

IFA 736

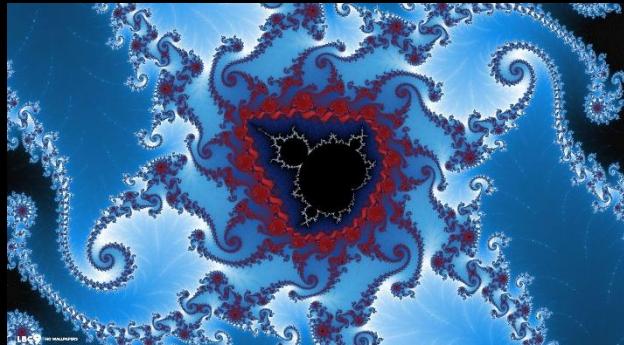
Métodos matemáticos em biologia teórica

Leis de escala

Bruno Mota

metaBIO

Instituto de Física/UFRJ



metaBio



if

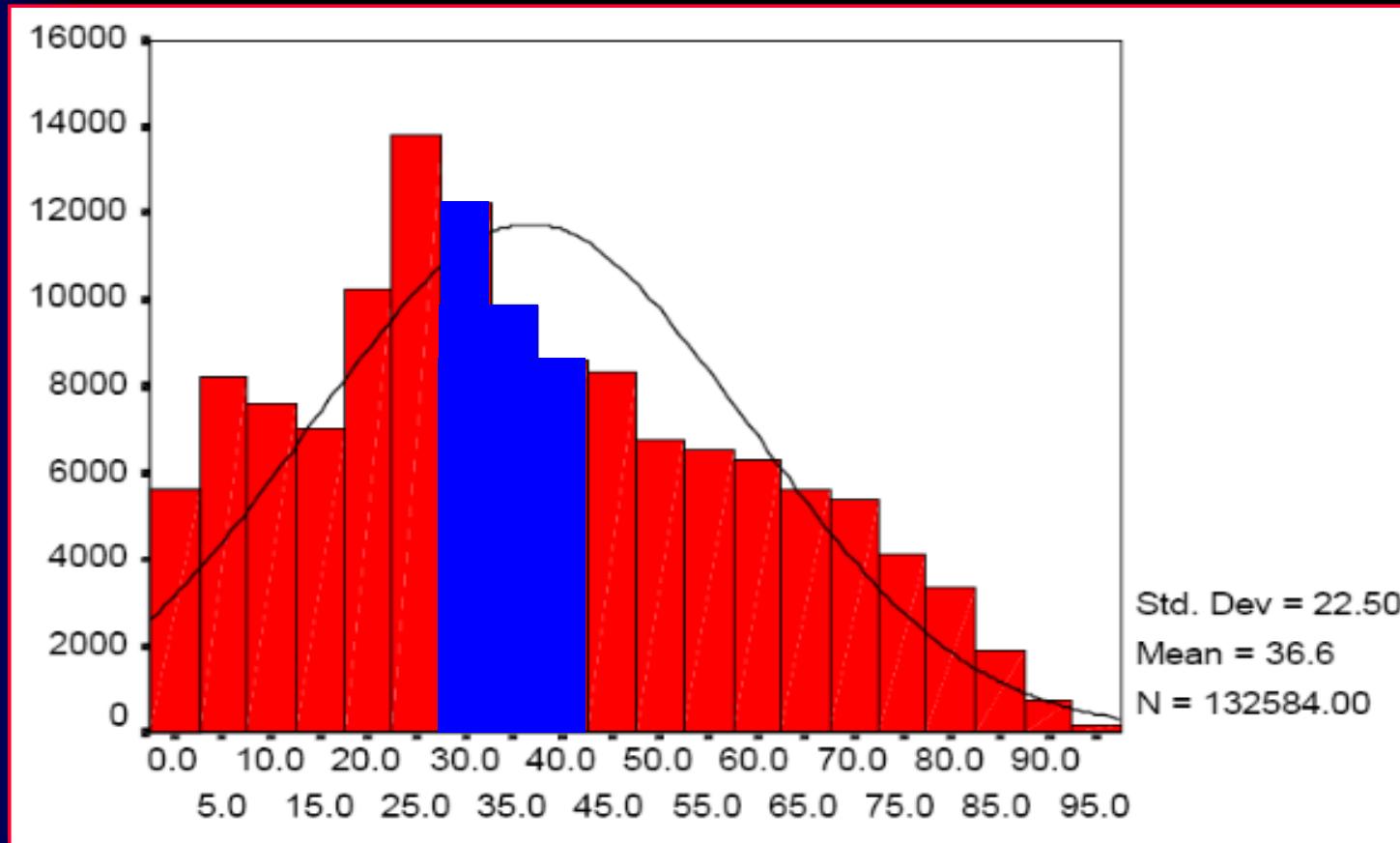


Escalas naturais

- Certas quantidades têm valores típicos
- A altura h de uma porta pode variar; mas tipicamente $1m < h < 3m$
- A idade de humanos se mede, tipicamente, em **décadas**; não em **dias**, ou em **séculos**



Natural scales II

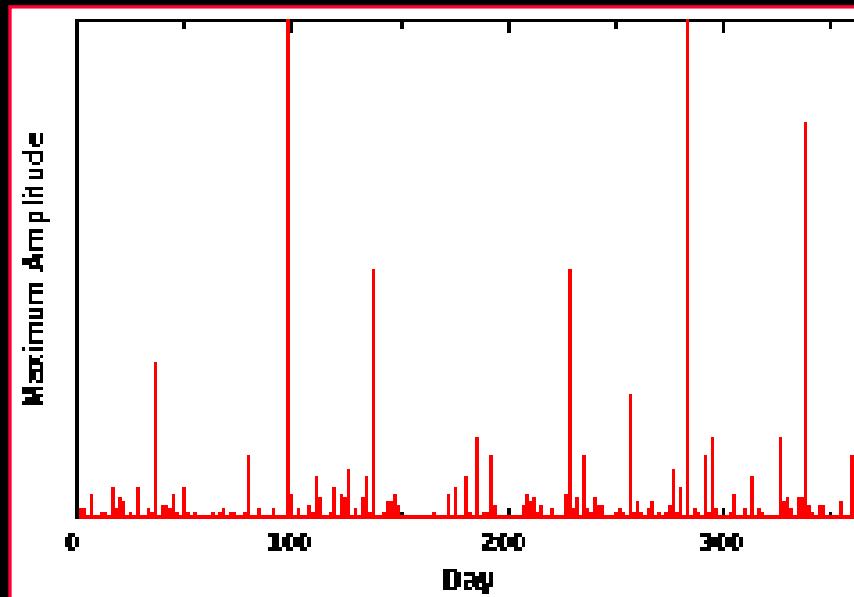


Quantidades sem escalas naturais

- Na escala Richter, um terremoto de magnitude 7 é dez vezes mais intenso que um de magnitude 6, que é dez vezes mais intenso que um de magnitude 5, etc.

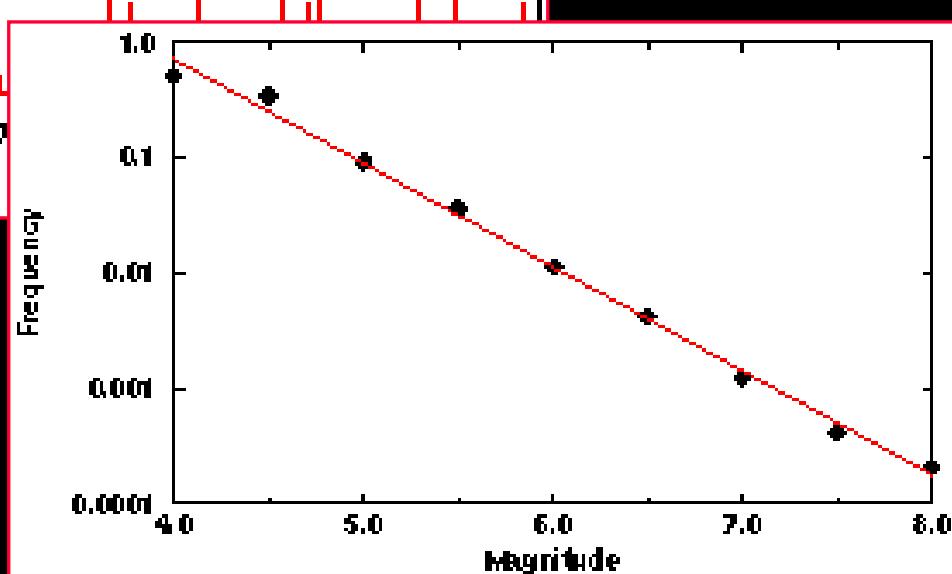
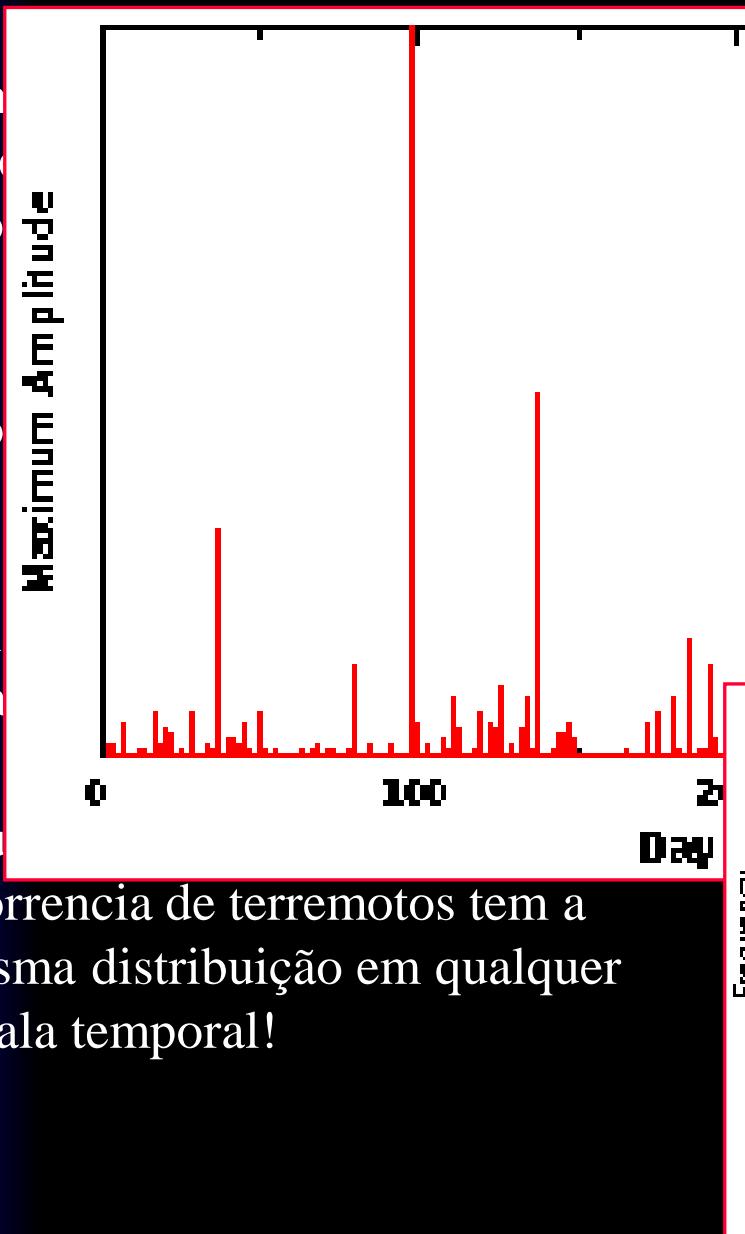
→ É uma escala logarítmica

- Eis os terremotos medidos na Califórnia em 1995

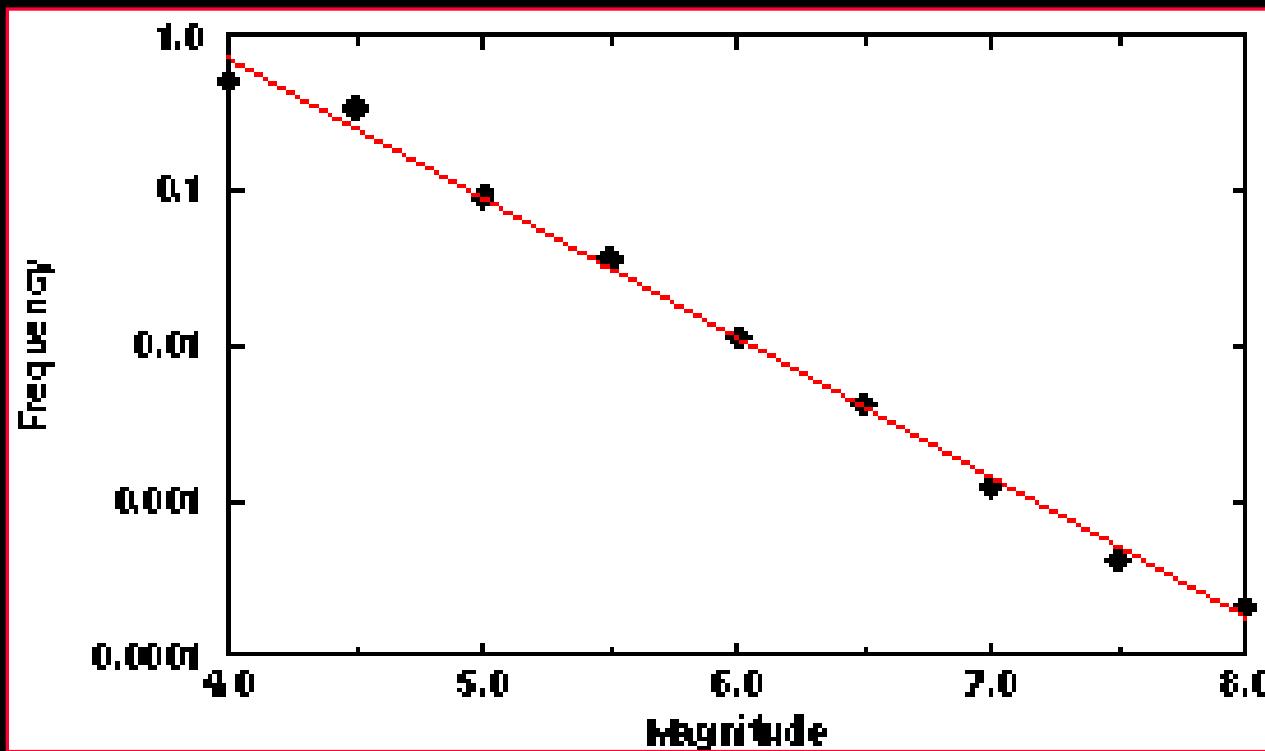


Quantidades sem escalas naturais

- Sendo que não sabemos quando ocorrência de um terremoto, é impossível saber quando ocorrência de outro.
- Ao longo do tempo, sua ocorrência é aleatória.
- Em outras palavras, a ocorrência de terremotos tem a mesma distribuição em qualquer escala temporal!
- Ajustando os dados da ocorrência de terremotos tem a mesma distribuição em qualquer escala temporal!



Quantidades sem escalas naturais

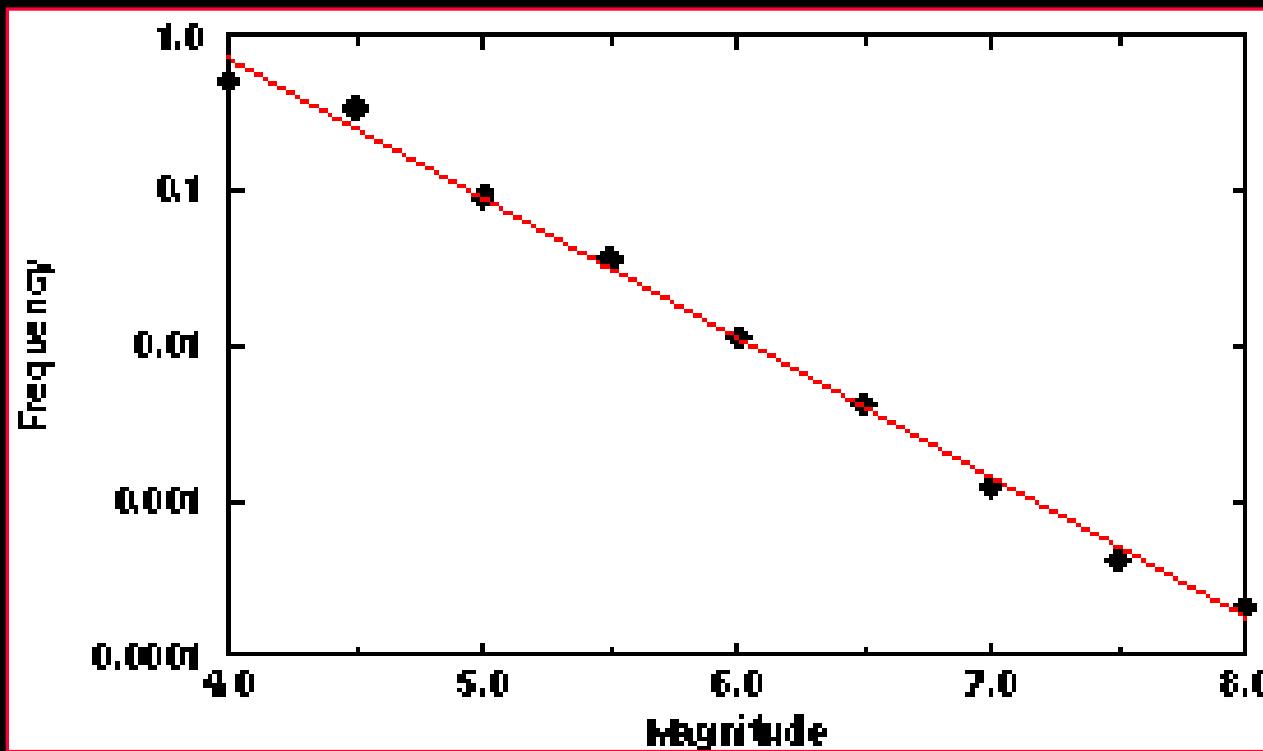


- É a isto que chamamos **invariância por escala**
- A freqüência f é bem descrita como uma lei de potência da intensidade I :

$$f = k I^\alpha$$

Lei de potência \Leftrightarrow Invariância por escala

Quantidades sem escalas naturais



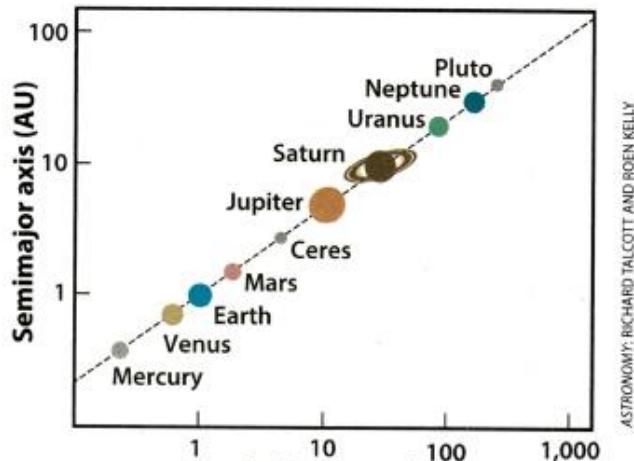
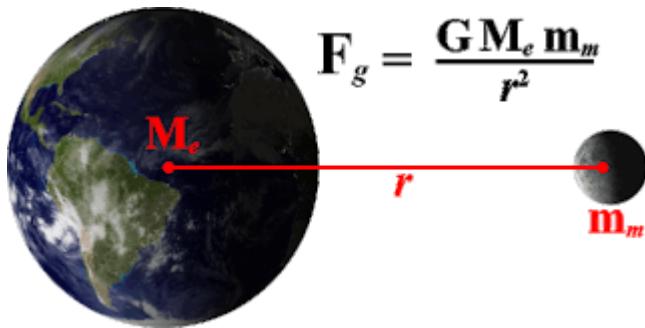
- É a isto que chamamos **invariância por escala**
- A freqüência f é bem descrita como uma lei de potência da intensidade I :

$$f = k I^\alpha$$

Lei de potência \Leftrightarrow Invariância por escala

Gravidade

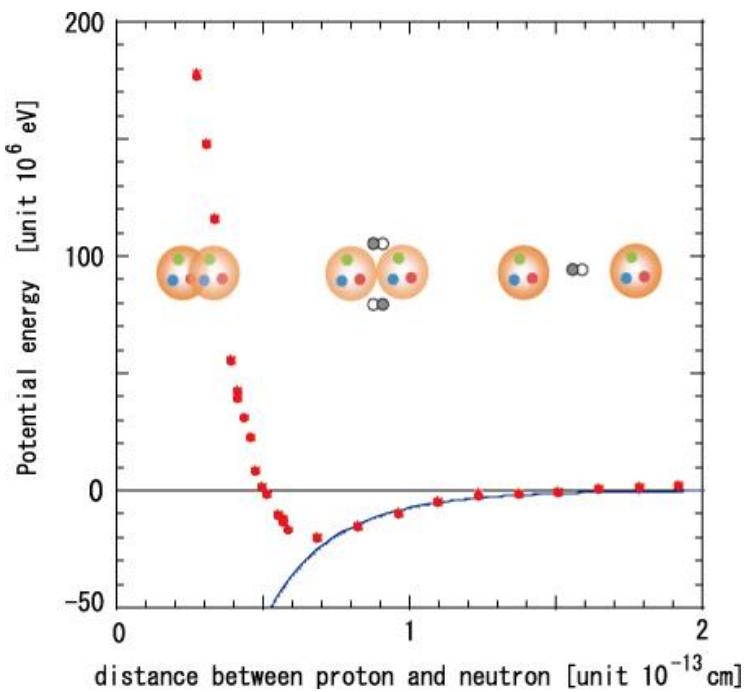
- A força da gravidade de Newton é uma lei de potência
- A repulsão eletrostática (Coulomb) também



Força nuclear

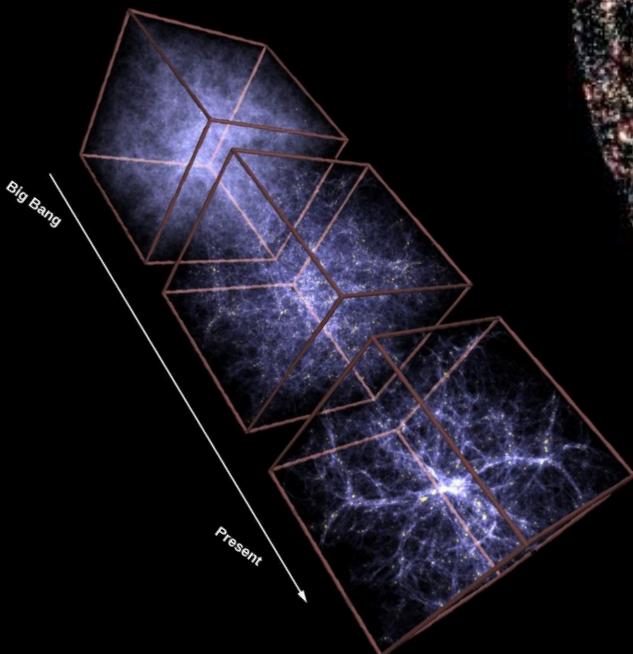
- Existe uma escala característica para a atração entre prótons
- Só é relevante em pequenas escalas...

$$V_{Yukawa}(r) = -k \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r} =$$



A estrutura em grande escala do Universo

- Estruturas formadas por colapso gravitacional
- Portanto sem escala característica!
- Estrelas – galáxias – aglomerados -...

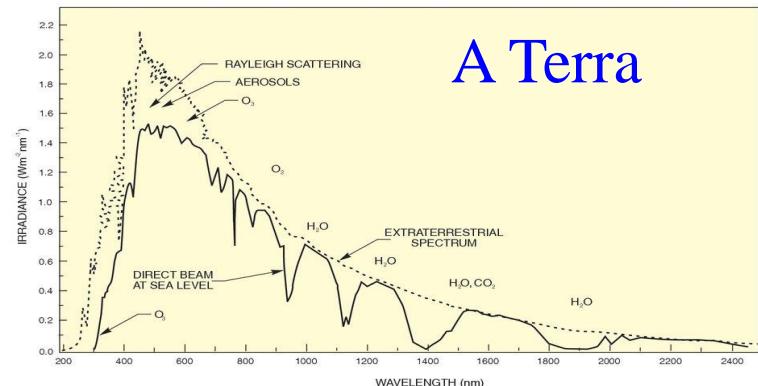


[Mark Subbarao, Dinoj Surendran, and Randy Landsberg for the SDSS team](#)

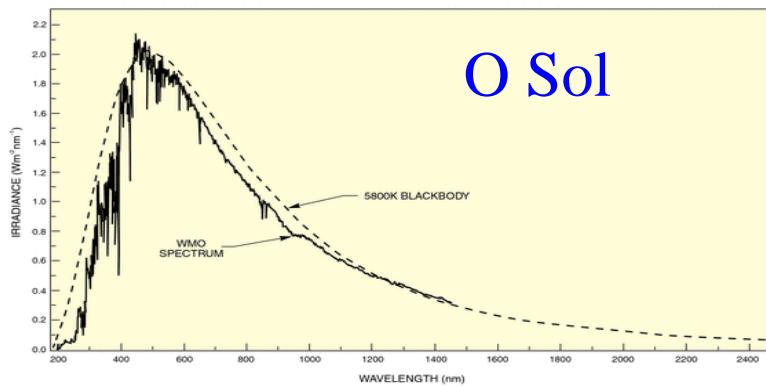
Termodinâmica I

- Existe uma escala natural (de energia/grau de liberdade) para fenômenos termodinâmicos:
A temperatura T!
- Radiação de corpo negro

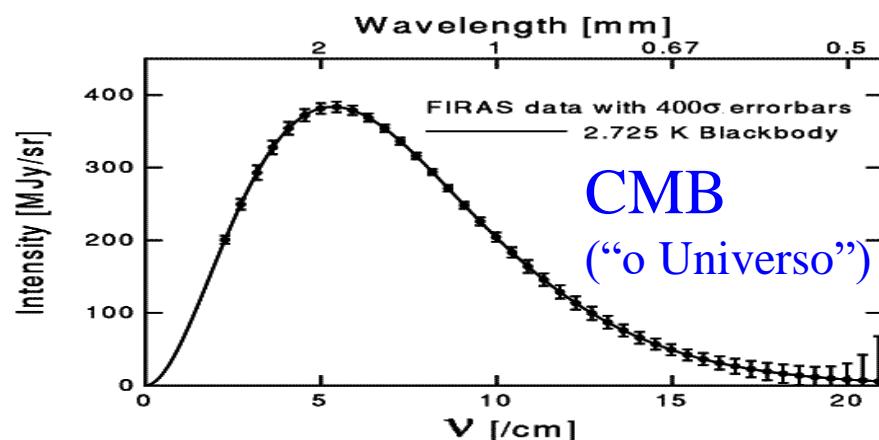
$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$



A Terra



O Sol

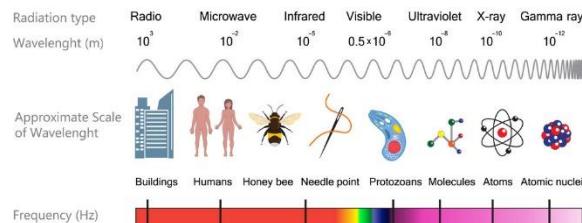


CMB
("o Universo")

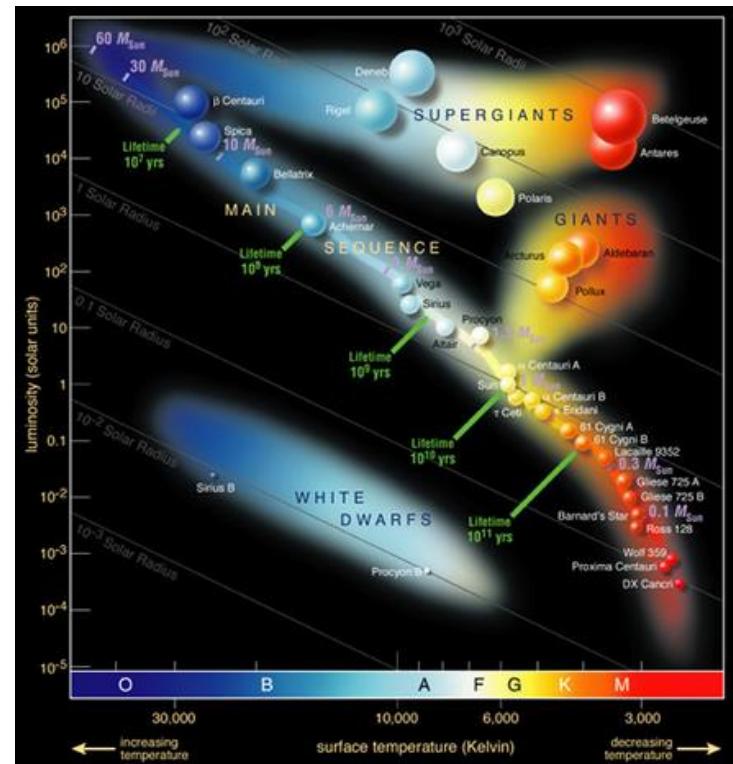
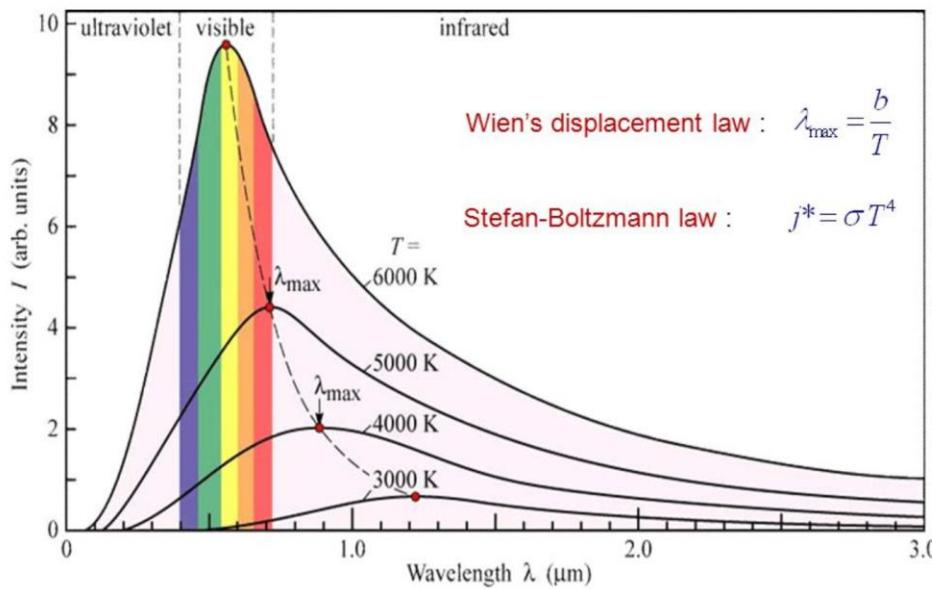
Termodinâmica II

- Mas, para uma T específica, fenômenos eletromagnéticos ocorrem em todas as escalas
- Estrelas também existem em uma ampla faixa de escalas
- Leis de potência são ubíquas

Electromagnetic Spectrum



Blackbody Radiation



Análise dimensional

O espaço-tempo de Rindler*

- Qual a aceleração local para um **observador** cuja separação da origem é L ($L^2 = x^2 - c^2 t^2$)?
- Quais são os parâmetros relevantes, e quais são suas dimensões?

$$[a] = \text{m s}^{-2}$$

$$[L] = \text{m}$$

$$[c] = \text{m s}^{-1}$$

- Efetuando a análise dimensional

$$a(L, c) = c^\alpha L^\beta$$

$$[c^\alpha L^\beta] = (m s^{-1})^\alpha m^\beta = \text{m s}^{-2}$$

$$[c^\alpha L^\beta] = m^{\alpha+\beta} s^{-\alpha} = \text{m s}^{-2}$$

$$\alpha + \beta = 1$$

$$-\alpha = -2$$

$$\alpha = 2$$

$$\beta = -1$$

$$a(L, c) = c^2 L^{-1}$$

- De fato, para velocidades pequenas,

$$\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = L^2$$

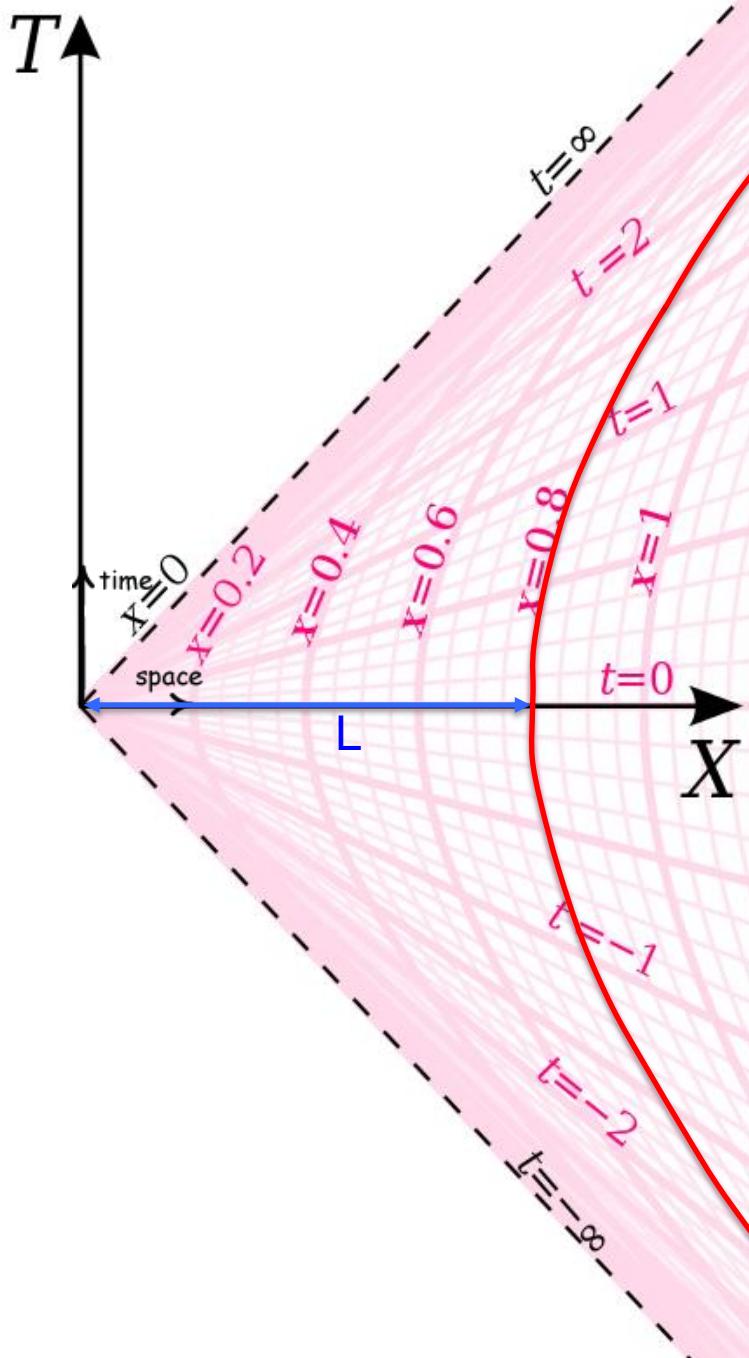
$$\Delta x = \sqrt{L^2 + c^2 \Delta t^2}$$

$$\Delta x = L \sqrt{1 + \frac{c^2 \Delta t^2}{L^2}}$$

$$\Delta x = L + \frac{1}{2} \frac{c^2}{L} \Delta t^2$$

$$a \sim \frac{c^2}{L}$$

O mesmo vale no caso geral, ao obtermos o componente espacial da quadri-aceleração



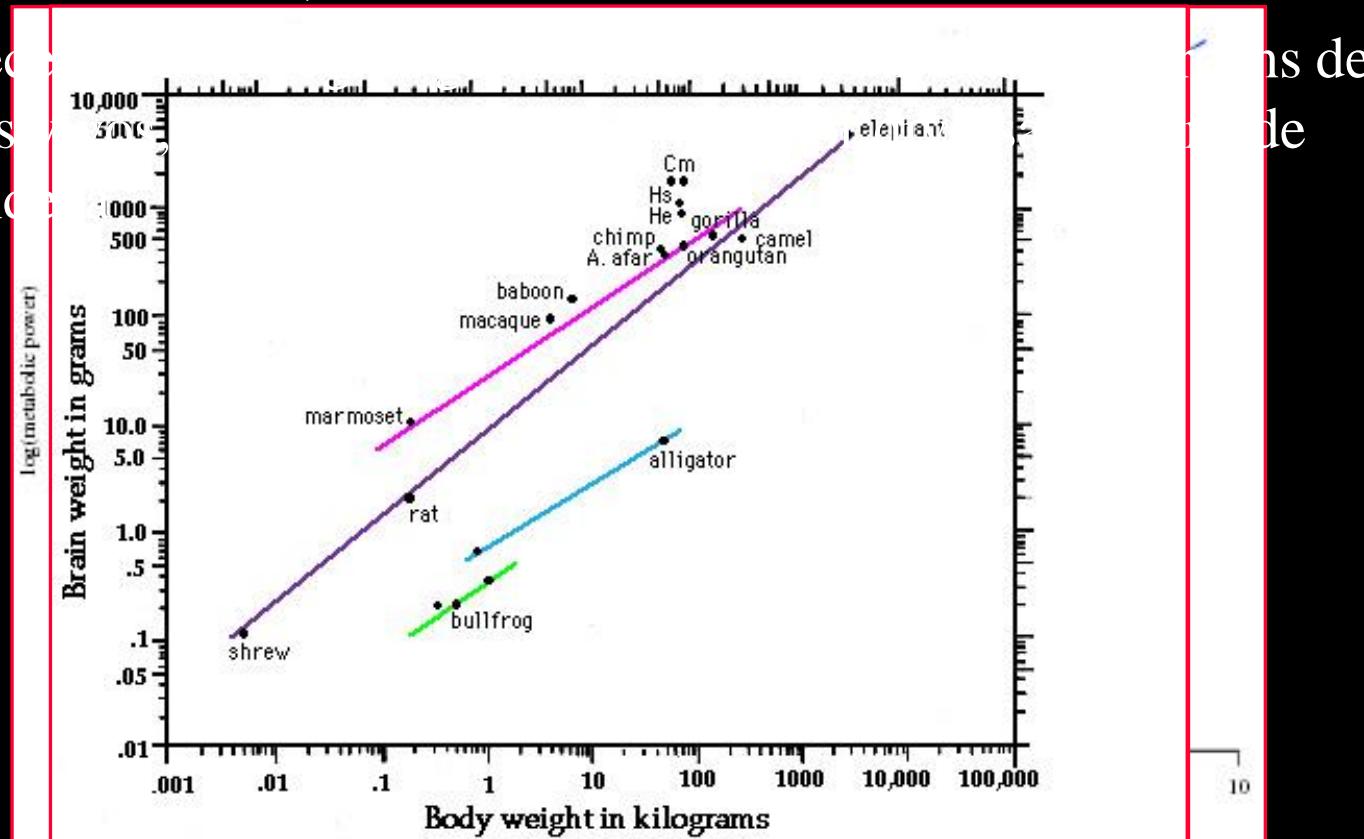
As várias ordens de grandeza da vida

- Sob diversas formas de medida, seres vivos abarcam uma enorme quantidade de escalas:
- Uma baleia (*Balaenoptera musculus*) pesa 150 toneladas ($1,5 \times 10^8$ gramas)
- Um musaranho (*Suncus etruscus*) pesa 2 gramas (2×10^0 gramas)



Alometria

- Leis de potência surgem naturalmente em medições de anatomia comparada
- E.g., peso, massa encefálica, ritmo cardíaco, número de bifurcações em geral (sistema circulatório, ramos de árvores) ritmo metabólico, etc.
- Parece que existem leis de escala comuns de todos os seres vivos, independentemente de sua escala de tamanho



Alometria II

- Leis de potência surgem naturalmente em medições de anatomia comparativa
- Tais leis se aplicam a uma enorme faixa de ordens de grandeza
- É possível deduzir estas relações a partir de primeiros princípios?
- Em alguns casos, isto já foi feito!

The Journal of Experimental Biology 208, 1575-1592
Published by The Company of Biologists 2005
doi:10.1242/jeb.01589

1575

Review

The origin of allometric scaling laws in biology from genomes to ecosystems: towards a quantitative unifying theory of biological structure and organization

Geoffrey B. West^{1,2,*} and James H. Brown^{1,3}

¹*The Santa Fe Institute, 1399 Hyde Park Road, Santa Fe, NM 87501, USA*, ²*Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM 87545, USA* and ³*Department of Biology, University of New Mexico, Albuquerque, NM 87131, USA*

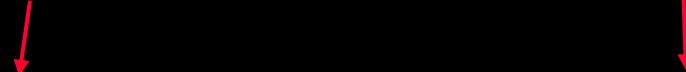
*Author for correspondence (e-mail: gbw@santafe.edu)

Accepted 14 March 2005

Exemplo: redes hierárquicas (*West & Brown*)

→ Suprem um sistema biológico até o seu nível elementar

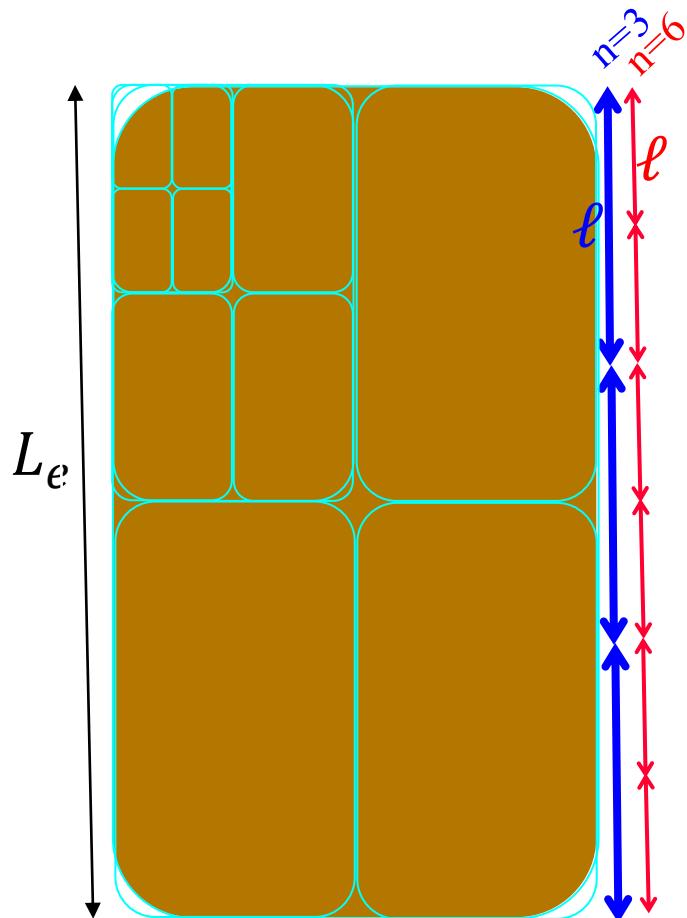
E.g.:



- Sistema respiratório (alvéolos),
- Sistema sanguíneo (células),
- Sistema vascular vegetal (folhas).



O comprimento da minha mesa



- Não depende do tamanho da régua!

$$n = \left(\frac{L_e}{\ell} \right)$$

- E a área?

$$n = \left(\frac{L_e}{\ell} \right)^d$$

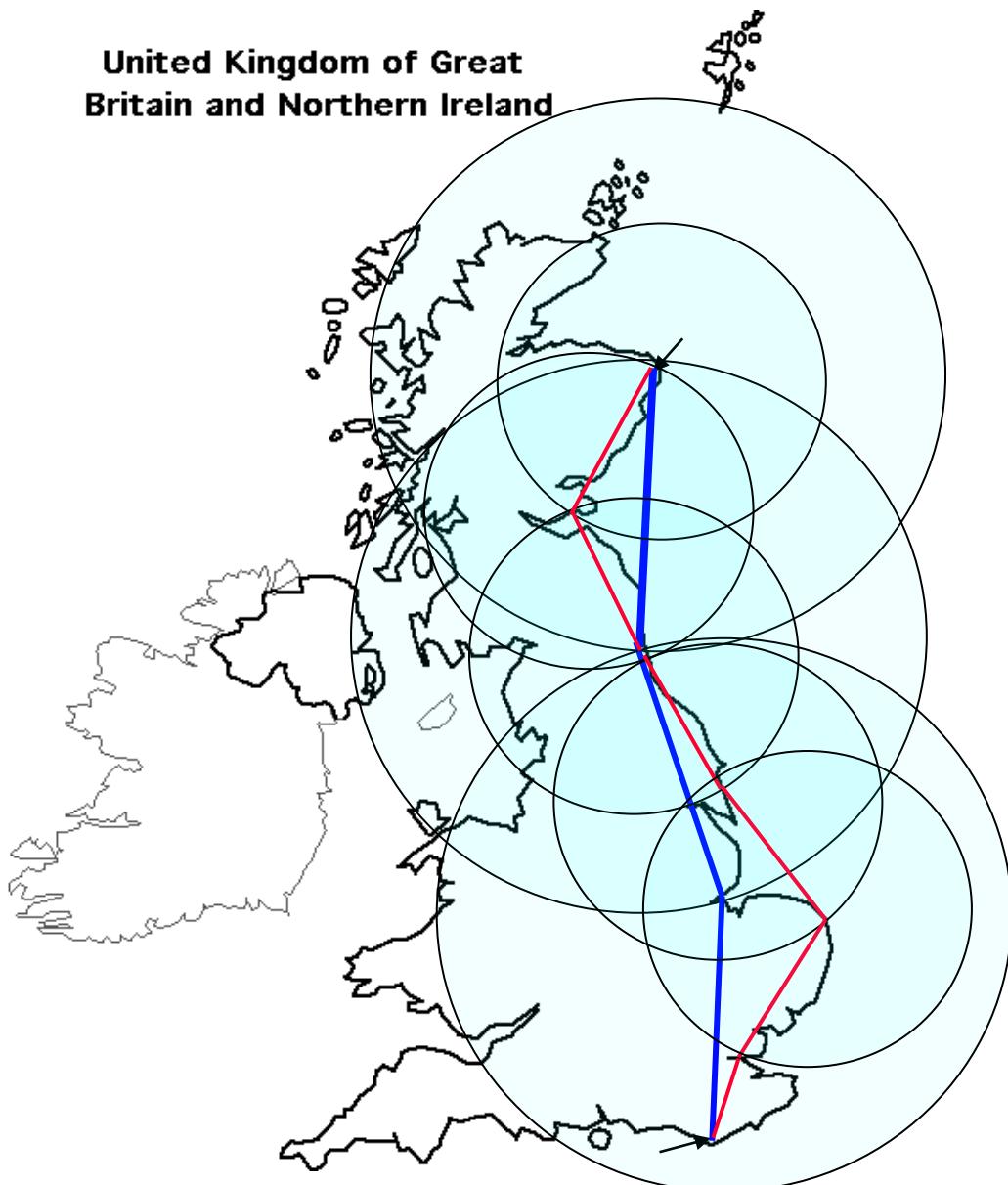
ou

$$n = \left(\frac{A_e}{a} \right)$$

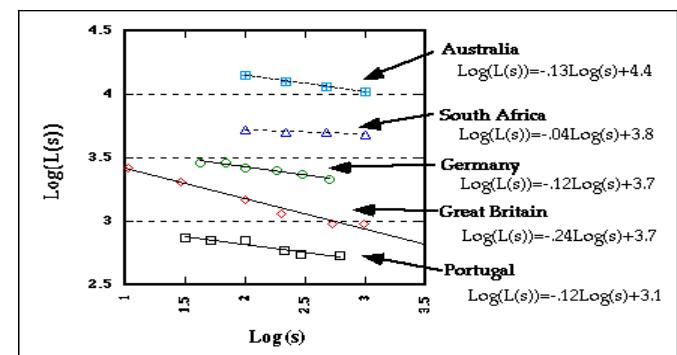
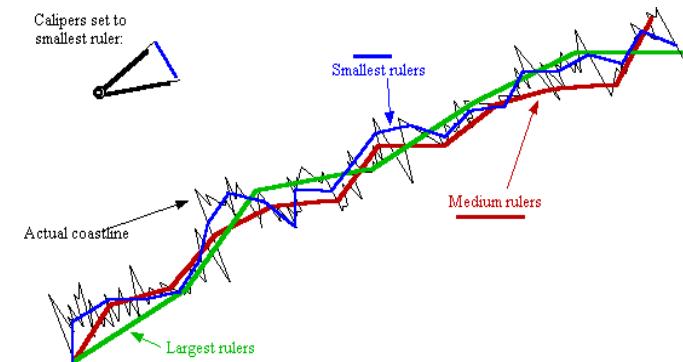
Em geral:

$$n = \left(\frac{S_e}{s} \right)^{d/ds}$$

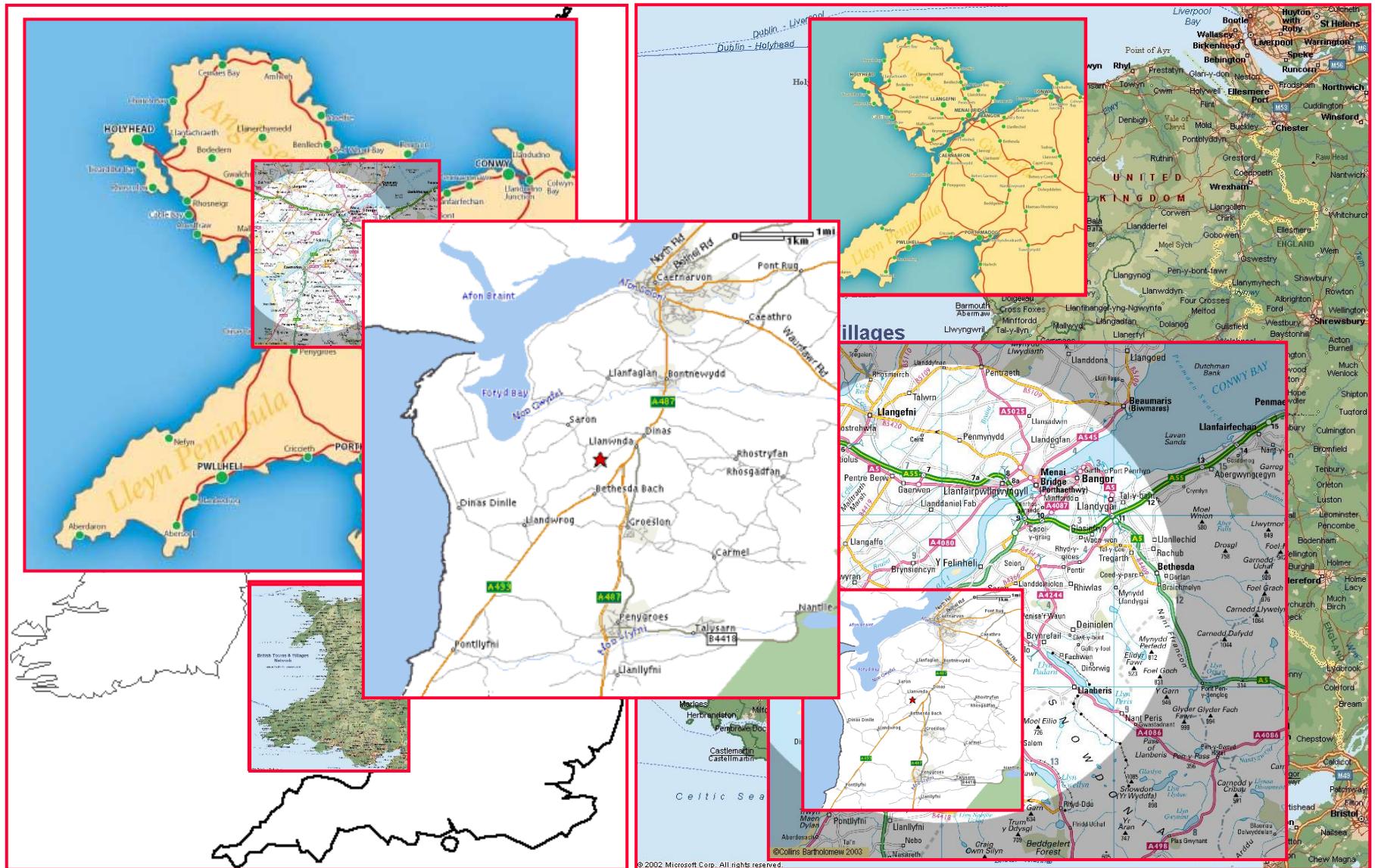
O comprimento da costa britânica



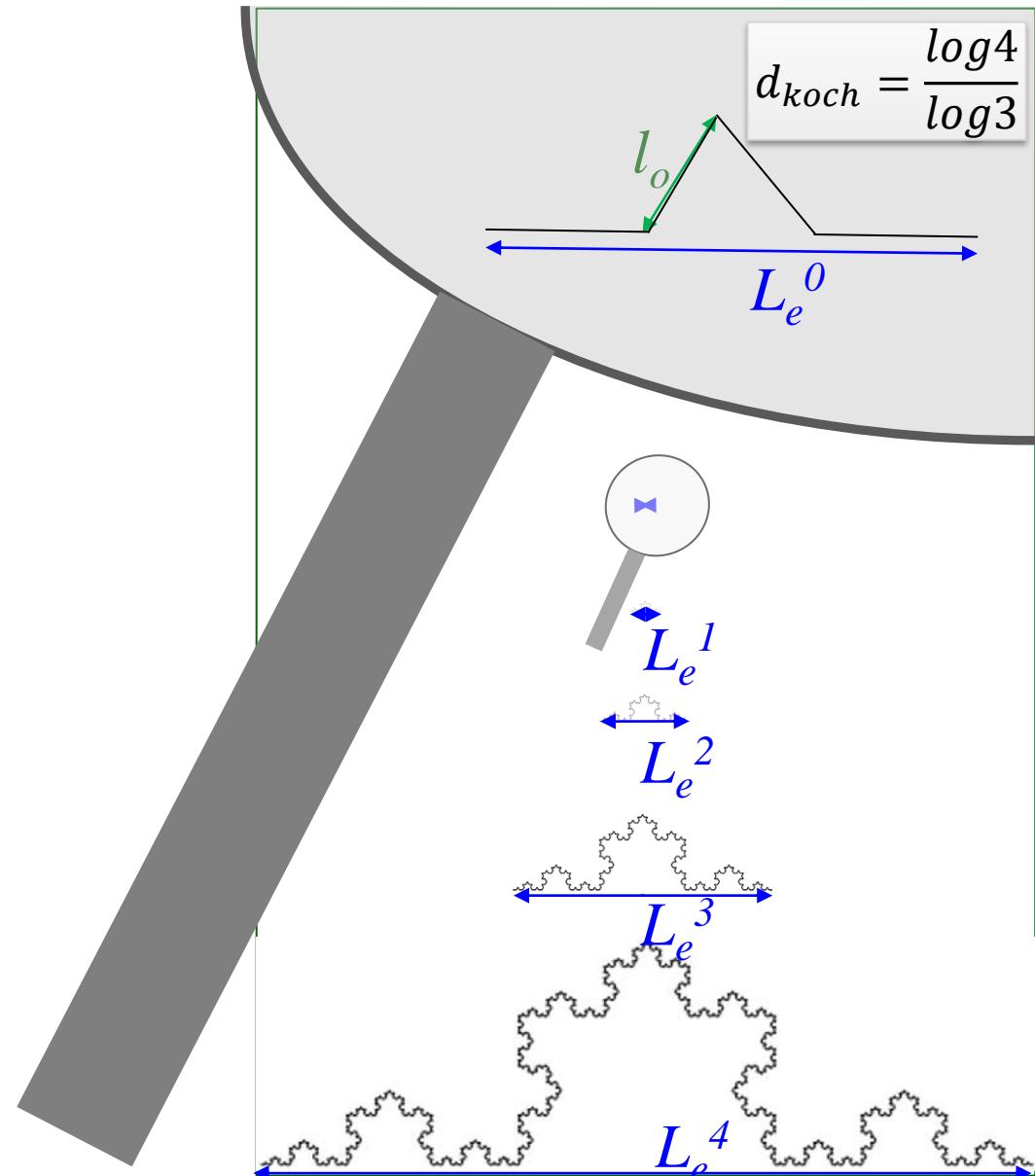
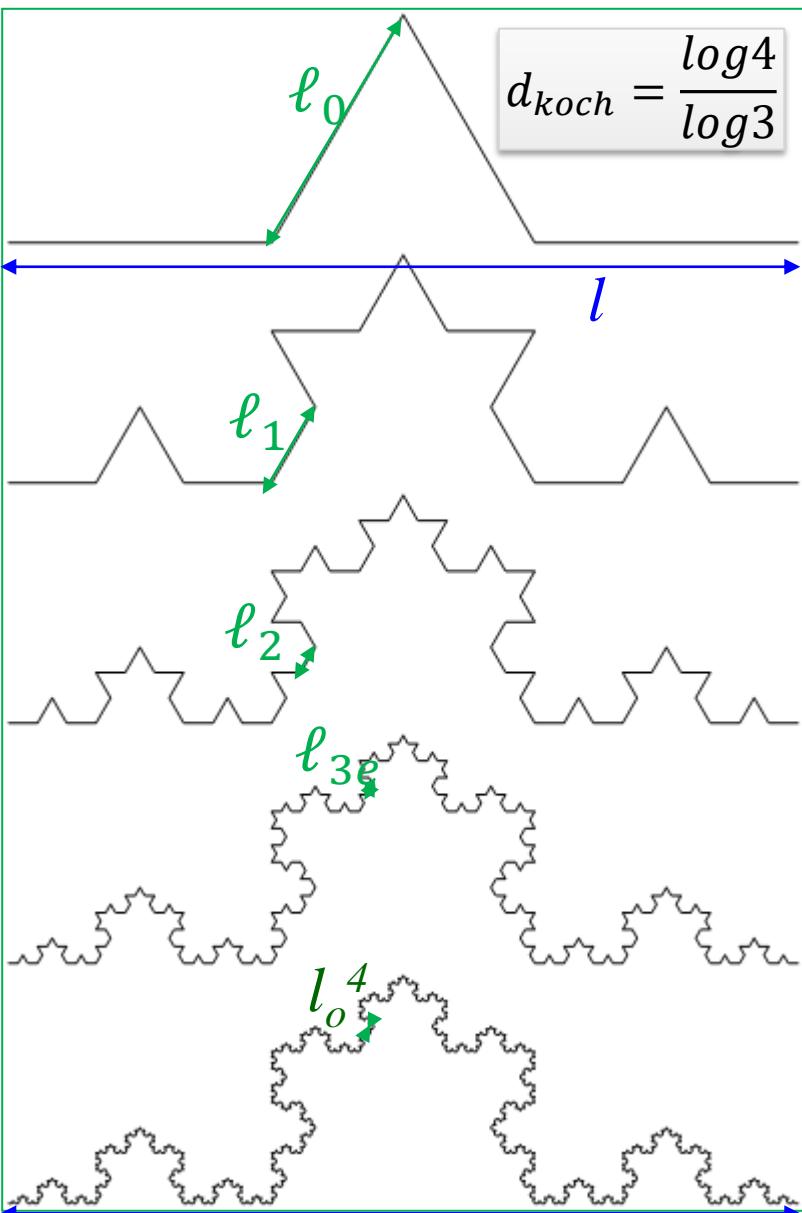
- Depende do tamanho da régua!



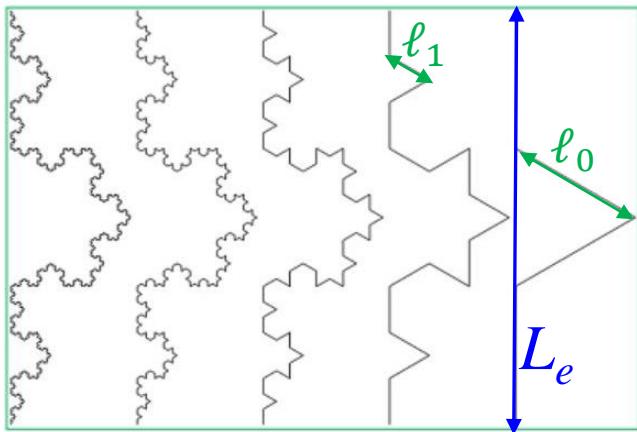
O comprimento da costa britânica - redux



Fractais: a curva de Koch



Fractais: a curva de Koch II



| ordem | 1 | n | \square | L_e | L_i |
|-------|-----------------|-----------|-----------|-----------|-------------------|
| 0 | 1 | 1 | \square | 1 | \square |
| 1 | $\frac{1}{3}$ | 4 | \square | 1 | $\frac{4}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{3^2}$ | 4^2 | \square | 1 | $(\frac{4}{3})^2$ |
| 3 | $\frac{1}{3^3}$ | 4^3 | \square | 1 | $(\frac{4}{3})^3$ |
| . | \square | \square | \square | \square | \square |
| . | \square | \square | \square | \square | \square |
| . | \square | \square | \square | \square | \square |
| n | 3^{-n} | 4^n | \square | 1 | $(\frac{4}{3})^n$ |

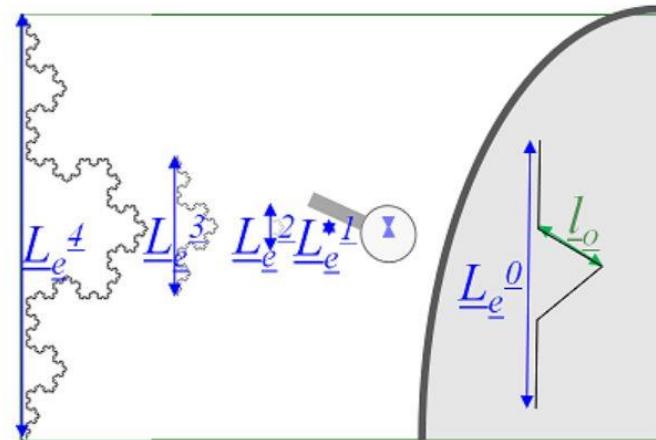
$$\frac{L_i}{1} = \left(\frac{L_e}{1}\right)^d$$

$$4^n = 3^{nd}$$

$$\log 4^n = \log 3^{nd}$$

$$\log 4 = d (\log 3)$$

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \sim 1.26186$$



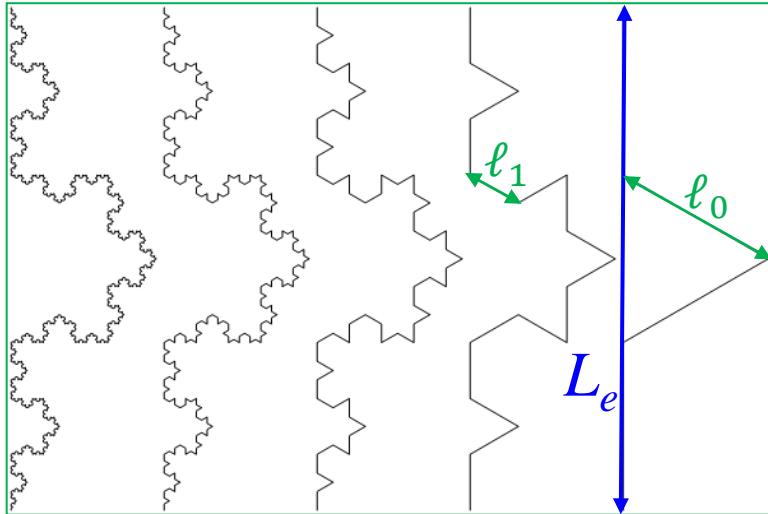
| ordem | 1 | n | \square | L_e | L_i |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 1 | 1 | \square | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 4 | \square | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4^2 | \square | 9 | 4^2 |
| 3 | 1 | 4^3 | \square | 3^3 | 4^3 |
| . | \square | \square | \square | \square | \square |
| . | \square | \square | \square | \square | \square |
| . | \square | \square | \square | \square | \square |
| n | 1 | 4^n | \square | 3^n | 4^n |

$$\frac{L_i}{1} = \left(\frac{L_e}{1}\right)^d$$

$$4^n = 3^{nd}$$

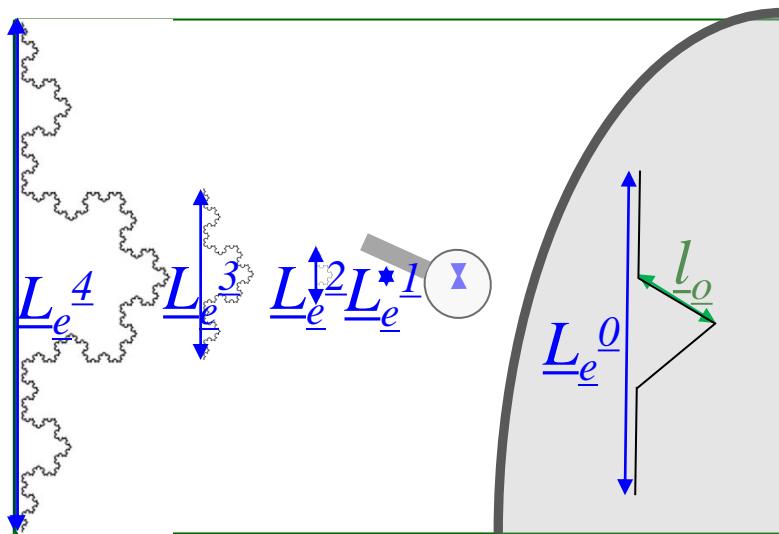
$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \sim 1.26186$$

Fractais: a curva de Koch III



$$n_i = \left(\frac{L_e}{\ell_i} \right)^d$$

$$L_{intrinsic} = nl$$

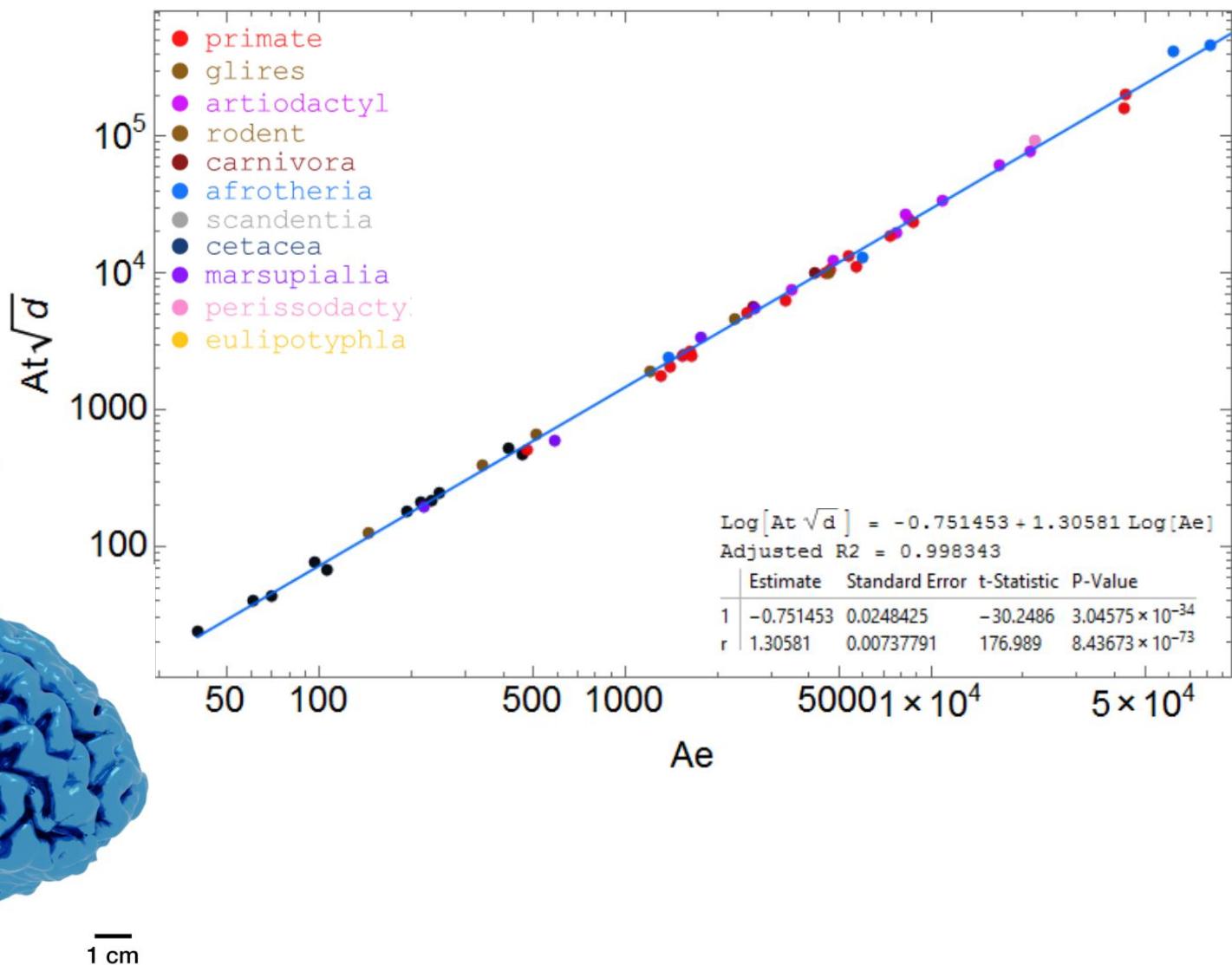
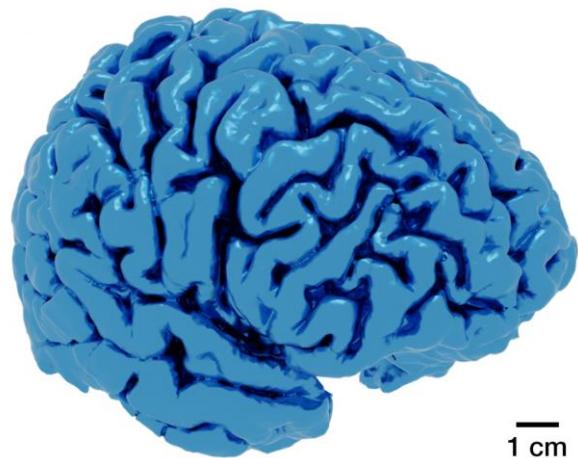


$$\frac{L_i}{\ell} = \left(\frac{L_e}{\ell} \right)^d$$

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \sim 1.26186$$

O córtex é fractal?

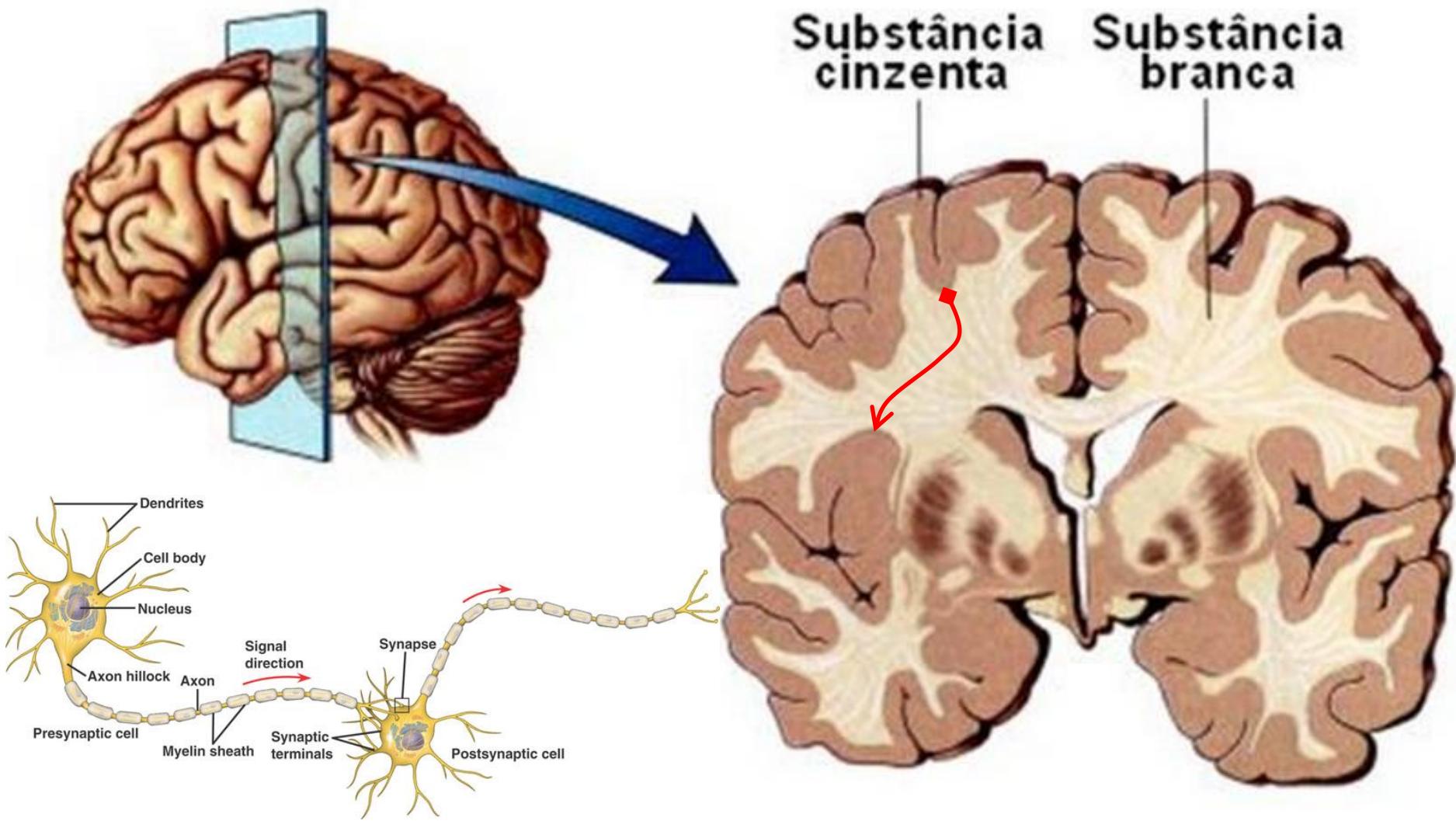
$$\frac{A_T}{T^2} = k \left(\frac{A_E}{T^2} \right)^{\frac{5}{4}}$$



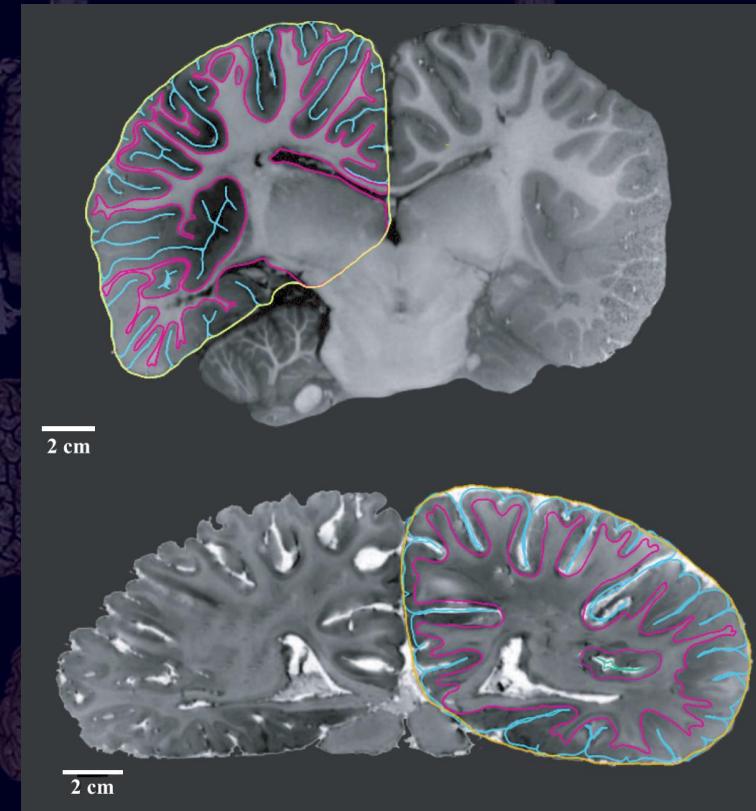
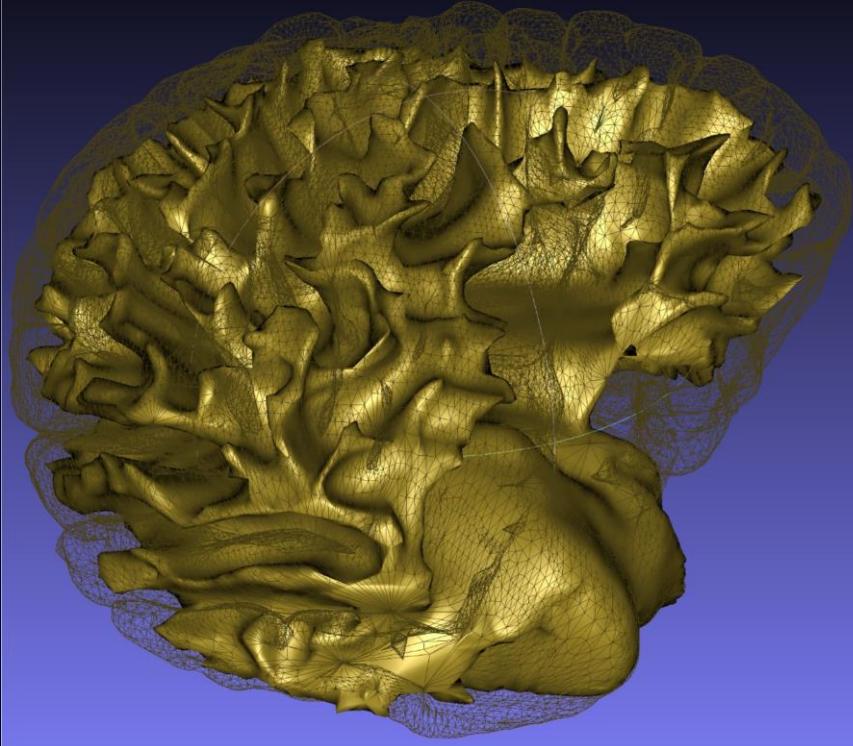
Os Cortices



O Cortex

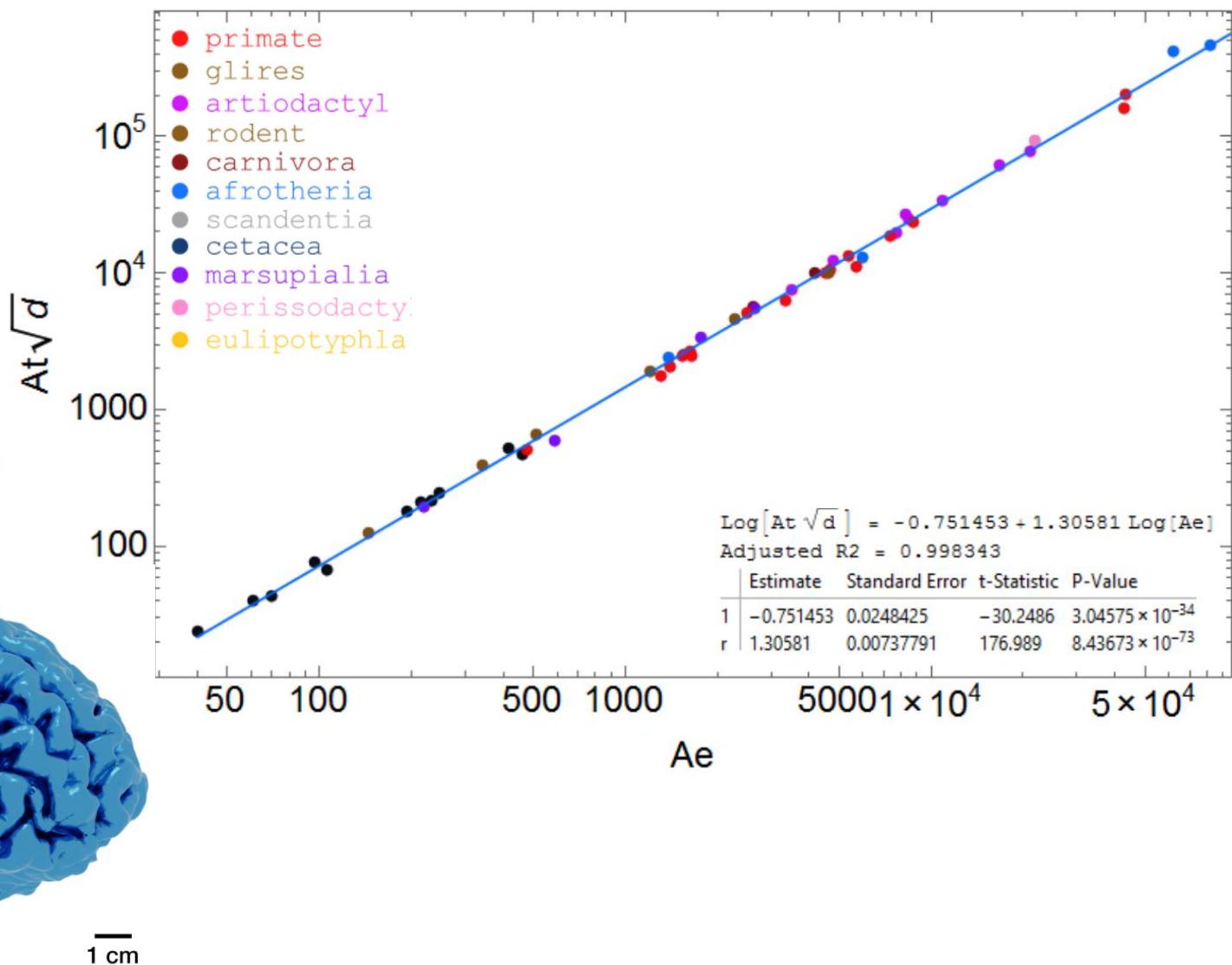
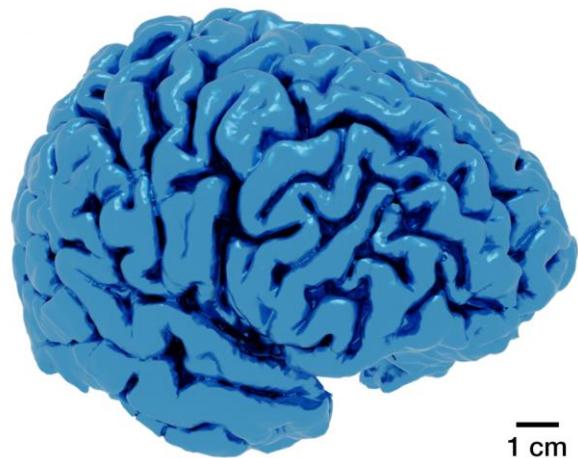


Uma história em 3 superfícies



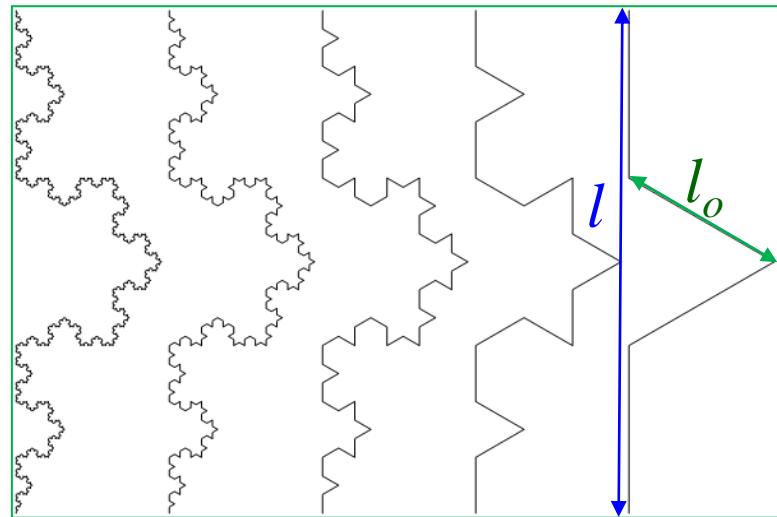
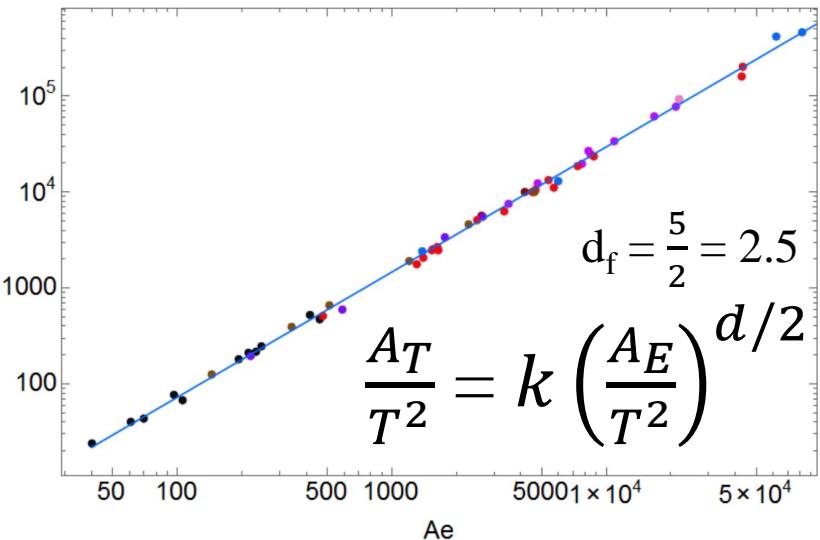
O córtex é fractal?

$$\frac{A_T}{T^2} = k \left(\frac{A_E}{T^2} \right)^{\frac{5}{4}}$$



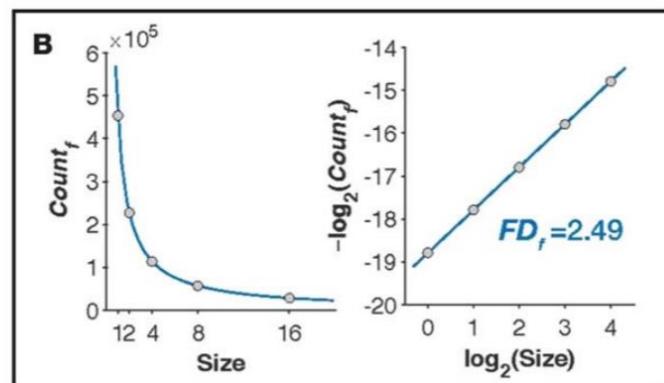
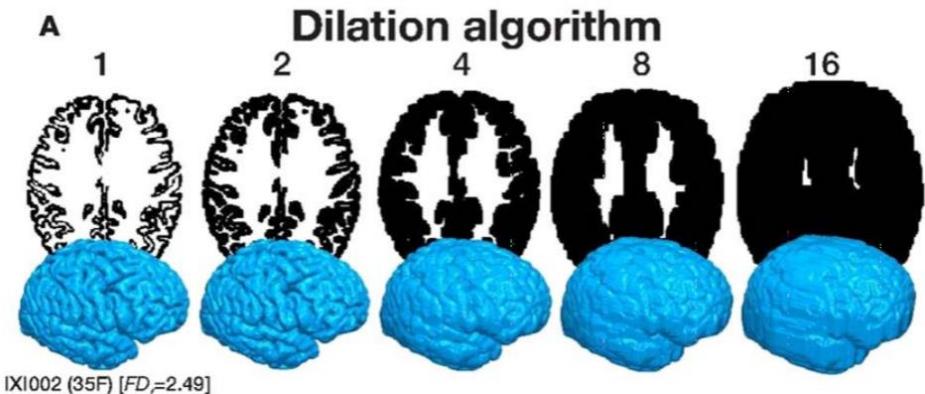
Aparentemente sim...

\sqrt{d}



$$\frac{l_i}{l_o} = \left(\frac{l_e}{l_o} \right)^d$$

C.R. Madan, E.A. Kensinger / NeuroImage 134 (2016) 617–629



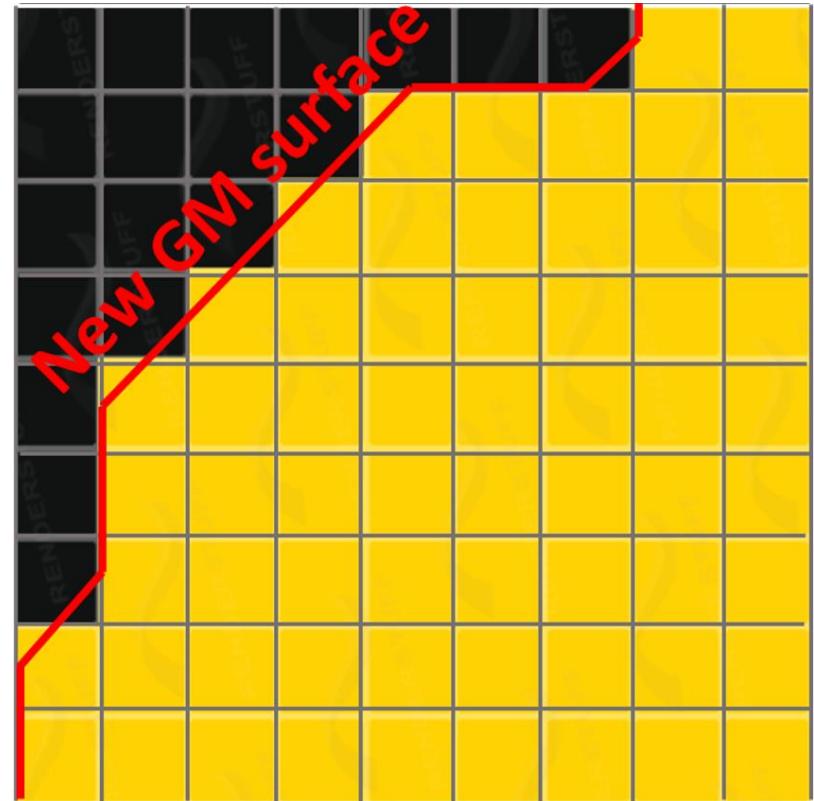
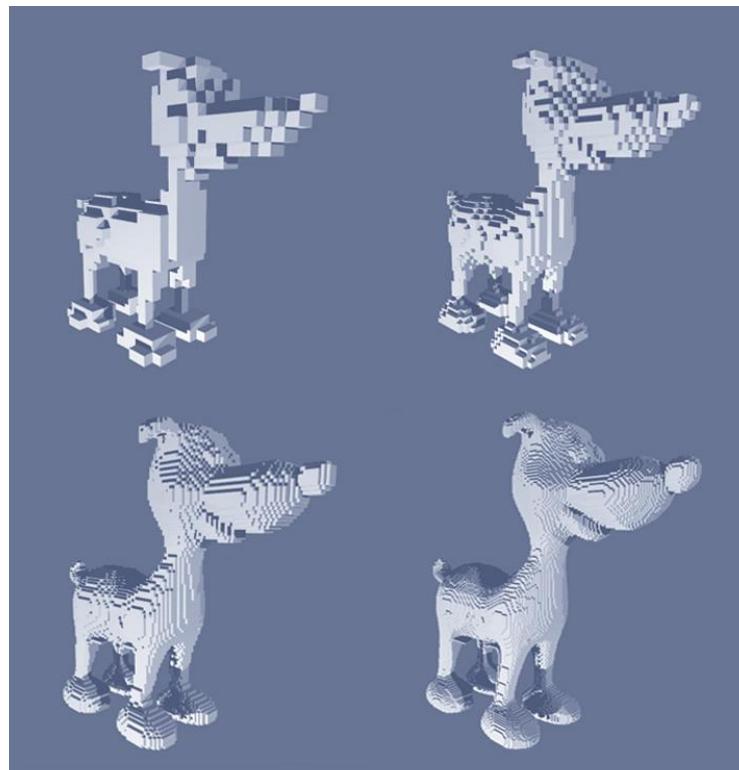
Uma nova maneira de expressar a morfologia

Iteração em dois passos

1 – Voxelize GM + WM

2 – Interpole a superfície por nível de gradiente

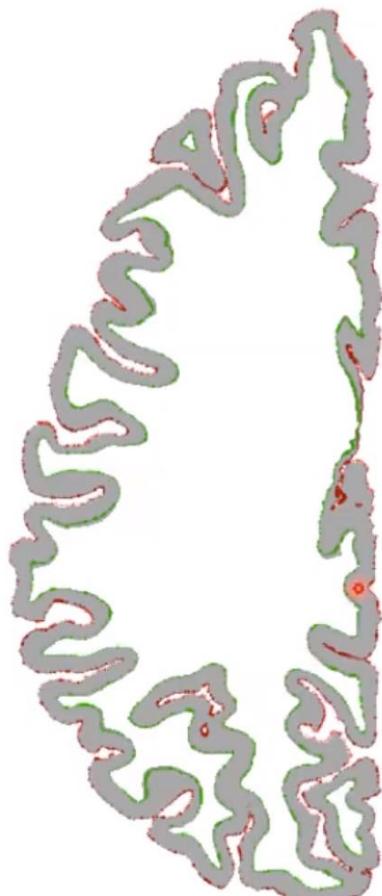
Aumente a escala [diminua a resolução], e repita



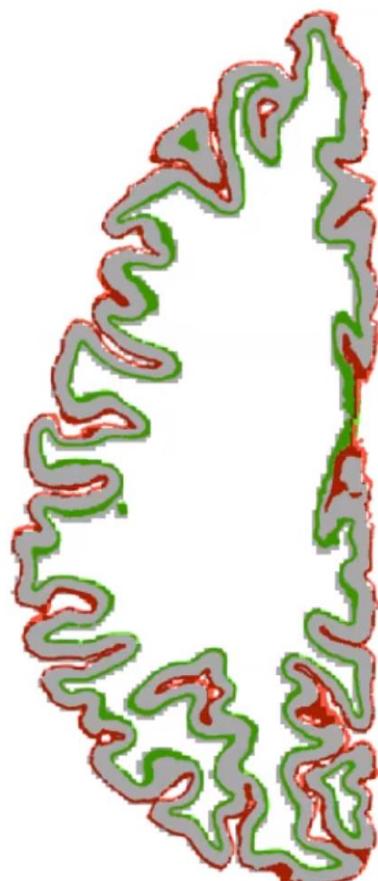
Uma nova maneira de expressar morfologia

Human example subject 100408 left hemisphere (axial plane)

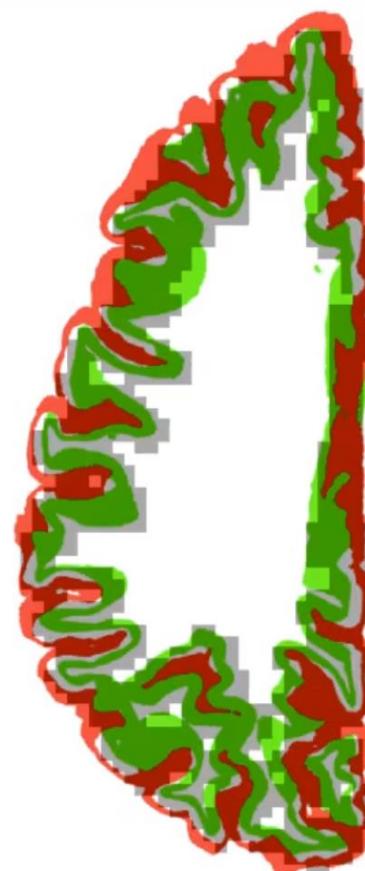
Scale=0.27



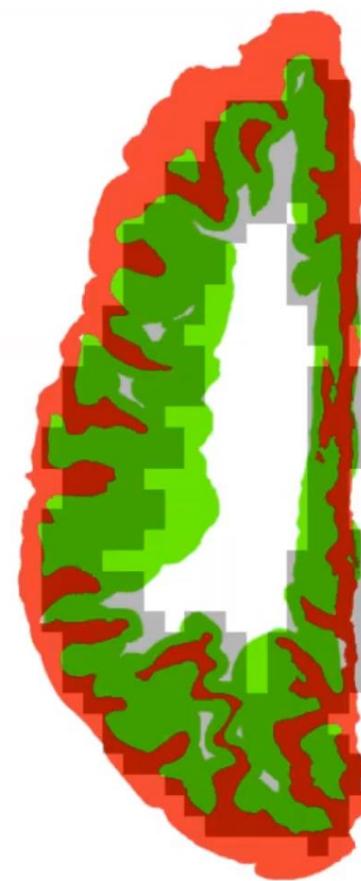
scale=0.83



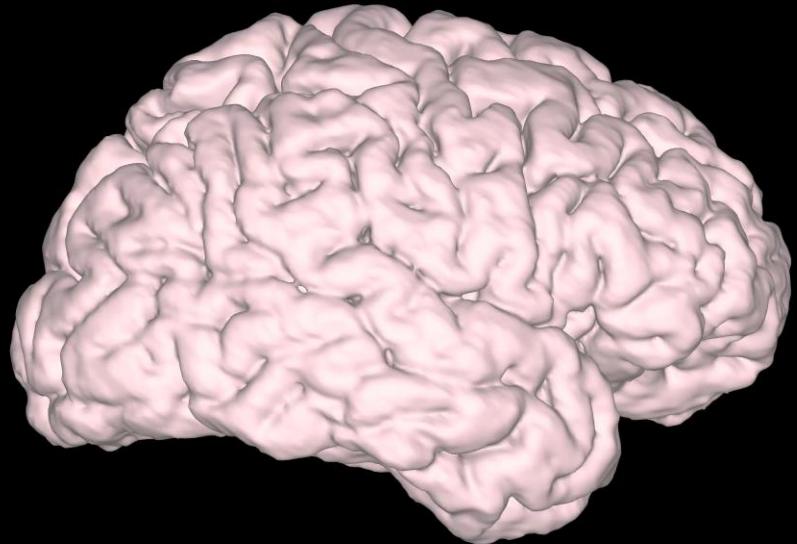
scale=2.19



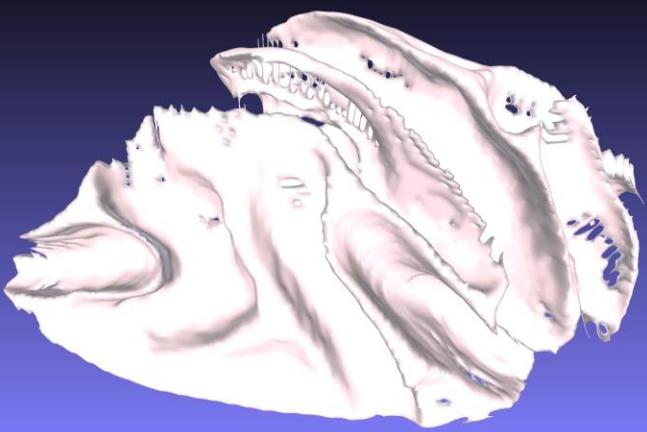
scale=4.17



O córtex humano em fluxo

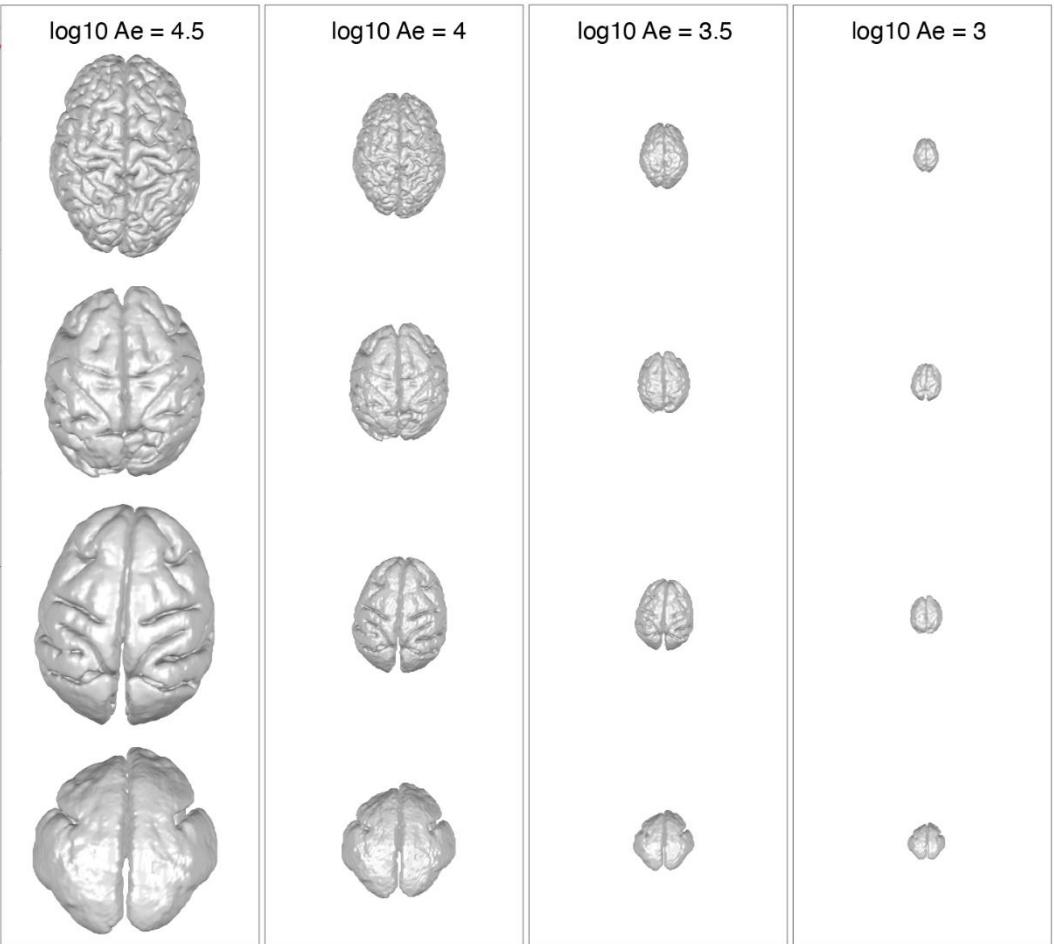
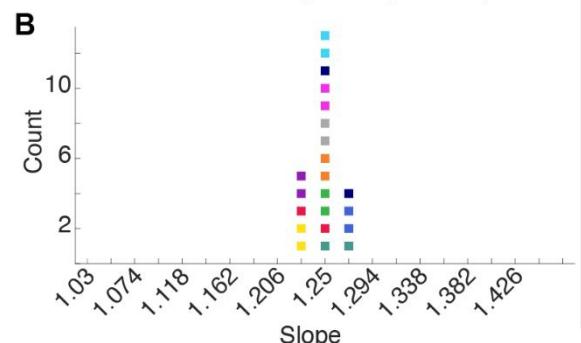
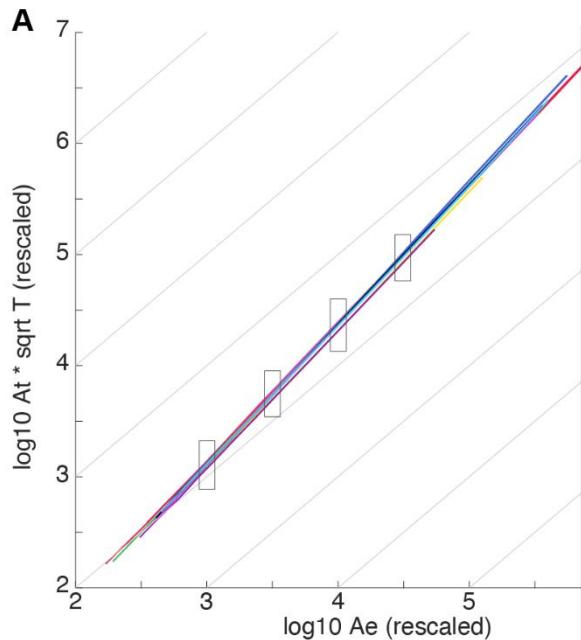


O córtex do macaco rhesus

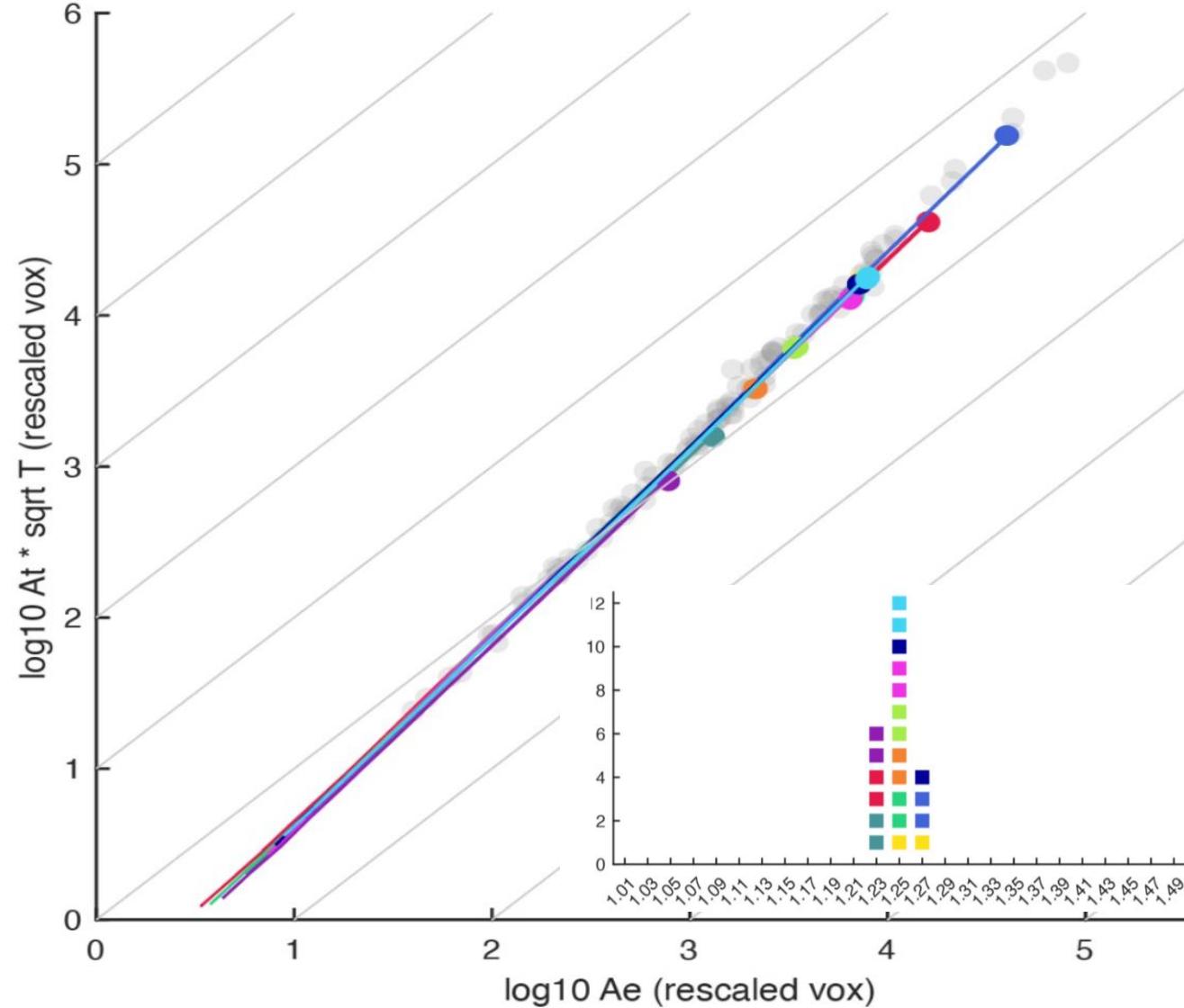


O córtex cerebral é fractal!

Humano +
Chimpanzé +
Rhesus +
Saguí + 7 outros



O córtex cerebral é fractal!

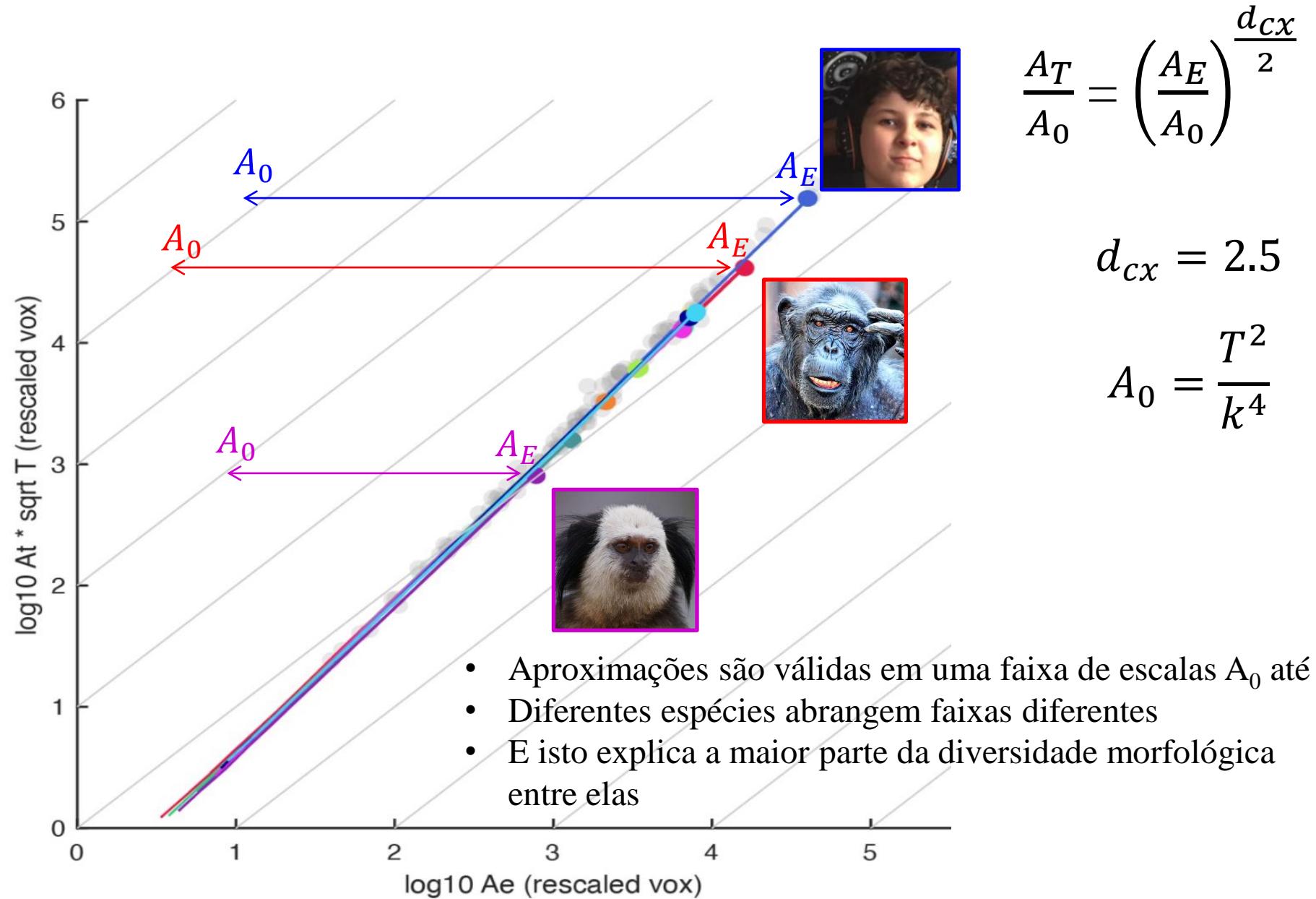


$$\frac{A_T}{A_0} = \left(\frac{A_E}{A_0} \right)^{\frac{d_{cx}}{2}}$$

$$d_{cx} = 2.5$$

$$A_0 = \frac{T^2}{k^4}$$

Mais precisamente, são todos aproximações da mesma forma fractal arquétipa!



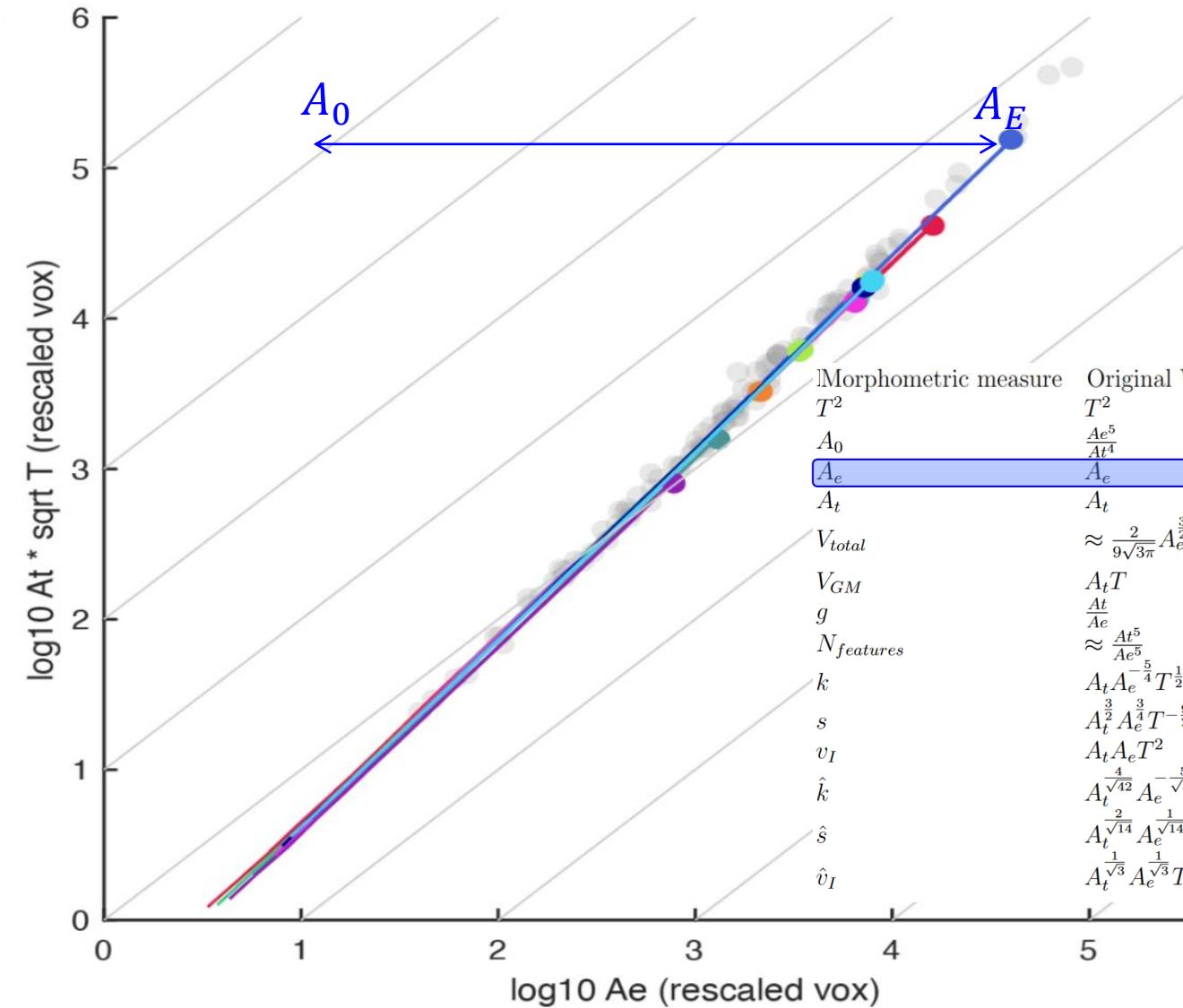
Aproximações da mesma forma fractal arquétipa

$$\frac{A_T}{A_0} = \left(\frac{A_E}{A_0} \right)^{\frac{5}{2}}$$

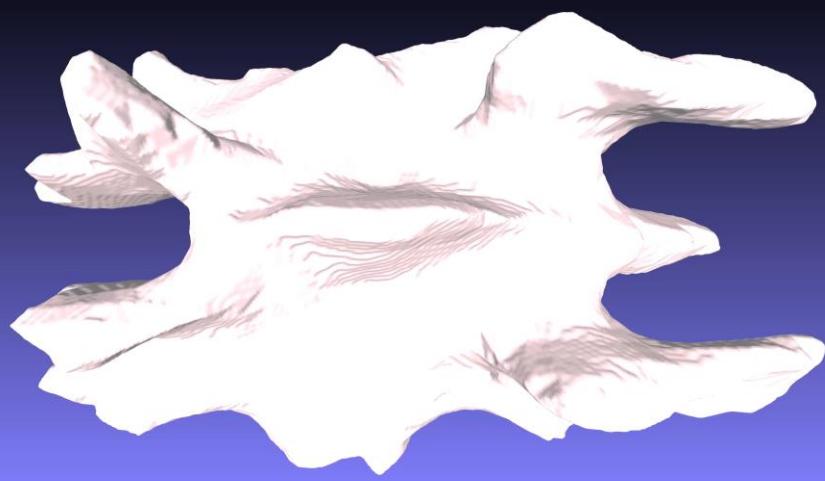
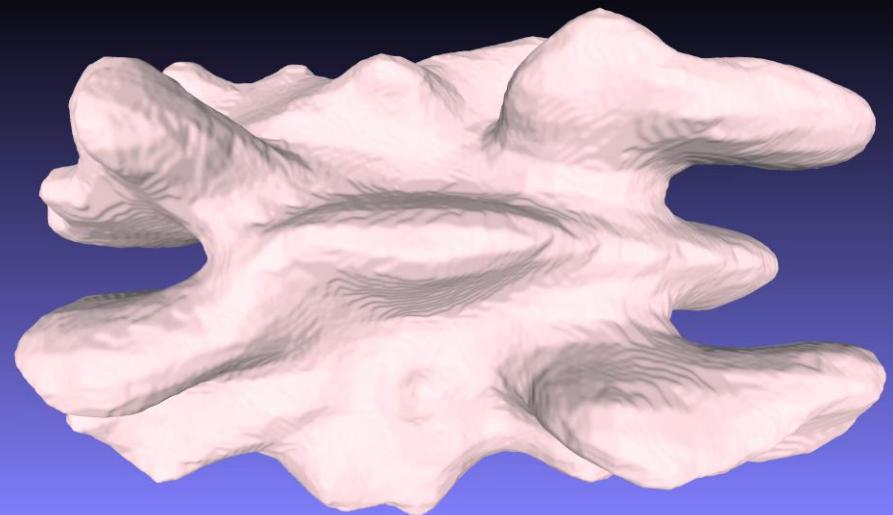
$$A_0 = \frac{T^2}{k^4}$$

$$g = \frac{A_T}{A_E}$$

| Morphometric measure | Original Value = | Span × | Value at lissencephalic limit |
|----------------------|--|----------------------------|--|
| T^2 | T^2 | 1 | $A_0 k^4$ |
| A_0 | $\frac{Ae^5}{At^4}$ | 1 | A_0 |
| A_e | A_e | $g^{\frac{5}{2}}$ | A_0 |
| A_t | A_t | g^5 | A_0 |
| V_{total} | $\approx \frac{2}{9\sqrt{3}\pi} A_e^{\frac{3}{2}}$ | g^6 | $\approx \frac{2}{9\sqrt{3}\pi} A_0^{\frac{3}{2}}$ |
| V_{GM} | $A_t T$ | g^5 | $A_0^{\frac{3}{2}} k^2$ |
| g | $\frac{At}{Ae}$ | g | 1 |
| $N_{features}$ | $\approx \frac{At^5}{Ae^5}$ | g^5 | 1 |
| k | $A_t A_e^{-\frac{5}{4}} T^{\frac{1}{2}}$ | 1 | k |
| s | $A_t^{\frac{3}{2}} A_e^{\frac{3}{4}} T^{-\frac{9}{2}}$ | $g^{\frac{21}{2}}$ | k^{-9} |
| v_I | $A_t A_e T^2$ | g^9 | $A_0^3 k^4$ |
| \hat{k} | $A_t^{\frac{4}{\sqrt{42}}} A_e^{-\frac{5}{\sqrt{42}}} T^{\frac{2}{\sqrt{42}}}$ | 1 | \hat{k} |
| \hat{s} | $A_t^{\frac{2}{\sqrt{14}}} A_e^{\frac{1}{\sqrt{14}}} T^{-\frac{6}{\sqrt{14}}}$ | $g^{\frac{18}{\sqrt{14}}}$ | $\hat{k}^{-3\sqrt{3}}$ |
| \hat{v}_I | $A_t^{\frac{1}{\sqrt{3}}} A_e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} T^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ | $g^{3\sqrt{3}}$ | $A_0 \hat{k}^{\sqrt{14}}$ |



Uma noz derretendo



Uma noz não é um cortex

- Estamos dizendo algo específico sobre a forma do córtex? Sim!

