1}{2}.$$

هذه مسألة مفتوحة، ولا توجد في الموسوعة نتيجة توسمها بالمبرهنة أو تدعي برهانها. ستعرض الفصول اللاحقة الصيغ المكافئة والنتائج المشروطة بها مع وسم الفرض كاملًا في كل استعمال.

## ٢١٦. مثال: حساب $\zeta(0)$

من الصيغة العالمية لـ$\Lambda_\zeta$ يكون باقيها عند $s = 0$ مساويًا $-1$. ومن التوسع القياسي

$$\Gamma(s/2) = \frac{2}{s} + O(1), \qquad \pi^{-s/2} = 1 + O(s),$$

ومع هولومورفية $\zeta$ عند الصفر نحصل على

$$\Lambda_\zeta(s) = \frac{2\zeta(0)}{s} + O(1).$$

بمقارنة الباقيين:

$$2\zeta(0) = -1, \qquad \zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

## ٢٢٦. خريطة الاعتماد المنطقي

يتبع البرهان السلسلة الآتية:

١. منتج أويلر وسلسلة ديريشليه في $\Re(s) > 1$.
٢. صيغة الجزء الكسري للاستمرار إلى $\Re(s) > 0$.
٣. تحويل جاكوبي لثيتا من جمع بواسون.
٤. تمثيل ميلين للدالة المكتملة.
٥. شطر التكامل عند $1$ واستعمال $t \leftrightarrow 1/t$.
٦. الاستمرار إلى المستوى والمعادلة الوظيفية.
٧. بناء $\xi$ ثم استخراج تناظرات الأصفار.
٨. ضبط عامل غاما رأسيًا وفهم حد التحدب.

٩. استعمال مبدأ الحجة لاشتقاق صيغة عد الأصفار.

١٠. تحويل القيم على الخط الحرج إلى دالة هاردي الحقيقية.

١١. ضبط رتبة $\xi$ وتطبيق جداء هادامار القانوني.

١٢. مساواة المشتقتين اللوغاريتميتين: مجموع على الأصفار ومجموع على القوى الأولية.

١٣. استعمال بيرون وتحويل المسار لاستخراج الصيغة الصريحة.

١٤. تطبيق تقديرات قرب $\Re(s) = 1$ لبناء منطقة خالية من الأصفار.

فإذا حُذف تحويل ثيتا، بقي الاستمرار الأول صحيحًا، لكن لا نحصل من هذا المسار على الاستمرار إلى المستوى كله أو التناظر $s \leftrightarrow 1 - s$.

## ٢٣٦. أخطاء شائعة

١. اعتبار السلسلة $\sum n^{-s}$ تعريفًا صالحاً في الشريط الحرج.

٢. استعمال المعادلة الوظيفية قبل بناء الاستمرار الميرومورفي.

٣. نسيان قطبي $\Lambda_\zeta$ عند 0 و1.

٤. وصف $\Lambda_\zeta$ بأنها تامة؛ الدالة التامة هي $\xi$.

٥. استنتاج فرضية ريمان من مجرد تناظر الأصفار.

٦. قسمة المعادلة الوظيفية على عامل يمكن أن ينعدم دون فحص الموضع.

٧. الخلط بين عدم الانعدام في $\Re(s) > 1$ وخلو الخط $\Re(s) = 1$.

٨. تفسير حد الخطأ $O(\log T)$ في عد الأصفار كضبط محلي لكل فجوة.

٩. اعتبار تغيرات إشارة $Z$ شهادة كاملة لعدم وجود أصفار فائتة.

١٠. تقديم فحص عدد منته من الأصفار بوصفه دليلًا على فرضية ريمان.

١١. حذف عوامل $e^{s/\rho}$ من جداء هادامار من دون تحديد ترتيب متناظر للجداء.

١٢. التعامل مع مجموع الأصفار في الصيغة الصريحة كمجموع مطلق.

١٣. الخلط بين منطقة خالية قرب $\Re(s) = 1$ ووقوع جميع الأصفار على الخط $\Re(s) = 1/2$.

## ٠.٢٤٦ أسئلة تفسير البرهان

١. لماذا يمتد تكامل الجزء الكسري إلى $\Re(s) > 0$ ولا يمتد مباشرة إلى $\Re(s) > -1$؟

٢. أين استُعمل التناقص الأسي لـ$\Theta(t) - 1$؟

٣. لماذا يظهر القطبان 0 و1 للدالة المكتملة، مع أن زيتا نفسها لا تملك قطبًا عند 0؟

٤. ما العامل الذي يولد الأصفار البديهية في الصيغة الكلاسيكية؟

٥. لماذا يعطي التناظر رباعيات من الأصفار عادة، وقد تنهار الرباعية إلى زوج أو نقطة على خطوط التناظر؟

٦. ما الدور المختلف لكل من الحد الرئيسي و$S(T)$ في صيغة العد؟

٧. لماذا تكون $Z(t)$ حقيقية، ولماذا لا يكفي مسح إشاراتها لشهادة اكتمال الأصفار؟

٨. ما دور عامل الجنس الأول $E_1$ في جداء هادامار؟

٩. أي حد في الصيغة الصريحة يأتي من القطب، وأيها يأتي من الأصفار البديهية؟

١٠. لماذا لا تعني المنطقة الخالية الكلاسيكية صحة فرضية ريمان؟

## ٠.٢٥٦ تمارين

### ٠.٢٥٦.١ المستوى الأول

١. تحقق مباشرة من التقارب المحلي المنتظم للتكامل

$$\int_1^\infty \{x\} x^{-s-1}\, dx$$

في $\Re(s) > 0$.

٢. احسب باقي $s/(s-1)$ عند $s = 1$.

٣. أثبت أن $\Theta(t) - 1 = O(e^{-\pi t})$ عندما $t \geq 1$.

٤. تحقق من ثبات الصيغة التكاملية لـ$\Lambda_\zeta$ تحت $s \mapsto 1 - s$.

### ٠.٢٠٢٥٦ المستوى الثاني

١. أكمل تفاصيل استخراج الصيغة الكلاسيكية من معادلة الدالة المكتملة باستعمال هويتي غاما.

٢. أثبت أن $\xi(0) = \xi(1) = 1/2$.

٣. استخرج $\zeta(-2m) = 0$ وحدد رتبة الصفر.

٤. بيّن أن الصفر غير البديهي على الخط الحرج يقترن بمرافقه العقدي.

٥. استخرج صيغة حجم $\Gamma((\sigma + it)/2)$ من ستيرلينغ.

٦. اشتق التباعد المتوسط من الحد الرئيسي لصيغة ريمان--فون مانغولت.

### ٠.٣٠٢٥٦ المستوى الثالث

١. اشتق تحويل ثيتا من صيغة جمع بواسون للغاوسي، مع ذكر اصطلاح تحويل فورييه المستعمل.

٢. استعمل صيغة الجزء الكسري لاستخراج تقدير لـ$\zeta(s)$ على مجموعة مدمجة داخل $\Re(s) > 0$ بعيدة عن $1$.

٣. قارن بين مسار الجزء الكسري ومسار ثيتا: ما مجال كل منهما، وما المعلومة الجديدة التي يعطيها الثاني؟

٤. اشرح لماذا لا تكفي المعادلة الوظيفية والمنتج الأويلري وحدهما لإثبات فرضية ريمان.

٥. بيّن أن تغير إشارة $Z$ يضمن صفراً ذا رتبة فردية، وفسّر لماذا لا يضمن العكس.

٦. صمم شهادة تجمع مسح $Z$ مع قيمة مستقلة لـ$N(T)$.

٧. اشتق هوية $\xi'/\xi$ الثانية مباشرة من تعريف $\xi$.

٨. تحقق من أن مجموع مساهمات الأصفار البديهية يساوي

$$-\frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}).$$

٩. اشرح بدقة أين تحتاج الصيغة الصريحة إلى قطع متناظر لمجموع الأصفار.

## ٠.٢٦٦ مراجع الفصل ومسار التوسع

للبناء الكلاسيكي بواسطة ثيتا وميلين انظر [Apo76; Tit86]. وللسياق التاريخي راجع [Rie59; Nar00]، ولانتقال هذه البنية إلى دوال $L$ الأوسع انظر [GM03; IK04].

تعتمد تفاصيل ستيرلينغ وحد التحدب وعد الأصفار وجداء هادامار على [Tit86; IK04]. وتعتمد الصيغة الصريحة ومسارها إلى مبرهنة الأعداد الأولية كذلك على [Dav00]. والمرحلة التالية هي إتمام برهان بيرون وتحويل المسار، ثم الانتقال إلى مبرهنة الأعداد الأولية ودوال $L$ لديريشليه، مع إبقاء كل نتيجة مقتبسة أو مؤجلة موسومة بحالتها.

## ٠.٢٧٦ خلاصة الفصل

بدأت زيتا كسلسلة ومنتج أويلري في نصف مستوى آمن، ثم استمرت أولًا بصيغة الجزء الكسري، وأخيرًا إلى المستوى كله بواسطة تحويل ثيتا وتمثيل ميلين. المعادلة الوظيفية لا تضيف تناظرًا شكليًا فقط؛ فهي التي تكشف الأصفار البديهية وتربط نصفي المستوى حول الخط الحرج. وتضبط ستيرلينغ العامل الأرخميدي، بينما تقيس صيغة ريمان--فون مانغولت كثافة الأصفار وتحوّلها دالة هاردي إلى مسألة حقيقية على الخط الحرج. ويحوّل جداء هادامار الأصفار إلى بنية ضرب، ثم تكشف الصيغة الصريحة الجسر الكمي بينها وبين القوى الأولية. أما المنطقة الخالية الكلاسيكية فتضبط الحافة اليمنى فقط، وتبقى فرضية ريمان دعوى مفتوحة عن موقع جميع الأصفار غير البديهية، وستظل موسومة كذلك في كل مراحل الموسوعة.

# باب ٧

# دوال ديريشليه $L$: الشخصيات والبنية التحليلية

## ٠١٧ نطاق الفصل

اجتازت النواة البرهانية مراجعتين منطقيتين داخليتين، ومراجعة مرجعية، ومراجعة خارجية مستقلة اعتمدها مالك المشروع، ثم أغلقت ملاحظاتها التحريرية ونجحت فحوص الجودة وبناء الكتاب. أما استعمال هذه الأدوات لإثبات مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية فسيكون موضوع الفصل التالي.

### ٠١٠١٧ المتطلبات السابقة

يفترض الفصل:

- أساسيات الزمر الأبيلية المنتهية ومبرهنة بنيتها.
- الدوال الضربية والضربية تمامًا من الفصل الرابع.
- سلاسل ديريشليه وتمثيل أبيل والمنتج الأويلري من الفصل الخامس.
- استمرار دالة زيتا وقطبها البسيط عند $s = 1$ من الفصل السادس.

## ٠٢٠١٧ نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. تعريف شخصية ديريشليه بوصفها شخصية على زمرة الوحدات ثم تمديدها بالصفر.

٢. إثبات الدورية والضربية التامة وعلاقتي التعامد.

٣. بناء $L(s, \chi)$ ومنتجها الأويلري وعدم انعدامها في $\Re(s) > 1$.

٤. إثبات الاستمرار الأول للشخصية غير الرئيسية بواسطة تمثيل أبيل.

٥. التمييز بين الترديد والموصل والجد البدائي والعوامل المحلية المحذوفة.

٦. استعمال مجاميع غاوس وتحويل فورييه المنتهي لبناء تحويل ثيتا.

٧. ضبط عامل غاما وجذر العدد والمعادلة الوظيفية للدالة المكتملة.

٨. تحديد الأصفار البديهية وتناظرات بقية الأصفار.

٩. فهم برهاني عدم انعدام $L(1,\chi)$ في الحالتين الحقيقية وغير الحقيقية، وحدود اعتماد كل برهان.

## ٢٧. شخصيات زمرة منتهية

لتكن $G$ زمرة أبيلية منتهية. نسمي كل تشاكل زمر

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

شخصية مركبة على $G$. ولأن $G$ منتهية، فإن صورة $\chi$ مؤلفة من جذور الوحدة، ومن ثم

$$|\chi(g)| = 1, \qquad \overline{\chi(g)} = \chi(g)^{-1} = \chi(g^{-1}).$$

وتشكل جميع الشخصيات زمرة تحت الضرب النقطي، تسمى الزمرة الثنائية $\widehat{G}$.

**مبرهنة ١٧.** (التعامد في زمرة أبيلية منتهية). إذا كانت $G$ زمرة أبيلية منتهية، فإن $|\widehat{G}| = |G|$، ولكل $x, y \in G$:

$$\sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(x)\overline{\chi(y)} = \begin{cases} |G|, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

ولكل $\chi, \psi \in \widehat{G}$:

$$\sum_{x\in G} \chi(x)\overline{\psi(x)} = \begin{cases} |G|, & \chi = \psi, \\ 0, & \chi \neq \psi. \end{cases}$$

برهان. بحسب مبرهنة بنية الزمر الأبيلية المنتهية توجد أعداد $m_1, \ldots, m_r$ بحيث

$$G \cong C_{m_1} \times \cdots \times C_{m_r}.$$

على الزمرة الدورية $C_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ تكون الشخصيات بالضبط

$$\chi_j(a) = e^{2\pi i j a/m}, \qquad 0 \le j < m.$$

ومن ثم عددها $m$. وبأخذ حاصل الضرب على العوامل الدورية نحصل على $|\widehat{G}| = m_1 \cdots m_r = |G|$، كما تفصل الشخصيات نقاط $G$.

نضع $z = xy^{-1}$. إذا كان $z = e$، فكل حد في المجموع الأول يساوي 1، فيكون المجموع $|G|$. وإذا كان $z \neq e$، فاختر شخصية $\eta$ تحقق $\eta(z) \neq 1$. عندئذ

$$\eta(z)\sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(z) = \sum_{\chi\in\widehat{G}} (\eta\chi)(z) = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(z),$$

لأن الضرب بـ$\eta$ يبدل عناصر $\widehat{G}$. لذلك المجموع صفر. وهذا يثبت العلاقة الأولى.

أما الثانية فنطبق الحجة نفسها على الشخصية $\theta = \chi\overline{\psi}$. إذا كانت رئيسية فكل حد يساوي 1، وإلا نختار $g \in G$ بحيث $\theta(g) \neq 1$، ثم نضرب المجموع في $\theta(g)$ ونغير المتغير $x \mapsto gx$. □

ملاحظة ٠.٢٧. الجزء البنيوي المستعمل هنا هو مبرهنة تصنيف الزمر الأبيلية المنتهية. أما علاقتا التعامد فقد اشتقتا داخل الفصل. انظر [Apo76; MV07] للمسار القياسي.

## ٠.٣٧ شخصيات ديريشليه

**تعريف ٠.٣٧.** ليكن $q \geq 1$. شخصية ديريشليه بترديد $q$ هي شخصية على زمرة الوحدات

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$$

تمدد إلى دالة على $\mathbb{Z}$ بوضع

$$\chi(n) = 0 \quad \text{إذا} \quad (n,q) > 1.$$

إذا كانت الشخصية على زمرة الوحدات هي الشخصية المحايدة، سميت الشخصية الرئيسية وكتبناها $\chi_0$.

من التعريف نحصل فورًا على:

- $\chi(n+q) = \chi(n)$ لكل $n \in \mathbb{Z}$.
- $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ لكل $m, n \in \mathbb{Z}$.
- $\chi(1) = 1$، و$|\chi(n)| \in \{0,1\}$.
- إذا كان $(n,q) = 1$، فإن $\overline{\chi(n)} = \chi(n)^{-1} = \chi(n^{-1})$، حيث يؤخذ المعكوس بترديد $q$.

عدد الشخصيات بترديد $q$ يساوي $|(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times| = \varphi(q)$.

**نتيجة ٠.٤٧.** (تعامد شخصيات ديريشليه). إذا كان $(ab,q) = 1$، فإن

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi(a)\overline{\chi(b)} = \begin{cases} \varphi(q), & a \equiv b \pmod q, \\ 0, & a \not\equiv b \pmod q. \end{cases}$$

وكذلك، لشخصيتين $\chi, \psi \bmod q$:

$$\sum_{a \bmod q} \chi(a)\overline{\psi(a)} = \begin{cases} \varphi(q), & \chi = \psi, \\ 0, & \chi \neq \psi. \end{cases}$$

برهان. نطبق المبرهنة السابقة على $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. الحدود الموافقة للفئات غير القابلة للعكس تساوي صفرًا تلقائيًا في المجموع الثاني. □

ملاحظة ٠.٥٧. (مرشح الفئة الحسابية). إذا كان $(a,q) = 1$، فإن علاقة التعامد تعطي الهوية الدقيقة

$$\mathbf{1}_{n \equiv a\,(q)} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\chi(n)$$

لكل $n$ أولي مع $q$. هذه هي الآلية التي تحول مسألة عن فئة حسابية إلى عائلة من المجاميع الملتوية بالشخصيات.

## ٠.٤٧ انعدام دورة كاملة وحد المجاميع الجزئية

**قضية ٠.٦٧** (المجاميع الجزئية للشخصية غير الرئيسية)**.** إذا كانت $\chi \bmod q$ غير رئيسية، فإن

$$\sum_{a=1}^{q} \chi(a) = 0.$$

وبالتالي، إذا

$$S_\chi(x) = \sum_{n \le x} \chi(n),$$

فإن

$$|S_\chi(x)| \le q \qquad (x \ge 1).$$

برهان. العلاقة الأولى هي تعامد $\chi$ مع الشخصية الرئيسية. اكتب $\lfloor x \rfloor = kq + r$ حيث $0 \le r < q$. تنعدم مساهمة كل كتلة كاملة طولها $q$، فيبقى

$$S_\chi(x) = \sum_{a=1}^{r} \chi(a).$$

ولأن $|\chi(a)| \le 1$، نحصل على $|S_\chi(x)| \le r < q$، ومن ثم الحد المعلن. □

ملاحظة ٠.٧٧. الحد $q$ كاف للاستمرار التحليلي الأول، لكنه بعيد عن الحدود العميقة في نظرية مجاميع الشخصيات، مثل متراجحتي بوليا--فينوغرادوف وبورغس. تؤجل هذه التحسينات إلى فصل المجاميع الأسية والشخصيات.

## ٠.٥٧ تعريف دالة $L$ والمنتج الأويلري

**تعريف ٠.٨٧.** إذا كانت $\chi \bmod q$، نعرف عندما $\Re(s) > 1$:

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

بما أن $|\chi(n)| \le 1$، تتقارب السلسلة مطلقًا ومحليًا بانتظام في كل نصف مستوى $\Re(s) \ge 1 + \delta$، ولذلك تعرف دالة هولومورفية في $\Re(s) > 1$.

**مبرهنة ٠.٩٧** (المنتج الأويلري وعدم الانعدام في مجال التقارب المطلق)**.** لكل شخصية ديريشليه $\chi \bmod q$، وعندما $\Re(s) > 1$:

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

وفي هذا النصف من المستوى لا تنعدم $L(s,\chi)$، كما أن

$$\frac{1}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}.$$

برهان. الدالة $\chi$ ضربية تمامًا، فتطبق مبرهنة المنتج الأويلري العامة من الفصل الخامس، ويعطي العامل المحلي

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{p^{ks}} = \left(1 - \chi(p)p^{-s}\right)^{-1}.$$

أما هوية المقلوب فتنتج من

$$(\chi) * (\mu\chi) = \varepsilon,$$

لأن

$$\sum_{d|n} \chi(d)\mu(n/d)\chi(n/d) = \chi(n) \sum_{d|n} \mu(n/d) = \varepsilon(n).$$

وتتقارب سلسلة $\mu(n)\chi(n)n^{-s}$ مطلقًا عندما $\Re(s) > 1$. بضرب السلسلتين نحصل على 1، ومن ثم لا يمكن أن تنعدم $L(s,\chi)$ هناك. □

## ٦٧. الاستمرار الأول للشخصية غير الرئيسية

**مبرهنة ١٠٧.** (الاستمرار إلى $\Re(s) > 0$). إذا كانت $\chi \bmod q$ غير رئيسية، فإن $L(s,\chi)$ تمتد إلى دالة هولومورفية في نصف المستوى $\Re(s) > 0$، وفيه

$$L(s,\chi) = s\int_1^{\infty} S_\chi(x)x^{-s-1}\,dx, \qquad S_\chi(x) = \sum_{n\le x} \chi(n).$$

برهان. عندما $\Re(s) > 1$، يعطي تمثيل أبيل من الفصل الخامس

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} S_\chi(x)x^{-s-1}\,dx,$$

إذ يختفي الحد الطرفي بسبب التقارب المطلق. ومن القضية ٦٧. لدينا $|S_\chi(x)| \le q$. لذلك، على مجموعة مدمجة داخل $\Re(s) > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$$|sS_\chi(x)x^{-s-1}| \le Cq\,x^{-1-\delta}.$$

يتقارب الطرف الأيمن مطلقًا ومحليًا بانتظام، ويعرف دالة هولومورفية في $\Re(s) > 0$. وهي توافق السلسلة في $\Re(s) > 1$، فتكون استمرارها التحليلي الوحيد. □

**نتيجة ١١٧.** (وجود القيمة عند الواحد). إذا كانت $\chi$ غير رئيسية، فإن

$$L(1,\chi) = \int_1^{\infty} \frac{S_\chi(x)}{x^2}\,dx$$

قيمة منتهية.

برهان. نعوض $s = 1$ في التمثيل الهولومورفي السابق. ويتقارب التكامل مطلقًا لأن $|S_\chi(x)| \le q$ ولأن $\int_1^{\infty} x^{-2}\,dx < \infty$. □

ملاحظة ١٢٧. (تحذير منطقي). النتيجة السابقة تثبت الوجود والانتهاء فقط، ولا يكفي ذلك وحده لإثبات $L(1,\chi) \neq 0$. وقد أُثبت عدم الانعدام لاحقًا في المبرهنة ٣٣٧. بحجتين منفصلتين للحالتين الحقيقية وغير الحقيقية، من دون استعمال مبرهنة ديريشليه نفسها.

## ٠٧٧. الشخصية الرئيسية وصلتها بزيتا

**قضية ١٣٧.** (حذف العوامل المحلية). لتكن $\chi_0$ الشخصية الرئيسية بترديد $q$. عندئذ، في $\Re(s) > 1$:

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s)\prod_{p\mid q}(1-p^{-s}).$$

ويعرّف الطرف الأيمن استمرارًا ميرومورفيًا لـ$L(s,\chi_0)$ إلى المستوى كله. وللدالة قطب بسيط عند $s=1$ وباقيه

$$\operatorname*{Res}_{s=1} L(s,\chi_0) = \prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(q)}{q}.$$

برهان. في المنتج الأويلري تكون $\chi_0(p)=0$ إذا كان $p \mid q$، وتساوي 1 إذا كان $p \nmid q$. لذلك

$$L(s,\chi_0) = \prod_{p\nmid q}(1-p^{-s})^{-1} = \zeta(s)\prod_{p\mid q}(1-p^{-s}).$$

الجداء الأخير منته ودالة تامة، فيعطي الطرف الأيمن استمرارًا ميرومورفيًا يتفق مع السلسلة في $\Re(s) > 1$. وبما أن باقي زيتا عند 1 يساوي 1، يكون باقي الدالة هو قيمة الجداء المنتهي عند 1، وهي $\varphi(q)/q$. □

## ٠٨٧. أمثلة أولى

**مثال ١٤٧.** (الشخصية غير الرئيسية بترديد 4). نعرف

$$\chi_4(n) = \begin{cases} 0, & 2 \mid n, \\ 1, & n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

فتكون

$$L(s,\chi_4) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots,$$

وهي دالة بيتا لديريشليه. مجموع كل دورة كاملة يساوي صفرًا، ولذلك تمتد هولومورفيًا إلى $\Re(s) > 0$ بالحجة السابقة.

**مثال ١٥٧.** (الشخصية الرئيسية بترديد 4). لدينا

$$L(s,\chi_0) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ 2\nmid n}} n^{-s} = (1-2^{-s})\zeta(s),$$

وباقيها عند $s=1$ يساوي $\varphi(4)/4 = 1/2$.

## ٩٧. أخطاء شائعة

١. **نسيان التمديد بالصفر:** شخصية ديريشليه ليست دالة بقيم على دائرة الوحدة لكل عدد صحيح؛ إنها تساوي صفرًا عندما لا يكون العدد أوليًا مع الترديد.

٢. **الخلط بين الترديد والموصل:** قد تمثل الشخصية نفسها بترديد غير أصغر، ويضبط قسم الاستحثاث والموصل الجد البدائي والعوامل المحلية المحذوفة.

٣. **تجاوز مجال السلسلة:** السلسلة والمنتج الأويلري معرفان مباشرة في $\Re(s) > 1$، أما القيم خارج هذا النصف فتأتي من الاستمرار.

٤. **استنتاج عدم الانعدام عند 1 من الاستمرار:** الهولومورفية لا تمنع الدالة من أن تساوي صفرًا؛ لذلك احتاج الفصل إلى برهانين مستقلين.

٥. **استعمال التعامد بلا شرط الوحدات:** صيغة مرشح الفئة تتطلب أن تكون الفئة أولية مع $q$، أو أن تراعى القيم الصفرية بدقة.

## ١٠٧. تمارين

١. اكتب جميع شخصيات ديريشليه بترديد 3 و4، وتحقق مباشرة من علاقتي التعامد.

٢. أثبت أن مرافق شخصية ديريشليه هو أيضًا شخصية، وأن $\chi\overline{\chi} = \chi_0$ على الأعداد الأولية مع $q$.

٣. استعمل التعامد لإثبات صيغة مرشح الفئة الحسابية.

٤. إذا كان $\lfloor x \rfloor = kq + r$ و$0 \le r < q$، فأثبت الحد الأدق

$$|S_\chi(x)| \le \min(r, q - r)$$

باستعمال مجموع أول $r$ حدًا، ثم باستعمال سالب مجموع الحدود المتبقية من الدورة نفسها.

٥. اشتق

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} \qquad (\Re(s) > 1).$$

٦. احسب باقي $L(s,\chi_0)$ عند 1 للترديدات $q = 6, 8, 10$.

٧. لتكن $\chi$ الشخصية غير الرئيسية بترديد 3. بيّن أنها دورية أيضًا بترديد 6، لكنها ليست شخصية ديريشليه بترديد 6، لأن قيمتها عند 2 غير صفرية. استنتج أن الدورية وحدها لا تكفي لتغيير الترديد، وأن مفهوم الاستحثاث يحتاج ضبط عوامل الصفر المحلية.

## ٠.١١٧ امتداد الفصل والمسار التالي

تتابع ملفات الدفعات اللاحقة في الفصل نفسه بناء:

- الاستحثاث والموصل وفرادة الشخصية البدائية.
- مجاميع غاوس وتحويل فورييه المنتهي للشخصيات.
- الدالة المكتملة وعامل الزوجية والمعادلة الوظيفية.
- الأصفار البديهية وتناظر الأصفار.
- عدم الانعدام عند $s = 1$ في الحالتين غير الحقيقية والحقيقية.

وبعد إغلاق هذه الأدوات، ينتقل المسار في الفصل التالي إلى مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية، مع استعمال التعامد والمشتقة اللوغاريتمية وعدم الانعدام من دون إعادة افتراض أي منها.

## ٠.١٢٧ الشخصيات المستحثة والموصل

إذا كان $d \mid q$، فإن الاختزال بترديد $d$ يعطي تشاكلًا شاملًا

$$\pi_{q,d} : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times.$$

ولإثبات الشمول، خذ فئة $u \bmod d$ أولية مع $d$. لكل أولي $p \mid q$ ولا يقسم $d$، افرض الشرط

$$n \equiv 1 \pmod{p^{v_p(q)}},$$

مع الشرط $n \equiv u \pmod{d}$. وهذه التوافقات متّسقة لأن $d$ أولي مع حاصل ضرب القوى الأولية المقابلة للأوليات التي لا تقسمه، فتنتج مبرهنة الباقي الصيني عددًا $n$. إذا كان $p \mid d$، فإن $n \equiv u \pmod{d}$ يضمن $p \nmid n$، وإذا كان $p \nmid d$ فقد فرضنا $n \equiv 1 \pmod{p}$. لذلك $(n, q) = 1$، وصورة فئته بترديد $q$ هي الفئة $u \bmod d$.

**تعريف ٠.١٦٧** نسمي $d \mid q$ ترديدًا مستحثًا لشخصية $\chi \bmod q$ إذا كانت $\chi$ تساوي 1 على نواة $\pi_{q,d}$. عندئذ تنزل $\chi$ نزولًا وحيدًا إلى شخصية على $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$.

وتسمى الشخصية $\chi \bmod q$ بدائية إذا لم يكن لها ترديد مستحث أصغر من $q$. أما أصغر ترديد مستحث فيسمى موصلها.

إذا نزلت $\chi$ إلى شخصية $\chi^* \bmod d$، فإن المساواة بين الدالتين الممتدتين على الأعداد الصحيحة ليست حرفية عند الأعداد غير الأولية مع $q$. والصيغة الصحيحة هي

$$\chi(n) = \chi^*(n)\chi_{0,q}(n),$$

حيث $\chi_{0,q}$ الشخصية الرئيسية بترديد $q$.

**مبرهنة ١٧٧.** (الجد البدائي والموصل). لكل شخصية ديريشليه $\chi \bmod q$ يوجد قاسم وحيد $f \mid q$، وشخصية بدائية وحيدة $\chi^* \bmod f$، بحيث

$$\chi(n) = \chi^*(n)\chi_{0,q}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

والعدد $f$ هو موصل $\chi$.

برهان. نكتب

$$q = \prod_{p|q} p^{\alpha_p}.$$

وبمبرهنة الباقي الصيني تنحل زمرة الوحدات إلى

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \cong \prod_{p|q} (\mathbb{Z}/p^{\alpha_p}\mathbb{Z})^\times,$$

وتنحل الشخصية تبعًا لذلك إلى حاصل ضرب شخصيات محلية $\chi_p$.

لكل $p \mid q$، اختر أصغر عدد $0 \le \beta_p \le \alpha_p$ تكون عنده $\chi_p$ تافهة على نواة الاختزال

$$(\mathbb{Z}/p^{\alpha_p}\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^{\beta_p}\mathbb{Z})^\times.$$

ونفسر زمرة الوحدات عند $p^0 = 1$ بأنها الزمرة التافهة. وجود $\beta_p$ واضح عند $\beta_p = \alpha_p$، وصغراه معرفة لأن المجموعة منتهية. تنزل $\chi_p$ نزولًا وحيدًا إلى شخصية $\chi_p^* \bmod p^{\beta_p}$.

ضع

$$f = \prod_{p|q} p^{\beta_p}, \qquad \chi^* = \prod_{p|q} \chi_p^*.$$

إذن $f \mid q$، وتستحث $\chi^*$ الشخصية $\chi$. وإذا كانت $\chi^*$ مستحثة من قاسم صحيح $d < f$، فإن أس أحد الأوليات في $d$ أصغر من $\beta_p$، وهذا يناقض صغر $\beta_p$. ومن ثم $\chi^*$ بدائية.

أما التفرد، فلو استحثت شخصية بدائية $\psi \bmod g$ الشخصية نفسها، فإن كل أس أولي في $g$ يعطي مستوى تنزل إليه الشخصية المحلية، فيكون $\beta_p \le v_p(g)$. ولو كانت المتباينة صارمة عند أولي ما لكانت المركبة المحلية لـ$\psi$ مستحثة من قوة أصغر، فتفقد $\psi$ بدائيتها. إذن $v_p(g) = \beta_p$ لكل $p$، ومن ثم $g = f$، ويعطي شمول خرائط الاختزال تفرد الشخصية النازلة نفسها. □

**قضية ١٨٧.** (العوامل المحلية المحذوفة). إذا كانت $\chi \bmod q$ مستحثة من الشخصية البدائية $\chi^* \bmod f$، فإن

$$L(s,\chi) = L(s,\chi^*) \prod_{\substack{p|q \\ p\nmid f}} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right) \qquad (\Re(s) > 1).$$

وتستمر الهوية إلى كل مجال تستمر إليه الدالتان.

برهان. نقارن العوامل الأويلرية. إذا كان $p \nmid q$، فلدينا $\chi(p) = \chi^*(p)$. وإذا كان $p \mid q$، فالعامل المحلي لـ$L(s,\chi)$ يساوي 1. أما في $L(s,\chi^*)$، فالعامل يساوي أصلًا 1 عند $p \mid f$، ويحتاج إلى الحذف فقط عندما $p \mid q$ و$p \nmid f$. وهذا يعطي الصيغة في مجال التقارب المطلق، ثم ينقلها مبدأ الهوية إلى مجالات الاستمرار. □

**مثال ١٩٧.** (شخصية مستحثة بترديد 6). لتكن $\chi_3$ الشخصية غير الرئيسية بترديد 3. الشخصية

$$\chi(n) = \chi_3(n)\chi_{0,6}(n)$$

شخصية بترديد 6، وموصلها 3. وبما أن $\chi_3(2) = -1$، فإن

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_3)(1+2^{-s}).$$

هذا المثال يبين أن الاستحثاث لا يعني أن الدالتين الممتدتين بالصفر متساويتان عند جميع الأعداد الصحيحة.

## ٠.١٣٧ مجاميع غاوس وتحويل فورييه المنتهي

نكتب

$$e_q(x) = e^{2\pi i x/q}.$$

ولشخصية $\chi \bmod q$ نعرف مجموع غاوس الملتوي

$$\tau(\chi,n) = \sum_{a \bmod q} \chi(a)e_q(an), \qquad \tau(\chi) = \tau(\chi,1).$$

**مبرهنة ٢٠٧.** (فصل مجموع غاوس للشخصية البدائية). إذا كانت $\chi \bmod q$ بدائية، فإن لكل $n \in \mathbb{Z}$:

$$\tau(\chi,n) = \overline{\chi(n)}\tau(\chi).$$

وفوق ذلك

$$|\tau(\chi)| = \sqrt{q}, \qquad \tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = \chi(-1)q.$$

برهان. إذا كان $(n,q)=1$، فإن التغيير $b \equiv an \pmod q$ يعطي

$$\tau(\chi,n) = \overline{\chi(n)} \sum_{b \bmod q} \chi(b)e_q(b) = \overline{\chi(n)}\tau(\chi).$$

ولنفرض أن $(n,q) > 1$، واختر أوليًا $p \mid (n,q)$. بما أن $\chi$ بدائية، فالقاسم $q/p$ ليس ترديدًا مستحثًا؛ لذلك يوجد عدد $c$ يحقق

$$c \equiv 1 \pmod{q/p}, \qquad (c,q)=1, \qquad \chi(c) \neq 1.$$

ولأن $p \mid n$، فإن $q \mid (c-1)n$، ومن ثم $e_q(acn) = e_q(an)$. وبما أن الضرب بـ$c$ يبدل الفئات بترديد $q$، نحصل على

$$\tau(\chi,n) = \chi(c)\tau(\chi,n),$$

فيكون المجموع صفرًا. وهذا يساوي الطرف الأيمن لأن $\chi(n)=0$.

نحسب الآن بطريقة بارسيفال المنتهية:

$$\begin{aligned}\sum_{n \bmod q} |\tau(\chi,n)|^2 &= \sum_{a,b \bmod q} \chi(a)\overline{\chi(b)} \sum_{n \bmod q} e_q(n(a-b)) \\ &= q \sum_{a \bmod q} |\chi(a)|^2 = q\varphi(q).\end{aligned}$$

ومن صيغة الفصل يساوي الطرف الأيسر $\varphi(q)|\tau(\chi)|^2$، فينتج $|\tau(\chi)|^2 = q$.
وأخيرًا

$$\overline{\tau(\chi)} = \sum_{a \bmod q} \overline{\chi(a)} e_q(-a) = \chi(-1)\tau(\overline{\chi}),$$

لأن $\chi(-1) = \pm 1$. لذلك

$$\tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = \chi(-1)|\tau(\chi)|^2 = \chi(-1)q.$$

□

**نتيجة ٠.٢١٧** (تحويل فورييه المنتهي للشخصية)**.** إذا كانت $\chi \bmod q$ بدائية، فإن

$$\chi(n) = \frac{\tau(\chi)}{q} \sum_{m \bmod q} \overline{\chi(m)} e_q(-mn) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

برهان. المجموع في الطرف الأيمن هو $\tau(\overline{\chi}, -n) = \chi(-n)\tau(\overline{\chi})$. ومن ثم يساوي الطرف كله

$$\frac{\tau(\chi)\tau(\overline{\chi})}{q}\chi(-1)\chi(n) = \chi(n),$$

باستعمال $\tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = \chi(-1)q$. □

## ٠.١٤٧ صيغة بواسون وتحويل ثيتا الملتوي

نعتمد اتفاق تحويل فورييه

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y}\, dx.$$

**مبرهنة ٠.٢٢٧** (صيغة بواسون على فئة حسابية)**.** إذا كانت $f$ دالة من فضاء شوارتز، و$q \geq 1$، فإن

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(r + kq) = \frac{1}{q} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{m}{q}\right) e_q(mr).$$

لتكن الآن $\chi \bmod q$ بدائية، مع $q > 1$، ونضع

$$a = a_\chi = \begin{cases} 0, & \chi(-1) = 1, \\ 1, & \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

ونعرف، لكل $t > 0$،

$$\theta_\chi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^a \chi(n) \exp\left(-\frac{\pi n^2 t}{q}\right).$$

لا يوجد حد ثابت عند $n = 0$، لأن $q > 1$ و$\chi(0) = 0$.

**مبرهنة ٠.٢٣٧** (تحويل ثيتا الملتوي)**.** ضع

$$\varepsilon_\chi = \frac{\tau(\chi)}{i^a\sqrt{q}}.$$

عندئذ $|\varepsilon_\chi| = 1$، ولكل $t > 0$:

$$\theta_\chi(t) = \varepsilon_\chi t^{-a-1/2}\theta_{\overline{\chi}}(1/t).$$

برهان. نطبق صيغة بواسون على

$$f_{a,t}(x) = x^a e^{-\pi t x^2/q}.$$

وحساب التحويل الغاوسي يعطي

$$\widehat{f}_{a,t}\left(\frac{m}{q}\right) = (-i)^a q^{1/2} t^{-a-1/2} m^a \exp\left(-\frac{\pi m^2}{qt}\right).$$

نفصل مجموع $\theta_\chi(t)$ إلى الفئات $r \bmod q$، ثم نستعمل بواسون:

$$\begin{aligned}\theta_\chi(t) &= \sum_{r \bmod q} \chi(r) \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{a,t}(r+kq)\\ &= \frac{1}{q}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_{a,t}\left(\frac{m}{q}\right) \sum_{r \bmod q} \chi(r) e_q(mr)\\ &= \frac{(-i)^a\tau(\chi)}{\sqrt{q}} t^{-a-1/2} \sum_{m\in\mathbb{Z}} m^a \overline{\chi(m)} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{qt}\right).\end{aligned}$$

وبما أن $(-i)^a = i^{-a}$ عندما $a \in \{0,1\}$، نحصل على الصيغة المعلنة. أما $|\varepsilon_\chi| = 1$ فتنتج من $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$. □

## ٠.١٥٧ الدالة المكتملة والمعادلة الوظيفية

للشخصية البدائية $\chi \bmod q$، حيث $q > 1$، نعرف أولًا في $\Re(s) > 1$:

$$\Lambda(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{(s+a)/2} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s,\chi).$$

**مبرهنة ٠.٢٤٧** (الاستمرار العالمي والمعادلة الوظيفية)**.** تمتد $\Lambda(s,\chi)$ إلى دالة تامة على $\mathbb{C}$، وتحقق

$$\Lambda(s,\chi) = \varepsilon_\chi \Lambda(1-s,\overline{\chi}), \qquad |\varepsilon_\chi| = 1.$$

وبالتالي تمتد $L(s,\chi)$ نفسها إلى دالة تامة.

برهان. إذا كانت $\Re(s) > 1$، فإن جمع الحدين $n$ و$-n$ في $\theta_\chi$ يعطي

$$\theta_\chi(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} n^a \chi(n) e^{-\pi n^2 t/q}.$$

وبالتكامل حدًا حدًا نحصل على تمثيل ميلين

$$\Lambda(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \theta_\chi(t) t^{(s+a)/2}\,\frac{dt}{t}.$$

نقسم التكامل عند $t = 1$. وفي الجزء $0 < t < 1$ نستعمل تحويل ثيتا ثم نغيّر المتغير $u = 1/t$، فنحصل على

$$\begin{aligned}\Lambda(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \theta_\chi(t) t^{(s+a)/2}\,\frac{dt}{t}\\ + \frac{\varepsilon_\chi}{2}\int_1^\infty \theta_{\overline{\chi}}(u) u^{(1-s+a)/2}\,\frac{du}{u}.\end{aligned}$$

يتقارب التكاملان محليًا بانتظام لكل $s \in \mathbb{C}$، بسبب التناقص الأسي لدالتي ثيتا عند اللانهاية، ولذلك تمثل الصيغة دالة تامة.

وبتطبيق الصيغة نفسها على $\Lambda(1-s,\overline{\chi})$، ثم استعمال

$$\varepsilon_\chi \varepsilon_{\overline{\chi}} = \frac{\tau(\chi)\tau(\overline{\chi})}{i^{2a}q} = \frac{\chi(-1)q}{(-1)^a q} = 1,$$

نجد أن الحدين يتبادلان، ومن ثم

$$\Lambda(s,\chi) = \varepsilon_\chi \Lambda(1-s,\overline{\chi}).$$

وأخيرًا

$$L(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{-(s+a)/2} \frac{\Lambda(s,\chi)}{\Gamma((s+a)/2)}.$$

ولأن $1/\Gamma$ دالة تامة، يكون الطرف الأيمن تامًا. □

ملاحظة ٠.٢٥٧. الحالة البدائية ذات الموصل 1 هي دالة زيتا نفسها، وقد عولج قطبها ومعادلتها الوظيفية في الفصل السادس. لذلك اشترطنا هنا $q > 1$.

**نتيجة ٠.٢٦٧.** (الاستمرار العالمي للشخصيات غير الرئيسية). إذا كانت $\chi \bmod q$ غير رئيسية، فإن $L(s,\chi)$ دالة تامة. أما إذا كانت رئيسية فلها قطب بسيط وحيد عند $s = 1$.

برهان. إذا كانت $\chi$ غير رئيسية، فجدها البدائي $\chi^*$ غير رئيسي وموصله أكبر من 1. الدالة $L(s,\chi^*)$ تامة بالمبرهنة السابقة، وتضربها صيغة العوامل المحلية المحذوفة في جداء منته من دوال تامة. أما الحالة الرئيسية فقد أثبتت في القضية ٠.١٣٧. □

## ٠.١٦٧ الأصفار البديهية والتناظرات

**نتيجة ٠.٢٧٧.** (الأصفار البديهية والشريط الحرج). لتكن $\chi \bmod q$ بدائية و$q > 1$، وليكن $a \in \{0,1\}$ محددًا بالزوجية. عندئذ

$$L(-a-2n,\chi) = 0 \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

وجميع هذه الأصفار بسيطة: في الحالة الفردية $a = 1$ لكل $n \geq 0$، وفي الحالة الزوجية $a = 0$ لكل $n \geq 0$، بما في ذلك الصفر عند $s = 0$، لأن المبرهنة ٠.٣٣٧ تعطي $L(1, \overline{\chi}) \neq 0$.

وكل صفر آخر لـ$L(s, \chi)$ يقع في الشريط الحرج المغلق

$$0 \leq \Re(s) \leq 1.$$

برهان. لدالة غاما أقطاب بسيطة عندما $(s + a)/2 = 0, -1, -2, \ldots$. وبما أن $\Lambda(s, \chi)$ تامة، يجب أن تلغي $L(s, \chi)$ هذه الأقطاب، فتظهر الأصفار المعلنة.

إذا كان $1 - (-a - 2n) > 1$، فإن المعادلة الوظيفية تربط قيمة $\Lambda(-a - 2n, \chi)$ بقيمة عند نصف المستوى $\Re(s) > 1$، حيث لا تنعدم $L$. لذلك تكون قيمة الدالة المكتملة هناك غير صفرية، ويلزم أن يلغي $L$ قطب غاما البسيط بصفر بسيط بالضبط. أما في الحالة $a = 0, n = 0$، فيقابل الموضع $s = 1$، وقد أثبت عدم انعدام $L(1, \overline{\chi})$، فتنتج البساطة بالطريقة نفسها.

ولا توجد أصفار عندما $\Re(s) > 1$ بالمنتج الأويلري. وإذا كان $\Re(s) < 0$ ولم يكن $s$ أحد المواضع البديهية، فإن عامل غاما منته وغير صفري؛ وأي صفر هناك ينتقل بالمعادلة الوظيفية إلى صفر في $\Re(1 - s) > 1$، وهذا محال. □

**قضية ٠.٢٨٧.** (تناظرات الأصفار). لدينا

$$\overline{\Lambda(\overline{s}, \chi)} = \Lambda(s, \overline{\chi}).$$

فإذا كان $\rho$ صفراً للدالة المكتملة الخاصة بـ$\chi$، فإن

$$1 - \rho \quad \text{صفر لـ} \quad \Lambda(s, \overline{\chi}),$$

وكذلك $1 - \overline{\rho}$ صفر للدالة المكتملة الخاصة بـ$\chi$. وإذا كانت $\chi$ حقيقية، ظهرت الأصفار غير الحقيقية في الرباعيات

$$\rho,\ \overline{\rho},\ 1 - \rho,\ 1 - \overline{\rho}.$$

برهان. تثبت علاقة المرافق أولًا من سلسلة ديريشليه في $\Re(s) > 1$، ثم تمتد بمبدأ الهوية. وتنتج بقية العلاقات مباشرة من المعادلة الوظيفية ومن أخذ المرافق المركب. □

ملاحظة ٠.٢٩٧. (فرضية ريمان المعممة). تقول فرضية ريمان المعممة لدوال ديريشليه إن الأصفار غير البديهية تحقق $\Re(\rho) = 1/2$. لم يثبت هذا الادعاء، ولا تقدم البراهين السابقة دليلًا عليه؛ فهي تثبت فقط التناظر والحصر في الشريط الحرج.

## ٠.١٧٧ مثال: دالة بيتا لديريشليه

للشخصية $\chi_4$ البدائية الفردية بترديد 4 نجد

$$\tau(\chi_4) = 2i, \qquad \varepsilon_{\chi_4} = \frac{2i}{i\sqrt{4}} = 1.$$

ومن ثم تحقق الدالة المكتملة

$$\Lambda(s,\chi_4) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s,\chi_4)$$

المعادلة

$$\Lambda(s,\chi_4) = \Lambda(1-s,\chi_4).$$

وتقع أصفارها البديهية عند $-1,-3,-5,\ldots$، وكلها بسيطة.

## ٠.١٨٧ تمارين الدفعة الثانية

١. أثبت مباشرة شمول خريطة الاختزال $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ عندما $d \mid q$، ثم قارن برهانك بالبناء الصريح السابق عبر مبرهنة الباقي الصيني.

٢. احسب موصل كل شخصية بترديد 8، وحدد البدائية منها.

٣. تحقق من صيغة العوامل المحلية لشخصية مستحثة من الترديد 4 إلى الترديد 12.

٤. أثبت أن فصل مجموع غاوس لكل $n$ يستلزم بدائية الشخصية.

٥. اشتق تحويل فورييه المنتهي من تعامد الدوال الأسية بدل استعمال حاصل ضرب مجموعي غاوس.

٦. تحقق يدويًا من $\tau(\chi_4) = 2i$.

٧. أعد حساب التحويل الفورييري للدالة $xe^{-\pi t x^2/q}$ بتفاضل تحويل الغاوسي.

٨. استخرج من المعادلة المكتملة الصيغة غير المكتملة الواردة عادةً بدلالة $\Gamma(s)$ ومجموع غاوس.

٩. بيّن أن رتبة صفر $L(s,\chi)$ عند $s=0$ لشخصية بدائية زوجية تساوي $1+\operatorname{ord}_{s=1} L(s,\overline{\chi})$.

## ٠.١٩٧ ما بقي قبل اعتماد الفصل السابع

أما استعمال التعامد والمشتقة اللوغاريتمية وعدم الانعدام لإثبات مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية فسيكون موضوع الفصل التالي.

## ٠.٢٠٧ توافق جذر العدد والمشتقة اللوغاريتمية

نثبت أولًا الحقائق البنيوية التي تضبط جذر العدد والمشتقة اللوغاريتمية، ثم ننتقل إلى عدم الانعدام عند $s=1$.

**قضية ٣٠٧.** (توافق جذري العدد). لتكن $\chi \bmod q$ شخصية بدائية، و$q > 1$، ولتكن $a \in \{0,1\}$ محددة بالعلاقة $\chi(-1) = (-1)^a$. إذا

$$\varepsilon_\chi = \frac{\tau(\chi)}{i^a\sqrt{q}},$$

فإن

$$\varepsilon_\chi \varepsilon_{\overline{\chi}} = 1, \qquad \varepsilon_{\overline{\chi}} = \overline{\varepsilon_\chi}.$$

برهان. للشخصيتين $\chi$ و$\overline{\chi}$ الزوجية نفسها $a$. ومن مبرهنة مجموع غاوس:

$$\tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = \chi(-1)q = (-1)^a q.$$

لذلك

$$\varepsilon_\chi \varepsilon_{\overline{\chi}} = \frac{(-1)^a q}{i^{2a} q} = 1,$$

لأن $i^{2a} = (-1)^a$. وبما أن كلا الجذرين معياره 1، فإن $\varepsilon_{\overline{\chi}} = \varepsilon_\chi^{-1}$ يساوي $\overline{\varepsilon_\chi}$. □

**نتيجة ٣١٧.** (اتساق تطبيق المعادلة الوظيفية مرتين). تطبيق المعادلة الوظيفية مرتين يعيد الدالة المكتملة نفسها:

$$\Lambda(s,\chi) = \varepsilon_\chi \varepsilon_{\overline{\chi}} \Lambda(s,\chi) = \Lambda(s,\chi).$$

برهان. نطبق

$$\Lambda(s,\chi) = \varepsilon_\chi \Lambda(1-s,\overline{\chi})$$

ثم نطبق المعادلة الوظيفية على الطرف الثاني، ونستعمل القضية السابقة. □

**قضية ٣٢٧.** (المشتقة اللوغاريتمية). لكل شخصية ديريشليه $\chi \bmod q$، وعندما $\Re(s) > 1$:

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}.$$

وتتقارب السلسلة مطلقًا ومحليًا بانتظام في هذا النصف من المستوى.

برهان. من المنتج الأويلري وعدم الانعدام في $\Re(s) > 1$ نعرّف الفرع الهولومورفي لـ$\log L(s,\chi)$ بواسطة السلسلة الأويلرية المطلقة

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{k p^{ks}}.$$

هذا التحديد يثبت الفرع المقصود ولا يفترض اختيارًا عالميًا سابقًا للوغاريتم. وتتقارب السلسلة مطلقًا ومحليًا بانتظام، وبالتفاضل حدًا حدًا:

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^k \log p}{p^{ks}}.$$

وبما أن $\chi(p)^k = \chi(p^k)$، وأن $\Lambda(n) = \log p$ عندما $n = p^k$ وتساوي صفرًا خلاف ذلك، نحصل على الصيغة المعلنة. أما التقارب المطلق فينتج من

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)|\chi(n)|}{n^\sigma} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} < \infty \qquad (\sigma > 1).$$

□

## ٠.٢١٧ عدم الانعدام عند $s = 1$

**مبرهنة ٠.٣٣٧** (عدم الانعدام عند الواحد)**.** إذا كانت $\chi$ شخصية ديريشليه غير رئيسية، فإن

$$L(1, \chi) \neq 0.$$

برهان. إذا كانت $\chi$ غير حقيقية، فالمطلوب هو المبرهنة ٠.٣٧٧. وإذا كانت حقيقية، فهو المبرهنة ٠.٤١٧. وهاتان الحالتان تستنفدان جميع شخصيات ديريشليه غير الرئيسية. □

ملاحظة ٠.٣٤٧ (حدود الاعتماد)**.** لا تستنتج هذه النتيجة من الهولومورفية وحدها، ولا من المنتج الأويلري عند الحد $s = 1$. الحالة غير الحقيقية أثبتت بحاصل ضرب أويلري مساعد، والحالة الحقيقية أثبتت بسلسلة ذات معاملات غير سالبة ومبدأ لاندو الأولي. ولم تستعمل مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية في أي من البرهانين.

## ٠.٢٢٧ فرضية ريمان المعممة لدوال ديريشليه

بعد فصل الأصفار البديهية، تقع الأصفار الأخرى في الشريط $0 \leq \Re(s) \leq 1$. وتسمى هذه الأصفار غير بديهية.

**تعريف ٠.٣٥٧** (فرضية ريمان المعممة لدوال ديريشليه)**.** تنص فرضية ريمان المعممة في هذه العائلة على أن كل صفر غير بديهي لكل دالة ديريشليه $L(s, \chi)$ يحقق

$$\Re(\rho) = \frac{1}{2}.$$

هذه فرضية مفتوحة. المعادلة الوظيفية وتناظر الأصفار لا يثبتانها؛ إنهما يثبتان فقط تناظر مجموعة الأصفار حول الخط الحرج. ولا يقدم هذا الفصل أي ادعاء بتقدم نحو إثباتها.

## ٠.٢٣٧ عدم الانعدام عند الواحد للشخصيات غير الحقيقية

نغلق الآن الحالة الأولى من بوابة عدم الانعدام. تعتمد الحجة على متراجحة مثلثية أولية، لكنها تستعملها داخل لوغاريتم حاصل ضرب أويلري مضبوط؛ فلا يجوز اختزالها إلى عبارة غير مبرهنة من نوع «المنتج الأويلري موجب».

**لمّة ٠.٣٦٧** (متراجحة ديريشليه المثلثية)**.** لكل $\theta \in \mathbb{R}$:

$$3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos\theta)^2 \geq 0.$$

برهان. باستعمال $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ نحصل على

$$3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta = 2(1 + \cos\theta)^2.$$

□

**مبرهنة ٣٧٧.** (عدم الانعدام للشخصية غير الحقيقية). إذا كانت $\chi$ شخصية ديريشليه غير حقيقية وغير رئيسية، فإن

$$L(1,\chi) \neq 0.$$

برهان. لـ$\sigma > 1$ نعرف الكمية الحقيقية الموجبة

$$F(\sigma) = \zeta(\sigma)^3 |L(\sigma,\chi)|^4 |L(\sigma,\chi^2)|.$$

جميع العوامل غير منعدمة في $\sigma > 1$، ولذلك يمكن أخذ اللوغاريتمات الحقيقية للقيم المطلقة. ومن التوسعات الأويلرية المطلقة نحصل على

$$\log F(\sigma) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 + 4\Re(\chi(p)^k) + \Re(\chi(p)^{2k})}{kp^{k\sigma}}.$$

إذا كانت $\chi(p) = 0$، فالبسط يساوي 3. وإذا كانت $|\chi(p)| = 1$، فاكتب $\chi(p)^k = e^{i\theta}$. عندئذ يصبح البسط

$$3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) \geq 0$$

بحسب اللمّة السابقة. إذن

$$\log F(\sigma) \geq 0, \qquad F(\sigma) \geq 1 \quad (\sigma > 1).$$

نفترض خلاف المطلوب أن $L(1,\chi) = 0$، ولتكن رتبة الصفر $m \geq 1$. بما أن $L(s,\chi)$ هولومورفية قرب $s = 1$، توجد دالة هولومورفية $g$ تحقق $g(1) \neq 0$ و

$$L(s,\chi) = (s-1)^m g(s).$$

وعلى المحور الحقيقي، عندما $\sigma \to 1^+$، تبقى $|g(\sigma)|$ محصورة بين ثابتين موجبين، ولذلك

$$|L(\sigma,\chi)| \asymp (\sigma-1)^m.$$

ولأن $\chi$ غير حقيقية، فإن $\chi^2$ غير رئيسية: فلو كانت $\chi^2 = \chi_0$ على الوحدات لكانت كل قيمة لـ$\chi$ مساوية لـ$\pm 1$، فتكون $\chi$ حقيقية. ومن ثم $L(s,\chi^2)$ دالة تامة، وبخاصة محدودة قرب $s = 1$. كذلك

$$\zeta(\sigma) \asymp \frac{1}{\sigma - 1}.$$

وعليه

$$F(\sigma) \ll (\sigma-1)^{-3}(\sigma-1)^{4m} = (\sigma-1)^{4m-3} \longrightarrow 0$$

لأن $m \geq 1$. وهذا يناقض $F(\sigma) \geq 1$. إذن $L(1,\chi) \neq 0$. □

ملاحظة ٣٨٧. (موضع استعمال كون الشخصية غير حقيقية). الخطوة الحاسمة هي أن $\chi^2$ غير رئيسية، ومن ثم لا يضيف $L(s,\chi^2)$ قطبًا عند $s = 1$. إذا كانت $\chi$ حقيقية غير رئيسية، فإن $\chi^2 = \chi_0$ على الوحدات، فتتغير موازنة رتب الأقطاب والأصفار، ولا تنتج الحجة السابقة تناقضًا. لذلك تحتاج الحالة الحقيقية إلى حجة أخرى.

ملاحظة ٣٩٧. (بساطة الصفر عند الصفر في الحالة غير الحقيقية). إذا كانت $\chi$ غير حقيقية وزوجية، فإن الصفر البديهي عند $s = 0$ بسيط، لأن المعادلة الوظيفية تربطه بقيمة $L(1,\overline{\chi}) \neq 0$. وهذه حالة خاصة من النتيجة العامة ٢٧٧.، وليست نتيجة مستقلة تحتاج إلى معرّف إضافي.

## ٢٤٧. عدم الانعدام عند الواحد للشخصيات الحقيقية

نغلق الآن الحالة الحقيقية من دون استعمال مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية، ومن دون اللجوء إلى صيغة عدد الأصناف. الفكرة هي الجمع بين إيجابية معاملات سلسلة ديريشليه مساعدة ومبدأ بسيط من نوع لاندو.

**لمّة ٤٠٧.** (الاستمرار التام وسلسلة ذات معاملات غير سالبة). لتكن

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad a_n \geq 0,$$

متقاربة عندما $\Re(s) > \sigma_0$. إذا امتدت $F$ إلى دالة تامة، فإن السلسلة تتقارب لكل $s \in \mathbb{R}$.

برهان. ثبت عددًا حقيقيًا $c > \sigma_0$، ثم ثبت عددًا $\eta > 0$ بحيث $c - \eta > \sigma_0$. عندئذ، لكل $k \geq 0$، لدينا التقدير القياسي

$$(\log n)^k = O_{k,\eta}(n^\eta),$$

ومن ثم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\log n)^k}{n^c} \ll_{k,\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{c-\eta}} < \infty.$$

لذلك يجوز التفاضل حدًا حدًا في جوار $c$، فنحصل على

$$F^{(k)}(c) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\log n)^k}{n^c}.$$

ولأن $F$ تامة، فإن متسلسلة تايلور حول $c$ تتقارب عند كل عدد حقيقي $x < c$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k.$$

وبما أن $a_n \geq 0$ و$c - x > 0$، تكون جميع الحدود بعد التعويض غير سالبة. فتسمح مبرهنة تونيللي بتبديل الجمعين:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c-x)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\log n)^k}{n^c} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((c-x)\log n)^k}{k!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^c} n^{c-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}. \end{aligned}$$

وبما أن الطرف الأيسر منته، تتقارب السلسلة عند $x$. أما $x \geq c$ فالتقارب معلوم أصلًا أو يتبع بالمقارنة. □

**مبرهنة ٠.٤١٧** (عدم الانعدام للشخصيات الحقيقية)**.** إذا كانت $\chi$ شخصية ديريشليه حقيقية غير رئيسية، فإن

$$L(1,\chi) \neq 0.$$

برهان. لنفترض عكس المطلوب، أي $L(1,\chi) = 0$. بما أن $\chi$ غير رئيسية، فإن $L(s,\chi)$ دالة تامة. ودالة زيتا لها قطب بسيط وحيد عند $s = 1$. فإذا كانت رتبة صفر $L(s,\chi)$ عند 1 مساوية $m \geq 1$، فإن الجداء

$$F(s) = \zeta(s)L(s,\chi)$$

يمتد هولومورفيًا عبر $s = 1$: يكون غير صفري عند 1 إذا كان $m = 1$، ويملك صفرًا من الرتبة $m - 1$ إذا كان $m > 1$. ولا توجد لدالة زيتا أقطاب أخرى، لذا تكون $F$ دالة تامة.

عندما $\Re(s) > 1$، يعطي ضرب سلسلتي ديريشليه

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad a_n = \sum_{d|n} \chi(d).$$

المعاملات $a_n$ ضربية. وإذا كان $p^k$ قوة أولية، فإن

$$a_{p^k} = 1 + \chi(p) + \cdots + \chi(p)^k.$$

ولأن $\chi$ حقيقية، فـ$\chi(p) \in \{-1,0,1\}$، ولذلك

$$a_{p^k} = \begin{cases} k+1, & \chi(p) = 1, \\ 1, & \chi(p) = 0, \\ 1, & \chi(p) = -1 \text{ و } k \text{ زوجي}, \\ 0, & \chi(p) = -1 \text{ و } k \text{ فردي}. \end{cases}$$

إذن $a_n \geq 0$ لكل $n$.

أكثر من ذلك، لكل $m \geq 1$ لدينا $a_{m^2} \geq 1$، لأن كل أس أولي في $m^2$ زوجي. ومن ثم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1/2}} \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m^2}}{m} \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty.$$

لكن اللمّة السابقة تقول إن تمامية $F$ مع عدم سلبية معاملاتها تجبر سلسلتها على التقارب عند $s = 1/2$. هذا تناقض. لذلك $L(1,\chi) \neq 0$. □

ملاحظة ٠.٤٢٧. لا يعتمد هذا البرهان على وجود عدد أولي في كل فئة حسابية، ولا على صيغة عدد الأصناف. وهو صالح للشخصيات الحقيقية غير الرئيسية سواء كانت بدائية أم مستحثة، لأن الحجة تستعمل فقط تمامية $L(s,\chi)$ وقيم $\chi(p) \in \{-1,0,1\}$.

## ٠.٢٥٧ خلاصة الفصل

بضم المبرهنة ٠.٣٧٧ إلى المبرهنة ٠.٤١٧ نحصل على عدم الانعدام لكل شخصية غير رئيسية. وتتكامل هذه النتيجة مع التعامد والمشتقة اللوغاريتمية والمعادلة الوظيفية لتوفير الأدوات اللازمة للفصل التالي، حيث تبرهن مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية من دون افتراض دائري.

# باب ٨

# مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية

## ٠١٨ نطاق الفصل

لا يثبت الفصل مبرهنة الأعداد الأولية في المتتاليات الحسابية، ولا يقدم تقديرًا كميًا لخطأ التوزيع. المسار المستعمل نوعي، ويعتمد على تعامد الشخصيات، والمنتج الأويلري، وعدم انعدام $L(1,\chi)$ للشخصيات غير الرئيسية، وقد ثبتت هذه الأدوات في الفصل السابع من دون اعتماد دائري.

ملاحظة ٠١٨. (مواضع المراجع). قورنت بنية البرهان مع المسارات القياسية في [Apo76, الفصل 7، الأقسام 7.3--7.9، الصفحات 148--155]، و[Dav00, الفصلان 1 و4، الصفحات 1--11 و27--34]، و[MV07, الفصل 4، القسمان 4.2--4.3، الصفحات 115--132]. وتستعمل لغة [IK04, الفصول 3 و5 و17، الصفحات 43--64 و93--152 و419--426] لضبط الفصل بين النتيجة النوعية والنتائج الكمية اللاحقة.

## ٠٢٨ مرشح الفئة الحسابية

ليكن $q \geq 1$، ولتكن $a$ فئة مختزلة بترديد $q$، أي $(a,q)=1$. نكتب

$$P_{q,a}(\sigma) = \sum_{\substack{p \text{ أولي} \\ p \equiv a \pmod q}} \frac{1}{p^\sigma}, \qquad \sigma > 1.$$

**قضية ٠٢٨.** (مرشح الفئة بالشخصيات). لكل عدد صحيح $n$:

$$\mathbf{1}_{n \equiv a \pmod q} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \overline{\chi(a)}\chi(n).$$

ومن ثم، لكل $\sigma > 1$:

$$P_{q,a}(\sigma) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \overline{\chi(a)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^\sigma}.$$

برهان. إذا كان $(n,q)>1$، فإن الطرف الأيمن يساوي صفراً لأن كل شخصية ديريشليه تنعدم عند $n$، والطرف الأيسر يساوي صفراً أيضًا لأن $a$ مختزلة. أما إذا كان $(n,q)=1$، فتعطي علاقة التعامد من الفصل السابع

$$\sum_{\chi \pmod q} \chi(n)\overline{\chi(a)} = \begin{cases} \varphi(q), & n \equiv a \pmod q, \\ 0, & n \not\equiv a \pmod q. \end{cases}$$

وهذا يثبت الهوية الأولى. والهوية الثانية تنتج بضربها في $p^{-\sigma}$ والجمع على الأوليات. والتقارب المطلق يجيز تبديل الجمعين لأن عدد الشخصيات منته، ولأن

$$\sum_p \frac{|\chi(p)|}{p^\sigma} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \infty.$$

□

## ٣٨. لوغاريتم المنتج الأويلري

عندما $\Re(s)>1$، نعرّف الفرع الأويلري للوغاريتم بالمتسلسلة

$$\ell_\chi(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{kp^{ks}}.$$

تتقارب هذه المتسلسلة مطلقًا ومحليًا بانتظام، وتحقق

$$\exp\bigl(\ell_\chi(s)\bigr) = L(s,\chi).$$

وبفصل الحد $k=1$ نحصل على

$$\ell_\chi(s) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + H_\chi(s),$$

حيث

$$H_\chi(s) = \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{kp^{ks}}.$$

**لمّة ٣٨.** (ضبط القوى الأولية العليا). تتقارب سلسلة $H_\chi(s)$ طبيعياً على كل مجموعة مدمجة في نصف المستوى $\Re(s)>1/2$. وبخاصة، فهي هولومورفية ومحدودة في قرص مغلق مناسب مركزه $s=1$.

برهان. خذ $0<r<1/2$، وضع $\sigma_0 = 1-r > 1/2$. إذا كان $|s-1|\le r$، فإن $\Re(s)\ge\sigma_0$، ومن

ثم

$$\begin{aligned}\sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{\chi(p)^k}{kp^{ks}} \right| &\leq \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^{k\sigma_0}} \\ &= \sum_p \frac{p^{-2\sigma_0}}{1-p^{-\sigma_0}} \\ &\leq \frac{1}{1-2^{-\sigma_0}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma_0}} < \infty.\end{aligned}$$

إذن التقارب طبيعي على القرص، وبمبرهنة فايرشتراس تكون الدالة هولومورفية في داخله ومستمرة، ومن ثم محدودة، على القرص المغلق. والحجة نفسها تعمل على كل مجموعة مدمجة في $\Re(s) > 1/2$. □

## ٤٨. فصل الشخصية الرئيسية

**قضية ٤٨.** (مساهمة الشخصية الرئيسية). إذا كانت $\chi_0$ الشخصية الرئيسية بترديد $q$، فإن

$$\ell_{\chi_0}(\sigma) = \log \frac{1}{\sigma - 1} + O_q(1) \qquad (\sigma \to 1^+).$$

برهان. للعدد الحقيقي $\sigma > 1$ تكون عوامل المنتج الأويلري موجبة، ولذلك $\ell_{\chi_0}(\sigma) = \log L(\sigma, \chi_0)$ باللوغاريتم الحقيقي. ومن الفصل السابع:

$$L(\sigma, \chi_0) = \zeta(\sigma) \prod_{p|q} (1 - p^{-\sigma}).$$

وبما أن

$$(\sigma - 1)\zeta(\sigma) \longrightarrow 1,$$

فإن

$$\log \zeta(\sigma) = \log \frac{1}{\sigma - 1} + o(1).$$

أما المجموع المنتهي

$$\sum_{p|q} \log(1 - p^{-\sigma})$$

فيتقارب إلى قيمة منتهية عندما $\sigma \to 1^+$. بضم الحدين نحصل على الصيغة المطلوبة. □

**قضية ٥٨.** (مساهمة الشخصيات غير الرئيسية). إذا كانت $\chi$ شخصية غير رئيسية بترديد $q$، فإن

$$\ell_\chi(\sigma) = O_{q,\chi}(1) \qquad (\sigma \to 1^+).$$

برهان. من المبرهنة ٣٣٧. لدينا

$$L(1,\chi) \neq 0.$$

ولأن $L(s,\chi)$ هولومورفية قرب $s=1$، يوجد قرص $U$ مركزه 1 لا تنعدم فيه الدالة. ولأن القرص بسيط الاتصال، يوجد دالة هولومورفية $g_\chi$ على $U$ تحقق

$$\exp(g_\chi(s)) = L(s,\chi).$$

على كل مركبة متصلة من

$$U \cap \{s : \Re(s) > 1\}$$

لدينا

$$\exp\big(\ell_\chi(s) - g_\chi(s)\big) = 1.$$

إذن الفرق يأخذ قيمًا في المجموعة المنفصلة $2\pi i\mathbb{Z}$، وهو مستمر، فيكون ثابتًا. وبما أن $g_\chi$ محدودة على قطعة مدمجة صغيرة تصل إلى $s=1$، فإن $\ell_\chi(\sigma)$ تبقى محدودة عندما $\sigma \to 1^+$. □

## ٥٨. تباعد مجموع مقلوبات الأوليات

**مبرهنة ٦٨.** (مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية). إذا كان $q \geq 1$ و$(a,q)=1$، فإن

$$P_{q,a}(\sigma) = \frac{1}{\varphi(q)} \log \frac{1}{\sigma - 1} + O_q(1) \qquad (\sigma \to 1^+).$$

وبالتالي

$$\sum_{\substack{p \text{ أولي} \\ p \equiv a \pmod q}} \frac{1}{p} = \infty.$$

وعلى وجه الخصوص، توجد أعداد أولية لا نهائية تحقق

$$p \equiv a \pmod q.$$

برهان. من القضية ٢٨. ومن تعريف $H_\chi$:

$$P_{q,a}(\sigma) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \overline{\chi(a)}\big(\ell_\chi(\sigma) - H_\chi(\sigma)\big).$$

يفصل حد الشخصية الرئيسية عن بقية الحدود. ولأن $(a,q)=1$، فإن $\overline{\chi_0(a)} = 1$. بحسب القضية ٤٨. يساوي حدها

$$\frac{1}{\varphi(q)} \log \frac{1}{\sigma - 1} + O_q(1).$$

وبحسب القضية ٥٨. تبقى حدود الشخصيات غير الرئيسية محدودة. كما تبقى جميع حدود $H_\chi(\sigma)$ محدودة بحسب اللمّة ٣٨.. وعدد الشخصيات بترديد $q$ منته، فتنتج الصيغة التقاربية المعلنة مع حد إجمالي $O_q(1)$.

يبقى إثبات تباعد مجموع المقلوبات. افترض عكس المطلوب، أي

$$\sum_{\substack{p \text{ أولي} \\ p \equiv a \pmod q}} \frac{1}{p} < \infty.$$

عندما $\sigma \downarrow 1$، تزداد الحدود $p^{-\sigma}$ رتيباً إلى $p^{-1}$. لذلك تعطي مبرهنة التقارب الرتيب

$$\lim_{\sigma \to 1^+} P_{q,a}(\sigma) = \sum_{\substack{p \text{ أولي} \\ p \equiv a \pmod q}} \frac{1}{p} < \infty.$$

لكن الصيغة الأولى تقول إن

$$P_{q,a}(\sigma) \longrightarrow \infty,$$

وهذا تناقض. إذن مجموع المقلوبات متباعد، ولا يمكن أن تكون الأوليات في الفئة محدودة العدد. □

ملاحظة ٧٨. (حدود النتيجة). المبرهنة السابقة تثبت اللانهاية وتباعد مجموع المقلوبات، لكنها لا تثبت

$$\pi(x; q, a) \sim \frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)}.$$

فالنتيجة الأخيرة تحتاج أدوات كمية إضافية، أهمها ضبط الأصفار قرب الخط $\Re(s) = 1$ وتحويل المعلومات التحليلية إلى تقديرات عدّية.

# باب ٩

# مبرهنة الأعداد الأولية

## ٠١٩ نطاق الفصل

المسار الأساسي تاوبيري عبر مبرهنة Wiener--Ikehara. أما مسار Hadamard--de la Vallée Poussin الفعال فيعرض منفصلًا، لأن صيغة بيرون وتحويل المسار ما زالا دينين علميين معلنين. ويبقى برهان Selberg--Erdős الأولي مسارًا لاحقًا مستقلًا لا يخلط بالمسار التحليلي.

### ٠١٠١٩ المتطلبات السابقة

يفترض الفصل:

- لغة التقارب والجمع الجزئي من الفصل الثاني.
- الاستمرار الميرومورفي ومبدأ الهوية من الفصل الثالث.
- دالة فون مانغولت وهويتها الالتفافية من الفصل الرابع.
- المشتقة اللوغاريتمية لزيتا في $\Re(s) > 1$ من الفصل الخامس.
- قطب زيتا البسيط عند $s = 1$ واستمرارها الميرومورفي من الفصل السادس.
- متراجحة ديريشليه المثلثية من الفصل السابع.

## ٠٢٠١٩ نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. التمييز بين $\pi(x)$، و$\vartheta(x)$، و$\psi(x)$.

٢. إثبات حد تشيبيشيف الخطي باستعمال المعامل الثنائي.

٣. ضبط مساهمة القوى الأولية العليا من دون استعمال مبرهنة الأعداد الأولية.

٤. اشتقاق المتراجحة الموزونة للمشتقة اللوغاريتمية لزيتا.

٥. إثبات عدم وجود أصفار لزيتا على الخط $\Re(s) = 1$ من دون دور منطقي.

٦. مطابقة فروض صيغة Wiener--Ikehara مع معاملات فون مانغولت.

٧. استنتاج $\psi(x) \sim x$، ثم $\vartheta(x) \sim x$، ثم $\pi(x) \sim x/\log x$.

٨. شرح الفرق بين النتيجة النوعية وحد الخطأ الفعال.

## ٢٩. دوال عد الأوليات

لكل $x \geq 1$ نعرف

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1, \qquad \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \qquad \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

بما أن $\Lambda(n) = \log p$ إذا كان $n = p^m$ قوة أولية، وتساوي صفراً في غير ذلك، فإن

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{m \geq 1} \vartheta\left(x^{1/m}\right).$$

المجموع الأخير منته، إذ لا يظهر حد بعد $m > \log_2 x$.

الهدف العميق هو إثبات $\psi(x) \sim x$. أما الانتقال من $\vartheta(x) \sim x$ إلى $\pi(x) \sim x/\log x$ فقد ثبت في بواسطة الجمع الجزئي.

## ٣٩. حد تشيبيشيف وضبط القوى الأولية العليا

**لمّة ١٩.** (حد تشيبيشيف ولمّة القوى الأولية العليا). عندما $x \geq 2$:

$$\vartheta(x) \ll x, \qquad \psi(x) \ll x,$$

وكذلك

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) \ll \sqrt{x} \log x = o(x).$$

برهان. ليكن $n \geq 1$ عددًا صحيحًا. كل أولي $p$ يحقق $n < p \leq 2n$ يقسم المعامل الثنائي $\binom{2n}{n}$. لذلك

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq \log \binom{2n}{n}.$$

ومن

$$\binom{2n}{n} \leq \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} = 2^{2n}$$

نحصل على

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) \le 2n \log 2.$$

اختر $k$ بحيث $2^k \le x < 2^{k+1}$. بالتقسيم إلى فترات ثنائية:

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &\le \vartheta(2^{k+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \big(\vartheta(2^{j+1}) - \vartheta(2^j)\big) \\ &\le \sum_{j=0}^{k} 2^{j+1} \log 2 < 4x \log 2.\end{aligned}$$

إذن $\vartheta(x) \ll x$.
ومن الهوية السابقة ينتج

$$\begin{aligned}0 \le \psi(x) - \vartheta(x) &= \sum_{2 \le m \le \log_2 x} \vartheta\big(x^{1/m}\big) \\ &\ll \sum_{2 \le m \le \log_2 x} x^{1/m} \\ &\ll \sqrt{x} \log x.\end{aligned}$$

وهذا $o(x)$. وبضم الحد إلى $\vartheta(x) \ll x$ نحصل على $\psi(x) \ll x$. □

هذه اللمّة مستقلة عن مبرهنة الأعداد الأولية. فلا يجوز استبدالها بتقدير $\pi(y) \sim y/\log y$، لأن ذلك يجعل الاستنتاج دائريًا.

## ٤٩. المشتقة اللوغاريتمية وتمثيل ستيلتج

أثبت الفصل الخامس أنه عندما $\Re(s) > 1$:

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

**قضية ٢٩.** (تمثيل المشتقة اللوغاريتمية بواسطة $\psi$). إذا كان $\Re(s) > 1$، فإن

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \int_{1^-}^{\infty} x^{-s}\, d\psi(x) = s \int_{1}^{\infty} \psi(x) x^{-s-1}\, dx.$$

برهان. الدالة $\psi$ درجية متصلة من اليمين، وتقفز عند العدد الصحيح $n$ بمقدار $\Lambda(n)$. لذلك

$$\int_{1^-}^{\infty} x^{-s}\, d\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s).$$

التقارب المطلق صحيح في $\Re(s) > 1$. وبالتكامل بالتجزئة على $[1, X]$:

$$\int_{1^-}^{X} x^{-s}\, d\psi(x) = \psi(X)X^{-s} + s\int_{1}^{X} \psi(x)x^{-s-1}\, dx.$$

من اللمّة السابقة $\psi(X) \ll X$، فيؤول الحد الطرفي إلى صفر عندما $X \to \infty$، ويتقارب التكامل لأن $\Re(s) > 1$. □

## ٥٩. المتراجحة الموزونة لزيتا

أثبت الفصل السابع

$$3 + 4\cos u + \cos 2u = 2(1 + \cos u)^2 \geq 0.$$

ولا نسجل هذه الهوية مرة ثانية؛ بل نسجل تطبيقها التحليلي التالي.

**لمّة ٣٩.** (المتراجحة الموزونة للمشتقة اللوغاريتمية). لكل $\sigma > 1$ ولكل $t \in \mathbb{R}$:

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) - \Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \geq 0.$$

برهان. من التقارب المطلق لمتسلسلة المشتقة اللوغاريتمية:

$$\begin{aligned} &-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) - \Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \left(3 + 4\cos(t\log n) + \cos(2t\log n)\right). \end{aligned}$$

كل معامل $\Lambda(n)n^{-\sigma}$ غير سالب، والقوس غير سالب من ، فتنتج الدعوى. □

## ٦٩. عدم وجود أصفار على الخط $\Re(s) = 1$

**مبرهنة ٤٩.** Hadamard--de la Vallée Poussin تنهريم( النوعية). لكل $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\zeta(1 + it) \neq 0.$$

أما النقطة $s = 1$ فهي قطب بسيط لزيتا، وليست صفراً.

برهان. افترض عكس المطلوب، ولتكن رتبة الصفر عند $1 + it$ مساوية $m \geq 1$. ولتكن $m_2 \geq 0$ رتبة الصفر عند $1 + 2it$، مع $m_2 = 0$ إذا لم تكن تلك النقطة صفراً.

من قطب زيتا البسيط عند 1:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = -\frac{1}{\sigma - 1} + O(1) \qquad (\sigma \downarrow 1).$$

ومن التحليل المحلي عند الصفر ذي الرتبة $m$:

$$\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)=\frac{m}{\sigma-1}+O(1),$$

وكذلك

$$\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)=\frac{m_2}{\sigma-1}+O(1).$$

إذن الطرف الأيسر في المتراجحة السابقة يساوي

$$\frac{3-4m-m_2}{\sigma-1}+O(1).$$

لكن $3-4m-m_2\leq -1$، فيصبح الطرف سالبًا عندما تكون $\sigma-1$ موجبة وصغيرة، وهذا يناقض المتراجحة. □

ملاحظة ٥٩. (عدم الدور). لم يستعمل البرهان مبرهنة الأعداد الأولية، ولا الصيغة الصريحة، ولا منطقة خالية كمية. اعتمد فقط على المشتقة اللوغاريتمية في $\Re(s)>1$، وقطب زيتا البسيط، والمتراجحة المثلثية غير السالبة.

## ٠.٧٩ مبرهنة Wiener--Ikehara

نستعمل صيغة خاصة مناسبة للمتسلسلات الديريشلية. هذه النتيجة ليست مثبتة داخل الموسوعة في هذا الإصدار، ولذلك توسم صراحة بأنها مستشهد بها.

**مبرهنة ٦٩.**Wiener--Ikehara( ، صيغة المتسلسلات الديريشلية). لتكن

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\qquad a_n\geq 0,$$

متقاربة في $\Re(s)>1$، وضع $S(x)=\sum_{n\leq x}a_n$. افترض أن $S(n)=O(n)$، وأن

$$f(s)-\frac{A}{s-1}$$

يمتد تحليلياً أو باستمرار إلى نصف المستوى المغلق $\Re(s)\geq 1$. عندئذ

$$S(n)\sim An.$$

يرجع الأصل التاريخي إلى Wiener و[Wie30; Ike31] Ikehara. واعتمدنا صيغة Korevaar لأنها تصرح بفروض المتسلسلة الديريشلية وحد المجاميع الجزئية بالصورة التي نحتاجها، وتعرض تطبيقها على مبرهنة الأعداد الأولية في الصفحتين 1108--1109.

## ٨٩. إزالة القطب عند الواحد

من توجد دالة $h$ هولومورفية قرب 1، تحقق

$$\zeta(s) = \frac{h(s)}{s-1}, \qquad h(1) = 1.$$

وبتصغير الجوار تكون $h$ غير منعدمة. لذلك

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{h'}{h}(s),$$

ومن ثم

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1} = -\frac{h'}{h}(s)$$

هولومورفية قرب 1.

وعند كل نقطة $1+it$ مع $t \neq 0$، تكون زيتا هولومورفية وغير منعدمة من المبرهنة السابقة، فتكون مشتقتها اللوغاريتمية هولومورفية في جوار النقطة. إذن الباقي بعد طرح $1/(s-1)$ يمتد تحليلياً عبر كل نقطة من الخط $\Re(s) = 1$.

## ٩٩. الصيغة المركزية لمبرهنة الأعداد الأولية

**مبرهنة ٧٩.** (مبرهنة الأعداد الأولية بصيغة فون مانغولت). عندما $x \to \infty$:

$$\psi(x) \sim x.$$

برهان. طبق مبرهنة Wiener--Ikehara على

$$a_n = \Lambda(n), \qquad f(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s).$$

المعاملات غير سالبة، والسلسلة تتقارب في $\Re(s) > 1$ من الفصل الخامس. كما أن

$$S(n) = \sum_{k \leq n} \Lambda(k) = \psi(n) \ll n$$

من لمّة تشيبيشيف. وأثبتنا أن

$$f(s) - \frac{1}{s-1}$$

يمتد تحليلياً عبر الخط $\Re(s) = 1$. لذلك تعطي المبرهنة مع $A = 1$:

$$\psi(n) \sim n.$$

ولعدد حقيقي $x \geq 1$:

$$\psi(x) = \psi(\lfloor x \rfloor).$$

وبما أن $\lfloor x \rfloor \sim x$، نحصل على

$$\psi(x) = \psi(\lfloor x \rfloor) \sim \lfloor x \rfloor \sim x.$$

□

## ١٠٩. الانتقال إلى $\vartheta$ و$\pi$

**نتيجة ٨٩.** (الصيغة المكافئة بدالة تشيبيشيف الأولى)**.** عندما $x \to \infty$:

$$\vartheta(x) \sim x.$$

برهان. من لمّة القوى الأولية العليا:

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) = o(x).$$

ومع $\psi(x) = x + o(x)$ ينتج

$$\vartheta(x) = \psi(x) - \big(\psi(x) - \vartheta(x)\big) = x + o(x).$$

□

**نتيجة ٩٩.** (مبرهنة الأعداد الأولية)**.** عندما $x \to \infty$:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

برهان. هذا تطبيق مباشر لـ على النتيجة $\vartheta(x) \sim x$. □

## ١١٩. ما الذي لم يثبته المسار النوعي؟

النتيجة السابقة لا تعطي وحدها حد خطأ صريحًا في

$$\psi(x) - x \qquad \text{أو} \qquad \pi(x) - \mathrm{Li}(x).$$

المسار الكلاسيكي الفعال يحتاج:

١. منطقة كمية خالية من الأصفار قرب $\Re(s) = 1$.
٢. تقديرات مناسبة لـ$\zeta'/\zeta$.
٣. صيغة بيرون مقطوعة أو مملسة.
٤. تحويل المسار وضبط التكاملات على الأضلاع.
٥. استخراج الصيغة الصريحة أو تقدير تكاملي مباشر.

في حالة المستودع الحالية، المنطقة الكلاسيكية الخالية مسجلة CITED في ، والصيغة الصريحة مسجلة CITED في ، أما بيرون وتحويل المسار فبراهينهما التفصيلية مؤجلة. لذلك لا ننسب إلى الفصل حد خطأ فعالًا.

## ١٢٩. المسار الأولي المنفصل

أثبت Selberg وErdős مبرهنة الأعداد الأولية بطرائق أولية بمعنى أنها لا تستعمل نظرية الدوال العقدية لزيتا. هذا الوصف لا يعني أن البرهان قصير أو بسيط؛ فهو يبني هويات وتقديرات مستقلة. سيعالج ذلك المسار لاحقًا بوصفه وحدة منفصلة، ولا تستعمل نتائجه داخل البرهان التاوبيري الحالي.

## ١٣٩. خريطة الاعتماد المنطقي

١. حد المعامل الثنائي يعطي $\vartheta(x) \ll x$.

٢. جمع القوى الأولية يعطي $\psi(x) \ll x$ و $\psi(x) - \vartheta(x) = o(x)$.

٣. المنتج الأويلري يعطي متسلسلة $-\zeta'/\zeta$.

٤. المتراجحة المثلثية تعطي المتراجحة الموزونة.

٥. المتراجحة والقطب البسيط يمنعان أصفار الخط $\Re(s) = 1$.

٦. عدم الانعدام يزيل جميع الشذوذ الحدية عدا القطب المعلوم عند 1.

٧. Wiener--Ikehara تحول المعلومة التحليلية إلى $\psi(x) \sim x$.

٨. حد القوى العليا يعطي $\vartheta(x) \sim x$.

٩. الجمع الجزئي السابق يعطي $\pi(x) \sim x/\log x$.

لا توجد حافة في هذه الخريطة تعود من مبرهنة الأعداد الأولية إلى فرض سابق.

## ١٤٩. أخطاء شائعة

١. استعمال عدم انعدام زيتا في $\Re(s) > 1$ كما لو كان يشمل الخط $\Re(s) = 1$.

٢. القول إن عدم الانعدام على الخط يعطي وحده مبرهنة الأعداد الأولية من دون أداة تاوبيرية أو بديل تحليلي.

٣. تطبيق Wiener--Ikehara من دون التحقق من عدم سلبية المعاملات وحد المجاميع الجزئية.

٤. تقدير القوى الأولية العليا باستعمال PNT نفسها.

٥. اعتبار الصيغة الصريحة مثبتة داخل الموسوعة مع أن حالتها CITED.

٦. الخلط بين $\psi(x) \sim x$ وحد خطأ فعال.

٧. وصف برهان Selberg--Erdős بأنه النسخة نفسها بعد حذف زيتا.

# ١٥٩. أسئلة تفسير البرهان

١. لماذا تدخل $\psi$ قبل $\pi$ في المسار التحليلي؟

٢. أين استعملت عدم سلبية $\Lambda(n)$؟

٣. لماذا لا يكفي قطب زيتا عند 1 من دون معرفة بقية الخط؟

٤. لماذا يجعل الصفر المفترض عند $1+it$ المتراجحة الموزونة سالبة؟

٥. ما الدور المختلف لكل من حد تشيبيشيف ومبرهنة Wiener--Ikehara؟

٦. لماذا لا يحمل الانتقال من $\psi$ إلى $\vartheta$ دورًا؟

٧. أي أداة إضافية نحتاجها للحصول على حد خطأ فعال؟

# ١٦٩. تمارين

## ١٦٩.١. المستوى الأول

١. أثبت أن كل أولي $p$ يحقق $n < p \leq 2n$ يقسم $\binom{2n}{n}$.

٢. أثبت $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.

٣. تحقق من الهوية

$$\psi(x) = \sum_{m\geq 1} \vartheta(x^{1/m}).$$

٤. أثبت أن $\sqrt{x}\log x = o(x)$.

## ١٦٩.٢. المستوى الثاني

١. اشتق المتراجحة الموزونة حدًا حدًا من متسلسلة $-\zeta'/\zeta$.

٢. اكتب التوسع المحلي لـ$\zeta'/\zeta$ عند صفر من الرتبة $m$.

٣. تحقق من إزالة القطب عند 1 بكتابة $\zeta(s) = h(s)/(s-1)$.

٤. أثبت صيغة التكامل في بالتكامل بالتجزئة لستيلتجس.

### ٣.١٦٩. المستوى الثالث

١. بين بدقة أن فروض صيغة Wiener--Ikehara المعتمدة تتحقق عند $a_n = \Lambda(n)$.

٢. قارن بين المسار التاوبيري والمسار القائم على بيرون: ما المعلومة الإضافية التي يمكن أن يعطيها الثاني؟

٣. فسر لماذا لا يمكن استنتاج حد خطأ من صيغة تقاربية مجردة.

٤. صمم خريطة اعتماد مستقلة للمسار الأولي من دون استعمال نتائج هذا الفصل داخل مقدماته.

## ١٧٩. المراجع ومسار التوسع

للبرهانين التاريخيين انظر [Had96; Val96]. وللأصل التاوبيري انظر [Wie30; Ike31]. والصيغة الدقيقة المعتمدة وتطبيقها على PNT موجودان في [Kor06, Theorem 1.1 والقسم 2، الصفحات 1107--1109].

للمعالجات القياسية راجع [Apo76; Dav00; MV07; IK04; Ten15; Tit86].

## ١٨٩. خلاصة الفصل

جاء الحد الخطي الأولي من المعامل الثنائي، ومنع عدم الانعدام أصفار الحافة اليمنى لزيتا، ثم حولت Wiener--Ikehara هذه المعلومة التحليلية إلى $\psi(x) \sim x$. بعد ذلك أزالت لمّة القوى الأولية العليا الفرق بين $\psi$ و$\vartheta$، وأكمل الجمع الجزئي الانتقال إلى $\pi$.

هذا يثبت مبرهنة الأعداد الأولية نوعيًا. أما التقديرات الفعالة فتحتاج أدوات إضافية لم ندع اكتمالها في هذه النسخة.

# باب ١٠

# مبرهنة الأعداد الأولية في المتتاليات الحسابية

## ١١٠. نطاق الفصل

المسار تاوبيري نوعي: نفكك سلسلة فون مانغولت في الفئة بواسطة شخصيات ديريشليه، ونثبت عدم انعدام دوال $L$ على الخط $\Re(s) = 1$، ثم نعزل قطب الشخصية الرئيسية ونطبق مبرهنة Wiener--Ikehara على سلسلة الفئة ذات المعاملات غير السالبة.

لا يدعي الفصل انتظامًا عندما ينمو $q$ مع $x$، ولا حد خطأ فعالًا، ولا مبرهنة Siegel--Walfisz، ولا مبرهنة Bombieri--Vinogradov، ولا نتيجة مشروطة بفرضية ريمان المعممة. تبقى هذه موضوعات مستقلة مؤجلة.

### ١٠١١٠. المتطلبات السابقة

يعتمد الفصل على:

- الجمع الجزئي واللغة التقاربية من الفصل الثاني.
- تعامد شخصيات ديريشليه وبنيتها التحليلية من الفصل السابع.
- مرشح الفئة الحسابية من الفصل الثامن.
- حد تشيبيشيف، وعدم انعدام زيتا على الخط، وصيغة Wiener--Ikehara من الفصل التاسع.

### ٢٠١١٠. نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. تعريف دوال العد الموزونة وغير الموزونة داخل فئة حسابية مختزلة.

٢. تحويل شرط التطابق إلى مجموع على شخصيات ديريشليه.

٣. بناء سلسلة ديريشليه ذات معاملات غير سالبة للفئة نفسها.

٤. إثبات المتراجحة الموزونة لدوال $L$ حتى عند القيم $|\chi(n)| < 1$.

٥. إثبات عدم انعدام $L(s,\chi)$ على $\Re(s)=1$ من دون دور.

٦. عزل قطب الشخصية الرئيسية وحساب الباقي $1/\varphi(q)$.

٧. تطبيق Wiener--Ikehara على $\psi(x;q,a)$.

٨. الانتقال إلى $\vartheta(x;q,a)$ و$\pi(x;q,a)$.

٩. التمييز بين النتيجة النوعية لترديد ثابت والنتائج الكمية الموحدة.

## ٠.٢١٠. دوال العد في فئة حسابية

نثبت في بقية الفصل عددًا صحيحًا $q\geq 2$، وعددًا صحيحًا $a$ يحقق $(a,q)=1$. ولكل $x\geq 1$ نعرف

$$\pi(x;q,a)=\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a \pmod q}} 1,$$

$$\vartheta(x;q,a)=\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a \pmod q}} \log p,$$

و

$$\psi(x;q,a)=\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv a \pmod q}} \Lambda(n).$$

بما أن الفئة $a \pmod q$ مختزلة، فإن كل عدد $n\equiv a \pmod q$ أولي مع $q$. وهذه الملاحظة تجعل مرشح الشخصيات صالحًا على جميع الأعداد الداخلة في السلسلة.

## ٠.٣١٠. سلسلة فون مانغولت في الفئة

عندما $\Re(s)>1$، نضع

$$F_{q,a}(s)=\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv a \pmod q}} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

**قضية ٠.١١٠.** (تفكيك سلسلة الفئة بواسطة الشخصيات). إذا كان $\Re(s)>1$، فإن

$$F_{q,a}(s)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi(a)}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right).$$

برهان. من علاقة التعامد في :

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi(a)}\chi(n)=\begin{cases}1, & n\equiv a \pmod q,\\ 0, & n\not\equiv a \pmod q.\end{cases}$$

إذا كان $(n,q)>1$، فإن جميع الشخصيات تنعدم عند $n$، كما أن $n \not\equiv a \pmod q$ لأن $a$ مختزل، لذلك تبقى الهوية صحيحة في هذه الحالة أيضًا.

وباستعمال التقارب المطلق، ثم ، نحصل على

$$\begin{aligned} F_{q,a}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\chi(n) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)} \left( -\frac{L'}{L}(s,\chi) \right). \end{aligned}$$

□

## ٠.٤١٠ المتراجحة الموزونة لدوال $L$

الحجة الحدية تحتاج موجبية أوسع قليلًا من الهوية المثلثية على دائرة الوحدة، لأن الشخصية قد تنعدم عند الأعداد غير الأولية مع الترديد.

**لمّة ٠.٢١٠** (المتراجحة الموزونة للمشتقات اللوغاريتمية)**.** لكل شخصية ديريشليه $\chi \pmod q$، ولكل $\sigma > 1$ و $t \in \mathbb{R}$:

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\Re\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi) - \Re\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2) \geq 0.$$

برهان. من التقارب المطلق لمتسلسلات المشتقات اللوغاريتمية:

$$\begin{aligned} &-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\Re\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi) - \Re\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2) \\ &\quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \left(3 + 4\Re z_n + \Re(z_n^2)\right), \end{aligned}$$

حيث

$$z_n = \chi(n)n^{-it}, \qquad |z_n| \leq 1.$$

يكفي إثبات أن

$$3 + 4\Re z + \Re(z^2) \geq 0 \qquad (|z| \leq 1).$$

اكتب $z = re^{i\theta}$، حيث $0 \leq r \leq 1$، وضع $u = \cos\theta$. عندئذ

$$3 + 4\Re z + \Re(z^2) = 2r^2u^2 + 4ru + 3 - r^2.$$

مشتقة الطرف الأيمن بالنسبة إلى $u$ هي

$$4r(ru+1) \geq 0 \qquad (-1 \leq u \leq 1),$$

لأن $ru + 1 \geq 1 - r \geq 0$. لذلك تقع القيمة الدنيا عند $u = -1$، وتساوي

$$3 - 4r + r^2 = (1-r)(3-r) \geq 0.$$

وبما أن $\Lambda(n)n^{-\sigma} \geq 0$، تنتج المتراجحة. □

## ٥١٠. عدم انعدام دوال $L$ على الخط الواحد

**مبرهنة ٣١٠.** (عدم الانعدام على $\Re(s) = 1$). لتكن $\chi \pmod q$ شخصية ديريشليه.

١. إذا كانت $\chi$ غير رئيسية، فإن

$$L(1 + it, \chi) \neq 0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

٢. إذا كانت $\chi = \chi_0$ رئيسية، فإن $L(s, \chi_0)$ لها قطب بسيط عند $s = 1$، وتحقق

$$L(1 + it, \chi_0) \neq 0 \qquad (t \neq 0).$$

برهان. عند $t = 0$، تعطي عدم انعدام $L(1, \chi)$ لكل شخصية غير رئيسية. أما الشخصية الرئيسية فلها قطب بسيط عند 1 من .

افترض الآن أن $t \neq 0$، وأن $L(1 + it, \chi)$ لها صفر رتبته $m \geq 1$. عندما $\sigma \downarrow 1$، يعطينا قطب زيتا البسيط

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = -\frac{1}{\sigma - 1} + O(1),$$

ويعطينا التحليل المحلي عند الصفر

$$\Re \frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi) = \frac{m}{\sigma - 1} + O(1).$$

لا يمكن أن يكون لـ$L(s, \chi^2)$ قطب عند $1 + 2it$، لأن قطب الشخصية الرئيسية الوحيد يقع عند 1، و$t \neq 0$. ولتكن $m_2 \geq 0$ رتبة الصفر عند $1 + 2it$، مع $m_2 = 0$ إذا لم تكن النقطة صفراً. عندئذ

$$\Re \frac{L'}{L}(\sigma + 2it, \chi^2) = \frac{m_2}{\sigma - 1} + O(1).$$

إذن الطرف الأيسر في المتراجحة الموزونة يساوي

$$\frac{3 - 4m - m_2}{\sigma - 1} + O(1).$$

لكن

$$3 - 4m - m_2 \leq -1,$$

فيصبح الطرف سالبًا عندما تكون $\sigma - 1$ موجبة وصغيرة، وهذا يناقض المتراجحة. □

ملاحظة ٤١٠. (الشخصيات غير البدائية). البرهان السابق يعمل مباشرة لكل شخصية، ولا يحتاج اختزالها أولًا إلى شخصية بدائية. ويمكن التحقق أيضًا من صيغة الاستحداث: العوامل المحلية المحذوفة

$$1 - \chi^*(p)p^{-s}$$

لا تنعدم على $\Re(s) = 1$، لأن

$$|\chi^*(p)p^{-s}| \leq p^{-1} < 1.$$

ملاحظة ٥١٠. (عدم الدور). لم يستعمل البرهان مبرهنة الأعداد الأولية في المتتاليات الحسابية، ولا حد خطأ في الفئات، ولا منطقة خالية كمية، ولا صيغة صريحة للفئات. اعتمد فقط على المنتجات الأويلرية في $\Re(s) > 1$، وقطب زيتا، وعدم الانعدام عند $s = 1$ المثبت في الفصل السابع، والموجبية السابقة.

## ٠.٦١٠ عزل قطب الشخصية الرئيسية

**قضية ٠.٦١٠** (امتداد سلسلة الفئة بعد طرح القطب)**.** تمتد الدالة

$$F_{q,a}(s) - \frac{1}{\varphi(q)(s-1)}$$

هولومورفياً إلى جوار كل نقطة من الخط $\Re(s) = 1$.

برهان. للشخصية الرئيسية $\chi_0 \pmod q$:

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s)P_q(s), \qquad P_q(s) = \prod_{p|q}(1-p^{-s}).$$

الدالة $P_q$ هولومورفية وغير منعدمة في جوار $s = 1$. لذلك

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi_0) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{P_q'}{P_q}(s) = \frac{1}{s-1} + H_q(s),$$

حيث $H_q$ هولومورفية قرب 1.

وبما أن $(a,q) = 1$، فإن $\chi_0(a) = 1$. ومن تفكيك يكون الباقي عند $s = 1$:

$$\operatorname*{Res}_{s=1} F_{q,a}(s) = \frac{1}{\varphi(q)}.$$

جميع حدود الشخصيات غير الرئيسية هولومورفية قرب 1، لأن دوالها تامة وغير منعدمة عند 1 من المبرهنة السابقة.

وعند نقطة $1 + it$ مع $t \neq 0$، تكون جميع دوال $L(s,\chi)$ هولومورفية وغير منعدمة في جوار النقطة، فتكون مشتقاتها اللوغاريتمية هولومورفية. كما أن $1/(s-1)$ هولومورفية قرب تلك النقطة. ينتج الامتداد المطلوب على طول الخط كله. □

## ٠.٧١٠ الصيغة المركزية في الفئة

نطبق الآن مبرهنة Wiener--Ikehara المسجلة في بحالة CITED، ومصدرها [Kor06, Theorem 1.1، الصفحات 1107--1108].

**مبرهنة ٠.٧١٠** (مبرهنة الأعداد الأولية الموزونة في فئة ثابتة)**.** إذا كان $q \geq 2$ ثابتاً و$(a,q) = 1$، فإن

$$\psi(x;q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)} \qquad (x \to \infty).$$

برهان. نطبق Wiener--Ikehara على المعاملات

$$b_n = \Lambda(n)\mathbf{1}_{n\equiv a \pmod q}.$$

هذه المعاملات غير سالبة، وسلسلتها الديريشلية هي $F_{q,a}(s)$، المتقاربة في $\Re(s) > 1$. ومجاميعها الجزئية هي

$$B(x) = \sum_{n \le x} b_n = \psi(x; q, a).$$

كما أن

$$0 \le \psi(x; q, a) \le \psi(x) \ll x$$

من ٠ وأثبتنا أن

$$F_{q,a}(s) - \frac{1}{\varphi(q)(s-1)}$$

يمتد عبر الخط $\Re(s) = 1$. إذن تعطي المبرهنة، مع $A = 1/\varphi(q)$:

$$\psi(n; q, a) \sim \frac{n}{\varphi(q)}$$

للأعداد الصحيحة $n$. ولعدد حقيقي $x$:

$$\psi(x; q, a) = \psi(\lfloor x \rfloor; q, a),$$

ومن $\lfloor x \rfloor \sim x$ تنتج الصيغة المطلوبة. □

## ٠٨١٠. إزالة القوى الأولية العليا

**نتيجة ٠٨١٠.** (الصيغة الموزونة على الأوليات فقط)**.** إذا كان $q$ ثابتاً و$(a, q) = 1$، فإن

$$\vartheta(x; q, a) \sim \frac{x}{\varphi(q)}.$$

**برهان.** الفرق $\psi(x; q, a) - \vartheta(x; q, a)$ هو مساهمة القوى الأولية $p^m \le x$ ذات $m \ge 2$ الواقعة في الفئة. لذلك

$$0 \le \psi(x; q, a) - \vartheta(x; q, a) \le \psi(x) - \vartheta(x).$$

ومن :

$$\psi(x) - \vartheta(x) \ll \sqrt{x} \log x = o(x).$$

وبضم ذلك إلى $\psi(x; q, a) = x/\varphi(q) + o(x)$، نحصل على النتيجة. □

## ٠٩١٠. الانتقال إلى دالة العد

**نتيجة ٠٩١٠.** (مبرهنة الأعداد الأولية في متتالية حسابية ثابتة)**.** إذا كان $q \ge 2$ ثابتاً و$(a, q) = 1$، فإن

$$\pi(x; q, a) \sim \frac{x}{\varphi(q) \log x}.$$

برهان. يعطي الجمع الجزئي، كما في برهان :

$$\pi(x;q,a) = \frac{\vartheta(x;q,a)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t;q,a)}{t(\log t)^2}\,dt.$$

من النتيجة السابقة

$$\vartheta(t;q,a) = \frac{t}{\varphi(q)} + o(t), \qquad \vartheta(t;q,a) \ll t.$$

إذن

$$\frac{\vartheta(x;q,a)}{\log x} = \frac{x}{\varphi(q)\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

بينما

$$\int_2^x \frac{\vartheta(t;q,a)}{t(\log t)^2}\,dt \ll \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

وهذا حد أصغر من الحد الرئيسي، فتنتج الدعوى. □

## ١٠١٠. ماذا تعني النتيجة؟

لكل فئة مختزلة ثابتة $a \pmod q$، يكون نصيبها التقاربي من الكتلة الأولية مساويًا

$$\frac{1}{\varphi(q)}.$$

أي أن الفئات المختزلة تتقاسم الأوليات بالتساوي في الحد الرئيسي عندما يكون الترديد ثابتًا. وهذه نتيجة أقوى جوهريًا من مجرد وجود عدد لا نهائي من الأوليات في كل فئة، المثبت في الفصل الثامن.

لكن عبارة ``بالتساوي" هنا تقاربية فقط، ولا تعطي سرعة التقارب ولا سلوك الخطأ لفئة معينة عند ارتفاعات محددة.

## ١١١٠. ما الذي لم يثبت؟

لا يثبت المسار الحالي تقديرًا من نوع

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + E(x;q,a)$$

مع حد فعال أو موحد لـ$E(x;q,a)$. وللحصول على نتائج كمية نحتاج عادة إلى:

١. مناطق خالية كمية لدوال $L(s,\chi)$.

٢. ضبط الأصفار الحقيقية القريبة من 1 وإمكان الصفر الاستثنائي.

٣. صيغ صريحة أو تحويل مسار مع تقديرات موحدة.

٤. أدوات إضافية عندما يتغير $q$ مع $x$.

لذلك تبقى مبرهنتا Siegel--Walfisz وBombieri--Vinogradov، والنتائج تحت GRH، موضوعات منفصلة لاحقة. ولا يجوز نسبتها إلى هذا الفصل.

## ١٢١٠. خريطة الاعتماد المنطقي

١. تعامد الشخصيات يحول شرط التطابق إلى مجموع ملتوي.

٢. المشتقة اللوغاريتمية تحول الالتواء إلى دوال $L$.

٣. الموجبية الموزونة تمنع أصفار $L$ على $\Re(s) = 1$.

٤. الشخصية الرئيسية وحدها تعطي قطبًا عند 1.

٥. مرشح الفئة يقسم باقي القطب على $\varphi(q)$.

٦. Wiener--Ikehara تحول القطب وعدم الانعدام إلى $\psi(x; q, a) \sim x/\varphi(q)$.

٧. ضبط القوى الأولية العليا يعطي صيغة $\vartheta$.

٨. الجمع الجزئي يعطي صيغة $\pi$.

لا توجد حافة تعود من النتيجة النهائية إلى برهان عدم الانعدام أو إلى تحليل القطب.

## ١٣١٠. أخطاء شائعة

١. تطبيق Wiener--Ikehara مباشرة على سلسلة ملتوية ذات معاملات مركبة.

٢. استعمال الهوية $3 + 4\cos u + \cos 2u \geq 0$ من دون معالجة حالة $\chi(n) = 0$.

٣. الخلط بين عدم انعدام $L(1, \chi)$ وعدم الانعدام على الخط كله.

٤. إغفال العوامل المحلية عند الشخصيات غير البدائية.

٥. نسيان أن قطب الشخصية الرئيسية وحده هو الذي يولد الحد الرئيسي.

٦. اعتبار النتيجة موحدة في $q$ مع أنها مثبتة لكل $q$ ثابت.

٧. استنتاج حد خطأ فعال من صيغة تقاربية تاوبيرية مجردة.

## ٠.١٤١٠ أسئلة تفسير البرهان

١. لماذا نطبق الأداة التاوبيرية على سلسلة الفئة لا على كل التواء منفرد؟

٢. أين استعملت فرضية $(a,q)=1$؟

٣. لماذا لا يسبب $L(s,\chi^2)$ قطبًا عند $1+2it$ عندما $t\neq 0$؟

٤. كيف يظهر العامل $1/\varphi(q)$ من مرشح الشخصيات؟

٥. ما الفرق المنطقي بين الفصل الثامن والفصل الحالي؟

٦. لماذا لا تكفي النتيجة الحالية لإثبات Siegel--Walfisz؟

## ٠.١٥١٠ تمارين

### ٠.١.١٥١٠ المستوى الأول

١. تحقق من مرشح الفئة عندما $(n,q)>1$.

٢. أثبت أن $P_q(1)=\prod_{p|q}(1-p^{-1})=\varphi(q)/q$.

٣. بين أن $\psi(x;q,a)\leq\psi(x)$.

٤. أثبت أن فرق $\psi(x;q,a)-\vartheta(x;q,a)$ غير سالب.

### ٠.٢.١٥١٠ المستوى الثاني

١. أثبت مباشرة أن

$$3+4\Re z+\Re(z^2)\geq 0 \qquad (|z|\leq 1).$$

٢. اشتق المتراجحة الموزونة حدًا حدًا من متسلسلات المشتقات اللوغاريتمية.

٣. تحقق من أن العوامل المحلية المحذوفة لا تنعدم على $\Re(s)=1$.

٤. احسب باقي $F_{q,a}$ عند $s=1$ من تفكيك الشخصيات.

### ٠.٣.١٥١٠ المستوى الثالث

١. طابق فروض Wiener--Ikehara بندًا بندًا مع معاملات سلسلة الفئة.

٢. أعد برهان الانتقال من $\vartheta(x;q,a)$ إلى $\pi(x;q,a)$ مع تقدير التكامل المتبقي.

٣. حدد الموضع الذي يفشل فيه البرهان إذا سمحنا لـ$q$ بالنمو مع $x$.

٤. صمم خريطة منفصلة للانتقال من النتيجة النوعية إلى Siegel--Walfisz، مع وسم كل أداة غير متاحة حاليًا.

## ١٦١٠. المراجع ومسار التوسع

للأصل التاريخي انظر [Val96]. وللمعالجات القياسية للأوليات في المتتاليات الحسابية والخواص التحليلية لدوال $L$، راجع [Dav00; MV07; Ten15; IK04].

اعتمد الفصل صيغة Wiener--Ikehara الموثقة في الفصل التاسع من [Kor06]. أما النتائج الكمية والموحدة فتبقى خارج نطاق هذه النسخة.

## ١٧١٠. خلاصة الفصل

حوّل تعامد الشخصيات شرط التطابق إلى مجموع من المشتقات اللوغاريتمية لدوال $L$. ومنعت المتراجحة الموزونة أصفار هذه الدوال على الخط $\Re(s) = 1$، فبقي قطب الشخصية الرئيسية وحده، وباقيه داخل سلسلة الفئة $1/\varphi(q)$. ثم حولت Wiener--Ikehara هذه المعلومة التحليلية إلى التوزيع المتساوي النوعي للأوليات بين الفئات المختزلة عند الترديد الثابت.

# باب ١١

# المناطق الخالية من الأصفار والأصفار الاستثنائية

## ١١١. نطاق الفصل

### ١٠١١١. المتطلبات السابقة

يعتمد الفصل على:

- الشخصيات البدائية والموصل والدالة المكتملة والمعادلة الوظيفية من الفصل السابع.
- صيغة ستيرلينغ المنتظمة من الفصل السادس.
- المتراجحة الموزونة وعدم الانعدام على الخط $\Re(s) = 1$ من الفصل العاشر.
- جداء هادامار للدوال التامة من الرتبة الأولى بوصفه نتيجة قياسية في التحليل المركب.

### ٢٠١١١. نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. تفسير ظهور المقياس $\log(q(|t|+2))$ قرب الخط الواحد.

٢. اشتقاق صيغة المشتقة اللوغاريتمية بمجموع على الأصفار.

٣. إثبات المنطقة القياسية مع استثناء حقيقي بسيط ممكن.

٤. التمييز بين الفرادة داخل دالة واحدة، والفرادة عند ترديد ثابت، وفرادة Landau--Page عبر الموصلات.

٥. شرح مبرهنة Siegel ومعنى عدم فعالية ثابتها.

٦. تفسير ظاهرة Deuring--Heilbronn بوصفها تنافرًا كميًا للأصفار.

## ٠٢١١ المقياس التحليلي وثلاثة معاني للفرادة

لتكن $\chi$ شخصية بدائية غير رئيسية بموصل $q \geq 3$، ولتكن

$$s = \sigma + it.$$

نستعمل المقياس

$$\mathcal{L}_q(t) = \log\big(q(|t|+2)\big).$$

يجمع هذا المقياس كلفة الموصل $\log q$ وكلفة عامل غاما عند الارتفاع $|t|$. ويجب فصل العبارات الآتية:

١. داخل دالة بدائية واحدة، يوجد على الأكثر صفر حقيقي واحد في المنطقة القياسية، ويكون بسيطًا.

٢. عند ترديد ثابت، يملك حاصل ضرب جميع دوال الشخصيات على الأكثر صفرًا استثنائيًا واحدًا في منطقة صريحة مناسبة؛ انظر [McC84; Kad18].

٣. عبر الموصلات حتى $Q$، تمنع مبرهنة Landau--Page وجود شخصيتين بدائيتين مختلفتين لهما صفران شديدا القرب من الواحد.

## ٠٣١١ الرد إلى الشخصية البدائية

**قضية ٠١١١.** (الأصفار القريبة من الواحد والجد البدائي). لتكن $\chi \pmod q$ شخصية مستحثة من شخصية بدائية $\chi^* \pmod r$. عندئذ

$$L(s,\chi) = L(s,\chi^*) \prod_{\substack{p \mid q \\ p \nmid r}} \left(1 - \chi^*(p) p^{-s}\right).$$

ولا ينعدم أي عامل محلي في $\Re(s) > 0$. كما أن الفرق بين المشتقتين اللوغاريتميتين هو $O(\log q)$ عندما $\Re(s) > 1$.

برهان. صيغة العوامل المحلية هي . وإذا $\sigma > 0$، فإن

$$|\chi^*(p) p^{-s}| \leq p^{-\sigma} < 1,$$

فلا ينعدم العامل. وبالتفاضل اللوغاريتمي:

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \frac{L'}{L}(s,\chi^*) + \sum_{\substack{p \mid q \\ p \nmid r}} \frac{\chi^*(p)(\log p) p^{-s}}{1 - \chi^*(p) p^{-s}}.$$

ولـ$\sigma > 1$:

$$\left| \frac{\chi^*(p)(\log p) p^{-s}}{1 - \chi^*(p) p^{-s}} \right| \leq \frac{\log p}{p^\sigma - 1} \leq \log p.$$

ومن ثم لا يتجاوز مجموع الحدود

$$\sum_{p \mid q} \log p = \log \operatorname{rad}(q) \leq \log q.$$

□

## ٠٤١١ الدالة المكتملة والمشتقة اللوغاريتمية

ضع

$$a_\chi = \frac{1-\chi(-1)}{2} \in \{0,1\},$$

وعرف

$$\Lambda(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{(s+a_\chi)/2} \Gamma\left(\frac{s+a_\chi}{2}\right) L(s,\chi).$$

الدالة $\Lambda(s,\chi)$ تامة من الرتبة الأولى، وتحقق

$$\Lambda(s,\chi) = \varepsilon_\chi \Lambda(1-s,\overline{\chi}), \qquad |\varepsilon_\chi| = 1.$$

**لمّة ٠٢١١.** (صيغة المشتقة اللوغاريتمية بمجموع على الأصفار)**.** إذا كانت $\chi$ بدائية وغير رئيسية، و$\Re(s) > 1$، فإن

$$-\Re\frac{L'}{L}(s,\chi) = \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} + \frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+a_\chi}{2}\right) - \sum_\rho^* \Re\frac{1}{s-\rho},$$

حيث يجري الجمع المتماثل على الأصفار غير البديهية. وبخاصة، مساهمة كل صفر في $-\Re L'/L$ سالبة.

برهان. تعطي مبرهنة هادامار العامة

$$\Lambda(s,\chi) = \exp(A_\chi + B_\chi s) \prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}.$$

وبالتفاضل اللوغاريتمي والتجميع المتماثل:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s,\chi) = b_\chi + \sum_\rho^* \frac{1}{s-\rho}.$$

تجعل المعادلة الوظيفية وتناظر الأصفار الجزء الحقيقي للثابت المنتظم $b_\chi$ مساوياً للصفر. ومن تعريف $\Lambda$:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s,\chi) = \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+a_\chi}{2}\right) + \frac{L'}{L}(s,\chi).$$

أخذ الجزء الحقيقي وإعادة الترتيب يعطي الهوية. وإذا $s = \sigma + it$ و$\rho = \beta + i\gamma$، فإن

$$\Re\frac{1}{s-\rho} = \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} > 0.$$

□

**لمّة ٣١١.** (ضبط الباقي المنتظم). يوجد ثابت مطلق $C > 0$ بحيث لكل شخصية بدائية غير رئيسية $\chi$، ولكل $1 < \sigma \leq 2$:

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi) \leq C\mathcal{L}_q(t).$$

وإذا عزلنا أصفاراً محددة، أمكن إبقاء مساهماتها السالبة صراحة. أما الشخصية الرئيسية $\chi_0 \pmod q$، فتخضع للحد

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi_0) \leq \Re\frac{1}{\sigma - 1 + it} + C\mathcal{L}_q(t).$$

برهان. تعطي صيغة ستيرلينغ المنتظمة، في الشريط $1 \leq \sigma \leq 2$،

$$\left|\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma + a_\chi + it}{2}\right)\right| \ll \log(|t| + 2).$$

وحذف مجموع الأصفار المطروح من اللمّة السابقة يعطي حدًا علويًا من رتبة $\log q + \log(|t|+2)$. وللشخصية الرئيسية نكتب

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s)\prod_{p|q}(1 - p^{-s}),$$

فنحتفظ بقطب زيتا صراحة، ونضبط غاما والعوامل المحلية كما في القضية السابقة. □

## ٠٥١١. المتراجحة الموزونة

نستعمل النتيجة :

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\Re\frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi) - \Re\frac{L'}{L}(\sigma + 2it, \chi^2) \geq 0 \qquad (\sigma > 1). \tag{11.1}$$

مصدرها الموجبية

$$3 + 4\Re z + \Re(z^2) \geq 0 \qquad (|z| \leq 1).$$

## ٠٦١١. المنطقة القياسية الخالية

**مبرهنة ٤١١.** (المنطقة القياسية والاستثناء الحقيقي). يوجد ثابت مطلق $c_0 > 0$ بحيث لكل شخصية ديريشليه بدائية غير رئيسية $\chi$ بموصل $q \geq 3$، تملك $L(s, \chi)$ على الأكثر صفراً واحداً في المنطقة

$$\Re(s) > 1 - \frac{c_0}{\log(q(|\Im(s)| + 2))}. \tag{11.2}$$

إذا وجد الصفر، فهو حقيقي وبسيط، وتكون $\chi$ شخصية حقيقية تربيعية.

برهان. نكتب

$$\delta = \sigma - 1 > 0, \qquad \eta = 1 - \beta \geq 0, \qquad \mathcal{L} = \log(q(|\gamma| + 2)),$$

ونختار $\delta = A/\mathcal{L}$، حيث $A > 0$ ثابت مطلق صغير.

**الشخصية غير الحقيقية.** إذا كان $\rho = \beta + i\gamma$ صفراً وكانت $\chi$ غير حقيقية، فإن $\chi^2$ غير رئيسية. نأخذ $t = \gamma$ في (11.1)، ونعزل الصفر، فنحصل على

$$0 \le \frac{3}{\delta} - \frac{4}{\delta + \eta} + C\mathcal{L}. \tag{11.3}$$

إذا افترضنا $\eta \le c/\mathcal{L}$، صار الطرف الأيمن بعد القسمة على $\mathcal{L}$ لا يزيد على

$$\frac{3}{A} - \frac{4}{A + c} + C.$$

نختار $A$ بحيث $1/A > 2C$، ثم نختار $c > 0$ صغيراً بما يكفي، فيصبح التعبير سالباً، وهو تناقض.

**الشخصية الحقيقية والصفر غير الحقيقي.** إذا كانت $\chi$ حقيقية و$\gamma \neq 0$، فإن $\overline{\rho} = \beta - i\gamma$ صفر أيضًا، و$\chi^2$ رئيسية. بعد عزل الصفرين وقطب الحد الثالث:

$$0 \le \frac{3}{\delta} + \frac{\delta}{\delta^2 + 4\gamma^2} - \frac{4}{\delta + \eta} - \frac{4(\delta + \eta)}{(\delta + \eta)^2 + 4\gamma^2} + C\mathcal{L}. \tag{11.4}$$

ضع

$$r = \frac{\delta + \eta}{\delta}, \qquad v = \frac{2|\gamma|}{\delta}.$$

بعد ضرب الجزء الكسري في $\delta$، يصبح

$$G(r, v) = 3 + \frac{1}{1 + v^2} - \frac{4}{r} - \frac{4r}{r^2 + v^2}.$$

لدينا

$$G(1, v) = -1 - \frac{3}{1 + v^2} \le -1, \qquad \left| \frac{\partial G}{\partial r}(r, v) \right| \le 8.$$

فإذا $\eta \le \delta/16$، أعطت مبرهنة القيمة المتوسطة $G(r, v) \le -1/2$. ومن ثم

$$0 \le -\frac{1}{2\delta} + C\mathcal{L},$$

وهو تناقض عندما $1/(2A) > C$.

**الصفر الحقيقي وبساطته.** افترض وجود أصفار حقيقية $\beta_j = 1 - \eta_j$ في المنطقة، محسوبة مع الرتب. عند $t = 0$، يعطي قطبا الحدين الأول والثالث $4/\delta$، وتعطي الأصفار

$$-4 \sum_j \frac{1}{\delta + \eta_j}.$$

إذا كان مجموع الرتب على الأقل اثنين، وكانت $\eta_j \le \delta/2$، فإن

$$-4 \sum_j \frac{1}{\delta + \eta_j} \le -\frac{16}{3\delta}.$$

فتصبح المتراجحة

$$0 \leq -\frac{4}{3\delta} + C\log(2q),$$

وتناقض اختيار $A$ صغيرًا. إذن يوجد على الأكثر صفر حقيقي واحد، وتكون رتبته واحدًا. وبجمع الثوابت الصغيرة المستعملة نحصل على $c_0$. □

ملاحظة ٠٥١١. (الثوابت الصريحة). أثبت McCurley منطقة صريحة لحاصل ضرب دوال الشخصيات بترديد ثابت [McC84]، وحسن Kadiri ثوابت عددية في نطاقات محددة [Kad18]. لا يجوز نقل ثابت من صيغة إلى تطبيع لوغاريتمي مختلف من دون إعادة الحساب.

## ٠٧١١ مبرهنة Landau--Page

**مبرهنة ٠٦١١.** Landau--Page مبرهنة (النوعية). يوجد ثابت مطلق $c_P > 0$ بحيث لكل $Q \geq 3$، توجد على الأكثر شخصية ديريشليه حقيقية بدائية واحدة $\chi$ موصلها $q \leq Q$ وتملك صفراً حقيقياً $\beta$ يحقق

$$1 - \frac{c_P}{\log Q} < \beta < 1.$$

برهان. نفترض وجود شخصيتين حقيقيتين بدائيتين متميزتين $\chi_i \pmod{q_i}$، حيث $q_i \leq Q$، ولكل منهما صفر $\beta_i = 1 - \eta_i$ مع $\eta_i \leq c/\log Q$. على الترديد $m = \operatorname{lcm}(q_1, q_2)$، ضع

$$\chi(n) = \chi_1(n)\chi_2(n).$$

هي غير رئيسية، وإلا اتفق جدا الشخصيتين البدائيان. نعرف

$$F(s) = \zeta(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi).$$

في $\sigma > 1$:

$$-\frac{F'}{F}(\sigma) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}(1+\chi_1(n))(1+\chi_2(n)) \geq 0.$$

نحتفظ بشخصية حاصل الضرب كما هي للمحافظة على الموجبية. وعند تقدير مشتقتها نردها إلى جدها البدائي، الذي لا يتجاوز موصله $q_1q_2 \leq Q^2$.

بوضع $\delta = \sigma - 1$ وعزل الصفرين نحصل على

$$0 \leq \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta+\eta_1} - \frac{1}{\delta+\eta_2} + C\log Q. \tag{11.5}$$

نختار $\delta = A/\log Q$. وإذا كانت $\eta_i \leq c/\log Q$، صار الطرف الأيمن بعد القسمة على $\log Q$ لا يزيد على

$$\frac{1}{A} - \frac{2}{A+c} + C.$$

نختار $A$ بحيث $1/A > 2C$، ثم $c_P$ صغيرًا بما يكفي، فنحصل على تناقض. □

ملاحظة ٠٧١١. Page مبرهنة (؟). لا تثبت المبرهنة وجود صفر استثنائي، بل فرادته إذا ظهر. انظر [Dav00; BP26].

## ٠.٨١١ مبرهنة Siegel وعدم الفعالية

**مبرهنة ٠.٨١١** (مبرهنة Siegel). لكل $\varepsilon > 0$، يوجد ثابت $c(\varepsilon) > 0$ بحيث لكل شخصية ديريشليه حقيقية بدائية غير رئيسية $\chi$ بموصل $q$:

$$|L(1,\chi)| \geq c(\varepsilon) q^{-\varepsilon}. \tag{11.6}$$

الثابت $c(\varepsilon)$ غير فعال.

**لمّة ٠.٩١١** (حد المشتقة قرب الواحد). يوجد ثابت مطلق $C > 0$ بحيث، إذا كانت $\chi$ غير رئيسية بترديد $q$، وكان

$$1 - \frac{c_0}{\log(2q)} \leq \sigma \leq 1,$$

فإن

$$|L'(\sigma,\chi)| \leq C \log^2(2q).$$

برهان. ضع $S(x) = \sum_{n \leq x} \chi(n)$. من الدورية وانعدام مجموع دورة كاملة لدينا $|S(x)| \leq q$. وبالجمع الجزئي عند $q$:

$$L(s,\chi) = \sum_{n \leq q} \frac{\chi(n)}{n^s} + s \int_q^\infty \frac{S(x)}{x^{s+1}}\, dx \qquad (\Re(s) > 0).$$

وبالتفاضل عند $s = \sigma$ الحقيقي:

$$\begin{aligned} L'(\sigma,\chi) = & -\sum_{n \leq q} \frac{\chi(n)\log n}{n^\sigma} + \int_q^\infty \frac{S(x)}{x^{\sigma+1}}\, dx \\ & - \sigma \int_q^\infty \frac{S(x)\log x}{x^{\sigma+1}}\, dx. \end{aligned}$$

في المجال المحدد $q^{1-\sigma} \leq e^{c_0}$. لذلك لا يتجاوز الحد المنتهي $O(\log^2(2q))$، ولا يتجاوز التكاملان تباعًا $O(1)$ و$O(\log(2q))$. □

**نتيجة ٠.١٠١١** (الإبعاد غير الفعال للصفر الاستثنائي). لكل $\varepsilon > 0$، يوجد ثابت غير فعال $c_\varepsilon > 0$ بحيث إذا كان $\beta$ صفراً استثنائياً لدالة شخصية حقيقية بدائية بموصل $q$، فإن

$$1 - \beta \geq c_\varepsilon q^{-\varepsilon}.$$

برهان. لدينا

$$L(1,\chi) = \int_\beta^1 L'(u,\chi)\, du,$$

فتعطي اللمّة السابقة

$$|L(1,\chi)| \ll (1-\beta)\log^2(2q).$$

نطبق مبرهنة Siegel بالأس $\varepsilon/2$، ثم نستعمل $\log^2(2q) \ll_\varepsilon q^{\varepsilon/2}$، فنحصل على النتيجة. ويرث الثابت عدم الفعالية من مبرهنة Siegel. □

**ملاحظة ٠.١١١١** (مبرهنة Siegel المستعملة). كل نتيجة تعتمد على ثابت Siegel من دون بديل فعال ترث عدم الفعالية. لذلك لا يجوز إدخال هذا الثابت في حد خطأ ثم وصف الحد بأنه فعال.

## ٠٩١١ ظاهرة Deuring--Heilbronn

للترديد الثابت $q$، ضع

$$\mathcal{D}_q(s) = \prod_{\chi \bmod q} L(s,\chi).$$

**مبرهنة ٠١٢١١.** Deuring--Heilbronn قرهاظ( ، صيغة نوعية). توجد ثوابت مطلقة فعالة موجبة $c_0, c_1, c_2$ بحيث إذا كان $T \geq 2$، وكانت $\mathcal{D}_q$ تملك صفراً استثنائياً $\beta_1$ يحقق

$$\lambda_1 = (1-\beta_1)\log(q(T+2)) \leq c_0,$$

فإن كل صفر آخر $\rho = \beta + i\gamma$ لـ$\mathcal{D}_q$، مع $|\gamma| \leq T$، يحقق

$$1-\beta \geq \frac{c_1}{\log(q(T+2))}\log\left(\frac{c_2}{\lambda_1}\right). \tag{11.7}$$

لا ندعي هنا البرهان الكامل، الذي يستعمل أدوات تتجاوز الفصول الحالية.

ملاحظة ١٣١١. (الفرادة ليست التنافر). Landau--Page تمنع استثناءين مستقلين من الاقتراب معًا من الواحد. أما Deuring--Heilbronn فتدفع كل صفر آخر بعيدًا بمقدار يزداد عندما يقترب $\beta_1$ أكثر من الواحد.

## ٠١٠١١ الأثر في توزيع الأوليات

تشرح الصيغة الصريحة الإرشادية

$$\psi(x,\chi) \approx -\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} + \text{حدود أخرى}$$

سبب خطورة الصفر الاستثنائي. فإذا كان $\beta$ قريبًا من الواحد، ظهر حد كبير من رتبة $-x^\beta/\beta$.

**قضية ٠١٤١١.** (خريطة الأثر في الصيغة الصريحة). تضبط المنطقة القياسية مساهمة الأصفار غير الاستثنائية، بينما يساهم الصفر الحقيقي الاستثنائي بحد منفرد يجب إظهاره صراحة. وتمنح ظاهرة *Deuring--Heilbronn* تعويضًا جزئيًا بدفع بقية الأصفار بعيدًا.

## ٠.١١١١ حدود الفعالية

| الملاحظة | الفعالية | النتيجة |
|---|---|---|
| الثابت غير محسن | فعالة من حيث المبدأ | المنطقة القياسية الفردية |
| تثبت الفرادة فقط | فعالة من حيث المبدأ | النوعية Landau--Page |
| ثابت $c(\varepsilon)$ غير معلوم حسابيًا | غير فعالة | مبرهنة Siegel |
| Siegel يرث ثابت | غير فعال | الإبعاد $1-\beta \gg_\varepsilon q^{-\varepsilon}$ |
| مقتبسة؛ البرهان الكامل مؤجل | فعالة | Deuring--Heilbronn الصريحة |

## ٠.١٢١١ تمارين

١. أثبت أن

$$\sum_{p|q} \frac{\log p}{p^\sigma - 1} \leq \log q \qquad (\sigma > 1).$$

٢. تحقق من أن الشخصية غير الحقيقية لا يمكن أن يكون مربعها شخصية رئيسية.

٣. أثبت الحد $|\partial G/\partial r| \leq 8$ المستعمل في برهان المنطقة القياسية.

٤. استخرج قيمًا صريحة غير مثلى للثوابت بدلالة ثابت الباقي $C$.

٥. أثبت أن شخصية حاصل الضرب في برهان Landau--Page غير رئيسية عندما تكون $\chi_1, \chi_2$ بدائيتين متميزتين.

٦. تحقق من الموجبية

$$1 + \chi_1(n) + \chi_2(n) + \chi_1(n)\chi_2(n) = (1 + \chi_1(n))(1 + \chi_2(n)) \geq 0.$$

٧. أثبت حد المشتقة قرب الواحد باستعمال دورية الشخصية والجمع الجزئي.

٨. اشرح لماذا لا تنتج مبرهنة Siegel خوارزمية لحصر جميع الأصفار الاستثنائية حتى موصل معلوم.

٩. قارن بين مستويات الفرادة الثلاثة المذكورة في بداية الفصل.

١٠. اشرح من الصيغة الإرشادية لـ$\psi(x, \chi)$ خطورة الحد $x^\beta/\beta$.

## ١٣١١. خلاصة الفصل

حوّلت المشتقة اللوغاريتمية هندسة الأصفار إلى متراجحات حقيقية: كل صفر يعطي مساهمة سالبة، بينما لا تتجاوز كلفة الموصل وغاما رتبة $\log(q(|t|+2))$. وبضم ذلك إلى كثيرة حدود مثلثية غير سالبة حصلنا على المنطقة القياسية، مع إمكان استثناء حقيقي بسيط لشخصية تربيعية.

ثم أثبتنا مبرهنة Landau--Page من حاصل ضرب أويلري موجب، وفصلنا مبرهنة Siegel غير الفعالة عن النتائج الفعالة، وسجلنا ظاهرة Deuring--Heilbronn بوصفها نتيجة مقتبسة لتنافر بقية الأصفار. وهذه الأدوات هي المدخل الطبيعي لمبرهنة Siegel--Walfisz وتقديرات الكثافة وBombieri--Vinogradov.

# باب ١٢

# مبرهنة سيغل--فالفش والتوزيع المنتظم للأعداد الأولية

## ١١٢. نطاق الفصل

### ١.١١٢. ثلاث طبقات يجب عدم خلطها

١. يثبت الفصل العاشر أنه لكل $q$ ثابت:

$$\psi(x; q, a) \sim \frac{x}{\varphi(q)}.$$

لا تسمح هذه العبارة باستبدال $q$ بترديد يعتمد على $x$.

٢. يثبت هذا الفصل الانتظام الفردي لكل $q \leq (\log x)^A$، مع حد خطأ موحد وغير فعال.

٣. مبرهنة Bombieri--Vinogradov نتيجة متوسطية على الترديدات في مجال أكبر بكثير، وتحتاج أدوات إضافية؛ لذلك تبقى مؤجلة.

### ٢.١١٢. نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. تفسير الفرق بين الترديد الثابت والانتظام في الترديد.

٢. رد مجموع فون مانغولت لشخصية مستحثة إلى جدها البدائي.

٣. استعمال الصيغة الصريحة المقطوعة من دون إخفاء ديون بيرون وتحويل المسار.

٤. اختيار ارتفاع قطع من رتبة $e^{\kappa\sqrt{\log x}}$.

٥. عزل حد الصفر الاستثنائي قبل أخذ القيم المطلقة.

٦. تحديد الموضع الوحيد الذي تستعمل فيه مبرهنة سيغل.

٧. اشتقاق صيغ موحدة للدوال $\psi$، و$\vartheta$، و$\pi$.

٨. تفسير سبب عدم فعالية الثوابت النهائية.

## ٠٢١٢. دوال العد والمرشح بالشخصيات

لكل شخصية ديريشليه $\chi \pmod q$، نضع

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n\le x} \chi(n)\Lambda(n).$$

ولكل فئة مختزلة $(a,q)=1$، نعيد استعمال تعامد الشخصيات لنحصل على الهوية الدقيقة

$$\psi(x;q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\,\psi(x,\chi). \tag{12.1}$$

هذه هي النسخة المنتهية من التفكيك المسجل في . ولأن عدد الشخصيات هو $\varphi(q)$، فإن تقديرًا موحدًا لكل شخصية لا يخسر عاملًا إضافيًا من رتبة $q$ عند التجميع في (12.1).

## ٠٣١٢. الرد إلى الجد البدائي

**لمّة ١١٢.** (رد مجموع فون مانغولت إلى الشخصية البدائية). لتكن $\chi \pmod q$ مستحثة من شخصية بدائية $\chi^* \pmod r$، حيث $r \mid q$. عندئذ، لكل $x \ge 2$،

$$\psi(x,\chi) = \psi(x,\chi^*) + O(\log(2q)\log(2x)),$$

بثابت مطلق.

برهان. إذا كان $(n,q)=1$، فإن $\chi(n)=\chi^*(n)$. ولا يمكن أن يختلف الطرفان على قوة أولية $p^k$ إلا إذا كان $p \mid q$ وحذف العامل المحلي الموافق عند الاستحثاث. لذلك

$$\psi(x,\chi) - \psi(x,\chi^*) = -\sum_{\substack{p^k \le x \\ p\mid q,\ p\nmid r}} \chi^*(p)^k \log p.$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} |\psi(x,\chi) - \psi(x,\chi^*)| &\le \sum_{p\mid q} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p \\ &\le \omega(q)\log x \\ &\ll \log(2q)\log(2x). \end{aligned}$$

□

في المجال $q \le (\log x)^A$، يكون هذا الخطأ متعدد اللوغاريتمات، ولذلك يمتص في كل من الحد الأسي المستهدف وأي ادخار لوغاريتمي ثابت.

## ٠.٤١٢ مدخلان مقتبسان من النظرية الكمية

المسار الكمي لا ينتج من مبرهنة Wiener--Ikehara النوعية وحدها. نحتاج حدًا فعالًا للشخصية الرئيسية، وصيغة صريحة مقطوعة موحدة للشخصيات البدائية.

**مبرهنة ٠.٢١٢** (حد دو لا فاليه بوسان لمبرهنة الأعداد الأولية)**.** توجد ثوابت مطلقة فعالة $c, C > 0$ بحيث، لكل $x \geq 3$،

$$\psi(x) = x + O\Big(Cxe^{-c\sqrt{\log x}}\Big). \tag{12.2}$$

هذه النتيجة أقوى كميًا من ، الذي يثبت فقط $\psi(x) \sim x$. لا نستخرج (12.2) من النتيجة النوعية. لتجنب مشكلة نقاط القفز، نعرف النسخة المنصفة

$$\psi_0(x,\chi) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n<x}\chi(n)\Lambda(n) + \sum_{n\leq x}\chi(n)\Lambda(n)\right).$$

ولدينا دائمًا

$$\psi(x,\chi) - \psi_0(x,\chi) = O(\log(2x)).$$

**مبرهنة ٠.٣١٢** (الصيغة الصريحة الكمية بعد عزل الاستثناء)**.** توجد ثوابت مطلقة فعالة $c, C > 0$ بالخاصية الآتية. لتكن $\chi$ شخصية بدائية غير رئيسية بموصل $r$، ولتكن $x \geq 3$ و$r \leq T \leq x$. يمكن اختيار ارتفاع

$$U \in [T, 2T]$$

لا يساوي ارتفاع صفر، بحيث

$$\psi_0(x,\chi) = -\mathbf{1}_{\beta_\chi}\frac{x^{\beta_\chi}}{\beta_\chi} + O\left(xe^{-\frac{c\log x}{\log(r(U+2))}}\log^2(r(U+2)) + \frac{x\log^2(rxU)}{U} + \log^2(rxU)\right). \tag{12.3}$$

هنا $\beta_\chi$ هو الصفر الحقيقي الاستثنائي الممكن في المنطقة القياسية من الفصل الحادي عشر، ويكون الحد الأول غائبًا إذا لم يوجد هذا الصفر. الثوابت في (12.3) فعالة قبل امتصاص الحد الاستثنائي.

## ٠.٥١٢ اختيار ارتفاع القطع وضبط الجزء غير الاستثنائي

**لمّة ٠.٤١٢** (اختيار الارتفاع اللوغاريتمي)**.** ليكن $A > 0$. توجد ثوابت $\kappa_A, c_A, C_A > 0$ فعالة بحيث إذا

$$q \leq (\log x)^A, \qquad \chi^* \pmod r, \qquad r \mid q,$$

وكانت $\chi^*$ بدائية وغير رئيسية، فإن الجزء غير الاستثنائي في (12.3) يحقق

$$\psi(x,\chi^*) + \mathbf{1}_{\beta_{\chi^*}}\frac{x^{\beta_{\chi^*}}}{\beta_{\chi^*}} \ll_A xe^{-c_A\sqrt{\log x}}. \tag{12.4}$$

الثوابت هنا فعالة؛ عدم الفعالية لم تدخل بعد.

برهان. ضع $L = \log x$، واختر

$$T = e^{\kappa\sqrt{L}},$$

حيث $\kappa > 0$ ثابت صغير سيحدد بحسب الثوابت المطلقة في (12.3). عند كبر $x$، لدينا

$$r \le q \le L^A \le T \le x.$$

طبّق المبرهنة ٣١٢. واختر الارتفاع $U \in [T, 2T]$ الذي تمنحه. عندئذ

$$\log(r(U+2)) \le A \log L + \kappa\sqrt{L} + O(1) \ll_{A,\kappa} \sqrt{L}.$$

ومن ثم

$$\exp\left(-\frac{cL}{\log(r(U+2))}\right) \le e^{-c_{A,\kappa}\sqrt{L}}.$$

وتعطي كلفة القطع، باستعمال $U \ge T$ و$U \le 2T$،

$$\frac{x \log^2(rxU)}{U} \ll_A x e^{-\kappa\sqrt{L}} L^2,$$

بينما لا يتجاوز الحد الأخير قوة ثابتة من $L$. وتمتص كل خسارة متعددة اللوغاريتمات بعد تصغير ثابت الأس، لأن

$$L^D e^{-c\sqrt{L}} \le e^{-c'\sqrt{L}}$$

لكل $D$ ثابت ولكبر $L$. وأخيرًا يمتص الفرق بين $\psi$ و$\psi_0$ في الحد نفسه. أما المجال المحدود من قيم $x$، فيمتص بتكبير الثابت $C_A$. □

## ٦١٢. الصفر الاستثنائي وموضع استعمال مبرهنة سيغل

اللمّة السابقة لا تسمح بحذف الحد

$$-\frac{x^{\beta_\chi}}{\beta_\chi}.$$

يجب إبقاؤه ظاهراً حتى هذه النقطة.

**لمّة ٥١٢.** (امتصاص حد الصفر الاستثنائي). ليكن $A > 0$. يوجد ثابت غير فعال $c_A > 0$ بحيث إذا $r \le q \le (\log x)^A$، وكانت شخصية حقيقية بدائية بموصل $r$ تملك صفراً استثنائياً $\beta$، فإن

$$\frac{x^\beta}{\beta} \ll_A x e^{-c_A\sqrt{\log x}}. \tag{12.5}$$

برهان. الصفر الاستثنائي قريب من الواحد، ولذلك $\beta \ge 1/2$ بعد امتصاص مجال محدود من الموصلات، ومن ثم $1/\beta \le 2$. من ، لكل $\varepsilon > 0$،

$$1 - \beta \ge c_\varepsilon r^{-\varepsilon},$$

حيث $c_\varepsilon$ غير فعال. اختر $\varepsilon > 0$ بحيث $A\varepsilon = 1/2$. عندئذ

$$r^{-\varepsilon} \geq q^{-\varepsilon} \geq (\log x)^{-A\varepsilon} = (\log x)^{-1/2}.$$

إذًا

$$(1-\beta)\log x \geq c_\varepsilon \sqrt{\log x},$$

ومن ثم

$$x^\beta = x\exp(-(1-\beta)\log x) \leq xe^{-c_\varepsilon\sqrt{\log x}}.$$

هذا هو الموضع الوحيد الذي تدخل فيه مبرهنة سيغل في المسار الأدنى، ويرث الثابت عدم فعاليتها. □

ملاحظة ٠.٦١٢ (لماذا لا يجوز إخفاء الاستثناء مبكرًا؟). قبل اللمّة السابقة قد يكون $x^\beta$ قريبًا من $x$. المنطقة القياسية وحدها لا تبعد $\beta$ بما يكفي عندما ينمو الموصل. لذلك فإن وضع الحد في رمز $O$ قبل استعمال سيغل يفقد المعلومة الحاسمة ويخفي مصدر عدم الفعالية.

## ٠.٧١٢ مبرهنة سيغل--فالفش

**مبرهنة ٠.٧١٢** (مبرهنة سيغل--فالفش في صيغة $\psi$). لكل $A > 0$، توجد ثوابت $c_A, C_A > 0$، غير فعالة في المسار غير المشروط العام، بحيث لكل $x \geq 3$، ولكل

$$1 \leq q \leq (\log x)^A, \qquad (a,q) = 1,$$

لدينا

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O\Big(C_A x e^{-c_A\sqrt{\log x}}\Big), \tag{12.6}$$

بانتظام في $q$ و$a$.

برهان. نبدأ من مرشح الشخصيات (12.1).

**الشخصية الرئيسية.** إذا كانت $\chi_0 \pmod q$ رئيسية، فهي مستحثة من الشخصية التافهة. من اللمّة ٠.١١٢ ومبرهنة ٠.٢١٢:

$$\psi(x,\chi_0) = \psi(x) + O(\log(2q)\log(2x)) = x + O_A\Big(xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big). \tag{12.7}$$

**الشخصيات غير الرئيسية.** لتكن $\chi \pmod q$ غير رئيسية، ولتكن $\chi^* \pmod r$ جدها البدائي. تعطي اللمّة ٠.٤١٢ تقديرًا أسيًا فعالًا لكل الجزء غير الاستثنائي. وإذا وجد صفر استثنائي، تمتص مساهمته باللمّة ٠.٥١٢. ثم تعيد اللمّة ٠.١١٢ الشخصية المستحثة، فنحصل على

$$\psi(x,\chi) \ll_A xe^{-c_A\sqrt{\log x}} + \log(2q)\log(2x).$$

ولأن $q \le L^A$، فإن

$$\log(2q)\log(2x) \ll_A L\log(2L) = o\Big(xe^{-c_A\sqrt{L}}\Big)$$

بعد تصغير $c_A$ عند الحاجة. إذن

$$\psi(x,\chi) \ll_A xe^{-c_A\sqrt{\log x}} \tag{12.8}$$

موحدًا لكل شخصية غير رئيسية.

ندخل (12.7) و(12.8) في (12.1). تساهم الشخصية الرئيسية بالحد $x/\varphi(q)$. أما بقية الشخصيات، فعددها لا يتجاوز $\varphi(q)$، ويلغي عامل $1/\varphi(q)$ هذه الكثرة من دون خسارة إضافية. تنتج (12.6). □

ملاحظة ٠.٨١٢. (مقارنة بمسارات أحدث). توجد صيغ أقوى وأكثر انتظامًا تعزل الصفر الاستثنائي وتستعمل مناطق Vinogradov--Korobov وتقديرات كثافة خالية من اللوغاريتم وتنافر Deuring--Heilbronn؛ انظر [TZ24]. كما توجد براهين حديثة من منظور الدوال الضربية الادعائية [Kou13]. لا يحتاج المسار الكلاسيكي الأدنى هنا إلى هذه التحسينات.

## ٠.٨١٢ الادخار اللوغاريتمي الاعتباطي

**نتيجة ٠.٩١٢.** (صيغة سيغل--فالفش اللوغاريتمية). لكل $A, B > 0$، يوجد ثابت غير فعال $C_{A,B} > 0$ بحيث، بانتظام في $q \le (\log x)^A$ و$(a,q)=1$،

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_{A,B}\left(\frac{x}{(\log x)^B}\right). \tag{12.9}$$

برهان. لكل $c, B > 0$، لدينا

$$e^{-c\sqrt{\log x}} \ll_{c,B} (\log x)^{-B},$$

لأن $\sqrt{\log x}$ يغلب $\log\log x$. نطبق ذلك على (12.6). □

## ٠.٩١٢ الانتقال إلى $\vartheta(x;q,a)$

**نتيجة ٠.١٠١٢.** (التوزيع المنتظم للدالة $\vartheta$). لكل $A, B > 0$، بانتظام في $q \le (\log x)^A$ و$(a,q)=1$،

$$\vartheta(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_{A,B}\left(\frac{x}{(\log x)^B}\right), \tag{12.10}$$

والثابت غير فعال في الصيغة العامة.

برهان. لدينا

$$0 \le \psi(x;q,a) - \vartheta(x;q,a) \le \sum_{\substack{p^k \le x \\ k \ge 2}} \log p.$$

ومن حد القوى الأولية العليا في :

$$\sum_{\substack{p^k\le x\\ k\ge 2}} \log p \ll \sqrt{x}\log^2(2x).$$

وهذا أصغر من $x/(\log x)^B$ لكل $B$ ثابت عند كبر $x$. نطبق (12.9) ونمتص المجال المحدود في الثابت. □

## ١٠١٢. الانتقال إلى $\pi(x;q,a)$

نعرف

$$\mathrm{Li}(x)=\int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

**نتيجة ١١١٢.** (التوزيع المنتظم لعدد الأوليات). لكل $A,B>0$، بانتظام في $q\le(\log x)^A$ و $(a,q)=1$،

$$\pi(x;q,a)=\frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)}+O_{A,B}\left(\frac{x}{(\log x)^B}\right), \tag{12.11}$$

والثابت غير فعال في الصيغة العامة.

برهان. من الجمع الجزئي:

$$\pi(x;q,a)=\frac{\vartheta(x;q,a)}{\log x}+\int_2^x \frac{\vartheta(t;q,a)}{t\log^2 t}\,dt. \tag{12.12}$$

لا يجوز تطبيق (12.10) آليًا على كل $t\le x$، لأن الشرط $q\le(\log t)^A$ قد يفشل في الجزء الصغير. نعالج ذلك بهامش في الأس.

طبق (12.10) بالمعلم $2A$ وبقوة لوغاريتمية أكبر من $B+3$، وضع

$$y=\exp\left(q^{1/(2A)}\right).$$

لـ$t\ge y$، لدينا $q\le(\log t)^{2A}$، فتصلح الصيغة الموحدة. ومن الفرض $q\le(\log x)^A$ ينتج

$$y\le e^{\sqrt{\log x}}.$$

في المجال $[2,y]$، نستعمل حد تشيبيشيف التافه $\vartheta(t;q,a)\le\vartheta(t)\ll t$، فتكون مساهمته في (12.12) من رتبة $O(y)$، وهي

$$e^{\sqrt{\log x}}=o\left(\frac{x}{(\log x)^B}\right).$$

وفي المجال $[y,x]$، نكتب

$$\vartheta(t;q,a)=\frac{t}{\varphi(q)}+E(t),\qquad E(t)\ll_{A,B}\frac{t}{(\log t)^{B+3}}.$$

تجمع مساهمة الحد الرئيسي في الطرف عند $x$ والتكامل على $[y,x]$ إلى

$$\frac{1}{\varphi(q)}\left(\frac{x}{\log x}+\int_y^x \frac{dt}{\log^2 t}\right)=\frac{1}{\varphi(q)}\left(\mathrm{Li}(x)-\mathrm{Li}(y)+\frac{y}{\log y}\right).$$

ولذلك تختلف عن $\mathrm{Li}(x)/\varphi(q)$ بمقدار

$$O\left(\frac{\mathrm{Li}(y)+y/\log y}{\varphi(q)}\right)=O(y),$$

وهو ممتص في الخطأ السابق. أما خطأ الطرف والتكامل، فيحققان

$$\frac{E(x)}{\log x}+\int_y^x \frac{E(t)}{t\log^2 t}\,dt \ll_{A,B} \frac{x}{(\log x)^B}.$$

وللتفصيل، مساهمة $[y,\sqrt{x}]$ لا تتجاوز $O(\sqrt{x})$، ومساهمة $[\sqrt{x},x]$ لا تتجاوز $O(x/(\log x)^{B+5})$. فتنتج (12.11). □

# ٠.١١١٢ قراءة النتيجة وحدودها

## ٠.١٠١١١٢ ما الذي أضيف إلى الفصل العاشر؟

الفصل العاشر يثبت النهاية عند كل ترديد ثابت، لكنه لا يحدد سرعة التقارب بانتظام في $q$. أما هذا الفصل فيعطي مجالًا واحدًا من الترديدات المتغيرة وحدًا واحدًا صالحًا لها جميعًا. ولذلك يمكن استعمال النتيجة في مسائل تحتاج جمعًا أو مقارنة على ترديدات لوغاريتمية، وهو ما لا تسمح به النتيجة النوعية وحدها.

## ٠.٢٠١١١٢ لماذا المجال لوغاريتمي؟

من المنطقة القياسية نحصل، تقريبًا، على عامل

$$\exp\left(-\frac{c\log x}{\log(qT)}\right).$$

وعند اختيار $T=e^{\kappa\sqrt{\log x}}$، يبقى المقام من رتبة $\sqrt{\log x}$ ما دام $\log q \ll \log\log x$، أي عندما يكون $q$ قوة ثابتة من $\log x$. أما الوصول إلى ترديدات من رتبة قوة موجبة من $x$، فيحتاج آليات أخرى أو متوسطًا على الترديدات.

## ٠.٣٠١١١٢ الفعالية وعدم الفعالية

كل جزء من البرهان قبل اللمّة ٠.٥١٢ يمكن جعله فعالًا ضمن المداخل المقتبسة الفعالة. عدم الفعالية تدخل فقط من الثابت $c_\varepsilon$ في مبرهنة سيغل. وإذا عزل المرء الترديدات المرتبطة بالشخصية الاستثنائية بدل امتصاصها، أمكن كتابة صيغ فعالة تحتوي حد $x^\beta/\beta$ ظاهرًا.

### ٠٤٠١١١٢. ما الذي لا تثبته المبرهنة؟

لا تثبت سيغل--فالفش:

- انتظامًا فرديًا لكل $q \leq x^\delta$ مع $\delta > 0$.
- مبرهنة Bombieri--Vinogradov أو مستوى توزيع $1/2$.
- حدًا فعالًا عامًا بعد حذف الصفر الاستثنائي دون تتبعه.
- أصغر أولي في فئة حسابية بحد لينك.
- أي نتيجة مشروطة بفرضية ريمان المعممة.

## ٠١٢١٢. أمثلة تفسيرية

**مثال ٠١٢١٢.** (ترديد ثابت). إذا ثبت $q = 10$، فإن الفصل العاشر يكفي لإثبات التكافؤ التقاربي. تعطي سيغل--فالفش أكثر من ذلك: حدًا كميًا صالحًا للترديد نفسه ولجميع الترديدات حتى قوة ثابتة من $\log x$.

**مثال ٠١٣١٢.** (ترديد يتحرك ببطء). إذا كان

$$q(x) = \lfloor (\log x)^3 \rfloor ,$$

واختيرت فئة $a(x)$ مختزلة مع $q(x)$، فلا يجوز تطبيق مبرهنة الفصل العاشر مباشرة؛ لأن الترديد لم يعد ثابتًا. أما المبرهنة ٠٧١٢ فتطبق بالمعلم $A = 3$.

**مثال ٠١٤١٢.** (أثر إشارة الشخصية الاستثنائية). قبل استعمال سيغل، يظهر الحد الثانوي في الفئة على الصورة

$$-\frac{\overline{\chi_1(a)}}{\varphi(q)} \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}.$$

لذلك يمكن أن تختلف إشارة الانحياز بين الفئات بحسب قيمة الشخصية الحقيقية. هذه البنية لا تختفي منطقيًا إلا بعد إثبات أن الحد صغير في المجال اللوغاريتمي. وتبقى آثار الأصفار الاستثنائية مهمة عند دراسة مجالات أكبر أو متوسطات أدق؛ انظر [DF21; TZ24].

## ٠١٣١٢. تمارين

١. أثبت بدقة الهوية (12.1) من تعامد شخصيات ديريشليه.

٢. حسن برهان اللمّة ٠١١٢ إلى الحد

$$\sum_{p \mid q} \log p \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor .$$

٣. تحقق من أن $L^D e^{-c\sqrt{L}} \le e^{-c\sqrt{L}/2}$ لكل $D$ ثابت ولكبر $L$.

٤. بيّن أن اختيار $T = e^{\kappa\sqrt{L}}$ يوازن بين خطأ القطع $x/T$ والمنطقة الخالية القياسية.

٥. حدد موضع استعمال مبرهنة سيغل في برهان المبرهنة المركزية، وفسر لماذا لا تنتقل عدم الفعالية إلى اللمّة ٠.٤١٢.

٦. أثبت أن

$$\sqrt{x}\log^2 x = o\big(x(\log x)^{-B}\big)$$

لكل $B > 0$.

٧. أكمل تفاصيل تقدير التكامل في برهان ٠.١١١٢ بعد تقسيمه عند $\sqrt{x}$.

٨. اشرح لماذا لا تكفي مبرهنة الترديد الثابت لإثبات النتيجة عندما $q = \lfloor \log x \rfloor$.

٩. قارن منطقيًا بين عبارة سيغل--فالفش الفردية وعبارة Bombieri--Vinogradov المتوسطية، من دون محاولة إثبات الأخيرة.

## ٠.١٤١٢ خلاصة الفصل

المسار الكامل هو

الصيغة الصريحة المقطوعة $\longrightarrow$ الرد إلى الجد البدائي $\longrightarrow$ مرشح الشخصيات $\longrightarrow$ المنطقة الخالية $\longrightarrow$ عزل الصفر الاستثنائي $\longrightarrow$ مبرهنة سيغل.

الجزء غير الاستثنائي يعطي ادخارًا أسيًا فعالًا بعد اختيار ارتفاع القطع. أما الحد الاستثنائي فيمتص فقط باستعمال مبرهنة سيغل، ولذلك يكون الثابت النهائي غير فعال. وينتج عن ذلك توزيع موحد للأوليات في جميع الفئات المختزلة للترديدات $q \le (\log x)^A$، مع بقاء Bombieri--Vinogradov مرحلة مستقلة لاحقة.

# باب ١٣

# مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف والتوزيع المتوسطي للأعداد الأولية

## ١١٣. نطاق الفصل

الانتقال المفاهيمي من الفصل الثاني عشر جوهري. فمبرهنة سيغل--فالفش تعطي تقديرًا فرديًا موحدًا لكل ترديد

$$q \leq (\log x)^A,$$

أما هنا فنسمح للترديدات بأن تبلغ تقريبًا $x^{1/2}$، لكن بعد أخذ متوسط الأخطاء على $q$. النتيجة المركزية هي أنه لكل $A > 0$، وبانتظام عندما

$$Q \leq \frac{x^{1/2}}{(\log x)^{A+3}},$$

لدينا

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \sup_{2 \leq y \leq x} \left| \psi(y; q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}.$$

الثابت الضمني في المسار المعتمد غير فعال؛ فالبرهان يستعمل مبرهنة سيغل--فالفش للموصلات الصغيرة. لا يثبت الفصل فرضية إليوت--هالبرستام، ولا يتجاوز مستوى التوزيع $1/2$ في الصيغة العامة غير الموزونة، ولا يعالج الفترات القصيرة أو مبرهنة باربان--دافنبورت--هالبرستام.

الملفات الحاكمة للتأليف هي:

### ١١٣.١. نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. تفسير الفرق بين الانتظام الفردي والانتظام المتوسطي في الترديد.

٢. استعمال الغربال الكبير للشخصيات البدائية بوزنه الصحيح.

٣. إثبات هوية فوغان بتفاف ديريشليه.

٤. رد حدود هوية فوغان إلى مجاميع من النمطين الأول والثاني.

٥. إثبات متراجحة بوليا--فينوغرادوف من تحويل فورييه المنتهي.

٦. اختيار معاملي القطع $U, V$ في المجالات المختلفة لـ$Q$.

٧. فصل الشخصية الرئيسية ورد الشخصيات المستحثة إلى موصلاتها.

٨. تحديد الموضع الذي تدخل فيه عدم فعالية مبرهنة سيغل--فالفش.

٩. اشتقاق النسخ الموافقة لـ$\vartheta$ و$\pi$.

١٠. تحويل تقدير متوسط إلى عبارة ``تقريباً كل الترديدات".

## ٢١٣. الأخطاء ومستوى التوزيع

لكل $(a,q)=1$، نضع

$$E(y;q,a)=\psi(y;q,a)-\frac{y}{\varphi(q)},$$

ونعرف

$$E^*(x,q)=\max_{(a,q)=1}\sup_{2\le y\le x}|E(y;q,a)|.$$

**تعريف ١١٣.** (مستوى توزيع متوسط). نقول، بصورة غير رسمية في هذا الفصل، إن الأوليات تملك مستوى توزيع $\theta$ إذا أمكن ضبط

$$\sum_{q\le x^{\theta-o(1)}}E^*(x,q)$$

بادخار لوغاريتمي اعتباطي. تثبت مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف المستوى $\theta=1/2$ حتى خسارة من قوة اللوغاريتم.

لا تعني هذه العبارة أن كل ترديد مفرد حتى $x^{1/2}$ يحقق تقديراً من نوع سيغل--فالفش. قد توجد ترديدات ذات خطأ أكبر، لكن مجموع الأخطاء على الترديدات يبقى صغيراً.

## ٣١٣. حزمة الغربال الكبير

**مبرهنة ٢١٣.** (الغربال الكبير للشخصيات والنسخة الثنائية العظمى). لتكن $Q\ge 1$.

أولاً، لكل معاملات مركبة $a_n$:

$$\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\left|\sum_{M<n\le M+N}a_n\chi(n)\right|^2\le (N+Q^2)\sum_{M<n\le M+N}|a_n|^2. \qquad (13.1)$$

ثانياً، لكل متتاليتين مركبتين $a_m, b_n$:

$$\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\sup_{Y}\left|\sum_{\substack{m\le M,\ n\le N\\ mn\le Y}} a_m b_n \chi(mn)\right|$$
$$\ll (M+Q^2)^{1/2}(N+Q^2)^{1/2}\left(\sum_{m\le M}|a_m|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n\le N}|b_n|^2\right)^{1/2}\log(2MN). \quad (13.2)$$

والنجمة تعني الجمع على الشخصيات البدائية.

الصيغة (13.1) هي صورة الغربال الكبير التربيعية، أما (13.2) فهي حزمة مركبة تستخرج منها بكوشي وأداة قطع عظمى. لا ندعي في هذا الفصل برهانًا داخليًا كاملًا للحزمة؛ بل نستعملها مدخلًا مقتبسًا مضبوط المنشأ.

## ٠.٤١٣ متراجحة بوليا--فينوغرادوف

**لمّة ٣١٣.** (بوليا--فينوغرادوف للشخصيات البدائية). إذا كانت $\chi$ شخصية بدائية غير رئيسية *modulo* $q>1$، فإن لكل فترة صحيحة

$$M < n \le M+N$$

لدينا

$$\left|\sum_{M<n\le M+N}\chi(n)\right| \ll \sqrt{q}\log(2q), \quad (13.3)$$

بثابت مطلق.

برهان. من تحويل فورييه المنتهي للشخصية البدائية وقيمة مجموع غاوس المطلقة في الفصل السابع، نحصل -- مع مراعاة اصطلاح المرافق -- على صيغة عكسية من الشكل

$$\chi(n)=\frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)e(an/q), \qquad |\tau(\overline{\chi})|=\sqrt{q}.$$

لذلك

$$\left|\sum_{n\le N}\chi(n)\right| \le \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{a=1}^{q-1}\left|\sum_{n\le N}e(an/q)\right|.$$

ويعطي تقدير المتسلسلة الهندسية

$$\left|\sum_{n\le N}e(an/q)\right| \ll \min\left(N, \frac{1}{\|a/q\|}\right).$$

وبتناظر $a$ و $q-a$:

$$\sum_{a=1}^{q-1} \min\left(N, \frac{1}{\|a/q\|}\right) \ll q \sum_{1\le a\le q/2} \frac{1}{a} \ll q\log(2q).$$

فتكون مجاميع البداية $O(\sqrt{q}\log(2q))$، ويعطي طرح مجموعي بدايتين التقدير نفسه لأي فترة. □

## ٠.٥١٣ هوية فوغان

لكل $U, V \ge 1$، نضع

$$\Lambda_U(n) = \Lambda(n)\mathbf{1}_{n\le U}, \qquad \mu_V(n) = \mu(n)\mathbf{1}_{n\le V}.$$

**لمّة ٠.٤١٣** (هوية فوغان)**.** لكل $n \ge 1$:

$$\Lambda(n) = c_1(n) + c_2(n) + c_3(n) + c_4(n), \tag{13.4}$$

حيث

$$\begin{aligned}
c_1(n) &= \Lambda(n)\mathbf{1}_{n\le U},\\
c_2(n) &= -\sum_{\substack{rdk=n\\ d\le U\\ k\le V}} \Lambda(d)\mu(k),\\
c_3(n) &= \sum_{\substack{mk=n\\ k\le V}} \mu(k)\log m,\\
c_4(n) &= \sum_{\substack{mk=n\\ m>U\\ k>V}} \left(\sum_{\substack{d|m\\ d>U}} \Lambda(d)\right)\mu(k).
\end{aligned}$$

برهان. على مستوى الدوال الحسابية والتفاف ديريشليه، تكون الحدود الأربعة

$$\Lambda_U, \qquad -\mathbf{1}*\Lambda_U*\mu_V, \qquad \log*\mu_V, \qquad (\log-\mathbf{1}*\Lambda_U)*(\mu-\mu_V).$$

بالتوسع والتجميع:

$$c_1+c_2+c_3+c_4 = \Lambda_U + \log*\mu - \mathbf{1}*\Lambda_U*\mu.$$

ومن هويتي

$$\log = \mathbf{1}*\Lambda, \qquad \mathbf{1}*\mu = \varepsilon,$$

نحصل على

$$\log*\mu = \Lambda, \qquad \mathbf{1}*\Lambda_U*\mu = \Lambda_U.$$

إذن مجموع الحدود هو $\Lambda$.

أما صيغة $c_4$ المفصلة، فتنتج من

$$\log m - \sum_{\substack{d|m\\ d\le U}} \Lambda(d) = \sum_{\substack{d|m\\ d>U}} \Lambda(d).$$

هذا العامل ينعدم عند $m \le U$، كما ينعدم $\mu-\mu_V$ عند $k \le V$، فتظهر شروط الدعم في $c_4$ تلقائيًا. □

## ٠.٦١٣ الرد إلى النمطين الأول والثاني

لتكن $f$ دالة حسابية مركبة، ونضع

$$S(Y;f)=\sum_{n\le Y}\Lambda(n)f(n).$$

**قضية ٠.٥١٣** (تفكيك مجاميع فون مانغولت)**.** تكتب $S(Y;f)$ مجموع أربعة حدود، منها حد قصير، وحدان من النمط الأول، وحد ثنائي من النمط الثاني:

$$\begin{aligned}
S_1(Y)&=\sum_{n\le\min(Y,U)}\Lambda(n)f(n),\\
S_2(Y)&=\sum_{t\le UV}a(t)\sum_{r\le Y/t}f(tr),\qquad |a(t)|\le\log t,\\
S_3(Y)&=\sum_{k\le V}\mu(k)\sum_{m\le Y/k}f(km)\log m,\\
S_4(Y)&=\sum_{\substack{mk\le Y\\ m>U\\ k>V}}b(m)\mu(k)f(mk),\qquad |b(m)|\le\log m.
\end{aligned}$$

برهان. نعوض هوية فوغان في تعريف $S$، ثم نضع

$$a(t)=-\sum_{\substack{dk=t\\ d\le U\\ k\le V}}\Lambda(d)\mu(k),\qquad b(m)=\sum_{\substack{d|m\\ d>U}}\Lambda(d).$$

ومن هوية فون مانغولت

$$\sum_{d|t}\Lambda(d)=\log t$$

نجد $|a(t)|\le\log t$ و$|b(m)|\le\log m$. ويكون $S_2,S_3$ من النمط الأول لأن أحد المتغيرين قصير، بينما يكون $S_4$ ثنائيًا لأن $m>U$ و$k>V$. □

## ٠.٧١٣ متوسط مجاميع الشخصيات

لكل عائلة $T(Y,\chi)$، نضع

$$\mathcal{M}(T)=\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\sup_{Y\le x}|T(Y,\chi)|.$$

## ٠.١.٧١٣ تقدير النمط الأول

**لمّة ٠.٦١٣.I** Type تاريدقة( ). في تفكيك فوغان مع $f(n) = \chi(n)$، إذا قسمنا $S_2 = S_2' + S_2''$ بحسب $t \le U$ أو $t > U$، فإن

$$\mathcal{M}(S_2') \ll \left(x + Q^{5/2}U\right)(\log(2Qx))^2, \tag{13.5}$$

و

$$\mathcal{M}(S_3) \ll \left(x + Q^{5/2}V\right)(\log(2Qx))^2. \tag{13.6}$$

برهان. تعالج الشخصية الوحيدة modulo 1 تافهًا بمساهمة $O(x(\log 2x)^2)$. ولـ$q > 1$، تعطي بوليا--فينوغرادوف

$$\sup_z \left|\sum_{r\le z} \chi(rt)\right| \le |\chi(t)|\sqrt{q}\log(2q).$$

وباستعمال $|a(t)| \le \log t$:

$$\sup_{Y\le x} |S_2'(Y,\chi)| \ll U\sqrt{q}\,(\log(2qU))^2.$$

عدد الشخصيات البدائية لا يتجاوز $\varphi(q)$، ومع الوزن $q/\varphi(q)$ يظهر

$$\sum_{q\le Q} q^{3/2} \ll Q^{5/2},$$

فتنتج (13.5).

أما $S_3$، فالجمع الجزئي يرد عامل $\log m$ إلى مجاميع جزئية للشخصية مع خسارة $O(\log x)$. ثم تعطي بوليا--فينوغرادوف، بعد الجمع على $k \le V$، الصيغة (13.6). □

## ٠.٢.٧١٣ تقدير النمط الثاني

**لمّة ٠.٧١٣.II** Type تاريدقة( ). لدينا

$$\mathcal{M}(S_4) \ll \left(x + QxU^{-1/2} + QxV^{-1/2} + Q^2x^{1/2}\right)(\log 2x)^3, \tag{13.7}$$

كما أن الجزء $S_2''$ يحقق

$$\mathcal{M}(S_2'') \ll \left(x + QxU^{-1/2} + Qx^{1/2}(UV)^{1/2} + Q^2x^{1/2}\right)(\log 2x)^3. \tag{13.8}$$

برهان. نقسم المتغير الطويل إلى كتل ديادية $M < m \le 2M$. في كتلة من $S_4$، تكون معياريات المعاملات

$$\sum_m |b(m)|^2 \ll M(\log 2x)^2, \qquad \sum_{k\le x/M} |\mu(k)|^2 \le x/M.$$

بتطبيق النسخة الثنائية العظمى (13.2):

$$\mathcal{M}(S_{4,M}) \ll (M+Q^2)^{1/2}(x/M+Q^2)^{1/2}x^{1/2}(\log 2x)^2.$$

وبتوسيع حاصل الضرب تحت الجذر، ثم جمع الكتل، تهيمن النهاية الدنيا $U$ على حدود $M^{-1/2}$، والنهاية العليا $x/V$ على حدود $M^{1/2}$، فتنتج (13.7).

ولـ$S_2''$، نطبق الحساب نفسه مع المعاملين $a(t)$ و1، وعلى المجال $U < t \le UV$. فتكون النهاية العليا $UV$، وينتج الحد $Qx^{1/2}(UV)^{1/2}$ في (13.8). □

**مبرهنة ٠٨١٣.** (مبرهنة القيمة المتوسطة للشخصيات البدائية). لكل $Q \ge 1$ و$x \ge 2$:

$$\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \sup_{Y\le x} |\psi(Y,\chi)| \ll \left(x + x^{5/6}Q + x^{1/2}Q^2\right)(\log 2x)^3. \tag{13.9}$$

برهان. من حد تشيبيشيف، يكون

$$\mathcal{M}(S_1) \ll Q^2U,$$

ويمتص هذا في $Q^{5/2}U$. بجمع اللمتين السابقتين نحصل على

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\psi) \ll \Big(&x + QxU^{-1/2} + QxV^{-1/2} + Q^2x^{1/2} \\ &+ Qx^{1/2}(UV)^{1/2} + Q^{5/2}U + Q^{5/2}V\Big)(\log(2xUV))^3.\end{aligned} \tag{13.10}$$

إذا $Q \le x^{1/3}$، نأخذ $U = V = x^{1/3}$. وإذا $x^{1/3} \le Q \le x^{1/2}$، نأخذ

$$U = V = x^{2/3}/Q.$$

في الحالتين تمتص كل حدود (13.10) في الطرف الأيمن من (13.9).

إذا $Q > x^{1/2}$، نطبق (13.2) مباشرة مع

$$M = 1, \qquad a_1 = 1, \qquad b_n = \Lambda(n)\mathbf{1}_{n\le x}.$$

ومن

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n)^2 \le (\log x)\psi(x) \ll x\log(2x),$$

نحصل على حد يغطّيه $Q^2x^{1/2}(\log 2x)^3$. وهذا يكمل البرهان. □

## ٠٨١٣. من الشخصيات إلى الفئات الحسابية

لكل شخصية $\chi \pmod q$، نضع

$$\psi'(Y,\chi) = \psi(Y,\chi) - \mathbf{1}_{\chi=\chi_0}Y.$$

من تعامد الشخصيات:

$$E(Y;q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\psi'(Y,\chi), \tag{13.11}$$

ومن ثم

$$E^*(x,q) \le \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \sup_{Y \le x} |\psi'(Y,\chi)|. \tag{13.12}$$

إذا كانت $\chi \pmod q$ مستحثة من شخصية بدائية $\chi^* \pmod d$، فإن الفرق مدعوم على القوى الأولية المحذوفة، ولذلك

$$|\psi'(Y,\chi) - \psi'(Y,\chi^*)| \ll (\log(2qY))^2. \tag{13.13}$$

نحتاج أيضًا إلى اللمّة الأولية

$$\sum_{m \le X} \frac{1}{\varphi(m)} \ll \log(2X). \tag{13.14}$$

فهي تنتج من الهوية

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{r|n} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}$$

وتقارب

$$\sum_{r \ge 1} \frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)}.$$

وبما أن $\varphi(dm) \ge \varphi(d)\varphi(m)$، نحصل على

$$\sum_{\substack{q \le Q \\ d|q}} \frac{1}{\varphi(q)} \ll \frac{1}{\varphi(d)} \log \frac{2Q}{d}. \tag{13.15}$$

من (13.12)--(13.15):

$$\sum_{q \le Q} E^*(x,q) \ll Q(\log(2Qx))^2 + \sum_{d \le Q} \frac{\log(2Q/d)}{\varphi(d)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod d} \sup_{Y \le x} |\psi'(Y,\chi)|. \tag{13.16}$$

## ٠٩١٣ مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف

**مبرهنة ٠٩١٣.** (بومبييري--فينوغرادوف)**.** لكل $A > 0$، وبانتظام عندما

$$Q \le \frac{x^{1/2}}{(\log x)^{A+3}},$$

لدينا

$$\sum_{q \le Q} \max_{(a,q)=1} \sup_{2 \le Y \le x} \left| \psi(Y;q,a) - \frac{Y}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{13.17}$$

الثابت الضمني غير فعال في المسار المعتمد.

برهان. نضع

$$L = \log x, \qquad D = L^{A+4}.$$

نفصل مجموع (13.16) عند $d = D$.

**الموصلات الصغيرة.** إذا $d \le D$، فإن مبرهنة سيغل--فالفش من الفصل الثاني عشر، مع أس كبير بما يكفي، تعطي لكل شخصية بدائية غير رئيسية

$$\sup_{Y \le x} |\psi(Y, \chi)| \ll_A x e^{-c_A \sqrt{L}}. \tag{13.18}$$

وللشخصية ذات الموصل 1، تعطي مبرهنة الأعداد الأولية الفعالة التقدير نفسه لـ$|\psi(Y) - Y|$. لتوحيد القيمة العظمى، نطبق سيغل--فالفش عندما $Y \ge e^{\sqrt{L}}$، ونعالج $Y < e^{\sqrt{L}}$ تافهًا. لذلك تكون مساهمة $d \le D$

$$\ll_A D \log(2Q) x e^{-c_A \sqrt{L}} \ll_A x L^{-A}. \tag{13.19}$$

هذا هو موضع عدم الفعالية.

**الموصلات الكبيرة.** نقسم $D < d \le Q$ إلى كتل ديادية $U < d \le 2U$. في هذه الكتل تكون الشخصيات البدائية غير رئيسية، ومن

$$\frac{1}{\varphi(d)} \le \frac{1}{U} \frac{d}{\varphi(d)}$$

ومبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على

$$\begin{aligned} &\sum_{U < d \le 2U} \frac{\log(2Q/d)}{\varphi(d)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod d} \sup_{Y \le x} |\psi(Y, \chi)| \\ &\qquad \ll \left( \frac{x}{U} + x^{5/6} + x^{1/2} U \right) L^3 \log(4Q/U). \end{aligned}$$

بعد جمع الكتل تكون المساهمة

$$\ll x D^{-1} L^4 + x^{5/6} L^5 + x^{1/2} Q L^3. \tag{13.20}$$

نأخذ

$$Q_0 = x^{1/2} L^{-(A+3)}.$$

عندئذ

$$x D^{-1} L^4 = x L^{-A}, \qquad x^{1/2} Q_0 L^3 = x L^{-A},$$

كما أن $x^{5/6} L^5 \ll_A x L^{-A}$. ويمتص الخطأ المحلي الأول في (13.16) أيضًا. فتنتج (13.17) عند $Q_0$، ثم تمتد إلى كل $Q \le Q_0$ برتابة الطرف الأيسر. □

## ١٠١٣. نتائج تابعة

**نتيجة ١٠١٣.** (النسخة الموافقة لـ$\vartheta$). لكل $A > 0$، إذا

$$Q \leq \frac{x^{1/2}}{(\log x)^{A+3}},$$

فإن

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \sup_{2 \leq Y \leq x} \left| \vartheta(Y; q, a) - \frac{Y}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{13.21}$$

برهان. من ضبط القوى الأولية العليا في الفصل التاسع:

$$|\psi(Y; q, a) - \vartheta(Y; q, a)| \leq \psi(Y) - \vartheta(Y) \ll Y^{1/2} \log(2Y).$$

وبجمع هذا الخطأ على $q \leq Q$، نحصل على

$$Qx^{1/2} \log(2x) \leq x(\log x)^{-(A+2)},$$

فيمتص في (13.17). □

**نتيجة ١١١٣.** (النسخة الموافقة لـ$\pi$). لكل $A > 0$، إذا

$$Q \leq \frac{x^{1/2}}{(\log x)^{A+4}},$$

فإن

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \sup_{2 \leq Y \leq x} \left| \pi(Y; q, a) - \frac{\mathrm{Li}(Y)}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{13.22}$$

برهان. بالتجميع الجزئي:

$$\pi(Y; q, a) = \frac{\vartheta(Y; q, a)}{\log Y} + \int_2^Y \frac{\vartheta(t; q, a)}{t(\log t)^2}\, dt.$$

بعد طرح $\mathrm{Li}(Y)/\varphi(q)$، يضبط الخطأ بأكبر خطأ في $\vartheta$ مضافًا إليه حد مطلق. نطبق النتيجة السابقة بأس الادخار $A + 1$، ولذلك يصبح مجال الترديد $A + 4$. أما مجموع الحدود المطلقة على $q \leq Q$ فيمتص في الطرف المطلوب. □

**نتيجة ١٢١٣.** (تقريبًا كل الترديدات). لتكن $B, C > 0$، وافترض

$$Q \leq \frac{x^{1/2}}{(\log x)^{B+C+3}}.$$

عندئذ، جميع الترديدات $q \le Q$ عدا

$$O_{B,C}\left(\frac{Q}{(\log x)^C}\right)$$

منها تحقق

$$E^*(x,q) \le \frac{x}{Q(\log x)^B}. \tag{13.23}$$

برهان. نسمي $q$ سيئًا إذا خالف (13.23)، وليكن عدد الترديدات السيئة $R$. بتطبيق مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف بالأس $B+C$:

$$R\frac{x}{Q(\log x)^B} \le \sum_{q\le Q} E^*(x,q) \ll_{B,C} \frac{x}{(\log x)^{B+C}}.$$

ومن ثم $R \ll Q(\log x)^{-C}$. □

## ١١١٣. مقارنة النتائج الثلاث

| مجال الترديد | نوع الانتظام | النتيجة |
|---|---|---|
| ثابت | فردي، $q$ ثابت | الفصل العاشر |
| $q \le (\log x)^A$ | فردي موحد | سيغل--فالفش |
| $q \le x^{1/2}(\log x)^{-A-3}$ | $q$ متوسط على | بومبييري--فينوغرادوف |
| $q \le x^{1-\varepsilon}$ | متوسط تخميني | إليوت--هالبرستام |

مستوى $1/2$ ليس حدًا منطقيًا مطلقًا لكل مسألة؛ توجد نتائج تتجاوزه بأوزان خاصة أو بقيود بنيوية على الترديدات. لكن هذه النتائج لا تثبت فرضية إليوت--هالبرستام العامة، ولذلك تبقى خارج النواة البرهانية لهذا الفصل.

## ١٢١٣. مثال تفسيري

إذا أخذنا $A = 2$، تسمح المبرهنة بالترديدات حتى

$$Q \le \frac{x^{1/2}}{(\log x)^5},$$

وتعطي

$$\sum_{q\le Q} E^*(x,q) \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

لا نستنتج من ذلك أن كل $E^*(x,q)$ أصغر من $x/(Q(\log x)^2)$. لكن نتيجة تقريبًا كل الترديدات تبين أن عدد الترديدات ذات الخطأ الأكبر من عتبة مختارة صغير نسبيًا، بعد تخصيص ادخار لوغاريتمي إضافي.

## ٠١٣١٣ حدود الادعاء

## ٠١٤١٣ أسئلة تفسير وتمارين

١. اشرح لماذا لا تناقض مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف احتمال وجود ترديد مفرد ذي خطأ كبير نسبياً.

٢. تحقق مباشرة من هوية فوغان عند $n = p$، وعند $n = p^2$، لعدة علاقات بين $p, U, V$.

٣. أثبت الهوية

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}.$$

٤. أكمل تفاصيل الجمع الجزئي في تقدير $S_3$.

٥. تحقق من كل متراجحات اختيار $U, V$ في المجال $x^{1/3} \leq Q \leq x^{1/2}$.

٦. بيّن أن

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n)^2 \ll x \log x$$

باستعمال حد تشيبيشيف.

٧. استخرج من (13.17) عبارة ``تقريباً كل الترديدات" بعتبة مختلفة عن (13.23).

٨. اشرح بدقة لماذا يؤدي استعمال سيغل--فالفش في الموصلات الصغيرة إلى عدم فعالية الثابت النهائي.

٩. قارن منطقياً بين مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف وفرضية إليوت--هالبرستام، من دون الخلط بين نتيجة موزونة تتجاوز $1/2$ والفرضية العامة.

## ٠١٥١٣ خلاصة الفصل

بدأ الفصل من غربال كبير مقتبس للشخصيات البدائية، وأثبت داخلياً هوية فوغان ومتراجحة بوليا--فينوغرادوف، ثم ضبط مجاميع النمطين الأول والثاني، فحصل على مبرهنة قيمة متوسطة لمجاميع فون مانغولت الملتوية. بعد رد الشخصيات المستحثة إلى موصلاتها وفصل الشخصية الرئيسية والموصلات الصغيرة، نتجت مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف عند مستوى توزيع $1/2$ حتى خسارة لوغاريتمية. وأخيراً انتقل البرهان إلى $\vartheta$ و$\pi$ واستخرج نتيجة تقريباً كل الترديدات، مع بقاء عدم الفعالية وحدود النطاق معلنة بوضوح.

# باب ١٤

# مبرهنة باربان--دافنبورت--هالبرستام ومتوسط التباين التربيعي

## ١١٤. نطاق الفصل

يبحث الفصل متوسط مربع خطأ توزيع الأعداد الأولية في المتتاليات الحسابية. إذا كتبنا

$$\psi(x;q,a) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv a \pmod q}} \Lambda(n),$$

فإن الكمية المركزية هي

$$V_\psi(x,Q) = \sum_{q\le Q}\sum_{\substack{a \bmod q\\ (a,q)=1}} \left|\psi(x;q,a) - \frac{x}{\varphi(q)}\right|^2.$$

سنثبت أنه لكل ثابت $A > 0$، وبانتظام عندما

$$x \ge 3, \qquad \frac{x}{(\log x)^A} \le Q \le x,$$

لدينا

$$V_\psi(x,Q) \ll_A xQ\log x.$$

الثابت الضمني يعتمد على $A$، وهو غير فعال في المسار الحالي بسبب مدخل سيغل--فالفش للموصلات الصغيرة.

لا يثبت هذا الفصل الصيغة التقاربية لمونتغمري--هولي، ولا مبرهنة باربان العامة في كل مجالات $Q$، ولا أي نتيجة مشروطة بفرضية ريمان المعممة. كما لا يستعمل مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف في البرهان، رغم قرب الموضوعين مفهومياً.

### ١١٤.١. نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. تحويل تباين الفئات المختزلة إلى متوسط تربيعي على شخصيات ديريشليه.

٢. رد الشخصيات المستحثة إلى موصلاتها مع ضبط التصحيحات المحلية.

٣. فهم وزن الموصل

$$W_Q(r) = \sum_{m \le Q/r} \frac{1}{\varphi(rm)}.$$

٤. استعمال الغربال الكبير للشخصيات البدائية على كتل ديادية.

٥. تفسير اختيار حد الفصل

$$Y = \max\left(2, \frac{x}{Q}\log(2Q)\right).$$

٦. فصل الموصلات الصغيرة التي تعالج بسيغل--فالفش عن الموصلات الكبيرة التي يعالجها الغربال الكبير مباشرة.

٧. تتبع الشخصية الرئيسية والموصل 1 وعدم فعالية الثابت النهائي.

٨. التمييز بين الحد العلوي الكلاسيكي المثبت هنا والصيغ الأقوى المؤجلة.

## ٠.٢١٤ التوسيط وتحويل التباين إلى الشخصيات

لكل شخصية ديريشليه $\chi \bmod q$ نضع

$$\Psi(x,\chi) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)\chi(n)$$

ونعرّف المجموع المتمركز

$$\Psi^\circ(x,\chi) = \Psi(x,\chi) - x\,\mathbf{1}_{\chi=\chi_0^{(q)}}.$$

إذن الشخصية غير الرئيسية لا تتغير، بينما

$$\Psi^\circ(x,\chi_0^{(q)}) = \sum_{\substack{n \le x \\ (n,q)=1}} \Lambda(n) - x.$$

**لمّة ٠.١١٤** (هوية التباين بالشخصيات)**.** لكل $q \ge 1$:

$$\sum_{\substack{a \bmod q \\ (a,q)=1}} \left|\psi(x;q,a) - \frac{x}{\varphi(q)}\right|^2 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} |\Psi^\circ(x,\chi)|^2. \tag{14.1}$$

برهان. بتعامد شخصيات المجموعة المختزلة:

$$\psi(x;q,a)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi(a)}\Psi(x,\chi).$$

وبما أن الشخصية الرئيسية تساوي 1 على الفئات المختزلة، فإن طرح $x/\varphi(q)$ يعادل استبدال $\Psi$ بـ$\Psi^\circ$. وبعد تربيع القيمة المطلقة والجمع على $a$، تلغي علاقة التعامد الحدود المختلطة وتعطي العامل $1/\varphi(q)$ بالضبط. □

بالتالي يكفي ضبط

$$\mathcal{S}(x,Q)=\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}|\Psi^\circ(x,\chi)|^2,$$

إذ إن

$$V_\psi(x,Q)=\mathcal{S}(x,Q). \tag{14.2}$$

## ٠٣١٤. رد الشخصيات إلى الموصلات

لكل شخصية $\chi \bmod q$ موصل وحيد $r \mid q$ وشخصية بدائية وحيدة $\chi^* \bmod r$ تستحثها. نكتب $q=rm$، ونعرّف

$$W_Q(r)=\sum_{m\le Q/r}\frac{1}{\varphi(rm)}.$$

**لمّة ٠٢١٤.** (حد وزن الموصل). بانتظام لكل $1\le r\le Q$:

$$\frac{1}{\varphi(r)}\le W_Q(r)\ll\frac{\log(2Q/r)}{\varphi(r)}. \tag{14.3}$$

برهان. لدينا

$$\varphi(rm)\ge\varphi(r)\varphi(m),$$

ومن ثم

$$W_Q(r)\le\frac{1}{\varphi(r)}\sum_{m\le Q/r}\frac{1}{\varphi(m)}.$$

وباستعمال الهوية

$$\frac{n}{\varphi(n)}=\sum_{d\mid n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$$

والجمع التوافقي، نحصل على

$$\sum_{m\le M}\frac{1}{\varphi(m)}\ll\log(2M).$$

أما الحد السفلي فيأتي من الحد $m=1$. □

إذا كانت $\chi \bmod q$ مستحثة من $\chi^* \bmod r$، فإن الفرق بين المجموعين مدعوم على القوى الأولية التي تقسم $q$ ولا تقسم $r$:

$$\Psi^\circ(x,\chi) = \Psi^\circ(x,\chi^*) - C(x;q,r,\chi^*),$$

حيث

$$C(x;q,r,\chi^*) = \sum_{\substack{p^k \le x \\ p|q,\ p\nmid r}} \chi^*(p^k)\log p, \qquad |C(x;q,r,\chi^*)| \le \omega(m)\log x. \tag{14.4}$$

**لمّة ٠٣١٤.** (كلفة تصحيحات الاستحثاث)**.** لدينا

$$\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}|C(x;q,r_\chi,\chi^*)|^2 \ll Q(\log x)^2. \tag{14.5}$$

وبالتالي، إذا عرّفنا

$$\mathcal{P}(x,Q) = \sum_{r\le Q} W_Q(r) \sideset{}{^*}\sum_{\chi^* \bmod r} |\Psi^\circ(x,\chi^*)|^2,$$

فإن

$$\mathcal{S}(x,Q) \le 2\mathcal{P}(x,Q) + O\big(Q(\log x)^2\big). \tag{14.6}$$

**برهان.** بإعادة الفهرسة $q = rm$، وعدد الشخصيات البدائية $\varphi^*(r) \le \varphi(r)$، نحصل على

$$\mathcal{E}(x,Q) \le (\log x)^2 \sum_{m\le Q}\omega(m)^2 \sum_{r\le Q/m}\frac{\varphi^*(r)}{\varphi(rm)}.$$

ومن $\varphi(rm) \ge \varphi(r)\varphi(m)$:

$$\mathcal{E}(x,Q) \le Q(\log x)^2 \sum_{m\le Q}\frac{\omega(m)^2}{m\varphi(m)}.$$

وتتقارب المتسلسلة الأخيرة. ولتوضيح ذلك، ضع $g(n) = 1/(n\varphi(n))$. لكل أولي $p$:

$$G_p = \sum_{k\ge 1} g(p^k) = \frac{p}{(p-1)(p^2-1)} \ll p^{-2}.$$

وباستعمال

$$\omega(n)^2 = \sum_{p|n} 1 + 2\sum_{\substack{p<\ell \\ p\ell|n}} 1,$$

ثم تونيللي والتضاعف، تسيطر المتسلسلة المطلوبة بواسطة ثابت مضروب في

$$\sum_p G_p + 2\sum_{p<\ell} G_pG_\ell < \infty.$$

أما (14.6) فتنتج من $|A-B|^2 \le 2|A|^2 + 2|B|^2$. □

## ٠٤١٤ الغربال الكبير الموزون

سنستعمل حزمة الغربال الكبير المثبتة مرجعياً في الفصل الثالث عشر، ولا سيما المبرهنة ٠٠٢١٣. الصيغة الأساسية هي

$$\sum_{r\le R}\frac{r}{\varphi(r)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod r}\left|\sum_{M<n\le M+N}c_n\chi(n)\right|^2 \ll (N+R^2)\sum|c_n|^2.$$

**لمّة ٠٤١٤.** (الغربال الكبير بوزن الموصل). على كتلة $R<r\le 2R$، ولكل متتالية مركبة $c_n$ مدعومة في فترة طولها $N$:

$$\sum_{R<r\le 2R}W_Q(r)\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod r}\left|\sum_n c_n\chi(n)\right|^2 \ll \left(\frac{N}{R}+R\right)\log\frac{2Q}{R}\sum_n|c_n|^2. \tag{14.7}$$

برهان. على الكتلة $R<r\le 2R$، يعطينا (14.3)

$$W_Q(r)\ll\frac{\log(2Q/R)}{\varphi(r)}\le\frac{\log(2Q/R)}{R}\frac{r}{\varphi(r)}.$$

ثم نطبق الغربال الكبير حتى $2R$، فنحصل على

$$\frac{\log(2Q/R)}{R}(N+4R^2)\sum|c_n|^2,$$

وهو (14.7). □

## ٠٥١٤ فصل الموصلات

ضع

$$Y=\max\left(2,\frac{x}{Q}\log(2Q)\right). \tag{14.8}$$

في المجال

$$\frac{x}{(\log x)^A}\le Q\le x$$

لدينا، بعد تكبير حد يعتمد على $A$:

$$2\le Y\le Q,\qquad Y\ll_A(\log x)^{A+1}. \tag{14.9}$$

نفصل

$$\mathcal{P}(x,Q)=\mathcal{P}_{\le Y}(x,Q)+\mathcal{P}_{>Y}(x,Q).$$

## ٠١٠٥١٤ الموصلات الصغيرة

من مبرهنة سيغل--فالفش في الفصل الثاني عشر، لكل قوة لوغاريتمية ثابتة، وبانتظام للشخصيات البدائية ذات $r \leq Y$:

$$|\Psi^\circ(x, \chi^*)| \ll_A x \exp(-c_A \sqrt{\log x}).$$

وهذا يشمل الموصل 1، حيث

$$\Psi^\circ(x, \chi_1^*) = \psi(x) - x.$$

وبما أن عدد الشخصيات البدائية modulo $r$ لا يتجاوز $\varphi(r)$، فإن

$$\mathcal{P}_{\leq Y}(x, Q) \ll_A Y \log(2Q) x^2 e^{-2c_A\sqrt{\log x}} = o_A(xQ \log x). \tag{14.10}$$

هنا تحديدًا تدخل عدم فعالية الثابت النهائي.

## ٠٢٠٥١٤ الموصلات الكبيرة

نقسم المجال $(Y, Q]$ إلى الكتل غير المتراكبة

$$I_j = (R_j, \min(2R_j, Q)], \qquad R_j = 2^j Y,$$

لكل $j \geq 0$ مع $R_j < Q$.

في المتوسط البدائي لا توجد شخصية رئيسية بدائية ذات موصل $r > 1$: الشخصية الرئيسية modulo $q > 1$ مستحثة من الموصل 1. لذلك، على طبقة $r > Y \geq 2$:

$$\Psi^\circ(x, \chi^*) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi^*(n). \tag{14.11}$$

وهذا يجيز تطبيق لمّة ٠٤١٤ مباشرة على $c_n = \Lambda(n)\mathbf{1}_{n \leq x}$.

نستعمل الحد

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n)^2 \leq (\log x) \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ll x \log x, \tag{14.12}$$

حيث الحد الأخير هو حد تشيبيشيف من الفصل التاسع. ومن ثم مساهمة الكتلة ذات المقياس $R$ لا تتجاوز

$$\ll x \log x \left(\frac{x}{R} + R\right) \log \frac{2Q}{R}.$$

أما الجمع الديادي فيعطي

$$\sum_j R_j \log \frac{2Q}{R_j} \ll Q$$

و

$$\sum_j \frac{x}{R_j} \log \frac{2Q}{R_j} \ll \frac{x}{Y} \log \frac{2Q}{Y} \leq Q.$$

لذلك

$$\mathcal{P}_{>Y}(x, Q) \ll xQ \log x. \tag{14.13}$$

وبجمع (14.10) و(14.13):

$$\mathcal{P}(x, Q) \ll_A xQ \log x. \tag{14.14}$$

## ١٤.٦١٤. مبرهنة باربان--دافنبورت--هالبرستام في المجال الكلاسيكي

**مبرهنة ٥١٤.** (حد باربان--دافنبورت--هالبرستام الكلاسيكي)**.** لكل ثابت $A > 0$، يوجد ثابت $C_A > 0$ بحيث لكل $x \geq 3$ ولكل $Q$ يحقق

$$\frac{x}{(\log x)^A} \leq Q \leq x,$$

لدينا

$$\boxed{\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a \bmod q \\ (a,q)=1}} \left| \psi(x;q,a) - \frac{x}{\varphi(q)} \right|^2 \leq C_A x Q \log x}. \tag{14.15}$$

الثابت $C_A$ غير فعال في المسار الحالي.

برهان. من لمّة ٣١٤. و(14.14):

$$\mathcal{S}(x,Q) \ll_A xQ \log x + Q(\log x)^2.$$

ولأن $x \geq 3$، يمتص الحد الأول الثاني بعد تعديل الثابت. ثم نستعمل الهوية (14.2).

البرهان السابق يفترض ضمنياً أن $x$ أكبر من حد $x_0(A)$ يكفل (14.9). أما المجال المحدود $3 \leq x < x_0(A)$، فيمتص بتكبير الثابت $C_A$، لأن النسبة بين الطرف الأيسر و$xQ \log x$ محدودة على هذا المجال المحدود. □

ملاحظة ٦١٤. (طبيعة حد الفصل)**.** الاختيار (14.8) ليس تجميلياً؛ فهو يجعل مساهمة الحد $x/R$ في الغربال الكبير بعد أول كتلة من رتبة $Q$. وفي الوقت نفسه يبقي $Y$ داخل قوة ثابتة من $\log x$، وهي بالضبط المنطقة التي يغطيها سيغل--فالفش.

ملاحظة ٧١٤. (المقارنة مع بومبييري--فينوغرادوف)**.** مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف تضبط متوسطًا من النمط $L^1$ لأكبر خطأ في كل ترديد حتى مستوى يقارب $x^{1/2}$. أما (14.15) فتضبط متوسطًا تربيعياً على جميع الفئات المختزلة، في مجال $Q$ القريب من $x$. لا تتبع إحدى الصيغتين من الأخرى مباشرة بالتطبيع المستعمل هنا. ولا يستعمل هذا الفصل مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف تحديدًا؛ أما اعتماده الوحيد على الفصل الثالث عشر فهو حزمة الغربال الكبير المذكورة أعلاه.

## ١٤.٧١٤. المسار المؤجل وعائق التصادمات الضربية

من الطبيعي محاولة تفكيك $\Lambda$ بهوية فوغان ثم تطبيق الغربال الكبير على مستطيلات ثنائية. إذا جُمعت معاملات المستطيل في

$$c_n = \sum_{mk=n} \alpha_m \beta_k,$$

فإن القطر الكامل هو $\sum_n |c_n|^2$، وليس فقط حاصل معياري $\alpha$ و$\beta$. وبكوشي:

$$\sum_n |c_n|^2 \leq D_{M,K} \|\alpha\|_2^2 \|\beta\|_2^2,$$

حيث $D_{M,K}$ أكبر عدد لتمثيلات $n = mk$ في المستطيل. الحد العام المتاح من دالة القواسم هو $x^{o(1)}$، ولا يعطي خسارة لوغاريتمية ثابتة تكفي للرتبة الدقيقة المستهدفة.

لهذا لم يخف المشروع العائق، بل عزل مسار فوغان بوصفه طبقة بحثية مؤجلة، واعتمد بدلًا منه فصل الموصلات في البرهان الكلاسيكي. لا يثبت هذا أن مسار فوغان مستحيل؛ بل يثبت أن التجميع المباشر قبل استغلال البنية الثنائية غير كافٍ.

## ٨١٤.٠ الحدود المفتوحة

النتيجة المثبتة هنا حد علوي كلاسيكي فقط. تبقى خارج نطاق الفصل:

١. الصيغة التقاربية الدقيقة مع حد رئيسي ثابت؛

٢. مبرهنة مونتغمري--هولي وصيغها الموحدة؛

٣. مجالات أصغر لـ$Q$ لا يغطيها فصل الموصلات الحالي؛

٤. النسخ في الفترات القصيرة؛

٥. التعميمات إلى متتاليات أو معاملات أخرى؛

٦. تعميم التحليل إلى متوسطات التباين على ألياف البواقي والموصلات.

## ٩١٤.٠ خلاصة الفصل

يتكون البرهان من خمس حركات مترابطة:

١. تحويل تباين الفئات إلى متوسط تربيعي على الشخصيات؛

٢. رد الشخصيات إلى موصلاتها مع وزن $W_Q(r)$ وتصحيحات محلية صغيرة؛

٣. تطبيق الغربال الكبير بوزن الموصل؛

٤. فصل الموصلات الصغيرة والكبيرة عند $Y = (x/Q)\log(2Q)$؛

٥. إعادة التجميع وامتصاص كلفة الاستحثاث.

الناتج هو

$$V_\psi(x, Q) \ll_A xQ \log x$$

في المجال $x(\log x)^{-A} \leq Q \leq x$، مع ثابت غير فعال بسبب سيغل--فالفش وحدها. وقد بقيت الصياغات الأقوى والمسار العام لباربان مؤجلة بوضوح بدل خلطها بالحد المثبت.

# باب ١٥

# طرق الغربال الأساسية وغربال سيلبرغ وعائق التكافؤ

## ١١٥. نطاق الفصل

يقدم الفصل الصياغة المجردة لمشكلة الغربال، ثم يبني الحد العلوي المنتهي لغربال سيلبرغ من متراجحة مربعية ومسألة تصغير منتهية. بعد ذلك يعرّف البعد الغربالي، ويعرض اللمّة الأساسية بوصفها مدخلًا كميًا مستقلًا، ثم يشرح عائق التكافؤ ويطبق الحد العلوي على الأزواج المنخولة $n, n+h$.

لا يثبت الفصل حدسية الأوليات التوأم، ولا الفجوات المحدودة، ولا حدًا سفليًا لعدد الأزواج الأولية. كما لا يستعمل مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف أو مبرهنة باربان--دافنبورت--هالبرستام في بناء غربال سيلبرغ المجرد أو التطبيق المركزي.

### ١٠١١٥. نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. صياغة بيانات الغربال بواسطة $\mathcal{A}$، و$\mathcal{P}$، و$P(z)$، و$g(d)$، و$r_d$.

٢. اشتقاق متراجحة المربع التي يبدأ منها غربال سيلبرغ.

٣. فصل الصورة التربيعية الرئيسية عن حد البواقي.

٤. حل مسألة التصغير المنتهية وكتابة معاملات سيلبرغ المثلى.

٥. فهم معنى مقام سيلبرغ $G(R, z)$ وعلاقته بحاصل الضرب المحلي $V(z)$.

٦. التمييز بين البعد الغربالي $\kappa$، ومستوى البواقي $D$، وحد الغربلة $z$.

٧. تفسير اللمّة الأساسية بوصفها تقريبًا أحادي الصيغة مستقلًا عن الغربال الخطي.

٨. حساب الكثافة المحلية للأزواج $n, n+h$.

٩. صياغة عائق التكافؤ دون ادعاء استحالة مطلقة لكل طريقة غربالية.

## ٠٢١٥ بيانات الغربال المجردة

**تعريف ٠١١٥.** (بيانات الغربال). لتكن $\mathcal{A}$ متتالية منتهية من أوزان غير سالبة، ولتكن $\mathcal{P}$ مجموعة من الأوليات. نضع

$$P(z) = \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{P}}} p, \qquad S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{\substack{n\in\mathcal{A} \\ (n,P(z))=1}} 1.$$

ولكل عدد مربع حر $d \mid P(z)$ نكتب

$$\mathcal{A}_d = \{n \in \mathcal{A} : d \mid n\}, \qquad |\mathcal{A}_d| = Xg(d) + r_d,$$

حيث $g$ ضربية و$0 \le g(p) < 1$. ونعرّف حاصل الضرب المحلي

$$V(z) = \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{P}}} (1 - g(p)).$$

يمثل $Xg(d)$ الكتلة المحلية المتوقعة للعناصر التي يقسمها $d$، بينما يقيس $r_d$ انحراف البيانات الفعلية عن هذا النموذج. لا يكفي حاصل الضرب المحلي وحده للحصول على نتيجة كمية؛ إذ يجب أيضًا ضبط البواقي على مجال مناسب من القواسم.

## ٠٣١٥ متراجحة سيلبرغ التربيعية

نختار معاملات حقيقية $\lambda_d$ مدعومة على القواسم المربعة الحرة $d \mid P(z)$، مع $\lambda_1 = 1$. إذا كان $(n, P(z)) = 1$، فلا يقسم $n$ من هذه القواسم إلا 1، ولذلك يساوي مجموع المعاملات 1.

**لمّة ٠٢١٥.** (متراجحة المربع). لدينا

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \le \sum_{n\in\mathcal{A}} \left( \sum_{d|(n,P(z))} \lambda_d \right)^2. \tag{15.1}$$

برهان. إذا كان $(n, P(z)) = 1$، فإن المجموع الداخلي يساوي $\lambda_1 = 1$، ومن ثم يساوي مربعه 1. أما العناصر الأخرى فتضيف كميات غير سالبة، فتنتج المتراجحة بعد الجمع على $n \in \mathcal{A}$. □

بتوسيع المربع وتبديل المجاميع نحصل على

$$\sum_{d_1,d_2} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} |\mathcal{A}_{[d_1,d_2]}| = X\mathcal{Q}(\lambda) + \mathcal{R}(\lambda), \tag{15.2}$$

حيث

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \sum_{d_1,d_2} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} g([d_1,d_2]),$$

و

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{d_1,d_2} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} r_{[d_1,d_2]}.$$

## ٠.٤١٥ حل مسألة التصغير المنتهية

نضع للأعداد المربعة الحرة

$$h(d) = \prod_{p|d} \frac{g(p)}{1-g(p)}, \qquad f(d) = \frac{1}{g(d)}. \tag{15.3}$$

وبعكس موبيوس نكتب

$$f(m) = \sum_{e|m} f_1(e).$$

ولأن الأعداد المعنية مربعة حرة، فإن

$$f_1(e) = \frac{1}{h(e)}.$$

ولمعلمين $R, z \geq 2$ نعرّف

$$G(R,z) = \sum_{\substack{\ell<R \\ \ell|P(z)}} h(\ell). \tag{15.4}$$

**مبرهنة ٠.٣١٥** (الحد العلوي المنتهي لغربال سيلبرغ)**.** إذا كانت معاملات الغربال مدعومة على $d < R$، فإن هناك اختياراً للمعاملات يحقق

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \leq \frac{X}{G(R,z)} + \sum_{\substack{d<R^2 \\ d|P(z)}} 3^{\omega(d)}|r_d|. \tag{15.5}$$

برهان. بما أن $g$ ضربية وعلى الأعداد المربعة الحرة، فإن

$$g([d_1,d_2]) = \frac{g(d_1)g(d_2)}{g((d_1,d_2))}.$$

ومن ثم

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \sum_{d_1,d_2<R} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \frac{f((d_1,d_2))}{f(d_1)f(d_2)}.$$

نعرف المتغيرات المحولة

$$u_e = \sum_{\substack{e|d<R \\ d|P(z)}} \frac{\lambda_d}{f(d)}.$$

وباستخدام $f(m) = \sum_{e|m} f_1(e)$ نحصل على التقطير

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \sum_{\substack{e<R \\ e|P(z)}} f_1(e)u_e^2 = \sum_{\substack{e<R \\ e|P(z)}} \frac{u_e^2}{h(e)}. \tag{15.5a}$$

والتحويل مثلثي، ويعكسه موبيوس على الصورة

$$\lambda_d = f(d) \sum_{\substack{d|e<R \\ e|P(z)}} \mu(e/d)u_e. \tag{15.5b}$$

وعند $d = 1$ يصبح القيد $\lambda_1 = 1$

$$\sum_{\substack{e<R \\ e|P(z)}} \mu(e)u_e = 1.$$

تعطي متراجحة كوشي--شفارتس

$$1 \le \left(\sum_e \frac{u_e^2}{h(e)}\right)\left(\sum_e h(e)\right) = \mathcal{Q}(\lambda)G(R,z),$$

لأن $\mu(e)^2 = 1$ على القواسم المربعة الحرة. إذن

$$\mathcal{Q}(\lambda) \ge \frac{1}{G(R,z)}.$$

ويتحقق التساوي عند

$$u_e = \frac{\mu(e)h(e)}{G(R,z)}.$$

وبالتعويض في (15.5b) نجد معاملات سيلبرغ المثلى

$$\boxed{\lambda_d = \frac{\mu(d)}{g(d)G(R,z)} \sum_{\substack{d|e<R \\ e|P(z)}} h(e)}. \tag{15.5c}$$

أما حد البواقي، فلكل عدد مربع حر $d$، يساوي عدد الأزواج المرتبة $(d_1, d_2)$ التي تحقق $[d_1, d_2] = d$ بالضبط $3^{\omega(d)}$: لكل أولي يقسم $d$ ثلاثة اختيارات، أن يظهر في $d_1$ فقط، أو في $d_2$ فقط، أو فيهما معًا. كما أن $d_1, d_2 < R$ يقتضيان $[d_1, d_2] < R^2$. ينتج الحد المعلن من (15.1)--(15.2). □

## ٠.٥١٥ البعد الغربالي ومقام سيلبرغ

نفرض شرط الانتظام التالي: يوجد ثابت $A_1 \ge 0$ بحيث لكل $2 \le w < z$،

$$\left|\sum_{w\le p<z} g(p)\log p - \kappa \log\frac{z}{w}\right| \le A_1. \tag{15.6}$$

وعندئذ يكون

$$V(z) \asymp_{\kappa,A_1} \frac{1}{(\log z)^{\kappa}}.$$

يجب عدم الخلط بين $\kappa$ وبين مستوى البواقي $D$، ولا بينهما وبين حد الغربلة $z$.

**مبرهنة ٠.٤١٥** (تقدير مقام سيلبرغ في البعد $\kappa$)**.** إذا تحقق شرط الانتظام (15.6)، فإن

$$G(z,z) = \frac{e^{\gamma\kappa}}{\Gamma(\kappa+1)} V(z)^{-1} \left(1 + O_{\kappa,A_1}\left(\frac{1}{\log z}\right)\right). \tag{15.7}$$

الثابت في (15.7) متوافق مع حالة $\kappa = 1$، إذ يعيد ثابت ميرتنز $e^{\gamma}$. وقد ثُبت موضع هذه الصيغة وتطبيعها في التدقيق المرجعي النصي؛ لذلك يحمل هذا المدخل حالة TEXT-LOCATION-VERIFIED / NORMALIZATION-MATCHED.

## ٠.٦١٥ اللمّة الأساسية وحدودها

إذا كانت البواقي مضبوطة حتى مستوى $D$، نضع

$$s = \frac{\log D}{\log z}. \tag{15.8}$$

اللمّة الأساسية ليست هي مبرهنة الغربال الخطي ذات الدالتين $F_\kappa, f_\kappa$. إنها تقريب للكمية المنخولة بالحد المحلي $XV(z)$ عندما يكبر معامل الغربلة $s$، مع خطأ يضم جزءًا بنيويًا يتناقص مع $s$ وجزءًا قادما من البواقي.

**مبرهنة ٠.٥١٥** (صيغة عامة للّمة الأساسية)**.** تحت شرط الانتظام (15.6)، توجد عتبة $s_0 = s_0(\kappa, A_1)$ ودالة غير سالبة $\rho_{\kappa,A_1}(s) \to 0$ عندما $s \to \infty$، بحيث إذا $s \geq s_0$ وكانت البواقي مضبوطة حتى $D$، فإن نسخة اللمّة الأساسية المختارة تعطي

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = XV(z)\left(1 + O_{\kappa,A_1}(\rho_{\kappa,A_1}(s))\right) + O\left(\sum_{\substack{d<D \\ d|P(z)}} c_\kappa^{\omega(d)} |r_d|\right), \tag{15.9}$$

حيث $c_\kappa \geq 1$ ثابت تحدده صياغة اللمّة المستعملة.

لا نثبت هنا معدلًا عدديًا معينًا لـ$\rho_{\kappa,A_1}$، لأن ذلك يتطلب اختيار نسخة مرجعية بعينها وتثبيت تطبيعها ومجالها. وهذه المبرهنة لا تُستعمل في برهان تطبيق الأزواج في هذا الفصل؛ إذ يعتمد التطبيق على الحد العلوي المنتهي وتقدير مقام سيلبرغ مباشرة. كما لا نستعمل الرمزين $F_\kappa, f_\kappa$ هنا؛ فهما ينتميان إلى صيغ الغربال الخطي أو beta-sieve المتخصصة، وهي مؤجلة إلى فصل لاحق.

## ٠.٧١٥ تطبيق: الأزواج المنخولة

لتكن $h \neq 0$ ثابتة، ولتكن

$$S_h(x,z) = \#\{1 \le n \le x : (n(n+h), P(z)) = 1\}. \tag{15.10}$$

ولكل أولي $p$، نعرّف $\rho_h(p)$ بعدد حلول التطابق

$$n(n+h) \equiv 0 \pmod p.$$

**قضية ٠.٦١٥** (الكثافة المحلية للأزواج)**.** لدينا

$$\rho_h(p) = \begin{cases} 2, & p \nmid h, \\ 1, & p \mid h. \end{cases} \tag{15.11}$$

ومن ثم $g_h(p) = \rho_h(p)/p$. وإذا كان $h$ فردياً و$z > 2$، فإن $S_h(x,z) = 0$.

برهان. الحلول هي الفئتان $n \equiv 0 \pmod p$ و$n \equiv -h \pmod p$. تتطابقان إذا وفقط إذا $p \mid h$. وإذا كان $h$ فردياً، فإن أحد العددين $n, n+h$ زوجي دائمًا، ولذلك يقسم 2 حاصل الضرب عندما تدخل الأولية 2 في $P(z)$. □

**قضية ٠.٧١٥** (البعد الغربالي للأزواج)**.** إذا كان $h \neq 0$ زوجياً، فإن بيانات الأزواج تحقق شرط الانتظام (15.6) بالبعد $\kappa = 2$، أي

$$\sum_{w \le p < z} g_h(p) \log p = 2 \log \frac{z}{w} + O_h(1), \qquad 2 \le w < z, \tag{15.12a}$$

ولدينا كذلك

$$V_h(z) = \prod_{p<z} \left(1 - \frac{\rho_h(p)}{p}\right) \asymp_h \frac{1}{(\log z)^2}. \tag{15.12}$$

برهان. من القضية السابقة يكون $g_h(p) = 2/p$ لكل أولي لا يقسم $h$، بينما $g_h(p) = 1/p$ للأوليات القاسمة لـ$h$. ومن ثم

$$\sum_{w \le p < z} g_h(p) \log p = 2 \sum_{w \le p < z} \frac{\log p}{p} - \sum_{\substack{w \le p < z \\ p \mid h}} \frac{\log p}{p}.$$

وبمبرهنة ميرتنز الأولى

$$\sum_{w \le p < z} \frac{\log p}{p} = \log \frac{z}{w} + O(1).$$

أما المجموع على الأوليات القاسمة لـ$h$ فمحدود بـ$O_h(1)$، لأنها مجموعة منتهية. وهذا يثبت شرط الانتظام (15.12a)، ومن ثم يبرر تطبيق المبرهنة ٤١٥. بالبعد $\kappa = 2$.

ولإثبات (15.12)، باستثناء الأوليات القاسمة لـ$h$، يكون العامل المحلي $1 - 2/p$. نقارن حاصل الضرب هذا بمربع حاصل ضرب ميرتنز $\prod_{p<z}(1-1/p)^2$. نسبة العاملين تساوي $1 + O(p^{-2})$، ولذلك يتقارب حاصل ضرب النسب. أما الأوليات القاسمة لـ$h$ فتعدل الثابت فقط. □

للقواسم المربعة الحرة $d$، تعطي مبرهنة الباقي الصيني

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{x\rho_h(d)}{d} + O(\rho_h(d)), \qquad \rho_h(d) = \prod_{p|d} \rho_h(p), \tag{15.13}$$

ومن ثم يمكن أخذ $X = x$، و$g_h(d) = \rho_h(d)/d$، و $|r_d| \le \rho_h(d) \le 2^{\omega(d)}$.

**مبرهنة ٨١٥.** (حد الأزواج المنخولة). لكل ثابت زوجي $h \neq 0$، وبانتظام عندما

$$x \ge 3, \qquad 3 \le z \le x^{1/4},$$

لدينا

$$S_h(x,z) \ll_h \frac{x}{(\log z)^2}. \tag{15.14}$$

برهان. نطبق المبرهنة ٣١٥. مع $R = z$. من المبرهنة ٤١٥. والقضية ٧١٥. نحصل على

$$\frac{x}{G_h(z,z)} \ll_h \frac{x}{(\log z)^2}.$$

أما حد البواقي فيحقق

$$\sum_{d<z^2} 3^{\omega(d)}|r_d| \le \sum_{d<z^2} 6^{\omega(d)} \ll z^2(\log z)^5.$$

والشرط الكمي الكافي لامتصاص هذا الحد هو

$$z^2(\log z)^7 \ll x.$$

اختيار $z \le x^{1/4}$ مجال تعليمي آمن ومتحفظ، وليس الأس الحرج الأمثل. ولـ $x$ الأكبر من ثابت مطلق مناسب يعطي هذا الاختيار

$$z^2(\log z)^5 \ll \frac{x}{(\log z)^2}.$$

أما المجال المحدود المتبقي، فنستخدم الحد التافه $S_h(x,z) \le x$. وبما أن $z \ge 3$، فإن $(\log z)^2 \ge (\log 3)^2 > 0$، فيمتص عدد محدود من القيم في الثابت الضمني المعتمد على $h$. ينتج (15.14). □

ملاحظة ٩١٥. (فعالية الثابت). الثابت الضمني في (15.14) فعّال من حيث المبدأ عند تثبيت $h$. فالبرهان يعتمد على كثافات محلية صريحة، ومبرهنة ميرتنز، والحد العلوي المنتهي لغربال سيلبرغ، وتقدير صريح للبواقي، ولا يستعمل مبرهنة سيغل--فالفش أو ثابت سيغل غير الفعّال.

## ٠٨١٥ عائق التكافؤ

ملاحظة ١٠١٥. (عائق التكافؤ). تعتمد المناخل التقليدية أساسًا على بيانات القواسم المحلية من نوع $|\mathcal{A}_d| = Xg(d) + r_d$. هذه البيانات لا تميز وحدها، في العموم، بين العناصر ذات عدد زوجي أو فردي من العوامل الأولية. لذلك تستطيع المناخل إنتاج حدود عليا قوية ونتائج عن الأعداد شبه الأولية، لكنها تصطدم بحاجز بنيوي عند محاولة استخراج حد سفلي دقيق لوجود أوليات ضمن نمط إضافي.

لا تعني هذه الملاحظة أن كل طريقة يدخل فيها غربال عاجزة مطلقًا. فقد تتجاوز بعض التطبيقات صورًا من الحاجز بإضافة بنية لا توفرها بيانات القواسم المحلية وحدها، مثل الهويات الالتفافية، والأشكال الثنائية، ومعلومات توزيع أعمق، أو مداخل طيفية. وفي تطبيق الأزواج المنخولة، يفسر العائق لماذا لا يتحول الحد العلوي (15.14) إلى برهان على وجود أزواج أولية.

## ٠٩١٥ ملاحظات ختامية وتمارين

يلخص هذا الفصل الطبقات التي ينبغي عدم خلطها:

١. متراجحة المربع وحل التصغير المنتهي: مثبتان هنا.

٢. التحليل التقاربي لمقام سيلبرغ: مدخل مقتبس، وموضعه النصي وتطبيعه متحققان.

٣. اللمّة الأساسية: تقريب أحادي الصيغة، لا دالتا الغربال الخطي، ولا تُستعمل في تطبيق الأزواج الحالي.

٤. الغربال الخطي والbeta-sieve: أدوات متخصصة مؤجلة.

٥. عائق التكافؤ: تشخيص لحدود المعلومات المحلية، لا استحالة مطلقة.

**تمرين ١١١٥.** تحقق مباشرة من أن عدد الأزواج المرتبة $(d_1, d_2)$ من القواسم المربعة الحرة التي تحقق $[d_1, d_2] = d$ يساوي $3^{\omega(d)}$.

**تمرين ١٢١٥.** أثبت أن

$$\prod_{\substack{p<z \\ p\nmid h}} \frac{1-2/p}{(1-1/p)^2}$$

يتقارب إلى ثابت موجب عندما $h$ ثابت زوجي غير صفري.

**تمرين ١٣١٥.** فسر لماذا لا يكفي الحد العلوي $S_h(x,z) \ll_h x/(\log z)^2$ لإثبات وجود عدد لا نهائي من الأزواج الأولية $p, p+h$.

**تمرين ١٤١٥.** قارن بين الأدوار المختلفة للمعلمات $z$، و$R$، و$D$، و$\kappa$ في الفصل، واذكر موضع ظهور كل واحدة منها.

# باب ١٦

# تطبيقات الغربال والفجوات بين الأعداد الأولية

## ١١٦. نطاق الفصل

ينتقل هذا الفصل من الحد العلوي الغربالي المجرد في الفصل الخامس عشر إلى تطبيقات على الأزواج الأولية والأعداد شبه الأولية والفجوات بين الأوليات. ويُفصل صراحة بين ما يُثبت هنا وما يُقتبس من الأدبيات الأصلية.

لا يثبت الفصل حدسية الأوليات التوأم، ولا يثبت $H_1 = 2$، ولا يعرض ثابتًا عدديًا معاصرًا بوصفه نهائيًا. أما الحد $H_1 \leq 246$ فيعرض بوصفه حدًا منشورًا موثقًا.

### ١٠١١٦. نواتج التعلم

بعد إتمام الفصل ينبغي أن يستطيع القارئ:

١. تعريف فجوات الأوليات والكميات $H_m$.

٢. اشتقاق حد علوي لعدد الأزواج الأولية ذات فرق ثابت من نتائج الفصل الخامس عشر.

٣. استنتاج تقارب مجموع مقلوبات الأزواج الأولية بواسطة الجمع الجزئي.

٤. التمييز بين العدد الأولي والعدد $P_2$ في مبرهنة تشن.

٥. فهم التحول من GPY إلى Zhang ثم إلى Maynard--Tao.

٦. تفسير دور Bombieri--Vinogradov في طريقة Maynard، ودور التوزيع الأقوى في طريقة Zhang.

٧. التمييز بين غربال سيلبرغ الأحادي والأوزان متعددة الأبعاد.

٨. فهم استمرار عائق التكافؤ رغم نجاح مبرهنات الفجوات المحدودة.

## ٢١٦. فجوات الأوليات والكميات $H_m$

**تعريف ١١٦.** (فجوات الأوليات)**.** لتكن $p_n$ الأولي $n$-ي. نكتب

$$d_n = p_{n+1} - p_n, \qquad H_m = \liminf_{n\to\infty}(p_{n+m} - p_n), \qquad m \geq 1.$$

وبخاصة، تكافئ حدسية الأوليات التوأم العبارة $H_1 = 2$.

تقول مبرهنة الأعداد الأولية إن متوسط التباعد قرب $x$ من رتبة $\log x$، لكن هذا لا يمنع وجود فجوات أصغر كثيرًا من المتوسط أو أكبر كثيرًا منه. السؤال المركزي هنا هو: هل توجد قيمة مطلقة $B$ تظهر لا نهائيًا بحيث يوجد أوليان متتاليان فرقُهما على الأكثر $B$؟ أي: هل $H_1 < \infty$؟

## ٣١٦. حد علوي للأزواج الأولية

لعدد زوجي ثابت $h \neq 0$، نعرّف

$$\pi_2(x;h) = \#\{p \leq x : p \text{ أولي و } p+h \text{ أولي}\}.$$

**مبرهنة ٢١٦.** (حد علوي للأزواج الأولية ذات فرق ثابت)**.** لكل عدد زوجي ثابت $h \neq 0$، لدينا

$$\pi_2(x;h) \ll_h \frac{x}{(\log x)^2} \qquad (x \geq 3).$$

برهان. نختار في مبرهنة الأزواج المنخولة ٨١٥. من الفصل الخامس عشر

$$z = x^{1/4}.$$

إذا كان $p \leq x$ و$p+h$ أوليين، وكان كلاهما أكبر من $z$، فإن $(p(p+h), P(z)) = 1$. أما الأزواج التي يكون أحد طرفيها أصغر من $z$ فعددها $O_h(z)$. ومن ثم

$$\pi_2(x;h) \leq S_h(x,z) + O_h(z).$$

وبتطبيق المبرهنة ٨١٥. نحصل على

$$S_h(x,z) \ll_h \frac{x}{(\log z)^2} \asymp_h \frac{x}{(\log x)^2},$$

كما أن $z = x^{1/4} = o(x/(\log x)^2)$، فتنتج الدعوى. □

هذا حد علوي فقط. لا يثبت أن مجموعة الأزواج غير منتهية، ولا يعطي حدًا سفليًا من الرتبة نفسها.

## ٠٤١٦. مجموع برون

**نتيجة ٣١٦.** (تقارب مجموع مقلوبات الأزواج الأولية)**.** لكل عدد زوجي ثابت $h \neq 0$، تتقارب السلسلة

$$\sum_{\substack{p \text{ أولي} \\ p+h \text{ أولي}}} \frac{1}{p}.$$

وبخاصة يتقارب مجموع مقلوبات الأوليات التوأم، وهي النتيجة التاريخية المرتبطة بعمل برون [*Bru*19].

برهان. بالجمع الجزئي، لكل $X \geq 3$،

$$\sum_{\substack{p \leq X \\ p+h \text{ أولي}}} \frac{1}{p} = \frac{\pi_2(X;h)}{X} + \int_2^X \frac{\pi_2(t;h)}{t^2}\, dt.$$

وباستخدام المبرهنة السابقة، يكون الحد الأول $O_h((\log X)^{-2})$، بينما

$$\int_3^\infty \frac{dt}{t(\log t)^2} < \infty.$$

إذن تتقارب المجاميع الجزئية. □

المغزى المنهجي مهم: حتى لو كانت الأوليات التوأم غير منتهية، فإنها أندر من أن تجعل مجموع مقلوباتها يتباعد مثل مجموع مقلوبات جميع الأوليات.

## ٠٥١٦. الأعداد شبه الأولية ومبرهنة تشن

نقول إن العدد $n$ من النوع $P_r$ إذا كان له على الأكثر $r$ عوامل أولية مع العد بالتكرار. وبذلك لا يعني $P_2$ أنه أولي؛ فقد يكون حاصل ضرب أوليين.

**مبرهنة ٠٤١٦.** (مبرهنة تشن)**.** كل عدد زوجي كبير بما يكفي يمكن كتابته على الصورة

$$N = p + P_2,$$

حيث $p$ أولي و$P_2$ عدد له على الأكثر عاملان أوليان مع العد بالتكرار. وأثبت تشن أيضًا وجود عدد لا نهائي من الأوليات $p$ التي يكون $p+2$ فيها من النوع $P_2$.

هذه النتيجة تتجاوز غربال سيلبرغ العلوي البسيط؛ فهي تحتاج غربالًا خطيًا وأفكار تبديل وضبطًا أدق للبواقي. لذلك تُقتبس هنا ولا يُدعى إثباتها كاملًا.

## ٠.٦١٦ طريقة GPY: فجوات أصغر من المتوسط

**مبرهنة ٠.٥١٦** Goldston--Pintz--Yıldırım( )**.** لدينا

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} = 0.$$

فكرة GPY هي بناء وزن من نوع سيلبرغ يركز الكتلة على الأعداد $n$ التي يكون فيها عدد كبير من الإزاحات $n+h_i$ قليلة العوامل الأولية الصغيرة، ثم مقارنة مجموع الوزن بمجموع الوزن المضروب في دالة عد الأوليات على الإزاحات.

لكن النسخة الأصلية من GPY، مع مستوى التوزيع $1/2$ وحده، لا تعطي مباشرة $H_1 < \infty$. فإذا تحسن توزيع الأوليات في المتتاليات الحسابية إلى مستوى أكبر من $1/2$، فإن الحجة نفسها تبدأ بإنتاج فجوات محدودة.

## ٠.٧١٦ اختراق Zhang

**مبرهنة ٠.٦١٦** Zhang( )**.** أثبت *Zhang* أن

$$H_1 < 7 \times 10^7.$$

وبالتالي توجد لا نهائيًا أزواج من الأوليات المتتالية بفارق محدود مطلق.

لم يكن العنصر الحاسم مجرد إعادة تطبيق Bombieri--Vinogradov التقليدية، بل إثبات توزيع أقوى من المستوى $1/2$ لعائلة مناسبة من المقامات الملساء، ثم إدخال هذا التحسن في بنية GPY.

## ٠.٨١٦ غربال Maynard--Tao متعدد الأبعاد

التحول التالي لم يكن مجرد تحسين لمستوى التوزيع، بل تغييرًا في بنية الوزن. بدل وزن أحادي يعتمد أساسًا على حاصل الضرب $\prod_i (n+h_i)$، تُستخدم معاملات متعددة الفهارس

$$\lambda_{d_1,\dots,d_k}$$

وأوزان من الشكل

$$w_n = \left( \sum_{d_i \mid n+h_i} \lambda_{d_1,\dots,d_k} \right)^2.$$

بعد اختيار دالة اختبار مناسبة $F$ على البسيط

$$\mathcal{R}_k = \{(t_1,\dots,t_k) : t_i \geq 0,\ t_1+\cdots+t_k \leq 1\},$$

تتحول المسألة إلى مقارنة تكامل رئيسي

$$I_k(F) = \int_{\mathcal{R}_k} F(\mathbf{t})^2 \, d\mathbf{t}$$

بتكاملات هامشية $J_i(F)$. إذا كانت النسبة التجميعية

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} J_i(F)}{I_k(F)}$$

كبيرة بما يكفي، أمكن إجبار عدد محدد من الإزاحات على أن تكون أولية في آن واحد.

**مبرهنة ٠٧١٦** Maynard( )**.** لكل $m \geq 1$، لدينا

$$H_m < \infty.$$

وفي الحالة $m = 1$، أعطت الورقة الأصلية الحد

$$H_1 \leq 600.$$

الميزة الأساسية أن الطريقة تعمل مع Bombieri--Vinogradov التقليدية، ولا تحتاج إلى تحسين Zhang الخاص بالمقامات الملساء لإثبات مجرد محدودية الفجوات. وقد طور Tao الفكرة بصورة مستقلة غير منشورة، بينما المرجع المنشور الحاكم هنا هو عمل Maynard ثم تعميم [DHJ14] Polymath8b.

## ٠٩١٦ تحسين Polymath8b

**مبرهنة ٠٨١٦** Polymath8b. روشنذا ﻟﻪ ﻟﻪ( )**.** لدينا دون شروط

$$H_1 \leq 246.$$

وتحت فرضية *Elliott--Halberstam* المعممة ثبت الحد

$$H_1 \leq 6.$$

يمزج هذا العمل تعميمات لأوزان Maynard متعددة الأبعاد مع تحسينات تحليلية وحسابية. ولا يُفهم الحد المشروط 6 بوصفه برهانًا لحدسية الأوليات التوأم؛ فالانتقال من 6 إلى 2 يظل خارج ما تسمح به المعلومات الغربالية البحتة في هذا الإطار.

## ٠١٠١٦ عائق التكافؤ بعد الفجوات المحدودة

لا يعني نجاح Zhang أو Maynard--Tao أن عائق التكافؤ اختفى. الذي تغير هو السؤال: بدل محاولة إثبات أن نمطًا ثنائيًا محددًا مثل $n, n+2$ أولي دائمًا على نحو لا نهائي، نبحث داخل مجموعة كبيرة مقبولة من الإزاحات عن اثنين أو أكثر يقعان معًا في الأوليات.

يمكن للأوزان متعددة الأبعاد أن تثبت وجود بعض زوج داخل المجموعة، لكنها لا تعزل بالضرورة زوجًا معينًا. لذلك تبقى حدسية الأوليات التوأم ومسألة $H_1 = 2$ مفتوحتين.

## ٠.١١١٦ خريطة الاعتماد وحدود الادعاء

| ما لا تستلزمه | المدخل الرئيس | النتيجة |
|---|---|---|
| لا يثبت وجود أزواج لا نهائية | غربال سيلبرغ، الفصل 15 | حد الأزواج العلوي |
| لا يحسم حدسية التوأم | الحد العلوي والجمع الجزئي | تقارب مجموع برون |
| لا يجعل $P_2$ أوليًا | الغربال الخطي والتبديل | تشن |
| لا يعطي وحده فجوة مطلقة مع 1/2 مستوى | أوزان سيلبرغ وتوزيع المتوسط | GPY |
| لا يثبت فجوة 2 | وتوزيع أقوى لمقامات GPY ملساء | Zhang |
| لا يعزل زوجًا محددًا | وزن متعدد الأبعاد Bombieri--Vinogradov و | Maynard--Tao |

## ٠.١٢١٦ خلاصة الفصل

يعرض هذا الفصل سلسلة من التحولات المنهجية:

فجوات محدودة مطلقة ⟵ فجوات صغيرة نسبيًا ⟵ أعداد شبه أولية ⟵ حد علوي غربالي.

أثبتنا داخليًا حد عد الأزواج الأولية وتقارب مجموع برون، واقتبسنا بدقة مبرهنات تشن وGPY وZhang وMaynard وPolymath8b. وتبقى كل ترقية للحالة مشروطة بالبناء الكامل، والتدقيق الرياضي، والمراجعة المستقلة.

# باب ١٧

# الطريقة الدائرية ومدخل إلى غولدباخ ووارينغ

## نطاق الفصل وحالته

يقدّم هذا الفصل البنية الأساسية للطريقة الدائرية وتطبيقاتها النموذجية في مسألتي وارينغ وغولدباخ. يثبت الفصل داخليًا تعامد الدوال الأسية، وهوية عد التمثيلات، وهوية قياس التكامل المفرد. أما التقديرات الكمية على الأقواس الكبرى والصغرى، وتقارب السلسلة المفردة وإيجابيتها في النطاق الكلاسيكي، ومبرهنات فينوغرادوف وهلفغوت، فتعرض بوصفها نتائج مقتبسة مع فصل صريح بين ما هو مثبت هنا وما هو منقول من الأدبيات. لا يتضمن الفصل أي ادعاء بإثبات حدسية غولدباخ الثنائية.

## نواتج التعلم

بنهاية الفصل يستطيع القارئ أن:

١. يحول شرطًا جمعيًا صحيحًا إلى معامل فورييه باستعمال التعامد.

٢. يميز بين الأقواس الكبرى والأقواس الصغرى ودور كل منهما في البرهان.

٣. يفسر السلسلة المفردة بوصفها حاصل كثافات محلية، والتكامل المفرد بوصفه كثافة أرخميدية.

٤. يشتق عامل القياس $N^{s/k-1}$ في مسألة وارينغ.

٥. يفرق بين النتائج المثبتة داخل الفصل، والمدخلات المقتبسة، والتحقق الحاسوبي المنتهي، والمسائل المفتوحة.

## ١١٧. من مسألة جمعيّة إلى معامل فورييه

تظهر كثير من المسائل الجمعية في نظرية الأعداد في صورة سؤال بسيط ظاهريًا: كم طريقة يمكن بها كتابة عدد صحيح كبير على صورة مجموع عناصر من مجموعة حسابية معينة؟ قد تكون العناصر قوى صحيحة، أو

أعدادًا أولية، أو قيمًا لدالة كثيرة حدود. الصعوبة ليست في كتابة معادلة التمثيل، بل في استخراج عدد حلولها مع حد رئيس مضبوط وخطأ أصغر منه.

الفكرة المركزية للطريقة الدائرية هي تحويل شرط المساواة الصحيح إلى شرط تعامد فورييري. نستخدم طوال الفصل التطبيع

$$e(t) = e^{2\pi i t}.$$

**قضية ١١٧.** (تعامد الدوال الأسية). لكل عدد صحيح $m$ لدينا

$$\int_0^1 e(\alpha m)\, d\alpha = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

برهان. إذا كان $m = 0$ فالمكامل يساوي 1. وإذا كان $m \neq 0$ فإن

$$\int_0^1 e(\alpha m)\, d\alpha = \left[\frac{e(\alpha m)}{2\pi i m}\right]_0^1 = \frac{e(m) - 1}{2\pi i m} = 0,$$

لأن $m$ عدد صحيح ومن ثم $e(m) = 1$. □

هذه الهوية هي البوابة التي تدخل منها مسائل التمثيل إلى التحليل. لتكن $w(n)$ أوزانًا ذات دعم منتهٍ، ونعرّف

$$F(\alpha) = \sum_n w(n) e(\alpha n).$$

عند رفع $F$ إلى القوة $s$ نحصل على

$$F(\alpha)^s = \sum_{n_1, \ldots, n_s} w(n_1) \cdots w(n_s) e(\alpha(n_1 + \cdots + n_s)).$$

**مبرهنة ٢١٧.** (هوية عد التمثيلات). إذا عرّفنا عدد التمثيلات الموزون بـ

$$R_s(N) = \sum_{n_1 + \cdots + n_s = N} w(n_1) \cdots w(n_s),$$

فإن

$$R_s(N) = \int_0^1 F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha.$$

برهان. بالتوسيع والتبديل بين الجمع المنتهي والتكامل نجد

$$\int_0^1 F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha = \sum_{n_1, \ldots, n_s} w(n_1) \cdots w(n_s) \int_0^1 e(\alpha(n_1 + \cdots + n_s - N))\, d\alpha.$$

يختار التعامد بالضبط الحدود التي تحقق $n_1 + \cdots + n_s = N$، فتنتج الصيغة المطلوبة. □

ملاحظة ٣١٧.. هذه الهوية نتيجة دقيقة وليست تقريبًا. كل التقريبات اللاحقة تدخل عند تحليل التكامل، لا عند تحويل مسألة التمثيل إلى تكامل.

## ٠.٢١٧ تشريح الدائرة: الأقواس الكبرى والأقواس الصغرى

لا يكون المجموع الأسي $F(\alpha)$ بالحجم نفسه على الدائرة كلها. عندما تكون $\alpha$ قريبة من كسر ذي مقام صغير، تتراصف الأطوار جزئيًا وتظهر بنية حسابية محلية قوية. أما بعيدًا عن هذه الكسور، فيُنتظر أن يؤدي التذبذب إلى إلغاء كبير.

في نموذج وارينغ نضع

$$P = N^{1/k}, \qquad Q = P^{\eta}, \qquad 0 < \eta < \frac{1}{4k},$$

حيث $\eta$ ثابت صغير. لكل كسر مختزل $a/q$ مع $1 \le q \le Q$ نعرّف القوس

$$\mathfrak{M}(q,a) = \left\{ \alpha \in [0,1) : \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \le \frac{Q}{qN} \right\}.$$

ثم نضع

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{1 \le q \le Q} \bigcup_{\substack{1 \le a \le q \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}(q,a), \qquad \mathfrak{m} = [0,1) \setminus \mathfrak{M}.$$

**تعريف ٠.٤١٧** (تشريح الدائرة). تسمى $\mathfrak{M}$ مجموعة الأقواس الكبرى، وتسمى $\mathfrak{m}$ مجموعة الأقواس الصغرى.

وبذلك تنقسم هوية التمثيل إلى

$$R_s(N) = \int_{\mathfrak{M}} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha + \int_{\mathfrak{m}} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha.$$

القسم الأول يحمل الحد الرئيس المتوقع، بينما يجب إثبات أن القسم الثاني أصغر منه. لذا تقوم الطريقة الدائرية على مهمتين مختلفتين:

١. بناء تقريب دقيق للمجموع الأسي قرب الكسور ذات المقامات الصغيرة.

٢. إثبات إلغاء كافٍ على بقية الدائرة.

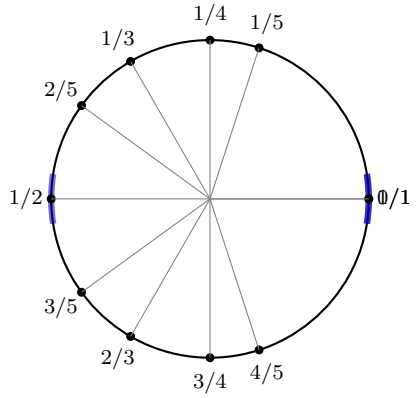
## ٠.٣١٧ البنية المحلية والأرخميدية للحد الرئيس

إذا كتبنا على قوس كبير

$$\alpha = \frac{a}{q} + \beta,$$

فإن المجموع الأسي يتفكك نموذجيًا إلى جزء منته يلتقط الحساب بترديد $q$، وجزء مستمر يلتقط السلوك الجمعي. في نموذج وارينغ نستخدم المجموع الكامل

$$S_k(q,a) = \sum_{r=1}^{q} e\left(\frac{ar^k}{q}\right),$$




شكل ٠.١١٧: متتالية فاري من الرتبة 5 (11 كسرًا مختزلًا، محسوبة مباشرة بخوارزمية فاري القياسية) موزعة على الدائرة $[0,1)$ بالتناظر $a/q \mapsto 360^\circ \cdot a/q$. الأقواس الزرقاء الغليظة حول الكسور ذات المقام الأصغر ($q \le 2$) توضّح موضع الأقواس الكبرى $\mathfrak{M}(q,a)$ تخطيطيًا فقط؛ عرضها هنا ثابت للعرض ولا يمثّل نصف القطر الفعلي $Q/(qN)$ من التعريف أعلاه.

والتقريب الأرخميدي

$$v_k(\beta; P) = \int_0^P e(\beta t^k)\, dt.$$

وتظهر على الأقواس الكبرى صيغة تقريبية من النمط

$$f_k\left(\frac{a}{q} + \beta; P\right) \approx q^{-1} S_k(q,a) v_k(\beta; P).$$

بعد رفع هذا التقريب إلى القوة $s$، ثم الجمع على $a$ و$q$ والتكامل في $\beta$، تظهر السلسلة المفردة

$$\mathfrak{S}_{s,k}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s} \sum_{\substack{1 \le a \le q \\ (a,q)=1}} S_k(q,a)^s e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

والتكامل المفرد

$$\mathfrak{J}_{s,k}(N) = \int_{-\infty}^{\infty} v_k(\beta; P)^s e(-N\beta)\, d\beta.$$

الأولى تجمع الكثافات المحلية عند جميع الأوليات، والثاني يقيس الكثافة الأرخميدية لمنطقة الحلول الحقيقية؛ انظر [HL22; Vau97].

**قضية ٠.٥١٧** (بنية الحد الرئيس على الأقواس الكبرى، مقتبسة)**.** في النطاق الكلاسيكي المناسب لمسألة وارينغ تتخذ مساهمة الأقواس الكبرى الصورة

$$\int_{\mathfrak{M}} f_k(\alpha; P)^s e(-N\alpha)\, d\alpha = \mathfrak{S}_{s,k}(N) \mathfrak{J}_{s,k}(N) + o(P^{s-k}).$$

## ٠.٣١٧.١ قياس التكامل المفرد

نضع

$$w_k(\gamma) = \int_0^1 e(\gamma u^k)\, du.$$

وبتغيير المتغير $t = Pu$ نحصل على

$$v_k(\beta; P) = P\, w_k(\beta P^k).$$

وبما أن $P^k = N$، فإن تغيير المتغير $\gamma = \beta P^k$ يفصل عامل النمو عن الثابت الأرخميدي.

**قضية ٠.٦١٧** (هوية قياس التكامل المفرد)**.** إذا كان $P^k = N$، فإن

$$\mathfrak{J}_{s,k}(N) = N^{s/k-1}\mathcal{J}_{s,k},$$

حيث

$$\mathcal{J}_{s,k} = \int_{-\infty}^{\infty} w_k(\gamma)^s e(-\gamma)\, d\gamma.$$

وعند $s > k$ يكون $\mathcal{J}_{s,k}$ متقارباً تقارباً مطلقاً وموجباً.

برهان. من $v_k(\beta; P) = Pw_k(\beta P^k)$، ثم $\gamma = \beta P^k$، نجد

$$\mathfrak{J}_{s,k}(N) = P^{s-k}\mathcal{J}_{s,k} = N^{s/k-1}\mathcal{J}_{s,k}.$$

ويعطي التقدير القياسي

$$w_k(\gamma) \ll_k \min\{1, |\gamma|^{-1/k}\}$$

التقارب المطلق عندما $s > k$. أما الإيجابية فتتبع من التفسير الحجمي للكثافة الأرخميدية لمساحة الحلول الموجبة للمعادلة $u_1^k + \cdots + u_s^k = 1$. □

وفي نطاق وارينغ الكلاسيكي تكون القيمة

$$\mathcal{J}_{s,k} = \frac{\Gamma(1+1/k)^s}{\Gamma(s/k)}.$$

## ٠.٣١٧.٢ الكثافات المحلية وإيجابية السلسلة المفردة

لا يكفي مجرد غياب عائق توافق ظاهر لضمان إيجابية السلسلة المفردة. الشرط القياسي الأقوى هو وجود حل غير منفرد في $\mathbb{Z}_p$ لكل أولي $p$، مع نطاق من المتغيرات يضمن تقارب حاصل الضرب المحلي. عندئذ تكون الكثافات المحلية $\sigma_p(N)$ موجبة، وتكتب

$$\mathfrak{S}_{s,k}(N) = \prod_p \sigma_p(N) > 0.$$

أما إثبات التقارب المطلق لهذا الحاصل وإيجابيته بانتظام في النطاق الكلاسيكي فحالة اعتماده هي:

CITED / LOCAL-DENSITY INPUT

وليس ذلك نتيجة داخلية جديدة في هذا الفصل.

## ٠.٤١٧ مدخل وارينغ

نعتمد الاصطلاح

$$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

لعدد صحيح ثابت $k \geq 2$ نعرّف مجموع فايل

$$f_k(\alpha; P) = \sum_{1 \leq x \leq \lfloor P \rfloor} e(\alpha x^k), \qquad P = N^{1/k}.$$

وإذا كان $r_{s,k}(N)$ عدد الحلول المرتبة

$$N = x_1^k + \cdots + x_s^k, \qquad x_j \in \mathbb{N}_+,$$

فإن مبرهنة ٠.٢١٧ تعطي

$$r_{s,k}(N) = \int_0^1 f_k(\alpha; P)^s e(-N\alpha)\, d\alpha.$$

ولا يدخل الصفر في هذا الاصطلاح. أما النسخة التي تسمح بـ$x_j = 0$ فتتطلب إضافة الحد 1 إلى دالة التوليد وإعادة ضبط عدد التمثيلات.

على الأقواس الصغرى يحتاج البرهان إلى ادخار من رتبة قوة. المدخل المقتبس المعتمد في هذا الفصل هو وجود $\delta = \delta(k, s) > 0$، عندما يكون $s$ كبيرًا بما يكفي بدلالة $k$، بحيث

$$\int_{\mathfrak{m}} |f_k(\alpha; P)|^s\, d\alpha \ll P^{s-k-\delta}.$$

هذه نتيجة مقتبسة مركبة، وليست مبرهنة مثبتة هنا؛ راجع [Vau97]. تطوير أدوات المجاميع الأسية العامة، ومنها طريقة فان دير كوربوت، مؤجل إلى الفصل التالي.

**مبرهنة ٠.٧١٧** (الصيغة التقاربية الكلاسيكية في وارينغ، مقتبسة)**.** لكل $k \geq 2$، وعندما يكون $s$ كبيراً بما يكفي بدلالة $k$، ومع تحقق الشروط المحلية اللازمة، توجد صيغة تقاربية من الشكل

$$r_{s,k}(N) = \mathfrak{S}_{s,k}(N) \mathcal{J}_{s,k} N^{s/k-1} + o\left(N^{s/k-1}\right).$$

لا يدعي هذا الفصل أفضل حد حديث لعدد المتغيرات، ولا يثبت النتائج المثلى المتعلقة بـ$G(k)$ أو النظائر الحديثة لها.

## ٠.٥١٧ مدخل غولدباخ الثلاثي

لدراسة تمثيل عدد فردي كمجموع ثلاثة أوليات نستخدم الوزن اللوغاريتمي

$$S(\alpha) = \sum_{n \leq N} \Lambda(n) e(\alpha n).$$

ويكون عدد التمثيلات الموزون

$$R_3(N) = \int_0^1 S(\alpha)^3 e(-N\alpha)\, d\alpha.$$

قرب الكسور ذات المقامات الصغيرة يرتبط تحليل $S(\alpha)$ بتوزيع الأوليات في المتتاليات الحسابية، بينما يلزم على الأقواس الصغرى إلغاء عميق في المجاميع الأسية على الأوليات. هذا هو المسار الذي بدأه هاردي وليتلوود في إطار الطريقة الدائرية [HL23]، ثم أُنجز دون فرضية ريمان المعممة في صيغة فينوغرادوف.

**مبرهنة ٠.٨١٧** (فينوغرادوف، مقتبس)**.** كل عدد صحيح فردي كبير بما يكفي هو مجموع ثلاثة أعداد أولية.

أكمل هلفغوت المسألة الثلاثية بإزالة قيد «كبير بما يكفي».

**مبرهنة ٠.٩١٧** (غولدباخ الثلاثي، هلفغوت، مقتبس)**.** كل عدد صحيح فردي أكبر من 5 هو مجموع ثلاثة أعداد أولية.

البرهان الكامل لهذه النتيجة خارج نطاق الفصل؛ فهو يجمع تحليل الأقواس الكبرى والصغرى مع تقديرات صريحة وغربال كبير وتحقق حاسوبي منتهٍ. ويصنف الجزء الحاسوبي وحده `FINITE-VERIFIED`، لا برهانًا تحليليًا مستقلًا.

## ٠.٦١٧ غولدباخ الثنائية: الحد الفاصل بين المبرهنة والحدس

تنص حدسية غولدباخ الثنائية على أن كل عدد زوجي أكبر من 2 هو مجموع عددين أوليين. تتنبأ الطريقة الدائرية بصيغة تقاربية ذات سلسلة مفردة محلية، لكن الأدوات المعروفة لا تعطي حتى الآن سيطرة كافية على الأقواس الصغرى في المسألة الثنائية.

**تعريف ٠.١٠١٧** (حدسية غولدباخ الثنائية)**.** كل عدد صحيح زوجي أكبر من 2 هو مجموع عددين أوليين.

يعتمد الفصل التصنيف الصريح

غولدباخ الثنائية = HYPOTHESIS / OPEN.

ولا يجوز تحويل التنبؤ الهاردي--ليتلوودي إلى مبرهنة، ولا الاستدلال من تحقق عددي منتهٍ إلى صحة عامة.

## ٠.٧١٧ ما الذي أنجزته الطريقة الدائرية؟

الدرس البنيوي للطريقة الدائرية أوسع من أي تطبيق منفرد. فهي تبني جسرًا بين أربع طبقات:

١. معادلة جمعية صحيحة.

٢. معامل فورييه دقيق لدالة توليد أسية.

٣. كثافات محلية مجمعة في سلسلة مفردة.

٤. حجم أرخميدي مجسد في تكامل مفرد.

لكن هذا الجسر لا يكتمل إلا بإثبات الإلغاء على الأقواس الصغرى. ومن هنا تأتي ضرورة الفصل التالي: دراسة المجاميع الأسية وطريقة فان دير كوربوت بوصفهما الآلة التي تقيس التذبذب وتحوله إلى ادخار كمي.

## حالة النتائج في هذا الفصل

# باب ١٨

# المجاميع الأسية وطريقة فان دير كوربوت

## نطاق الفصل وحالته

يبني هذا الفصل الآلة الكلاسيكية التي تحوّل تذبذب الطور إلى إلغاء كمي في المجاميع الأسية. يثبت داخلياً الحد التافه، وصيغة الجمع الجزئي المنفصلة، ومتباينة فرق فان دير كوربوت، واختبار المشتقة الأولى في الصيغة المضبوطة التي تقيس البعد عن الأعداد الصحيحة. أما اختبار المشتقة الثانية، وعملية $B$، والإطار العام للأزواج الأسية، فتعرض بوصفها نتائج مقتبسة ومشروحة. جميع نتائج هذا الفصل في هذه المرحلة **مسودة غير قابلة للاستشهاد** إلى أن يكتمل البناء والتدقيق الرياضي والمرجعي والمراجعة المستقلة.

## نواتج التعلم

بنهاية الفصل يستطيع القارئ أن:

١. يفسر الفرق بين الحد التافه والإلغاء الحقيقي في مجموع أسي.

٢. ينقل تقديراً لمجموعات جزئية غير موزونة إلى مجموع موزون باستعمال الجمع الجزئي.

٣. يشتق متباينة فرق فان دير كوربوت ويفهم دور الارتباطات المزاحة.

٤. يميز بين الشرط الصحيح $\|f'(x)\| \geq \lambda$ والشرط غير الكافي $|f'(x)| \geq \lambda$.

٥. يشرح الفرق البنيوي بين عمليتي $A$ و$B$، وحدود ما يثبته الفصل داخلياً.

٦. يربط الأدوات العامة هنا بحاجات الأقواس الصغرى في الفصل السابق من دون اعتماد دائري.

# ١١٨. المجموع الأسي ومعنى الإلغاء

نستخدم طوال الفصل التطبيع

$$e(t) = e^{2\pi i t}.$$

إذا كانت $I \subset \mathbb{R}$ فترة محدودة و$f : I \to \mathbb{R}$، نكتب

$$S(f; I) = \sum_{n \in I \cap \mathbb{Z}} e(f(n)).$$

وفي النسخة الموزونة نكتب

$$S(a, f; I) = \sum_{n \in I \cap \mathbb{Z}} a_n e(f(n)).$$

كل حد في المجموع الموزون له طول $|a_n|$، ولذلك ينتج فوراً الحد التالي.

**قضية ١١٨.** (الحد التافه). لكل متتالية مركبة منتهية $(a_n)$ ولكل طور حقيقي $f$،

$$\left| \sum_n a_n e(f(n)) \right| \leq \sum_n |a_n|.$$

وبخاصة، إذا كان عدد الحدود $N$ وكانت $|a_n| \leq 1$، فإن حجم المجموع لا يتجاوز $N$.

برهان. هذه هي متباينة المثلث مباشرة، لأن $|e(f(n))| = 1$:

$$\left| \sum_n a_n e(f(n)) \right| \leq \sum_n |a_n e(f(n))| = \sum_n |a_n|.$$

□

الغاية من نظرية المجاميع الأسية ليست إعادة إنتاج هذا الحد، بل إثبات أن اتجاهات الحدود المركبة تتغير بما يكفي كي يلغي بعضها بعضًا. عندما نحصل مثلًا على

$$S(f; I) \ll |I|^{1-\delta} \qquad (\delta > 0),$$

نقول إن هناك ادخاراً بقوة عن الحد التافه.

**مثال ٢١٨.** (طور خطي). إذا كان $f(n) = \alpha n + \beta$، فإن

$$\sum_{M < n \leq M+N} e(f(n)) = e(\beta) e(\alpha(M+1)) \frac{1 - e(\alpha N)}{1 - e(\alpha)}$$

عندما $\alpha \notin \mathbb{Z}$. ومن ثم

$$\left| \sum_{M < n \leq M+N} e(\alpha n + \beta) \right| \leq \min\left( N, \frac{1}{2\|\alpha\|} \right),$$

حيث $\|x\|$ هي المسافة من $x$ إلى أقرب عدد صحيح. تكشف هذه الصيغة منذ البداية أن الكمية الصحيحة ليست $|\alpha|$، بل $\|\alpha\|$.

## ٢١٨. الجمع الجزئي ونقل الأوزان

كثيرًا ما نملك تقديرًا للمجاميع الجزئية

$$A(x) = \sum_{m<n\le x} a_n,$$

ثم نحتاج إلى إدخال وزن يتغير ببطء. الأداة المناسبة هي النسخة المنفصلة من التكامل بالتجزئة.

**لمّة ٣١٨.** (الجمع الجزئي المنفصل). لتكن $a < n \le b$ أعدادًا صحيحة، ولتكن $u_n$ متتالية مركبة و $g \in C^1([a,b])$. ضع

$$U(x) = \sum_{a<n\le x} u_n.$$

عندئذ

$$\sum_{a<n\le b} u_n g(n) = U(b)g(b) - \int_a^b U(t)g'(t)\,dt.$$

وبالتالي

$$\left|\sum_{a<n\le b} u_n g(n)\right| \le \sup_{a\le t\le b} |U(t)| \left(|g(b)| + \int_a^b |g'(t)|\,dt\right).$$

برهان. نكتب $u_n = U(n) - U(n-1)$، ثم نجمع بالتلسكوب:

$$\sum_{a<n\le b} u_n g(n) = U(b)g(b) - \sum_{a<n<b} U(n)\big(g(n+1) - g(n)\big).$$

وباستخدام

$$g(n+1) - g(n) = \int_n^{n+1} g'(t)\,dt$$

وتعريف $U(t) = U(n)$ على $[n, n+1)$، نحصل على الصيغة التكاملية. أما المتباينة فتنتج بأخذ القيم المطلقة. □

ملاحظة ٤١٨.. هذه اللمّة لا تولّد الإلغاء بذاتها؛ إنها تحفظ الإلغاء الموجود في المجاميع الجزئية وتنقله إلى أوزان ملساء أو رتيبة مع خسارة تقاس بتغير الوزن الكلي.

## ٣١٨. متباينة فرق فان دير كوربوت

الفكرة الجوهرية هي أن المجموع الأصلي قد يكون صعبًا، بينما تكون ارتباطاته مع نسخ مزاحة منه أسهل. لتكن

$$Z = \sum_{n=1}^{N} z_n,$$

ونمدد $z_n$ بالصفر خارج $1 \le n \le N$. لكل $1 \le H \le N$، لدينا

$$HZ = \sum_{m=1}^{N+H-1} \sum_{h=0}^{H-1} z_{m-h}.$$

تطبيق كوشي--شفارتس على المجموع الخارجي يقود إلى المتباينة الأساسية.

**لمّة ٥١٨.** (متباينة فرق فان دير كوربوت). إذا كان $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$ و$1 \le H \le N$، فإن

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z_n\right|^2 \le \frac{N+H-1}{H} \left(\sum_{n=1}^{N} |z_n|^2 + 2\sum_{h=1}^{H-1}\left(1-\frac{h}{H}\right)\left|\sum_{n=1}^{N-h} z_{n+h}\overline{z_n}\right|\right).$$

برهان. بتمديد $z_n$ بالصفر خارج المجال نحصل على

$$H\sum_{n=1}^{N} z_n = \sum_{m=1}^{N+H-1} \sum_{h=0}^{H-1} z_{m-h}.$$

ومن كوشي--شفارتس،

$$H^2|Z|^2 \le (N+H-1)\sum_{m}\left|\sum_{h=0}^{H-1} z_{m-h}\right|^2.$$

نوسع المربع ونرتب الحدود بحسب الفرق $r = h - k$. الحد القطري $r = 0$ يظهر $H$ مرة، وكل فرق موجب $1 \le r \le H-1$ يظهر $H - r$ مرة مع مرافقه المركب. لذلك

$$\sum_{m}\left|\sum_{h=0}^{H-1} z_{m-h}\right|^2 = H\sum_{n=1}^{N}|z_n|^2 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{r=1}^{H-1}(H-r)\sum_{n=1}^{N-r} z_{n+r}\overline{z_n}.$$

نستبدل الجزء الحقيقي بالقيمة المطلقة، ثم نقسم على $H^2$، فنحصل على الصيغة المطلوبة. □

**نتيجة ٦١٨.** (نسخة الأطوار). إذا كان $z_n = e(f(n))$، فإن

$$|S(f;[1,N])|^2 \le \frac{N+H-1}{H}\left(N + 2\sum_{h=1}^{H-1}\left(1-\frac{h}{H}\right)\left|\sum_{n=1}^{N-h} e\big(f(n+h)-f(n)\big)\right|\right).$$

برهان. لدينا $|z_n| = 1$، كما أن

$$z_{n+h}\overline{z_n} = e\big(f(n+h)-f(n)\big).$$

نعوض في اللمّة السابقة. □

ملاحظة ٧١٨. (اختبار الثابت). إذا أخذنا $z_n = 1$، فإن طرف الارتباط يساوي $N - h$، ولا تنتج المتباينة ادخارًا وهميًا. وهذا متوقع لأن الطور الثابت لا يملك أي تذبذب.

## ٠٤١٨ من الفروق إلى المشتقات

عند تطبيق المتباينة على طور أملس، يصبح الطور الجديد

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

ومن مبرهنة القيمة المتوسطة،

$$\Delta_h f(x) = hf'(\xi_x)$$

لنقطة مناسبة $\xi_x \in (x, x+h)$. وهكذا تخفض عملية الفرق رتبة التعقيد المشتقي: المعلومات عن $f''$ تتحول إلى معلومات عن مشتقة $\Delta_h f$، والمعلومات عن مشتقات أعلى تنتقل بالطريقة نفسها. هذه هي النواة التحليلية لعملية $A$ في طريقة الأزواج الأسية.

لكن يجب الحذر: إذا كان $f'(x)$ قريباً من عدد صحيح، فقد تكون الحدود $e(f(n))$ شبه متراصفة حتى لو كانت $|f'(x)|$ كبيرة. لذلك سيكون اختبار المشتقة الأولى مبنياً على الشرط

$$\|f'(x)\| \geq \lambda > 0,$$

لا على $|f'(x)| \geq \lambda$ وحده.

## ٠٥١٨ اختبار المشتقة الأولى

نبدأ بصيغة منفصلة من مبدأ كوسمين--لانداو. وهي الجسر بين المجموع الهندسي الخطي والطور ذي الميل المتغير رتيباً.

**لمّة ٨١٨.** (لمّة كوسمين--لانداو المنفصلة). ليكن $N \geq 2$، ولتكن $\theta_1, \ldots, \theta_{N-1}$ متتالية رتيبة، ولنفترض وجود $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ بحيث

$$\|t\| \geq \lambda \qquad \text{لكل } t \text{ حقيقي بين } \theta_1 \text{ و} \theta_{N-1}.$$

إذا كانت $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ تحقق

$$x_{n+1} - x_n = \theta_n,$$

فإن

$$\left| \sum_{n=1}^{N} e(x_n) \right| \ll \lambda^{-1},$$

بثابت مطلق.

برهان. تضمن الفرضية أن المجال المتصل بين $\theta_1$ و$\theta_{N-1}$ لا يدخل أي جوار نصف قطره $\lambda$ حول عدد صحيح؛ ومن ثم يقع كله داخل مركبة واحدة من

$$\{t \in \mathbb{R} : \|t\| \geq \lambda\}.$$

نضع

$$q(t) = \frac{1}{1 - e(t)}.$$

عندئذ

$$e(x_n) = q(\theta_n)\big(e(x_n) - e(x_{n+1})\big).$$

بجمع هذه الهوية واستعمال الجمع الجزئي المنفصل نحصل على

$$\sum_{n=1}^{N-1} e(x_n) = q(\theta_1)e(x_1) - q(\theta_{N-1})e(x_N) + \sum_{n=2}^{N-1}\big(q(\theta_n) - q(\theta_{n-1})\big)e(x_n).$$

ومن ثم يحد الطرف الأيمن بمجموع قيمتي الطرف والتغير الكلي للدالة $q$ على مجال قيم $\theta_n$. ولدينا

$$|1 - e(t)| = 2|\sin \pi t| \gg \|t\|,$$

فتكون $|q(t)| \ll \lambda^{-1}$. كذلك

$$q'(t) = \frac{2\pi i e(t)}{(1 - e(t))^2},$$

ومع رتابة $\theta_n$ يكون التغير الكلي لـ$q$ على المركبة نفسها من رتبة $O(\lambda^{-1})$: فالجزء القريب من كل طرف يقدّر بتكامل $u^{-2}$، والجزء الأوسط محدود مطلقًا. بإضافة الحد الأخير $e(x_N)$ نحصل على المطلوب. □

**مبرهنة ٩١٨.** (اختبار المشتقة الأولى). لتكن $f \in C^1([a,b])$، ولتكن $f'$ رتيبة على $[a,b]$. افترض وجود $0 < \lambda \le \frac{1}{2}$ بحيث

$$\|f'(x)\| \ge \lambda \qquad (a \le x \le b).$$

عندئذ

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \ll \lambda^{-1},$$

بثابت مطلق.

برهان. رتب الأعداد الصحيحة في الفترة على الصورة

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_N.$$

إذا كان $N \le 1$، فالنتيجة مباشرة من الحد التافه لأن $\lambda^{-1} \ge 2$. فلنفترض $N \ge 2$، وضع $x_j = f(n_j)$. لكل $j < N$، تعطينا مبرهنة القيمة المتوسطة نقطة $\xi_j \in (n_j, n_{j+1})$ تحقق

$$x_{j+1} - x_j = f'(\xi_j).$$

وبما أن $f'$ رتيبة، فإن المتتالية $f'(\xi_j)$ رتيبة أيضًا، كما أن

$$\|t\| \ge \lambda \qquad \text{لكل } t \text{ بين } f'(\xi_1) \text{ و} f'(\xi_{N-1}).$$

فهذا المجال محتوى في مدى $f'$ على $[a,b]$، والفرض على $f'$ قائم في كل نقطة من المجال. نطبق لمّة كوسمين--لانداو المنفصلة فنحصل على الحد المطلوب. □

ملاحظة ١٠١٨. (لماذا لا يكفي $|f'|$). إذا أخذنا $f(x) = Kx$ لعدد صحيح كبير $K$، فإن $|f'(x)| = K$، لكن

$$e(f(n)) = e(Kn) = 1$$

لكل عدد صحيح $n$. لذلك لا يحدث أي إلغاء. الشرط الصحيح هو البعد الدوري $\|f'(x)\|$، لا المقدار المطلق للميل.

**مثال ١١١٨.** (استعادة المجموع الخطي). للطور $f(x) = \alpha x + \beta$ تكون المشتقة ثابتة، وإذا $\|\alpha\| \geq \lambda$ يعطي الاختبار

$$\sum_{M<n\leq M+N} e(\alpha n + \beta) \ll \lambda^{-1},$$

وهو متوافق مع الصيغة الهندسية الدقيقة.

## ٦١٨. اختبار المشتقة الثانية

عندما قد تمر $f'$ قريبًا من أعداد صحيحة، لا يعود اختبار المشتقة الأولى صالحًا على المجال كله. لكن حدًا سفليًا على $|f''|$ يضمن أن مناطق الاقتراب قصيرة، بينما يتيح الحد العلوي ضبط التغير. النسخة الكلاسيكية التي سنستخدمها هي الآتية.

**مبرهنة ١٢١٨.** (اختبار المشتقة الثانية الكلاسيكي). لتكن $f \in C^2([a,b])$، ولنفترض أن $f''$ لا يغير إشارته وأن هناك $\lambda > 0$ و$C \geq 1$ بحيث

$$\lambda \leq |f''(x)| \leq C\lambda \qquad (a \leq x \leq b).$$

عندئذ

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \ll_C (b-a)\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}.$$

هذه صيغة كلاسيكية من اختبار فان دير كوربوت للمشتقة الثانية؛ تعرض هنا بوصفها مدخلًا مقتبسًا ومشروحًا، لا بوصفها نتيجة مثبتة داخل الفصل. يمكن فهم رتبة الحد بتقسيم المجال إلى مناطق تكون فيها $f'$ بعيدة عن الأعداد الصحيحة، فتخضع لاختبار المشتقة الأولى، ومناطق حرجة حول الحلول التقريبية لـ$f'(x) \in \mathbb{Z}$. يضبط الشرط $|f''| \asymp_C \lambda$ طول كل منطقة حرجة وعددها، ثم تؤدي موازنة عرض المناطق إلى الحد المعروض. راجع المعالجة الكلاسيكية في [MV26, الفصل 16].

**مثال ١٣١٨.** (طور تربيعي). إذا كان $\alpha \neq 0$ و

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

فإن $f''(x) = 2\alpha$. باختيار $\lambda = 2|\alpha|$ و$C = 1$ نحصل على

$$\sum_{a<n\leq b} e(\alpha n^2 + \beta n + \gamma) \ll (b-a)|\alpha|^{1/2} + |\alpha|^{-1/2}.$$

هذا الحد يوضح منطقيًا كيف يعالج اختبار المشتقة الثانية الطور التربيعي حتى عندما تعبر $f'$ جوارات أعداد صحيحة.

## حالة دفعة التأليف الثانية

## ٧١٨. الأزواج الأسية: لغة لضغط التقديرات

تسمح اختبارات المشتقات بالحصول على تقديرات منفردة، لكن التطبيقات المتكررة تحتاج إلى لغة تسجل نوع الادخار بطريقة قابلة للنقل بين الأطوار. لهذا الغرض تستعمل نظرية المجاميع الأسية مفهوم الزوج الأسي. لن ندخل هنا في الصياغات الأكثر عمومية أو في أفضل الأزواج المعروفة، بل نثبت إطارًا تشغيليًا محدودًا يكفي لفهم عمليتي $A$ و$B$.

**تعريف ١٤١٨.** (الزوج الأسي في تطبيع أحادي البعد). لتكن $N \geq 1$، و$\sigma > 0$، و$y \geq N^{\sigma}$، وليكن $I = (a, b] \subseteq [N, 2N]$. إذا كان $P \geq 1$ عددًا صحيحًا و $0 < c < \frac{1}{2}$، نرمز بـ $\mathcal{F}(N, P, \sigma, y, c)$ إلى فئة الدوال الحقيقية $f \in C^{P}(I)$ التي تحقق، لكل $x \in I$ ولكل $0 \leq p \leq P - 1$،

$$\left| f^{(p+1)}(x) - \frac{d^p}{dx^p}\left(yx^{-\sigma}\right) \right| \leq c \left| \frac{d^p}{dx^p}\left(yx^{-\sigma}\right) \right|.$$

نقول إن $(\kappa, \lambda)$ زوج أسي أحادي البعد إذا كان

$$(\kappa, \lambda) \in \left\{ 0 \leq \kappa \leq \tfrac{1}{2} \leq \lambda \leq 1,\ \kappa + \lambda < 1 \right\} \cup \left\{ \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), (0, 1) \right\},$$

وكان لكل $\sigma > 0$ عدد صحيح $P = P(\kappa, \lambda, \sigma)$ وثابت $c = c(\kappa, \lambda, \sigma) < \frac{1}{2}$ بحيث، بانتظام لكل $f \in \mathcal{F}(N, P, \sigma, y, c)$،

$$\sum_{n \in I \cap \mathbb{Z}} e(f(n)) \ll_{\kappa, \lambda, \sigma} \left(\frac{y}{N^{\sigma}}\right)^{\kappa} N^{\lambda} \qquad (y \geq N^{\sigma}).$$

هذا هو التطبيع المحدد في [TY24, المعادلتان (1.1)--(1.2)]؛ أما العرض الكلاسيكي لطريقة الأزواج الأسية وعمليتيها فيراجع في [GK91, الفصل 3، الصفحات 21--37].

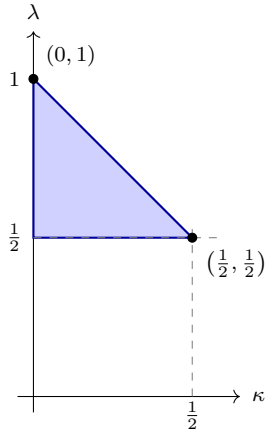
**ملاحظة ١٥١٨..** ثبّتنا هنا تطبيعًا واحدًا كي يكون التعريف قابلًا للتحقق. قد تستعمل مراجع أخرى معلمة لرتبة الطور أو تنقل قوى من $N$ إلى تلك المعلمة، ولذلك لا تقارن الصيغ المختلفة قبل تحويلها إلى تطبيع مشترك.

الزوج التافه $(0, 1)$ يعيد حدًا من رتبة طول المجموع. أما الأزواج الأفضل فتعطي ادخارًا في مناطق مناسبة من المعلمات. ولا يدعي هذا الفصل تصنيف جميع الأزواج الأسية أو الوصول إلى الجبهة المثلى الحديثة.

## ٨١٨. عملية $A$: التفريق وخفض درجة الطور

عملية $A$ هي الصورة المنظمة لمتباينة فرق فان دير كوربوت. إذا كان

$$S = \sum_{n=1}^{N} e(f(n)),$$




شكل ١١٨٠: إغلاق منطقة الأزواج الأسية $(\kappa,\lambda)$ من التعريف ١٤١٨٠: المثلث المفتوح $\{0 \le \kappa \le 1,\ \kappa+\lambda<1\}$ $\frac{1}{2} \le \lambda \le 1$ مع نقطتيه الحديّتين المصرَّح بهما صراحةً $(0,1)$ و$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. الحد المائل $\kappa+\lambda=1$ غير محتوًى فعليًا إلا عند هاتين النقطتين؛ التظليل يمثل الإغلاق لغرض العرض لا المجموعة المفتوحة بحرفيتها.

فإن المتباينة في لمّة ٥١٨٠ تحول $|S|^2$ إلى متوسط لمجاميع ذات أطوار

$$\Delta_h f(n) = f(n+h) - f(n).$$

إذا كان $f$ كثير حدود من الدرجة $d$، فإن $\Delta_h f$ كثير حدود من الدرجة $d-1$. وهذه هي الفائدة الجبرية الأساسية: الفرق لا يجعل المجموع أصغر تلقائيًا، لكنه يخفض تعقيد الطور على حساب التربيع والمتوسط في $h$.

**قضية ١٦١٨٠** (عملية $A$ في النسخة المحدودة)**.** لتكن $1 \le H \le N$، ولنفترض أن لكل $1 \le h < H$ لدينا تقدير منتظم

$$\left|\sum_{n=1}^{N-h} e\big(f(n+h)-f(n)\big)\right| \le B_h.$$

عندئذ

$$|S|^2 \le \frac{N+H-1}{H}\left(N + 2\sum_{h=1}^{H-1}\left(1-\frac{h}{H}\right)B_h\right).$$

وبخاصة، إذا كان $B_h \le B$ لجميع $h$، فإن

$$|S| \ll \left(\frac{N^2}{H} + NB\right)^{1/2},$$

بثابت مطلق.

برهان. الصيغة الأولى هي نتيجة الأطوار من متباينة فرق فان دير كوربوت مع تعويض كل ارتباط مزاح بحده $B_h$. وللصيغة الثانية نستخدم

$$\sum_{h=1}^{H-1}\left(1-\frac{h}{H}\right) \le \frac{H}{2}$$

و

$$\frac{N+H-1}{H} \ll \frac{N}{H}+1 \ll \frac{N}{H}$$

لأن $H \le N$. ينتج

$$|S|^2 \ll \frac{N}{H}(N+HB) = \frac{N^2}{H}+NB,$$

ثم نأخذ الجذر التربيعي. □

ملاحظة ١٧١٨. (ما الذي تثبته هذه القضية؟). تثبت القضية خطوة التفريق الكمية نفسها، لكنها لا تثبت التحويل العام للأزواج الأسية بكل فروضه وتطبيعاته. الانتقال الصوري المعروف

$$(\kappa,\lambda) \xmapsto{A} \left(\frac{\kappa}{2\kappa+2}, \frac{\kappa+\lambda+1}{2\kappa+2}\right)$$

يعرض هنا بوصفه نتيجة كلاسيكية مقتبسة من نظرية الأزواج الأسية، لأنه يتطلب إدخال نموذج مشتقي محدد ثم تحسين اختيار $H$ وتتبع الحدود الطرفية بصورة موحدة. راجع [GK91, الفصل 3، الصفحات 21--37].

**مثال ١٨١٨.** (خفض درجة طور تكعيبي). إذا كان

$$f(n) = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta,$$

فإن

$$\Delta_h f(n) = 3\alpha h n^2 + (3\alpha h^2 + 2\beta h)n + \alpha h^3 + \beta h^2 + \gamma h.$$

وهكذا تحوّل عملية $A$ المجموع التكعيبي إلى عائلة من المجاميع التربيعية، يمكن تقديرها باختبار المشتقة الثانية أو بأداة أقوى عند الحاجة.

## ٠.٩١٨ عملية $B$: التحويل الثنائي والطور الساكن

تختلف عملية $B$ بنيويًا عن عملية $A$. فهي ليست مجرد تطبيق آخر لمتباينة الفرق، بل تعتمد على تحويل جمعي من نوع بواسون أو فوروني، ثم تحليل تكاملات متذبذبة قرب نقاط الطور الساكن. في الصورة الإرشادية، إذا كانت $f'$ رتيبة وقابلة للعكس، فإن مجموعًا على المتغير $n$ يتحول إلى مجموع ثنائي على قيم صحيحة $m$ تقع في مدى $f'$، ويظهر الطور المزدوج

$$f(x_m) - m x_m, \qquad f'(x_m) = m,$$

مع وزن تقوده الكمية $|f''(x_m)|^{-1/2}$.

**قضية ١٩١٨.** (عملية $B$ في إطار الأزواج الأسية). في التطبيع الكلاسيكي للأزواج الأسية، تنقل عملية $B$ الزوج $(\kappa,\lambda)$ إلى

$$B(\kappa,\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}, \kappa + \frac{1}{2}\right),$$

تحت فروض النعومة والرتابة وعدم الانحلال اللازمة للتحويل الثنائي وتحليل الطور الساكن.

لا نثبت هذه القضية هنا؛ برهانها الكامل يحتاج إلى صيغة جمع ثنائية مع حدود طرفية، وإلى تقدير موحد لتكاملات الطور الساكن. حذف هذه المكونات ثم إعلان العملية نتيجة من متباينة الفرق وحدها سيكون فجوة منطقية. لذلك يبقى تصنيفها CITED / EXPLAINED؛ راجع [GK91, الفصل 3، الصفحات 21--37].

## ١٠١٨. تركيب العمليتين وحدود الاستخدام

بدءًا من الزوج التافه $(0,1)$، تعطي عملية $B$ الزوج

$$B(0,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

ثم تعطي عملية $A$، في الصياغة الكلاسيكية العامة المقتبسة، الزوج

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right).$$

هذا المثال يوضح كيف تتحول الأدوات التحليلية إلى حساب على أزواج من الأسس. لكنه لا يعني أن كل تطبيق يختزل إلى اختيار أصغر $\kappa$ أو $\lambda$ منفردًا؛ الأفضلية تعتمد على المنطقة التي تعيش فيها معلمات الطور وطول المجموع.

ملاحظة ٢٠١٨. (صلة الفصل السابع عشر). الأزواج الأسية أداة من أدوات ضبط المجاميع على الأقواس الصغرى، لكنها ليست وحدها البرهان الكامل لتقديرات وارينغ أو غولدباخ. يلزم في التطبيقات الفعلية تقسيم المعلمات، والتقريبات الديوفانتية، وتقديرات متوسطية، وأحيانًا مدخلات أعمق. لذلك تبقى النتائج المركبة في الفصل السابع عشر على تصنيفها المقتبس، ولا تُرقّى تلقائيًا بسبب عرض عمليتي $A$ و$B$ هنا.

## حالة دفعة التأليف الثالثة

# باب ١٩

# الأوليات في الفترات القصيرة

## نطاق الفصل وحالته

يدرس هذا الفصل مقدار ما يبقى من مبرهنة الأعداد الأولية عندما نستبدل الفترة الطويلة $(0, x]$ بالفترة المتحركة

$$(x, x+h], \qquad h = o(x).$$

يثبت الفصل داخليًا لغة الفروق، ومبدأ نقل حد الخطأ، وضبط القوى الأولية العليا، والانتقال من $\psi$ إلى $\vartheta$ ثم $\pi$، وربط وجود أولي بحدود الفجوات. أما السجلات العددية العميقة فتُنقل من مصادرها الأصلية: صيغة Guth--Maynard التقاربية عند $17/30 + \varepsilon$، وحد Baker--Harman--Pintz السفلي عند $0.525$.

## نواتج التعلم

بنهاية الفصل يستطيع القارئ أن:

١. يميز بين صيغة تقاربية، وحد سفلي من الرتبة الصحيحة، ومجرد الوجود، ونتيجة صحيحة لتقريبًا كل فترة.

٢. يكتب فروق $\psi$، و$\vartheta$، و$\pi$ ويفهم ما تعده كل دالة.

٣. ينقل حد خطأ عالميًا معطى إلى فرق قصير من دون ادعاء نطاق لم يوفره المدخل.

٤. يزيل أثر القوى الأولية العليا عندما يكون $h$ أكبر من $x^{1/2+\eta}$.

٥. ينقل الصيغة التقاربية من $\vartheta$ إلى $\pi$ بحصار مباشر.

٦. يضع نتائج Hoheisel وIngham وHuxley وGuth--Maynard في ترتيبها التاريخي الصحيح.

٧. يشرح لماذا لا تُرتب نتيجتا Guth--Maynard وBaker--Harman--Pintz بمقارنة الأسين وحدهما.

## ٠.١١٩ أربعة أهداف مختلفة

نستعمل، لأي دالة $F$ على الأعداد الحقيقية الموجبة، الترميز

$$\Delta_h F(x) = F(x+h) - F(x).$$

**تعريف ٠.١١٩** (أنظمة الفترات القصيرة)**.** لتكن $h = h(x) > 0$ و$h = o(x)$. نميز بين العبارات الآتية:

١. صيغة تقاربية لكل $x$:

$$\Delta_h \pi(x) \sim \frac{h}{\log x}.$$

٢. حد سفلي من الرتبة الصحيحة لكل $x$: وجود ثابت $c > 0$ بحيث

$$\Delta_h \pi(x) \geq c\frac{h}{\log x}$$

لكل $x$ كبير.

٣. مجرد الوجود لكل $x$:

$$\Delta_h \pi(x) \geq 1.$$

٤. نتيجة لتقريباً كل $x$: يسمح بمجموعة استثنائية كثافتها أو قياسها النسبي يؤول إلى صفر في المعنى المحدد في المبرهنة المستعملة.

قوة العبارات الثلاث الأولى تتناقص بهذا الترتيب. أما العبارة الرابعة فليست درجة رابعة على السلم نفسه: تغيير المكمم من ``كل $x$" إلى ``تقريباً كل $x$" يمنع استعمالها لإثبات حكم نقطي عند كل موضع.

**ملاحظة ٠.٢١٩.** لا تكفي مبرهنة الأعداد الأولية النوعية $\pi(x) \sim x/\log x$ لاستنتاج صيغة قصيرة عندما $h = o(x)$. فقد يكون خطأ تقريب كل من $\pi(x+h)$ و$\pi(x)$ أكبر من الحد الرئيسي المتوقع $h/\log x$. الفترات القصيرة مسألة عن دقة الخطأ، لا عن الحد الرئيسي العالمي وحده.

## ٠.٢١٩ فروق دوال تشيبيشيف

نذكر التعريفات

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \qquad \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \qquad \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

**قضية ٠.٣١٩** (هوية فرق فون مانغولت)**.** لكل $x \geq 1$ و$h > 0$:

$$\Delta_h \psi(x) = \sum_{x < n \leq x+h} \Lambda(n).$$

برهان. نطرح المجموعين المنتهيين

$$\psi(x+h) = \sum_{n \le x+h} \Lambda(n), \qquad \psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n).$$

تلغى الحدود ذات $n \le x$، وتبقى بالضبط الحدود التي تحقق $x < n \le x+h$. □

إيجابية $\Delta_h \psi(x)$ لا تثبت وحدها وجود أولي، لأن $\Lambda(n)$ ترى القوى الأولية $p^m$ أيضًا. هذه هي الفجوة التي يعالجها ضبط القوى العليا أدناه.

## ٣١٩. مبدأ نقل حد الخطأ

**قضية ٤١٩.** (نقل حد خطأ معطى إلى فرق قصير). افترض أن

$$\psi(t) = t + O(E(t))$$

عند النقطتين $t = x$ و$t = x+h$. عندئذ

$$\Delta_h \psi(x) = h + O\big(E(x+h) + E(x)\big).$$

وبخاصة، إذا

$$E(x+h) + E(x) = o(h),$$

فإن

$$\Delta_h \psi(x) \sim h.$$

برهان. اكتب

$$\psi(x+h) = x + h + O(E(x+h))$$

و

$$\psi(x) = x + O(E(x)).$$

بطرح المعادلتين نحصل على الدعوى. والنتيجة التقاربية هي إعادة كتابة شرط أن يكون مجموع الخطأين $o(h)$. □

ملاحظة ٥١٩. (حدود المبدأ). هذه القضية لا تنتج أسًا عدديًا بذاتها. إذا كان المتاح فقط $\psi(t) = t + o(t)$، فلا يلزم أن يكون الفرق بين خطأي النقطتين $o(h)$ عندما $h = o(x)$. يجب أن يأتي النطاق القصير من حد خطأ كمي أو من مبرهنة قصيرة مقتبسة صراحة.

## ٤١٩. إزالة القوى الأولية العليا

ضع

$$R(t) = \psi(t) - \vartheta(t).$$

من هوية القوى الأولية في الفصل التاسع:

$$R(t) = \sum_{\substack{p^m \le t \\ m \ge 2}} \log p.$$

إذن $R$ غير سالبة وغير متناقصة، فكلما ازداد $t$ لا تدخل إلا حدود غير سالبة جديدة.

**لمّة ٦١٩.** (ضبط القوى العليا في فترة قصيرة). لكل $x \ge 2$ و$h > 0$:

$$0 \le \Delta_h \psi(x) - \Delta_h \vartheta(x) \le R(x+h) \ll \sqrt{x+h}\log(x+h).$$

وإذا كان $h = o(x)$ ووجد $\eta > 0$ بحيث

$$h \ge x^{1/2+\eta},$$

فإن

$$\Delta_h \psi(x) - \Delta_h \vartheta(x) = o(h).$$

ومن ثم

$$\Delta_h \psi(x) = h + o(h) \quad \Longrightarrow \quad \Delta_h \vartheta(x) = h + o(h).$$

برهان. لأن $R$ غير متناقصة وغير سالبة:

$$0 \le R(x+h) - R(x) \le R(x+h).$$

لكن

$$R(x+h) - R(x) = \Delta_h \psi(x) - \Delta_h \vartheta(x).$$

وتعطي الحد

$$R(t) \ll \sqrt{t}\log t.$$

هذا يثبت الحصار الأول. وإذا كان $h = o(x)$، فإن $x + h \sim x$، ولذلك

$$\frac{\sqrt{x+h}\log(x+h)}{h} \ll \frac{\sqrt{x}\log x}{x^{1/2+\eta}} = \frac{\log x}{x^{\eta}} \longrightarrow 0.$$

فتكون مساهمة القوى العليا $o(h)$، وينتج الاستنتاج الأخير بالطرح. □

## ٥١٩. الانتقال من $\vartheta$ إلى $\pi$

**قضية ٧١٩.** (حصار العد غير الموزون). إذا كان $x > 1$ و$h > 0$، فإن

$$\frac{\Delta_h \vartheta(x)}{\log(x+h)} \le \Delta_h \pi(x) \le \frac{\Delta_h \vartheta(x)}{\log x}.$$

وإذا كان $h = o(x)$ و

$$\Delta_h \vartheta(x) = h + o(h),$$

فإن

$$\Delta_h \pi(x) \sim \frac{h}{\log x}.$$

برهان. لكل أولي $p$ في $(x, x+h]$ لدينا

$$\log x < \log p \le \log(x+h).$$

بجمع هذه المتراجحات على الأوليات في الفترة نحصل على

$$\log x\, \Delta_h \pi(x) \le \Delta_h \vartheta(x) \le \log(x+h)\, \Delta_h \pi(x),$$

ثم نعيد ترتيبها. وإذا كان $h = o(x)$، فإن

$$\log(x+h) = \log x + \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \log x + o(1),$$

وبالتالي $\log(x+h)/\log x \to 1$. نعوض الصيغة المفترضة في الحصار ونطبق مبرهنة الحصر. □

ملاحظة ٨١٩.. هذا الانتقال محلي ولا يحتاج إلى حد خطأ عالمي جديد أو إلى استعمال دوري للجمع الجزئي. لكنه يحتاج إلى صيغة لـ$\vartheta$ ذات رتبة خطأ أصغر من $h$.

## ٦١٩. المسار التاريخي: من Hoheisel إلى Huxley

أثبت Hoheisel لأول مرة أن مبرهنة الأعداد الأولية تبقى صحيحة في فترات طولها $x^{1-\delta}$ لثابت ما $\delta > 0$ [Hoh30]. لا نسجل هنا قيمة عددية لـ$\delta$، لأن النص الأصلي لم يكن متاحًا رقميًا في تدقيق المشروع وتعارضت بعض المصادر الثانوية في نقلها.

ربط Ingham النطاق القصير بحدود دالة زيتا على الخط الحرج. في صياغته، إذا

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^c),$$

ظهر الأس

$$\frac{1+4c}{2+4c},$$

وأعطت المدخلات الكلاسيكية المرحلة $5/8$ [Ing37, Theorem 1]. ثم خفض Huxley السجل التقاربي التاريخي إلى $7/12$ [Hux72]. هذه النتائج مقتبسة ومشروحة؛ لا يعيد الفصل بناء تقديرات كثافة الأصفار التي تحملها.

## ٧١٩. السجل التقاربي الحديث

**مبرهنة ٩١٩.** Guth--Maynard( ). لكل $\varepsilon > 0$، وبانتظام في النطاق

$$x^{17/30+\varepsilon} \le h \le x^{0.99},$$

لدينا

$$\pi(x+h) - \pi(x) = \frac{h}{\log x} + O_\varepsilon\left(h \exp\left(-\sqrt[4]{\log x}\right)\right)$$

عندما يكون $x$ كبيراً بما يكفي.

وبما أن

$$\frac{17}{30} = 0.566\ldots < \frac{7}{12} = 0.583\ldots,$$

فإن نتيجة Guth--Maynard حسنت السجل التقاربي السابق. لكن هذا لا يجعلها تلقائيًا ``أقوى من كل نتيجة ذات أس أصغر"؛ يجب أولًا مقارنة نوع النتيجة ومكمماتها.

## ٠.٨١٩ فترة أقصر بنتيجة أضعف نوعيًا

**مبرهنة ٠.١٠١٩** (Baker--Harman--Pintz). لكل $x$ كبير بما يكفي:

$$\pi\big(x + x^{0.525}\big) - \pi(x) > \frac{9}{100}\frac{x^{0.525}}{\log x}.$$

ملاحظة ١١١٩. (تمركز الفترة). تُعرض نتيجة Baker--Harman--Pintz هنا بصيغة الفترة الأمامية

$$(x, x + x^{0.525}],$$

وهي الصيغة التي يصف بها المصدر المنشور نتيجته. ويمكن نقل نتائج وجود مماثلة بين فترات أمامية وخلفية بعد تغيير متغير الأساس، لكن ذلك انتقال منفصل ولا يُستعمل لتبرير الصياغة أعلاه.

تضمن هذه المبرهنة وجود أولي في فترة أقصر من النطاق التقاربي السابق، وتعطي حدًا سفليًا من الرتبة الصحيحة. لكنها لا تثبت

$$\pi(x + x^{0.525}) - \pi(x) \sim \frac{x^{0.525}}{\log x}.$$

إذن لا يجوز ترتيب نتيجتي Guth--Maynard وBaker--Harman--Pintz بمقارنة 17/30 و21/40 وحدهما: الأولى أقوى نوعيًا في فترة أطول، والثانية أضعف نوعيًا في فترة أقصر.

ملاحظة ١٢١٩. (ادعاء 0.52). تدعي المسودة [Li25] وجود أوليات في فترات ذات أس 0.52. وفي تاريخ القطع الأدبي للمشروع كانت النسخة arXiv:2308.04458v8 غير مثبتة كسجل محكّم؛ لذلك تبقى QUARANTINED-PREPRINT، ولا تحمل معرّف نتيجة في الموسوعة، ولا تستبدل السجل المعتمد.

## ٠.٩١٩ من وجود أولي إلى فجوة بين أوليين متتاليين

**نتيجة ١٣١٩.** (حد الفترة يعطي حد الفجوة). افترض وجود $0 < \theta < 1$ و$x_0$ بحيث تحوي الفترة

$$(x, x + x^{\theta}]$$

أوليًا لكل $x \geq x_0$. عندئذ، لكل $n$ كبير بما يكفي:

$$p_{n+1} - p_n \leq p_n^{\theta}.$$

برهان. خذ $x = p_n \geq x_0$. بالفرض يوجد أولي $q$ يحقق

$$p_n < q \leq p_n + p_n^{\theta}.$$

وبتعريف $p_{n+1}$ بوصفه أصغر أولي أكبر من $p_n$، لدينا $p_{n+1} \leq q$. لذلك

$$p_{n+1} - p_n \leq q - p_n \leq p_n^{\theta}.$$

□

ملاحظة ١٤١٩. (اتجاه الاستنتاج). العكس ليس آليًا بالصيغة نفسها: حد مكتوب بدلالة $p_n$ يحتاج إلى اختيار الأولي السابق لـ$x$ وضبط المقارنة بين $x$ و$p_n$. لذلك نسجل هنا الاتجاه المستعمل فقط.

## ١٠١٩. ما الذي تصنعه الصيغة الصريحة؟

في الصورة الإرشادية، تربط الصيغة الصريحة فرق $\psi$ بمجموع على أصفار زيتا:

$$\Delta_h\psi(x) = h - \sum_{\rho} \frac{(x+h)^{\rho} - x^{\rho}}{\rho} + \text{حدود القطع والخطأ}.$$

لا تكفي كتابة هذه الصيغة رسميًا. يجب اختيار ارتفاع القطع، وضبط عدد الأصفار قرب خطوط رأسية مختلفة، واستعمال منطقة خالية من الأصفار، ثم موازنة الخطأ مع $h$. تاريخيًا حسنت تقديرات كثافة الأصفار هذا التوازن، وفي عمل Guth--Maynard جاءت قفزة 17/30 من تقديرات قيم كبيرة جديدة تدخل في آلة الكثافة.

هذا الشرح لا يسد دين بيرون وتحويل المسار في الفصول السابقة، ولا يدعي إعادة برهان النتيجة الحديثة. الغرض منه تحديد موضع العمق: الهويات المحلية سهلة نسبيًا، أما الوصول إلى أس قصير موحد لكل $x$ فهو محمول على معلومات دقيقة عن أصفار زيتا ومتعددات حدود ديريشليه.

## ١١١٩. تقريبًا كل فترة

قد تسمح النتائج المتوسطية بفترات أقصر إذا استثنينا مجموعة صغيرة من مواضع البداية. لكن لا يجوز إدخال هذه النتائج في برهان حكم لكل $x$. لهذا يفصل الفصل بين المكممين:

$$\text{لتقريبًا كل } x \quad \text{و} \quad \text{لكل } x.$$

أي نتيجة متوسطية تضاف لاحقًا يجب أن تصرح بدقة بمجال المتوسط، وقياس المجموعة الاستثنائية، وانتظام الثوابت، وألا تُستعمل لإثبات أو.

## ٠.١٢١٩ أخطاء شائعة

١. طرح صيغتين من نوع $x + o(x)$ ثم افتراض أن الفرق يساوي $h + o(h)$ بلا حد خطأ كمي.

٢. استنتاج وجود أولي من $\Delta_h \psi > 0$ من دون إزالة القوى الأولية العليا.

٣. وصف حد سفلي من الرتبة الصحيحة بأنه صيغة تقاربية.

٤. تحويل نتيجة ``تقريبًا كل $x$" إلى نتيجة ``كل $x$".

٥. وصف $7/12$ بأنه السجل التقاربي الحالي بعد نتيجة Guth--Maynard.

٦. اعتماد مسودة $0.52$ كما لو كانت ورقة محكّمة.

٧. مقارنة نتيجتين بمقارنة الأسين فقط مع تجاهل نوع الحكم.

## ٠.١٣١٩ تمارين

### ٠.١٠١٣١٩ المستوى الأول

١. أثبت هوية $\Delta_h \vartheta(x) = \sum_{x<p\le x+h} \log p$.

٢. تحقق من أن $R(t) = \psi(t) - \vartheta(t)$ غير متناقصة.

٣. أثبت أن $\log(x+h) \sim \log x$ إذا $h = o(x)$.

٤. فسر لماذا تستلزم الصيغة التقاربية حدًا سفليًا من الرتبة الصحيحة.

### ٠.٢٠١٣١٩ المستوى الثاني

١. إذا كان $E(t) = t\exp(-c\sqrt{\log t})$، استخرج شرطًا كافيًا على $h$ كي يعطي مبدأ نقل الخطأ $\Delta_h \psi(x) \sim h$.

٢. أثبت أن $\sqrt{x}\log x = o(x^{1/2+\eta})$ لكل $\eta > 0$.

٣. أعد برهان الانتقال $\vartheta \to \pi$ باستعمال جمع جزئي، ثم قارن طول البرهان بالحصار المباشر.

٤. بين أن حدًا سفليًا موجبًا لـ$\Delta_h \vartheta$ يثبت وجود أولي مباشرة.

### ٣٠١٣١٩. المستوى الثالث

١. حدد بدقة أين تفشل محاولة استنتاج نتيجة قصيرة من PNT النوعية وحدها.

٢. اشرح لماذا يحتاج عكس إلى ضبط إضافي.

٣. ارسم خريطة اعتماد تبدأ من صيغة صريحة مقطوعة وتنتهي بحد على $\Delta_h\psi$، وحدد المدخلات التي تبقى مقتبسة.

٤. قارن منطقيًا بين مبرهنة Guth--Maynard ومبرهنة Baker--Harman--Pintz من حيث طول الفترة، ونوع النتيجة، والمكمم.

## حالة النتائج المعتمدة

جميع النتائج الثماني ACTIVE / CITABLE بعد نجاح البناء، والتدقيق الرياضي والمرجعي، والمراجعة المستقلة للمتن، وقرار المالك الصريح.

## ١٤١٩. خلاصة الفصل

الفترات القصيرة تكشف الفرق بين معرفة الكثافة العالمية للأوليات ومعرفة انتظامها المحلي. الهويات التي تنقل من $\psi$ إلى $\vartheta$ ثم $\pi$ قصيرة وواضحة، لكن المدخل الذي يجعل الخطأ أصغر من طول الفترة هو موضع العمق الحقيقي. تاريخيًا حملت كثافة الأصفار هذا العبء من Hoheisel إلى Huxley، ثم نقل Guth--Maynard السجل التقاربي إلى $17/30 + \varepsilon$. وفي اتجاه مختلف، أعطى Baker--Harman--Pintz وجودًا وحدًا سفليًا من الرتبة الصحيحة في فترة أقصر عند $0.525$. الفصل الصحيح لا يخلط هذين النوعين، ولا يحول مسودة أحدث إلى سجل معتمد.

# باب ٢٠

# الأشكال المعيارية وأشكال ماس وصيغ التتبع

## نطاق الفصل وحالته

ينقل هذا الفصل نظرية الأعداد التحليلية من المجاميع على الأعداد الصحيحة إلى التحليل الطيفي على السطح الزائدي. الفكرة الموحدة هي أن تعامد عائلة من الدوال الذاتية يحول متوسطات معاملات فورييه إلى حد قطري وإلى مجاميع Kloosterman موزونة بنوى Bessel. نعالج أولًا الهندسة الزائدية والأشكال المعيارية الهولومورفية وأشكال ماس، ثم نعرض صيغ Petersson وKuznetsov بتطبيع مصرح به، ونختم بمدخل بنيوي إلى صيغة Selberg في النموذج المدمج.

## نطاق التطبيع

- في صيغة Petersson نعمل مع $SL_2(\mathbb{Z})$، وشخصية تافهة، ووزن زوجي $k > 2$.
- في صيغة Kuznetsov نعمل مع الزمرة المعيارية ووزن ماس صفر، ونبقي الطيف المستمر ظاهرًا.
- صيغة Selberg تعرض للنموذج المدمج فقط؛ الحالة غير المدمجة وحدود القطع والمبعثرات مؤجلة.

## نواتج التعلم

بنهاية الفصل يستطيع القارئ أن:

١. يثبت ثبات القياس الزائدي تحت فعل $SL_2(\mathbb{R})$.

٢. يميز بين شرط التحويل المعياري وشرط الانعدام عند الرؤوس.

٣. يستخرج توسع فورييه لشكل معياري من دوريته.

٤. يعرّف حاصل Petersson ويشرح سبب ظهور العامل $y^k$.

٥. يكتب مؤثرات Hecke عند المستوى 1 ويستنتج علاقة معاملات الشكل الذاتي.

٦. يميز الأشكال الهولومورفية عن أشكال ماس الذاتية للابلاس.

٧. يحدد الطرف الطيفي والطرف الحسابي في صيغ Petersson وKuznetsov.

٨. يشرح لماذا لا يجوز حذف طيف Eisenstein من Kuznetsov.

٩. يقرأ صيغة Selberg المدمجة بوصفها مساواة بين الطول والطيف.

## ٠.١٢٠. الفضاء العلوي والهندسة الزائدية

نكتب

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}, \qquad d\mu(z) = \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

تؤثر المصفوفة

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

بواسطة تحويل Möbius

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

ولا يتغير الفعل إذا استبدلنا $\gamma$ بـ$-\gamma$، ولذلك فالمجموعة الهندسية الفعلية هي $PSL_2(\mathbb{R})$.

**تعريف ٠.١٢٠.** (عامل الأتمتة والقياس الزائدي). نضع

$$j(\gamma, z) = cz + d.$$

ويُسمى

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \qquad d\mu(z) = \frac{dx\,dy}{y^2}$$

المتر والقياس الزائديين على $\mathbb{H}$.

**قضية ٠.٢٢٠.** (هويات الفعل وثبات القياس). لكل $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$ و$z \in \mathbb{H}$:

$$\Im(\gamma z) = \frac{\Im z}{|cz + d|^2}, \qquad \frac{d(\gamma z)}{dz} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

ومن ثم

$$d\mu(\gamma z) = d\mu(z).$$

برهان. باستعمال $ad - bc = 1$ نحسب

$$\gamma z - \overline{\gamma z} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d) - (a\bar{z} + b)(cz + d)}{|cz + d|^2} = \frac{z - \bar{z}}{|cz + d|^2},$$

فتنتج هوية الجزء التخيلي. كما يعطي الاشتقاق

$$\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

إذن عامل جاكوبي الحقيقي هو $|cz+d|^{-4}$، بينما يتحول $y^2$ إلى $y^2|cz+d|^{-4}$. بإلغاء العاملين نحصل على ثبات $dx\,dy/y^2$. □

ملاحظة ٣٢٠. هذا الثبات هو السبب البنيوي في أن حاصل الضرب $L^2$ لأشكال ماس لا يحتاج وزنًا إضافيًا، بينما يحتاج حاصل Petersson للأشكال من الوزن $k$ إلى العامل $y^k$ كي يعوض مقدار عامل الأتمتة.

## ٢٢٠. الأشكال المعيارية الهولومورفية

لتكن

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}).$$

إنها مولدة بالتحويلين

$$T : z \mapsto z+1, \qquad S : z \mapsto -\frac{1}{z}.$$

**تعريف ٤٢٠.** (الشكل المعياري وشكل الحدبة). ليكن $k$ عددًا صحيحًا. الشكل المعياري الهولومورفي من الوزن $k$ للمجموعة $\Gamma$ هو دالة هولومورفية $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ تحقق

$$f(\gamma z) = j(\gamma, z)^k f(z) \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

وتكون هولومورفية عند الرأس $\infty$. وإذا كان حدها الثابت عند الرأس صفرًا سميت شكل حدبة. نرمز إلى الفضاءين بـ$M_k(\Gamma)$ و$S_k(\Gamma)$.

ملاحظة ٥٢٠. (قيد الزوجية). لأن $-I \in \Gamma$ يعمل على $\mathbb{H}$ عمل الهوية، فإن

$$f(z) = f((-I)z) = (-1)^k f(z).$$

لذلك $M_k(\Gamma) = \{0\}$ عندما يكون $k$ فرديًا. ولهذا يقتصر نطاق صيغة Petersson في هذا الفصل على الوزن الزوجي.

**لمّة ٦٢٠.** (التوسع عند الرأس). إذا كان $f$ هولومورفيًا على $\mathbb{H}$ ويحقق $f(z+1) = f(z)$، فإن له توسعًا

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_f(n) e(nz), \qquad e(w) = e^{2\pi i w},$$

متقاربًا محليًا. وإذا كان $f$ هولومورفيًا عند $\infty$، فإن

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_f(n) e(nz),$$

وهو شكل حدبة عند $\infty$ إذا وفقط إذا $a_f(0) = 0$.

برهان. ضع $q = e(z) = e^{2\pi iz}$. تحول الدورية الدالة $f$ إلى دالة هولومورفية $F(q)$ على القرص المثقوب $0 < |q| < 1$، لأن اختيار لوغاريتم آخر لـ$q$ يغير $z$ بعدد صحيح ولا يغير $f(z)$. متسلسلة Laurent للدالة $F$ تعطي

$$F(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_f(n)q^n.$$

الهولومورفية عند الرأس تعني أن الشذوذ عند $q = 0$ قابل للإزالة، فتختفي القوى السالبة. والانعدام عند الرأس يكافئ $F(0) = a_f(0) = 0$. □

**مثال ٠٧٢٠.** (متسلسلة دلتا). الدالة

$$\Delta(z) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24} = \sum_{n\geq 1}\tau(n)q^n$$

شكل حدبة من الوزن 12. لا نثبت معياريتها هنا؛ المثال يوضح أن معاملات فورييه للأشكال المعيارية تحمل متتاليات حسابية عميقة.

## ٠٣٢٠ حاصل Petersson

**تعريف ٠٨٢٠.** Petersson لـ صاحـ( عند المستوى 1). إذا كان $f, g \in S_k(\Gamma)$، نضع

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}\, y^k\, d\mu(z).$$

**قضية ٠٩٢٠.** Petersson لـ صاحـ فـ يرعة ة ملاسـ( ). الدالة

$$f(z)\overline{g(z)}\, y^k\, d\mu(z)$$

ثابتة تحت فعل $\Gamma$، ويتقارب التكامل عندما يكون $f, g$ شكلي حدبة.

برهان. لدينا

$$f(\gamma z)\overline{g(\gamma z)} = |cz+d|^{2k} f(z)\overline{g(z)}$$

و

$$\Im(\gamma z)^k = \frac{y^k}{|cz+d|^{2k}},$$

بينما $d\mu$ ثابت. فتثبت اللاتغيرية. أما عند الرأس، فإن غياب الحد الثابت يعطي تناقصًا أسيًا من توسع فورييه؛ وهذا يغلب نمو عامل $y^k$. وعلى الجزء المدمج من المجال الأساسي يكون التكامل منتهيًا بالاستمرارية. □

## ٠٤٢٠. مؤثرات Hecke

نعتمد عند المستوى 1 التطبيع

$$(T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} d^{-k} \sum_{b \bmod d} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

ويمكن كتابته بصورة أوضح:

$$(T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

**مبرهنة ٠١٠٢٠.** Hecke تاقلاء( الأساسية). تحفظ المؤثرات $T_n$ الفضاء $S_k(\Gamma)$، وهي ذاتية المرافق بالنسبة إلى حاصل *Petersson*، وتحقق

$$T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T_{mn/d^2}.$$

وبخاصة، إذا $(m,n) = 1$، فإن $T_m T_n = T_{mn}$.

إذا كان

$$f(z) = \sum_{r \geq 1} a_f(r) e(rz),$$

فإن حساب مجموع $b \bmod d$ باستعمال التعامد المنتهي يعطي

$$a_{T_n f}(r) = \sum_{d|(n,r)} d^{k-1} a_f\left(\frac{nr}{d^2}\right).$$

فإذا كان $f$ شكلًا ذاتيًا مطبعًا بـ$a_f(1) = 1$، ينتج من أخذ $r = 1$ أن القيمة الذاتية لـ$T_n$ هي $a_f(n)$، ومن ثم

$$a_f(m) a_f(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_f\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

هذه العلاقة هي البذرة الجبرية للجداء الأويلري، لكن بناء دوال $L$ الآلية وتحليلها مؤجل إلى الفصل الحادي والعشرين.

## ٠٥٢٠. أشكال ماس

نستعمل مؤثر لابلاس الزائدي بإشارة غير سالبة:

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

**تعريف ١١٢٠.** (شكل ماس الحدبي من الوزن صفر). شكل ماس الحدبي للمجموعة $\Gamma$ هو دالة ملساء $u : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ تحقق:

١. $u(\gamma z) = u(z)$ لكل $\gamma \in \Gamma$.

٢. $\Delta u = \lambda u$ لقيمة ذاتية $\lambda$.

٣. $u \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, d\mu)$.

٤. حدها الثابت عند الرأس يساوي صفراً.

**مبرهنة ١٢٢٠.** Fourier--Whittaker مع سوتو تاريغتسا لصفر ( ). إذا كان $u$ شكل ماس حدبياً ذا قيمة ذاتية

$$\lambda = \frac{1}{4} + t^2,$$

فإن

$$u(z) = \sqrt{y} \sum_{n \neq 0} \rho_u(n) K_{it}(2\pi|n|y) e(nx).$$

**ملاحظة ١٣٢٠.** $K$-Bessel رهظي اذلا ( ). الدورية في $x$ تعطي توسعًا فورييريًا. عند إدخاله في معادلة $\Delta u = (1/4 + t^2)u$، تحقق معاملات $y$ معادلة Bessel معدلة. شرط $L^2$ والانحدار عند الرأس يستبعد الحل المتنامي $I_{it}$ ويبقي $K_{it}$. هذه حجة فصل متغيرات؛ أما التحليل الطيفي الكامل وتمام العائلة فمدخل مقتبس.

**ملاحظة ١٤٢٠.** (تطبيعان لا يجوز خلطهما). يمكن تطبيع الشكل بـ$\|u\|_2 = 1$، أو تطبيع معاملات Hecke بحيث $\rho_u(1) = 1$. لا يتطابق التطبيعان عمومًا. صيغة Kuznetsov تتغير عواملها إذا انتقلنا بينهما، ولذلك سنصرح بالتطبيع في الصيغة نفسها.

## ٦٢٠. مجاميع Kloosterman

**تعريف ١٥٢٠.** Kloosterman عوجم ( ). للأعداد الصحيحة $m, n$ والعدد $c \geq 1$، نضع

$$S(m, n; c) = \sum_{\substack{d \bmod c \\ (d,c)=1}} e\left(\frac{md + n\bar{d}}{c}\right),$$

حيث $d\bar{d} \equiv 1 \pmod{c}$.

**قضية ١٦٢٠.** (تماثلات أولية). لدينا

$$S(m, n; c) = S(n, m; c), \qquad \overline{S(m, n; c)} = S(-m, -n; c).$$

برهان. في الهوية الأولى نستبدل $d$ بمعكوسه $\bar{d}$، وهو تبديل لمجموعة البواقي المختزلة. وفي الثانية نأخذ مرافق كل حد ونستعمل $\overline{e(x)} = e(-x)$. □

**مبرهنة ٠١٧٢٠.** Weil لـ( )٠ لدينا

$$|S(m,n;c)| \le \tau(c)(m,n,c)^{1/2}c^{1/2}.$$

هذا ادخار جذر تربيعي، حتى عامل القواسم والقاسم المشترك، عن الحد التافه $|S(m,n;c)| \le \varphi(c)$. لا يثبت الفصل حد Weil؛ عمقه جبري هندسي ويتجاوز الأدوات المطورة قبله.

## ٠٧٢٠ صيغة Petersson

لتكن $\mathcal{B}_k$ قاعدة متعامدة لـ$S_k(\Gamma)$، واكتب

$$f(z) = \sum_{n\ge 1} a_f(n)e(nz).$$

**مبرهنة ٠١٨٢٠.** Petersson تغيص( للمستوى 1)٠ إذا كان $k > 2$ زوجياً و$m,n \ge 1$، فإن

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi\sqrt{mn})^{k-1}} \sum_{f\in\mathcal{B}_k} \frac{a_f(m)\overline{a_f(n)}}{\langle f,f\rangle} = \delta_{m,n} + 2\pi i^{-k} \sum_{c\ge 1} \frac{S(m,n;c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right).$$

تساوي الصيغة بين تعامد طيفي لمعاملات فورييه وطرف حسابي. الحد $\delta_{m,n}$ هو القطر؛ وكل انحراف عنه تقيسه مجاميع Kloosterman مع نواة $J_{k-1}$. ليست الصيغة مجرد تطبيق لمتباينة تعامد منتهية: النواة البسليّة تسجل هندسة المدارات غير القطرية.

## ٠٨٢٠ صيغة Kuznetsov

صيغة Kuznetsov هي النظير غير الهولومورفي لصيغة Petersson، لكن يوجد فرق حاسم: السطح $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ غير مدمج، ولذلك لا يكتمل الطيف بأشكال ماس الحدبية وحدها؛ يجب إضافة طيف Eisenstein المستمر.

نستعمل الصيغة الحديثة المطابقة في سجل التطبيعات. لتكن $\{u_j\}$ قاعدة متعامدة معيارية من أشكال ماس الحدبية، ذات معاملات $\rho_j(n)$ ومعلمات $t_j$. واكتب توسع Eisenstein غير الصفري بمعاملات $\tau(n,t)$. ولتكن $h$ دالة اختبار زوجية هولومورفية في شريط أعرض من $|\Im t| \le 1/2$، ومتلاشية بما يكفي، وضع

$$\mathcal{J}(x,t) = \frac{J_{2it}(x) - J_{-2it}(x)}{\sinh(\pi t)}, \qquad H^+(x) = \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(x,t)h(t)t\tanh(\pi t)\,dt.$$

**مبرهنة ٠١٩٢٠.** Kuznetsov( ، النواة ذات الإشارة المتساوية)٠ لـ$m,n \ge 1$، وبالتطبيع المبين في جدول الفصل:

$$\sum_j \frac{\rho_j(n)\overline{\rho_j(m)}}{\cosh(\pi t_j)} h(t_j) + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\tau(n,t)\overline{\tau(m,t)}}{\cosh(\pi t)} h(t)\,dt$$
$$= \frac{\delta_{m,n}}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}} h(t)t\tanh(\pi t)\,dt + \sum_{c\ge 1}\frac{S(m,n;c)}{c} H^+\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right),$$

ملاحظة ٠.٢٠٢٠. Eisenstein معيبطة( ). إذا عُرّف

$$E(z,s) = \frac{1}{2}\sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \Im(\gamma z)^s,$$

فإن $\tau(n,t)$ يتضمن عوامل غاما وزيتا ودالة القواسم. يمكن إعادة كتابة الحد المستمر بدوال القواسم وعامل $|\zeta(1+2it)|^{-2}$، لكن لا يجوز نسخه من مرجع ذي تطبيع مختلف.

ملاحظة ٠.٢١٢٠. (تحويل $K$). التحويل $H^+$ هنا هو تحويل $J$ للنواة ذات الإشارة المتساوية. تحويل Bessel-$K$ يظهر في صيغة الإشارة المتعاكسة، ولا نخلط الصيغتين لمجرد أن كليهما يحمل اسم Kuznetsov.

## ٠.٩٢٠. مدخل بنيوي إلى صيغة Selberg

ننتقل هنا إلى سطح زائد مدمج

$$M = \Gamma\backslash\mathbb{H}$$

بلا رؤوس، ولا عناصر قطع مكافئ، ولا طيف مستمر. اكتب قيم لابلاس

$$\lambda_j = \frac{1}{4} + r_j^2.$$

لتكن $h$ زوجية، هولومورفية في شريط، ومتلاشية بالسرعة المطلوبة، ولنعتمد زوج التحويل

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} h(r)e^{-iru}\,dr, \qquad h(r) = \int_{\mathbb{R}} g(u)e^{iru}\,du.$$

**مبرهنة ٠.٢٢٢٠.** Selberg تغيص( : النموذج المدمج). إذا جرى الجمع على الجيوديسيات المغلقة البدائية $\gamma$ ذات الأطوال $\ell_\gamma$، فإن

$$\sum_{j\geq 0} h(r_j) = \frac{\mathrm{Area}(M)}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} h(r)\, r\tanh(\pi r)\,dr + \sum_{\gamma \text{ primitive}}\sum_{n\geq 1}\frac{\ell_\gamma\, g(n\ell_\gamma)}{2\sinh(n\ell_\gamma/2)}.$$

ملاحظة ٠.٢٣٢٠. (ما يبقى مؤجلًا). تُؤجَّل المعالجة المستقلة لصيغة Selberg غير المدمجة وحدود المبعثرات؛ ولا تُسجَّل هذه الإحالة نتيجةً مستقلة ضمن نتائج الفصل.

الطرف الأيسر طيفي، والطرف الأيمن هندسي: حد الهوية يقاس بالمساحة، والحدود غير التافهة تقاس بأطوال الجيوديسيات المغلقة وتكراراتها. هذه المساواة هي النظير الزائدي لفكرة أن الأثر يمكن حسابه من القيم الذاتية أو من نقاط التثبيت/أصناف الاقتران.

ملاحظة ٠.٢٤٢٠. (حدود النموذج). لا يجوز عرض هذه الصيغة بوصفها الصيغة الكاملة لـ $PSL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$، لأن هذا السطح غير مدمج وله رأس وطيف مستمر ومؤثر مبعثرات. عرضنا هنا نموذجًا مدمجًا مقصودًا لتثبيت البنية من دون إخفاء الحدود الإضافية.

## ١٠٢٠. مقارنة الصيغ الثلاث

| النواة | الطرف الحسابي/الهندسي | العائلة الطيفية | الصيغة |
|---|---|---|---|
| $J_{k-1}$ | Kloosterman | أشكال هولومورفية | Petersson |
| تحويل $J$ | Kloosterman | ماس + Eisenstein | Kuznetsov |
| $g(n\ell)$ | جيوديسيات مغلقة | طيف لابلاس | المدمجة Selberg |

التشابه هو مبدأ الأثر، لا تطابق الصيغ. صيغة Petersson مجموع محدود في وزن ثابت، وKuznetsov تحليل طيفي غير مدمج، وSelberg تربط طيف لابلاس بأصناف الاقتران الزائدية. نقل ثابت أو قياس من صف إلى آخر من دون قاموس تطبيع يفسد النتيجة.

## ١١٢٠. كيف تخدم الصيغ نظرية الأعداد التحليلية؟

١. تحول متوسطات معاملات فورييه أو Hecke إلى حد قطري مفهوم ومجاميع Kloosterman يمكن تقديرها.

٢. تكشف الإلغاء الطيفي الذي لا يظهر من تقدير كل شكل على حدة.

٣. تدخل في لحظات دوال $L$، ومسائل دون التحدب، والغربال الطيفي، وتوزيع الأشكال الذاتية.

٤. تفصل بوضوح بين المعلومة المحلية عن معامل واحد والمعلومة المتوسطية عن عائلة كاملة.

لكن هذه التطبيقات جسور إلى الفصل التالي، لا مدخلات لإثبات نتائج الفصل الحالي. هذا يمنع اعتمادًا دائريًا على دوال $L$ الآلية أو لانجلاندز.

## ١٢٢٠. أخطاء شائعة

١. حذف عامل $y^k$ من حاصل Petersson أو استعماله في حاصل ماس.

٢. الخلط بين $a_f(n)$ و$\lambda_f(n)$ من دون عامل التطبيع.

٣. الخلط بين التطبيع $L^2$ وتطبيع $\rho_j(1) = 1$.

٤. حذف طيف Eisenstein من Kuznetsov للزمرة المعيارية.

٥. استعمال تحويل $K$ في نواة الإشارة المتساوية.

٦. نقل عامل $2\pi$ في تحويل Selberg إلى اصطلاح فورييري آخر.

٧. عرض النموذج المدمج لـSelberg بوصفه الصيغة غير المدمجة الكاملة.

٨. اعتبار حد Weil نتيجة مثبتة هنا لمجرد سهولة صياغتها.

# ٠.١٣٢٠ تمارين

## ٠.١٠١٣٢٠ المستوى الأول

١. تحقق مباشرة من $\Im(-1/z) = \Im(z)/|z|^2$.

٢. أثبت أن $M_k(\Gamma) = \{0\}$ للأوزان الفردية.

٣. استخرج توسع $q$ من الدورية $f(z+1) = f(z)$.

٤. أثبت تماثلي مجموع Kloosterman المسجلين في الفصل.

## ٠.٢٠١٣٢٠ المستوى الثاني

١. تحقق من ثبات تكامل Petersson تحت تغيير المجال الأساسي.

٢. احسب معاملات $T_p f$ عندما يكون $p$ أوليًا.

٣. اشتق معادلة Bessel المعدلة للمعامل الفورييري غير الصفري لشكل ماس.

٤. فسر لماذا يؤدي انعدام الحد الثابت إلى إزالة الجزء غير الحدبي.

## ٠.٣٠١٣٢٠ المستوى الثالث

١. قارن تطبيع صيغة Petersson هنا بتطبيع يستعمل معاملات Hecke $\lambda_f(n)$، واكتب قاموس التحويل.

٢. حدد الحد الذي يفقد إذا حذفت طيف Eisenstein من Kuznetsov.

٣. ارسم خريطة تبين كيف ينتقل متوسط طيفي إلى حد قطري ومجموعات Kloosterman.

٤. اشرح الحدود الإضافية المتوقعة عند الانتقال من نموذج Selberg المدمج إلى السطح المعياري غير المدمج، من دون اشتقاقها.

# حالة النتائج المعتمدة

النتائج الخمس عشرة ACTIVE / CITABLE بعد اكتمال بناء PDF والتدقيق الرياضي والمرجعي والمراجعة المستقلة واعتماد المالك.

# باب ٢١

# دوال $L$ الآلية، دون التحدب، ومدخل إلى لانجلاندز

## نطاق الفصل وحالته

ينقل هذا الفصل البنية التي ظهرت في الفصل العشرين من معاملات هيكه والأشكال الهولومورفية وأشكال ماس إلى دوال $L$ الآلية. النواة التعليمية هي $GL(2)/\mathbb{Q}$: نثبت قاموس التطبيع وحاصل أويلر في الحالة غير المتشعبة، ثم نعرض الاستمرار التحليلي والمعادلة الوظيفية والموصل التحليلي وحد التحدب، ونشرح معنى كسر حاجز التحدب. نختم بعرض محدود للمنظور المحلي--العالمي وبرنامج لانجلاندز.

## حراس النطاق

- خط التناظر هو $\Re s = 1/2$، ومعاملات هيكه مطبعة تحليليًا.
- الصيغ التفصيلية لعوامل غاما تخص الأشكال الجديدة على $GL(2)/\mathbb{Q}$.
- مبرهنة Michel--Venkatesh تذكر فوق حقل أعداد ثابت، ولا يثبت الفصل برهانها.
- برنامج لانجلاندز يعرض إطارًا تاريخيًا ومفاهيميًا؛ لا ندعي أن functoriality العامة مبرهنة.
- دوال Rankin--Selberg و$GL(n)$ العام خارج النطاق.

## نواتج التعلم

بنهاية الفصل يستطيع القارئ أن:

١. يحول معاملات فورييه الخام لشكل هولومورفي إلى معاملات هيكه ذات خط تناظر $1/2$.

٢. يشتق العامل الأويلري من علاقة هيكه عند القوى الأولية.

٣. يميز العامل المحلي غير المتشعب عن العوامل المتشعبة والأرخميدية.

٤. يكتب الدالة المكتملة والمعادلة الوظيفية مع التمثيل المقابل.

٥. يحسب الموصل التحليلي تقريبيًا في حالتي الهولومورفي وماس.

٦. يفرق بين حد التحدب وحد ليندلوف وحد دون التحدب.

٧. يحدد بدقة ما توحّده مبرهنة Michel--Venkatesh وما تثبته.

٨. يقرأ حاصل أويلر بوصفه تجميعًا عالميًا لبيانات محلية.

٩. يفصل النتائج المثبتة عن الإطار الحدسي في مدخل لانجلاندز.

## ٠.١٢١ من معاملات هيكه إلى السلسلة المعيارية

ليكن

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_f(n)e(nz)$$

شكلًا جديدًا هولومورفيًا أوليًا من الوزن $k$، مطبعًا بـ $a_f(1) = 1$. السلسلة الكلاسيكية

$$\sum_{n\geq 1} a_f(n)n^{-s}$$

لها خط تناظر عند $\Re s = k/2$. لكن لغة دوال $L$ الآلية توحّد خطوط التناظر بنقلها إلى $\Re s = 1/2$.

**تعريف ٠.١٢١** (التطبيع التحليلي لمعاملات هيكه). نضع

$$\lambda_f(n) = a_f(n)n^{-(k-1)/2}, \qquad L(s,f) = \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}.$$

وعندئذ

$$L(s,f) = L_{\mathrm{cl}}\left(s + \frac{k-1}{2}, f\right),$$

حيث $L_{\mathrm{cl}}(w,f) = \sum a_f(n)n^{-w}$.

التحويل جبري، لكنه ليس تجميليًا: المعادلة الكلاسيكية التي تربط $w$ بـ$k - w$ تصبح بعد وضع $w = s + (k-1)/2$ معادلة تربط $s$ بـ $1 - s$. وهكذا يصبح الخط الحرج نفسه في دوال ديريشليه والأشكال الهولومورفية وأشكال ماس.

ملاحظة ٠.٢٢١ (ماس: تطبيع الشكل وتطبيع دالة $L$). في الفصل العشرين ميزنا بين $\|u\|_2 = 1$ وبين تطبيع معامل هيكه الأول. دالة $L(s,u)$ القياسية تستعمل معاملات هيكه $\lambda_u(n)$ مطبعة بـ$\lambda_u(1) = 1$. تغيير حجم الدالة الذاتية $u$ لا ينبغي أن يغير دالة $L$ القياسية بعد هذا التطبيع.

## ٢٢١. حاصل أويلر من علاقات هيكه

في نواة المستوى 1 تحقق معاملات الشكل الذاتي العلاقة المسجلة في الفصل العشرين:

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{d|(m,n)} \lambda_f\Big(\frac{mn}{d^2}\Big).$$

وبخاصة، عند قوة أولية:

$$\lambda_f(p^{r+1}) = \lambda_f(p)\lambda_f(p^r) - \lambda_f(p^{r-1}), \qquad r \geq 1.$$

**قضية ٣٢١.** (حاصل أويلر في النواة غير المتشعبة)**.** في نصف مستوى التقارب المطلق، ولشكل المستوى 1 السابق، لدينا

$$L(s,f) = \prod_p \big(1 - \lambda_f(p)p^{-s} + p^{-2s}\big)^{-1}.$$

وإذا عرّفنا عددي ساتاكي $\alpha_f(p), \beta_f(p)$ بجذري

$$X^2 - \lambda_f(p)X + 1 = 0,$$

فإن

$$L_p(s,f) = \frac{1}{(1-\alpha_f(p)p^{-s})(1-\beta_f(p)p^{-s})}.$$

برهان. ضع

$$G_p(X) = \sum_{r\geq 0} \lambda_f(p^r)X^r.$$

نضرب العلاقة التراجعية في $X^{r+1}$ ونجمع على $r \geq 1$. مع $\lambda_f(1) = 1$ نحصل على

$$(1 - \lambda_f(p)X + X^2)G_p(X) = 1.$$

إذن

$$G_p(X) = \frac{1}{1 - \lambda_f(p)X + X^2}.$$

ومن الضربية عند الأعداد المتباينة أوليًا، ومن التقارب المطلق الذي يجيز إعادة الترتيب، ينتج حاصل أويلر بعد وضع $X = p^{-s}$. والتحليل إلى عاملين خطيين هو تعريف $\alpha_f(p), \beta_f(p)$. □

ملاحظة ٤٢١. (لا نفترض رامانوجان سرًا). العلاقة $\alpha_f(p)\beta_f(p) = 1$ تأتي من كثير الحدود المحلي في حالة المستوى 1، لكنها لا تعطي وحدها

$$|\alpha_f(p)| = |\beta_f(p)| = 1.$$

هذه المساواة مبرهنة للأشكال الهولومورفية بفضل مبرهنة دُلين، أما لأشكال ماس فهي حالة من حدسية رامانوجان--بيترسون، وما تزال غير مبرهنة عمومًا. ولا يحتاج اشتقاق حاصل أويلر السابق إلى افتراضها.

## ٠.٣٢١ العوامل المحلية

الجداء السابق يقترح أن دالة $L$ العالمية تتكون من عامل عند كل موضع: الأوليات المنتهية والموضع الأرخميدي. في اللغة التمثيلية نكتب تمثيلًا آليًا عالميًا على الصورة المقيدة

$$\pi \simeq \bigotimes_v{}' \pi_v.$$

عند معظم الأوليات يكون $\pi_p$ غير متشعب، فتكون بياناته ممثلة بزوج ساتاكي.

**تعريف ٠.٥٢١** (العامل المحلي غير المتشعب)**.** إذا كان $\pi_p$ تمثيلًا غير متشعب لـ$GL(2,\mathbb{Q}_p)$ ذي معلمتي ساتاكي $\alpha_{\pi,1}(p), \alpha_{\pi,2}(p)$، فنضع

$$L_p(s,\pi) = \prod_{j=1}^{2} \left(1 - \alpha_{\pi,j}(p)p^{-s}\right)^{-1}.$$

والجداء العالمي المنتهي هو

$$L(s,\pi) = \prod_{p<\infty} L_p(s,\pi)$$

حيث يتقارب مطلقًا أولًا في نصف مستوى أيمن.

عند الأوليات التي تقسم المستوى تتغير درجة العامل أو معلماته بحسب النوع المحلي؛ لذلك لا يجوز نسخ العامل غير المتشعب إليها آليًا. أما العامل الأرخميدي فيسجل الوزن أو المعلمة الطيفية.
نستعمل الاصطلاحين

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \qquad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s),$$

مع الهوية

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1).$$

في الحالتين التعليميتين:

$$L_\infty(s,f) = \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \frac{k-1}{2}\right)$$

للشكل الهولومورفي، و

$$L_\infty(s,u) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\kappa+ir)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\kappa-ir)$$

لشكل ماس من الوزن صفر، ذي قيمة لابلاس $1/4 + r^2$ وزوجية $\kappa \in \{0,1\}$.

## ٠٤٢١ الدالة المكتملة والمعادلة الوظيفية

ليكن $N_\pi$ الموصل الحسابي. نضع، ضمن التطبيع المجمد،

$$\Lambda(s,\pi) = N_\pi^{s/2} L_\infty(s,\pi) L(s,\pi).$$

قد تختلف بعض المراجع بعامل لا يعتمد على $s$، ولا يغير ذلك خط التناظر أو مضمون المعادلة الوظيفية إذا استعمل الاصطلاح نفسه في الطرفين.

**مبرهنة ٠٦٢١.** (الاستمرار التحليلي والمعادلة الوظيفية لـ$GL(2)$). لتمثيل آلي حدبي $\pi$ على $GL(2,\mathbb{A}_F)$، تمتد دالة $L(s,\pi)$ المكتملة إلى دالة تامة، وتضبط في الشرائط الرأسية، وتحقق

$$\Lambda(s,\pi) = \varepsilon(\pi)\Lambda(1-s,\widetilde{\pi}), \qquad |\varepsilon(\pi)| = 1$$

بعد اختيار التطبيع الوحدوي المتوافق، حيث $\widetilde{\pi}$ التمثيل المقابل.

ملاحظة ٠٧٢١. (لماذا يظهر التمثيل المقابل؟). المعاملات المحلية للتمثيل المقابل تعكس معلمات ساتاكي، والمعادلة الوظيفية تنقل البيانات من $s$ إلى $1-s$. لا يجوز حذف $\widetilde{\pi}$ إلا إذا كانت $\pi$ ذاتية الازدواج، أو بعد بيان التطابق المناسب.

ملاحظة ٠٨٢١. (الحالة غير الحدبية). التمثيلات المتولدة من سلاسل Eisenstein قد تعطي دوال ميرومورفية وأقطابًا. صياغة المبرهنة السابقة قصدت الحالة الحدبية، فلا نعمم تمامها إلى كل طيف آلي دون قيد.

## ٠٥٢١ الموصل الحسابي والموصل التحليلي

الموصل الحسابي $N_\pi$ يقيس التشعب عند المواضع المنتهية، لكنه لا يرى كبر الوزن أو المعلمة الطيفية أو ارتفاع النقطة $t$. لذلك نحتاج معيارًا يجمع التعقيد المنتهي والأرخميدي.

**تعريف ٠٩٢١.** (الموصل التحليلي). إذا كتب العامل الأرخميدي عند $\mathbb{Q}$ على الصورة

$$L_\infty(s,\pi) = \prod_{j=1}^{2} \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\mu_j),$$

فنستعمل

$$C(\pi,t) = N_\pi \prod_{j=1}^{2} (2 + |\mu_j + it|), \qquad C(\pi) = C(\pi,0).$$

وبصورة تمثيلية مكافئة نكتب

$$C(\pi,t) = C\big(\pi \otimes |\det|^{it}\big).$$

التعريفات القياسية التي تستبدل $2+|z|$ بتعبير مقارن تعد متكافئة حتى ثوابت تعتمد على الدرجة والتطبيع.

في الحالة الهولومورفية نحصل على المقارنة

$$C(\pi, t) \asymp N_\pi(k + |t|)^2.$$

وفي حالة ماس:

$$C(\pi, t) \asymp N_\pi(2 + |t + r|)(2 + |t - r|).$$

الصيغة الثانية تكشف ظاهرة هبوط الموصل عندما تتقارب معلمات معينة؛ ولهذا قد يكون حد قوي في $|t| + |r|$ غير دون محدب قرب مناطق الهبوط.

## ٠٦٢١ حد التحدب

المعادلة الوظيفية تعطي معلومات على جانبي الشريط الحرج. ومع تقديرات النمو ومبدأ فراجمن--ليندلوف يمكن نقل تقديرات الحافتين إلى الداخل. لكن الفصل الثالث من الموسوعة لم يثبت النسخة اللازمة من هذا المبدأ؛ لذلك نقتبس النتيجة القياسية ولا نخفيها في برهان صوري.

**مبرهنة ١٠٢١.** (حد التحدب). لأي $\varepsilon > 0$، وفي عائلة من دوال $L$ ذات درجة وحقل مثبتين وتطبيع موحد، لدينا عند المركز

$$L(1/2, \pi) \ll_{n,F,\varepsilon} C(\pi)^{1/4+\varepsilon}.$$

وبالالتواء الأرخميدي:

$$L(1/2 + it, \pi) \ll_{n,F,\varepsilon} C(\pi, t)^{1/4+\varepsilon}.$$

الأس $1/4$ ليس تخميناً للحجم الحقيقي؛ إنه حاجز عام ناتج عن الاستيفاء بين منطقتي التحكم. تخمين ليندلوف يتنبأ، في اللغة نفسها، بأن

$$L(1/2, \pi) \ll_\varepsilon C(\pi)^\varepsilon.$$

إذن يوجد فضاء واسع بين ما تمنحه الأدوات العامة وما يتوقع أن يكون صحيحًا.

## ٠٧٢١ ما معنى دون التحدب؟

لا تكفي عبارة «أفضل من حد تافه». الاصطلاح يقارن مباشرة بالأس $1/4$ في الموصل التحليلي الكلي.

**تعريف ١١٢١.** (مسألة دون التحدب). لتكن $\mathcal{F}$ عائلة محددة من التمثيلات الآلية. نقول إن حدًا دون محدب بقوة ثابتة مثبت على $\mathcal{F}$ إذا وجد $\delta > 0$ بحيث

$$L(1/2, \pi) \ll_{\mathcal{F}} C(\pi)^{1/4-\delta}$$

لكل $\pi \in \mathcal{F}$، مع التصريح بما يسمح له أن يتغير وباعتماد الثابت الضمني. وينطبق التعريف على جانب $t$ باستبدال $\pi$ بـ $\pi \otimes |\det|^{it}$.

ملاحظة ١٢٢١. (ثلاثة جوانب لا تختلط). ١. $t$-aspect: الشكل ثابت و$|t| \to \infty$.

٢. جانب المستوى أو الموصل: تتغير البيانات المنتهية.

٣. الجانب الطيفي: تتغير معلمة لابلاس أو الوزن.

قد يكون التقدير دون محدب في جانب، وغير موحد أو حتى غير دون محدب في منطقة تجمع جانبين. الموصل التحليلي هو اللغة التي تكشف ذلك.

ملاحظة ١٣٢١. (دون التحدب الضعيف). ادخار قوة من $C$ أقوى من ادخار لوغاريتمي. لا نساوي بين $C^{1/4}/(\log C)^A$ وبين $C^{1/4-\delta}$. هذا الفصل يستعمل مصطلح دون التحدب في معناه ذي الادخار بقوة ما لم يصرح بخلافه.

## ٠٨٢١ مبرهنة Michel--Venkatesh

الإنجاز المركزي في النطاق الحالي أنه لا يقتصر على جانب واحد منفصل، بل يصاغ بدلالة الموصل التحليلي عبر الجوانب المختلفة.

**مبرهنة ١٤٢١.**Michel--Venkatesh( ). ليكن $F$ حقل أعداد ثابتًا، و$\mathbb{A}_F$ حلقة أديلاته. يوجد ثابت مطلق $\delta > 0$ بحيث إذا كانت $\pi$ تمثيلًا آليًا على $GL_1(\mathbb{A}_F)$ أو $GL_2(\mathbb{A}_F)$، ذا طابع مركزي وحدوي، فإن

$$L(1/2, \pi) \ll_F C(\pi)^{1/4-\delta}.$$

ملاحظة ١٥٢١. (حدود الصياغة). • $\delta$ مطلق، لكن الثابت الضمني يعتمد على الحقل الثابت $F$.

- لا نثبت المبرهنة هنا، ولا ننسب إلى الورقة قيمة عددية محسنة لـ$\delta$.
- تدخل القيم $L(1/2 + it, \pi)$ في المبرهنة عبر الالتواء بـ$|\det|^{it}$.
- لا نخلط هذه الصيغة بـTheorem 1.2 في الورقة، المتعلقة بدوال Rankin--Selberg لتمثيلين على $GL(2)$.

تأتي قوة النتيجة من صياغة تحليلية وتمثيلية موحدة. البرهان يستعمل علاقات فترات آلية مطبعة قانونيًا، والتضخيم، والتحليل المحلي، ولا يختزل إلى تطبيق منفرد لصيغة Kuznetsov أو لمجاميع أسية. لهذا أبقيناها نتيجة مقتبسة كاملة بدل تقديم «برهان تخطيطي» قد يخفي المدخلات العميقة.

## ٠٩٢١ التمثيل العالمي وبياناته المحلية

**تعريف ١٦٢١.** (التمثيل الآلي العالمي وعوامله المحلية). في نطاق هذا الفصل، التمثيل الآلي العالمي $\pi$ لـ $GL(2, \mathbb{A}_F)$ هو مكوّن غير قابل للاختزال من الطيف الآلي، وله تحليل جداء مقيد

$$\pi \simeq \bigotimes_v{}' \pi_v.$$

ترتبط بكل $\pi_v$ بيانات محلية وعامل $L_v(s,\pi_v)$. ووفق اصطلاح هذا الفصل نجمع المواضع المنتهية في

$$L(s,\pi)=\prod_{v\nmid\infty}L_v(s,\pi_v),$$

ثم نضم العوامل الأرخميدية والموصل الحسابي في الدالة المكتملة $\Lambda(s,\pi)$.

هذه اللغة تشرح لماذا لا يكون حاصل أويلر مجرد حيلة لتوليد سلسلة ديريشليه: كل أولي يرى تمثيلًا محليًا، والدالة العالمية تحفظ توافق هذه المعلومات. عند معظم المواضع تكون البيانات غير متشعبة وبسيطة؛ الصعوبة تتركز في المواضع المتشعبة والأرخميدية وفي شرط أن تأتي العوامل جميعًا من كائن عالمي واحد.

## ٠.١٠٢١ مدخل منضبط إلى برنامج لانجلاندز

بدأ المنظور الذي طوره لانجلاندز من سؤال توحيدي: لماذا تتشابه دوال $L$ الآتية من الشخصيات، والأشكال المعيارية، والتمثيلات الغالوية؟ الجواب المقترح ليس مساواة دوال منعزلة، بل شبكة مراسلات بين تمثيلات مجموعات مختلفة تحفظ العوامل المحلية ودوال $L$ والمعادلات الوظيفية [Lan70; Lan71].

أبسط جسر في موسوعتنا هو:

$$\text{شخصيات ديريشليه/هيكه} \longleftrightarrow GL(1),$$

ثم

$$GL(2)\text{تمثيلات آلية على} \longleftrightarrow \text{الأشكال الجديدة الهولومورفية أو مااس}.$$

هذا لا يثبت البرنامج العام، لكنه يوضح لماذا بدت موضوعات الفصلين 7 و20 حالتين من لغة واحدة.

### مبدأ النقل الدالي

إذا كان لدينا تمثيل آلي لمجموعة ما وتمثيل مناسب لمجموعة لانجلاندز المقابلة، يتنبأ مبدأ functoriality بنقل آلي إلى مجموعة أخرى بحيث تتوافق المعلمات المحلية، ومن ثم تتوافق دوال $L$ المناسبة. في حالات خاصة عميقة ثبتت عمليات رفع ونقل، لكن الصورة العامة مفتوحة.

ملاحظة ١٧٢١. (مسألة مفتوحة: النقل الدالي العام). إثبات functoriality بالمستوى العام الذي يقترحه برنامج لانجلاندز مسألة مفتوحة. لا تسجل هذه الفقرة مبرهنة، ولا تدعي أن توافقًا شكليًا بين عوامل أويلر ينشئ تلقائيًا تمثيلًا آليًا عالميًا.

### ثلاث طبقات معرفية

ينبغي للقارئ فصل:

١. **نتائج مثبتة:** مثل نظرية هيكه لـ$GL(2)$ ومبرهنة Michel--Venkatesh في نطاقها.

٢. **مراسلات أو عمليات نقل مثبتة في حالات خاصة:** لا تعمم خارج فرضياتها.

٣. **إطار حدسي عام:** يوجه البحث، لكنه ليس مخزنًا لمبرهنات جاهزة.

هذا الفصل يكتفي بهذه الخريطة، ولا يدخل في تعريف L-groups أو المراسلة المحلية العامة.

## ٠.١١٢١ كيف تتصل الفصول السابقة بهذا الفصل؟

| دورها هنا | المعلومة الواردة | المصدر |
|---|---|---|
| نموذج $GL(1)$ | دوال ديريشليه والشخصيات | الفصل 7 |
| أدوات في مسائل خاصة، لا برهان عام | المجاميع الأسية | الفصل 18 |
| مدخلات $GL(2)$ والطيف | هيكه وماس وصيغ التتبع | الفصل 20 |
| توحيد الحجم عبر العائلات | الموصل ودون التحدب | الفصل 21 |

صيغة Petersson أو Kuznetsov قد تحول متوسطات معاملات إلى مجاميع Kloosterman، وهذا مفيد في براهين دون التحدب لبعض العائلات. لكن مبرهنة Michel--Venkatesh العامة لا تتبع منطقيًا من مجرد وجود صيغة تتبع في الفصل العشرين. الفصل بين «أداة ممكنة» و«اعتماد برهاني» يمنع الدور.

## ٠.١٢٢١ أخطاء شائعة

١. استعمال $a_f(n)$ الخام داخل دالة مركزها $1/2$.

٢. نقل عامل غاما الهولومورفي إلى شكل ماس.

٣. كتابة $N_\pi = C(\pi, t)$ وإهمال المعلمات الأرخميدية.

٤. حذف $\widetilde{\pi}$ من المعادلة الوظيفية بلا ذاتية ازدواج.

٥. وصف أي ادخار لوغاريتمي بأنه ادخار بقوة.

٦. قول «موحد في جميع الجوانب» دون تثبيت الحقل وبيان الثابت.

٧. افتراض رامانوجان عند تعريف معلمات ساتاكي.

٨. الخلط بين Theorem 1.1 وTheorem 1.2 في Michel--Venkatesh.

٩. عرض برنامج لانجلاندز العام بوصفه مبرهنة مكتملة.

# ٠١٣٢١. تمارين

## ٠١٠١٣٢١. المستوى الأول

١. تحقق من أن التحويل $w = s + (k-1)/2$ ينقل $w \leftrightarrow k - w$ إلى $s \leftrightarrow 1 - s$.

٢. استخرج الحدود الأربعة الأولى من $(1 - \lambda_f(p)X + X^2)^{-1}$.

٣. أثبت الهوية $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)$ من صيغة مضاعفة غاما.

٤. احسب رتبة $C(\pi, t)$ لشكل هولومورفي ثابت الوزن عندما $|t| \to \infty$.

## ٠٢٠١٣٢١. المستوى الثاني

١. بين أن العلاقة التراجعية عند $p^r$ تكافئ دالة التوليد المستعملة في برهان حاصل أويلر.

٢. قارن موصل شكل مااس عندما $|t| \gg |r|$ وعندما $t \approx r$.

٣. اشرح لماذا لا يكفي حد من الشكل $(1 + |t| + |r|)^{1/2-\eta}$ لإثبات دون التحدب في كل مناطق هبوط الموصل.

٤. اكتب اعتماد الثابت الضمني كاملًا في صيغة Michel--Venkatesh.

## ٠٣٠١٣٢١. المستوى الثالث

١. تتبع الفرق بين العامل غير المتشعب عند المستوى 1 وعامل أولي يقسم مستوى شكل جديد، مستعينًا بمرجع خارجي مع التصريح بالتطبيع.

٢. صغ عائلة في جانب المستوى، ثم اكتب بدقة ما يعنيه حد التحدب وحد دون التحدب وحد ليندلوف فيها.

٣. ارسم قاموسًا محليًا--عالميًا يبدأ من $\pi_p$ وينتهي عند المعادلة الوظيفية العالمية، مع تمييز المدخلات المقتبسة.

٤. اختر مثالًا مثبتًا لعملية نقل دالي خاصة، وحدد بدقة ما لا يثبته عن functoriality العامة.

# حالة نتائج المسودة

المعرفات العشرة موجودة في المتن، لكنها لا تزال غير قابلة للاستشهاد.

# القسم II

# الجبهات البحثية الحديثة

# باب ٢٢

# عزوم دالة زيتا والقيم الكبيرة والمتطرفة

## نطاق الفصل وحالته

يدرس هذا الفصل المتوسطات التكاملية لقيم دالة زيتا على الخط الحرج، ثم يربطها بالحدود العليا والدنيا وبالنموذج الحدسي للمصفوفات العشوائية. النواة الصارمة هي دالة زيتا لريمان؛ أما عائلات دوال $L$ فتظهر بوصفها امتدادًا مفاهيميًا مضبوطًا لا نقلًا آليًا للثوابت.

## حراس النطاق

- كل حد من Soundararajan أو Harper يذكر فرضية ريمان صراحة.
- نتيجة Harper توصف بأنها preprint، ولا تسوى مكانتها الببليوغرافية بمقالة Soundararajan المحكمة.
- العزم الرابع نتيجة مقتبسة من Ingham، لا برهان داخلي كامل.
- حدسية Keating--Snaith حدسية، لا مبرهنة.
- لا يستنتج قانون للقيمة القصوى النموذجية من عزم منفرد.

## نواتج التعلم

بنهاية الفصل يستطيع القارئ أن:

١. يميز بين رتبة العزم $2k$ والرمز $I_k(T)$.

٢. يستعمل المعادلة الوظيفية التقريبية وصيغة القيمة المتوسطة لكثيرات حدود ديريشليه.

٣. يفهم منشأ الحدين الرئيسيين في العزم الثاني.

٤. يقرأ صيغة Ingham للعزم الرابع مع تصنيفها الصحيح.

٥. يفرق بين الحدود العليا المشروطة والحدود الدنيا غير المشروطة.

٦. يفصل العامل الحسابي عن عامل المصفوفات العشوائية في حدسية العزوم.

٧. يحدد بدقة ما تعطيه متراجحة ماركوف عن الذيول وما لا تعطيه عن القيم القصوى.

## ٠.١٢٢ تعريف العزوم وتطبيعها

**تعريف ٠.١٢٢** (العزم المستمر على الخط الحرج)**.** لكل $k \geq 0$ نضع

$$I_k(T) = \int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt, \qquad J_k(T) = \int_T^{2T} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt.$$

الرتبة هي $2k$، لا $k$. ويستعمل $J_k(T)$ في النتائج المحلية على نافذة ديادية، بينما يستعمل $I_k(T)$ في الصيغ التراكمية.

العزوم تقيس توزيع الكتلة لا القيمة القصوى وحدها. فإذا كان $V > 0$، فإن متراجحة ماركوف تعطي

$$\operatorname{meas}\{t \in [T, 2T] : |\zeta(1/2+it)| \geq V\} \leq V^{-2k} J_k(T),$$

لكنها لا تحدد شكل الذيل الدقيق ولا موضع القمة النموذجية.

## ٠.٢٢٢ المعادلة الوظيفية التقريبية

**قضية ٠.٢٢٢** (صيغة تقريبية متناظرة لدالة زيتا)**.** إذا كان $t \geq 2$، واختير $x, y > 0$ بحيث $xy = t/(2\pi)$، فإن

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^{1/2+it}} + \chi\left(\frac{1}{2}+it\right) \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^{1/2-it}} + O\left(x^{-1/2} + y^{-1/2}\right),$$

حيث

$$\chi(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}, \qquad |\chi(1/2+it)| = 1.$$

وبالاختيار المتناظر $x = y = \sqrt{t/(2\pi)}$ نحصل على مجموعين بطول يقارب $\sqrt{t}$، وحد خطأ من رتبة $O(t^{-1/4})$.

برهان. نبدأ من المعادلة الوظيفية $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$، ثم نطبق صيغة بيرون المبتورة على السلسلتين في نصفي المستوى المناسبين، ونحرك المسار مع التقاط القطب عند $s = 1$. يوازن الشرط $xy = t/(2\pi)$ طولي المجموعين، ويعطي تقدير ستيرلنغ لعامل غاما الحدين الباقيين $O(x^{-1/2})$ و$O(y^{-1/2})$. هذه هي الصيغة الكلاسيكية المطلوبة فقط؛ لا نحتاج هنا إلى الأوزان الناعمة أو أفضل بقايا معروفة. □

## ٣٢٢. قيمة متوسطة لكثيرات حدود ديريشليه

**قضية ٣٢٢.** (صيغة القيمة المتوسطة). لتكن $a_n \in \mathbb{C}$، ولتكن

$$A(t) = \sum_{n \le N} a_n n^{-it}.$$

عندئذ

$$\int_T^{2T} |A(t)|^2 \, dt = T \sum_{n \le N} |a_n|^2 + O\left( \sum_{\substack{m,n \le N \\ m \ne n}} \frac{|a_m a_n|}{|\log(m/n)|} \right).$$

وبالصيغة القياسية لمونتغمري--فوغان:

$$\int_T^{2T} |A(t)|^2 \, dt = (T + O(N)) \sum_{n \le N} |a_n|^2$$

ضمن النسخة المناسبة للنواة الحالية.

برهان. بالتوسيع نحصل على

$$|A(t)|^2 = \sum_{m,n \le N} a_m \overline{a_n} e^{-it \log(m/n)}.$$

يعطي القطر $m = n$ الحد $T \sum |a_n|^2$. أما خارج القطر فنكامل الدالة الأسية مباشرة، أو نستعمل الجمع الجزئي مع لمّة كوسمين--لانداو واختبار المشتقة الأولى من الفصل الثامن عشر. يعالج المجال القريب من القطر بتقسيم ديادي في $|m - n|$، فلا نفترض إلغاء نقطياً غير موجود. □

## ٤٢٢. العزم الثاني

**مبرهنة ٤٢٢.** (العزم الثاني لدالة زيتا). عندما $T \to \infty$،

$$I_1(T) = T \log \frac{T}{2\pi} + (2\gamma - 1)T + O\big(T^{1/2} \log T\big).$$

هذه الصيغة الثنائية الحد مع حد الخطأ الكلاسيكي $O(T^{1/2} \log T)$ تُنسب إلى Ingham؛ انظر [Ing28]. أما أعمال Hardy--Littlewood فتمثل الخلفية التاريخية للحد الرئيس والمعادلة الوظيفية التقريبية، وتعرضها المراجع المعيارية اللاحقة بصيغ حديثة، ومنها [Tit86].

برهان. نطبق الصيغة التقريبية المتناظرة بطول $X(t) = \sqrt{t/(2\pi)}$. لأن $|\chi(1/2 + it)| = 1$، فإن مربعي المجموعين يعطيان حدين قطريين متماثلين، بينما تضبط الحدود المتقاطعة وغير القطرية باستعمال القضية السابقة والجمع الجزئي واختبارات الفصل الثامن عشر.

الحد القطري المركزي هو مجموع توافقي:

$$\sum_{n\le X}\frac{1}{n}=\log X+\gamma+O(X^{-1}).$$

وبما أن $X(t)^2=t/(2\pi)$، فإن جمع نصفي الصيغة يعطي $\log(t/(2\pi))+2\gamma$. وبعد التكامل نستعمل

$$\int_1^T \log\frac{t}{2\pi}\,dt=T\log\frac{T}{2\pi}-T+O(1),$$

فتظهر

$$T\log\frac{T}{2\pi}+(2\gamma-1)T.$$

أما مجموع الحدود غير القطرية وبقايا القطع فيدخل في $O(T^{1/2}\log T)$. هذا الحد كلاسيكي وكاف لبنية الفصل، ولا ندعي أنه أفضل حد معروف. □

## ٥٢٢. العزم الرابع: صيغة Ingham

**مبرهنة ٥٢٢.**Ingham( ، العزم الرابع). لدينا

$$I_2(T)=\frac{1}{2\pi^2}T\log^4 T+O(T\log^3 T).$$

وبصياغة أدق توجد كثيرة حدود $P_4$ من الدرجة الرابعة بحيث

$$I_2(T)=TP_4(\log T)+E_2(T),$$

ومعامل $x^4$ في $P_4(x)$ هو $1/(2\pi^2)$.

لا يعاد بناء برهان Ingham كاملًا هنا. الفكرة البنيوية أن تربيع تقريب زيتا مرتين يولد معاملات دالة القواسم $d(n)$، وأن

$$\sum_{n\le x}\frac{d(n)^2}{n}$$

ينمو بكثيرة حدود لوغاريتمية من الدرجة الرابعة. لكن استخراج الثابت وضبط الحدود غير القطرية يحتاجان تحليلًا أدق من نطاق هذا الفصل.

## ٦٢٢. حدود عليا عامة تحت فرضية ريمان

**مبرهنة ٦٢٢.**Soundararajan( ، حد علوي مشروط). نفترض فرضية ريمان. لكل $k>0$ ثابت ولكل $\varepsilon>0$،

$$J_k(T)\ll_{k,\varepsilon} T(\log T)^{k^2+\varepsilon}.$$

والحالة $k=0$ تافهة ويمكن ضمها اصطلاحياً.

يعتمد المسار على حد علوي لـ$\log|\zeta(1/2+it)|$ بواسطة كثير حدود أولي قصير خارج مجموعة استثنائية مضبوطة، ثم يدمج تقديرات القيم الكبيرة. الشرط RH جزء من المبرهنة وليس ملاحظة جانبية.

**مبرهنة ٠.٧٢٢.** (Harper ، إزالة خسارة $\varepsilon$). نفترض فرضية ريمان. لكل $k \geq 0$ ثابت،

$$J_k(T) \ll_k T(\log T)^{k^2}.$$

المصدر *preprint* على *arXiv:1305.4618*، ولا يعرض هنا بوصفه مقالة محكمة.

التحسين حاد من جهة رتبة قوة اللوغاريتم، لكنه لا يثبت التكافؤ التقاربي ولا ثابت Keating--Snaith.

## ٠.٧٢٢ الحدود الدنيا غير المشروطة

**مبرهنة ٠.٨٢٢** (حدود دنيا مستمرة للعزوم). لكل $k \geq 1$ ثابت، توجد قيمة موجبة $c_k$ بحيث، لكل $T$ كبير بما يكفي،

$$I_k(T) \geq c_k T(\log T)^{k^2}.$$

النتيجة غير مشروطة، وهي حد أدنى من الرتبة الصحيحة؛ لا تعني

$$I_k(T) \sim C_k T(\log T)^{k^2}.$$

تظهر هنا قوة طريقة الرنان والمتراجحات الهولدرية: يمكن إثبات الكتلة الدنيا الصحيحة دون امتلاك الصيغة التقاربية الكاملة.

## ٠.٨٢٢ حدسية Keating--Snaith

**حدسية ٠.٩٢٢** (حدسية العزوم العامة). لكل $k$ ثابت مع $\Re k > -1/2$،

$$I_k(T) \sim a(k)\frac{G(k+1)^2}{G(2k+1)} T\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^{k^2},$$

حيث

$$a(k) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m+k)}{m!\Gamma(k)}\right)^2 p^{-m}.$$

العامل $a(k)$ حسابي محلي، بينما

$$g_{KS}(k) = \frac{G(k+1)^2}{G(2k+1)}$$

قادِم من متوسطات كثيرات الحدود المميزة في المجموعة الوحدوية. عند $k=1$، لدينا $a(1)=1$ و$g_{KS}(1)=1$، فيتوافق الحد مع العزم الثاني. وعند $k=2$،

$$a(2) = \prod_p (1-p^{-2}) = \frac{6}{\pi^2}, \qquad g_{KS}(2) = \frac{1}{12},$$

ومن ثم $a(2)g_{KS}(2) = 1/(2\pi^2)$، وهو ثابت Ingham. هذا فحص اتساق لا برهان للحدسية.

## ٠.٩٢٢ القيم الكبيرة والمتطرفة

**مسألة مفتوحة ٠.١٠٢٢** (القيمة القصوى على النوافذ الطويلة)**.** تحديد الرتبة النموذجية الدقيقة لـ

$$\max_{t\in[T,2T]}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$$

وقانون تقلباتها مسألة مستقلة عن إثبات حد لعزم ثابت منفرد. نماذج الحقول اللوغاريتمية المترابطة والمصفوفات العشوائية تقترح بنية أدق، لكنها لا تتحول تلقائيًا إلى مبرهنة لدالة زيتا.

**تحديث الجبهة**

**تاريخ القطع:** 29 يوليو 2026 **حالة النشر:** CONJECTURAL

**المصدر الأساسي:** [KS00]

حدسية Keating--Snaith (القضية ٠.٩٢٢) لا تزال OPEN لكل $k$ عام؛ لا يذكر هذا الفصل أي برهان كامل للصيغة التقاربية بثابتها، وهذا هو الوضع نفسه منذ صياغتها سنة 2000. أما مسألة القيم المتطرفة أعلاه فلم يُجرِ هذا التحديث بحثًا مستقلًا عن أحدث تطورات نماذج الحقول اللوغاريتمية المترابطة تحديدًا (وهي جبهة نشطة منفصلة عن حدسية العزوم نفسها)؛ فلا يُستشهد هنا بأي مرجع محدد لتلك الجبهة الفرعية، والقارئ الباحث عن آخر تطوراتها يحتاج مراجعة مستقلة خارج هذا الكتاب.

من حد للعزم نحصل فقط على حد قياس:

$$\operatorname{meas}\{t : |\zeta(1/2+it)| \geq V\} \ll V^{-2k}T(\log T)^{k^2+o(1)}.$$

اختيار $k$ متغيرًا مع $V$ قد يعطي معلومات قوية عن الذيول، لكنه يحتاج إلى انتظام في الثوابت ومجال $k$، وهي معلومات لا توفرها صيغة ثابتة لـ$k$ وحدها.

## ٠.١٠٢٢ الانتقال إلى عائلات دوال $L$

في عائلة من دوال $L$، يجب تحديد ثلاثة أمور قبل كتابة أي حدسية عزوم:

١. العائلة نفسها ومقياس عد عناصرها؛

٢. الموصل التحليلي الذي يحل محل $T$؛

٣. نوع التناظر: وحدوي أو تعامدي أو سمبلكتي.

لذلك لا ينقل الأس $k^2$ أو العامل المصفوفي بصورة عمياء بين العائلات. الفصول السابع والحادي والعشرون توفران لغة الموصل والعوامل المحلية، لكن ثوابت العزوم تحتاج تحليلًا خاصًا بكل عائلة.

## خلاصة الفصل

الفكرة المركزية أن العزوم تقع بين التحليل الصارم والنمذجة الحدسية. العزمان الثاني والرابع مثبتان، والحدود الدنيا العامة غير مشروطة، والحدود العليا الحادة المعروضة هنا مشروطة بفرضية ريمان، أما الصيغة العامة بثابتها الكامل فتبقى حدسية. كذلك فإن الانتقال من العزوم إلى القيم المتطرفة ليس خطوة شكلية، بل جبهة بحثية مستقلة.

## تمارين

١. تحقق مباشرة من $a(1) = 1$.

٢. أثبت أن $a(2) = 1/\zeta(2) = 6/\pi^2$.

٣. استنتج من متراجحة ماركوف حدًا لقياس مجموعة $|\zeta| \geq V$ باستعمال حد Harper.

٤. بين لماذا لا يكفي الحد السابق لتحديد القيمة القصوى النموذجية.

٥. طبق صيغة القيمة المتوسطة على $a_n = n^{-1/2}$ وفسر ظهور $\log N$.

# باب ٢٣

# إحصاء أصفار دالة زيتا والمصفوفات العشوائية

## نطاق الفصل وحالته

ينتقل هذا الفصل من عدّ أصفار دالة زيتا إلى دراسة بنيتها المحلية بعد إزالة تغير الكثافة مع الارتفاع. النواة الصارمة هي صيغة مونتغمري للارتباط الثنائي ضمن مجال دعم محدود وتحت فرضية ريمان في الصياغة التاريخية المعتمدة هنا. أما صيغة GUE الكاملة، وتوزيع الفواصل المتتالية، وإحصاءات المستويات الأعلى فتبقى حدسية أو جبهة مفتوحة بحسب السياق.

## حراس النطاق

- صيغة ريمان--فون مانغولت لا تسجل هنا كمبرهنة جديدة؛ مصدرها الداخلي هو في الفصل السادس.
- مبرهنة مونتغمري المعروضة هنا مشروطة بفرضية ريمان ومقيدة بدعم فورييه داخل $(-1,1)$.
- حد GUE مبرهنة في نموذج المصفوفات العشوائية، لا مبرهنة عن أصفار زيتا.
- حسابات Odlyzko دليل عددي منته، وليست برهانًا على RH أو على حدسية GUE.
- لا يساوى الارتباط الثنائي بتوزيع أقرب جار أو بتباين العدد أو بإحصاءات المستويات الأعلى.

## نواتج التعلم

بنهاية الفصل يستطيع القارئ أن:

١. يستخرج كثافة الأصفار المتوسطة ومتوسط التباعد من صيغة عد الأصفار.

٢. يطبق التطبيع المحلي الذي يجعل متوسط التباعد قريبًا من واحد.

٣. يميز بين دالة مونتغمري الموزونة وصيغة دوال الاختبار للأزواج غير القطرية.

٤. يحدد بدقة موضع شرط RH وقيد دعم التحويل الفوري.

٥. يفسر ظهور نواة الجيب في GUE دون تحويل النموذج إلى برهان عن زيتا.

٦. يفرق بين الدليل العددي والنتيجة التقاربية والحدسية.

٧. يقرأ مبدأ Katz--Sarnak مع حارس يمنع النقل الآلي بين العائلات.

## ٠.١٢٣ عد الأصفار والمقياس المحلي

**تعريف ٠.١٢٣** (دالة عد الأصفار والتطبيع المحلي)**.** نكتب

$$N(T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma : 0 < \gamma \le T\},$$

مع العد بالتعدد. وبالرجوع إلى مبرهنة ريمان--فون مانغولت المثبتة في الفصل السادس، ، لدينا

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

ومن مشتقة الحد الرئيس تكون الكثافة المتوسطة قرب الارتفاع $T$

$$\rho_T = \frac{1}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi},$$

ومتوسط التباعد المحلي

$$\Delta_T = \rho_T^{-1} = \frac{2\pi}{\log(T/(2\pi))}.$$

ولهذا يطبع فرق ارتفاعين بالصورة

$$u = (\gamma - \gamma')\frac{\log T}{2\pi},$$

مع جواز استبدال $\log T$ بـ$\log(T/(2\pi))$ في الحدود المحلية التي لا تتأثر إلا بخطأ نسبي من رتبة $1/\log T$.

هذا التطبيع ليس تجميلًا شكليًا. فالفواصل الخام تنكمش مع الارتفاع، بينما يجعل المتغير $u$ متوسط التباعد قريبًا من واحد، وهو المقياس الذي تقارن عليه أصفار زيتا بطيف المصفوفات العشوائية.

## ٠.٢٢٣ الارتباط الثنائي واتفاقية فورييه

**تعريف ٠.٢٢٣** (إحصاء الأزواج ودالة مونتغمري)**.** نعتمد اتفاقية فورييه

$$\widehat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2\pi i\alpha u}\,du.$$

ونضع

$$w(u) = \frac{4}{4+u^2}.$$

تحت RH نكتب الأصفار $\rho = 1/2 + i\gamma$، ونعرّف

$$F(\alpha, T) = \left(\frac{T}{2\pi}\log T\right)^{-1} \sum_{0<\gamma,\gamma'\le T} T^{i\alpha(\gamma-\gamma')} w(\gamma-\gamma').$$

الأزواج هنا مرتبة والقطر $\gamma = \gamma'$ داخل المجموع. أما إحصاء دالة الاختبار غير القطري فيأخذ الصورة

$$\frac{1}{N(T)} \sum_{\substack{0<\gamma,\gamma'\le T \\ \gamma\ne\gamma'}} f\left((\gamma-\gamma')\frac{\log T}{2\pi}\right).$$

لا تخلط الصيغتان دون حساب التحويل الفوري والقطر والوزن.

## ٣٢٣. مبرهنة مونتغمري ومجال الدعم

**مبرهنة ٣٢٣.** (مونتغمري: الجزء المثبت من الارتباط الثنائي). نفترض فرضية ريمان. للصيغة الموزونة السابقة، وعندما $0 \le \alpha < 1$،

$$F(\alpha, T) = T^{-2\alpha}(\log T + O(1)) + \alpha + o(1),$$

بصورة منتظمة على المجالات المغلقة داخل هذا المجال. وبصيغة دوال الاختبار، يطابق حد الأزواج غير القطرية كثافة نواة الجيب عندما

$$\operatorname{supp} \widehat{f} \subset (-1, 1).$$

القيد على الدعم هو الحد الفاصل بين المبرهنة والحدسية. لا يسمح النص السابق بتمديد الصيغة تلقائيًا إلى جميع $\alpha$، ولا إلى كل دالة اختبار. وتوفر إعادة الصياغة المنشورة حديثًا في [Bal+24] سياقًا تدقيقيًا معاصرًا، لكنها لا تلغي الإسناد التاريخي إلى مونتغمري ولا تغير تصنيف الصيغة المعتمدة هنا.

الحد $T^{-2\alpha}\log T$ يمثل أثر القطر والبنية القريبة منه في الصيغة الموزونة. وعندما $0 < \alpha < 1$ يكون $F(\alpha, T) \to \alpha$، ومن ثم يقترب $1 - F(\alpha, T)$ من $1 - \alpha$، وهو الجزء المثلثي $(1 - |\alpha|)_+$ على هذا المجال.

## ٤٢٣. حدسية الارتباط الثنائي الكاملة

**حدسية ٤٢٣.** GUE--يرمغتنوم ةيسدح( للارتباط الثنائي). للأزواج غير القطرية وبعد جعل متوسط التباعد واحدًا، يتوقع أنه لكل دالة اختبار مناسبة

$$\frac{1}{N(T)} \sum_{\substack{0<\gamma,\gamma'\le T \\ \gamma\ne\gamma'}} f\left((\gamma-\gamma')\frac{\log T}{2\pi}\right) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(u)\left[1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right] du.$$

إذا وضعنا

$$K(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u}, \qquad K(0) = 1,$$

فالكثافة المتوقعة هي

$$R_2(u) = 1 - K(u)^2.$$

وعند اتفاقية فورييه المعتمدة لدينا

$$\widehat{K^2}(\alpha) = (1 - |\alpha|)_+.$$

هذه الهوية تفسر لماذا يرى برهان مونتغمري الجزء ذي الدعم المحدود، لكنها لا تزيل الحاجز خارج $(-1, 1)$.

## ٥٢٣. نواة الجيب في نموذج GUE

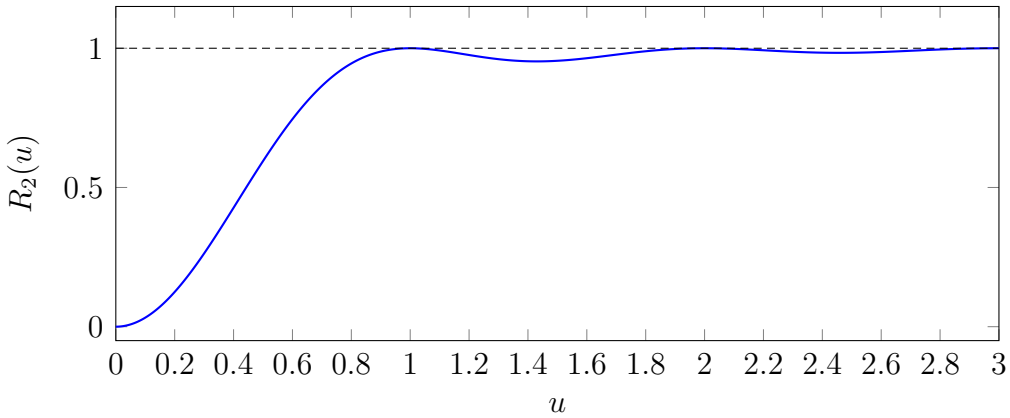
**مبرهنة ٥٢٣.** GUE لـ( المحلي ونواة الجيب). في حد الحجم الكبير للمجموعة الوحدوية الهرميتية، وبعد التطبيع المحلي بحيث تصبح الكثافة واحدًا، تتقارب نواة الارتباط إلى

$$K(u - v) = \frac{\sin \pi(u - v)}{\pi(u - v)}.$$

ومن ثم تكون كثافة الارتباط الثنائي غير القطري

$$R_2(u) = 1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2.$$

هذه مبرهنة عن نموذج مصفوفي. التشابه مع صيغة أصفار زيتا عميق ومثمر، لكنه ليس تطابقًا مثبتًا بين الكائنين. الفارق المنطقي يجب أن يبقى ظاهرًا: في GUE تأتي النواة من بنية محددات الارتباط، أما في زيتا فالصيغة الكاملة ما تزال حدسية.




شكل ١٢٣.: كثافة الارتباط الثنائي غير القطري $R_2(u) = 1 - (\sin \pi u/\pi u)^2$ لنموذج GUE كما في المبرهنة أعلاه، مرسومة مباشرة من الصيغة المغلقة (لا بيانات تقريبية). القيمة تنعدم عند $u = 0$ (التنافر المحلي بين الأصفار المتجاورة) وتؤول إلى 1 لِـ$u$ الكبير (الخط الأفقي المتقطع).

## ٠.٦٢٣ الدليل العددي: ما يثبته وما لا يثبته

ملاحظة ٠.٦٢٣ Odlyzko (العددي). قارن Odlyzko إحصاءات الفواصل لأول $10^5$ صفر، ثم لكتلة من $10^5$ صفر تبدأ عند الفهرس $10^{12}+1$، مع دقة عددية معلنة تقارب $10^{-8}$. أظهرت البيانات توافقًا أقوى مع تنبؤات GUE عند الارتفاع الأكبر.

التصنيف الصحيح هو

NUMERICAL-EVIDENCE / FINITE-VERIFIED.

حتى عينة ضخمة لا تختبر إلا عددًا منتهيًا من الأصفار، ولا تستبعد سلوكًا مختلفًا لاحقًا، ولا تثبت أن جميع الأصفار تقع على الخط الحرج.

## ٠.٧٢٣ الفواصل وتباين العدد وإحصاءات المستويات

**تعريف ٠.٧٢٣** (إحصاءات محلية متمايزة)**.** لتكن $\widetilde{\gamma}_n$ الأصفار بعد التطبيع المحلي.

١. **فاصل أقرب جار:** توزيع $\widetilde{\gamma}_{n+1}-\widetilde{\gamma}_n$.

٢. **الارتباط الثنائي:** متوسط على جميع الأزواج المختلفة بدالة اختبار.

٣. **تباين العدد:** إذا كان $N_I$ عدد النقاط في نافذة طولها $L$، فننظر إلى $\mathrm{Var}(N_I)$.

٤. **إحصاء المستوى** $n$: متوسطات على $n$-توائم متميزة من النقاط.

هذه الكائنات مترابطة لكنها غير مترادفة.

معرفة الارتباط الثنائي الكامل قد تحدد بعض المتوسطات التربيعية وتباينات العد عبر التكامل، لكنها لا تحدد تلقائيًا قانون أقرب جار؛ فالأخير يعتمد على غياب نقاط أخرى بين الجارين، وهي معلومة تتداخل فيها جميع المستويات.

## ٠.٨٢٣ عائلات دوال $L$ وأنواع التناظر

ملاحظة ٠.٨٢٣ Katz--Sarnak (أدبي). عند دراسة عائلة مضبوطة من دوال $L$، لا يكفي قول إن الأصفار «تشبه المصفوفات العشوائية». يجب تحديد العائلة، ومقياس الموصل، وحد الكثافة، ونوع التناظر المتوقع: وحدوي أو تعامدي أو سمبلكتي.

تقدم أعمال Katz--Sarnak مبرهنات قوية في عائلات هندسية فوق الحقول المنتهية وتبني قاموس التناظر. أما نقل هذا القاموس إلى عائلات دوال $L$ الكلاسيكية فهو مبدأ تنبؤي مدعوم بنتائج جزئية، لا عملية نقل آلي للثوابت أو مجالات الدعم. وتوفر نتيجة Rudnick--Sarnak [RS96] سياقًا لإحصاءات المستويات في دوال $L$ الرئيسية ضمن قيود دعم مناسبة.

## ٠.٩٢٣ حدود الاستدلال

ملاحظة ٠.٩٢٣. (حدود ما تسمح به البيانات والإحصاءات).
METHODOLOGICAL-PRINCIPLE
INFERENCE-GUARDED

توافق إحصاء pair correlation مع GUE لا يثبت RH؛ فقد صيغت مبرهنة مونتغمري التاريخية هنا تحت RH أصلًا، ولا ينتج من موافقة متوسط زوجي تحديد موضع كل صفر. كذلك لا يستعيد الإحصاء الثنائي وحده قانون الفواصل المتتالية أو كل إحصاءات level-$n$.

## ٠.١٠٢٣ الجبهة المفتوحة

**مسألة مفتوحة ٠.١٠٢٣.** GUE( وإحصاءات المستويات). إثبات حدسية الارتباط الثنائي بلا قيد الدعم، ثم إثبات إحصاءات المستويات الأعلى وقوانين الفواصل بالقوة المتوقعة لأصفار زيتا وعائلات دوال $L$، يبقى من الجبهات المركزية. ويجب في كل عائلة تحديد التناظر والموصل والتطبيع قبل صياغة الحدسية.

**تحديث الجبهة**

**تاريخ القطع:** 29 يوليو 2026 **حالة النشر:** PUBLISHED

**المصدر الأساسي:** [Bal+24]

قيد الدعم في مبرهنة مونتغمري (المبرهنة ٠.٣٢٣) لم يُوسَّع في هذا الفصل. أحدث ما يعتمده الكتاب هو إعادة الصياغة غير المشروطة لجزء من نتيجة مونتغمري المنشورة في Acta Arithmetica سنة 2024، وهي محل استشهاد صريح في القسم "مبرهنة مونتغمري ومجال الدعم" أعلاه. هذا لا يُغلق مسألة القضية ٠.١٠٢٣ (الارتباط الثنائي الكامل بلا قيد دعم يبقى مفتوحًا)، ولا يُعامَل كإثبات لحدسية الارتباط الثنائي الكاملة؛ فقط يُسجَّل بوصفه أحدث نقطة تحقّق مؤرَّخة لهذه الجبهة تحديدًا.

## خلاصة الفصل

ينشأ المقياس المحلي من صيغة عد الأصفار، ثم يكشف تحويل فورييه أن مبرهنة مونتغمري ترى جزءًا محدود الدعم من بنية نواة الجيب. في نموذج GUE تكون النواة مبرهنة، بينما تبقى الصيغة الكاملة لأصفار زيتا حدسية. بيانات Odlyzko تقدم دليلًا عدديًا قويًا لكنه منته. وأخيرًا، لا يجوز الخلط بين الارتباط الثنائي والفواصل المتتالية أو إحصاءات المستويات، ولا بين قاموس Katz--Sarnak والبرهان في كل عائلة كلاسيكية.

## تمارين

١. اشتق الكثافة المتوسطة $\rho_T$ من الحد الرئيس في صيغة ريمان--فون مانغولت.

٢. تحقق أن متوسط التباعد بعد الضرب في $\log T/(2\pi)$ يقترب من واحد.

٣. أثبت من زوج فورييه $\widehat{K} = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}$ أن $\widehat{K^2}(\alpha) = (1-|\alpha|)_+$.

٤. بين لماذا يحتوي مجموع $F(\alpha, T)$ على القطر، بينما تستبعده صيغة كثافة الأزواج غير القطرية.

٥. اشرح بمثال منطقي لماذا لا يحدد الارتباط الثنائي قانون أقرب جار.

٦. قارن بين تصنيف مبرهنة GUE المصفوفية وحدسية GUE لأصفار زيتا.

# باب ٢٤

# الدوال الضربية الادعائية

## نطاق الفصل وحالته

يدرس هذا الفصل متوسطات الدوال الضربية المقيدة بالقيمة المطلقة بواحد من خلال قياس مدى تشبهها بالدوال الطورية $n^{it}$، ومع وجود بنية توافقية بالدوال $\chi(n)n^{it}$. النواة الصارمة هي المسافة الادعائية وصيغة كمية من مبرهنة هالاش للمتوسطات الطويلة. أما الفترات القصيرة والارتباطات العليا ونتائج تشاو فتبقى خارج النواة.

## حراس النطاق

- لا نفترض الضربية التامة إلا إذا صُرح بذلك.
- مبرهنة هالاش منقولة من المصادر وليست نتيجة مثبتة هنا.
- الصيغة الكمية المعتمدة تستعمل المجال $|t| \le 2T$ وتحتفظ بالحد $T^{-1/2}$.
- لا يُستنتج الإلغاء المتوسط من تباعد المقياس وحده مع تثبيت $T$.
- نتائج الفترات القصيرة لا تُستخدم لإثبات أي نتيجة في النواة.

## ٢٤.١ الدوال الضربية والمتوسط الطويل

**تعريف ٢٤.١** (الدالة الضربية والمتوسط المطبع)**.** تسمى الدالة $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ضربية إذا

$$f(mn) = f(m)f(n) \qquad ((m,n)=1).$$

ونفترض في هذا الفصل غالبًا أن $|f(n)| \le 1$. ويعرّف متوسطها الطويل المطبع بـ

$$M_f(x) = \frac{1}{x}\sum_{n \le x} f(n).$$

السؤال المركزي هو: متى يكون $M_f(x)$ صغيرًا؟ الصعوبة أن بعض الدوال الضربية لا تتذبذب عشوائيًا، بل قد تحاكي نموذجًا طوريًا منتظمًا. وللسياق الكلاسيكي لنظريات المتوسط ومعايير وجوده راجع عملَي Elliott [Ell75; Ell79].

## ٢٢٤. المسافة الادعائية

**تعريف ٢٢٤.** (المسافة الادعائية). لدالتين ضربيتين مقيدتين بالقيمة المطلقة بواحد نضع

$$\mathbb{D}(f,g;x)^2 = \sum_{p\le x} \frac{1-\Re\Big(f(p)\overline{g(p)}\Big)}{p}.$$

الجمع هنا على الأعداد الأولية فقط، والصيغة المربعة هي التطبيع الأساسي في هذا الفصل.

إذا كانت قيم $f(p)$ و$g(p)$ متقاربة في المتوسط الموزون بـ$1/p$، كانت المسافة صغيرة. لكن الصفر في هذه المسافة حتى ارتفاع $x$ لا يعني تطابق الدالتين على جميع الأعداد الطبيعية.

**قضية ٣٢٤.** (خصائص المسافة الادعائية الأساسية). لدوال $f,g,h$ مقيدة بواحد:

$$\mathbb{D}(f,g;x)\ge 0, \qquad \mathbb{D}(f,g;x)=\mathbb{D}(g,f;x),$$

كما تحقق المتباينة المثلثية

$$\mathbb{D}(f,h;x)\le \mathbb{D}(f,g;x)+\mathbb{D}(g,h;x).$$

برهان. عدم السلبية والتماثل مباشران من التعريف. ولإثبات المتباينة المثلثية في قرص الوحدة كله، نستخدم رفعًا احتماليًا إلى دائرة الوحدة.

لكل $z=re^{i\theta}$ حيث $0\le r\le 1$، نعرّف متغيرًا عشوائيًا $Z_z$ يأخذ القيمتين $e^{i\theta}$ و$-e^{i\theta}$ باحتمالين

$$\frac{1+r}{2}, \qquad \frac{1-r}{2},$$

على الترتيب. عندئذ

$$|Z_z|=1 \qquad \text{و} \qquad \mathbb{E}Z_z=z.$$

لكل أولي $p\le x$، نختار على فضاء احتمالي مشترك متغيرات مستقلة

$$X_{f,p},\ X_{g,p},\ X_{h,p}$$

من هذا النوع، بحيث

$$\mathbb{E}X_{f,p}=f(p), \quad \mathbb{E}X_{g,p}=g(p), \quad \mathbb{E}X_{h,p}=h(p).$$

وبالاستقلال وكون القيم أحادية القيمة المطلقة نحصل على

$$\mathbb{E}\,|X_{f,p}-X_{g,p}|^2 = 2\left(1-\Re\Big(f(p)\overline{g(p)}\Big)\right).$$

ومن ثم

$$\mathbb{D}(f,g;x)^2 = \sum_{p\le x} \frac{1}{2p}\mathbb{E}\left|X_{f,p} - X_{g,p}\right|^2.$$

أي أن $\mathbb{D}(f,g;x)$ هو معيار الفرق بين المتجهين $(X_{f,p})_{p\le x}$ و$(X_{g,p})_{p\le x}$ في مجموع هيلبرت المباشر الموزون بالمعاملات $1/(2p)$. لذلك تعطي متباينة مينكوفسكي

$$\mathbb{D}(f,h;x) \le \mathbb{D}(f,g;x) + \mathbb{D}(g,h;x),$$

وهو المطلوب. □

## ٣٢٤. النماذج الطورية ومقياس أفضل اقتراب

الدالة $n^{it} = e^{it\log n}$ ضربية تمامًا وقيمتها المطلقة واحد. وهي النموذج الأساسي الذي قد تتظاهر به دالة ضربية في المتوسط الطويل.

**تعريف ٤٢٤.** (مقياس هالاش). لـ$T \ge 1$ نضع

$$\mathcal{M}(f;x,T) = \min_{|t|\le 2T} \mathbb{D}(f,n^{it};x)^2.$$

يقيس هذا العدد أفضل تشبه طوري للدالة $f$ على الأوليات حتى $x$.

عند دراسة متتاليات حسابية أو التواءات توافقية تظهر النماذج $\chi(n)n^{it}$، لكن هذا توسيع إضافي لا يُخلط بالصورة غير التوافقية الأساسية.

## ٤٢٤. مبرهنة هالاش الكمية

**مبرهنة ٥٢٤.** (هالاش: حد المتوسط الطويل). لتكن $f$ دالة ضربية تحقق $|f(n)| \le 1$. عند $x \ge 2$ و$T \ge 1$، لدينا بصيغة كمية معيارية

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n)\right| \ll (1+\mathcal{M}(f;x,T))e^{-\mathcal{M}(f;x,T)} + \frac{1}{\sqrt{T}},$$

حيث الثابت المطلق لا يعتمد على $f,x,T$.

المغزى أن المتوسط الكبير لا يستمر إلا إذا وجدت قيمة $t$ في المجال $|t| \le 2T$ تجعل $f$ قريبة من $n^{it}$ على الأوليات. الحد الثاني يمنع تثبيت $T$ ثم الادعاء بأن تباعد $\mathcal{M}$ وحده يكفي.

**نتيجة ٦٢٤.** (معيار الإلغاء المتوسط). إذا أمكن اختيار دالة $T = T(x) \to \infty$ بحيث

$$\mathcal{M}(f;x,T(x)) \to \infty,$$

فإن

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) \to 0.$$

برهان. نطبق مبرهنة هالاش. يذهب الحد $(1+\mathcal{M})e^{-\mathcal{M}}$ إلى الصفر بتباعد $\mathcal{M}$، ويذهب $T(x)^{-1/2}$ إلى الصفر لأن $T(x) \to \infty$. □

## ٠٥٢٤. أمثلة أساسية

ملاحظة ٠٧٢٤. (أمثلة وتفسيرات). ١. $f(n) = 1$ تتظاهر تمامًا بالنموذج $n^{i0}$، ولذلك متوسطها يساوي واحدًا.

٢. $f(n) = n^{it_0}$ تحقق مسافة صفر من النموذج نفسه متى كان $|t_0| \leq 2T$.

٣. شخصية ديريشليه غير الرئيسية قد تحمل إلغاءً توافقيا، لكن تحليلها الكامل يستلزم فصل النموذج $\chi(n)n^{it}$ عن النموذج الطوري وحده.

٤. دالتا موبيوس $\mu$ وليوفيل $\lambda$ تمثلان نموذجين مركزيين للتذبذب الضربي، لكن مبرهنة هالاش وحدها لا تمنح أفضل التقديرات المعروفة لمجاميعهما القصيرة.

## ٠٦٢٤. ماذا يعني الادعاء؟

ملاحظة ٠٨٢٤. (العائق الادعائي للمتوسط الكبير). في نطاق المتوسطات الطويلة، العائق البنيوي الرئيس أمام الإلغاء هو التشبه بنموذج طوري مناسب. هذه صياغة تفسيرية منضبطة لعاقبة هالاش، وليست مبرهنة أوسع مستقلة عن شروطها.

الفكرة لا تقول إن الدالة «تكذب»، بل إن سلوكها على الأوليات يقلد نموذجًا بسيطًا بما يكفي ليمنع الإلغاء المتوسط.

## ٠٧٢٤. حدود الاستدلال

ملاحظة ٠٩٢٤. (المتوسط الطويل ليس فترة قصيرة). METHODOLOGICAL-PRINCIPLE / INFERENCE-GUARDED. نجاح معيار هالاش على المجال $n \leq x$ لا يثبت إلغاءً منتظمًا في كل فترة $[x, x+h]$، ولا يحدد تلقائيًا الارتباطات من نوع $f(n)f(n+h)$. الانتقال إلى هذه المسائل يحتاج مدخلات مستقلة.

## ٠٨٢٤. الجبهة المفتوحة

**مسألة مفتوحة ١٠٢٤.** (الفترات القصيرة والارتباطات). تطوير قاموس الادعاء إلى متوسطات الفترات القصيرة والارتباطات العليا ومسائل تشاو يمثل جبهة مركزية. نتائج Matomäki--Radziwiłł [MR16] تبين أن المتوسطات القصيرة تحمل بنية عميقة إضافية، لكنها لا تدخل في برهان نواة هذا الفصل.

**تحديث الجبهة**

**تاريخ القطع:** 29 يوليو 2026 **حالة النشر:** PUBLISHED

**المصدر الأساسي:** [MR16]

أحدث نتيجة معتمدة في هذا الكتاب لمتوسطات الفترات القصيرة هي مبرهنة Matomäki--Radziwiłł (2016) المذكورة أعلاه، وهي النتيجة الأساسية التي فتحت هذه الجبهة. لم يُجرِ هذا التحديث بحثًا مستقلًا عمّا استُجدَّ بعدها في تطوير قاموس الادعاء نفسه إلى الارتباطات العليا؛ فالقسم أعلاه يسجّل الجبهة مفتوحة صراحة (٠.١٠٢٤) ولا يدّعي تغطية كل تطور لاحق. أي تحديث مستقبلي يذكر نتيجة أحدث يجب أن يستبدل هذه البطاقة لا أن يُضاف إليها.

## خلاصة الفصل

تضغط المسافة الادعائية سلوك الدالة الضربية على الأوليات في كمية هندسية موزونة. ويقيس $\mathcal{M}(f;x,T)$ أقرب نموذج طوري، ثم تحول مبرهنة هالاش بعده عن جميع النماذج إلى إلغاء في المتوسط الطويل. غير أن الحد $T^{-1/2}$ جزء حاكم من الصيغة، كما أن الانتقال إلى الفترات القصيرة والارتباطات يحتاج نظريات أخرى.

## تمارين

١. احسب $\mathbb{D}(1,n^{it};x)^2$ واكتبها كمجموع على الأوليات.

٢. تحقق أن $\mathbb{D}(f,g;x)=0$ لا يفرض تطابق $f$ و$g$ بعد $x$.

٣. استنتج معيار الإلغاء من مبرهنة هالاش مع توضيح ضرورة الشرطين على $T(x)$ و$\mathcal{M}$.

٤. قارن بين دور $n^{it}$ ودور $\chi(n)n^{it}$.

٥. اشرح لماذا لا تكفي نتيجة متوسط طويل لإثبات إلغاء في كل فترة قصيرة.

# باب ٢٥

# فك الاقتران والتوافق الفعّال: مبرهنة القيمة المتوسطة لفينوغرادوف

## نطاق الفصل وحالته

يدرس هذا الفصل متوسطات مجاميع فينوغرادوف، ويشرح كيف قاد مساران مختلفان --- التوافق الفعّال وفك الاقتران $\ell^2$ للمنحنى اللحظي --- إلى الحد الأمثل في مبرهنة القيمة المتوسطة لفينوغرادوف. لا يعيد الفصل بناء البرهان الكامل لأي من المسارين؛ بل يثبت الهوية العددية والحدود الدنيا البنيوية داخل الموسوعة، ثم ينقل المبرهنة العميقة من مصادرها الأصلية مع حراس صريحة على نطاقها.

## حراس النطاق

- نستعمل دائمًا $e(t) = \exp(2\pi i t)$ والتكامل على $[0,1)^k$.
- هوية التعامد والحدان السفليان يثبتان هنا؛ الحد العلوي الأمثل منقول ولا يثبت هنا.
- لا يُعرض التوافق الفعّال وفك الاقتران على أنهما برهان واحد أو متكافئان خطوة بخطوة.
- نتيجة Wooley لعام 2012 تقدم تأسيسي، والحالة التكعيبية الكاملة تعود إلى عمله اللاحق المنشور سنة 2016.
- نتيجة Bourgain--Demeter--Guth تخص الدرجات $k \geq 4$، بينما يغطي التوافق الفعّال المتداخل جميع الدرجات.
- تطبيقات وارينغ والمجاميع الأسية جسور تفسيرية إلى الفصلين ١٧ و١٨، وليست إعادة برهنة لنواتهما.

## ٠.١٢٥ مجموع فينوغرادوف والقيمة المتوسطة

**تعريف ٠.١٢٥** (مجموع فينوغرادوف والقيمة المتوسطة)**.** لتكن $k, s \in \mathbb{N}$ و$X \geq 1$**.** نضع

$$e(t) = \exp(2\pi i t),$$

ونعرف

$$f_k(\boldsymbol{\alpha}; X) = \sum_{1 \leq n \leq X} e\big(\alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \cdots + \alpha_k n^k\big)\,,$$

حيث $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in [0,1)^k$**.** ثم نضع

$$J_{s,k}(X) = \int_{[0,1)^k} |f_k(\boldsymbol{\alpha}; X)|^{2s}\, d\boldsymbol{\alpha}.$$

هذا المتوسط ليس مجرد معيار تحليلي لحجم مجموع أسي؛ فهو يخزن بالضبط عدد حلول نظام جبري من معادلات القوى المتتالية.

**قضية ٠.٢٢٥** (هوية التعامد وعد حلول نظام فينوغرادوف)**.** يساوي $J_{s,k}(X)$ عدد الحلول الصحيحة

$$1 \leq x_i, y_i \leq X \qquad (1 \leq i \leq s)$$

للنظام

$$\sum_{i=1}^{s} x_i^j = \sum_{i=1}^{s} y_i^j \qquad (1 \leq j \leq k).$$

برهان. نوسع القوة الزوجية على الصورة

$$|f_k(\boldsymbol{\alpha}; X)|^{2s} = \prod_{i=1}^{s} f_k(\boldsymbol{\alpha}; X) \prod_{i=1}^{s} \overline{f_k(\boldsymbol{\alpha}; X)}.$$

بعد فتح المجاميع نحصل على مجموع على جميع $x_i, y_i \in [1, X] \cap \mathbb{Z}$ للحد

$$e\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{s} x_i^j - \sum_{i=1}^{s} y_i^j\right)\right).$$

وبما أن

$$\int_0^1 e(\alpha m)\, d\alpha = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

فإن التكامل في كل متغير $\alpha_j$ يفرض المعادلة ذات الدرجة $j$. لذلك لا يبقى إلا الحلول التي تحقق النظام كله، وكل حل يسهم بواحد. □

## ٢٢٥. الوزن الحرج والحدود الدنيا البنيوية

**تعريف ٣٢٥.** (الوزن الحرج). نكتب

$$K = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

هذا هو مجموع درجات معادلات نظام فينوغرادوف، وهو الفقد الطبيعي في أس عدد درجات الحرية.

**قضية ٤٢٥.** (المصدران البنيويان للحد الرئيسي). لكل $s, k \geq 1$ يوجد ثابت موجب يعتمد على $s, k$ فقط بحيث

$$J_{s,k}(X) \gg_{s,k} X^s + X^{2s-K}.$$

برهان. أولًا، لكل اختيار مرتب لـ$(x_1, \ldots, x_s)$ نحصل على حل قطري بوضع $y_i = x_i$. ومن ثم

$$J_{s,k}(X) \geq \lfloor X \rfloor^s \gg_s X^s.$$

ثانيًا، نختار ثابتًا صغيرًا $c_k > 0$، ونقيد التكامل إلى الصندوق

$$\mathcal{B}_X = \left\{ \boldsymbol{\alpha} : |\alpha_j|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \leq c_k X^{-j} \quad (1 \leq j \leq k) \right\}.$$

لكل $1 \leq n \leq X$ و$\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{B}_X$ لدينا

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j n^j \right|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \leq c_k \sum_{j=1}^{k} \left( \frac{n}{X} \right)^j \leq k c_k.$$

وباختيار $c_k$ بحيث تقع الأطوار كلها في قوس أقصر من نصف دائرة، نحصل على

$$|f_k(\boldsymbol{\alpha}; X)| \gg_k X.$$

أما حجم الصندوق فهو

$$\operatorname{meas}(\mathcal{B}_X) \asymp_k \prod_{j=1}^{k} X^{-j} = X^{-K}.$$

إذن

$$J_{s,k}(X) \geq \int_{\mathcal{B}_X} |f_k(\boldsymbol{\alpha}; X)|^{2s} \, d\boldsymbol{\alpha} \gg_{s,k} X^{2s-K}.$$

وبجمع الحدين، أو باستخدام أن مجموعهما لا يتجاوز ثابتًا مضروبًا في أكبرهما، نحصل على النتيجة. □

الحدان السابقان يفسران لماذا لا يمكن أن يكون الحد العلوي الصحيح أصغر من $X^s + X^{2s-K}$. لكن إثبات حد علوي مطابق، حتى مع خسارة $X^\varepsilon$، هو قلب المبرهنة العميقة.

## ٠٣٢٥ مبرهنة القيمة المتوسطة الرئيسية

**مبرهنة ٠٥٢٥.** (المبرهنة الرئيسية للقيمة المتوسطة لفينوغرادوف)**.** لكل $s, k \in \mathbb{N}$، ولكل $\varepsilon > 0$، لدينا

$$J_{s,k}(X) \ll_{s,k,\varepsilon} X^{\varepsilon} \left(X^{s} + X^{2s-k(k+1)/2}\right).$$

مع القضية ٠٤٢٥. تصبح هذه الصيغة مثلى حتى عامل $X^{\varepsilon}$. عند $s \leq K$ يغلب الحد القطري، وعند $s \geq K$ يظهر الحد الثاني بوصفه المقياس المستمر أو فوق الحرج. لا يعني هذا أن كل الحلول فوق الحرجة غير قطرية، بل يعني أن الحجم الكلي الأمثل يتغير عند الوزن الحرج.

### التسلسل التاريخي المنضبط

بدأ Wooley التوافق الفعّال في عمله المنشور سنة 2012، وحقق به تقدمًا جذريًا في VMVT وتطبيقاتها [Woo12]. ثم أثبت الحالة التكعيبية الكاملة $k = 3$ في عمل لاحق نشر سنة 2016 [Woo16]. وأثبت Bourgain وDemeter وGuth الحدسية للدرجات $k \geq 4$ بواسطة فك الاقتران الحاد للمنحنى اللحظي [BDG16]. وبعد ذلك قدم Wooley التوافق الفعّال المتداخل، مثبتًا صيغة عامة تشمل جميع الدرجات [Woo19]. هذا التسلسل يمنع نسبة النتيجة العامة كلها إلى ورقة واحدة أو إلى مسار واحد.

## ٠٤٢٥ مسار التوافق الفعّال

ملاحظة ٠٦٢٥. (مبدأ التوافق الفعّال)**.** يقسم التوافق الفعّال المتغيرات إلى فئات توافقية modulo قوى أولية، ثم يستعمل نظام معادلات القوى لرفع التطابقات إلى مقاييس أدق. تنتج عملية تكرارية تضغط كتلة المتوسط في عائلات أكثر انتظامًا، مع موازنة دقيقة بين كلفة التقييد والمكسب الناتج من عدم الانحلال. هذا وصف لبنية الطريقة، لا إعادة بناء لسلسلة المتراجحات التقنية الكاملة.

جوهر الفكرة أن المعادلات

$$\sum x_i^j \equiv \sum y_i^j \pmod{p^a}$$

ليست قيودًا مستقلة اعتباطية؛ فعند اختيار متغيرات غير متطابقة modulo $p$، تسمح بنية مصفوفة فانديرموند برفع المعلومات التوافقية. في النسخة المتداخلة تصبح المقاييس متعددة الدرجات، وهو ما يمنح الطريقة المرونة اللازمة لإغلاق جميع الدرجات.

## ٠٥٢٥ مسار فك الاقتران للمنحنى اللحظي

**مبرهنة ٠٧٢٥.** VMVT ىلإ ىرجي وأ ىدلي نأ نكمي ) **.** ترتبط مبرهنة *VMVT* بتقديرات فك اقتران $\ell^2$ حادة للمنحنى اللحظي

$$\Gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^k) \subset \mathbb{R}^k.$$

تجزئ فترة المعلمة إلى فترات قصيرة، وتفصل مساهمات القطع في معيار $L^p$ موزون على كرات بالمقياس المناسب. وعند الأس الحرج والتطبيع الصحيحين تقود صيغة فك الاقتران، بعد انتقال متقطع، إلى الحد المطلوب لـ$J_{s,k}(X)$.

لا تكفي مبرهنة فك الاقتران العامة للأسطح ذات الانحناء من دون ضبط هندسة المنحنى اللحظي ومقياس الكرات وطول الفترات. لذلك يجب عند كتابة أي صيغة كمية تحديد: طول القطعة، نصف قطر الكرة، الوزن الناعم، والأس $p$، وعدم خلط الصيغ الموزونة بغير الموزونة.

**ملاحظة ٠.٨٢٥.** (استقلال المسارين). METHODOLOGICAL-PRINCIPLE / INFERENCE-GUARDED. التوافق الفعّال يستخرج البنية من التطابقات ورفعها عبر قوى الأوليات، أما فك الاقتران فيفصل مساهمات قطع منحنى ذي هندسة محددة داخل فضاءات $L^p$. اشتراكهما في النتيجة وفي وجود تكرار متعدد المقاييس لا يثبت تكافؤًا تقنيًا بينهما.

## ٠.٦٢٥ الجسر إلى وارينغ والمجاميع الأسية

**نتيجة ٠.٩٢٥.** (جسر منضبط إلى التطبيقات). *DERIVED-BRIDGE / INFERENCE-GUARDED*. تمنح مبرهنة *VMVT* مدخلًا حاسمًا لتحسين تقديرات المجاميع الأسية متعددة الدرجات، كما تدخل في ضبط الأقواس الصغرى في مسائل وارينغ. لكن أي نتيجة كمية نهائية تحتاج، فوق *VMVT*، إلى اختيار متعدد الحدود، وتقريب ديوفانتي، وتجزئة الأقواس، وتقدير التكاملات الكبرى أو الصغرى بحسب المسألة.

وعليه لا نستنتج من المبرهنة وحدها صيغة تقاربية كاملة لعدد تمثيلات عدد صحيح كمجموع قوى. الفصل ١٧ يوفر بنية الطريقة الدائرية، والفصل ١٨ يوفر أدوات تقدير المجاميع الأسية؛ أما الفصل الحالي فيضيف متوسطًا عاليًا أمثل يرفد تلك الأدوات.

## ٠.٧٢٥ ما الذي لا تثبته المبرهنة؟

- لا تعطي VMVT تقديرًا نقطيًا أمثل لكل $\alpha$؛ فهي مبرهنة متوسطية.
- لا تحول كل مسألة متعددة الحدود تلقائيًا إلى النظام القياسي $(n, n^2, \ldots, n^k)$.
- لا تستبدل التحليل المحلي في الأقواس الكبرى ولا فحص المتسلسلة المفردة في وارينغ.
- لا تجعل فك الاقتران والتوافق الفعّال قابلين للتبادل في جميع البيئات؛ لكل منهما مجال مرونة مختلف.

## ٠.٨٢٥ الجبهة المفتوحة

**مسألة مفتوحة ٠.١٠٢٥.** (أنظمة متعددة الحدود). توسيع الصورة المثلى إلى أنظمة متعددة حدود عامة ذات ورونسكي غير منعدم، وإلى بيئات حقول الأعداد وحقول الدوال، وإلى مسائل فك اقتران لمتشعبات

أوسع، يفتح عائلة كبيرة من الأسئلة. توجد نتائج قوية في هذه الاتجاهات، لكن هذا الفصل لا يدعي تغطيتها أو استخراج صيغة عامة موحدة منها.

**تحديث الجبهة**

**تاريخ القطع:** 29 يوليو 2026 **حالة النشر:** PUBLISHED

**المصدر الأساسي:** [BDG16; Woo19]

مبرهنة القيمة المتوسطة الرئيسية لفينوغرادوف (VMVT) بصيغتها المثلى لكل درجة $k$ نتيجة **مغلقة** منذ 2015--2016 بمسارين مستقلين (فك الاقتران عند Bourgain--Demeter--Guth، والتوافق الفعّال المتداخل عند Wooley)؛ هذا الجزء من الفصل لا يُعدّ "جبهة" بالمعنى الذي يتغير مع كل بحث جديد. الجبهة الفعلية المفتوحة هي حصرًا ما ورد في القضية ١٠٢٥. أعلاه (الأنظمة العامة، حقول الدوال، فك الاقتران لمتشعبات أوسع)، ولم يُجرِ هذا التحديث بحثًا مستقلًا في تطورات تلك الاتجاهات المفتوحة تحديدًا.

## خلاصة الفصل

حوّل التعامد قيمة متوسطة تحليلية إلى عد دقيق لحلول نظام فينوغرادوف. وكشف الحد القطري وصندوق الأطوار الصغيرة عن الحدين البنيويين $X^s$ و$X^{2s-K}$. أما مطابقة هذين الحدين من الأعلى فهي الإنجاز العميق الذي تحقق بمسارين مستقلين: التوافق الفعّال عند Wooley، وفك الاقتران للمنحنى اللحظي عند Bourgain--Demeter--Guth. قوة النتيجة لا تلغي الحاجة إلى الأدوات الخاصة بكل تطبيق، ولا تمنح إذنًا بخلط التاريخ أو التطبيعات أو أنواع البرهان.

## تمارين

١. أثبت هوية التعامد في القضية ٢٢٥. أولًا للحالة $k = 1$، ثم عممها.

٢. احسب الوزن الحرج للحالات $k = 2, 3, 4$، وحدد موضع الانتقال بين الحدين في كل حالة.

٣. أعط عددًا أدنى أدق للحلول القطرية يسمح بتبديل عناصر $(x_1, \ldots, x_s)$ عندما تكون متميزة.

٤. اكتب بالتفصيل اختيار $c_k$ في برهان القضية ٤٢٥. بحيث تحصل على ثابت صريح في $|f_k| \gg_k X$.

٥. اشرح لماذا لا تكفي معرفة $J_{s,k}(X)$ لاستخراج حد نقطي موحد لـ$|f_k(\boldsymbol{\alpha}; X)|$.

٦. قارن بين مصدر تعدد المقاييس في التوافق الفعّال ومصدره في فك الاقتران، من دون ادعاء التكافؤ.

# باب ٢٦

# خريطة الجبهات البحثية الحديثة

## وظيفة الفصل وحالته

هذا الفصل خاتمة تركيبية للموسوعة، لا سجل أخبار ولا قائمة أسماء ولا فصل براهين جديدة. وظيفته أن يبين أين تنتهي النتائج المعتمدة في الفصول السابقة، وأين تبدأ الاتجاهات النشطة والبرامج الحدسية والمسائل المفتوحة. لذلك يعتمد اتجاهًا واحدًا فقط: من النتائج والمصادر إلى الخريطة، ولا تُستعمل الخريطة لتبرير أي نتيجة سابقة.

## ١٢٦. قاموس الحالات وحدود الاستعمال

**تعريف ١٢٦.** (قاموس حالات الجبهات). تستعمل هذه الخريطة أربع حالات فقط:

**ESTABLISHED** نتيجة منشورة أو معتمدة داخل الموسوعة، مع إبقاء فروضها ونطاقها وتطبيعها.

**ACTIVE-DIRECTION** اتجاه بحثي له نتائج جزئية وأدوات فعالة، لكنه لم يغلق المسألة العامة.

**CONJECTURAL-PROGRAM** برنامج حدسي منظم يربط ظواهر ونتائج متوقعة، ولا يمثل مبرهنة.

**OPEN** سؤال محدد لم يحسم ضمن النطاق المعلن.

ليست الشرطية حالة خامسة: النتيجة المبرهنة تحت فرض معلن تبقى ESTABLISHED مع التصريح بالفرض. كما أن النموذج الحدسي والحساب الموثق وصفان منهجيان، لا حالتان معرفيتان مستقلتان.

ملاحظة ٢٢٦. (النموذج لا يقوم مقام البرهان). **مبدأ منهجي** حارس استدلال تركيبي، لا نتيجة حسابية مستقلة.

قد يفسر نموذج احتمالي أو طيفي أو هندسي بنية البيانات ويوجه صياغة التخمينات، لكن التشابه الكمي أو البصري لا ينقل النتيجة من النموذج إلى الكائن الحسابي. يلزم دائمًا جسر برهاني مستقل يحفظ الفروض والثوابت ومجال الاختبار.

ملاحظة ٣٢٦. (المتوسط لا يعطي تحكمًا نقطيًا تلقائيًا). **مبدأ منهجي** حارس استدلال تركيبي، لا نتيجة حسابية مستقلة.

نجاح تقدير متوسط على عائلة أو فترة أو مجال ترددي لا يعني صحة التقدير لكل عنصر أو لكل فترة قصيرة. الانتقال من المتوسط إلى النقطي يحتاج مدخلًا إضافيًا، وقد يكون هو العائق المركزي في المسألة.

ملاحظة ٤٢٦. (النموذج الخاص لا يثبت البرنامج العام). **مبدأ منهجي** حارس استدلال تركيبي، لا نتيجة حسابية مستقلة.

إثبات نتيجة عند رتبة أو زمرة أو منحنى أو عائلة خاصة لا يثبت النسخة العامة من البرنامج. التعميم قد يتطلب بنية محلية جديدة أو صيغ تتبع أوسع أو هندسة مختلفة أو تحكمًا موحدًا لم يتوافر في الحالة الخاصة.

## ٢٢٦. الجبهة الأولى: القيم والأصفار

ملاحظة ٥٢٦. (خريطة القيم والأصفار). **خريطة تركيبية** تجمع نتائج سابقة ولا تنشئ مبرهنة جديدة.

تنطلق هذه الجبهة من نتيجتين متكاملتين في الموسوعة: دراسة عزوم دالة زيتا وقيمها الكبيرة في الفصل ٢٢، ودراسة إحصاء الأصفار والمصفوفات العشوائية في الفصل ٢٣.

الحالة ESTABLISHED تشمل صيغ العزوم والحدود والمبرهنات المنقولة ضمن نطاقها، وكذلك نتائج الارتباط التي صيغت بفروضها ومجالات دعمها. أما الصيغ الكاملة للعزوم، والقيم القصوى الدقيقة، وقوانين الفواصل العامة، وتطابق إحصاءات المستويات بلا قيود مناسبة، فتبقى بين CONJECTURAL-PROGRAM وOPEN بحسب الصياغة.

النموذج القادم من المصفوفات العشوائية أداة تفسيرية قوية، لكنه لا يثبت وحده أي صيغة حسابية. والحاجز الأعمق هو بناء انتقال برهاني من البنية الطيفية أو الاحتمالية إلى الارتباطات الحسابية مع التحكم في الحدود والثوابت.

## ٣٢٦. الجبهة الثانية: الأوليات والبنى الجمعية

ملاحظة ٦٢٦. (خريطة الأوليات والبنى الجمعية). **خريطة تركيبية** تجمع نتائج سابقة ولا تنشئ مبرهنة جديدة.

تجمع هذه الجبهة الفجوات بين الأوليات، والتوزيع في المتتاليات الحسابية، والأوليات في الفترات القصيرة، والطريقة الدائرية ومسائل غولدباخ ووارينغ. وتبقى النتائج المعتمدة في الفصول السابقة في حالة ESTABLISHED ضمن أسسها وتطبيقاتها. ولا يجوز نقل حد عددي من سجل إلى آخر دون التحقق من تعريف دالة العد وطول الفترة ونوع الاستثناء.

التحسينات الكمية، والوصول إلى فترات أقصر، والتحكم النقطي بدل المتوسط، وإزالة الفروض أو الاستثناءات تمثل ACTIVE-DIRECTION أو OPEN. وتبقى حدسية غولدباخ مثلًا مسألة مفتوحة؛

لا يحول نجاح الطريقة الدائرية في مسائل قريبة ولا كثافة التمثيلات المتوسطة هذا النجاح إلى برهان للحالة الثنائية الكاملة.

الحاجز المنهجي هنا هو أن معلومات التوزيع في المتوسط لا تعطي تلقائيًا عددًا أوليًا في كل فترة أو كل فئة، وأن الانتقال من عدد كبير من الحالات الصحيحة إلى جميع الحالات يحتاج أداة جديدة لا مجرد تحسين حسابي طفيف.

## ٠.٤٢٦ الجبهة الثالثة: دوال $L$ والطيف

ملاحظة ٧٢٦. (خريطة دوال $L$ والطيف). **خريطة تركيبية** تجمع نتائج سابقة ولا تنشئ مبرهنة جديدة.

تصل هذه الجبهة بين الأشكال المعيارية وأشكال ماس وصيغ التتبع، وبين دون التحدب والقيم المركزية والمدخل إلى برنامج لانجلاندز. صيغ Petersson وKuznetsov وSelberg والنتائج المنقولة في حالات محددة هي ESTABLISHED ضمن التطبيع والمستوى والعائلة المعلنة.

التبادلية الطيفية النسبية، والتوحيد عبر عائلات أوسع، وحدود دون التحدب الموحدة، ونقل النتائج بين زمر وتمثيلات مختلفة تمثل اتجاهًا بحثيًا نشطًا.

ACTIVE-DIRECTION

أما برنامج لانجلاندز في عمومه فهو برنامج حدسي واسع.

CONJECTURAL-PROGRAM

ولا يمكن استنتاج البرنامج العام من حالة خاصة واحدة.

العائق المركزي هو حفظ العوامل المحلية والموصلات والتطبيعات عند الانتقال بين الجانبين الطيفي والحسابي، ثم التحكم الموحد في الحدود الأرشيميدية والمحلية. لذلك لا تكفي صيغة تتبع واحدة أو حالة رتبة منخفضة لإثبات البرنامج العام.

## ٠.٥٢٦ الجبهة الرابعة: التذبذب الضربي

ملاحظة ٨٢٦. (خريطة التذبذب الضربي). **خريطة تركيبية** تجمع نتائج سابقة ولا تنشئ مبرهنة جديدة.

يوفر الفصل ٢٤ لغة كمية لقياس تشبه الدوال الضربية بالنماذج المنظمة، ويعطي نتائج ESTABLISHED عن المتوسطات الطويلة وبعض المتوسطات القصيرة ضمن الفروض المسجلة.

لكن الانتقال إلى كل فترة قصيرة، أو إلى ارتباطات أعلى، أو إلى صيغ من نمط تشاولا وإليوت في عمومها يبقى ACTIVE-DIRECTION أو OPEN. المسافة الادعائية تشخص سبب غياب الإلغاء في كثير من الحالات، لكنها لا تحل تلقائيًا جميع مسائل الارتباط.

الحاجز هو الفصل بين البنية المحلية على الأوليات والسلوك الجمعي للارتباطات، وبين المتوسط العالمي والسلوك داخل نافذة قصيرة متحركة. وتحتاج المسائل الأقوى مزجًا بين التحليل التوافقي والغربلة والبنية الضربية لا تقديرًا أحاديًا فقط.

## ٦٢٦. الجبهة الخامسة: المجاميع الأسية والهندسة التوافقية

ملاحظة ٩٢٦. (خريطة المجاميع الأسية وفك الاقتران). **خريطة تركيبية** تجمع نتائج سابقة ولا تنشئ مبرهنة جديدة.

يعرض الفصل ٢٥ الحد الرئيسي في مبرهنة القيمة المتوسطة لفينوغرادوف بوصفه نتيجة معتمدة:

ESTABLISHED

ويفصل بين مساري التوافق الفعال وفك الاقتران. كما ترتبط هذه الأدوات بالمجاميع الأسية والطريقة الدائرية ووارينغ دون أن تعيد برهنة نتائج تلك الفصول.

تمثل الأنظمة متعددة الحدود، والمنحنيات والأسطح الأوسع، وفك الاقتران في أوضاع هندسية أقل انتظامًا ACTIVE-DIRECTION. وقد تصبح بعض الصيغ المحددة OPEN عندما يغيب الانحناء المناسب أو تتداخل المقاييس أو لا تتوافر بنية تكرارية تحفظ الكسب.

الحاجز هو أن نجاح المنحنى اللحظي لا يعمم آليًا: الرتب والتقوسات والعلاقات الجبرية تحدد شكل الحزم والتداخلات، وقد تفرض هندسة جديدة بالكامل.

## ٧٢٦. الإحصاء الحسابي: جبهة غير مكتملة التغطية

الإحصاء الحسابي وعد الحقول والامتدادات وتوزيع زمر الفئات جبهة حقيقية في نظرية الأعداد الحديثة، لكنها لا تحظى في هذه النسخة بفصل مستقل معتمد. لذلك تصنف هنا / ACTIVE-DIRECTION OPEN، ولا توسم ESTABLISHED استنادًا إلى فصول غير موجودة.

إدراجها ضروري حتى لا تنكمش الخريطة الختامية عن نطاقها السابق، لكنه إدراج صريح بحدود المعرفة داخل الموسوعة: لا تقدم هذه الفقرة أفضل نتيجة معروفة، ولا تثبت حدًا عدديًا، ولا تدعي تغطية موضوعات مثل إحصاء الحقول أو تخمينات Cohen--Lenstra. فتح فصل مستقل مستقبلًا يحتاج سجل أدلة ومصادر أولية ومراجعة مستقلة جديدة.

## ٨٢٦. الحساب الموثق بوصفه بنية مساعدة

البناء القابل للتكرار، وفحوص الجودة، والتحقق العددي عالي الدقة، وسجلات الأدلة أدوات تخدم الحالات الأربع كلها. يمكنها كشف خطأ، أو اختبار اتساق، أو استبعاد نطاق محدود، أو توثيق تجربة. لكنها ليست حالة معرفية خامسة، ولا تحول تحققًا منتهيًا إلى مبرهنة غير منتهية.

ولهذا تفصل سياسة اعتماد النتائج بين الحالات الآتية:

أما قاموس حالة الجبهات في هذا الفصل فهو:

ESTABLISHED ACTIVE-DIRECTION
CONJECTURAL-PROGRAM OPEN

لا يحل أحد القاموسين محل الآخر. والقيمة الحقيقية للحساب الموثق هي جعل الادعاء قابلًا للتدقيق وإعادة الإنتاج، لا تجاوز حدود البرهان.

## ٠.٩٢٦ ما أنجزته الموسوعة وما لم تدع إنجازه

أنجزت الموسوعة مسارًا متدرجًا من الأسس التحليلية إلى دوال زيتا و$L$، والتوزيع الأولي، والطرق الجمعية والطيفية، ثم الجبهات الحديثة في العزوم والأصفار والدوال الادعائية وVMVT. كما ثبتت هوية كل نتيجة وفق سياسة المشروع: ما برهن داخل النص، وما نقل من مصدر، وما كان مشروطًا بفرض معلن، وما بقي مؤجلًا أو في طور المسودة.

لكنها لا تدعي حل فرضية ريمان، ولا حدسية غولدباخ، ولا برنامج لانجلاندز، ولا مسائل تشاولا العامة، ولا الصيغ الكاملة للعزوم أو إحصاءات الأصفار. اكتمال بنية الكتاب لا يعني اكتمال المجال العلمي؛ بل يعني أن حدود الادعاء أصبحت مرئية ومنظمة.

## ٠.١٠٢٦ بروتوكول تحديث الخريطة

**مسألة مفتوحة ٠.١٠٢٦** (تحديث الخريطة تحت نتائج مستقبلية)**.** كيف تُحدّث خريطة الجبهات مع ظهور نتائج جديدة من غير أن تتحول إلى سجل أخبار أو أن تعيد تصنيف ورقة أولية بصمت؟

يلزم لكل تحديث: تاريخ قطع صريح، ومصدر أولي، وحالة نشر، وتحديد الجملة المتأثرة، وفحص ما إذا كان التحديث يغير حالة الجبهة أو يضيف قيدًا فقط. لا تستخدم عبارة «الأحدث» أو «أفضل نتيجة معروفة» قبل بحث محدث مستقل، ولا تتحول ورقة PREPRINT / NOT ADOPTED إلى ESTABLISHED إلا بعد تحقق النشر أو قرار حوكمي جديد.

هذا البروتوكول مطبَّق الآن حرفيًا، لا معلنًا فقط: تحمل الفصول ٢٢--٢٥ كل واحد منها بطاقة frontiercard واحدة على الأقل عند جبهته المفتوحة، بتاريخ قطع صريح وحالة نشر ومصدر أساسي، وفق الجدول التالي:

| تاريخ القطع | الجبهة المؤرَّخة | الفصل |
|---|---|---|
| ٢٩ يوليو ٢٠٢٦ | حدسية Keating--Snaith وحدود القيم المتطرفة | ٢٢ |
| ٢٩ يوليو ٢٠٢٦ | مبرهنة مونتغمري وقيد الدعم | ٢٣ |
| ٢٩ يوليو ٢٠٢٦ | متوسطات الفترات القصيرة الادعائية | ٢٤ |
| ٢٩ يوليو ٢٠٢٦ | مبرهنة القيمة المتوسطة لفينوغرادوف (VMVT) | ٢٥ |

كل بطاقة تسجّل صراحةً أنها لا تُغني عن بحث محدَّث مستقل عند القراءة، وأن أي تحديث لاحق يجب أن يستبدل تاريخ القطع لا أن يراكم بطاقات متعارضة.

## الخاتمة

تنتهي الموسوعة بهذه الخريطة لا لأن الأسئلة انتهت، بل لأن المسار صار واضحًا: نتيجة راسخة، ثم أداة، ثم حاجز، ثم سؤال مفتوح. وظيفة الفصل الأخير أن يمنع الخلط بين هذه الطبقات، وأن يترك للقارئ نقطة انطلاق صادقة نحو البحث بدل وعد غير منضبط بالحلول.

# المراجع


[Ahl79] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis*. 3rd ed. McGraw-Hill, 1979.

[Apo76] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.

[BS08] Nils A. Baas and Christian F. Skau. "The Lord of the Numbers, Atle Selberg: On His Life and Mathematics." In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 45 (2008), pp. 617–649.

[BHP01] R. C. Baker, G. Harman, and J. Pintz. "The Difference Between Consecutive Primes, II." In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 83.3 (2001), pp. 532–562. DOI: 10.1112/plms/83.3.532.

[Bal+24] Steven M. Baluyot et al. "An Unconditional Montgomery Theorem for Pair Correlation of Zeros of the Riemann Zeta Function." In: *Acta Arithmetica* 214 (2024), pp. 357–376. arXiv: 2306.04799.

[BP26] Debmalya Basak and Kyle Pratt. "A Conditional Refinement of Page's Theorem on Zeros of Dirichlet L-Functions." In: *Research in Number Theory* 12.1, 17 (2026), pp. 1–10. DOI: 10.1007/s40993-025-00695-x. arXiv: 2607.06433 [math.NT].

[Ben+26] Kübra Benli et al. "Explicit Deuring--Heilbronn Phenomenon for Dirichlet L-Functions." In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 154.2 (2026), pp. 509–525. DOI: 10.1090/proc/17450. arXiv: 2410.06082 [math.NT].

[Blo19] Valentin Blomer. "The Relative Trace Formula in Analytic Number Theory." In: *Simons Symposia* (2019).

[BB13] Valentin Blomer and Farrell Brumley. "The Role of the Ramanujan Conjecture in Analytic Number Theory." In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 50 (2013), pp. 267–320.

[Bom65] Enrico Bombieri. "On the Large Sieve." In: *Mathematika* 12.2 (1965), pp. 201–225. DOI: 10.1112/S0025579300005313.

[BD15] Jean Bourgain and Ciprian Demeter. "The proof of the $\ell^2$ Decoupling Conjecture." In: *Annals of Mathematics* 182.1 (2015), pp. 351–389. DOI: 10.4007/annals.2015.182.1.9.

[BDG16] Jean Bourgain, Ciprian Demeter, and Larry Guth. "Proof of the main conjecture in Vinogradov's Mean Value Theorem for degrees higher than three." In: *Annals of Mathematics* 184.2 (2016), pp. 633–682. DOI: 10.4007/annals.2016.184.2.7.

[Bru19] Viggo Brun. "La série $1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + \cdots$, où les dénominateurs sont ``nombres premiers jumeaux'', est convergente ou finie." French. In: *Bulletin des Sciences Mathématiques*. 2nd ser. 43 (1919), pp. 100–104, 124–128.

[Che73] Jing-Run Chen. "On the Representation of a Larger Even Integer as the Sum of a Prime and the Product of at Most Two Primes." English. In: *Scientia Sinica* 16.2 (1973), pp. 157–176. DOI: 10.1360/YA1973-16-2-157.

[CM05] Alina Carmen Cojocaru and M. Ram Murty. *An Introduction to Sieve Methods and Their Applications*. Vol. 66. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2005. DOI: 10.1017/CBO9780511615993.

[Dav00] Harold Davenport. *Multiplicative Number Theory*. 3rd ed. Revised by Hugh L. Montgomery. Springer, 2000.

[DHJ14] DHJ Polymath. “Variants of the Selberg Sieve, and Bounded Intervals Containing Many Primes.” English. In: *Research in the Mathematical Sciences* 1.12 (2014), pp. 1–83. DOI: 10.1186/s40687-014-0012-7.

[DHJ15] DHJ Polymath. “Erratum to: Variants of the Selberg Sieve, and Bounded Intervals Containing Many Primes.” English. In: *Research in the Mathematical Sciences* 2.15 (2015). DOI: 10.1186/s40687-015-0033-x.

[DS05] Fred Diamond and Jerry Shurman. *A First Course in Modular Forms*. Vol. 228. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2005. DOI: 10.1007/b138781.

[DHG08] Harold G. Diamond, H. Halberstam, and William F. Galway. *A Higher-Dimensional Sieve Method: With Procedures for Computing Sieve Functions*. Vol. 177. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2008. DOI: 10.1017/CBO9780511542909.

[DF21] Sary Drappeau and Daniel Fiorilli. “The First Moment of Primes in Arithmetic Progressions: Beyond the Siegel--Walfisz Range.” In: *Transactions of the London Mathematical Society* 8.1 (2021), pp. 174–185. DOI: 10.1112/tlm3.12030. arXiv: 2003.02201 [math.NT].

[Ell75] P. D. T. A. Elliott. “A mean-value theorem for multiplicative functions.” In: *Proceedings of the London Mathematical Society*. 3rd ser. 31 (1975), pp. 418–438.

[Ell79] P. D. T. A. Elliott. *Probabilistic Number Theory I: Mean-Value Theorems*. Springer, 1979.

[FI98] John Friedlander and Henryk Iwaniec. “Asymptotic Sieve for Primes.” In: (1998). DOI: 10.48550/arXiv.math/9811186. arXiv: math/9811186 [math.NT].

[FI10] John Friedlander and Henryk Iwaniec. *Opera de Cribro*. Vol. 57. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, 2010.

[Gal68] Patrick X. Gallagher. “Bombieri's Mean Value Theorem.” In: *Mathematika* 15.1 (1968), pp. 1–6. DOI: 10.1112/S002557930000231X.

[GM03] Stephen Gelbart and Stephen D. Miller. “Riemann's Zeta Function and Beyond.” In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 41 (2003), pp. 59–112.

[GPY09] Daniel A. Goldston, János Pintz, and Cem Y. Yıldırım. “Primes in Tuples I.” English. In: *Annals of Mathematics* 170.2 (2009), pp. 819–862. DOI: 10.4007/annals.2009.170.819.

[GK91] S. W. Graham and Grigori Kolesnik. *Van der Corput's Method of Exponential Sums*. Vol. 126. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1991. DOI: 10.1017/CBO9780511661976.

[GHS19] Andrew Granville, Adam J. Harper, and Kannan Soundararajan. “A new proof of Halász's theorem, and its consequences.” In: *Compositio Mathematica* 155.1 (2019), pp. 126–163.

[GS08] Andrew Granville and Kannan Soundararajan. “Pretentious multiplicative functions and an inequality for the zeta-function.” In: *Anatomy of Integers*. Vol. 46. CRM Proceedings & Lecture Notes. American Mathematical Society, 2008, pp. 191–197. arXiv: math/0608407.

[GM26] Larry Guth and James Maynard. “New Large Value Estimates for Dirichlet Polynomials.” In: *Annals of Mathematics* 203.2 (2026). DOI: 10.4007/annals.2026.203.2.6. arXiv: 2405.20552 [math.NT].

[Had96] Jacques Hadamard. “Sur la distribution des zéros de la fonction zeta(s) et ses conséquences arithmétiques.” In: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 24 (1896), pp. 199–220. DOI: 10.24033/bsmf.545.

[Hal68] Gábor Halász. “Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen.” In: *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 19 (1968), pp. 365–403.

[HR74] Heini Halberstam and Hans-Egon Richert. *Sieve Methods*. Vol. 4. London Mathematical Society Monographs. Academic Press, 1974.

[HL22] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. “Some Problems of Partitio Numerorum IV: The Singular Series in Waring's Problem and the Value of G(k).” In: *Mathematische Zeitschrift* 12 (1922), pp. 161–188. DOI: 10.1007/BF01482074.

[HL23] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. “Some Problems of Partitio Numerorum III: On the Expression of a Number as a Sum of Primes.” In: *Acta Mathematica* 44 (1923), pp. 1–70. DOI: 10.1007/BF02403921.

[Har13] Adam J. Harper. *Sharp Conditional Bounds for Moments of the Riemann Zeta Function.* Preprint. 2013. arXiv: 1305.4618 [math.NT].

[HS22] Winston Heap and K. Soundararajan. “Lower Bounds for Moments of Zeta and L-Functions Revisited.” In: *Mathematika* 68 (2022), pp. 1–14.

[Hea02] D. R. Heath-Brown. *Lectures on Sieves.* 2002. DOI: 10.48550/arXiv.math/0209360. arXiv: math/0209360 [math.NT].

[Hej76] Dennis A. Hejhal. *The Selberg Trace Formula for PSL(2,R), Volume I.* Vol. 548. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1976. DOI: 10.1007/BFb0079608.

[Hel15] Harald A. Helfgott. “The Ternary Goldbach Conjecture is True.” In: (2015). DOI: 10.48550/arXiv.1312.7748. arXiv: 1312.7748 [math.NT].

[Hoh30] Gustav Hoheisel. “Primzahlprobleme in der Analysis.” In: *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse* (1930), pp. 580–588.

[Hux72] M. N. Huxley. “On the Difference between Consecutive Primes.” In: *Inventiones Mathematicae* 15 (1972), pp. 164–170. DOI: 10.1007/BF01418933.

[Ike31] Shikao Ikehara. “An Extension of Landau's Theorem in the Analytical Theory of Numbers.” In: *Journal of Mathematics and Physics* 10 (1931), pp. 1–12. DOI: 10.1002/sapm19311011.

[Ing28] A. E. Ingham. “Mean-Value Theorems in the Theory of the Riemann Zeta-Function.” In: *Proceedings of the London Mathematical Society.* 2nd ser. 27 (1928), pp. 273–300.

[Ing37] A. E. Ingham. “On the Difference Between Consecutive Primes.” In: *Quarterly Journal of Mathematics.* Oxford Series os-8.1 (1937), pp. 255–266. DOI: 10.1093/qmath/os-8.1.255.

[Iwa02] Henryk Iwaniec. *Spectral Methods of Automorphic Forms.* 2nd ed. Vol. 53. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2002.

[IK04] Henryk Iwaniec and Emmanuel Kowalski. *Analytic Number Theory.* American Mathematical Society, 2004.

[IS00] Henryk Iwaniec and Peter Sarnak. “Perspectives on the Analytic Theory of L-Functions.” In: *Geometric and Functional Analysis* Special Volume, Part II (2000), pp. 705–741. DOI: 10.1007/978-3-0346-0425-3_6.

[JL70] Hervé Jacquet and Robert P. Langlands. *Automorphic Forms on GL(2).* Vol. 114. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1970. DOI: 10.1007/BFb0058988.

[Kad18] Habiba Kadiri. “An Explicit Zero-Free Region for the Dirichlet L-Functions.” In: *Mathematika* 64.2 (2018), pp. 445–474. DOI: 10.1112/S0025579318000037.

[Kar92] Anatoly A. Karatsuba. *Basic Analytic Number Theory.* Springer, 1992.

[KS99] Nicholas M. Katz and Peter Sarnak. *Random Matrices, Frobenius Eigenvalues, and Monodromy.* Vol. 45. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, 1999. DOI: 10.1090/coll/045.

[KS00] J. P. Keating and N. C. Snaith. “Random Matrix Theory and the Riemann Zeta Function.” In: *Communications in Mathematical Physics* 214 (2000), pp. 57–89.

[KY20] Rizwanur Khan and Matthew P. Young. “Moments and Hybrid Subconvexity for Symmetric-Square L-Functions.” In: (2020). arXiv: 2009.08419 [math.NT].

[KL06] Andrew Knightly and Charles Li. “A Relative Trace Formula Proof of the Petersson Trace Formula.” In: *Acta Arithmetica* 122.3 (2006), pp. 297–313. DOI: 10.4064/aa122-3-5.

[Kor06] Jaap Korevaar. “The Wiener--Ikehara Theorem by Complex Analysis.” In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 134.4 (2006), pp. 1107–1116. DOI: 10.1090/S0002-9939-05-08060-3.

[Kou13] Dimitris Koukoulopoulos. “Pretentious Multiplicative Functions and the Prime Number Theorem for Arithmetic Progressions.” In: *Compositio Mathematica* 149.7 (2013), pp. 1129–1149. DOI: 10.1112/S0010437X12000802.

[Kuz81] N. V. Kuznetsov. “Petersson's Conjecture for Cusp Forms of Weight Zero and Linnik's Conjecture: Sums of Kloosterman Sums.” In: *Mathematics of the USSR-Sbornik* 39.3 (1981), pp. 299–342. DOI: 10.1070/SM1981v039n03ABEH001518.

[Lan70] Robert P. Langlands. “Problems in the Theory of Automorphic Forms.” In: *Lectures in Modern Analysis and Applications III*. Vol. 170. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1970, pp. 18–61. DOI: 10.1007/BFb0079065.

[Lan71] Robert P. Langlands. *Euler Products*. Vol. 1. Yale Mathematical Monographs. Yale University Press, 1971.

[Li25] Runbo Li. “The Number of Primes in Short Intervals and Numerical Calculations for Harman's Sieve.” In: (2025). Preprint, version 8, revised 16 October 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2308.04458. arXiv: 2308.04458 [math.NT].

[Liu22] Zihao Liu. “A Simple Proof of Siegel's Theorem Using Mellin Transform.” In: (2022). Preprint. DOI: 10.48550/arXiv.2202.00635. arXiv: 2202.00635 [math.NT].

[LS80] J. H. Loxton and J. W. Sanders. “On an Inversion Theorem of Mobius.” In: *Journal of the Australian Mathematical Society* 30 (1980), pp. 15–32.

[Mar04] Jens Marklof. “Selberg's Trace Formula: An Introduction.” In: (2004). arXiv: math/0407288 [math.SP].

[MR16] Kaisa Matomäki and Maksym Radziwiłł. “Multiplicative functions in short intervals.” In: *Annals of Mathematics* 183.3 (2016), pp. 1015–1056.

[May15] James Maynard. “Small Gaps Between Primes.” English. In: *Annals of Mathematics* 181.1 (2015), pp. 383–413. DOI: 10.4007/annals.2015.181.1.7.

[McC84] Kevin S. McCurley. “Explicit Zero-Free Regions for Dirichlet L-Functions.” In: *Journal of Number Theory* 19.1 (1984), pp. 7–32. DOI: 10.1016/0022-314X(84)90089-1.

[Meh04] Madan Lal Mehta. *Random Matrices*. 3rd ed. Elsevier Academic Press, 2004.

[MV10] Philippe Michel and Akshay Venkatesh. “The Subconvexity Problem for GL2.” In: *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 111 (2010), pp. 171–271. DOI: 10.1007/s10240-010-0025-8. arXiv: 0903.3591 [math.NT].

[Miy06] Toshitsune Miyake. *Modular Forms*. 2nd ed. Springer, 2006. DOI: 10.1007/3-540-29593-3.

[Mon73] Hugh L. Montgomery. “The Pair Correlation of Zeros of the Zeta Function.” In: *Analytic Number Theory*. Vol. 24. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. American Mathematical Society, 1973, pp. 181–193. DOI: 10.1090/pspum/024/9944.

[MV07] Hugh L. Montgomery and Robert C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*. Vol. 97. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2007.

[MV26] Hugh L. Montgomery and Robert C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory II: Primes and Sieves*. Vol. 218. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2026. ISBN: 9781009445054. DOI: 10.1017/9781009445030.

[Nar00] Wladyslaw Narkiewicz. *The Development of Prime Number Theory*. Springer, 2000.

[New80] Donald J. Newman. “Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem.” In: *The American Mathematical Monthly* 87 (1980), pp. 693–696.

[Odl87] Andrew M. Odlyzko. “On the Distribution of Spacings between Zeros of the Zeta Function.” In: *Mathematics of Computation* 48.177 (1987), pp. 273–308. DOI: 10.1090/S0025-5718-1987-0866115-0.

[Pet32] Hans Petersson. “Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen.” In: *Acta Mathematica* 58 (1932), pp. 169–215. DOI: 10.1007/BF02547776.

[RS13] Maksym Radziwiłł and K. Soundararajan. “Continuous Lower Bounds for Moments of Zeta and L-Functions.” In: *Mathematika* 59.1 (2013), pp. 119–128.

[Rie59] Bernhard Riemann. “Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe.” In: *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1859), pp. 671–680.

[RS96] Zeév Rudnick and Peter Sarnak. “Zeros of Principal L-Functions and Random Matrix Theory.” In: *Duke Mathematical Journal* 81.2 (1996), pp. 269–322. DOI: 10.1215/S0012-7094-96-08115-6.

[Sel56] Atle Selberg. “Harmonic Analysis and Discontinuous Groups in Weakly Symmetric Riemannian Spaces with Applications to Dirichlet Series.” In: *Journal of the Indian Mathematical Society* 20 (1956), pp. 47–87.

[Sha72] Harold N. Shapiro. “On the Convolution Ring of Arithmetic Functions.” In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 25 (1972), pp. 287–336.

[Sie35] Carl Ludwig Siegel. “Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper.” In: *Acta Arithmetica* 1.1 (1935), pp. 83–86. DOI: 10.4064/aa-1-1-83-86.

[Sou09] K. Soundararajan. “Moments of the Riemann Zeta Function.” In: *Annals of Mathematics* 170.2 (2009), pp. 981–993.

[Sou21] Kannan Soundararajan. “The Distribution of Values of Zeta and L-functions.” In: (2021). ICM survey, arXiv:2112.03389.

[Sta10] John G. Stalker. *Complex Analysis: Fundamentals of the Classical Theory of Functions.* Birkhauser, 2010.

[Ten15] Gérald Tenenbaum. *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory.* 3rd ed. Vol. 163. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2015.

[TZ24] Jesse Thorner and Asif Zaman. “Refinements to the Prime Number Theorem for Arithmetic Progressions.” In: *Mathematische Zeitschrift* 306.3, 54 (2024). DOI: 10.1007/s00209-023-03414-3. arXiv: 2108.10878 [math.NT].

[Tit86] E. C. Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-Function.* 2nd ed. Revised by D. R. Heath-Brown. Oxford University Press, 1986.

[Tot13] Laszlo Toth. “Multiplicative Arithmetic Functions of Several Variables: A Survey.” In: (2013). Survey on multiplicative functions and related convolutions.

[TY24] Timothy S. Trudgian and Andrew Yang. “Toward Optimal Exponent Pairs.” In: (2024). DOI: 10.48550/arXiv.2306.05599. arXiv: 2306.05599 [math.NT].

[Val96] Charles-Jean de la Vallée Poussin. “Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Première partie.” In: *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* 20 (1896), pp. 183–256.

[Vau97] R. C. Vaughan. *The Hardy--Littlewood Method.* 2nd ed. Vol. 125. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1997.

[Vau75] Robert C. Vaughan. “Mean Value Theorems in Prime Number Theory.” In: *Journal of the London Mathematical Society.* 2nd ser. 10.2 (1975), pp. 153–162. DOI: 10.1112/jlms/s2-10.2.153.

[Vin65] A. I. Vinogradov. “The Density Hypothesis for Dirichlet L-Series.” In: *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* 29.4 (1965). MathNet: im3080; MR 0197414, pp. 903–934.

[Vin66] A. I. Vinogradov. “Correction to the Paper ``The Density Hypothesis for Dirichlet L-Series''.” In: *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* 30.3 (1966). MathNet: im2856, pp. 719–720.

[Vin37] I. M. Vinogradov. “Representation of an Odd Number as the Sum of Three Primes.” In: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 15 (1937), pp. 129–132.

[Wie30] Norbert Wiener. “Generalized Harmonic Analysis.” In: *Acta Mathematica* 55 (1930), pp. 117–258. DOI: 10.1007/BF02546511.

[Woo12] Trevor D. Wooley. “Vinogradov's mean value theorem via efficient congruencing.” In: *Annals of Mathematics* 175.3 (2012), pp. 1575–1627. DOI: 10.4007/annals.2012.175.3.12.

[Woo16] Trevor D. Wooley. “The cubic case of the main conjecture in Vinogradov's mean value theorem.” In: *Advances in Mathematics* 294 (2016), pp. 532–561. DOI: 10.1016/j.aim.2016.02.033.

[Woo19] Trevor D. Wooley. “Nested efficient congruencing and relatives of Vinogradov's mean value theorem.” In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 118.4 (2019), pp. 942–1016. DOI: 10.1112/plms.12204.

[Zha14] Yitang Zhang. “Bounded Gaps Between Primes.” English. In: *Annals of Mathematics* 179.3 (2014), pp. 1121–1174. DOI: 10.4007/annals.2014.179.3.7.

# فهرس العلماء


أبيل، نيلس هنريك, ٢٢, ٥٧
أويلر، ليونهارت, ٤, ٤٣, ٥٩, ١٠٣, ١١٥, ١٢١, ١٣٧, ٢١٤, ٢٢٠
باربان، ماريوس, ١٤٨, ١٦٠, ١٦٨
برون، فيغو, ١٧٧
بواسون، سيمون دني, ٩٣, ١٩٩
بورغين، جان, ٢٥٠
بومبييري، إنريكو, ١١٨, ١٤٨, ١٦٠, ١٦٨, ١٧٦
بيترسون، هانس, ٢١٠, ٢٢٨, ٢٥٨
بيرون، أوسكار, ١٠٨, ٢٠٧, ٢٣٢
تاو، تيرنس, ١٠٨, ١١٨, ١٧٦
جاكوبي، كارل غوستاف, ٦٨
دافنبورت، هارولد, ١٠٣, ١١٧, ١٢٧, ١٣٣, ١٤٠, ١٤٨, ١٦٠, ١٦٨
دي لا فاليه بوسان، شارل جان, ٧٧, ١٠٨
ديريشليه، يوهان بيتر غوستاف, ٤, ٥٣, ٨٣, ١٠٣, ١٠٨, ١١٨, ١٣٩, ١٤٨, ١٦٠, ٢٢١, ٢٣١, ٢٤٨
ديمتر، تشيبرين, ٢٥٠
ريمان، برنهارد, ٤, ٦٦, ٩٩, ١١٨, ١٦٠, ١٨٨, ٢٣١, ٢٣٨, ٢٦٠
زيغل، كارل لودفيغ, ١١٨
سارناك، بيتر, ٢٢٤, ٢٣٩
ستيرلينغ، جيمس, ٧١
سيلبرغ، أتله, ١٠٨, ١٦٨, ١٧٦, ٢١٠, ٢٢٠, ٢٥٨
غاوس، كارل فريدريش, ٩٢, ١٥٠
غوث، لاري, ٢٠١, ٢٥٠
غولدباخ، كريستيان, ١٨٢, ٢٠٠, ٢٥٧
فان دير كوربوت، يوهانس, ١٨٧, ١٩٠
فوجان، روبرت, ١٠٣, ١١٧, ١٢٧, ١٤٠, ١٤٩, ١٦٤, ١٨٥, ١٩٦
فون مانغولت، هانس, ٤٦, ٦١, ٧٢
فينوغرادوف، إيفان ماتفييفيتش, ١٤٨, ١٦٠, ١٦٨, ١٨٢, ٢٥٠, ٢٥٩
كاتس، نيكولاس, ٢٣٩
كوزنتسوف، نيكولاي, ٢١٠, ٢٢٦, ٢٥٨
كوشي، أوغستان لوي, ٣٠
كيتنغ، جون, ٢٣١
لاندو، إدموند, ١٨, ١٠١, ١٩٤, ٢٣٣
لانغلاندز، روبرت, ٢٢٣
ليتلوود، جون إدنسور, ١٨٨, ٢٣٣
ماينارد، جيمس, ١٧٦, ٢٠١
مونتغمري، هيو, ١٠٣, ١١٧, ١٢٧, ١٤٠, ١٤٩, ١٦٠, ١٩٦, ٢٣٣, ٢٣٨
ميلين، يلمار, ٦٩
هادامار، جاك, ٧٥, ١٠٨, ١٢٨
هاردي، غودفري هارولد, ٧٣, ١٨٨, ٢٣٣
هالبرستام، هيني, ١٤٨, ١٦٠, ١٦٨, ١٨٠
هيلبرت، دافيد, ٢٤٧
وارينغ، إدوارد, ١٨٢, ٢٠٠, ٢٥٠, ٢٥٧
والفيش، أرنولد, ١١٨
وولي، تريفور, ٢٥٠

# فهرس النظريات والنتائج


Baker--Harman--Pintz, ٢٠٦
Goldston--Pintz--Yıldırım, ١٧٩
Guth--Maynard, ٢٠٥
Harper، إزالة خسارة $\varepsilon$, ٢٣٥
Ingham، العزم الرابع, ٢٣٤
Kuznetsov، النواة ذات الإشارة المتساوية, ٢١٦
Maynard, ١٨٠
Michel--Venkatesh, ٢٢٦
Soundararajan، حد علوي مشروط, ٢٣٤
Wiener--Ikehara، صيغة المتسلسلات الديريشلية, ١١٢
Zhang, ١٧٩
اختبار المشتقة الأولى, ١٩٥
اختبار المشتقة الثانية الكلاسيكي, ١٩٦
اختيار الارتفاع اللوغاريتمي, ١٤٠
استمرار دالة $L$ غير الرئيسية إلى $\Re(s) > 0$, ٨٧
الأصفار البديهية لدالة زيتا, ٧٠
الأصفار البديهية والشريط الحرج لدوال ديريشليه $L$, ٩٥
الأصفار القريبة من الواحد والجد البدائي, ١٢٩
الإبعاد غير الفعال للصفر الاستثنائي, ١٣٤
الاستمرار التحليلي والمعادلة الوظيفية لـ$GL(2)$, ٢٢٤
الاستمرار العالمي والمعادلة الوظيفية لدالة $L$, ٩٤
الاستمرار الميرومورفي والمعادلة الوظيفية لزيتا, ٦٩
البعد الغربالي للأزواج, ١٧٣
التوزيع المنتظم لعدد الأوليات, ١٤٤
التوزيع المنتظم للدالة $\vartheta$, ١٤٣
التوسع عند الرأس, ٢١٢
الجد البدائي وموصل شخصية ديريشليه, ٩٠
الجمع الجزئي المنفصل, ١٩٢
الحد التافه, ١٩١
الحد العلوي المنتهي لغربال سيلبرغ, ١٧٠
الحد المنشور لـPolymath8b, ١٨٠
الخواص الجبرية للالتفاف الديريشلي, ٤٠
الصيغة التقاربية الكلاسيكية في وارينغ، مقتبسة, ١٨٧
الصيغة الصريحة الكمية بعد عزل الاستثناء, ١٤٠
الصيغة المكافئة بدالة تشيبيشيف الأولى, ١١٤
الصيغة الموزونة على الأوليات فقط, ١٢٣
العزم الثاني لدالة زيتا, ٢٣٣
الغربال الكبير بوزن الموصل, ١٦٤
الغربال الكبير للشخصيات والنسخة الثنائية العظمى, ١٤٩
الكثافة المحلية للأزواج, ١٧٣
المبرهنة الرئيسية للقيمة المتوسطة لفينوغرادوف, ٢٥٣
المتراجحة الموزونة للمشتقات اللوغاريتمية, ١٢٠
المتراجحة الموزونة للمشتقة اللوغاريتمية, ١١١
المشتقة اللوغاريتمية لدالة زيتا, ٦١
المصدران البنيويان للحد الرئيسي, ٢٥٢
المعادلة الوظيفية الكلاسيكية لدالة زيتا, ٧٠
المنتج الأويلري للدالة الضربية, ٥٩
المنتج الأويلري وعدم انعدام دالة $L$ في $\Re(s) > 1$, ٨٦
المنطقة القياسية والاستثناء الحقيقي, ١٣١
النسخة الموافقة لـ$\pi$, ١٥٧
النسخة الموافقة لـ$\vartheta$, ١٥٧
امتداد سلسلة الفئة بعد طرح القطب, ١٢٢
امتصاص حد الصفر الاستثنائي, ١٤١

بنية الحد الرئيس على الأقواس الكبرى، مقتبسة, ١٨٥
بوليا--فينوغرادوف للشخصيات البدائية, ١٥٠
بومبييري--فينوغرادوف, ١٥٥
تحديد الدالة الضربية على القوى الأولية, ٣٩
تعامد الدوال الأسية, ١٨٣
تعامد الشخصيات في زمرة أبيلية منتهية, ٨٤
تعامد شخصيات ديريشليه, ٨٥
تفكيك سلسلة الفئة بواسطة الشخصيات, ١١٩
تفكيك مجاميع فون مانغولت, ١٥٢
تقارب مجموع مقلوبات الأزواج الأولية, ١٧٨
تقدير مقام سيلبرغ في البعد $\kappa$, ١٧٢
تقديرات Type I, ١٥٣
تقديرات Type II, ١٥٣
تقديرات كوشي, ٣١
تقريبًا كل الترديدات, ١٥٧
تماثلات أولية, ٢١٥
تمامية دالة ريمان $\xi$ وتناظرها, ٧٠
تمثيل أبيل لسلسلة ديريشليه, ٥٧
تمثيل المشتقة اللوغاريتمية بواسطة $\psi$, ١١٠
توافق جذري العدد في المعادلة الوظيفية, ٩٧
جداء هادامار القانوني لدالة $\xi$, ٧٥
جسر منضبط إلى التطبيقات, ٢٥٤
حاصل أويلر في النواة غير المتشعبة, ٢٢٢
حد GUE المحلي ونواة الجيب, ٢٤١
حد Weil, ٢١٦
حد الأزواج المنخولة, ١٧٤
حد التحدب, ٢٢٥
حد التحدب الكلاسيكي لدالة زيتا, ٧٢
حد الفترة يعطي حد الفجوة, ٢٠٦
حد المشتقة قرب الواحد, ١٣٤
حد باربان--دافنبورت--هالبرستام الكلاسيكي, ١٦٦
حد تشيبيشيف ولمّة القوى الأولية العليا, ١٠٩
حد دو لا فاليه بوسان لمبرهنة الأعداد الأولية, ١٤٠
حد علوي للأزواج الأولية ذات فرق ثابت, ١٧٧
حد وزن الموصل, ١٦٢
حدود دنيا مستمرة للعزوم, ٢٣٥
حصار العد غير الموزون, ٢٠٤
خريطة الأثر في الصيغة الصريحة, ١٣٥
خصائص المسافة الادعائية الأساسية, ٢٤٦
رد مجموع فون مانغولت إلى الشخصية البدائية, ١٣٩
سلامة تعريف حاصل Petersson, ٢١٣
صيغة Petersson للمستوى 1, ٢١٦
صيغة Selberg: النموذج المدمج, ٢١٧
صيغة الجمع الجزئي, ٢٢
صيغة الجمع الجزئي لأبيل, ٢٢
صيغة القيمة المتوسطة, ٢٣٣
صيغة المشتقة اللوغاريتمية بمجموع على الأصفار, ١٣٠
صيغة بواسون على فئة حسابية, ٩٣
صيغة تقريبية متناظرة لدالة زيتا, ٢٣٢
صيغة ريمان--فون مانغولت, ٧٣
صيغة ستيرلينغ المنتظمة في شريط رأسي, ٧١
صيغة سيغل--فالفش اللوغاريتمية, ١٤٣
صيغة عامة للّمة الأساسية, ١٧٢
صيغة فون مانغولت الصريحة, ٧٦
صيغة قلب موبيوس, ٤٣
صيغة كوشي التكاملية, ٣١
ضبط الباقي المنتظم, ١٣٠
ضبط القوى الأولية العليا, ١٠٤
ضبط القوى العليا في فترة قصيرة, ٢٠٤
ظاهرة Deuring--Heilbronn، صيغة نوعية, ١٣٥
عدم الانعدام على $\Re(s) = 1$, ١٢١
عدم انعدام $L(1, \chi)$ للشخصيات الحقيقية, ١٠٢
عدم انعدام $L(1, \chi)$ للشخصيات غير الرئيسية, ٩٩
عدم انعدام $L(1, \chi)$ للشخصية غير الحقيقية, ١٠٠
علاقات Hecke الأساسية, ٢١٤
عملية $A$ في النسخة المحدودة, ١٩٨
عملية $B$ في إطار الأزواج الأسية, ١٩٩
غولدباخ الثلاثي، هلفغوت، مقتبس, ١٨٨
فرادة معاملات سلسلة ديريشليه, ٥٨
فصل المتغيرات وتوسع Fourier--Whittaker, ٢١٥
فصل مجموع غاوس للشخصية البدائية, ٩٢

فك الاقتران الحاد والجسر إلى VMVT, ٢٥٣
فينوغرادوف، مقتبس, ١٨٨
كلفة تصحيحات الاستحثاث, ١٦٣
لمّة كوسمين--لانداو المنفصلة, ١٩٤
مبدأ القيمة العظمى, ٣١
مبدأ لاندو لسلسلة ذات معاملات غير سالبة, ١٠١
مبرهنة Hadamard--de la Vallée Poussin النوعية, ١١١
مبرهنة Landau--Page النوعية, ١٣٣
مبرهنة Siegel, ١٣٤
مبرهنة الأعداد الأولية, ٣, ١١٤
مبرهنة الأعداد الأولية الموزونة في فئة ثابتة, ١٢٢
مبرهنة الأعداد الأولية بصيغة فون مانغولت, ١١٣
مبرهنة الأعداد الأولية في متتالية حسابية ثابتة, ١٢٣
مبرهنة القيمة المتوسطة للشخصيات البدائية, ١٥٤
مبرهنة تشن, ١٧٨
مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية, ١٠٦
مبرهنة سيغل--فالفش في صيغة $\psi$, ١٤٢
مبرهنة كوشي, ٣٠
متباينة فرق فان دير كوربوت, ١٩٣
متراجحة المربع, ١٦٩
متراجحة ديريشليه المثلثية, ٩٩
مرشح الفئة بالشخصيات, ١٠٣
مساهمة الشخصيات غير الرئيسية, ١٠٥
مساهمة الشخصية الرئيسية, ١٠٥
معيار الإلغاء المتوسط, ٢٤٧
معيار وجود المعكوس الديريشلي, ٤١
منطقة دي لا فاليه بوسان الخالية من الأصفار, ٧٧
مونتغمري: الجزء المثبت من الارتباط الثنائي, ٢٤٠
نسخة الأطوار, ١٩٣
نصف مستوى التقارب والهولومورفية, ٥٥
نقل حد خطأ معطى إلى فرق قصير, ٢٠٣
هالاش: حد المتوسط الطويل, ٢٤٧
هويات الفعل وثبات القياس, ٢١١
هوية التباين بالشخصيات, ١٦١
هوية التعامد وعد حلول نظام فينوغرادوف, ٢٥١
هوية عد التمثيلات, ١٨٣
هوية فرق فون مانغولت, ٢٠٢
هوية فوغان, ١٥١
هوية قياس التكامل المفرد, ١٨٦
واقعية دالة هاردي, ٧٣

# فهرس الرموز والمصطلحات


أربعة أهداف مختلفة, ٢٠٢
أشكال ماس, ٢١٤
أمثلة أساسية, ٢٤٨
أمثلة تفسيرية, ١٤٦
إحصاء أصفار دالة زيتا والمصفوفات العشوائية, ٢٣٨
إزالة القطب عند الواحد, ١١٣
إزالة القوى الأولية العليا, ١٢٣, ٢٠٣
اختبار المشتقة الأولى, ١٩٤
اختبار المشتقة الثانية, ١٩٦
اختراق Zhang, ١٧٩
اختيار ارتفاع القطع وضبط الجزء غير الاستثنائي, ١٤٠
الأثر في توزيع الأوليات, ١٣٥
الأخطاء ومستوى التوزيع, ١٤٩
الأزواج الأسية: لغة لضغط التقديرات, ١٩٧
الأشكال المعيارية الهولومورفية, ٢١٢
الأشكال المعيارية وأشكال ماس وصيغ التتبع, ٢١٠
الأعداد شبه الأولية ومبرهنة تشن, ١٧٨
الأوليات في الفترات القصيرة, ٢٠١
الأوليات والبنى الجمعية, ٢٥٧
الإحصاء الحسابي: جبهة غير مكتملة التغطية, ٢٥٩
الادخار اللوغاريتمي الاعتباطي, ١٤٣
الارتباط الثنائي واتفاقية فورييه, ٢٣٩
الالتفاف الديريشلي, ٤٠
الانتقال إلى $\pi(x;q,a)$, ١٤٤
الانتقال إلى $\vartheta(x;q,a)$, ١٤٣
الانتقال إلى $\vartheta$ و$\pi$, ١١٤
الانتقال إلى دالة العد, ١٢٣
الانتقال إلى عائلات دوال $L$, ٢٣٦
الانتقال من $\vartheta$ إلى $\pi$, ٢٠٤
البعد الغربالي ومقام سيلبرغ, ١٧١
البنية المحلية والأرخميدية للحد الرئيس, ١٨٤
التذبذب الضربي, ٢٥٨
التكافؤ التقاربي $\sim$, ٢٠
التمثيل العالمي وبياناته المحلية, ٢٢٦
التوسيط وتحويل التباين إلى الشخصيات, ١٦١
الجبهة المفتوحة, ٢٤٣, ٢٤٨, ٢٥٤
الجداء القانوني لهادامار, ٧٥
الجسر إلى وارينغ والمجاميع الأسية, ٢٥٤
الجمع الجزئي ونقل الأوزان, ١٩٢
الحدود الدنيا غير المشروطة, ٢٣٥
الحدود المفتوحة, ١٦٧
الحساب الموثق بوصفه بنية مساعدة, ٢٥٩
الدالة الضربية, ٣٩
الدالة المكتملة والمشتقة اللوغاريتمية, ١٣٠
الدالة المكتملة والمعادلة الوظيفية, ٢٢٤
الدالة الهولومورفية, ٢٩
الدليل العددي: ما يثبته وما لا يثبته, ٢٤٢
الدوال الضربية الادعائية, ٢٤٥
الدوال الضربية والمتوسط الطويل, ٢٤٥
الرد إلى الجد البدائي, ١٣٩
الرد إلى الشخصية البدائية, ١٢٩
الرد إلى النمطين الأول والثاني, ١٥٢
السجل التقاربي الحديث, ٢٠٥
الشخصية البدائية, ٩٠
الشخصية الرئيسية $\chi_0$, ٨٨
الشريط الحرج, ٧١
الصفر الاستثنائي وموضع استعمال مبرهنة سيغل, ١٤١
الصيغة المركزية في الفئة, ١٢٢

الصيغة المركزية لمبرهنة الأعداد الأولية, ١١٣
الطريقة الدائرية ومدخل إلى غولدباخ وواريغ, ١٨٢
العزم الثاني, ٢٣٣
العزم الرابع: صيغة Ingham, ٢٣٤
العوامل المحلية, ٢٢٣
الغربال الكبير الموزون, ١٦٤
الفضاء العلوي والهندسة الزائدية, ٢١١
الفعالية وعدم الفعالية, ١٤٥
الفواصل وتباين العدد وإحصاءات المستويات, ٢٤٢
القيم الكبيرة والمتطرفة, ٢٣٦
القيم والأصفار, ٢٥٧
الكثافات المحلية وإيجابية السلسلة المفردة, ١٨٦
اللمّة الأساسية وحدودها, ١٧٢
المتراجحة الموزونة, ١٣١
المتراجحة الموزونة لدوال $L$, ١٢٠
المتراجحة الموزونة لزيتا, ١١١
المجاميع الأسية والهندسة التوافقية, ٢٥٩
المجاميع الأسية وطريقة فان دير كوربوت, ١٩٠
المجموع الأسي ومعنى الإلغاء, ١٩١
المسار الأولي المنفصل, ١١٥
المسار التاريخي: من Hoheisel إلى Huxley, ٢٠٥
المسار المؤجل وعائق التصادمات الضربية, ١٦٦
المسافة الادعائية, ٢٤٦
المستوى الأول, ١١٦, ١٢٦, ٢٠٨, ٢١٩, ٢٢٩
المستوى الثالث, ١١٧, ١٢٦, ٢٠٩, ٢١٩, ٢٢٩
المستوى الثاني, ١١٦, ١٢٦, ٢٠٨, ٢١٩, ٢٢٩
المشتقة اللوغاريتمية $-L'/L$, ٩٨
المشتقة اللوغاريتمية لدالة زيتا, ٦١
المشتقة اللوغاريتمية وتمثيل ستيلتج, ١١٠
المعادلة الوظيفية التقريبية, ٢٣٢
المعكوس الديريشلي, ٤١
المقياس التحليلي وثلاثة معاني للفرادة, ١٢٩
المناطق الخالية من الأصفار والأصفار الاستثنائية, ١٢٨
المنطقة القياسية الخالية, ١٣١
الموصل الحسابي والموصل التحليلي, ٢٢٤
الموصلات الصغيرة, ١٦٥
الموصلات الكبيرة, ١٦٥
النماذج الطورية ومقياس أفضل اقتراب, ٢٤٧
الوزن الحرج والحدود الدنيا البنيوية, ٢٥٢
بيانات الغربال المجردة, ١٦٩
تباعد مجموع مقلوبات الأوليات, ١٠٦
تحسين Polymath8b, ١٨٠
تحويل فورييه المنتهي, ٩٢
ترديد الشخصية $q$, ٨٥
تركيب العمليتين وحدود الاستخدام, ٢٠٠
تشريح الدائرة: الأقواس الكبرى والأقواس الصغرى, ١٨٤
تطبيق: الأزواج المنخولة, ١٧٣
تطبيقات الغربال والفجوات بين الأعداد الأولية, ١٧٦
تعريف العزوم وتطبيعها, ٢٣٢
تقدير النمط الأول, ١٥٣
تقدير النمط الثاني, ١٥٣
تقريبًا كل فترة, ٢٠٧
تكامل ستيلتج, ٢٥
ثلاث طبقات يجب عدم خلطها, ١٣٨
جذر العدد $\varepsilon(\chi)$, ٩٧
حاصل Petersson, ٢١٣
حاصل أويلر من علاقات هيكه, ٢٢٢
حاصل ضرب أويلر, ٢, ٥٩
حد التحدب, ٢٢٥
حد تشيبيشيف وضبط القوى الأولية العليا, ١٠٩
حد علوي للأزواج الأولية, ١٧٧
حدسية Keating--Snaith, ٢٣٥
حدسية الارتباط الثنائي الكاملة, ٢٤٠
حدود الادعاء, ١٥٩
حدود الاستدلال, ٢٤٣, ٢٤٨
حدود الفعالية, ١٣٦
حدود عليا عامة تحت فرضية ريمان, ٢٣٤
حزمة الغربال الكبير, ١٤٩
حل مسألة التصغير المنتهية, ١٧٠
خريطة الاعتماد المنطقي, ١١٥, ١٢٥
خريطة الاعتماد وحدود الادعاء, ١٨١

خريطة الجبهات البحثية الحديثة, ٢٥٦
دالة $L(s,\chi)$, ٨٦
دالة $L$ المكتملة $\Lambda(s,\chi)$, ٩٤
دالة أويلر $\varphi$, ٤٣
دالة بيتا لديريشليه, ٩٦
دالة ثيتا $\Theta(t)$, ٦٨
دالة ريمان $\xi(s)$, ٧٠
دالة زيتا المكتملة $\Lambda_\zeta(s)$, ٦٩
دالة زيتا لريمان, ٢
دالة زيتا لريمان $\zeta(s)$, ٦٦
دالة عد الأصفار $N(T)$, ٧٢
دالة غاما $\Gamma(s)$, ٦٨
دالة فون مانغولت $\Lambda$, ٤٦
دالة موبيوس $\mu$, ٤٢
دالة هاردي $Z(t)$, ٧٣
دوال $L$ الآلية، دون التحدب، ومدخل إلى لانجلاندز, ٢٢٠
دوال $L$ والطيف, ٢٥٨
دوال العد في فئة حسابية, ١١٩
دوال العد والمرشح بالشخصيات, ١٣٩
دوال ديريشليه $L$, ٨٣
دوال عد الأوليات, ١٠٩
رد الشخصيات إلى الموصلات, ١٦٢
رمز لاندو الصغير $o$, ١٩
رمز لاندو الكبير $O$, ١٨
سلسلة ديريشليه, ٥٤
سلسلة فون مانغولت في الفئة, ١١٩
شخصية ديريشليه $\chi$, ٨٥
صيغة Kuznetsov, ٢١٦
صيغة Petersson, ٢١٦
طرق الغربال الأساسية وغربال سيلبرغ وعائق التكافؤ, ١٦٨
طريقة GPY: فجوات أصغر من المتوسط, ١٧٩
ظاهرة Deuring--Heilbronn, ١٣٥
عائق التكافؤ, ١٧٥
عائق التكافؤ بعد الفجوات المحدودة, ١٨٠
عائلات دوال $L$ وأنواع التناظر, ٢٤٢
عد الأصفار والمقياس المحلي, ٢٣٩
عدم انعدام دوال $L$ على الخط الواحد, ١٢١
عدم وجود أصفار على الخط $\Re(s)=1$, ١١١
عزل قطب الشخصية الرئيسية, ١٢٢
عزوم دالة زيتا والقيم الكبيرة والمتطرفة, ٢٣١
عملية $A$: التفريق وخفض درجة الطور, ١٩٧
عملية $B$: التحويل الثنائي والطور الساكن, ١٩٩
عنصر الوحدة للالتفاف الديريشلي, ٤١
غربال Maynard--Tao متعدد الأبعاد, ١٧٩
غولدباخ الثنائية: الحد الفاصل بين المبرهنة والحدس, ١٨٨
فاصل التقارب $\sigma_c$, ٥٦
فاصل التقارب المطلق $\sigma_a$, ٥٦
فترة أقصر بنتيجة أضعف نوعيًا, ٢٠٦
فجوات الأوليات والكميات $H_m$, ١٧٧
فرضية ريمان, ٧٨
فرضية ريمان المعممة لدوال ديريشليه, ٩٩
فروق دوال تشيبيشيف, ٢٠٢
فصل الشخصية الرئيسية, ١٠٥
فصل الموصلات, ١٦٤
فك الاقتران والتوافق الفعّال: مبرهنة القيمة المتوسطة لفينوغرادوف, ٢٥٠
قاموس الحالات وحدود الاستعمال, ٢٥٦
قراءة النتيجة وحدودها, ١٤٥
قياس التكامل المفرد, ١٨٦
قيمة متوسطة لكثيرات حدود ديريشليه, ٢٣٣
كيف تتصل الفصول السابقة بهذا الفصل؟, ٢٢٨
كيف تخدم الصيغ نظرية الأعداد التحليلية؟, ٢١٨
لماذا المجال لوغاريتمي؟, ١٤٥
لوغاريتم المنتج الأويلري, ١٠٤
مؤثرات Hecke, ٢١٤
ما الذي أضيف إلى الفصل العاشر؟, ١٤٥
ما الذي أنجزته الطريقة الدائرية؟, ١٨٨
ما الذي تصنعه الصيغة الصريحة؟, ٢٠٧
ما الذي لم يثبت؟, ١٢٤
ما معنى دون التحدب؟, ٢٢٥
ماذا تعني النتيجة؟, ١٢٤
ماذا يعني الادعاء؟, ٢٤٨
مبدأ نقل حد الخطأ, ٢٠٣
مبرهنة Landau--Page, ١٣٣
مبرهنة Michel--Venkatesh, ٢٢٦
مبرهنة Siegel وعدم الفعالية, ١٣٤
مبرهنة Wiener--Ikehara, ١١٢
مبرهنة الأعداد الأولية, ١٠٨

مبرهنة الأعداد الأولية في المتتاليات الحسابية, ١١٨
مبرهنة القيمة المتوسطة الرئيسية, ٢٥٣
مبرهنة باربان--دافنبورت--هالبرستام في المجال الكلاسيكي, ١٦٦
مبرهنة باربان--دافنبورت--هالبرستام ومتوسط التباين التربيعي, ١٦٠
مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف, ١٥٥
مبرهنة بومبييري--فينوغرادوف والتوزيع المتوسطي للأعداد الأولية, ١٤٨
مبرهنة ديريشليه للأوليات في المتتاليات الحسابية, ١٠٣
مبرهنة سيغل--فالفش, ١٤٢
مبرهنة سيغل--فالفش والتوزيع المنتظم للأعداد الأولية, ١٣٨
مبرهنة مونتغمري ومجال الدعم, ٢٤٠
مبرهنة هالاش الكمية, ٢٤٧
متباينة فرق فان دير كوربوت, ١٩٢
متراجحة بوليا--فينوغرادوف, ١٥٠
متراجحة سيلبرغ التربيعية, ١٦٩
متوسط مجاميع الشخصيات, ١٥٢
مثال تفسيري, ١٥٨
مجاميع Kloosterman, ٢١٥
مجموع برون, ١٧٨
مجموع غاوس $\tau(\chi)$, ٩٢
مجموع فينوغرادوف والقيمة المتوسطة, ٢٥١
مدخل بنيوي إلى صيغة Selberg, ٢١٧
مدخل غولدباخ الثلاثي, ١٨٧
مدخل منضبط إلى برنامج لانجلاندز, ٢٢٧
مدخل وارينغ, ١٨٧
مدخلان مقتبسان من النظرية الكمية, ١٤٠
مرشح الفئة الحسابية, ١٠٣
مسار التوافق الفعّال, ٢٥٣
مسار فك الاقتران للمنحنى اللحظي, ٢٥٣
معادلات كوشي--ريمان, ٢٩
مقارنة الصيغ الثلاث, ٢١٨
مقارنة النتائج الثلاث, ١٥٨
مقلوب دالة زيتا وسلسلة موبيوس, ٦٠
ملاحظات ختامية وتمارين, ١٧٥
من الشخصيات إلى الفئات الحسابية, ١٥٤
من الفروق إلى المشتقات, ١٩٤
من مسألة جمعيّة إلى معامل فورييه, ١٨٢
من معاملات هيكه إلى السلسلة المعيارية, ٢٢١
من وجود أولي إلى فجوة بين أوليين متتاليين, ٢٠٦
موصل الشخصية, ٩٠
نتائج تابعة, ١٥٧
نظرية الأعداد التحليلية, ٢
نواة الجيب في نموذج GUE, ٢٤١
هوية فوغان, ١٥١