

电子科技大学

UNIVERSITY OF ELECTRONIC SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

# 硕士学位论文

MASTER THESIS



论文题目      数字相控阵单脉冲测向方法研究

---

学科专业      信号与信息处理

学      号      201821011229

作者姓名      邓宇昊

指导老师      谢菊兰    副教授

分类号 \_\_\_\_\_ 密级 \_\_\_\_\_

UDC 注 1 \_\_\_\_\_

# 学 位 论 文

数字相控阵单脉冲测向方法研究

(题名和副题名)

邓宇昊

(作者姓名)

指导老师

谢菊兰 副教授

电子科技大学 成都

(姓名、职称、单位名称)

申请学位级别 硕士 学科专业 信号与信息处理

提交论文日期 \_\_\_\_\_ 论文答辩日期 \_\_\_\_\_

学位授予单位和日期 电子科技大学 年 月

答辩委员会主席 \_\_\_\_\_

评阅人 \_\_\_\_\_

注 1: 注明《国际十进分类法 UDC》的类号。

# **The Research on Monopulse estimation with Digital Phased Array**

**A Master Thesis Submitted to  
University of Electronic Science and Technology of China**

**Discipline:** Signal and Information Processing

**Author:** Yuhao Deng

**Supervisor:** Dr. Julian Xie

**School:** School of Information and Communication  
Engineering

## 摘 要

这是摘要

.....

**关键词：**关，键，词



## ABSTRACT

This is abstract.

**Keywords:** key, words



## 目 录

第一章 绪 论 .....	1
1.1 研究工作的背景与意义 .....	1
1.2 单脉冲方法的国内外研究历史与现状 .....	1
1.3 本文的主要贡献与创新 .....	1
1.4 本论文的结构安排 .....	1
第二章 相控阵单脉冲测向基本理论 .....	2
2.1 相控阵接收信号模型 .....	2
2.1.1 均匀线阵 .....	2
2.1.2 均匀面阵 .....	3
2.1.3 均匀圆阵 .....	5
2.1.4 共形阵 .....	6
2.2 波束形成技术 .....	7
2.2.1 MVDR 波束形成方法 .....	7
2.2.2 LCMV 波束形成方法 .....	9
2.3 传统单脉冲方法 .....	10
2.3.1 半阵测向 .....	10
2.3.2 加权测向 .....	13
2.3.3 和差比幅 .....	18
2.4 本章小结 .....	19
第三章 仅有旁瓣干扰存在时的单脉冲测向方法 .....	21
3.1 波束优化 .....	21
3.2 遗传类算法 .....	21
3.3 广义旁瓣对消方法 .....	21
3.3.1 广义旁瓣对消得基本原理 .....	21
3.3.2 一种基于准矩阵和 SVD 的阻塞矩阵设计方法 .....	23
3.3.3 均匀线阵旁瓣对消的仿真结果 .....	28
3.4 本章小结 .....	28
第四章 自适应单脉冲测向方法 .....	29
4.1 最大似然方法 .....	29
4.2 MVAM 方法 .....	33



4.3 正交置零主瓣干扰抑制方法.....	36
4.4 线性约束方法 .....	39
4.4.1 联合线性约束方法 .....	39
4.4.2 SVD-线性约束方法 .....	43
4.5 本章小结 .....	45
<b>第五章 极化相控阵的单脉冲测向方法 .....</b>	<b>47</b>
5.1 极化相控阵接收信号模型 .....	47
5.1.1 极子摆放方式相同时的阵列接收信号模型 .....	48
5.1.2 极子摆放方式不同时的阵列接收信号模型 .....	48
5.2 极子摆放方式相同时的极化相控阵单脉冲测向 .....	51
5.2.1 原理 .....	51
5.2.2 性能分析 .....	51
5.2.3 仿真 .....	51
5.3 极子摆放方式不同时的极化相控阵单脉冲测向 .....	51
5.3.1 基本原理 .....	51
5.3.2 仿真 .....	55
5.4 本章小结 .....	55
<b>第六章 全文总结与展望.....</b>	<b>56</b>
6.1 全文总结 .....	56
6.2 后续工作展望 .....	56
<b>致 谢 .....</b>	<b>57</b>
<b>附录 A 中心极限定理的证明 .....</b>	<b>58</b>
A.1 高斯分布和伯努利实验 .....	58
<b>参考文献 .....</b>	<b>59</b>

## 第一章 绪 论

### 1.1 研究工作的背景与意义

### 1.2 单脉冲方法的国内外研究历史与现状

时域积分方程方法的研究始于上世纪 60 年代，

### 1.3 本文的主要贡献与创新

本论文以时域积分方程时间步进算法的数值实现技术、后时稳定性问题以及两层平面波加速算法为重点研究内容，主要创新点与贡献如下：

### 1.4 本论文的结构安排

本文的章节结构安排如下：

## 第二章 相控阵单脉冲测向基本理论

本章将介绍相控阵单脉冲测向的基本原理，首先在第一节中给出几种相控阵的接收信号模型，然后在第二节中介绍波束形成技术，最后在第三节中分析三种常用的传统单脉冲测向方法。在本章中，所有入射信号都假设为远场窄带信号，构成阵列的所有天线均为完全一致且理想的全向天线，没有幅相误差，不考虑阵元间互耦。

### 2.1 相控阵接收信号模型

依据相控阵阵元天线的排布方式，我们可以将相控阵划分为规则阵和共形阵。前者主要有均匀线阵、均匀面阵和均匀圆阵，而后者代指天线排布没有特定几何规律的“一般”阵列。对于远场窄带信号，其一般表达式为  $s(t) = A(t) \exp[-j(2\pi ft + \phi(t))]$ ，其中  $A(t)$  为入射信号的振幅， $\phi(t)$  为初相位。对于入射信号波程差引起的短时延  $\tau$ ，远场窄带信号有式(2-1)成立。

$$\begin{aligned} A(t - \tau) &\approx A(t) \\ \phi(t - \tau) &\approx \phi(t) \end{aligned} \quad (2-1)$$

因此我们可以忽略时延  $\tau$  对信号振幅和初相位的影响。若假设阵列由  $M$  个阵元组成，则可以得到第  $m$  个阵元相对于阵列参考点的输出  $s(t) \exp(-j2\pi f\tau_m)$ 。我们进一步将  $M$  个阵元的输出信号重写为向量形式  $\mathbf{y}$ ，并且假设每个阵元的噪声都是独立同分布的零均值高斯白噪声，即  $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I})$ 。利用上述假设，相控阵接收信号模型可以被表述为式(2-2)。

$$\mathbf{y} = s(t)\mathbf{a} + \mathbf{n} \quad (2-2)$$

式(2-2)中，向量  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  称为导向向量，是一个与信号入射方向以及阵元排布方式有关的向量。在接下来的小节中，我们将讨论不同阵列的导向向量。

#### 2.1.1 均匀线阵

均匀线阵是指阵列的所有阵元等间距分布在一条线（如  $x$  轴）上的阵列。在本节中我们设相邻两阵元的间距为  $d$ 。若考虑一远场窄带信号  $s(t)$ ，以俯仰角  $\varphi$  入射到由  $M$  个阵元组成的均匀线阵上，如图2-1所示。

对于均匀线阵，俯仰角  $\varphi$  的定义域通常为  $\varphi \in (-90^\circ, 90^\circ)$ 。设阵列参考点为

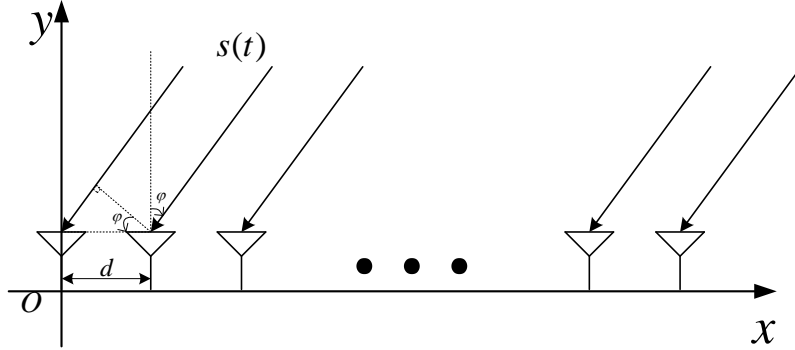


图 2-1 均匀线阵接收信号模型

$O$ ，即左起第一个阵元。由几何关系我们可以得知，第  $m$  个阵元相对于参考点的波程差为  $(m-1)d \sin \varphi$ ，因此我们可以得到第  $m$  个阵元相对于参考点的时延  $\tau_m$ 。

$$\tau_m = \frac{(m-1)d \sin \varphi}{c} \quad (2-3)$$

利用式(2-3)，均匀线阵的导向向量可以由式(2-4)表出。

$$\mathbf{a}(\varphi) = \left[ 1, \exp\left(j \frac{2\pi d \sin \varphi}{\lambda}\right), \dots, \exp\left(j \frac{2\pi(M-1)d \sin \varphi}{\lambda}\right) \right]^T \quad (2-4)$$

在均匀线阵中，要求相邻两阵元间距  $d \leq \lambda/2$ ，否则会造成相位混叠，进而影响单脉冲测向。

### 2.1.2 均匀面阵

均匀面阵是指所有阵元分布在一个矩形平面如  $xOy$  平面上，所有阵元共面。其  $x$  轴方向上的任意两相邻阵元间距均为  $d_x$ ， $y$  轴方向上的任意两相邻阵元间距均为  $d_y$ ，如图2-2所示。

图2-2中，期望信号  $s(t)$  以方位角  $\theta$  和俯仰角  $\varphi$  入射到该均匀面阵上。一般情况下，方位角  $\theta$  的定义域取  $\theta \in [-180^\circ, 180^\circ)$ ，俯仰角的定义域取  $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ)$ 。若假设该均匀面阵共有  $M \times N$  个阵元，其中  $x$  轴方向上  $M$  行， $y$  轴方向上  $N$  列。依

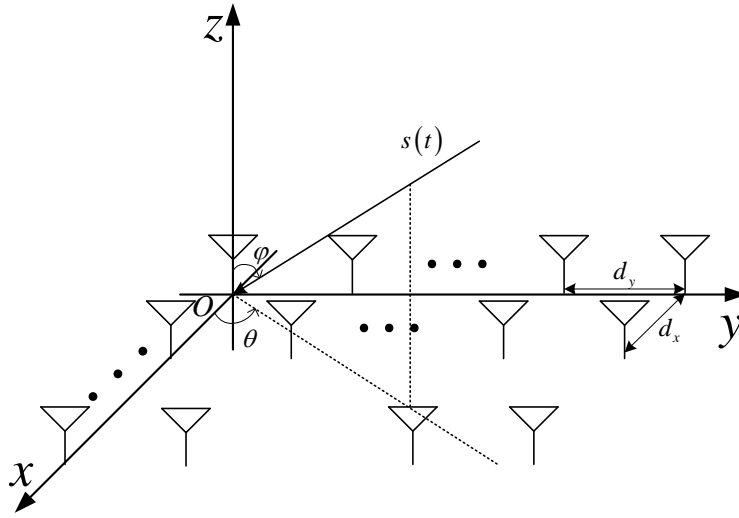


图 2-2 均匀面阵接收信号模型

照几何关系依旧可以得到第  $(m, n)$  个阵元相对于参考点的波程差，进一步得到时延  $\tau_{m,n}$ 。

$$\tau_{m,n} = \frac{(m-1)d_x \sin \varphi \cos \theta + (n-1)d_y \sin \varphi \sin \theta}{c} \quad (2-5)$$

因此可以构造一个  $M \times N$  的矩阵  $\mathbf{S}$ ，它的第  $m$  行，第  $n$  列元素是第  $(m, n)$  个阵元相对于参考点的相位差，即(2-6)式。

$$[\mathbf{S}]_{m,n} = \exp \left( j \frac{2\pi}{\lambda} [(m-1)d_x \sin \varphi \cos \theta + (n-1)d_y \sin \varphi \sin \theta] \right) \quad (2-6)$$

我们利用上一节中均匀线阵的导向向量形式(2-4)，可以将矩阵  $\mathbf{S}$  重写为(2-7)式。

$$\mathbf{S}(\theta, \varphi) = \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y^T \quad (2-7)$$

式(2-7)中，向量  $\mathbf{a}_x \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  和  $\mathbf{a}_y \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  分别为  $x$  轴方向和  $y$  轴方向上均匀线阵形式的导向向量，其定义由式(2-8)表出。

$$[\mathbf{a}_x]_m = \exp \left( j \frac{2\pi(m-1)d_x \sin \varphi \cos \theta}{\lambda} \right) \quad (2-8a)$$

$$[\mathbf{a}_y]_n = \exp \left( j \frac{2\pi(n-1)d_y \sin \varphi \sin \theta}{\lambda} \right) \quad (2-8b)$$

最后，我们将矩阵  $\mathbf{S}$  按列优先重排得到均匀面阵的导向向量  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{MN \times 1}$ 。

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \text{vec}(\mathbf{a}_x \mathbf{a}_y^T) \quad (2-9)$$

上式中， $\text{vec}(\cdot)$  表示按列优先重排向量。

### 2.1.3 均匀圆阵

均匀圆阵指阵列中的所有阵元都均匀分布在一个半径为  $R$  的圆上，且所有阵元共面。通常情况下，以圆心  $O$  作为阵列参考点，如图2-3所示。

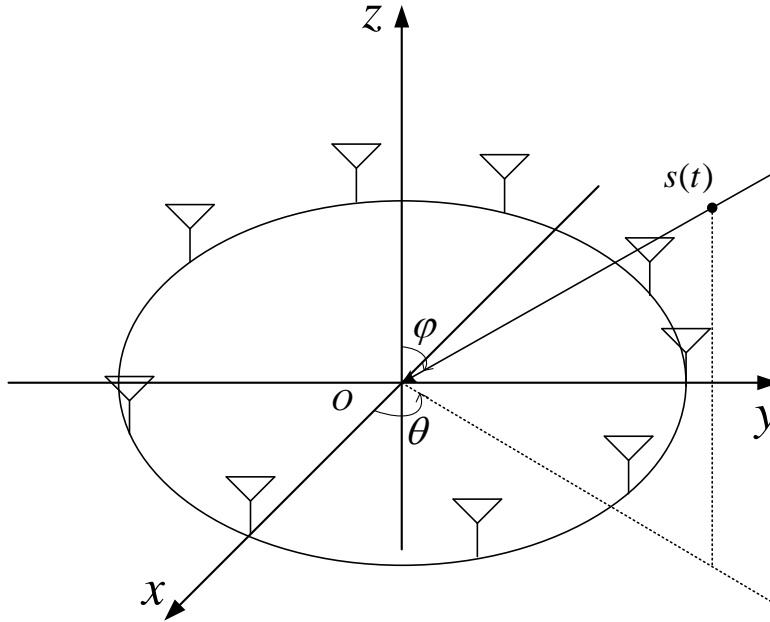


图 2-3 均匀圆阵接收信号模型

假设一期望信号以方位角  $\theta$ ，俯仰角  $\varphi$  入射到  $M$  个阵元组成的均匀圆阵上。由于  $M$  个阵元均分圆周，即任意两相邻两阵元的圆弧长相等，因此我们可以得到第  $m$  个阵元的坐标  $\mathbf{r}_m$ 。

$$\mathbf{r}_m = [R \cos \phi_m, R \sin \phi_m, 0]^T \quad (2-10)$$

式(2-10)中， $\phi_m$  表示第  $m$  个阵元与  $x$  轴的夹角，我们限定其定义域为  $\phi_m \in [-\pi, \pi)$ ，

然后给出  $\phi_m$  的表达式(2-11)。

$$\phi_m = 2\pi \frac{-(M-1)/2 + m - 1}{M} \quad (2-11)$$

利用  $\mathbf{r}_m$  和入射信号角度可以计算出第  $m$  个阵元相对于参考点  $O$  的波程差, 进一步得到均匀圆阵导向向量  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 。该导向向量的元素由式(2-12)表出。

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(\theta, \varphi)]_m &= \exp \left[ j \frac{2\pi R}{\lambda} (\cos \phi_m \sin \varphi \cos \theta + \sin \phi_m \sin \varphi \sin \theta) \right] \\ &= \exp \left[ j \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \varphi \cos (\theta - \phi_m) \right] \end{aligned} \quad (2-12)$$

#### 2.1.4 共形阵

共形阵没有特定的几何规则, 导向向量往往与参考点的选取有关。考虑一个远场窄带信号  $s(t)$ , 以方位角  $\theta$  和俯仰角  $\varphi$  入射到由  $M$  个阵元组成的共形阵上, 如图2-4所示。假设共形阵的参考点为坐标原点  $O$ , 第  $m$  个阵元的位置向量为

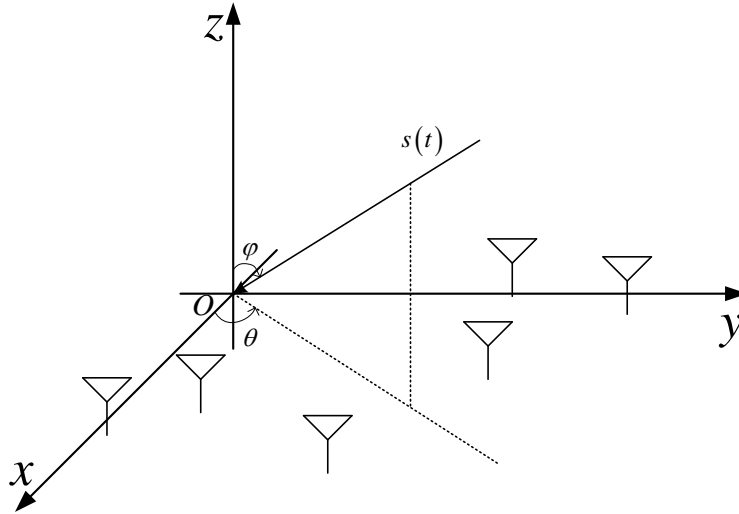


图 2-4 共形阵接收信号模型

$\mathbf{r}_m = [x_m, y_m, z_m]^T$ 。入射信号的方向向量由式(2-13)给出。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = -[\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi]^T \quad (2-13)$$

因此，我们可以得到第  $m$  个阵元相对于参考点  $O$  的相位差  $u_m$

$$u_m = \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{r}_m^T\boldsymbol{\varepsilon}_p\right) \quad (2-14)$$

进一步得到共形阵的导向向量  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 。

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \left[ \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{r}_1^T\boldsymbol{\varepsilon}_p\right), \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{r}_2^T\boldsymbol{\varepsilon}_p\right), \dots, \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{r}_M^T\boldsymbol{\varepsilon}_p\right) \right]^T \quad (2-15)$$

式(2-15)是相控阵导向向量的一般表达式，前几个小节中的规则阵列导向向量均可以使用式(2-15)表出。

## 2.2 波束形成技术

波束形成技术是一种相控阵的空域处理技术，其主要目的是让阵列形成指向，使得阵列接收信号功率集中于目标方向附近，同时抑制非目标方向的干扰。波束形成的主要原理是通过对阵列中的各个阵元的输出信号进行加权补相并求和，使得目标方向上的相位叠加增强，而非目标方向上的相位叠加相消。让阵列对准目标方向，形成一个指向目标的“波束”，同时对于其余方向上的干扰以及噪声有一定抑制。在本章中，我们将以半波长间距的均匀线阵为例，分析波束形成的原理和一般过程。

### 2.2.1 MVDR 波束形成方法

MVDR 方法即最小方差无失真响应方法，本节我们将以单信源入射均匀线阵为例分析其原理。考虑一期望信号  $s(t)$  由方向  $\varphi_0$  入射到  $M$  阵元的均匀线阵上，由式(2-2)知  $M$  个阵元的输出记为向量  $\mathbf{y}$ 。现假设有一  $M$  个抽头的空域滤波器，其权向量为  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 。阵列的输出信号通过该滤波器的输出为  $z$ ，由式(2-16)表出。

$$z = \mathbf{w}^H \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{w}^* \quad (2-16)$$

上式中， $\cdot^*$  表示转置。利用式(2-16)可以得到该滤波器输出的平均功率  $\sigma^2$ 。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\{|z|^2\} \\ &= E\{\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}\} \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2-17)$$

式(2-17)中，矩阵  $\mathbf{Q} = E\{\mathbf{y} \mathbf{y}^H\}$  是干扰叠加噪声（即不含有期望信号）的协方差矩阵。

由于期望信号的入射方向是  $\varphi_0$ ，利用式(2-2)和式(2-16)可知，理想情况下（不



考虑噪声) 滤波器的输出应该是式(2-18)中的  $z_0$ 。

$$z_0 = \mathbf{w}^H \mathbf{y}(\varphi_0) = \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_0) s(t) \quad (2-18)$$

由于我们要求空域滤波器在目标方向上无失真的通过, 因此我们可以令约束条件为式(2-19)。

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_0) = 1 \quad (2-19)$$

同时, 为了抑制其他方向上的干扰和噪声, 我们还需要使得滤波器输出的平均功率最小, 因此, 该波束形成问题可以表述为一个带约束条件的优化问题, 如式(2-20)所示。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_0) = 1 \end{aligned} \quad (2-20)$$

我们可以用拉格朗日乘子法求解该问题, 首先构造代价函数  $J(\mathbf{w})$ 。

$$J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} + \mu (\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_0) - 1) \quad (2-21)$$

然后对代价函数  $J(\mathbf{w})$  求梯度, 并令其等于  $\mathbf{0}$  向量。

$$\nabla J(\mathbf{w}) = 2\mathbf{Q}\mathbf{w} - 2\mathbf{a}(\varphi_0) = \mathbf{0} \quad (2-22)$$

求解式(2-22)我们可以得到  $\mathbf{w}$  的解。

$$\mathbf{w} = \mu \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\varphi_0) \quad (2-23)$$

注意式(2-23)中, 只要干扰信号是非相干的, 那么协方差矩阵  $\mathbf{Q}$  一定可逆。本小节中只存在一个期望信号, 无干扰, 而我们假设每个阵元的噪声都是独立同分布的高斯白噪声, 此时矩阵  $\mathbf{Q}$  一定可逆。然后将式(2-23)代入式(2-19), 我们可以得到拉格朗日乘子  $\mu$ 。

$$\mu = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\varphi_0) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\varphi_0)} \quad (2-24)$$

最后, 我们将式(2-24)代入(2-23), 得到 MVDR 权向量的最优解  $\mathbf{w}_o$ 。

$$\mathbf{w}_o = \frac{\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\varphi_0)}{\mathbf{a}^H(\varphi_0) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\varphi_0)} \quad (2-25)$$

MVDR 方法要求干扰源的个数小于或等于  $M - 1$ , 否则将会导致协方差矩阵

$Q$  的退化, 我们将  $M-1$  称为阵列的自由度。对于满足各态历经性的信号  $\mathbf{y}$ , 我们可以用时间平均估计出其统计平均, 并由此得到协方差矩阵的估计量。

### 2.2.2 LCMV 波束形成方法

MVDR 方法的局限性在于, 它只有一组约束条件, 即期望信号无失真通过。当阵列需要在多个方向上形成波束, 或者在指定方向上形成零点抑制干扰时, MVDR 方法就无法胜任这一工作了。因此在本小节中, 我们将介绍一种线性约束最小方差方法, 即 LCMV 方法。

LCMV 方法的基本原理相同, 我们仍旧需要使空域滤波器的平均输出功率最小, 但此时约束条件发生了改变。假设一个  $M$  阵元的均匀线阵, 若需要形成  $L$  个波束, 在  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_L$  方向上保持接收信号的单位增益, 同时需要形成  $P$  个零陷, 在  $\varphi_{L+1}, \varphi_{L+2}, \dots, \varphi_{L+P}$  方向上形成零陷用于抑制干扰。此时, 我们可以将多个约束条件写成矩阵乘法的形式, 如式(2-26)所示。

$$\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (2-26)$$

上式中, 矩阵  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times (L+P)}$  称为约束矩阵, 向量  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{(L+P) \times 1}$  为对应的约束向量。对于上述约束条件, 我们可以将其表述为式(2-27)。

$$\mathbf{C} = [\mathbf{a}(\varphi_1), \dots, \mathbf{a}(\varphi_L), \mathbf{a}(\varphi_{L+1}), \dots, \mathbf{a}(\varphi_{L+P})] \quad (2-27a)$$

$$\mathbf{f} = [1, \dots, 1, 0, \dots, 0]^T \quad (2-27b)$$

类似于 MVDR 方法, 我们依旧可以将该问题表述为一个带约束条件的优化问题, 即式(2-28)。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2-28)$$

同样利用拉格朗日乘子法构造代价函数, 并令其梯度为  $\mathbf{0}$  向量, 然后解得

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\mu} \quad (2-29)$$

注意, 上式中的向量  $\boldsymbol{\mu}$  是拉格朗日乘子, 然后将式(2-29)代入式(2-26)中得到

$$\boldsymbol{\mu} = 2 (\mathbf{C}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (2-30)$$

最后将式(2-30)代入式(2-29)得到 LCMV 的最优权向量  $\mathbf{w}_o$ ，由式(2-31)表出。

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (2-31)$$

与 MVDR 方法一样，LCMV 也存在阵列自由度  $M - 1$ ，约束条件的个数  $L + P \leq M - 1$ ，否则将会引起协方差矩阵  $\mathbf{Q}$  的退化。实际上，MVDR 方法是 LCMV 方法的一种特殊情况，即约束条件的个数只有一个。LCMV 方法给出了一种广义形式，在后续的自适应单脉冲测向中，我们还会用到该方法。

## 2.3 传统单脉冲方法

在上一节中，我们假设波束形成的方向  $\varphi_0$  和期望信号的真实方向  $\varphi_s$  是一致的。但在实际情况中，由前端处理得到的波束指向角  $\varphi_0$  并不一定等于  $\varphi_s$ ，往往还相差了一个较小的角度  $\pm \Delta\varphi$ ，但真实角度  $\varphi_s$  一般处于波束的 3dB 宽度以内。因此，我们需要一种方法在已知波束指向角的情况下测量期望信号的真实方向。单脉冲测向方法就是用于解决该问题的。通常情况下，单脉冲测向方法需要在阵列的输出端分别形成和波束与差波束，其中和波束要求在波束指向处形成主瓣增益，而差波束则需要在波束指向处形成零陷。然后利用单脉冲比即差和比估计出期望信号方向与波束指向间的差值  $\Delta\varphi$ ，进一步得到期望信号的真实方向。

传统的单脉冲测向方法主要由三种，分别是半阵法、加权法和和差比幅法，我们在接下来的小节中将会依次结束这三种方法。值得注意的是，这三种方法都是静态非自适应方法，不依赖于干扰叠加噪声的统计特性。其中只有加权测向方法可以抑制旁瓣干扰，并且三种方法都无法抑制主瓣干扰。三种方法的主要区别在于和波束与差波束的形成方式不同。

### 2.3.1 半阵测向

半阵测向方法利用阵列的几何对称性来构造和差波束权向量，因此主要用于均匀线阵和均匀面阵这种拥有范德蒙德结构导向向量的规则阵列。本节中我们以线阵为例，解析半阵测向的原理和过程。

首先考虑一  $2M$  阵元的均匀线阵，阵元间距为  $d$ ，波束指向为  $\varphi_0$ 。由于和波束要求在波束指向  $\varphi_0$  处形成主瓣增益，因此我们可以取和波束权  $\mathbf{w}_\Sigma$  为指向  $\varphi_0$  处的导向向量。

$$\mathbf{w}_\Sigma = \mathbf{a}(\varphi_0) \quad (2-32)$$

利用均匀线阵的对称性，我们取差波束  $\mathbf{w}_\Delta$  为

$$\mathbf{w}_\Delta = [\overbrace{-1, \dots, -1}^M, \overbrace{1, \dots, 1}^M]^T \odot \mathbf{a}(\varphi_0) \quad (2-33)$$

式(2-33)中， $\odot$  表示 Hadamard 积。假设期望信号的入射方向为  $\varphi_s$ ，其导向向量为  $\mathbf{a}(\varphi_s)$ ，和波束输出为  $\Sigma(\varphi_s)$ ，差波束输出为  $\Delta(\varphi_s)$ 。

$$\Sigma(\varphi_s) = \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\varphi_s) = \sum_{m=1}^{2M} \exp \left[ j \frac{2\pi(m-1)d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] \quad (2-34a)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_s) = \mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\varphi_s) &= \sum_{m=M+1}^{2M} \exp \left[ j \frac{2\pi(m-1)d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] \\ &\quad - \sum_{m=1}^M \exp \left[ j \frac{2\pi(m-1)d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] \end{aligned} \quad (2-34b)$$

为便于化简，我们设波束  $P$  为

$$P = \sum_{m=1}^M \exp \left[ j \frac{2\pi(m-1)d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] \quad (2-35)$$

然后将式(2-35)代入(2-34)得到

$$\Sigma(\varphi_s) = P \left( \exp \left[ j \frac{2\pi M d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] + 1 \right) \quad (2-36a)$$

$$\Delta(\varphi_s) = P \left( \exp \left[ j \frac{2\pi M d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] - 1 \right) \quad (2-36b)$$

我们令  $u = \sin \varphi_s - \sin \varphi_0$ ，利用欧拉公式进一步得到半阵法的单脉冲比 MRC

$$\begin{aligned} \text{MRC} &= \frac{\Delta(\varphi_s)}{\Sigma(\varphi_s)} \\ &= \frac{\exp \left( j \frac{\pi M d}{\lambda} u \right) - \exp \left( -j \frac{\pi M d}{\lambda} u \right)}{\exp \left( j \frac{\pi M d}{\lambda} u \right) + \exp \left( -j \frac{\pi M d}{\lambda} u \right)} \\ &= j \frac{\sin (\pi M d u / \lambda)}{\cos (\pi M d u / \lambda)} \\ &= j \tan \left( \frac{\pi M d}{\lambda} u \right) \end{aligned} \quad (2-37)$$

在单脉冲测向的场景中，通常假设目标真实方向  $\varphi_s$  与阵列波束指向  $\varphi_0$  相差较小，由此可知  $u = \sin \varphi_s - \sin \varphi_0$  趋近于 0。同时由于  $\pi M / \lambda$  为一有限值，我们可以利用等价无穷小  $\tan x \sim x$  将单脉冲比 MRC 近似为

$$\text{MRC} = j \frac{\pi M}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \quad (2-38)$$

最后利用 Taylor 展开式将  $\sin \varphi_s$  在  $\varphi_0$  处展开，并舍弃二阶及其以上的高次项并代入式(2-38)得到

$$\text{MRC} = j \frac{\pi M d}{\lambda} \cos \varphi_0 (\varphi_s - \varphi_0) \quad (2-39)$$

若我们取  $\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_0$  作为偏离角，则可以得到一个关于  $\Delta\varphi$  的线性函数。接下来我们通过一个例子展示半阵法的和差波束以及单脉冲比曲线（MRC）。

考虑一个 8 阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，若我们设阵列波束指向  $\varphi_0 = 0^\circ$ ，和波束与差波束如图2-5所示，半阵法的单脉冲比曲线如图2-6所示。

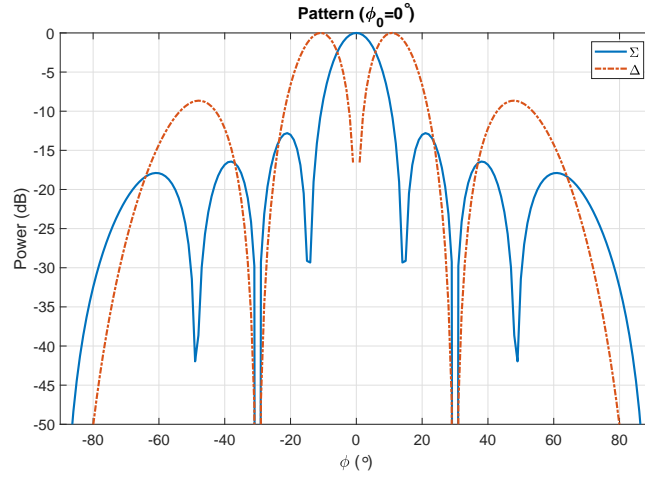


图 2-5 半阵法的和波束  $\Sigma$  与差波束  $\Delta$

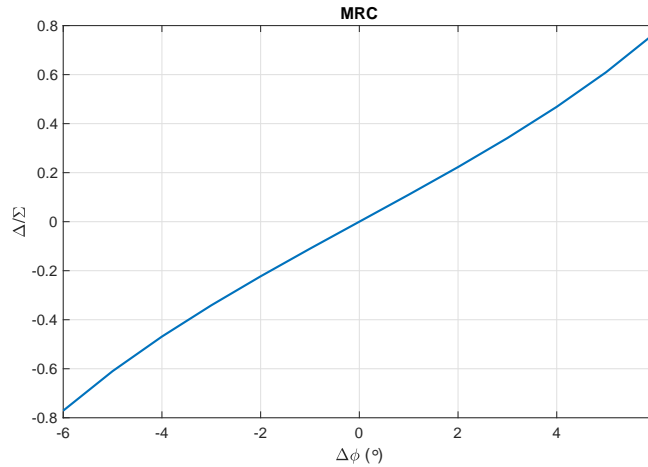


图 2-6 半阵法的单脉冲比曲线

从图2-5中我们可以看出，和波束的主瓣对准了  $\varphi_0 = 0^\circ$ ，3dB 衰减边界大致位于  $\pm 6^\circ$  处。差波束在波束指向  $\varphi_0$  处形成了一个较深的零陷，注意图2-5截断了衰减  $-50\text{dB}$  以下的部分。

对于单脉冲曲线图2-6，我们可以得知当角度  $\varphi$  与波束指向角  $\varphi_0$  较为接近时，MRC 的线性度较好，而在远离波束指向的地方，MRC 的线性度较差。这意味着期望信号的真实方向  $\varphi_s$  偏离波束指向  $\varphi_0$  越多，该方法的测量误差也就越大。

### 2.3.2 加权测向

半阵法理论过程简明清晰，且 MRC 有显式的表达式，但其利用了阵列对称性，因此只能用于均匀线阵和均匀面阵。并且半阵法和差波束权向量直接选取了波束指向的导向向量，因此旁瓣抑制比较低，当测向环境中出现强旁瓣干扰时，可能会使得该方法失效。因此，另一种设计和差波束权的方式应运而生。

加权法通过对波束指向处的导向向量  $\mathbf{a}(\varphi_0)$  进行加窗处理，从而设计出一种满足给定旁瓣抑制比的和差波束。传统的和差波束窗分别是 Taylor 窗和 Bayliss 窗，在作者的原文中，这两种窗分别由圆形孔径和线形孔径天线（模拟天线，非阵列）导出，而在接下来的内容中，我们将其扩展到均匀线阵上。

首先考虑一个长度为  $2a$  质地均匀的线形天线孔径，取其中点为参考点  $O$ ，并假设信号以角度  $\varphi$  入射，如图2-7所示。

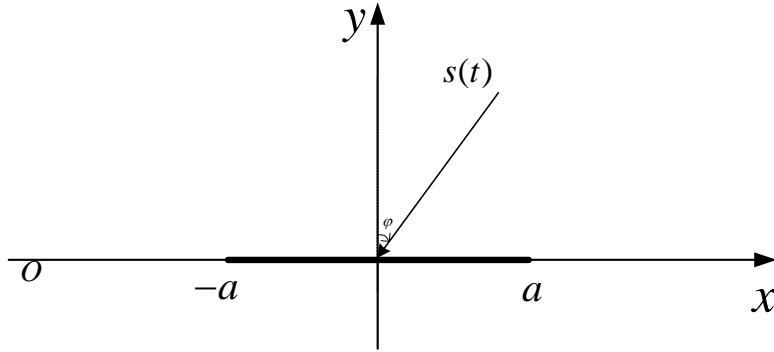


图 2-7 线性孔径接收信号模型

利用天线理论我们可以得知，线形孔径的响应函数  $F(u)$  为

$$F(u) = \int_{-a}^a g(x) e^{jux} dx \quad (2-40)$$

上式中,  $g(x)$  为孔径函数, 即线形孔径上每个微元的单位冲激响应函数, 并且由

$$u = \frac{2a}{\lambda} \sin \varphi \quad (2-41a)$$

$$x = \frac{\pi}{a} \quad (2-41b)$$

式(2-41)中,  $\lambda$  为入射信号波长,  $2a$  为线形孔径的长度,  $\varphi$  为期望信号入射角度, 如图2-7所示。由于和波束要求响应函数为偶函数, 因此我们将孔径函数  $g(x)$  以余弦级数展开得到式(2-42)。

$$g_{\Sigma}(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\bar{n}-1} B_l \cos(\mu_l x), & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2-42)$$

对于线形孔径, 我们可以取  $\mu_l = l$ 。式(2-42)中,  $\bar{n}$  是我们期望抑制的邻近 (主瓣) 旁瓣个数。我们定义对数旁瓣抑制比为 SLL

$$\text{SLL} = 20 \lg \eta = 10 \lg (v_s^2 / v_m^2) \quad (2-43)$$

式(2-43)中,  $v_s^2$  和  $v_m^2$  分别为旁瓣功率和主瓣功率。在线形孔径的条件下, 系数  $B_l$  由式(2-44)表出。

$$B_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ (-1)^{m+1} \frac{\prod_{n=1}^{\bar{n}-1} 1 - \frac{m^2}{\sigma^2 [A^2 + (n-1/2)^2]}}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\bar{n}-1} 1 - \frac{m^2}{n^2}}, & 0 < m < \bar{n} \\ 0, & m \geq \bar{n} \end{cases} \quad (2-44)$$

式(2-44)中,  $A$  和  $\sigma^2$  由式(2-45)表出。

$$A = \text{acosh} \left( 10^{-\text{SLL}/20} \right) / \pi \quad (2-45a)$$

$$\sigma^2 = \frac{\bar{n}^2}{A^2 + (\bar{n} - 1/2)^2} \quad (2-45b)$$

利用式(2-42)、(2-43)、(2-44)和(2-45) 我们就可以针对该线形孔径设计出符合要求的和波束权。

现在我们将该结论扩展到均匀线阵上。考虑一个  $M$  阵元的均匀线阵, 阵元间距为半波长。均匀线阵可以看作是对线形孔径的等间距采样, 此时阵列的输出由式(2-40)变为向量内积, 即式(2-46)。

$$f(\varphi) = \mathbf{g}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\varphi) \quad (2-46)$$

上式中,  $\mathbf{a}(\varphi)$  为导向向量,  $\mathbf{g}_\Sigma$  为 Taylor 幅度权向量。由于均匀线阵是对线形孔径的等间距采样, 因此我们可以得到  $\mathbf{g}_\Sigma$  的表达式

$$\mathbf{g}_\Sigma = [g_\Sigma(x_1), g_\Sigma(x_2), \dots, g_\Sigma(x_M)]^T \quad (2-47)$$

式(2-47)中,  $g_\Sigma(x)$  为(2-42)中线形孔径函数  $g(x)$  的余弦展开式。而  $x_1, x_2, \dots, x_M$  表示在区间  $[-\pi, \pi]$  中均匀的取  $M$  个点, 由此得到  $M$  阵元均匀线阵的 Taylor 幅度权。

由于 Taylor 权向量  $\mathbf{g}_\Sigma$  为幅度权, 不含有相位。因此我们可以通过式(2-48)得到任意波束指向  $\varphi_0$  的和波束权。

$$\mathbf{w}_\Sigma = \mathbf{g}_\Sigma \odot \mathbf{a}(\varphi_0) \quad (2-48)$$

上式中,  $\odot$  表示 Hadamard 积。

接下来, 我们讨论基于 Bayliss 幅度权的差波束权向量。与 Taylor 权类似, 均匀线阵的 Bayliss 权依旧可以从线形孔径模型下扩展得到。同样, 我们考虑一个长度为  $2a$  的线形孔径, 取其中点为参考点  $O$ , 入射信号波长为  $\lambda$ , 角度为  $\varphi$ , 如图2-7所示。其响应函数  $F(u)$  同式(2-40)。由于差波束要求响应函数为奇函数, 因此我们将孔径函数  $g(x)$  展开为正弦级数, 如式(2-49)所示。

$$g_\Delta(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\bar{n}-1} B_l \sin(\mu_l x), & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2-49)$$

对于线形孔径, 我们可以取  $\mu_l = l + 1/2$ 。同样的, 我们定义旁瓣抑制比 SLL, 定义式同式(2-43), 以及期望约束的邻近 (主瓣) 旁瓣个数  $\bar{n}$ 。在线形孔径的条件下, 系数  $B_l$  由式(2-50)表出。

$$B_m = \begin{cases} \frac{C(-1)^m}{2^j} (m - 1/2)^2 \frac{\prod_{n=1}^{\bar{n}-1} 1 - \left(\frac{m+1/2}{\sigma Z_n}\right)^2}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\bar{n}-1} 1 - \left(\frac{m+1/2}{l+1/2}\right)^2}, & 0 \leq m \leq \bar{n} - 1 \\ 0, & m > \bar{n} - 1 \end{cases} \quad (2-50)$$

上式中,  $C$  为常数,  $\sigma$  称为展宽因子, 表达式为

$$\sigma = \frac{\mu_{\bar{n}}}{Z_{\bar{n}}} = \frac{\bar{n} + 1/2}{Z_{\bar{n}}} \quad (2-51)$$



而  $Z_n$  的定义则由式(2-52)给出。

$$Z_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \xi_n, & 0 < n \leq 4 \\ \sqrt{A^2 + n^2}, & n > 4 \end{cases} \quad (2-52)$$

式(2-52)中,  $\xi_n$  和  $A$  是与旁瓣抑制比 SLL 有关的常数, 可由表2-1给出的 SLL 四阶多项式系数算出。

常量	多项式系数				
	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
A	0.30387530	-0.05042922	-0.00027989	-0.00000343	-0.00000002
$\xi_1$	0.98583020	-0.03338850	0.00014064	0.00000190	0.00000001
$\xi_2$	2.00337487	-0.01141548	0.00041590	0.00000373	0.00000001
$\xi_3$	3.00636321	-0.00683394	0.00029281	0.00000161	0.00000000
$\xi_4$	4.00518423	-0.00501795	0.00021735	0.00000088	0.00000000

表 2-1  $A$  和  $Z_n$  的多项式系数

例如,  $A$  可以由式(2-53)计算得出。

$$A = C_0 + C_1 \text{SLL} + C_2 \text{SLL}^2 + C_3 \text{SLL}^3 + C_4 \text{SLL}^4 \quad (2-53)$$

最后, 利用式(2-49)、(2-50)、(2-51)和(2-52)并结合表2-1即可设计出满足给定指标 SLL 和  $\bar{n}$  的线形孔径权。

均匀线阵的 Bayliss 权向量推到与 Taylor 权向量类似, 我们依旧将均匀线阵看作是对线形孔径的等间距采样。若假设均匀线阵有  $M$  个阵元, 由式(2-47)可以启发得到

$$\mathbf{g}_\Delta = [g_\Delta(x_1), g_\Delta(x_2), \dots, g_\Delta(x_M)]^T \quad (2-54)$$

式(2-54)中,  $x_1, x_2, \dots, x_M$  是对区间  $[-\pi, \pi]$  均匀采样的  $M$  个点。类似的, Bayliss 权也是一个幅度权, 不含有相位信息。因此, 任意波束指向  $\varphi_0$  的 Bayliss 差波束权可以由式(2-55)导出。

$$\mathbf{w}_\Delta = \mathbf{g}_\Delta \odot \mathbf{a}(\varphi) \quad (2-55)$$

至此, 我们已经给出了均匀线阵的 Taylor 和波束权与 Bayliss 差波束权。注意, 本节中的公式以及结论仅使用于均匀线阵, 若需将其拓展到均匀面阵和均匀圆阵, 可以查阅文献 [1] 和 [2], 推导方法与本节类似。接下来我们将以一个均匀线阵的

例子来展示加权法的和差波束权以及单脉冲曲线。

考虑一个 8 阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长。我们取阵列波束指向  $\varphi_0 = 0^\circ$ ，旁瓣抑制比 SLL 为  $-35\text{dB}$ ，抑制邻近旁瓣的个数  $\bar{n} = 4$ 。Taylor 权与 Bayliss 权形成的和差波束如图2-8所示。

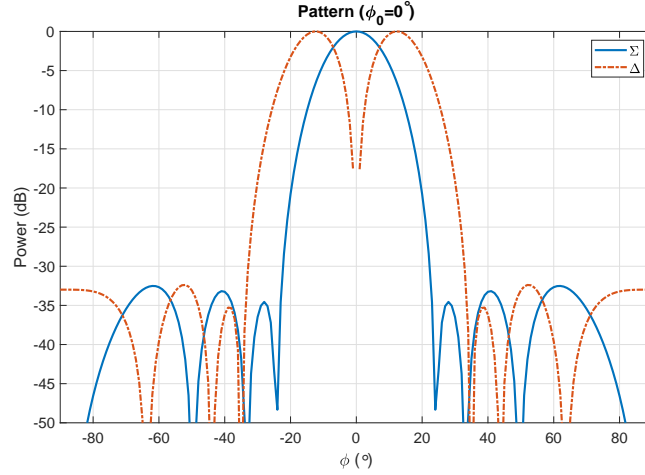


图 2-8 Taylor 权形成的和波束  $\Sigma$  与 Bayliss 权形成的差波束  $\Delta$

与半阵法的和差波束图2-5相比，加权法得到的和差波束具有更低的旁瓣电平。这意味着加权法具有更好的旁瓣抑制效果，能够应对存在旁瓣干扰的单脉冲测向场景。但加窗的步骤使得主瓣展宽，和波束的 3dB 截止角度此时位于  $\pm 8^\circ$  附近。另外，加权法的单脉冲比 MRC 没有显式表达式，我们需要预先对 MRC 进行线性拟合才能够在单脉冲测向系统中使用它。图2-9给出了加权法的单脉冲比曲线。

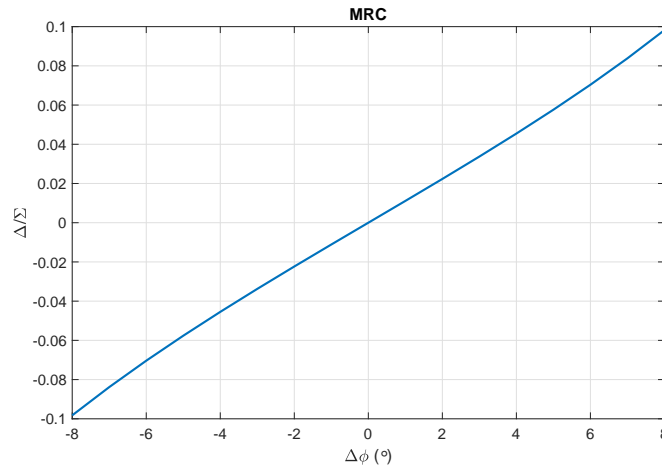


图 2-9 加权法的单脉冲比曲线

类似的，从图2-9中可以得知，在远离波束指向  $\varphi_0$  时，MRC 的线性度会下降，从而使得此时的测角误差变大。

### 2.3.3 和差比幅

半阵法和加权法最大的局限性在于，它们都需要依赖于阵列的特殊结构。前者要求阵列排布具有对称性，后者只能用于规则阵列且不具普适性，每种不同阵列的权向量表达形式可能会大相径庭。而本节中将介绍一种名为和差比幅法的单脉冲测向方法。该方法的和差波束形成方式不依赖于阵列结构，因此可以用于共形阵。

为简化问题，我们依旧以均匀线阵为例来解析和差比幅测向法的一般过程。首先考虑一个  $M$  阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，期望信号波长为  $\lambda$ ，阵列波束指向为  $\varphi_0$ 。与半阵法类似，我们首先构造和波束权。由于和波束要求在波束指向处形成主瓣增益，因此我们取波束指向  $\varphi_0$  处的导向向量作为和波束权，即

$$\mathbf{w}_\Sigma = \mathbf{a}(\varphi_0) \quad (2-56)$$

现在构造差波束权。由于差波束要求在波束指向处形成零陷，因此，一种可取的方法是：首先以波束指向  $\varphi_0$  为中心，关于  $\varphi_0$  对称分别选取两个角度  $\varphi_l$  和  $\varphi_r$ ，一般情况下，我们选择和波束主瓣的 3dB 截止角度作为  $\varphi_l$  和  $\varphi_r$  的值；然后我们将差波束  $\Delta(\varphi)$  构造为两个波束之差

$$\Delta(\varphi) = |\mathbf{a}^H(\varphi_l)\mathbf{a}(\varphi)| - |\mathbf{a}^H(\varphi_r)\mathbf{a}(\varphi)| \quad (2-57)$$

同理，比幅法也需要将和波束处理为幅度值，即式

$$\Sigma(\varphi) = |\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\varphi)| \quad (2-58)$$

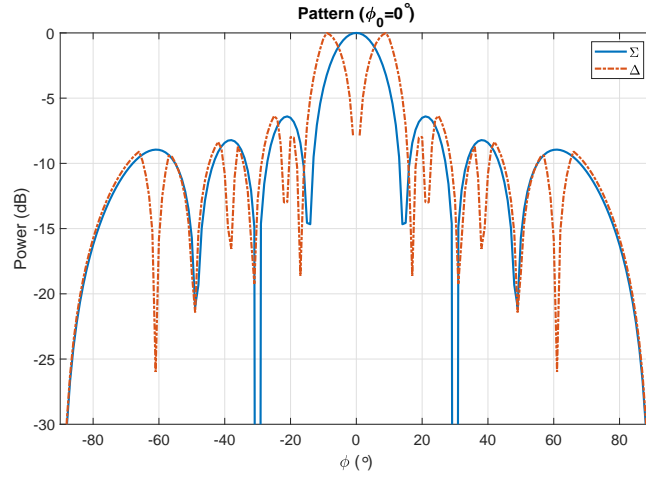
最后结合式(2-58)与(2-57)，得到比幅法的单脉冲比

$$\text{MRC} = \frac{\Delta(\varphi)}{\Sigma(\varphi)} = \frac{|\mathbf{a}^H(\varphi_l)\mathbf{a}(\varphi)| - |\mathbf{a}^H(\varphi_r)\mathbf{a}(\varphi)|}{|\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\varphi)|} \quad (2-59)$$

从式(2-59)中可以看出，比幅测向顾名思义，是以差波束与和波束的幅度比作为单脉冲比，实际上利用了左右波束的对称性，而不局限于阵列本身几何结构的特殊性，因此可以用于共形阵。但该方法受阵列波束特性的影响，比如阵列的主瓣过宽时，可能会导致测向结果较差。接下来我们仍然通过一个均匀线阵的例子来展示其特性。

考虑一个 8 阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，波束指向  $\varphi_0 = 0^\circ$ ，我们取  $\varphi_l = -5^\circ$  且  $\varphi_r = 5^\circ$ 。此时和差波束如图2-10所示。

从图2-10中可以看出，与半阵法类似，比幅法的差波束依然在波束指向  $\varphi_0$  处

图 2-10 比幅法的和波束  $\Sigma$  与差波束  $\Delta$ 

形成了零陷，且旁瓣电平较高，难以抑制旁瓣干扰，仍旧无法用于存在强旁瓣干扰的场景。另外，比幅法的单脉冲比 **MRC** 也不存在一个显式表达式，因此只能通过曲线拟合拟合出其斜率，然后在单脉冲测向系统中用于测向。其单脉冲比曲线如图2-11所示。

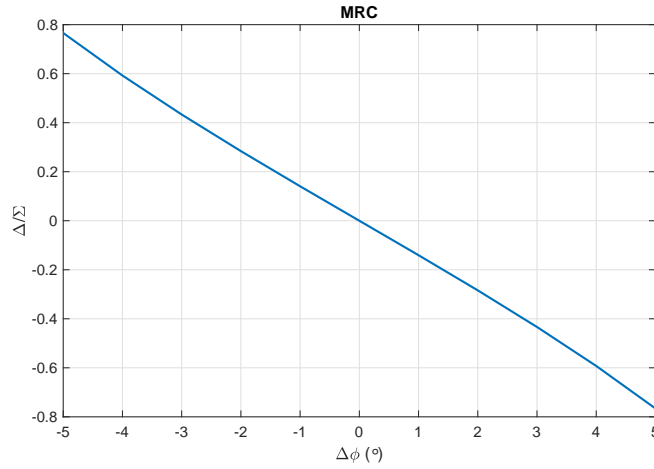


图 2-11 比幅法的单脉冲比曲线

与之前的两种方法类似，**MRC** 在远离波束指向角  $\varphi_0$  时线性度会下降，进而影响测角精度。

## 2.4 本章小结

本章中，我们假设组成相控阵的所有阵元天线都是完全一致的全向天线，并给出了相控阵接收信号的数学模型，进而简要的阐述了波束形成技术和传统单脉冲测向方法。

首先是相控阵的数学模型，依据阵元排布的方式，我们将其划分为两大类，第一类是规则的阵列主要包含均匀线阵，均匀面阵和均匀圆阵。我们通过几何光学计算出信号到达各个阵元的波程差，进一步给出其相位差，在远场窄带信号的假设下，给出了这三种阵列的导向向量。第二类阵列是共形阵，主要特征为其“一般”性，即阵元排布不遵循某一特定规律。在这种情况下，我们利用信号的方向余弦向量以及每个阵元的笛卡尔坐标计算出信号到达每个阵元的相位差，进而给出一般导向向量表达式。值得注意的是，第一类规则阵列实际上是共形阵列的一种特殊形式，其导向向量依然可以根据共形阵导向向量导出。

接着我们介绍了波束形成技术，阐述了波束形成的目的和一般手段。然后介绍了两种波束形成方法，分别是 MVDR 方法和 LCMV 方法。前者可以保证在设定的指向角  $\varphi_0$  处形成主瓣增益，同时抑制干扰和噪声；后者则可以在多个指向角同时形成波束和零陷，用于接收信号和抑制干扰。实际上，MVDR 方式是 LCMV 方法的一种特殊形式，即规定在指向角  $\varphi_0$  处信号无失真通过。在后续的章节中，我们还将利用 LCMV 结构进行单脉冲测向。

最后我们给出了三种常用的传统单脉冲测向方法，分别是半阵法、加权法和比幅法，三种方法的优缺点各异。半阵法主要更近均匀线阵或均匀面阵的对称性，构造出和差波束权向量。而在单脉冲测向问题中，期望信号的真实方向  $\varphi_s$  往往接近于波束指向  $\varphi_0$ ，因此半阵法利用该特性导出一个关于偏离角  $\Delta\varphi$  的显式线性函数，进一步用于测向过程。该方法简单易于实现，但依赖于阵列的几何结构，不能用于均匀圆阵和共形阵，并且其和差波束的旁瓣电平都较高，无法应对有强旁瓣干扰存在时的场景。因此，T. Taylor 和 E. T. Bayliss 分别提出了一种和差波束加权方法，进而设计出一种低旁瓣的和差波束权向量。该方法可以用于均匀线阵、均匀面阵和均匀圆阵，其优点在于底旁瓣的波束能够在一定程度上抑制旁瓣干扰。但加窗的处理过程使得和波束主瓣有一定程度的展宽，可能会造成测向精度下降，并且这种方法的单脉冲比没有显式表达式，因此只能先进行曲线拟合，再将拟合好的数据用于后续的单脉冲测向过程。另外，该方法虽然可以拓展至均匀圆阵，但仍旧无法将其用于共形阵。第三种方法是比幅测向法，该方法通过选取关于波束指向  $\varphi_0$  对称的两个角度的导向向量来构造差波束，并且单脉冲比直接用差波束与和波束的赋值进行比较，以此测量偏离角  $\Delta\varphi$ 。该方法不受限于阵列结构，可以用于共形阵单脉冲测向。但该方法与半阵法类似，和波束旁瓣电平仍然较高，无法应对强旁瓣干扰存在的场景。

### 第三章 仅有旁瓣干扰存在时的单脉冲测向方法

本章中，

#### 3.1 波束优化

#### 3.2 遗传类算法

#### 3.3 广义旁瓣对消方法

##### 3.3.1 广义旁瓣对消得基本原理

旁瓣对消的基本流程如图3-1所示。在图3-1中，向量  $\mathbf{y}_m$  和  $\mathbf{y}_a$  分别是主阵列

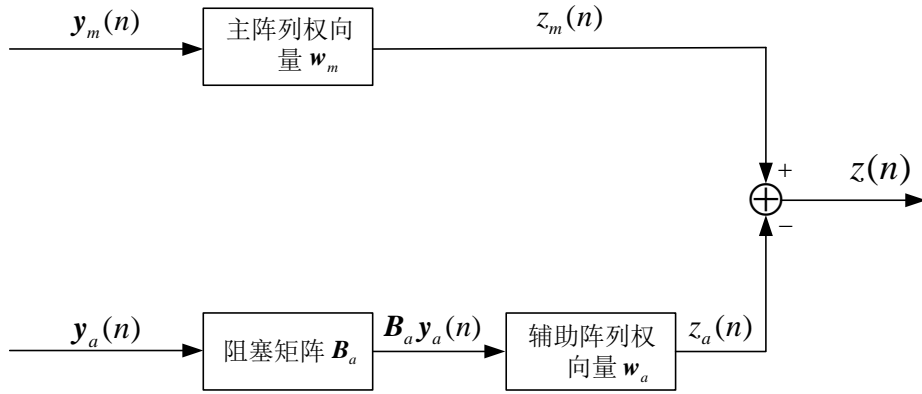


图 3-1 旁瓣对消流程示意图

和辅助阵列的阵元接收信号。辅助阵列接收信号  $\mathbf{y}_a$  通过阻塞矩阵  $\mathbf{B}_a$  后抑制期望信号  $s(t)\mathbf{a}(\varphi_s)$ ，而旁瓣干扰保留进入辅助阵列的波束形成器，最后利用加法器  $\mathbf{z}_m(n) - \mathbf{z}_a(n)$  得到输出  $\mathbf{z}(n)$ ，由于波束  $\mathbf{z}_m(n)$  和  $\mathbf{z}_a(n)$  中都含有旁瓣干扰，因此相互抵消，从而使得最终输出  $\mathbf{z}(n)$  中不含有旁瓣干扰。下面我们将以均匀线阵为例，阐述旁瓣对消的过程和一般原理。

首先考虑一个  $M_m + M_a$  阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，入射信号波长为  $\lambda$ ，主阵列为  $M_m$  阵元的子阵，辅助阵列为  $M_a$  阵元的子阵，并且它们的波束指向均为  $\varphi_0$ 。我们设期望信号入射方向与波束指向相同，即  $\varphi_0 = \varphi_s$ ，并且有  $K$  个旁瓣干扰信号，其角度分别为  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K$ 。由式(2-2)可以得到主阵列的输出信号

$z_m(n)$  和辅助阵列输出信号  $z_a(n)$

$$\mathbf{y}_m(n) = \mathbf{a}_m(\varphi_0)s(n) + \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_m(\varphi_k)s_k(n) + \mathbf{n}_m \quad (3-1a)$$

$$\mathbf{y}_a(n) = \mathbf{a}_a(\varphi_0)s(n) + \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_a(\varphi_k)s_k(n) + \mathbf{n}_a \quad (3-1b)$$

为简化符号，我们设

$$\mathbf{v}_m = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_m(\varphi_k)s_k(n) + \mathbf{n}_m \quad (3-2a)$$

$$\mathbf{v}_a = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_a(\varphi_k)s_k(n) + \mathbf{n}_a \quad (3-2b)$$

利用式(3-1)和式(3-2)结合图3-1分别得到旁瓣对消器的输出  $z(n)$

$$\begin{aligned} z(n) &= z_m(n) - z_a(n) \\ &= \mathbf{w}_m^H \mathbf{a}_m(\varphi_0)s(n) + \mathbf{w}_m^H \mathbf{v}_m - z_a(n) \end{aligned} \quad (3-3)$$

在式(3-3)中，旁瓣对消器要求辅助阵列输出  $z_a(n)$  不含有期望信号  $s(n)$ ，否则将会使得最终输出  $z(n)$  中的期望信号分量随着旁瓣干扰一并抵消。因此，我们有必要设计一个阻塞矩阵  $\mathbf{B}_a$ ，使得式(3-4)成立。

$$\mathbf{B}_a \mathbf{a}_a(\varphi_0)s(n) = \mathbf{0} \quad (3-4)$$

在第二节中，我们会介绍一种阻塞矩阵的设计方法。为后续公式的导出，我们这里先假设式(3-4)成立，此时辅助阵列的输出  $z_a(n)$  为

$$z_a(n) = \mathbf{w}_a^H (\mathbf{B}_a \mathbf{a}_a(\varphi_0)s(n) + \mathbf{B}_a \mathbf{v}_a) = \mathbf{w}_a^H \mathbf{B}_a \mathbf{v}_a \quad (3-5)$$

将式(3-5)代入式(3-3)我们得到

$$z(n) = \mathbf{w}_m^H \mathbf{a}_m(\varphi_0)s(n) + \mathbf{w}_m^H \mathbf{v}_m - \mathbf{w}_a^H \mathbf{B}_a \mathbf{v}_a \quad (3-6)$$

对于旁瓣对消器的输出  $z(n)$ ，我们需要使得其干扰叠加噪声分量最小，因此构造代价函数  $J(\mathbf{w}_a)$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}_a) &= E \left\{ \left| \mathbf{w}_m^H \mathbf{v}_m - \mathbf{w}_a^H \mathbf{B}_a \mathbf{v}_a \right|^2 \right\} \\ &= \mathbf{w}_m^H \mathbf{Q}_{mm} \mathbf{w}_m - \mathbf{w}_m^H \mathbf{Q}_{ma} \mathbf{B}_a^H \mathbf{w}_a - \mathbf{w}_a^H \mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{am} \mathbf{w}_m + \mathbf{w}_a^H \mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{B}_a^H \mathbf{w}_a \end{aligned} \quad (3-7)$$

式(3-7)中，矩阵  $\mathbf{Q}_{mm}$  和  $\mathbf{Q}_{aa}$  表示主阵列自相关和辅助阵列自相关矩阵，矩阵  $\mathbf{Q}_{am}$

和  $\mathbf{Q}_{ma}$  表示主阵列与辅助阵列的互相关矩阵，其定义由式(3-8)给出。

$$\mathbf{Q}_{mm} = E \{ \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m^H \} \quad (3-8a)$$

$$\mathbf{Q}_{aa} = E \{ \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^H \} \quad (3-8b)$$

$$\mathbf{Q}_{am} = E \{ \mathbf{v}_a \mathbf{v}_m^H \} \quad (3-8c)$$

$$\mathbf{Q}_{ma} = E \{ \mathbf{v}_m \mathbf{v}_a^H \} \quad (3-8d)$$

对式(3-7)中的代价函数  $J(\mathbf{w}_a)$  求梯度并令其等于零向量，我们可以得到辅助阵列权向量  $\mathbf{w}_a$  的最优解

$$\mathbf{w}_a = (\mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{B}_a^H)^{-1} \mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{am} \mathbf{w}_m \quad (3-9)$$

最后我们结合图3-1与式(3-3)得到广义旁瓣对消器的输出  $z(n)$ 。

$$\begin{aligned} z(n) &= z_m(n) - z_a(n) \\ &= \mathbf{w}_m^H \mathbf{y}_m(n) - \mathbf{w}_a^H \mathbf{y}_a(n) \\ &= \mathbf{w}_m^H \mathbf{y}_m(n) - (\mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{B}_a^H)^{-1} \mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{am} \mathbf{w}_m \mathbf{y}_a(n) \end{aligned} \quad (3-10)$$

注意，在整个推导过程中，我们假设主阵列权向量  $\mathbf{w}_m$  和阻塞矩阵  $\mathbf{B}_a$  都是已知的，并且自相关和互相关矩阵也可以由各态历经性从时间平均中得出。阻塞矩阵  $\mathbf{B}_a$  的选取通常是不唯一的，且对于不同的阵列，可能出现不同的结构，例如对于均匀线阵，其导向向量如式(2-4)，一种可行的阻塞矩阵为式(3-11)。

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \exp(j\phi_0) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(j\phi_0) & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(j\phi_0) & -1 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

上式中， $\phi_0 = 2\pi d \sin \phi_0 / \lambda$  且  $\mathbf{B}_a \in \mathbb{C}^{(M_a-1) \times M_a}$ ，此时阻塞矩阵  $\mathbf{B}_a$  满足条件(3-4)。但我们注意到，辅助阵列的权向量  $\mathbf{w}_a$  此时也被限定为一个  $(M_a - 1) \times 1$  的向量，即辅助阵列的自由度会将为  $M_a - 1$ 。在随后的小节中，我们将介绍一种更为灵活的阻塞矩阵设计方式。

### 3.3.2 一种基于准矩阵和 SVD 的阻塞矩阵设计方法

本节我们将介绍一种灵活的阻塞矩阵设计方法，该方法 Fernández 等人 15 年提出 [3]。该方法巧妙的利用了准矩阵和 SVD 设计阻塞矩阵，在本节中，我们将



以均匀线阵为例，给出该方法的一般过程。

首先考虑一个  $M$  阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，入射信号为远场窄带信号，波长为  $\lambda$ 。我们设窄带波束为  $\mathbf{b}(s)$ ，其对应的波束形成权向量为  $\mathbf{x}$ ，由此可以得到式(3-12)。

$$\mathbf{F}(s)\mathbf{x} = \mathbf{b}(s) \quad (3-12)$$

上式中， $\mathbf{F}(s)$  是  $M$  列的准矩阵， $\mathbf{b}(s)$  是准向量。准矩阵  $\mathbf{F}(s)$  的第  $m$  列是一个连续函数，如式(3-13)所示。

$$f_m(s) = \exp(j\pi(m-1)s) \quad (3-13)$$

式(3-13)中， $f_m$  表示矩阵  $\mathbf{F}(s)$  的第  $m$  列，而  $-1 \leq s \leq 1$  为一个连续变量，表示阵列波束指向角的余弦值。而矩阵  $\mathbf{F}(s)$  的  $k$  行（作为准矩阵，实际上矩阵  $\mathbf{F}(s)$  有无穷多行）是对应角度余弦值为  $s_k$  的导向向量，即

$$\mathbf{f}_k = [1, \exp(j\pi s_k), \exp(j\pi s_k), \dots, \exp(j\pi(M-1)s_k)] \quad (3-14)$$

准向量  $\mathbf{b}(s)$  的结构类似，表示整个空域  $s$  的波束。

现在我们需要定义准向量的内积，考虑两个  $[a, b] \times 1$  维的准列向量  $\mathbf{x}(s)$  和  $\mathbf{y}(s)$ ，我们定义其内积为式(3-15)。

$$\mathbf{x}^H(s)\mathbf{y}(s) = \int_a^b x^*(s)y(s)ds \quad (3-15)$$

上式中， $*$  表示共轭。我们注意到，准矩阵  $\mathbf{F}(s)$  实际上是一个列酉形矩阵，因此可以得到

$$\mathbf{F}^H(s)\mathbf{F}(s) = \mathbf{P} \quad (3-16)$$

式(3-16)中，矩阵  $\mathbf{P}$  的第  $m$  行第  $n$  列元素定义为

$$P_{m,n} = \int_{-1}^1 \exp(j\pi s(n-m)) ds = 2 \text{sinc}(n-m) \quad (3-17)$$

结合式(3-16)和(3-17)我们可以得到

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^H(s)\mathbf{F}(s) = 2\mathbf{I} \quad (3-18)$$

利用式(3-18)的结论，我们给准矩阵  $\mathbf{F}(s)$  的前面乘上一个系数  $1/\sqrt{2}$ ，使之归一化。现在准矩阵  $\mathbf{F}(s)$  满足列酉矩阵特性了，即  $\mathbf{F}^H(s)\mathbf{F}(s) = \mathbf{I}$ ，那么我们可以由

式(3-12)及最小二乘法则构造优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & (\mathbf{F}(s)\mathbf{x} - \mathbf{b}(s))^H (\mathbf{F}(s)\mathbf{x} - \mathbf{b}(s)) \\ \text{s.t. } \quad & \mathbf{x} = \mathbf{F}^H(s)\mathbf{b}(s) \end{aligned} \quad (3-19)$$

式(3-19)中, 向量  $\mathbf{x}$  的第  $m$  个元素由式(3-20)给出。

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 b(s) \exp(-j\pi s(m-1)) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}\{\mathbf{b}(s)\} \big|_{f=(m-1)/2} \end{aligned} \quad (3-20)$$

上式中,  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  表示傅里叶变换。

现在, 我们考虑设计一个阻塞矩阵, 其阻带为  $s_a \leq s \leq s_b$ , 此时结合式(3-19), 我们可以构造出代价函数

$$J(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{F}(s)\mathbf{x} - \mathbf{b}(s))^H (\mathbf{F}(s)\mathbf{x} - \mathbf{b}(s)) - \boldsymbol{\mu}^H (\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{d}) \quad (3-21)$$

式(3-21)中,  $\boldsymbol{\mu}$  表示  $L$  个元素的拉格朗日乘子, 约束矩阵  $\mathbf{G}$  的第  $l$  行定义为

$$\mathbf{g}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, \exp(j\pi s_l), \exp(j\pi 2s_l), \dots, \exp(j\pi(M-1)s_l)] \quad (3-22)$$

我们对式(3-21)中的代价函数  $J(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$  求梯度, 并令其为零, 结合约束条件得到向量  $\mathbf{x}$  的解

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{G}) \mathbf{F}^H(s)\mathbf{b}(s) + \mathbf{G}(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{d} \quad (3-23)$$

对于阵列的固有静态波束形成器, 我们有

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{w} \quad (3-24)$$

成立, 将式(3-24)代入(3-23), 我们得到

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{G}) \mathbf{w} + \mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{d} \quad (3-25)$$

式(3-25)中, 向量  $\mathbf{w}$  是阵列的静态权, 比如选取波束指向处的导向向量  $\mathbf{w} = \mathbf{a}(\varphi_0)$  或是第二章中介绍的 Taylor 权。现在, 我们的目标转变为根据给定的要求, 构造约束矩阵  $\mathbf{G}$  和约束向量  $\mathbf{d}$ 。

在本节中, 我们的任务是构造一个满足要求的阻塞矩阵。因此, 对于阻带

$s_a \leq s \leq s_b$  我们可以令约束向量  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ 。此时(3-25)式被写为

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{G})\mathbf{w} \quad (3-26)$$

为简化后续公式推导，可以定义投影矩阵  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{G}) \quad (3-27)$$

矩阵  $\mathbf{H}$  将向量  $\mathbf{w}$  投影到约束矩阵  $\mathbf{G}$  的零空间。

我们假设共有  $L$  点用于形成波束指向的阻带。然后对约束矩阵  $\mathbf{G}$  做 SVD 得到

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H \quad (3-28)$$

式(3-28)中，矩阵  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times L}$  和  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  都是酉矩阵，而矩阵  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}_+^{L \times M}$  是一个拟对角矩阵，对角元为正奇异值和 0，且一般情况下，按递减排序。因此我们可以将矩阵  $\mathbf{V}$  分块得到

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 : \mathbf{V}_2] \quad (3-29)$$

式(3-29)中，波束指向个数一般小于阵元数即  $L \leq M$ 。此时式(3-27)可以改写为

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{V}_1\mathbf{V}_1^H = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_2^H \quad (3-30)$$

然后利用准矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的性质，我们构造一个矩阵  $\mathbf{P}_G \in \mathbb{C}^{M \times M}$

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_G]_{m,n} &= \mathbf{G}^H(s)\mathbf{G}(s) = \frac{1}{2} \int_{s_a}^{s_b} \exp(j\pi(n-m)s) ds \\ &= \frac{s_b - s_a}{2} \exp(j\pi(n-m)(s_a + s_b)/2) \text{sinc}\left(\frac{(n-m)(s_b - s_a)}{2}\right) \end{aligned} \quad (3-31)$$

式(3-31)中， $[\cdot]_{m,n}$  表示矩阵的第  $m$  行第  $n$  列元素， $s_a \leq s \leq s_b$  为设计阻塞矩阵所要求的阻带。我们可以进一步将式(3-31)改写为

$$\mathbf{P}_G = \mathbf{D}\hat{\mathbf{P}}_G\mathbf{D}^H \quad (3-32)$$

上式中，矩阵  $\mathbf{D}$  是一个  $M \times M$  的对角酉矩阵，对角元为

$$D_{m,m} = \exp(j\pi(m-1)s_c) \quad (3-33)$$

而半正定的 Toeplitz 矩阵  $\hat{\mathbf{P}}_G$  定义为

$$[\mathbf{P}_G]_{m,n} = \frac{W}{2} \text{sinc}\left(\frac{(n-m)W}{2}\right) \quad (3-34)$$

式(3-33)和(3-34)中,

$$s_c = (s_a + s_b)/2 \quad (3-35a)$$

$$W = (s_b - s_a) \quad (3-35b)$$

上式中,  $s_c$  为阻带中心点,  $W$  为带宽。同样的, 我们对矩阵  $\mathbf{P}_G$  做 SVD 并将式(3-28)代入得到

$$\mathbf{P}_G = \mathbf{V}\mathbf{S}^H\mathbf{S}\mathbf{V}^H = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{S}^H\mathbf{S}\tilde{\mathbf{V}}^H\mathbf{D}^H \quad (3-36)$$

式(3-36)中,  $\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{S}^H\mathbf{S}\tilde{\mathbf{V}}^H$  可以视作矩阵  $\hat{\mathbf{P}}_G$  的特征分解, 且其特征值为实数。由于  $\hat{\mathbf{P}}_G$  是一个缺秩矩阵, 因为一般情况下  $L \ll M$ , 所以我们可以取  $\mathbf{S}$  的前  $L$  个大对角元构成矩阵  $\mathbf{S}_L$  将矩阵  $\hat{\mathbf{P}}_G$  近似为

$$\hat{\mathbf{P}}_G \approx \tilde{\mathbf{V}}_1\mathbf{S}_L^2\tilde{\mathbf{V}}_1^H \quad (3-37)$$

上式中,

$$\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{V}}_1 : \tilde{\mathbf{V}}_2] \quad (3-38)$$

因此我们得到

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}_1 \quad (3-39)$$

最后我们结合式(3-30)和(3-39)得到投影矩阵

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}_1\tilde{\mathbf{V}}_1^H\mathbf{D}^H \quad (3-40)$$

在给定阵列静态权  $\mathbf{w}$  的情况下, 结合(3-26)和(3-27) 以及(3-40)式即可得到在波束指向  $\varphi_0$  处产生阻带的权向量。在接下来的内容中, 我们将以一个均匀线阵为例, 展示该方法的阻塞矩阵效果。

考虑一个 16 阵元的均匀线阵, 阵元间距为半波长, 波束指向为  $\varphi_0 = 0^\circ$ , 设定阻带为  $-5^\circ$  到  $5^\circ$ , 对于式(3-37)中的近似, 我们分别取  $L = 5$  和  $L = 3$ 。此时阻塞矩阵形成的波束  $\Sigma_b$  与波束指向导向向量形成的波束  $\Sigma$  如图3-2所示。

从图3-2的结果中我们可以看出, 该方法在  $-5^\circ \leq \varphi \leq 5^\circ$  处形成了阻带, 且阻塞效果, 即主瓣抑制比随着近似点数  $L$  的增加而增大, 也就是说  $L$  越大, 设计的阻塞矩阵效果越好。

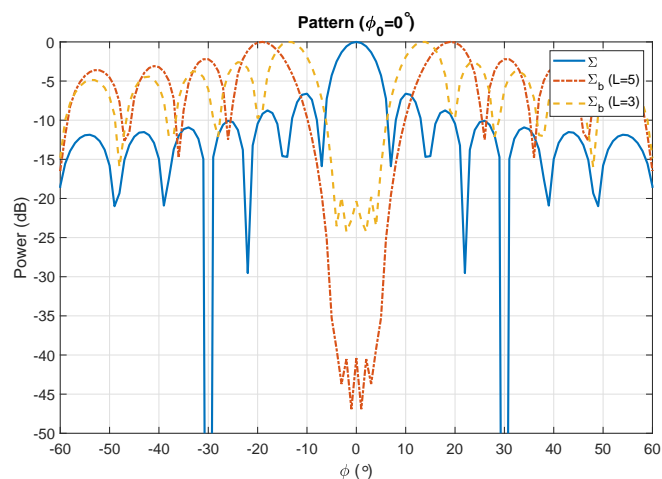


图 3-2 阻塞矩阵形成的波束  $\Sigma_b$

### 3.3.3 均匀线阵旁瓣对消的仿真结果

## 3.4 本章小结

本章首先研究了时域积分方程时间步进算法的阻抗元素精确计算技术，分别采用 DUFFY 变换法与卷积积分精度计算法计算时域阻抗元素，通过算例验证了计算方法的高精度。

## 第四章 自适应单脉冲测向方法

本章中，

### 4.1 最大似然方法

最大似然估计是一种自适应单脉冲测向方法，其核心在于利用已有的观测样本建立起似然函数  $\mathcal{L}(\theta)$ ，然后求该似然函数的最大解，得到待估计参数  $\hat{\theta} = \operatorname{argmax} \mathcal{L}(\theta)$ 。U. Nickel 在 1993 年将该方法应用到了单脉冲系统中 [4]。该方法的优势在于，不受限于具体的阵列形式，只要能够知道干扰叠加噪声的统计特性，就可以利用该方法进行求解。

我们以一个  $M$  行  $N$  列的均匀面阵为例，分析该方法的导出过程。首先对于均匀面阵，我们可以利用式(2-2)和(2-9)得到其接收信号模型

$$\mathbf{y} = s(t)\mathbf{a}(\theta) + \mathbf{n} \quad (4-1)$$

式(4-1)中，复数  $s(t)$  表示期望信号的振幅，向量  $\theta = [\theta, \varphi]^T$  表示入射角度，噪声向量  $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{MN \times 1}$  表示各阵元的噪声（或干扰叠加噪声）。若假设噪声向量服从复高斯分布  $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{Q})$ ，则可知阵列接收数据的概率分布为  $\mathbf{y} \sim \mathcal{CN}(s(t)\mathbf{a}(\theta), \mathbf{Q})$ ，进一步我们可以得到其概率密度函数为式(4-2)。

$$p(\mathbf{y} | \theta, s(t)) = \pi^{-M} |\mathbf{Q}|^{-1} \exp \left[ -[\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\theta)]^H \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\theta)] \right] \quad (4-2)$$

然后我们先对该密度函数取负对数似然，并去掉无关的常数部分，得到

$$S(\theta, s(t)) = -\mathcal{L}(\theta, s(t)) = [\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\theta)]^H \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\theta)] \quad (4-3)$$

首先对上式中的参数  $s(t)$  求最小二乘解得到

$$s(t) = [\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\theta)]^{-1} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y} \quad (4-4)$$

我们将式(4-4)代入(4-3)并去掉所有与参数  $\theta$  无关的常数项得到其似然函数(4-5)。

$$S(\theta) = \mathbf{y}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\theta) [\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\theta)]^{-1} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y} \quad (4-5)$$

为简化符号，定义  $\mathbf{w}(\theta)$  为自适应和波束权向量，由式(4-6)表出。

$$\mathbf{w}(\theta) = [\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\theta)]^{-1/2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \quad (4-6)$$

将式(4-6)代入(4-5)，我们可以将似然函数  $S(\boldsymbol{\theta})$  重写为

$$S_{\text{scan}}(\boldsymbol{\theta}) = \left| \mathbf{w}^H(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{y} \right|^2 \quad (4-7)$$

接下来我们求解似然函数。为便于求解，我们令  $F(\boldsymbol{\theta}) = \ln [S_{\text{scan}}(\boldsymbol{\theta})]$ 。这样不改变似然函数的单调性，且期望信号方向的估计值  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  可以由式(4-8)给出。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} F(\boldsymbol{\theta}) \quad (4-8)$$

然后用牛顿梯度法给出对数似然函数  $F(\boldsymbol{\theta})$  的解，即式(4-9)。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0 - \mathbf{H}^{-1} \nabla F(\boldsymbol{\theta}) \quad (4-9)$$

上式中，矩阵  $\mathbf{H} = \nabla^2 F(\boldsymbol{\theta})$  是对数似然函数  $F(\boldsymbol{\theta})$  的海森矩阵。在牛顿法中，还需要一个初值  $\boldsymbol{\theta}_0$ ，幸运的是，单脉冲测向系统中恰好可以用阵列波束指向  $\boldsymbol{\theta}_0$  作为初值。

对于均匀面阵，其导向向量如式(2-8)和(2-9)所示，为便于后续求导，我们可以将其改写为

$$[\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})]_i = \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} (x_i u + y_i v) \right] \quad (4-10)$$

式(4-10)中， $x_i$  和  $y_i$  表示第  $i$  个阵元（一般按列优先）的坐标，而参数  $u$  和  $v$  表示  $x$  和  $y$  方向上的方向余弦

$$u = \sin \varphi \cos \theta \quad (4-11a)$$

$$v = \sin \varphi \sin \theta \quad (4-11b)$$

注意，此处我们假设均匀面阵位于  $xOy$  平面，若位于坐标系其他平面，则方向余弦  $u$  和  $v$  及阵元坐标可能不一样。现在，首先求对数似然函数关于的一阶偏导数，为简化符号，我们记一阶导数  $F_u = \partial F / \partial u$ 。并且求得

$$\begin{aligned} F_u &= \frac{(S_{\text{scan}})_u}{S_{\text{scan}}} \\ &= \frac{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}_u}{\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y}} \right\} \end{aligned} \quad (4-12)$$

式(4-12)中，自适应和波束权向量  $\mathbf{w}$  的一阶导数  $\mathbf{w}_u$  定义如式(4-13)所示。

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_u &= \left(\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}\right)^{-1/2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}_u - \text{Re} \left\{ \mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a} / \mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a} \right\} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{d}_x - \mu_x \mathbf{w}\end{aligned}\quad (4-13)$$

上式中，

$$\mathbf{d}_x = \left(\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}\right)^{-1/2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}_u \quad (4-14a)$$

$$\mu_x = \text{Re} \left\{ \mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a} / \mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a} \right\} \quad (4-14b)$$

我们定义向量  $\mathbf{d}_x$  为自适应差波束权向量，并且对于均匀面阵我们有

$$[\mathbf{a}_u]_i = j \frac{2\pi}{\lambda} x_i \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} (x_i u + y_i v) \right] \quad (4-15)$$

最后将式(4-13)代入(4-12)，得到一阶导数的最终表达式(4-16)。

$$F_u = 2 \left( \text{Re} \left\{ \frac{\mathbf{d}_x^H \mathbf{y}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y}} \right\} - \mu_x \right) \quad (4-16)$$

同理，我们可以得到对数似然函数  $F(\boldsymbol{\theta})$  关于  $v$  的一阶导数  $F_v$ ，此处不做赘述。

接下来我们求解  $F$  的二阶导数  $F_{uu}$ 。为简化后续计算，我们此处导出二阶导数  $F_{uu}(\boldsymbol{\theta}_{max})$  的近似值。

$$\begin{aligned}F_{uu}(\boldsymbol{\theta}_{max}) &= 2 \text{Re} \left\{ \frac{\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{y} \mathbf{w}^H \mathbf{y} - \mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{w}_u^H \mathbf{y}}{(\mathbf{w}^H \mathbf{y})^2} \right\} (\boldsymbol{\theta}_{max}) \\ &= 2 \text{Re} \left\{ \frac{\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{y}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y}} \right\} (\boldsymbol{\theta}_{max}) - 2 \text{Re} \left\{ \left( \frac{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y}} \right)^2 \right\} (\boldsymbol{\theta}_{max}) \\ &= 2 \text{Re} \left\{ \frac{\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}} \right\} (\boldsymbol{\theta}_{max}) - 2 \text{Re} \left\{ \left( \frac{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}} \right)^2 \right\} (\boldsymbol{\theta}_{max})\end{aligned}\quad (4-17)$$

式(4-17)中的第二项可以被改写为式(4-18)。

$$\text{Re} \left\{ \left( \frac{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}} \right)^2 \right\} (\boldsymbol{\theta}_{max}) = \frac{1}{(\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w})^2} \left( \text{Re}^2 \left\{ \mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} \right\} - \text{Im}^2 \left\{ \mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} \right\} \right) \quad (4-18)$$

首先，我们可以得到  $\text{Re} \left\{ \mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} \right\} = 0$ ，因为在最大值  $\boldsymbol{\theta}_{max}$  处，一阶导数  $F_u(\boldsymbol{\theta}_{max}) = 0$ 。其次，对于具有对称性的阵列，有  $\text{Im} \left\{ \mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} \right\} = 0$  成立，详情可见文献 [4]。这样式(4-17)中只剩下了第一项  $2 \text{Re} \left\{ \mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} / \mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} \right\} (\boldsymbol{\theta}_{max})$ 。

接下来，我们用数学期望  $E \{ \mathbf{z} \mathbf{z}^H \}$  代替式(4-17)中的  $\mathbf{z} \mathbf{z}^H$ 。我们取

$$E \{ \mathbf{z} \mathbf{z}^H \} = \beta^2 \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_s) \mathbf{a}^H(\boldsymbol{\theta}_s) + \mathbf{Q} \quad (4-19)$$



式(4-19)中,  $\beta^2$  为期望信号的功率,  $\theta_s$  为期望信号的实际方向。而对于最大似然估计器, 参数  $\theta$  的估计是渐进无偏的, 因此我们可以认为  $\mathbf{a}(\theta_s) \approx \mathbf{a}(\theta_{max})$ 。并且结合(4-6)式可知  $\mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} = 1$ 。因此可以将式(4-17)重写为式(4-20)。

$$F_{uu} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\beta^2 (\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{a} + \mathbf{a}^H \mathbf{w}_{uu}) (\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a})^{1/2} + (\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{a} + \mathbf{a}^H \mathbf{w}_{uu}) (\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a})^{1/2}}{\beta^2 (\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}) + 1} \right\} \quad (4-20)$$

$$= \frac{\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{a} + \mathbf{a}^H \mathbf{w}_{uu}}{(\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a})^{1/2}}$$

为了简化记号, 我们省略上式及后文中的  $\theta_{max}$ 。利用条件  $\mathbf{w}^H \mathbf{a} \mathbf{a}^H \mathbf{w} \approx 0$  (同上文中式(4-18)的化简), 我们可以得到  $\mathbf{d}_x^H \mathbf{a} = \mu_x \mathbf{w}^H \mathbf{a}$  在  $\theta_{max}$  处成立, 同理可得俯仰维  $\mathbf{d}_y^H \mathbf{a} = \mu_y \mathbf{w}^H \mathbf{a}$ 。利用这些关系我们可以得到

$$F_{uu} = 2 \operatorname{Re}^2 \left\{ \frac{\mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \right\} - 2 \frac{\mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}_u}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \quad (4-21a)$$

$$F_{vv} = 2 \operatorname{Re}^2 \left\{ \frac{\mathbf{a}_v^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \right\} - 2 \frac{\mathbf{a}_v^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}_v}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \quad (4-21b)$$

$$F_{uv} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \right\} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{a}_v^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \right\} - 2 \frac{\mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}_v}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \quad (4-21c)$$

注意, 式(4-21)中仍然省略了  $\theta_{max}$ 。在单脉冲测向系统中, 期望信号的真实方向  $\theta_s$  往往处于波束指向  $\theta_0$  的主瓣内, 这意味着  $\theta_s$  和  $\theta_0$  较为接近, 而最大似然估计器是一个渐进无偏估计器, 我们可以认为  $\theta_{max} = \theta_s$ , 因此可以取波束指向  $\theta_0$  处的值代入式(4-21)作为近似。结合式(4-14)我们可以得到对数似然函数  $F$  的二阶导数。

$$F_{uu} = 2\mu_x^2 - 2 \frac{\mathbf{d}_x^H \mathbf{a}_u}{\mathbf{w}^H \mathbf{a}} \quad (4-22a)$$

$$F_{vv} = 2\mu_v^2 - 2 \frac{\mathbf{d}_y^H \mathbf{a}_v}{\mathbf{w}^H \mathbf{a}} \quad (4-22b)$$

$$F_{uv} = 2\mu_x \mu_y - 2 \frac{\operatorname{Re} \{ \mathbf{d}_x^H \mathbf{a}_v \}}{\mathbf{w}^H \mathbf{a}} \quad (4-22c)$$

式(4-22)中, 各参数取波束指向  $\theta_0$  处的值。

最后, 我们可以利用式(4-22)构建海森矩阵  $\mathbf{H}$ 。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} F_{uu} & F_{uv} \\ F_{uv} & F_{vv} \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

以及对数似然函数的梯度  $\nabla F$ ，即雅可比矩阵

$$\nabla F = [F_u, F_v]^T \quad (4-24)$$

结合牛顿公式(4-9)得到方向余弦的估计值  $\hat{u}$  和  $\hat{v}$ 。

$$[\hat{u}, \hat{v}]^T = [u_0, v_0]^T - \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \nabla F(\boldsymbol{\theta}_0) \quad (4-25)$$

最后利用反三角函数即可估计出期望信号的入射方向  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 。

## 4.2 MVAM 方法

本节中，我们同样以  $M$  行  $N$  列的均匀面阵为例，解析 MVAM 方法的一般过程。首先信号模型同式(4-1)一样。我们设单脉冲比为  $R$ ，而无噪声的理想单脉冲比为  $R_0$ 。它们由式(4-26)给出。

$$\begin{aligned} R &= \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{y}}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{y}} = \frac{s(t) \mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{n}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{n}} \\ &= \left( \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} + \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{n}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \right) \left( 1 + \frac{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{n}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \right)^{-1} \\ &\approx \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} + \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{n}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} - \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \frac{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{n}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \\ &= R_0(\boldsymbol{\theta}) + \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \tilde{\mathbf{n}}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \end{aligned} \quad (4-26)$$

上式中，向量  $\mathbf{w}_\Sigma$  和  $\mathbf{w}_\Delta$  分别是自适应和波束权向量与自适应差波束权向量（注意这里暂且没有区分方位角通道和俯仰角通道，而是给出一种通用形式）。与上一小节中一样，我们用向量  $\boldsymbol{\theta} = [\theta, \varphi]^T$  表示信号的入射方向。而向量  $\tilde{\mathbf{n}}$  的定义为式(4-27)。

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} - \left( \frac{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{n}}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \right) \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) \quad (4-27)$$

理想单脉冲比  $R_0(\boldsymbol{\theta})$  可以视作是角度  $\boldsymbol{\theta}$  的非线性函数。若我们假设波束指向  $\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}$ ，类似的，这里将式(4-26)中的参数  $\boldsymbol{\theta}$  重定义为方向余弦  $u$  和  $v$  的函数，即

$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(u, v)$ , 然后得到在  $\boldsymbol{\theta}_0$  处的一阶泰勒展开

$$\begin{aligned} R_0(u, v) &= \frac{\mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \\ &= \frac{\mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=(0,0)} + u \left( \frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}_u(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}_u(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{(\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}))^2} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=(0,0)} \\ &\quad + v \left( \frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}_v(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}_v(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{(\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}))^2} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=(0,0)} + O((Mu)^2, (Nv)^2) \end{aligned} \quad (4-28)$$

式(4-28)中,  $O(\cdot)$  表示高阶无穷小。

由于方向余弦  $u$  和  $v$  都是实数, 因此我们可以将四个单脉冲等式及其共轭写为式(4-29)。

$$\begin{bmatrix} R_x - a_x \\ R_y - a_y \\ R_x^* - a_x^* \\ R_y^* - a_y^* \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \\ B_{xx}^* & B_{xy}^* \\ B_{yx}^* & B_{yy}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \\ B_{xx}^* & B_{xy}^* \\ B_{yx}^* & B_{yy}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

为简化符号, 我们将式(4-29)重写为

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_s + \mathbf{n}_1 = \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{u}} \quad (4-30)$$

在式(4-30)中,  $(\hat{u}, \hat{v})$  表示方向余弦的估计量, 而  $(u_s, v_s)$  表示期望信号的方向余弦。噪声项则由式(4-31)给出。

$$n_x = \frac{\mathbf{w}_{\Delta a}^H \tilde{\mathbf{n}}}{s(t) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_m)} \quad (4-31a)$$

$$n_y = \frac{\mathbf{w}_{\Delta e}^H \tilde{\mathbf{n}}}{s(t) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_m)} \quad (4-31b)$$

上式中,  $\boldsymbol{\theta}_m$  表示单脉冲估计器的解。并且有

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{c}_x & \mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{c}_y \\ \mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{c}_x & \mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{c}_y \end{bmatrix} \quad (4-32a)$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{1} \\ \mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{1} \end{bmatrix} / \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{1} \quad (4-32b)$$

式(4-32)中,

$$\mathbf{c}_x = \frac{(\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{1}) \mathbf{F}_x - (\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{F}_x) \mathbf{1}}{(\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{1})^2} \quad (4-33a)$$

$$\mathbf{c}_y = \frac{(\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{1}) \mathbf{F}_y - (\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{F}_y) \mathbf{1}}{(\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{1})^2} \quad (4-33b)$$

$$(4-33c)$$

上式中,

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{a}_u|_{\theta=0} \quad (4-34a)$$

$$\mathbf{F}_y = \mathbf{a}_v|_{\theta=0} \quad (4-34b)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{a}|_{\theta=0} \quad (4-34c)$$

与上一节中类似, 我们用  $\mathbf{a}_u$  表示导向向量关于方向余弦  $u$  的一阶导数, 注意此时我们假定了波束指向  $\theta_0 = 0$ 。而向量  $\mathbf{w}_{\Delta a}$  和  $\mathbf{w}_{\Delta e}$  分别表示方位角通道和俯仰角通道的自适应差波束权向量。

接下来我们定义一个  $4 \times 2$  的单脉冲选择矩阵  $\boldsymbol{\beta}_1$  使之满足式(4-35)。

$$\boldsymbol{\beta}_1^H \mathbf{B}_1 = 2\mathbf{I}_2 \quad (4-35)$$

上式中,  $\mathbf{I}_2$  表示  $2 \times 2$  的单位矩阵, 此时式(4-30)就可以被改写为

$$\boldsymbol{\beta}_1^H \mathbf{R}_1 = 2\mathbf{u}_s + \boldsymbol{\beta}_1^H \mathbf{n}_1 = 2\mathbf{u}_s + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{1u}^H \\ \boldsymbol{\beta}_{1v}^H \end{bmatrix} \mathbf{n}_1 = 2\hat{\mathbf{u}} \quad (4-36)$$

从式(4-36)中我们容易得出, 当噪声项教小时, 方向余弦的估计值  $\hat{\mathbf{u}}$  就接近于真实值  $\mathbf{u}_s$ 。所以我们可以关于方向余弦构造出两个优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{\beta}_{1u}^H \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta}_{1u} \\ \min \quad & \boldsymbol{\beta}_{1v}^H \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta}_{1v} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\beta}_1^H \mathbf{B}_1 = 2\mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (4-37)$$

式(4-37)中,

$$\tilde{\mathbf{Q}} = E \{ \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1^H \} \quad (4-38)$$

假设噪声服从复高斯分布, 那么对于任意的常向量  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_2$ , 都有式(4-39)成立。

$$E \{ (\mathbf{v}_1^H \tilde{\mathbf{n}}) (\mathbf{v}_2^H \tilde{\mathbf{n}}) \} = 0 \quad (4-39)$$

因此,  $4 \times 4$  的矩阵  $\tilde{\mathbf{Q}}$  可以被表示为

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^* \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

上式中,  $*$  表示共轭, 且

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{\Omega}^H \mathbf{Q}_t \mathbf{\Omega} \quad (4-41a)$$

$$\mathbf{\Omega} = [\mathbf{w}_{\Delta a} \ \mathbf{w}_{\Delta e}] \quad (4-41b)$$

而式(4-41)中, 矩阵  $\mathbf{Q}_t$  的定义如下

$$\mathbf{Q}_t = E \left\{ \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{n}}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_s)} \mathbf{a}(\theta_s) \right) \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{n}}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_s)} \mathbf{a}(\theta_s) \right)^H \right\} \quad (4-42)$$

由于此时波束指向  $\theta_0 = \mathbf{0}$ , 而在单脉冲测向系统中, 期望信号的真实角度  $\theta_s$  一般位于波束指向的 3dB 带宽内。所以我们可以将矩阵  $\mathbf{Q}_t$  近似为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &\approx E \left\{ \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{n}}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{1}} \mathbf{1} \right) \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{n}}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{1}} \mathbf{1} \right)^H \right\} \\ &= \mathbf{Q} - \frac{\mathbf{1} \mathbf{w}_{\Sigma}^H}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{1}} \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \frac{\mathbf{w}_{\Sigma} \mathbf{1}^H}{\mathbf{1}^H \mathbf{w}_{\Sigma}} + \frac{\mathbf{1} \mathbf{1}^H}{|\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{1}|^2} \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{Q} \mathbf{w}_{\Sigma} \end{aligned} \quad (4-43)$$

最后, 我们将式(4-40)代入优化问题(4-37), 解得矩阵  $\beta_1$  的前两行  $\beta$

$$\beta = \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{B} \left( \text{Re} \left\{ \mathbf{B}^H \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{B} \right\} \right)^{-1} \quad (4-44)$$

并求解得到方向余弦估计量  $\hat{\mathbf{u}}$  的表达式。

$$\hat{\mathbf{u}} = \text{Re} \left\{ \left( \text{Re} \left\{ \mathbf{B}^H \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{B} \right\} \right)^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{R} \right\} \quad (4-45)$$

式(4-44)和(4-45)中, 矩阵  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{R}$  分别是矩阵  $\mathbf{B}_1$  和  $\mathbf{R}_1$  的前两行。

### 4.3 正交置零主瓣干扰抑制方法

在上文中, 我们介绍了旁瓣对消器用于抑制旁瓣干扰, 但在某些单脉冲测向的场景中, 会在和波束的 3dB 主瓣内存在强干扰, 但旁瓣对消器无法处理主瓣干扰。因此在本节中我们给出一种利用正交通道进行主瓣干扰置零的方法, 该方法主要针对均匀面阵, 可以有效的抑制主瓣干扰, 由 K. Yu 等人提出 [5]。

我们首先定义和波束  $g_{\Sigma}(\cdot)$  与差波束  $g_{\Delta}(\cdot)$

$$g_{\Sigma}(T_s) = \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(T_s) \quad (4-46a)$$

$$g_{\Delta}(T_s) = \mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}(T_s) \quad (4-46b)$$

上式中,  $T_s$  为方向余弦。从式(2-8)和(2-9)可以得知, 面阵的导向向量的元素可以分解为两个正交方向上相位差的积。因此对于  $xOy$  平面上的均匀线阵, 我们可以得到

$$g_{\Sigma}(T_x, T_y) = g_{\Sigma_a}(T_x) g_{\Sigma_e}(T_y) \quad (4-47a)$$

$$g_{\Delta_A}(T_x, T_y) = g_{\Delta_a}(T_x) g_{\Sigma_e}(T_y) \quad (4-47b)$$

$$g_{\Delta_E}(T_x, T_y) = g_{\Sigma_a}(T_x) g_{\Delta_e}(T_y) \quad (4-47c)$$

$$g_{\Delta_{\Delta}}(T_x, T_y) = g_{\Delta_a}(T_x) g_{\Delta_e}(T_y) \quad (4-47d)$$

式(4-47)中, 方向余弦  $T_x = \sin \varphi \cos \theta$ ,  $T_y = \sin \varphi \sin \theta$ 。  $g_{\Sigma_a}$  表示方位维的和波束,  $g_{\Sigma_e}$  表示俯仰维的和波束,  $g_{\Delta_a}$  表示方位维的差波束,  $g_{\Delta_e}$  表示俯仰维的差波束。

然后先考虑无干扰和噪声的情况。此时俯仰通道的单脉冲比  $\eta_E$  为

$$\eta_E = \frac{P_i g_{\Delta_E}}{P_i g_{\Sigma}} = \frac{P_i g_{\Sigma_a}(T_x) g_{\Delta_e}(T_y)}{P_i g_{\Sigma_a}(T_x) g_{\Sigma_e}(T_y)} = \frac{g_{\Delta_e}(T_y)}{g_{\Sigma_e}(T_y)} \quad (4-48)$$

从式(4-48)中我们可以看出, 俯仰方向上单通道的单脉冲比与双通道(即方位-俯仰维)单脉冲比相同。但是当我们假设有一个主瓣干扰源, 其功率为  $P_i$  时, 俯仰方向上的单脉冲比为

$$\begin{aligned} \eta_E &= \frac{P_i g_{\Delta_{E1}} + P_i g_{\Delta_{E2}}}{P_i g_{\Sigma 1} + P_i g_{\Sigma 2}} \\ &= \frac{P_i g_{\Sigma_{a1}}(T_x) g_{\Delta_{e1}}(T_y) + P_i g_{\Sigma_{a2}}(T_x) g_{\Delta_{e2}}(T_y)}{P_i g_{\Sigma_{a1}}(T_x) g_{\Sigma_{e1}}(T_y) + P_i g_{\Sigma_{a2}}(T_x) g_{\Sigma_{e2}}(T_y)} \neq \frac{g_{\Delta_e}(T_y)}{g_{\Sigma_e}(T_y)} \end{aligned} \quad (4-49)$$

此时双通道单脉冲比和单通道单脉冲比不相等。从式(4-49)中可以看出, 若想去除干扰带来的影响, 就必须使得  $g_{\Sigma_{a2}}(T_x)$  尽可能的小。所以我们令干扰角度方向上的和波束  $g_{\Sigma_a}(T_x)$  减去  $w_a$  倍的差波束, 得到式(4-50)。

$$\begin{aligned} \eta_E &= \frac{g_{\Delta_e}(T_y) (g_{\Sigma_a}(T_x) - w_{a2} g_{\Delta_a}(T_x))}{g_{\Sigma_e}(T_y) (g_{\Sigma_a}(T_x) - w_{a1} g_{\Delta_a}(T_x))} \\ &= \frac{g_{\Delta_e}(T_y) g_{\Sigma_a}(T_x) - w_{a2} g_{\Delta_e}(T_y) g_{\Delta_a}(T_x)}{g_{\Sigma_e}(T_y) g_{\Sigma_a}(T_x) - w_{a1} g_{\Sigma_e}(T_y) g_{\Delta_a}(T_x)} \\ &= \frac{g_{\Delta_E} - w_{a2} g_{\Delta_{\Delta}}}{g_{\Sigma} - w_{a1} g_{\Delta_A}} \end{aligned} \quad (4-50)$$

注意，在式子(4-50)中，我们暂时省略掉了期望信号功率  $P_t$  与噪声功率  $P_i$ 。

现在将波束形成器的输出记为  $r_{(\cdot)}$ ，俯仰维主瓣干扰置零后的自适应和差波束输出记为  $\hat{r}_{\Sigma E}$  和  $\hat{r}_{\Delta E}$ ，他们由式(4-51)给出。

$$\hat{r}_{\Sigma E} = r_{\Sigma} - w_{a1} r_{\Delta A} \quad (4-51a)$$

$$\hat{r}_{\Delta E} = r_{\Delta E} - w_{a2} r_{\Delta \Delta} \quad (4-51b)$$

利用式(4-51)和最小均方误差原则，我们将主瓣干扰置零问题转化为优化问题

$$\min_{w_{a1}} (r_{\Sigma} - w_{a1} r_{\Delta A})^H (r_{\Sigma} - w_{a1} r_{\Delta A}) \quad (4-52a)$$

$$\min_{w_{a2}} (r_{\Delta E} - w_{a2} r_{\Delta \Delta})^H (r_{\Delta E} - w_{a2} r_{\Delta \Delta}) \quad (4-52b)$$

然后我们构造代价函数并求导令其为零，得到  $w_{a1}$  和  $w_{a2}$  的最优解

$$w_{a1} = \frac{R_{\Sigma \Delta A}}{R_{\Delta A \Delta A}} \quad (4-53a)$$

$$w_{a2} = \frac{R_{\Delta E \Delta \Delta}}{R_{\Delta \Delta \Delta \Delta}} \quad (4-53b)$$

式(4-53)中， $R_{(\cdot)}$  表示各波束通道输出结果的互相关，其定义由式(4-54)给出。

$$R_{\Sigma \Delta A} = E [r_{\Sigma} r_{\Delta A}^*] = P_J g_{\Sigma} (T_x^J, T_y^J) g_{\Delta A}^* (T_x^J, T_y^J) \quad (4-54a)$$

$$R_{\Delta A \Delta A} = E [r_{\Delta A} r_{\Delta A}^*] = P_J g_{\Delta A} (T_x^J, T_y^J) g_{\Delta A}^* (T_x^J, T_y^J) + P_N \quad (4-54b)$$

$$R_{\Delta E \Delta \Delta} = E [r_{\Delta E} r_{\Delta \Delta}^*] = P_J g_{\Delta E} (T_x^J, T_y^J) g_{\Delta \Delta}^* (T_x^J, T_y^J) \quad (4-54c)$$

$$R_{\Delta \Delta \Delta \Delta} = E [r_{\Delta \Delta} r_{\Delta \Delta}^*] = P_J g_{\Delta \Delta} (T_x^J, T_y^J) g_{\Delta \Delta}^* (T_x^J, T_y^J) + P_N \quad (4-54d)$$

上式中， $P_J$  和  $P_N$  分别表示主瓣干扰功率和噪声功率， $T_x^J$  和  $T_y^J$  分别表示主瓣干扰的  $x$  轴方向余弦和  $y$  轴方向余弦， $*$  表示共轭。当干噪比 JNR 较大时，可以认为  $w_{a1}$  近似等于  $w_{a2}$  成立。但在实际情况中，两者可能并不相等。

求得权值  $w_{a1}$  和  $w_{a2}$  后，得到俯仰维的自适应单脉冲比  $\hat{f}_E$

$$\begin{aligned} \hat{f}_E(T_x, T_y) &= \frac{\hat{g}_{\Delta E}(T_x, T_y)}{\hat{g}_{\Sigma E}(T_x, T_y)} \\ &= \frac{g_{\Delta E}(T_x, T_y) - w_a g_{\Delta A}(T_x, T_y)}{g_{\Sigma}(T_x, T_y) - w_a g_{\Delta A}(T_x, T_y)} \\ &= \frac{g_{\Delta E}(T_y) (g_{\Sigma_a}(T_x) - w_a g_{\Delta_a}(T_x))}{g_{\Sigma_e}(T_y) (g_{\Sigma_a}(T_x) - w_a g_{\Delta_a}(T_x))} \\ &= \frac{g_{\Delta_e}(T_y)}{g_{\Sigma_e}(T_y)} \end{aligned} \quad (4-55)$$

关于式(4-55)中的权值  $w_a$ ，一种可行的方式是取  $w_a = (w_{a1} + w_{a2})/2$ 。同理可得方位角通道的自适应单脉冲比  $\hat{f}_A$ ，在此不做赘述。

## 4.4 线性约束方法

本节中，我们将介绍一种 LCMV 结构的自适应单脉冲测向方法，并给出该方法的一种改进型。该方法首先选取 MVDR 自适应权向量作为和波束权，然后约束波束指向及其邻近点处的单脉冲比，并以最小均方误差作为目标函数，借助 LCMV 结构求解差波束权向量。改进型方法对约束矩阵做 SVD，然后选取部分正奇异值和左右奇异向量以近似原约束矩阵。

### 4.4.1 联合线性约束方法

我们将以均匀面阵为例，给出该方法的导出过程。考虑一个  $M$  行  $N$  列的均匀面阵，相邻两行阵元间距均为  $d_m$ ，相邻两列阵元间距为  $d_n$ ，入射信号波长为  $\lambda$ ，波束指向为  $\theta_0 = [\theta_0, \varphi_0]^T$ 。我们首先构造阵列的自适应和波束权向量  $w_\Sigma$ 。利用 2.2.1 节中的 MVDR 权向量表达式，即式(2-25)得到和波束权向量

$$w_\Sigma = \frac{Q^{-1}a(\theta_0)}{a^H(\theta_0)Q^{-1}a(\theta_0)} \quad (4-56)$$

式(4-56)中，向量  $a$  表示该阵列的导向向量，矩阵  $Q$  表示干扰叠加噪声的协方差矩阵。由于和波束采用 MVDR 权向量，因此可以有效的抑制主旁瓣干扰。

然后我们需要给出差波束权向量的求解方法。在传统单脉冲测向方法中，我们一般假设单脉冲比是角度  $\theta$  的线性函数。比如对于均匀面阵，我们可以利用第二章中半阵法的结论，构造其静态（非自适应）和差波束权，即式(4-57)。

$$w_{q\Sigma} = a(\theta_0) \quad (4-57a)$$

$$w_{q\Delta a} = (\overbrace{[1, \dots, 1]}^{N/2}, \overbrace{[-1, \dots, -1]}^{N/2}]^T \otimes \overbrace{[1, \dots, 1]}^M \odot w_{q\Sigma} \quad (4-57b)$$

$$w_{q\Delta e} = (\overbrace{[1, \dots, 1]}^N \otimes \overbrace{[1, \dots, 1]}^{M/2}, \overbrace{[-1, \dots, -1]}^{M/2})^T \odot w_{q\Sigma} \quad (4-57c)$$

类似的，我们利用第二章中半阵法的近似，得到方位角和俯仰角通道的单脉冲比



$f_{qa}$  与  $f_{qe}$ 。

$$f_{qe} = \text{Im} \left\{ \frac{\mathbf{w}_{q\Delta e}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_{q\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \right\} \approx k_1 \Delta\varphi \quad (4-58a)$$

$$f_{qa} = \text{Im} \left\{ \frac{\mathbf{w}_{q\Delta a}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_{q\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \right\} \approx k_2 \Delta\theta + k_3 \Delta\varphi \quad (4-58b)$$

式(4-58)中,  $\Delta\theta$  和  $\Delta\varphi$  分别表示偏离波束指向  $\theta_0$  和  $\varphi_0$  的角度, 对于不同的阵列参考平面, 斜率  $k_1$ ,  $k_2$  和  $k_3$  有不同的表达式, 比如当均匀面阵处于  $yOz$  平面内时, 我们有

$$k_1 = \frac{\pi N d_n}{\lambda} \sin \varphi_0 \quad (4-59a)$$

$$k_2 = \frac{\pi M d_m}{\lambda} \sin \varphi_0 \cos \theta_0 \quad (4-59b)$$

$$k_3 = -\frac{\pi M d_m}{\lambda} \cos \varphi_0 \sin \theta_0 \quad (4-59c)$$

同样, 我们可以假设方位角通道和俯仰角通道的自适应差波束权向量分别为  $\mathbf{w}_{\Delta a}$  和  $\mathbf{w}_{\Delta e}$ 。此时两个自适应单脉冲比由式(4-60)给出。

$$f_a(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} = \frac{\Delta_a(\boldsymbol{\theta})}{\Sigma(\boldsymbol{\theta})} \quad (4-60a)$$

$$f_e(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} = \frac{\Delta_e(\boldsymbol{\theta})}{\Sigma(\boldsymbol{\theta})} \quad (4-60b)$$

若我们假设自适应单脉冲比  $f_a$  和  $f_e$  也满足如同静态单脉冲比(4-58), 那么可以得到约束条件

$$\mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}) = (\pm k_1 \Delta\varphi) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}) \quad (4-61a)$$

$$\mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}) = (\pm k_2 \Delta\theta \pm k_3 \Delta\varphi) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}) \quad (4-61b)$$

式(4-61)中,  $\Delta\boldsymbol{\theta} = [\Delta\theta, \Delta\varphi]^T$  表示入射信号偏离波束指向  $\boldsymbol{\theta}_0$  角度的绝对值。注意到, 我们可以将式(4-61)改写为矩阵形式, 即式(4-62)。

$$\mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{C} = \rho_a \quad (4-62a)$$

$$\mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{C} = \rho_e \quad (4-62b)$$

上式中，矩阵  $\mathbf{C}$  和向量  $\boldsymbol{\rho}_a$ ,  $\boldsymbol{\rho}_e$  的定义如式(4-63)所示。

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_{\theta_0 - \Delta\theta}, \mathbf{C}_{\theta_0}, \mathbf{C}_{\theta_0 + \Delta\theta}] \quad (4-63a)$$

$$\boldsymbol{\rho}_a = [\boldsymbol{\rho}_{a(\theta_0 - \Delta\theta)}, \boldsymbol{\rho}_{a(\theta_0)}, \boldsymbol{\rho}_{a(\theta_0 + \Delta\theta)}] \quad (4-63b)$$

$$\boldsymbol{\rho}_e = [\boldsymbol{\rho}_{e(\theta_0 - \Delta\theta)}, \boldsymbol{\rho}_{e(\theta_0)}, \boldsymbol{\rho}_{e(\theta_0 + \Delta\theta)}] \quad (4-63c)$$

上式中的  $(\cdot)_{\theta_0 - \Delta\theta}$ ,  $(\cdot)_{\theta_0}$  和  $(\cdot)_{\theta_0 + \Delta\theta}$  表示方位角的约束点。式(4-63)中  $\mathbf{C}$  的子矩阵定义如下

$$\mathbf{C}_{\theta_0 - \Delta\theta} = [\mathbf{a}(\theta_0 - \Delta\theta, \varphi_0 - \Delta\varphi), \mathbf{a}(\theta_0 - \Delta\theta, \varphi_0), \mathbf{a}(\theta_0 - \Delta\theta, \varphi_0 + \Delta\varphi)] \quad (4-64a)$$

$$\mathbf{C}_{\theta_0} = [\mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0 - \Delta\varphi), \mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0), \mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0 + \Delta\varphi)] \quad (4-64b)$$

$$\mathbf{C}_{\theta_0 + \Delta\theta} = [\mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0 - \Delta\varphi), \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0), \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0 + \Delta\varphi)] \quad (4-64c)$$

$\boldsymbol{\rho}_a$  的子向量定义如下

$$\boldsymbol{\rho}_{a(\theta_0 - \Delta\theta)} = \begin{bmatrix} (-k_2\Delta\theta - k_3\Delta\varphi)\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\theta_0 - \Delta\theta, \varphi_0 - \Delta\varphi) \\ (-k_2\Delta\theta)\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\theta_0 - \Delta\theta, \varphi_0) \\ (-k_2\Delta\theta + k_3\Delta\varphi)\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\theta_0 - \Delta\theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) \end{bmatrix}^T \quad (4-65a)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{a(\theta_0)} = \begin{bmatrix} (-k_3\Delta\varphi)\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0 - \Delta\varphi) \\ 0 \\ (k_3\Delta\varphi)\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0 + \Delta\varphi) \end{bmatrix}^T \quad (4-65b)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{a(\theta_0 + \Delta\theta)} = \begin{bmatrix} (k_2\Delta\theta - k_3\Delta\varphi)\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0 - \Delta\varphi) \\ (k_2\Delta\theta)\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0) \\ (k_2\Delta\theta + k_3\Delta\varphi)\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) \end{bmatrix}^T \quad (4-65c)$$

类似的，我们可以得到  $\boldsymbol{\rho}_e$  的子向量

$$\boldsymbol{\rho}_{e(\theta_0 - \Delta\theta)} = \begin{bmatrix} (-k_1 \Delta\varphi) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_0 - \Delta\theta, \varphi_0 - \Delta\varphi) \\ 0 \\ (k_1 \Delta\varphi) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_0 - \Delta\theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) \end{bmatrix}^T \quad (4-66a)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{a(\theta_0)} = \begin{bmatrix} (-k_1 \Delta\varphi) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0 - \Delta\varphi) \\ 0 \\ (k_1 \Delta\varphi) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0 + \Delta\varphi) \end{bmatrix}^T \quad (4-66b)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{a(\theta_0 + \Delta\theta)} = \begin{bmatrix} (-k_1 \Delta\varphi) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0 - \Delta\varphi) \\ 0 \\ (k_1 \Delta\varphi) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) \end{bmatrix}^T \quad (4-66c)$$

式(4-67)和(4-68)中,矩阵  $\mathbf{Q}$  表示干扰叠加噪声的协方差矩阵。注意到,(4-67)和(4-68)的结构和第二章中的 LCMV 波束形成器,即式(2-28)类似。利用最小均方根误差的准则,我们实际上可以将求解自适应差波束权向量的问题转化为量个带约束条件的优化问题,即式(4-67)和(4-68)。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}_{\Delta a}} \quad & \mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{Q} \mathbf{w}_{\Delta a} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{C} = \boldsymbol{\rho}_a \end{aligned} \quad (4-67)$$

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}_{\Delta e}} \quad & \mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{Q} \mathbf{w}_{\Delta e} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{C} = \boldsymbol{\rho}_e \end{aligned} \quad (4-68)$$

所以同样可以利用拉格朗日乘子法求得其最优解,即式(4-69)。

$$\mathbf{w}_{\Delta a} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \left( \mathbf{C}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \boldsymbol{\rho}_a^H \quad (4-69a)$$

$$\mathbf{w}_{\Delta e} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \left( \mathbf{C}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \boldsymbol{\rho}_e^H \quad (4-69b)$$

最后,我们结合式(4-56), (4-61)与式(4-69)即可得到喝茶波束权并进行单脉冲测向。在本方法中,由于单脉冲比是预先设定得线性函数,斜率分别为  $k_1$ ,  $k_2$  和  $k_3$ ,因此不需要进行曲线拟合便可直接用于测向。一般情况下,我们可以选取主瓣的 3dB 宽度边界值作为  $\Delta\theta$  和  $\Delta\varphi$  求解出自适应差波束权向量。

#### 4.4.2 SVD-线性约束方法

联合线性约束方法可以有效的抑制主旁瓣干扰，并且毋须预先拟合单脉冲曲线就可以直接进行测向。但该方法的局限性在于，它只选取了波束指向  $\theta_0$  以及测角区域的边界值（一般为 3dB 边界）作为约束条件。当阵列的和波束较宽时，由约束得到的单脉冲比曲线非线性程度可能较高，并且在远离约束点处，如  $\theta_s = (\theta_0 + \Delta\theta)/2$  处，测向的精度会有所下降。因此，我们有必要对该方法进行改进，以提高其泛用性，并使得其在远离约束点时仍然能保持较高的测角精度。为简化推导过程，本节中将以均匀线阵为例，改进该方法。

首先考虑一个  $M$  阵元的均匀线阵，其阵元间距为半波长，入射信号的波长为  $\lambda$ ，阵列的波束指向为  $\varphi_0$ 。要解决单脉冲比曲线线性度下降引起的测角精度下降问题，最直接的方式就是选取更多的约束点，使得单脉冲比  $f$  在每个点上都满足线性关系。但从第二章中的 LCMV 波束形成器的原理中可知，约束点数会受到阵列自由度的限制，即我们最多只能选取  $M-1$  个约束点。并且在实际应用的过程中，阵列自由度也是一种宝贵的资源，可能会形成多波束或是作为其他用途，所以我们必须在保证单脉冲曲线线性度的同时尽可能的减少自由度的消耗。

一种可行的方式是，我们借助主成分分析的思想，对约束矩阵  $\mathbf{C}$  做奇异值分解（SVD），然后取前几个较大奇异值所对应的左右奇异向量，用它们张成的空间来代替原先约束矩阵  $\mathbf{C}$  所张成的空间，以此进行近似。这种方法在保证测角精度的同时还减少了阵列自由度的消耗。接下来我们解析 SVD-线性约束方法的一般过程。

与上一节中类似，首先需要假定，单脉冲比与入射信号偏离波束指向角  $d\varphi$  呈线性关系，即

$$f(d\varphi) = \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\varphi_0 + d\varphi)}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\varphi_0 + d\varphi)} = kd\varphi \quad (4-70)$$

式(4-70)中， $d\varphi$  表示线性区间内的一小段角度域，然后将式(4-70)改写为

$$\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\varphi_0 + d\varphi) = (kd\varphi) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\varphi_0 + d\varphi) \quad (4-71)$$

若在线性区间  $[\varphi_0 - \Delta\varphi, \varphi_0 + \Delta\varphi]$  内均匀的取  $L$  个点（一般情况下  $L \gg M$ ），则可以得到一个  $M \times L$  的约束矩阵  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{a}(\varphi_0 + d\varphi_1), \mathbf{a}(\varphi_0 + d\varphi_2), \dots, \mathbf{a}(\varphi_0 + d\varphi_L)] \quad (4-72)$$

及其对应的响应向量  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{C}^{L \times 1}$ 。

$$\boldsymbol{\rho} = [(kd\varphi_1) \Sigma(\varphi_0 + d\varphi_1), (kd\varphi_2) \Sigma(\varphi_0 + d\varphi_2), \dots, (kd\varphi_L) \Sigma(\varphi_0 + d\varphi_L)] \quad (4-73)$$

式(4-73)中，和波束  $\Sigma(\varphi_0 + d\varphi_l) = \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\varphi_0 + d\varphi_l)$ 。利用式(4-71)，(4-72)和(4-73)。可以将  $L$  个点的约束条件写为矩阵形式，即

$$\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{C} = \boldsymbol{\rho} \quad (4-74)$$

由于式(4-74)中，约束矩阵  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times L}$ ，而  $L \gg M$  使得该问题是一个过完备问题，约束条件的个数远远超过了阵列的自由度。所以，我们用 SVD 对该约束条件进行近似处理。首先我们得到  $\mathbf{C}$  的 SVD 为式(4-75)，

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^H \quad (4-75)$$

这里我们考虑构成拟对角矩阵  $\mathbf{S}$  的元素均为正奇异值，然后选取其中较大的奇异值分量构成对角矩阵  $\mathbf{S}_s$ ，注意，非零正奇异值的个数与阵元个数  $M$  相关，通常情况下  $M \geq 2$ ，一种合理的选取方式是，将所有非零正奇异值归一化，然后取 20 倍以 10 为底的对数，最后选取大于或等于 -35dB 的奇异值分量构成对角矩阵  $\mathbf{S}_s$ 。这里，我们假设取  $K$  个正奇异值构成  $\mathbf{S}_s \in \mathbb{R}_+^{K \times K}$ ，可以得到约束矩阵  $\mathbf{C}$  的近似表达式，即式(4-76)。

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{U}_s \mathbf{S}_s \mathbf{V}_s^H \quad (4-76)$$

接着我们将式(4-76)代入(4-74)得到

$$\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{U}_s \mathbf{S}_s \mathbf{V}_s^H = \boldsymbol{\rho} \quad (4-77)$$

并且在式(4-77)的等号左右两边同时右乘  $\mathbf{V}_s (\mathbf{V}_s^H \mathbf{V}_s)^{-1}$  得到式(4-78)。

$$\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{U}_s \mathbf{S}_s \mathbf{V}_s^H \mathbf{V}_s (\mathbf{V}_s^H \mathbf{V}_s)^{-1} = \boldsymbol{\rho} \mathbf{V}_s (\mathbf{V}_s^H \mathbf{V}_s)^{-1} \quad (4-78)$$

由于矩阵  $\mathbf{V}_s$  是行酉型矩阵，即  $\mathbf{V}_s^H \mathbf{V}_s = \mathbf{I}$ 。接着利用矩阵乘法结合律，我们可以得到

$$\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{U}_s \mathbf{S}_s = \boldsymbol{\rho} \mathbf{V}_s \quad (4-79)$$

上式中，对角矩阵  $\mathbf{S}_s$  是一个满秩矩阵，所以我们可以式(4-79)的等号两边同时右

乘  $\mathbf{S}_s^{-1}$  得到

$$\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{U}_s = \boldsymbol{\rho}^H \mathbf{V}_s \mathbf{S}_s^{-1} \quad (4-80)$$

实际上，对角矩阵  $\mathbf{S}_s$  的逆矩阵只需将主对角线上的正奇异值逐一取倒数即可。

为进一步简化符号，我们令

$$\mathbf{C}' = \mathbf{U}_s \quad (4-81a)$$

$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}^H \mathbf{V}_s \mathbf{S}_s^{-1} \quad (4-81b)$$

此时以最小均方误差为目标函数的优化问题就变为了式(4-82)。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}_\Delta} \quad & \mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{Q} \mathbf{w}_\Delta \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{C}' = \boldsymbol{\rho}' \end{aligned} \quad (4-82)$$

同样，我们依照 LCMV 得到自适应差波束权向量  $\mathbf{w}_\Delta$ 。

$$\mathbf{w}_\Delta = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}' (\mathbf{C}'^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}')^{-1} \boldsymbol{\rho}'^H \quad (4-83)$$

虽然本节中我们只对均匀线阵的情况进行了推导，但该方法仍旧适用于二维阵列的情况（如均匀面阵），其结构与上一节中类似，同样的，我们需要对约束矩阵做 SVD 并选取较大的正奇异值及其左右奇异向量构成近似解。

## 4.5 本章小结

本章中，我们介绍了四种单脉冲测向方法，并在最后针对联合线性约束方法进行了改进。这四种方法都是自适应方法，可以在抑制主旁瓣干扰的同时进行单脉冲测向，并且都需要预知干扰叠加噪声的协方差矩阵  $\mathbf{Q}$ 。

最大似然方法假定各阵元的噪声均为独立同分布的高斯白噪声，由此得出关于期望信号入射方向的似然函数。然后利用牛顿法对该似然函数进行求解，最终得到期望信号入射方向的估计值。并且该方法对海森矩阵——即对数似然函数的二阶导数进行了近似，使得其计算量大大减小。MVAM 方法预设理想的单脉冲比，然后在波束指向处进行一阶泰勒展开，经过一系列化简后，从阵列的接收信息中重构出理想单脉冲比，进一步得到入射方向的估计值。正交置零方法要求阵列满足一定条件，即阵元相对于参考点的相位差可以分解为两个方向上的乘积，满足这一条件的阵列就是均匀面阵，该方法利用正交通道的差波束对原通道的主瓣干扰置零，以此消除主瓣干扰。线性约束方法借助了 MVDR 波束形成和 LCMV 结构，首先利用 MVDR 方法在波束指向处形成自适应和波束，然后在波束指向及测

角区间边界点处约束单脉冲比，并借助 LCMV 结构和拉格朗日乘子法，求解得出自适应差波束权向量。由于该方法约束了单脉冲比的斜率，因此毋须事先进行单脉冲比曲线的拟合，可以直接进行测向。原始的联合线性约束方法只约束波束指向及测角区间的边界点，当阵列的波束较宽时，可能会使得单脉冲比的线性关系只在这些约束点处成立，而在远离约束点时，单脉冲比曲线呈现非线性，这使得远离约束点处的测角精度下降。为解决该问题，我们提出了一种改进型的线性约束方法，该方法在测角区间内均匀的取尽可能多的约束点，但约束点的选取还受到阵列自由度的限制，所以我们用 SVD 的方法对这个约束点较多的约束矩阵进行近似，用较大的正奇异值分量及其对应的左右奇异向量代替原约束矩阵进行求解，这样既保证了单脉冲比曲线在整个测角区间的线性度，又尽可能的减少了阵列自由度的消耗。

本章中的方法除去正交置零方法以外，均可用于共型阵列，正交置零方法由于其结构的特殊性，只能用于均匀面阵，并且需要一抑制旁瓣干扰的方法与其搭配使用，才能同时抑制主旁瓣干扰。

## 第五章 极化相控阵的单脉冲测向方法

本章中，我们将介绍极化敏感阵列的信号模型，并给出这种模型下的单脉冲测向方法。与之前的阵列不同，极化敏感阵列不在假设构成阵元的天线是全向天线，并且将信号处理从空域进一步拓展到极化域。由于入射信号极化信息的引入，使得单个天线的响应由信号的入射方向和极化模式以及天线的摆放方式三个因素共同决定。但同时，将信号处理拓展到极化域也有诸多好处，在空域上重叠的信号可以在极化域进行区分。

本章的安排如下，第一节中，我们将给出两种不同的极化相控阵接收信号的模型，第二节中，我们针对第一类极化相控阵模型，介绍一种基于比幅测向法的极化单脉冲测向方法，第三节中，我们针对第二类极化相控阵模型，给出一种角度-极化联合的单脉冲测向方法。

### 5.1 极化相控阵接收信号模型

极化相控阵由电偶极子或磁环天线组成，单个天线的响应受到信号的入射方向和极化模式以及天线的摆放方式三个因素的共同影响。而信号的入射方向和极化模式是信号的固有属性，在测向过程中，我们往往是无法控制和预知的。一种简易的方式是，组成阵列的所有阵元，极子的摆放方式都是一致的，这种情况下，对于同一个信号，除去空间位置引起的相位差以外，所有阵元的响应都是一致的，可以将其视作信号复振幅的一部分。担当信号的极化模式与极子正交时，整个阵列将完全无法接收到信号。一种可行的办法是，使多个极子构成双正交或三正交的交叉极子阵元，构成阵元的极子按直角坐标系的坐标轴向放置。这样就可以使每个阵元总有极子能够接收到入射信号。我们将在本节中的第一部分讨论这种模型。

然而在实际应用的过程中，极子的部署方式总是会收到物体形状的限制。比如我们要将阵列部署圆柱体表面，或是机翼表面这种不规则的物体表面。此时不能保证阵列中所有极子的指向都是相同的，此时不能将阵列中所有阵元的响应视为一致，我们将在本节中的第二个部分讨论这种模型。

注意在本文中，我们讨论的都是完全极化信号的模型，非完全极化信号不予考虑。



### 5.1.1 极子摆放方式相同时的阵列接收信号模型

### 5.1.2 极子摆放方式不同时的阵列接收信号模型

首先我们考虑一个波长为  $\lambda$  的横电磁波 (TEM) 入射到一个共形阵上, 共形阵的天线由各个不同朝向的 (电) 偶极子构成, 如图5-1所示。在图5-1中, 向量

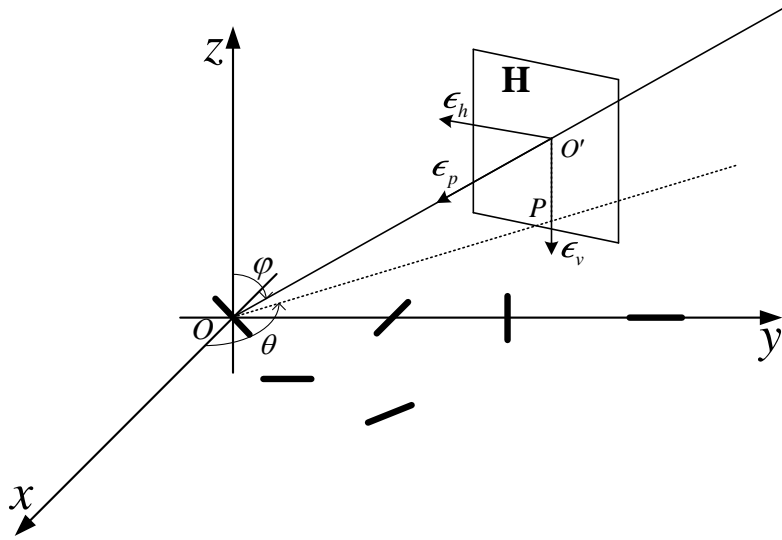


图 5-1 任意朝向极子组成的极化阵列接收信号模型

$\epsilon_p(\theta, \varphi)$  表示入射信号的方向余弦, 其定义由式(5-1)给出。

$$\epsilon_p(\theta, \varphi) = -[\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi]^T \quad (5-1)$$

我们假设向量  $\epsilon_p$  是平面  $H$  的法向量, 由坡印廷定理可知, 入射信号的电场分量  $e$  总是在平面  $H$  内振动, 因此, 我们可以利用平面  $H$  内的两线性无关向量为基向量来表出电场分量  $e$ 。

$$e(t) = \zeta_h(t)\epsilon_h + \zeta_v(t)\epsilon_v \quad (5-2)$$

式(5-2)中,  $\epsilon_h$  和  $\epsilon_v$  都是单位向量, 且它们线性无关。这里需要指出, 这个基向量的选取不是唯一的, 只要满足(5-2)式即可。通常情况下, 我们选择式(5-3)作为电

场分量的基向量。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h = [-\sin \theta, \cos \theta, 0]^T \quad (5-3a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = [\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi]^T \quad (5-3b)$$

式(5-3)中, 我们将向量  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$  称作水平向量, 他与  $xOy$  平面平行, 且正交于平面  $OO'P$ 。同理, 垂直向量  $\boldsymbol{\varepsilon}_v$  于水平向量  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$  正交, 并且与平面  $OO'P$  和  $\mathbf{H}$  的交线平行。实际上向量  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}_v$  两两正交, 且构成一个直角坐标系。

对于完全极化信号, 由 Jones 向量可知, 式(5-2)中的电场极化分量可以被表示为

$$[\zeta_h(t), \zeta_v(t)]^T = \zeta(t) [\cos \gamma, e^{j\eta} \sin \gamma]^T \quad (5-4)$$

式(5-4)中, 我们称  $0 \leq \gamma \leq \pi/2$  为极化辅助角,  $-\pi \leq \eta < \pi$  为极化相位差。结合式(5-2)与(5-4)我们可以得知, 在直角坐标系下, 电场分量可以被改写为

$$\mathbf{e}(t) = \zeta(t) [\boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_v] \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ e^{j\eta} \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

我们将式(5-5)中与极化信息有关的极化向量表示为  $\mathbf{h}(\gamma, \eta)$ , 其定义为

$$\mathbf{h}(\gamma, \eta) = [\cos \gamma, e^{j\eta} \sin \gamma]^T \quad (5-6)$$

接下来, 我们讨论单个电偶极子的响应。一般情况下, 我们都使用短偶极子作为模型, 即偶极子长度不超过入射信号波长 10% 的偶极子。我们假设有一个短偶极子  $l$  位于直角坐标系原点, 它的极子朝向用角度  $\alpha$  和  $\beta$  来描述, 如图5-2所示。我们将极子增益记为向量  $\mathbf{g}$ , 利用图5-2中的几何关系, 我们可以得到  $\mathbf{g}$  的表达式为

$$\mathbf{g} = \kappa \cdot [\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta]^T \quad (5-7)$$

式(5-7)中,  $\kappa$  表示极子与入射信号完全匹配时的增益。

现在, 我们来推导由不同朝向极子组成的极化阵列的导向向量。在这个模型中, 阵列的响应由两部分组成: 第一部分是阵元位置相对于参考点而引起的相移; 第二部分是由入射信号的极化模式引起的相移, 它由极子的朝向, 信号的入射方向以及信号的极化参数共同决定。为了不失一般性, 我们可以假设一个完全极化的电磁横波, 极化参数为  $(\gamma, \eta)$ , 以  $(\theta, \varphi)$  入射到一个由  $M$  个短偶极子组成的共形阵上, 其中, 阵列的第  $m$  个极子的坐标由位置向量  $\mathbf{r}_m$  决定, 第  $m$  个极子的朝向由

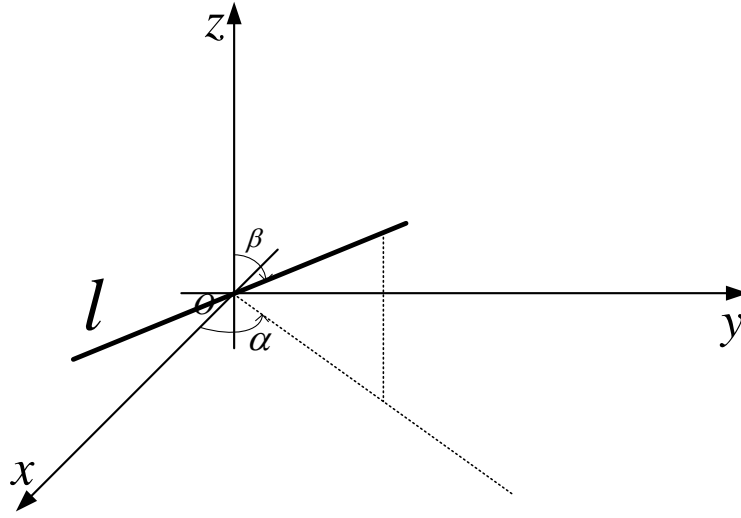


图 5-2 任意朝向极子接收信号模型

$(\alpha_m, \beta_m)$  决定。此时，第  $m$  个极子的响应为  $a_m(\theta, \phi, \gamma, \eta)$ ，它由式(5-8)给出。

$$a_m(\theta, \phi, \gamma, \eta) = u_m \mathbf{g}_m^T [\boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_v] \mathbf{h} \quad (5-8)$$

注意，上式中我们省略了电场极化的强度量  $\zeta(t)$  和极子完全匹配时的增益  $\kappa$ ，这是因为我们假设入射信号为远场信号，而远场信号对于短时延  $\tau$  满足  $\zeta(t - \tau) \approx \zeta(t)$ 。且组成阵列的每个极子都是完全相同的，即每个极子的  $\kappa$  都相同，这样对于同一个入射信号，每个极子接收到的  $\zeta(t)$  和  $\kappa$  都是一致的，所以我们省略这两个和强度有关的量并不影响最终的结果。式(5-8)中， $u_m$  表示第  $m$  个极子的空域相移，由式(5-9)给出。

$$u_m = \exp \left( -j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{r}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_p \right) \quad (5-9)$$

接着，将式(5-8)改写为向量形式，得到极化阵列的导向向量

$$\mathbf{a}(\theta, \phi, \gamma, \eta) = \text{diag} \{ \mathbf{a}_s(\theta, \phi) \} \mathbf{G} [\boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_v] \mathbf{h} \quad (5-10)$$

我们将式(5-10)中的向量  $\mathbf{a}_s(\theta, \phi)$  称为空域导向向量，它的定义由式(5-11)给出。

$$\mathbf{a}_s(\theta, \phi) = [u_1, u_2, \dots, u_M]^T \quad (5-11)$$

而矩阵  $\mathbf{G}$  由  $M$  个向量构成, 如式(5-12)。

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_M]^T \quad (5-12)$$

最终, 对于一个复振幅为  $s(t)$  的入射信号, 阵列接收的数据  $\mathbf{y}$  可以由式(5-13)表出。

$$\mathbf{y} = s(t)\mathbf{a}(\theta, \varphi, \gamma, \eta) + \mathbf{n} \quad (5-13)$$

上式中, 向量  $\mathbf{n}$  表示噪声 (或干扰叠加噪声) 向量。

## 5.2 极子摆放方式相同时的极化相控阵单脉冲测向

时域积分方程方法的研究近几年发展迅速, 在本文研究工作的基础上, 仍有以下方向值得进一步研究:

### 5.2.1 原理

### 5.2.2 性能分析

### 5.2.3 仿真

## 5.3 极子摆放方式不同时的极化相控阵单脉冲测向

当组成阵列的极子朝向各不相同, 导向向量中的空域时延  $\mathbf{a}_s(\theta, \varphi)$  无法和极化导致的幅相变化分离, 因此传统的测向方法无法直接应用到该模型下, 所以本节中我们从信号模型的统计信息入手, 借助似然函数完成单脉冲测向过程, 并在得到入射信号的角度信息后给出一种极化参数的估计方法。

### 5.3.1 基本原理

我们假设一个由  $M$  个极子组成的极化阵列,  $M$  个极子的摆放方式由矩阵  $\mathbf{G}$  决定, 一个极化参数为  $(\gamma, \eta)$  的远场窄带信号以角度  $(\theta, \varphi)$  入射到该阵列上。

首先可以假设干扰叠加噪声向量  $\mathbf{n}$  服从一个均值为零, 协方差矩阵为  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  的复高斯分布, 即  $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{Q})$ 。在该假设下, 接收信号  $\mathbf{y}$  的概率密度函数可以写为

$$p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \gamma, \eta, s(t)) = \frac{1}{\pi^M \det(\mathbf{Q})} \exp \left\{ -[\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})]^H \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})] \right\} \quad (5-14)$$

然后对式(5-14)中的概率密度函数取自然对数并舍弃掉所有常量得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \gamma, \eta, s(t)) &= \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \gamma, \eta, s(t)) \\ &= -[\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \gamma, \eta)]^H \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \gamma, \eta)] \end{aligned} \quad (5-15)$$

式(5-15)中, 向量  $\boldsymbol{\theta} = [\theta, \phi]^T$  表示期望信号的入射角度。我们感兴趣的部分是期望信号的入射角度  $\boldsymbol{\theta}$ , 所以我们需要导出一个仅关于参数  $\boldsymbol{\theta}$  的对数似然函数。因此我们定义矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times 2}$  和向量  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$ 。

$$\mathbf{A}(\theta, \phi) = \text{diag}\{\mathbf{a}_s(\theta, \phi)\} \mathbf{G}[\boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_v] \quad (5-16a)$$

$$\mathbf{s}(\gamma, \eta) = s(t)\mathbf{h} = [s(t) \cos \gamma, s(t)e^{j\eta} \sin \gamma]^T \quad (5-16b)$$

然后将式(5-16)代入(5-15)得到

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}) = -[\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}]^H \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}] \quad (5-17)$$

与最大似然方法类似, 我们对向量  $\mathbf{s}$  求最小二乘解得到其估计量  $\hat{\mathbf{s}}$ 。

$$\hat{\mathbf{s}} = [\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})]^{-1} \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y} \quad (5-18)$$

接着将式(5-18)代入(5-17), 并去掉常数项, 得到关于期望信号入射角度  $\boldsymbol{\theta}$  的对数似然函数  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ 。

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{y}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y} \quad (5-19)$$

现在, 我们就可以将角度估计问题转化为一个优化问题, 即式(5-20)。

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\theta}} \quad & \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \\ \text{s.t.} \quad & -\pi \leq \theta, 0 \leq \phi \leq \pi \end{aligned} \quad (5-20)$$

我们注意到, 式(5-19)中的矩阵  $(\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$  是一个 Hermite 矩阵, 因此我们易知它的矩阵平方根一定存在。利用该性质, 我们可以将式(5-19)重写为

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{y}^H \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}^H(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{y} \quad (5-21)$$

上式中, 矩阵  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{M} \times 2$  定义为

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}))^{-1/2} \quad (5-22)$$

注意在式(5-22)中上标  $\cdot^{1/2}$  表示矩阵平方根。我们易知  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$  是一个凹函数, 即它在定义域上有全局最大值, 并且它是严格大于 0 的。

为便于后续的公式推导, 我们对(5-21)式中的  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$  取自然对数得  $F(\boldsymbol{\theta}) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ , 这样并不改变它的单调性和凹凸性。与第四章中的最大似然方法类似, 我

们给出牛顿公式，即式(5-23)。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0 - \mathbf{H}^{-1} \nabla F(\boldsymbol{\theta}) \quad (5-23)$$

上式中，向量  $\boldsymbol{\theta}_0$  表示待估计角度  $\boldsymbol{\theta}$  的初值，矩阵  $\mathbf{H}$  表示函数  $F(\boldsymbol{\theta})$  的海森矩阵， $\nabla F(\boldsymbol{\theta})$  表示函数  $F(\boldsymbol{\theta})$  的梯度，即雅可比矩阵。它们的定义由式(5-24)给出。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} F_{\theta\theta} & F_{\theta\varphi} \\ F_{\theta\varphi} & F_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (5-24a)$$

$$\nabla F(\boldsymbol{\theta}) = [F_{\theta}, F_{\varphi}]^T \quad (5-24b)$$

式中， $F_{\theta}$  表示一阶偏导数  $\partial F / \partial \theta$ ，而  $F_{\theta\varphi}$  表示二阶偏导数  $\partial^2 F / \partial \theta \partial \varphi$ ，其余同理。牛顿法要求一个初值才能进行估计，幸运的是，在单脉冲测向系统中，我们恰好有一个波束指向角  $\boldsymbol{\theta}_0$ 。期望信号的真实方向  $\boldsymbol{\theta}_s$  往往与波束指向角接近（一般在 3dB 主瓣宽度内），所以我们可以用单步迭代的方式代替多步迭代以减小计算量。剩下的部分我们将着重于  $F(\boldsymbol{\theta})$  一二阶偏导数的导出。

利用式(5-21)可以得到一阶偏导数  $F_{\theta}$ 。

$$\begin{aligned} F_{\theta} &= \frac{\mathbf{y}^H \mathbf{W}_{\theta} \mathbf{W}^H \mathbf{y} + \mathbf{y}^H \mathbf{W} \mathbf{W}_{\theta}^H \mathbf{y}}{\mathbf{y}^H \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{y}} \\ &= 2 \frac{\text{Re} \{ \mathbf{y}^H \mathbf{W}_{\theta} \mathbf{W}^H \mathbf{y} \}}{\mathbf{y}^H \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{y}} \end{aligned} \quad (5-25)$$

式(5-25)中，矩阵  $\mathbf{W}_{\theta}$  的定义如下。

$$\mathbf{W}_{\theta} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_{\theta} (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1/2} - \mathbf{W} (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \text{Re} \{ \mathbf{A}_{\theta}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \} \quad (5-26)$$

为了简化符号，我们给出定义式(5-27)。

$$\mathbf{D}^{\theta} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_{\theta} (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1/2} \quad (5-27a)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{\theta} = (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \text{Re} \{ \mathbf{A}_{\theta}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \} \quad (5-27b)$$

然后将式(5-27)代入(5-26)得到

$$\mathbf{W}_{\theta} = \mathbf{D}^{\theta} - \mathbf{W} \boldsymbol{\mu}^{\theta} \quad (5-28)$$

在式(5-26)和(5-27)中，导数  $\mathbf{A}_{\theta}$  的定义由式(5-29)给出。

$$\mathbf{A}_{\theta} = \text{diag} \left\{ \frac{\mathbf{a}_s(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right\} \mathbf{G} [\boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_v] + \text{diag} \{ \mathbf{a}_s(\theta, \varphi) \} \mathbf{G} \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_h}{\partial \theta}, \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_v}{\partial \theta} \right] \quad (5-29)$$

上式中,  $\partial \mathbf{a}_s(\theta, \varphi)/\partial \theta$  和  $[\partial \boldsymbol{\varepsilon}_h/\partial \theta, \partial \boldsymbol{\varepsilon}_v/\partial \theta]$  的定义如下。

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{a}_s(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right]_m = -j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{r}_m^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p}{\partial \theta} \exp \left( -j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{r}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_p \right) \quad (5-30a)$$

$$\left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_h}{\partial \theta}, \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_v}{\partial \theta} \right] = \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-30b)$$

式子中的  $[\cdot]_m$  表示向量的第  $m$  个元素。我们可以用相同的方式导出  $\mathbf{W}_\varphi$  的表达式。

紧接着, 我们导出函数  $F(\boldsymbol{\theta})$  的二阶偏导数,  $F_{\theta\varphi}$  的定义由式(5-31)给出。

$$F_{\theta\varphi} = 2 \frac{\text{Re} \{ \mathbf{y}^H \mathbf{W}_{\theta\varphi} \mathbf{W}^H \mathbf{y} \}}{\mathbf{y}^H \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{y}} + 2 \frac{\text{Re} \{ \mathbf{y}^H \mathbf{W}_\theta \mathbf{W}_\varphi^H \mathbf{y} \}}{\mathbf{y}^H \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{y}} - F_\theta F_\varphi \quad (5-31)$$

上式中, 矩阵  $\mathbf{W}$  的二阶导数由下式给出。

$$\mathbf{W}_{\theta\varphi} = \mathbf{D}_\varphi^\theta - \mathbf{W}_\varphi \boldsymbol{\mu}^\theta - \mathbf{W} \boldsymbol{\mu}_\varphi^\theta \quad (5-32)$$

式(5-32)中, 矩阵  $\mathbf{D}_\varphi^\theta$  和  $\boldsymbol{\mu}_\varphi^\theta$  的定义如式所示。

$$\mathbf{D}_\varphi^\theta = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_{\theta\varphi} (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1/2} - \mathbf{D}^\theta \boldsymbol{\mu}^\theta \quad (5-33a)$$

$$\boldsymbol{\mu}_\varphi^\theta = -2 (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\mu}^\varphi \text{Re} \{ \mathbf{A}_\theta^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \} \quad (5-33b)$$

$$+ (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \text{Re} \{ \mathbf{A}_{\theta\varphi}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}_\varphi^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_\varphi \} \quad (5-33c)$$

接着借助式(5-29), 我们可以得到矩阵  $\mathbf{A}$  的二阶偏导数  $\mathbf{A}_{\theta\varphi}$ , 它的定义由式(5-34)表出。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & \text{diag} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{a}_s(\theta, \varphi)}{\partial \theta \partial \varphi} \right\} \mathbf{G} [\boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_v] + \text{diag} \{ \mathbf{a}_s(\theta, \varphi) \} \mathbf{G} \left[ \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_h}{\partial \theta \partial \varphi}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_v}{\partial \theta \partial \varphi} \right] \\ & + \text{diag} \left\{ \frac{\partial \mathbf{a}_s(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right\} \mathbf{G} \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_h}{\partial \varphi}, \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_v}{\partial \varphi} \right] + \text{diag} \left\{ \frac{\partial \mathbf{a}_s(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right\} \mathbf{G} \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_h}{\partial \theta}, \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_v}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (5-34)$$

上式中的  $\partial^2 \mathbf{a}_s/\partial \theta \partial \varphi$  和  $\partial^2 [\boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_v]/\partial \theta \partial \varphi$  可以由式 (5-30) 直接计算得到。由于求导后的表达式较为复杂, 因此我们在这里不将其一一给出。函数  $F(\boldsymbol{\theta})$  的其它两个二阶导数  $F_{\theta\theta}$  和  $F_{\varphi\varphi}$  可以以相同的方式得到。

最后, 我们利用函数  $F(\boldsymbol{\theta})$  的一二阶导数构造出式(5-24)中的海森矩阵和雅可比矩阵, 同时将阵列的波束指向  $\boldsymbol{\theta}_0$  作为初值, 并结合式(5-23)得到期望信号入射角度的估计值  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 。

在得到角度估计值  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  后, 我们可以进一步得到极化参数  $\gamma$  和  $\eta$  的估计值。首

先利用  $\mathbf{s}$  的最小二乘解，即(5-18)式得到信号向量的估计值  $\hat{\mathbf{s}}$ 。利用向量  $\mathbf{s}$  的定义式(5-16)我们显然能够得到式(5-35)。

$$\frac{[\hat{\mathbf{s}}]_2}{[\hat{\mathbf{s}}]_1} = e^{j\hat{\eta}} \tan \hat{\gamma} \quad (5-35)$$

### 5.3.2 仿真

## 5.4 本章小结



## 第六章 全文总结与展望

### 6.1 全文总结

### 6.2 后续工作展望

## 致 谢

在攻读博士学位期间，首先衷心感谢我的导师 XXX 教授

## 附录 A 中心极限定理的证明

### A.1 高斯分布和伯努利实验

## 参考文献

- [1] T. Taylor. Design of circular apertures for narrow beamwidth and low sidelobes[J]. IRE Transactions on Antennas and Propagation, 1960, 8(1): 17-22
- [2] E. T. Bayliss. Design of monopulse antenna difference patterns with low sidelobes[J]. The Bell System Technical Journal, 1968, 47(5): 623-650
- [3] M. F. Fernández, K. Yu. Blocking-matrix and quasimatrix techniques for extended-null insertion in antenna pattern synthesis[C]. 2015 IEEE Radar Conference (RadarCon), 2015, 0198-0203
- [4] U. Nickel. Monopulse estimation with adaptive arrays[J]. IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing), 1993, 140: 303-308(5)
- [5] Kai-Bor Yu, D. J. Murrow. Adaptive digital beamforming for angle estimation in jamming[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2001, 37(2): 508-523