

电子科技大学

UNIVERSITY OF ELECTRONIC SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

硕士学位论文

MASTER THESIS



论文题目 数字相控阵单脉冲测向方法研究

学科专业 信号与信息处理

学 号 201821011229

作者姓名 邓宇昊

指导老师 谢菊兰 副教授

分类号 _____ 密级 _____

UDC 注 1 _____

学 位 论 文

数字相控阵单脉冲测向方法研究

(题名和副题名)

邓宇昊

(作者姓名)

指导老师

谢菊兰 副教授

电子科技大学 成都

(姓名、职称、单位名称)

申请学位级别 硕士 学科专业 信号与信息处理

提交论文日期 _____ 论文答辩日期 _____

学位授予单位和日期 电子科技大学 年 月

答辩委员会主席 _____

评阅人 _____

注 1: 注明《国际十进分类法 UDC》的类号。

The Research on Monopulse estimation with Digital Phased Array

**A Master Thesis Submitted to
University of Electronic Science and Technology of China**

Discipline: Signal and Information Processing

Author: Yuhao Deng

Supervisor: Dr. Julian Xie

School: School of Information and Communication
Engineering

摘 要

这是摘要

.....

关键词：关，键，词

ABSTRACT

This is abstract.

Keywords: key, words

目 录

第一章 绪 论	1
1.1 研究工作的背景与意义	1
1.2 单脉冲方法的国内外研究历史与现状	1
1.3 本文的主要贡献与创新	1
1.4 本论文的结构安排	1
第二章 相控阵单脉冲测向基本理论	2
2.1 相控阵接收信号模型	2
2.1.1 均匀线阵	2
2.1.2 均匀面阵	3
2.1.3 均匀圆阵	5
2.1.4 共形阵	6
2.2 波束形成技术	7
2.2.1 MVDR 波束形成方法	7
2.2.2 LCMV 波束形成方法	9
2.3 传统单脉冲方法	10
2.3.1 半阵测向	10
2.3.2 加权测向	13
2.3.3 和差比幅	18
2.4 本章小结	19
第三章 基于旁瓣对消和主瓣干扰置零的单脉冲测向方法	21
3.1 旁瓣对消基本原理	21
3.2 一种基于准矩阵和 SVD 的阻塞矩阵设计方法	24
3.3 正交置零主瓣干扰抑制方法	28
3.4 两步法单脉冲测向	30
3.5 本章小结	30
第四章 相控阵的自适应单脉冲方法	31
4.1 最大似然方法	31
4.2 MVAM 方法	35
4.3 线性约束方法	38
4.4 SVD-线性约束	38

4.5 本章小结	39
第五章 极化相控阵的单脉冲测向方法	40
5.1 极化相控阵接收信号模型	40
5.1.1 各阵元摆放角度一致的接收信号模型	40
5.1.2 各阵元摆放角度不同的接收信号模型	40
5.2 各阵元摆放角度一致的极化相控阵单脉冲测向	40
5.2.1 原理	40
5.2.2 性能分析	40
5.2.3 仿真	40
5.3 各阵元摆放角度不同的极化相控阵单脉冲测向	40
5.3.1 原理	40
5.3.2 仿真	40
5.4 本章小结	40
第六章 全文总结与展望	41
6.1 全文总结	41
6.2 后续工作展望	41
致 谢	42
附录 A 中心极限定理的证明	43
A.1 高斯分布和伯努利实验	43
参考文献	44

第一章 绪 论

1.1 研究工作的背景与意义

计算电磁学方法^[2,1-5]从时、频域角度划分可以分为频域方法与时域方法两大类。频域方法的研究开展较早，目前应用广泛的包括：矩量法（MOM）^[6,7]及其快速算法多层快速多极子（MLFMA）^[8]方法、有限元（FEM）^[2,2]方法、自适应积分（AIM）^[4]方法等，这些方法是目前计算电磁学商用软件^①（例如：FEKO、Ansys 等）的核心算法。由文献 [5,6,8] 可知

1.2 单脉冲方法的国内外研究历史与现状

时域积分方程方法的研究始于上世纪 60 年代，

1.3 本文的主要贡献与创新

本论文以时域积分方程时间步进算法的数值实现技术、后时稳定性问题以及两层平面波加速算法为重点研究内容，主要创新点与贡献如下：

1.4 本论文的结构安排

本文的章节结构安排如下：

① 脚注序号“①，……，⑨”的字体是“正文”，不是“上标”，序号与脚注内容文字之间空 1 个半角字符，脚注的段落格式为：单倍行距，段前空 0 磅，段后空 0 磅，悬挂缩进 1.5 字符；中文用宋体，字号为小五号，英文和数字用 Times New Roman 字体，字号为 9 磅；中英文混排时，所有标点符号（例如逗号“，”、括号“（）”等）一律使用中文输入状态下的标点符号，但小数点采用英文状态下的样式“.”。

第二章 相控阵单脉冲测向基本理论

本章将介绍相控阵单脉冲测向的基本原理，首先给出几种相控阵的接收信号模型，然后介绍波束形成技术，最后给出三种常用的传统单脉冲测向方法。在本章中，所有入射信号都假设为远场窄带信号，构成阵列的所有天线均为完全一致且理想的全向天线，没有幅相误差，不考虑阵元间互耦。

2.1 相控阵接收信号模型

依据相控阵阵元天线的排布方式，我们可以将相控阵划分为规则阵和共形阵。前者主要有均匀线阵、均匀面阵和均匀圆阵，而后者代指天线排布没有特定几何规律的“一般”阵列。对于远场窄带信号，其一般表达式为 $s(t) = A(t) \exp[-j(2\pi ft + \phi(t))]$ ，其中 $A(t)$ 为入射信号的振幅， $\phi(t)$ 为初相位。对于入射信号波程差引起的短时延 τ ，远场窄带信号有式(2-1)成立。

$$\begin{aligned} A(t - \tau) &\approx A(t) \\ \phi(t - \tau) &\approx \phi(t) \end{aligned} \quad (2-1)$$

因此我们可以忽略时延 τ 对信号振幅和初相位的影响。若假设阵列由 M 个阵元组成，则可以得到第 m 个阵元相对于阵列参考点的输出 $s(t) \exp(-j2\pi f\tau_m)$ 。我们进一步将 M 个阵元的输出信号重写为向量形式 \mathbf{y} ，并且假设每个阵元的噪声都是独立同分布的零均值高斯白噪声，即 $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I})$ 。利用上述假设，相控阵接收信号模型可以被表述为式(2-2)。

$$\mathbf{y} = s(t)\mathbf{a} + \mathbf{n} \quad (2-2)$$

式(2-2)中，向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 称为导向向量，是一个与信号入射方向以及阵元排布方式有关的向量。在接下来的小节中，我们将讨论不同阵列的导向向量。

2.1.1 均匀线阵

均匀线阵是指阵列的所有阵元等间距分布在一条线（如 x 轴）上的阵列。在本节中我们设相邻两阵元的间距为 d 。若考虑一远场窄带信号 $s(t)$ ，以俯仰角 φ 入射到由 M 个阵元组成的均匀线阵上，如图2-1所示。

对于均匀线阵，俯仰角 φ 的定义域通常为 $\varphi \in (-90^\circ, 90^\circ)$ 。设阵列参考点为 O ，即左起第一个阵元。由几何关系我们可以得知，第 m 个阵元相对于参考点的

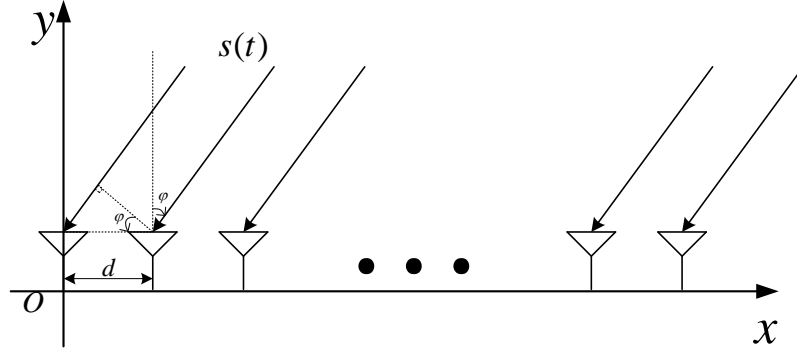


图 2-1 均匀线阵接收信号模型

波程差为 $(m-1)d \sin \varphi$ ，因此我们可以得到第 m 个阵元相对于参考点的时延 τ_m 。

$$\tau_m = \frac{(m-1)d \sin \varphi}{c} \quad (2-3)$$

利用式(2-3)，均匀线阵的导向向量可以由式(2-4)表出。

$$\mathbf{a}(\varphi) = \left[1, \exp\left(j \frac{2\pi d \sin \varphi}{\lambda}\right), \dots, \exp\left(j \frac{2\pi(M-1)d \sin \varphi}{\lambda}\right) \right]^T \quad (2-4)$$

在均匀线阵中，要求相邻两阵元间距 $d \leq \lambda/2$ ，否则会造成相位混叠，进而影响单脉冲测向。

2.1.2 均匀面阵

均匀面阵是指所有阵元分布在一个矩形平面如 xOy 平面上，所有阵元共面。其 x 轴方向上的任意两相邻阵元间距均为 d_x ， y 轴方向上的任意两相邻阵元间距均为 d_y ，如图2-2所示。

图2-2中，期望信号 $s(t)$ 以方位角 θ 和俯仰角 φ 入射到该均匀面阵上。一般情况下，方位角 θ 的定义域取 $\theta \in [-180^\circ, 180^\circ)$ ，俯仰角的定义域取 $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ)$ 。若假设该均匀面阵共有 $M \times N$ 个阵元，其中 x 轴方向上 M 行， y 轴方向上 N 列。依照几何关系依旧可以得到第 (m, n) 个阵元相对于参考点的波程差，进一步得到时

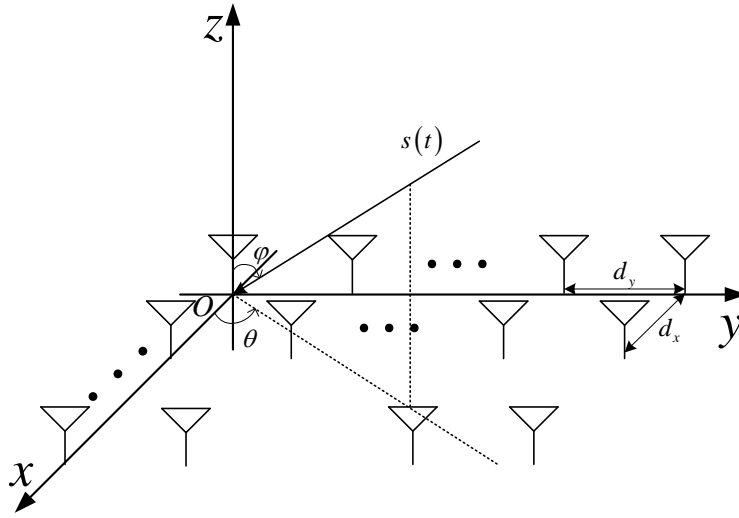


图 2-2 均匀面阵接收信号模型

延 $\tau_{m,n}$ 。

$$\tau_{m,n} = \frac{(m-1)d_x \sin \varphi \cos \theta + (n-1)d_y \sin \varphi \sin \theta}{c} \quad (2-5)$$

因此可以构造一个 $M \times N$ 的矩阵 \mathbf{S} ，它的第 m 行，第 n 列元素是第 (m, n) 个阵元相对于参考点的相位差，即(2-6)式。

$$[\mathbf{S}]_{m,n} = \exp \left(j \frac{2\pi}{\lambda} [(m-1)d_x \sin \varphi \cos \theta + (n-1)d_y \sin \varphi \sin \theta] \right) \quad (2-6)$$

我们利用上一节中均匀线阵的导向向量形式(2-4)，可以将矩阵 \mathbf{S} 重写为(2-7)式。

$$\mathbf{S}(\theta, \varphi) = \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y^T \quad (2-7)$$

式(2-7)中，向量 $\mathbf{a}_x \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 和 $\mathbf{a}_y \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 分别为 x 轴方向和 y 轴方向上均匀线阵形式的导向向量，其定义由式(2-8)表出。

$$[\mathbf{a}_x]_m = \exp \left(j \frac{2\pi(m-1)d_x \sin \varphi \cos \theta}{\lambda} \right) \quad (2-8a)$$

$$[\mathbf{a}_y]_n = \exp \left(j \frac{2\pi(n-1)d_y \sin \varphi \sin \theta}{\lambda} \right) \quad (2-8b)$$

最后，我们将矩阵 \mathbf{S} 按列优先重排得到均匀面阵的导向向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{MN \times 1}$ 。

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \text{vec}(\mathbf{a}_x \mathbf{a}_y^T) \quad (2-9)$$

上式中， $\text{vec}(\cdot)$ 表示按列优先重排向量。

2.1.3 均匀圆阵

均匀圆阵指阵列中的所有阵元都均匀分布在一个半径为 R 的圆上，且所有阵元共面。通常情况下，以圆心 O 作为阵列参考点，如图2-3所示。

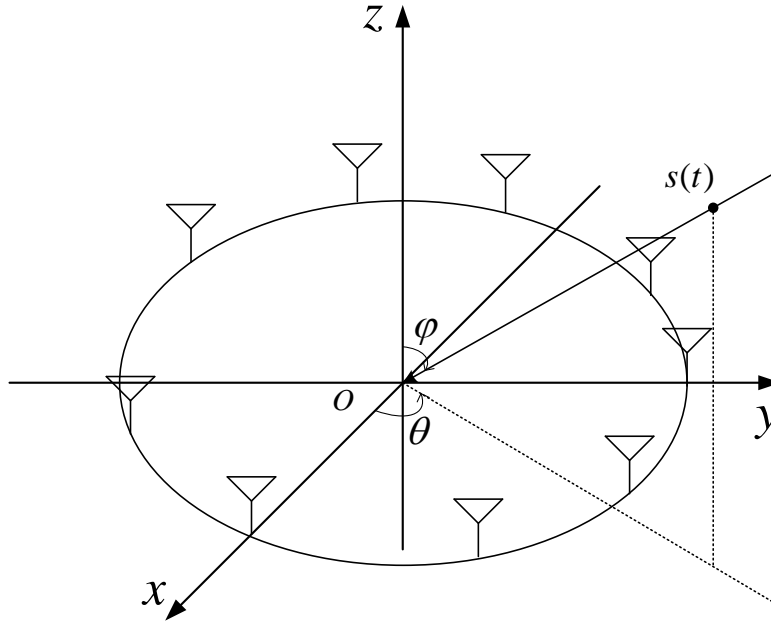


图 2-3 均匀圆阵接收信号模型

假设一期望信号以方位角 θ ，俯仰角 φ 入射到 M 个阵元组成的均匀圆阵上。由于 M 个阵元均分圆周，即任意两相邻两阵元的圆弧长相等，因此我们可以得到第 m 个阵元的坐标 \mathbf{r}_m 。

$$\mathbf{r}_m = [R \cos \phi_m, R \sin \phi_m, 0]^T \quad (2-10)$$

式(2-10)中， ϕ_m 表示第 m 个阵元与 x 轴的夹角，我们限定其定义域为 $\phi_m \in [-\pi, \pi)$ ，

然后给出 ϕ_m 的表达式(2-11)。

$$\phi_m = 2\pi \frac{-(M-1)/2 + m - 1}{M} \quad (2-11)$$

利用 \mathbf{r}_m 和入射信号角度可以计算出第 m 个阵元相对于参考点 O 的波程差, 进一步得到均匀圆阵导向向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 。该导向向量的元素由式(2-12)表出。

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(\theta, \varphi)]_m &= \exp \left[j \frac{2\pi R}{\lambda} (\cos \phi_m \sin \varphi \cos \theta + \sin \phi_m \sin \varphi \sin \theta) \right] \\ &= \exp \left[j \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \varphi \cos (\theta - \phi_m) \right] \end{aligned} \quad (2-12)$$

2.1.4 共形阵

共形阵没有特定的几何规则, 导向向量往往与参考点的选取有关。考虑一个远场窄带信号 $s(t)$, 以方位角 θ 和俯仰角 φ 入射到由 M 个阵元组成的共形阵上, 如图2-4所示。假设共形阵的参考点为坐标原点 O , 第 m 个阵元的位置向量为

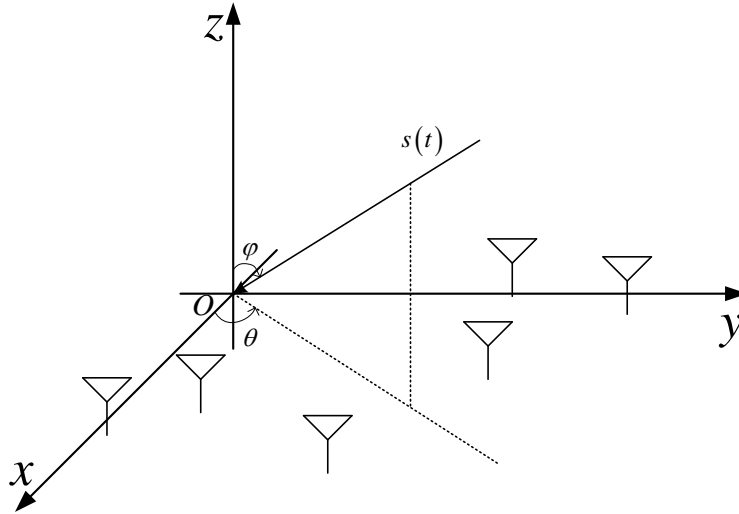


图 2-4 共形阵接收信号模型

$\mathbf{r}_m = [x_m, y_m, z_m]^T$ 。入射信号的方向向量由式(2-13)给出。

$$\mathbf{e}_p = -[\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi]^T \quad (2-13)$$

因此，我们可以得到第 m 个阵元相对于参考点 O 的相位差 u_m

$$u_m = \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{r}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_p \right) \quad (2-14)$$

进一步得到共形阵的导向向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 。

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \left[\exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{r}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_p \right), \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{r}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_p \right), \dots, \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{r}_M^T \boldsymbol{\varepsilon}_p \right) \right]^T \quad (2-15)$$

式(2-15)是相控阵导向向量的一般表达式，前几个小节中的规则阵列导向向量均可以使用式(2-15)表出。

2.2 波束形成技术

波束形成技术是一种相控阵的空域处理技术，其主要目的是让阵列形成指向，使得阵列接收信号功率集中于目标方向附近，同时抑制非目标方向的干扰。波束形成的主要原理是通过对阵列中的各个阵元的输出信号进行加权补相并求和，使得目标方向上的相位叠加增强，而非目标方向上的相位叠加相消。让阵列对准目标方向，形成一个指向目标的“波束”，同时对于其余方向上的干扰以及噪声有一定抑制。在本章中，我们将以半波长间距的均匀线阵为例，分析波束形成的原理和一般过程。

2.2.1 MVDR 波束形成方法

MVDR 方法即最小方差无失真响应方法，本节我们将以单信源入射均匀线阵为例分析其原理。考虑一期望信号 $s(t)$ 由方向 φ_0 入射到 M 阵元的均匀线阵上，由式(2-2)知 M 个阵元的输出记为向量 \mathbf{y} 。现假设有一 M 个抽头的空域滤波器，其权向量为 $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 。阵列的输出信号通过该滤波器的输出为 z ，由式(2-16)表出。

$$z = \mathbf{w}^H \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{w}^* \quad (2-16)$$

上式中， \cdot^* 表示转置。利用式(2-16)可以得到该滤波器输出的平均功率 σ^2 。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E \{ |z|^2 \} \\ &= E \{ \mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} \} \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2-17)$$

式(2-17)中，矩阵 $\mathbf{Q} = E \{ \mathbf{y} \mathbf{y}^H \}$ 是干扰叠加噪声（即不含有期望信号）的协方差矩阵。

由于期望信号的入射方向是 φ_0 ，利用式(2-2)和式(2-16)可知，理想情况下（不

考虑噪声) 滤波器的输出应该是式(2-18)中的 z_0 。

$$z_0 = \mathbf{w}^H \mathbf{y}(\varphi_0) = \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_0) s(t) \quad (2-18)$$

由于我们要求空域滤波器在目标方向上无失真的通过, 因此我们可以令约束条件为式(2-19)。

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_0) = 1 \quad (2-19)$$

同时, 为了抑制其他方向上的干扰和噪声, 我们还需要使得滤波器输出的平均功率最小, 因此, 该波束形成问题可以表述为一个带约束条件的优化问题, 如式(2-20)所示。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_0) = 1 \end{aligned} \quad (2-20)$$

我们可以用拉格朗日乘子法求解该问题, 首先构造代价函数 $J(\mathbf{w})$ 。

$$J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} + \mu (\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_0) - 1) \quad (2-21)$$

然后对代价函数 $J(\mathbf{w})$ 求梯度, 并令其等于 $\mathbf{0}$ 向量。

$$\nabla J(\mathbf{w}) = 2\mathbf{Q}\mathbf{w} - 2\mathbf{a}(\varphi_0) = \mathbf{0} \quad (2-22)$$

求解式(2-22)我们可以得到 \mathbf{w} 的解。

$$\mathbf{w} = \mu \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\varphi_0) \quad (2-23)$$

注意式(2-23)中, 只要干扰信号是非相干的, 那么协方差矩阵 \mathbf{Q} 一定可逆。本小节中只存在一个期望信号, 无干扰, 而我们假设每个阵元的噪声都是独立同分布的高斯白噪声, 此时矩阵 \mathbf{Q} 一定可逆。然后将式(2-23)代入式(2-19), 我们可以得到拉格朗日乘子 μ 。

$$\mu = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\varphi_0) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\varphi_0)} \quad (2-24)$$

最后, 我们将式(2-24)代入(2-23), 得到 MVDR 权向量的最优解 \mathbf{w}_o 。

$$\mathbf{w}_o = \frac{\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\varphi_0)}{\mathbf{a}^H(\varphi_0) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\varphi_0)} \quad (2-25)$$

MVDR 方法要求干扰源的个数小于或等于 $M - 1$, 否则将会导致协方差矩阵

Q 的退化, 我们将 $M-1$ 称为阵列的自由度。对于满足各态历经性的信号 \mathbf{y} , 我们可以用时间平均估计出其统计平均, 并由此得到协方差矩阵的估计量。

2.2.2 LCMV 波束形成方法

MVDR 方法的局限性在于, 它只有一组约束条件, 即期望信号无失真通过。当阵列需要在多个方向上形成波束, 或者在指定方向上形成零点抑制干扰时, MVDR 方法就无法胜任这一工作了。因此在本小节中, 我们将介绍一种线性约束最小方差方法, 即 LCMV 方法。

LCMV 方法的基本原理相同, 我们仍旧需要使空域滤波器的平均输出功率最小, 但此时约束条件发生了改变。假设一个 M 阵元的均匀线阵, 若需要形成 L 个波束, 在 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_L$ 方向上保持接收信号的单位增益, 同时需要形成 P 个零陷, 在 $\varphi_{L+1}, \varphi_{L+2}, \dots, \varphi_{L+P}$ 方向上形成零陷用于抑制干扰。此时, 我们可以将多个约束条件写成矩阵乘法的形式, 如式(2-26)所示。

$$\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (2-26)$$

上式中, 矩阵 $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times (L+P)}$ 称为约束矩阵, 向量 $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{(L+P) \times 1}$ 为对应的约束向量。对于上述约束条件, 我们可以将其表述为式(2-27)。

$$\mathbf{C} = [\mathbf{a}(\varphi_1), \dots, \mathbf{a}(\varphi_L), \mathbf{a}(\varphi_{L+1}), \dots, \mathbf{a}(\varphi_{L+P})] \quad (2-27a)$$

$$\mathbf{f} = [1, \dots, 1, 0, \dots, 0]^T \quad (2-27b)$$

类似于 MVDR 方法, 我们依旧可以将该问题表述为一个带约束条件的优化问题, 即式(2-28)。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2-28)$$

同样利用拉格朗日乘子法构造代价函数, 并令其梯度为 $\mathbf{0}$ 向量, 然后解得

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\mu} \quad (2-29)$$

注意, 上式中的向量 $\boldsymbol{\mu}$ 是拉格朗日乘子, 然后将式(2-29)代入式(2-26)中得到

$$\boldsymbol{\mu} = 2 (\mathbf{C}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (2-30)$$

最后将式(2-30)代入式(2-29)得到 LCMV 的最优权向量 \mathbf{w}_o ，由式(2-31)表出。

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (2-31)$$

与 MVDR 方法一样，LCMV 也存在阵列自由度 $M - 1$ ，约束条件的个数 $L + P \leq M - 1$ ，否则将会引起协方差矩阵 \mathbf{Q} 的退化。实际上，MVDR 方法是 LCMV 方法的一种特殊情况，即约束条件的个数只有一个。LCMV 方法给出了一种广义形式，在后续的自适应单脉冲测向中，我们还会用到该方法。

2.3 传统单脉冲方法

在上一节中，我们假设波束形成的方向 φ_0 和期望信号的真实方向 φ_s 是一致的。但在实际情况中，由前端处理得到的波束指向角 φ_0 并不一定等于 φ_s ，往往还相差了一个较小的角度 $\pm \Delta\varphi$ ，但真实角度 φ_s 一般处于波束的 3dB 宽度以内。因此，我们需要一种方法在已知波束指向角的情况下测量期望信号的真实方向。单脉冲测向方法就是用于解决该问题的。通常情况下，单脉冲测向方法需要在阵列的输出端分别形成和波束与差波束，其中和波束要求在波束指向处形成主瓣增益，而差波束则需要在波束指向处形成零陷。然后利用单脉冲比即差和比估计出期望信号方向与波束指向间的差值 $\Delta\varphi$ ，进一步得到期望信号的真实方向。

传统的单脉冲测向方法主要由三种，分别是半阵法、加权法和和差比幅法，我们在接下来的小节中将会依次结束这三种方法。值得注意的是，这三种方法都是静态非自适应方法，不依赖于干扰叠加噪声的统计特性。其中只有加权测向方法可以抑制旁瓣干扰，并且三种方法都无法抑制主瓣干扰。三种方法的主要区别在于和波束与差波束的形成方式不同。

2.3.1 半阵测向

半阵测向方法利用阵列的几何对称性来构造和差波束权向量，因此主要用于均匀线阵和均匀面阵这种拥有范德蒙德结构导向向量的规则阵列。本节中我们以线阵为例，解析半阵测向的原理和过程。

首先考虑一 $2M$ 阵元的均匀线阵，阵元间距为 d ，波束指向为 φ_0 。由于和波束要求在波束指向 φ_0 处形成主瓣增益，因此我们可以取和波束权 \mathbf{w}_Σ 为指向 φ_0 处的导向向量。

$$\mathbf{w}_\Sigma = \mathbf{a}(\varphi_0) \quad (2-32)$$

利用均匀线阵的对称性，我们取差波束 \mathbf{w}_Δ 为

$$\mathbf{w}_\Delta = [\overbrace{-1, \dots, -1}^M, \overbrace{1, \dots, 1}^M]^T \odot \mathbf{a}(\varphi_0) \quad (2-33)$$

式(2-33)中， \odot 表示 Hadamard 积。假设期望信号的入射方向为 φ_s ，其导向向量为 $\mathbf{a}(\varphi_s)$ ，和波束输出为 $\Sigma(\varphi_s)$ ，差波束输出为 $\Delta(\varphi_s)$ 。

$$\Sigma(\varphi_s) = \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\varphi_s) = \sum_{m=1}^{2M} \exp \left[j \frac{2\pi(m-1)d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] \quad (2-34a)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_s) = \mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\varphi_s) &= \sum_{m=M+1}^{2M} \exp \left[j \frac{2\pi(m-1)d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] \\ &\quad - \sum_{m=1}^M \exp \left[j \frac{2\pi(m-1)d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] \end{aligned} \quad (2-34b)$$

为便于化简，我们设波束 P 为

$$P = \sum_{m=1}^M \exp \left[j \frac{2\pi(m-1)d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] \quad (2-35)$$

然后将式(2-35)代入(2-34)得到

$$\Sigma(\varphi_s) = P \left(\exp \left[j \frac{2\pi M d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] + 1 \right) \quad (2-36a)$$

$$\Delta(\varphi_s) = P \left(\exp \left[j \frac{2\pi M d}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \right] - 1 \right) \quad (2-36b)$$

我们令 $u = \sin \varphi_s - \sin \varphi_0$ ，利用欧拉公式进一步得到半阵法的单脉冲比 MRC

$$\begin{aligned} \text{MRC} &= \frac{\Delta(\varphi_s)}{\Sigma(\varphi_s)} \\ &= \frac{\exp \left(j \frac{\pi M d}{\lambda} u \right) - \exp \left(-j \frac{\pi M d}{\lambda} u \right)}{\exp \left(j \frac{\pi M d}{\lambda} u \right) + \exp \left(-j \frac{\pi M d}{\lambda} u \right)} \\ &= j \frac{\sin (\pi M d u / \lambda)}{\cos (\pi M d u / \lambda)} \\ &= j \tan \left(\frac{\pi M d}{\lambda} u \right) \end{aligned} \quad (2-37)$$

在单脉冲测向的场景中，通常假设目标真实方向 φ_s 与阵列波束指向 φ_0 相差较小，由此可知 $u = \sin \varphi_s - \sin \varphi_0$ 趋近于 0。同时由于 $\pi M / \lambda$ 为一有限值，我们可以利用等价无穷小 $\tan x \sim x$ 将单脉冲比 MRC 近似为

$$\text{MRC} = j \frac{\pi M}{\lambda} (\sin \varphi_s - \sin \varphi_0) \quad (2-38)$$

最后利用 Taylor 展开式将 $\sin \varphi_s$ 在 φ_0 处展开，并舍弃二阶及其以上的高次项并代入式(2-38)得到

$$\text{MRC} = j \frac{\pi M d}{\lambda} \cos \varphi_0 (\varphi_s - \varphi_0) \quad (2-39)$$

若我们取 $\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_0$ 作为偏离角，则可以得到一个关于 $\Delta\varphi$ 的线性函数。接下来我们通过一个例子展示半阵法的和差波束以及单脉冲比曲线（MRC）。

考虑一个 8 阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，若我们设阵列波束指向 $\varphi_0 = 0^\circ$ ，和波束与差波束如图2-5所示，半阵法的单脉冲比曲线如图2-6所示。

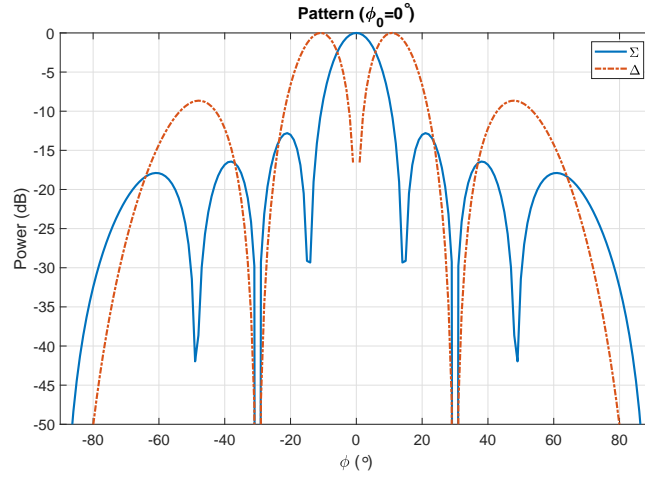


图 2-5 半阵法的和波束 Σ 与差波束 Δ

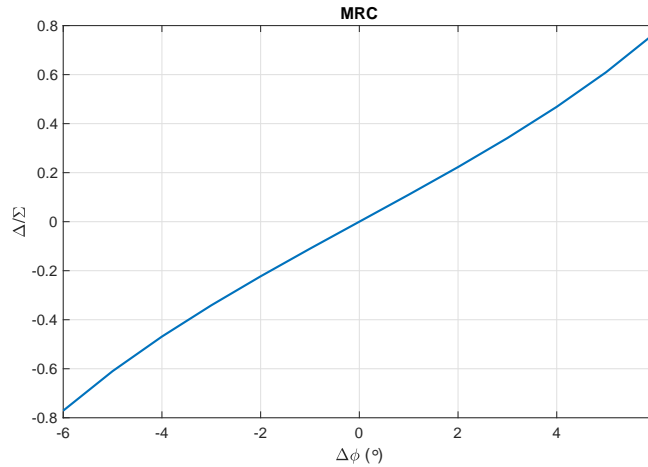


图 2-6 半阵法的单脉冲比曲线

从图2-5中我们可以看出，和波束的主瓣对准了 $\varphi_0 = 0^\circ$ ，3dB 衰减边界大致位于 $\pm 6^\circ$ 处。差波束在波束指向 φ_0 处形成了一个较深的零陷，注意图2-5截断了衰减 -50dB 以下的部分。

对于单脉冲曲线图2-6，我们可以得知当角度 φ 与波束指向角 φ_0 较为接近时，MRC 的线性度较好，而在远离波束指向的地方，MRC 的线性度较差。这意味着期望信号的真实方向 φ_s 偏离波束指向 φ_0 越多，该方法的测量误差也就越大。

2.3.2 加权测向

半阵法理论过程简明清晰，且 MRC 有显式的表达式，但其利用了阵列对称性，因此只能用于均匀线阵和均匀面阵。并且半阵法和差波束权向量直接选取了波束指向的导向向量，因此旁瓣抑制比较低，当测向环境中出现强旁瓣干扰时，可能会使得该方法失效。因此，另一种设计和差波束权的方式应运而生。

加权法通过对波束指向处的导向向量 $\mathbf{a}(\varphi_0)$ 进行加窗处理，从而设计出一种满足给定旁瓣抑制比的和差波束。传统的和差波束窗分别是 Taylor 窗和 Bayliss 窗，在作者的原文中，这两种窗分别由圆形孔径和线形孔径天线（模拟天线，非阵列）导出，而在接下来的内容中，我们将其扩展到均匀线阵上。

首先考虑一个长度为 $2a$ 质地均匀的线形天线孔径，取其中点为参考点 O ，并假设信号以角度 φ 入射，如图2-7所示。

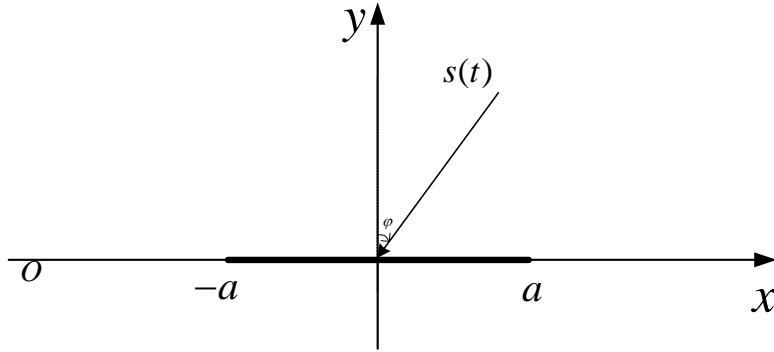


图 2-7 线性孔径接收信号模型

利用天线理论我们可以得知，线形孔径的响应函数 $F(u)$ 为

$$F(u) = \int_{-a}^a g(x) e^{jux} dx \quad (2-40)$$

上式中, $g(x)$ 为孔径函数, 即线形孔径上每个微元的单位冲激响应函数, 并且由

$$u = \frac{2a}{\lambda} \sin \varphi \quad (2-41a)$$

$$x = \frac{\pi}{a} \quad (2-41b)$$

式(2-41)中, λ 为入射信号波长, $2a$ 为线形孔径的长度, φ 为期望信号入射角度, 如图2-7所示。由于和波束要求响应函数为偶函数, 因此我们将孔径函数 $g(x)$ 以余弦级数展开得到式(2-42)。

$$g_{\Sigma}(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\bar{n}-1} B_l \cos(\mu_l x), & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2-42)$$

对于线形孔径, 我们可以取 $\mu_l = l$ 。式(2-42)中, \bar{n} 是我们期望抑制的邻近 (主瓣) 旁瓣个数。我们定义对数旁瓣抑制比为 SLL

$$\text{SLL} = 20 \lg \eta = 10 \lg (v_s^2 / v_m^2) \quad (2-43)$$

式(2-43)中, v_s^2 和 v_m^2 分别为旁瓣功率和主瓣功率。在线形孔径的条件下, 系数 B_l 由式(2-44)表出。

$$B_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ (-1)^{m+1} \frac{\prod_{n=1}^{\bar{n}-1} 1 - \frac{m^2}{\sigma^2 [A^2 + (n-1/2)^2]}}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\bar{n}-1} 1 - \frac{m^2}{n^2}}, & 0 < m < \bar{n} \\ 0, & m \geq \bar{n} \end{cases} \quad (2-44)$$

式(2-44)中, A 和 σ^2 由式(2-45)表出。

$$A = \text{acosh} \left(10^{-\text{SLL}/20} \right) / \pi \quad (2-45a)$$

$$\sigma^2 = \frac{\bar{n}^2}{A^2 + (\bar{n} - 1/2)^2} \quad (2-45b)$$

利用式(2-42)、(2-43)、(2-44)和(2-45) 我们就可以针对该线形孔径设计出符合要求的和波束权。

现在我们将该结论扩展到均匀线阵上。考虑一个 M 阵元的均匀线阵, 阵元间距为半波长。均匀线阵可以看作是对线形孔径的等间距采样, 此时阵列的输出由式(2-40)变为向量内积, 即式(2-46)。

$$f(\varphi) = \mathbf{g}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\varphi) \quad (2-46)$$

上式中, $\mathbf{a}(\varphi)$ 为导向向量, \mathbf{g}_Σ 为 Taylor 幅度权向量。由于均匀线阵是对线形孔径的等间距采样, 因此我们可以得到 \mathbf{g}_Σ 的表达式

$$\mathbf{g}_\Sigma = [g_\Sigma(x_1), g_\Sigma(x_2), \dots, g_\Sigma(x_M)]^T \quad (2-47)$$

式(2-47)中, $g_\Sigma(x)$ 为(2-42)中线形孔径函数 $g(x)$ 的余弦展开式。而 x_1, x_2, \dots, x_M 表示在区间 $[-\pi, \pi]$ 中均匀的取 M 个点, 由此得到 M 阵元均匀线阵的 Taylor 幅度权。

由于 Taylor 权向量 \mathbf{g}_Σ 为幅度权, 不含有相位。因此我们可以通过式(2-48)得到任意波束指向 φ_0 的和波束权。

$$\mathbf{w}_\Sigma = \mathbf{g}_\Sigma \odot \mathbf{a}(\varphi_0) \quad (2-48)$$

上式中, \odot 表示 Hadamard 积。

接下来, 我们讨论基于 Bayliss 幅度权的差波束权向量。与 Taylor 权类似, 均匀线阵的 Bayliss 权依旧可以从线形孔径模型下扩展得到。同样, 我们考虑一个长度为 $2a$ 的线形孔径, 取其中点为参考点 O , 入射信号波长为 λ , 角度为 φ , 如图2-7所示。其响应函数 $F(u)$ 同式(2-40)。由于差波束要求响应函数为奇函数, 因此我们将孔径函数 $g(x)$ 展开为正弦级数, 如式(2-49)所示。

$$g_\Delta(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\bar{n}-1} B_l \sin(\mu_l x), & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2-49)$$

对于线形孔径, 我们可以取 $\mu_l = l + 1/2$ 。同样的, 我们定义旁瓣抑制比 SLL, 定义式同式(2-43), 以及期望约束的邻近(主瓣)旁瓣个数 \bar{n} 。在线形孔径的条件下, 系数 B_l 由式(2-50)表出。

$$B_m = \begin{cases} \frac{C(-1)^m}{2j} (m - 1/2)^2 \frac{\prod_{n=1}^{\bar{n}-1} 1 - \left(\frac{m+1/2}{\sigma Z_n}\right)^2}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\bar{n}-1} 1 - \left(\frac{m+1/2}{l+1/2}\right)^2}, & 0 \leq m \leq \bar{n} - 1 \\ 0, & m > \bar{n} - 1 \end{cases} \quad (2-50)$$

上式中, C 为常数, σ 称为展宽因子, 表达式为

$$\sigma = \frac{\mu_{\bar{n}}}{Z_{\bar{n}}} = \frac{\bar{n} + 1/2}{Z_{\bar{n}}} \quad (2-51)$$

而 Z_n 的定义则由式(2-52)给出。

$$Z_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \xi_n, & 0 < n \leq 4 \\ \sqrt{A^2 + n^2}, & n > 4 \end{cases} \quad (2-52)$$

式(2-52)中, ξ_n 和 A 是与旁瓣抑制比 SLL 有关的常数, 可由表2-1给出的 SLL 四阶多项式系数算出。

常量	多项式系数				
	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
A	0.30387530	-0.05042922	-0.00027989	-0.00000343	-0.00000002
ξ_1	0.98583020	-0.03338850	0.00014064	0.00000190	0.00000001
ξ_2	2.00337487	-0.01141548	0.00041590	0.00000373	0.00000001
ξ_3	3.00636321	-0.00683394	0.00029281	0.00000161	0.00000000
ξ_4	4.00518423	-0.00501795	0.00021735	0.00000088	0.00000000

表 2-1 A 和 Z_n 的多项式系数

例如, A 可以由式(2-53)计算得出。

$$A = C_0 + C_1 \text{SLL} + C_2 \text{SLL}^2 + C_3 \text{SLL}^3 + C_4 \text{SLL}^4 \quad (2-53)$$

最后, 利用式(2-49)、(2-50)、(2-51)和(2-52)并结合表2-1即可设计出满足给定指标 SLL 和 \bar{n} 的线形孔径权。

均匀线阵的 Bayliss 权向量推到与 Taylor 权向量类似, 我们依旧将均匀线阵看作是对线形孔径的等间距采样。若假设均匀线阵有 M 个阵元, 由式(2-47)可以启发得到

$$\mathbf{g}_\Delta = [g_\Delta(x_1), g_\Delta(x_2), \dots, g_\Delta(x_M)]^T \quad (2-54)$$

式(2-54)中, x_1, x_2, \dots, x_M 是对区间 $[-\pi, \pi]$ 均匀采样的 M 个点。类似的, Bayliss 权也是一个幅度权, 不含有相位信息。因此, 任意波束指向 φ_0 的 Bayliss 差波束权可以由式(2-55)导出。

$$\mathbf{w}_\Delta = \mathbf{g}_\Delta \odot \mathbf{a}(\varphi) \quad (2-55)$$

至此, 我们已经给出了均匀线阵的 Taylor 和波束权与 Bayliss 差波束权。注意, 本节中的公式以及结论仅使用于均匀线阵, 若需将其拓展到均匀面阵和均匀圆阵, 可以查阅文献 [9] 和 [10], 推导方法与本节类似。接下来我们将以一个均匀线阵的

例子来展示加权法的和差波束权以及单脉冲曲线。

考虑一个 8 阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长。我们取阵列波束指向 $\varphi_0 = 0^\circ$ ，旁瓣抑制比 SLL 为 -35dB ，抑制邻近旁瓣的个数 $\bar{n} = 4$ 。Taylor 权与 Bayliss 权形成的和差波束如图2-8所示。

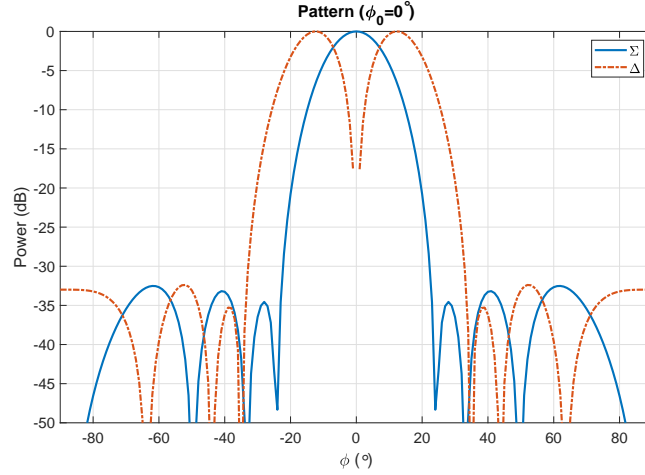


图 2-8 Taylor 权形成的和波束 Σ 与 Bayliss 权形成的差波束 Δ

与半阵法的和差波束图2-5相比，加权法得到的和差波束具有更低的旁瓣电平。这意味着加权法具有更好的旁瓣抑制效果，能够应对存在旁瓣干扰的单脉冲测向场景。但加窗的步骤使得主瓣展宽，和波束的 3dB 截止角度此时位于 $\pm 8^\circ$ 附近。另外，加权法的单脉冲比 MRC 没有显式表达式，我们需要预先对 MRC 进行线性拟合才能够在单脉冲测向系统中使用它。图2-9给出了加权法的单脉冲比曲线。

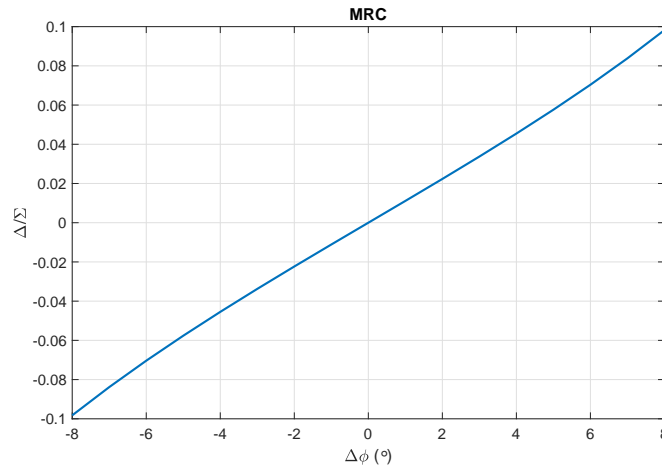


图 2-9 加权法的单脉冲比曲线

类似的，从图2-9中可以得知，在远离波束指向 φ_0 时，MRC 的线性度会下降，从而使得此时的测角误差变大。

2.3.3 和差比幅

半阵法和加权法最大的局限性在于，它们都需要依赖于阵列的特殊结构。前者要求阵列排布具有对称性，后者只能用于规则阵列且不具普适性，每种不同阵列的权向量表达形式可能会大相径庭。而本节中将介绍一种名为和差比幅法的单脉冲测向方法。该方法的和差波束形成方式不依赖于阵列结构，因此可以用于共形阵。

为简化问题，我们依旧以均匀线阵为例来解析和差比幅测向法的一般过程。首先考虑一个 M 阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，期望信号波长为 λ ，阵列波束指向为 φ_0 。与半阵法类似，我们首先构造和波束权。由于和波束要求在波束指向处形成主瓣增益，因此我们取波束指向 φ_0 处的导向向量作为和波束权，即

$$\mathbf{w}_\Sigma = \mathbf{a}(\varphi_0) \quad (2-56)$$

现在构造差波束权。由于差波束要求在波束指向处形成零陷，因此，一种可取的方法是：首先以波束指向 φ_0 为中心，关于 φ_0 对称分别选取两个角度 φ_l 和 φ_r ，一般情况下，我们选择和波束主瓣的 3dB 截止角度作为 φ_l 和 φ_r 的值；然后我们将差波束 $\Delta(\varphi)$ 构造为两个波束之差

$$\Delta(\varphi) = |\mathbf{a}^H(\varphi_l)\mathbf{a}(\varphi)| - |\mathbf{a}^H(\varphi_r)\mathbf{a}(\varphi)| \quad (2-57)$$

同理，比幅法也需要将和波束处理为幅度值，即式

$$\Sigma(\varphi) = |\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\varphi)| \quad (2-58)$$

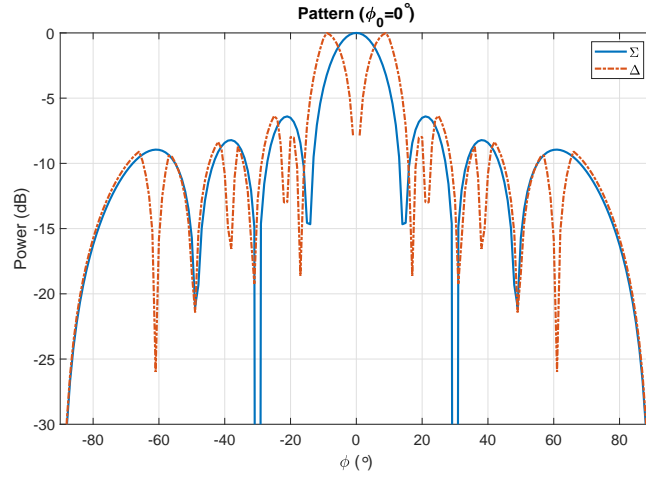
最后结合式(2-58)与(2-57)，得到比幅法的单脉冲比

$$\text{MRC} = \frac{\Delta(\varphi)}{\Sigma(\varphi)} = \frac{|\mathbf{a}^H(\varphi_l)\mathbf{a}(\varphi)| - |\mathbf{a}^H(\varphi_r)\mathbf{a}(\varphi)|}{|\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\varphi)|} \quad (2-59)$$

从式(2-11)中可以看出，比幅测向顾名思义，是以差波束与和波束的幅度比作为单脉冲比，实际上利用了左右波束的对称性，而不局限于阵列本身几何结构的特殊性，因此可以用于共形阵。但该方法受阵列波束特性的影响，比如阵列的主瓣过宽时，可能会导致测向结果较差。接下来我们仍然通过一个均匀线阵的例子来展示其特性。

考虑一个 8 阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，波束指向 $\varphi_0 = 0^\circ$ ，我们取 $\varphi_l = -5^\circ$ 且 $\varphi_r = 5^\circ$ 。此时和差波束如图2-10所示。

从图2-10中可以看出，与半阵法类似，比幅法的差波束依然在波束指向 φ_0 处

图 2-10 比幅法的和波束 Σ 与差波束 Δ

形成了零陷，且旁瓣电平较高，难以抑制旁瓣干扰，仍旧无法用于存在强旁瓣干扰的场景。另外，比幅法的单脉冲比 **MRC** 也不存在一个显式表达式，因此只能通过曲线拟合拟合出其斜率，然后在单脉冲测向系统中用于测向。其单脉冲比曲线如图2-11所示。

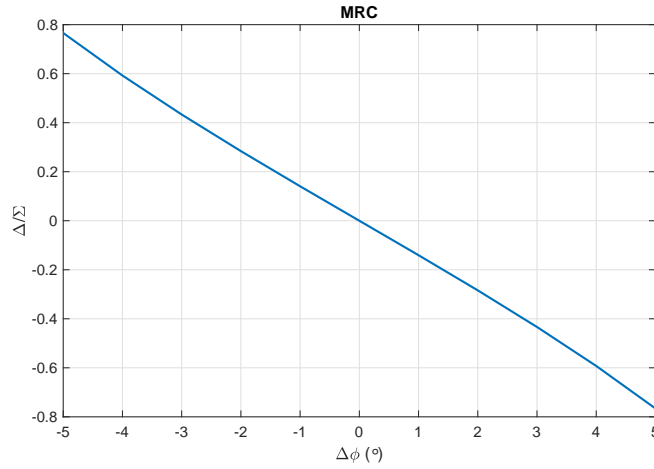


图 2-11 比幅法的单脉冲比曲线

与之前的两种方法类似，**MRC** 在远离波束指向角 φ_0 时线性度会下降，进而影响测角精度。

2.4 本章小结

本章中，我们假设组成相控阵的所有阵元天线都是完全一致的全向天线，并给出了相控阵接收信号的数学模型，进而简要的阐述了波束形成技术和传统单脉冲测向方法。

首先是相控阵的数学模型，依据阵元排布的方式，我们将其划分为两大类，第一类是规则的阵列主要包含均匀线阵，均匀面阵和均匀圆阵。我们通过几何光学计算出信号到达各个阵元的波程差，进一步给出其相位差，在远场窄带信号的假设下，给出了这三种阵列的导向向量。第二类阵列是共形阵，主要特征为其“一般”性，即阵元排布不遵循某一特定规律。在这种情况下，我们利用信号的方向余弦向量以及每个阵元的笛卡尔坐标计算出信号到达每个阵元的相位差，进而给出一般导向向量表达式。值得注意的是，第一类规则阵列实际上是共形阵列的一种特殊形式，其导向向量依然可以根据共形阵导向向量导出。

接着我们介绍了波束形成技术，阐述了波束形成的目的和一般手段。然后介绍了两种波束形成方法，分别是 MVDR 方法和 LCMV 方法。前者可以保证在设定的指向角 φ_0 处形成主瓣增益，同时抑制干扰和噪声；后者则可以在多个指向角同时形成波束和零陷，用于接收信号和抑制干扰。实际上，MVDR 方式是 LCMV 方法的一种特殊形式，即规定在指向角 φ_0 处信号无失真通过。在后续的章节中，我们还将利用 LCMV 结构进行单脉冲测向。

最后我们给出了三种常用的传统单脉冲测向方法，分别是半阵法、加权法和比幅法，三种方法的优缺点各异。半阵法主要更近均匀线阵或均匀面阵的对称性，构造出和差波束权向量。而在单脉冲测向问题中，期望信号的真实方向 φ_s 往往接近于波束指向 φ_0 ，因此半阵法利用该特性导出一个关于偏离角 $\Delta\varphi$ 的显式线性函数，进一步用于测向过程。该方法简单易于实现，但依赖于阵列的几何结构，不能用于均匀圆阵和共形阵，并且其和差波束的旁瓣电平都较高，无法应对有强旁瓣干扰存在时的场景。因此，T. Taylor 和 E. T. Bayliss 分别提出了一种和差波束加权方法，进而设计出一种低旁瓣的和差波束权向量。该方法可以用于均匀线阵、均匀面阵和均匀圆阵，其优点在于底旁瓣的波束能够在一定程度上抑制旁瓣干扰。但加窗的处理过程使得和波束主瓣有一定程度的展宽，可能会造成测向精度下降，并且这种方法的单脉冲比没有显式表达式，因此只能先进行曲线拟合，再将拟合好的数据用于后续的单脉冲测向过程。另外，该方法虽然可以拓展至均匀圆阵，但仍旧无法将其用于共形阵。第三种方法是比幅测向法，该方法通过选取关于波束指向 φ_0 对称的两个角度的导向向量来构造差波束，并且单脉冲比直接用差波束与和波束的赋值进行比较，以此测量偏离角 $\Delta\varphi$ 。该方法不受限于阵列结构，可以用于共形阵单脉冲测向。但该方法与半阵法类似，和波束旁瓣电平仍然较高，无法应对强旁瓣干扰存在的场景。

第三章 基于旁瓣对消和主瓣干扰置零的单脉冲测向方法

本章中，我们将介绍旁瓣对消波束形成方法及其在单脉冲测向场景中的应用。旁瓣对消方法通过设置一个阵元个数较主阵列小的子阵列，使得期望信号在该阵列上被阻塞，而旁瓣干扰可以无阻碍的通过，然后将主阵与子阵输出叠加，以此消除旁瓣干扰。由于辅助子阵的规模通常小于主阵列，因此该方法减小了计算量。我们首先介绍旁瓣对消的基本原理，然后给出一种基于拟矩阵和 SVD（奇异值分解）的阻塞矩阵的设计方法，最后介绍一种正交置零的主瓣干扰消除技术，并结合旁瓣对消，并将其用于单脉冲测向。

3.1 旁瓣对消基本原理

旁瓣对消的基本流程如图3-1所示。在图3-1中，向量 \mathbf{y}_m 和 \mathbf{y}_a 分别是主阵列

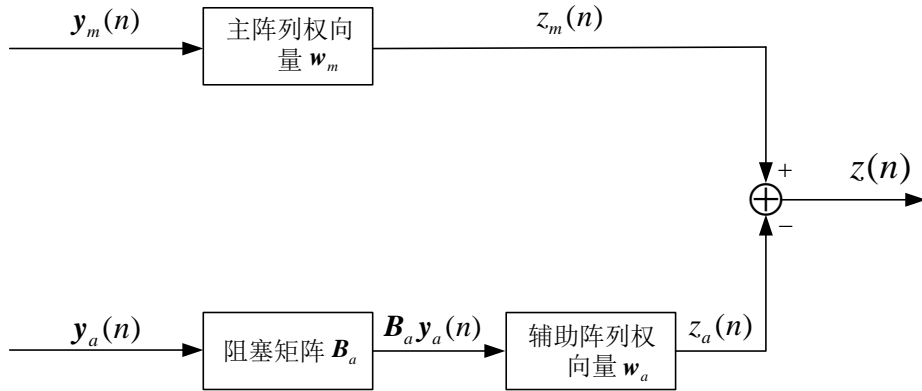


图 3-1 旁瓣对消流程示意图

和辅助阵列的阵元接收信号。辅助阵列接收信号 \mathbf{y}_a 通过阻塞矩阵 \mathbf{B}_a 后抑制期望信号 $s(t)\mathbf{a}(\varphi_s)$ ，而旁瓣干扰保留进入辅助阵列的波束形成器，最后利用加法器 $z_m(n) - z_a(n)$ 得到输出 $z(n)$ ，由于波束 $z_m(n)$ 和 $z_a(n)$ 中都含有旁瓣干扰，因此相互抵消，从而使得最终输出 $z(n)$ 中不含有旁瓣干扰。下面我们将以均匀线阵为例，阐述旁瓣对消的过程和一般原理。

首先考虑一个 $M_m + M_a$ 阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，入射信号波长为 λ ，主阵列为 M_m 阵元的子阵，辅助阵列为 M_a 阵元的子阵，并且它们的波束指

向均为 φ_0 。我们设期望信号入射方向与波束指向相同，即 $\varphi_0 = \varphi_s$ ，并且有 K 个旁瓣干扰信号，其角度分别为 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K$ 。由式(2-2)可以得到主阵列的输出信号 $z_m(n)$ 和辅助阵列输出信号 $z_a(n)$

$$\mathbf{y}_m(n) = \mathbf{a}_m(\varphi_0)s(n) + \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_m(\varphi_k)s_k(n) + \mathbf{n}_m \quad (3-1a)$$

$$\mathbf{y}_a(n) = \mathbf{a}_a(\varphi_0)s(n) + \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_a(\varphi_k)s_k(n) + \mathbf{n}_a \quad (3-1b)$$

为简化符号，我们设

$$\mathbf{v}_m = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_m(\varphi_k)s_k(n) + \mathbf{n}_m \quad (3-2a)$$

$$\mathbf{v}_a = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_a(\varphi_k)s_k(n) + \mathbf{n}_a \quad (3-2b)$$

利用式(3-1)和式(3-2)结合图3-1分别得到旁瓣对消器的输出 $z(n)$

$$\begin{aligned} z(n) &= z_m(n) - z_a(n) \\ &= \mathbf{w}_m^H \mathbf{a}_m(\varphi_0)s(n) + \mathbf{w}_m^H \mathbf{v}_m - z_a(n) \end{aligned} \quad (3-3)$$

在式(3-3)中，旁瓣对消器要求辅助阵列输出 $z_a(n)$ 不含有期望信号 $s(n)$ ，否则将会使得最终输出 $z(n)$ 中的期望信号分量随着旁瓣干扰一并抵消。因此，我们有必要设计一个阻塞矩阵 \mathbf{B}_a ，使得式(3-4)成立。

$$\mathbf{B}_a \mathbf{a}_a(\varphi_0)s(n) = \mathbf{0} \quad (3-4)$$

在第二节中，我们会介绍一种阻塞矩阵的设计方法。为后续公式的导出，我们这里先假设式(3-4)成立，此时辅助阵列的输出 $z_a(n)$ 为

$$z_a(n) = \mathbf{w}_a^H (\mathbf{B}_a \mathbf{a}_a(\varphi_0)s(n) + \mathbf{B}_a \mathbf{v}_a) = \mathbf{w}_a^H \mathbf{B}_a \mathbf{v}_a \quad (3-5)$$

将式(3-5)代入式(3-3)我们得到

$$z(n) = \mathbf{w}_m^H \mathbf{a}_m(\varphi_0)s(n) + \mathbf{w}_m^H \mathbf{v}_m - \mathbf{w}_a^H \mathbf{B}_a \mathbf{v}_a \quad (3-6)$$

对于旁瓣对消器的输出 $z(n)$ ，我们需要使得其干扰叠加噪声分量最小，因此构造代价函数 $J(\mathbf{w}_a)$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}_a) &= E \left\{ \left| \mathbf{w}_m^H \mathbf{v}_m - \mathbf{w}_a^H \mathbf{B}_a \mathbf{v}_a \right|^2 \right\} \\ &= \mathbf{w}_m^H \mathbf{Q}_{mm} \mathbf{w}_m - \mathbf{w}_m^H \mathbf{Q}_{ma} \mathbf{B}_a^H \mathbf{w}_a - \mathbf{w}_a^H \mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{am} \mathbf{w}_m + \mathbf{w}_a^H \mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{B}_a^H \mathbf{w}_a \end{aligned} \quad (3-7)$$

式(3-7)中, 矩阵 \mathbf{Q}_{mm} 和 \mathbf{Q}_{aa} 表示主阵列自相关和辅助阵列自相关矩阵, 矩阵 \mathbf{Q}_{am} 和 \mathbf{Q}_{ma} 表示主阵列与辅助阵列的互相关矩阵, 其定义由式(3-8)给出。

$$\mathbf{Q}_{mm} = E \left\{ \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m^H \right\} \quad (3-8a)$$

$$\mathbf{Q}_{aa} = E \left\{ \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^H \right\} \quad (3-8b)$$

$$\mathbf{Q}_{am} = E \left\{ \mathbf{v}_a \mathbf{v}_m^H \right\} \quad (3-8c)$$

$$\mathbf{Q}_{ma} = E \left\{ \mathbf{v}_m \mathbf{v}_a^H \right\} \quad (3-8d)$$

对式(3-7)中的代价函数 $J(\mathbf{w}_a)$ 求梯度并令其等于零向量, 我们可以得到辅助阵列权向量 \mathbf{w}_a 的最优解

$$\mathbf{w}_a = \left(\mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{B}_a^H \right)^{-1} \mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{am} \mathbf{w}_m \quad (3-9)$$

最后我们结合图3-1与式(3-3)得到广义旁瓣对消器的输出 $z(n)$ 。

$$\begin{aligned} z(n) &= z_m(n) - z_a(n) \\ &= \mathbf{w}_m^H \mathbf{y}_m(n) - \mathbf{w}_a^H \mathbf{y}_a(n) \\ &= \mathbf{w}_m^H \mathbf{y}_m(n) - \left(\mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{B}_a^H \right)^{-1} \mathbf{B}_a \mathbf{Q}_{am} \mathbf{w}_m \mathbf{y}_a(n) \end{aligned} \quad (3-10)$$

注意, 在整个推导过程中, 我们假设主阵列权向量 \mathbf{w}_m 和阻塞矩阵 \mathbf{B}_a 都是已知的, 并且自相关和互相关矩阵也可以由各态历经性从时间平均中得出。阻塞矩阵 \mathbf{B}_a 的选取通常是不唯一的, 且对于不同的阵列, 可能出现不同的结构, 例如对于均匀线阵, 其导向向量如式(2-4), 一种可行的阻塞矩阵为式(3-11)。

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \exp(j\phi_0) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(j\phi_0) & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(j\phi_0) & -1 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

上式中, $\phi_0 = 2\pi d \sin \varphi_0 / \lambda$ 且 $\mathbf{B}_a \in \mathbb{C}^{(M_a-1) \times M_a}$, 此时阻塞矩阵 \mathbf{B}_a 满足条件(3-4)。但我们注意到, 辅助阵列的权向量 \mathbf{w}_a 此时也被限定为一个 $(M_a - 1) \times 1$ 的向量, 即辅助阵列的自由度会将为 $M_a - 1$ 。在随后的小节中, 我们将介绍一种更为灵活的阻塞矩阵设计方式。

3.2 一种基于准矩阵和 SVD 的阻塞矩阵设计方法

本节我们将介绍一种灵活的阻塞矩阵设计方法，该方法 Fernández 等人 15 年提出 [11]。该方法巧妙的利用了准矩阵和 SVD 设计阻塞矩阵，在本节中，我们将以均匀线阵为例，给出该方法的一般过程。

首先考虑一个 M 阵元的均匀线阵，阵元间距为半波长，入射信号为远场窄带信号，波长为 λ 。我们设窄带波束为 $\mathbf{b}(s)$ ，其对应的波束形成权向量为 \mathbf{x} ，由此可以得到式(3-12)。

$$\mathbf{F}(s)\mathbf{x} = \mathbf{b}(s) \quad (3-12)$$

上式中， $\mathbf{F}(s)$ 是 M 列的准矩阵， $\mathbf{b}(s)$ 是准向量。准矩阵 $\mathbf{F}(s)$ 的第 m 列是一个连续函数，如式(3-13)所示。

$$f_m(s) = \exp(j\pi(m-1)s) \quad (3-13)$$

式(??)中， n 表示矩阵 $\mathbf{F}(s)$ 的第 n 列，而 $-1 \leq s \leq 1$ 为一个连续变量，表示阵列波束指向角的余弦值。而矩阵 $\mathbf{F}(s)$ 的 k 行（作为准矩阵，实际上矩阵 $\mathbf{F}(s)$ 有无穷多行）是对应角度余弦值为 s_k 的导向向量，即

$$\mathbf{f}_k = [1, \exp(j\pi s_k), \exp(j\pi s_k), \dots, \exp(j\pi(M-1)s_k)] \quad (3-14)$$

准向量 $\mathbf{b}(s)$ 的结构类似，表示整个空域 s 的波束。

现在我们需要定义准向量的内积，考虑两个 $[a, b] \times 1$ 维的准列向量 $\mathbf{x}(s)$ 和 $\mathbf{y}(s)$ ，我们定义其内积为式(3-15)。

$$\mathbf{x}^H(s)\mathbf{y}(s) = \int_a^b x^*(s)y(s)ds \quad (3-15)$$

上式中， $*$ 表示共轭。我们注意到，准矩阵 $\mathbf{F}(s)$ 实际上是一个列酉形矩阵，因此可以得到

$$\mathbf{F}^H(s)\mathbf{F}(s) = \mathbf{P} \quad (3-16)$$

式(3-16)中，矩阵 \mathbf{P} 的第 m 行第 n 列元素定义为

$$P_{m,n} = \int_{-1}^1 \exp(j\pi s(n-m)) ds = 2 \text{sinc}(n-m) \quad (3-17)$$

结合式(3-16)和(3-17)我们可以得到

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^H(s)\mathbf{F}(s) = 2\mathbf{I} \quad (3-18)$$

利用式(3-18)的结论，我们给准矩阵 $\mathbf{F}(s)$ 的前面乘上一个系数 $1/\sqrt{2}$ ，使之归一化。现在准矩阵 $\mathbf{F}(s)$ 满足列酉矩阵特性了，即 $\mathbf{F}^H(s)\mathbf{F}(s) = \mathbf{I}$ ，那么我们可以由式(3-12)及最小二乘法则构造优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & (\mathbf{F}(s)\mathbf{x} - \mathbf{b}(s))^H (\mathbf{F}(s)\mathbf{x} - \mathbf{b}(s)) \\ \text{s.t. } \quad & \mathbf{x} = \mathbf{F}^H(s)\mathbf{b}(s) \end{aligned} \quad (3-19)$$

式(3-19)中，向量 \mathbf{x} 的第 m 个元素由式(3-20)给出。

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 b(s) \exp(-j\pi s(m-1)) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}\{b(s)\} \big|_{f=(m-1)/2} \end{aligned} \quad (3-20)$$

上式中， $\mathcal{F}\{\cdot\}$ 表示傅里叶变换。

现在，我们考虑设计一个阻塞矩阵，其阻带为 $s_a \leq s \leq s_b$ ，此时结合式(3-19)，我们可以构造出代价函数

$$J(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{F}(s)\mathbf{x} - \mathbf{b}(s))^H (\mathbf{F}(s)\mathbf{x} - \mathbf{b}(s)) - \boldsymbol{\mu}^H (\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{d}) \quad (3-21)$$

式(3-21)中， $\boldsymbol{\mu}$ 表示 L 个元素的拉格朗日乘子，约束矩阵 \mathbf{G} 的第 l 行定义为

$$\mathbf{g}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, \exp(j\pi s_l), \exp(j\pi 2s_l), \dots, \exp(j\pi(M-1)s_l)] \quad (3-22)$$

我们对式(3-21)中的代价函数 $J(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ 求梯度，并令其为零，结合约束条件得到向量 \mathbf{x} 的解

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{G}) \mathbf{F}^H(s)\mathbf{b}(s) + \mathbf{G}(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{d} \quad (3-23)$$

对于阵列的固有静态波束形成器，我们有

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{w} \quad (3-24)$$

成立，将式(3-24)代入(3-23)，我们得到

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{G}) \mathbf{w} + \mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{d} \quad (3-25)$$

式(3-25)中，向量 \mathbf{w} 是阵列的静态权，比如选取波束指向处的导向向量 $\mathbf{w} = \mathbf{a}(\varphi_0)$ 或是第二章中介绍的 Taylor 权。现在，我们的目标转变为根据给定的要求，构造约束矩阵 \mathbf{G} 和约束向量 \mathbf{d} 。

在本节中，我们的任务是构造一个满足要求的阻塞矩阵。因此，对于阻带

$s_a \leq s \leq s_b$ 我们可以令约束向量 $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ 。此时(3-25)式被写为

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{G})\mathbf{w} \quad (3-26)$$

为简化后续公式推导，可以定义投影矩阵 \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{G}) \quad (3-27)$$

矩阵 \mathbf{H} 将向量 \mathbf{w} 投影到约束矩阵 \mathbf{G} 的零空间。

我们假设共有 L 点用于形成波束指向的阻带。然后对约束矩阵 \mathbf{G} 做 SVD 得到

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H \quad (3-28)$$

式(3-28)中，矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times L}$ 和 $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ 都是酉矩阵，而矩阵 $\mathbf{S} \in \mathbb{R}_+^{L \times M}$ 是一个拟对角矩阵，对角元为正奇异值和 0，且一般情况下，按递减排序。因此我们可以将矩阵 \mathbf{V} 分块得到

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 : \mathbf{V}_2] \quad (3-29)$$

式(3-29)中，波束指向个数一般小于阵元数即 $L \leq M$ 。此时式(3-27)可以改写为

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{V}_1\mathbf{V}_1^H = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_2^H \quad (3-30)$$

然后利用准矩阵 $\mathbf{G}(s)$ 的性质，我们构造一个矩阵 $\mathbf{P}_G \in \mathbb{C}^{M \times M}$

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_G]_{m,n} &= \mathbf{G}^H(s)\mathbf{G}(s) = \frac{1}{2} \int_{s_a}^{s_b} \exp(j\pi(n-m)s) ds \\ &= \frac{s_b - s_a}{2} \exp(j\pi(n-m)(s_a + s_b)/2) \text{sinc}\left(\frac{(n-m)(s_b - s_a)}{2}\right) \end{aligned} \quad (3-31)$$

式(3-31)中， $[\cdot]_{m,n}$ 表示矩阵的第 m 行第 n 列元素， $s_a \leq s \leq s_b$ 为设计阻塞矩阵所要求的阻带。我们可以进一步将式(3-31)改写为

$$\mathbf{P}_G = \mathbf{D}\hat{\mathbf{P}}_G\mathbf{D}^H \quad (3-32)$$

上式中，矩阵 \mathbf{D} 是一个 $M \times M$ 的对角酉矩阵，对角元为

$$D_{m,m} = \exp(j\pi(m-1)s_c) \quad (3-33)$$

而半正定的 Toeplitz 矩阵 $\hat{\mathbf{P}}_G$ 定义为

$$[\mathbf{P}_G]_{m,n} = \frac{W}{2} \text{sinc}\left(\frac{(n-m)W}{2}\right) \quad (3-34)$$

式(3-33)和(3-34)中,

$$s_c = (s_a + s_b)/2 \quad (3-35a)$$

$$W = (s_b - s_a) \quad (3-35b)$$

上式中, s_c 为阻带中心点, W 为带宽。同样的, 我们对矩阵 \mathbf{P}_G 做 SVD 并将式(3-28)代入得到

$$\mathbf{P}_G = \mathbf{V}\mathbf{S}^H\mathbf{S}\mathbf{V}^H = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{S}^H\mathbf{S}\tilde{\mathbf{V}}^H\mathbf{D}^H \quad (3-36)$$

式(3-36)中, $\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{S}^H\mathbf{S}\tilde{\mathbf{V}}^H$ 可以视作矩阵 $\hat{\mathbf{P}}_G$ 的特征分解, 且其特征值为实数。由于 $\hat{\mathbf{P}}_G$ 是一个缺秩矩阵, 因为一般情况下 $L \ll M$, 所以我们可以取 \mathbf{S} 的前 L 个大对角元构成矩阵 \mathbf{S}_L 将矩阵 $\hat{\mathbf{P}}_G$ 近似为

$$\hat{\mathbf{P}}_G \approx \tilde{\mathbf{V}}_1\mathbf{S}_L^2\tilde{\mathbf{V}}_1^H \quad (3-37)$$

上式中,

$$\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{V}}_1 : \tilde{\mathbf{V}}_2] \quad (3-38)$$

因此我们得到

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}_1 \quad (3-39)$$

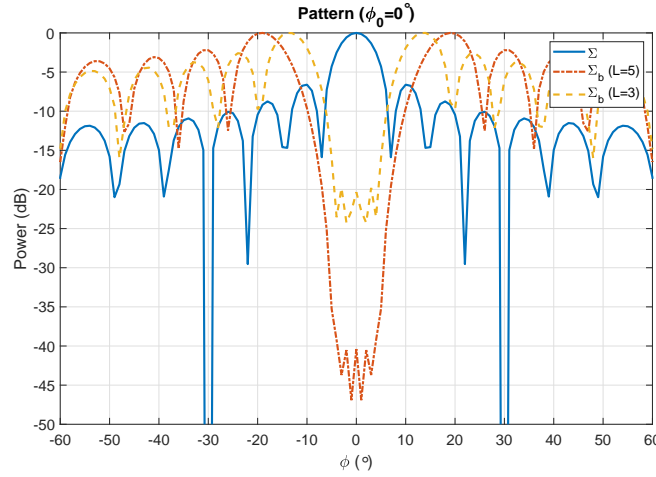
最后我们结合式(3-30)和(3-39)得到投影矩阵

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}_1\tilde{\mathbf{V}}_1^H\mathbf{D}^H \quad (3-40)$$

在给定阵列静态权 \mathbf{w} 的情况下, 结合(3-26)和(3-27) 以及(3-40)式即可得到在波束指向 φ_0 处产生阻带的权向量。在接下来的内容中, 我们将以一个均匀线阵为例, 展示该方法的阻塞矩阵效果。

考虑一个 16 阵元的均匀线阵, 阵元间距为半波长, 波束指向为 $\varphi_0 = 0^\circ$, 设定阻带为 -5° 到 5° , 对于式(3-37)中的近似, 我们分别取 $L = 5$ 和 $L = 3$ 。此时阻塞矩阵形成的波束 Σ_b 与波束指向导向向量形成的波束 Σ 如图3-2所示。

从图3-2的结果中我们可以看出, 该方法在 $-5^\circ \leq \varphi \leq 5^\circ$ 处形成了阻带, 且阻塞效果, 即主瓣抑制比随着近似点数 L 的增加而增大, 也就是说 L 越大, 设计的阻塞矩阵效果越好。


 图 3-2 阻塞矩阵形成的波束 Σ_b

3.3 正交置零主瓣干扰抑制方法

在上文中，我们介绍了旁瓣对消器用于抑制旁瓣干扰，但在某些单脉冲测向的场景中，会在和波束的 3dB 主瓣内存在强干扰，但旁瓣对消器无法处理主瓣干扰。因此在本节中我们给出一种利用正交通道进行主瓣干扰置零的方法，该方法主要针对均匀面阵，可以有效的抑制主瓣干扰，由 K. Yu 等人提出 [12]。

我们首先定义和波束 $g_{\Sigma}(\cdot)$ 与差波束 $g_{\Delta}(\cdot)$

$$g_{\Sigma}(T_s) = \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(T_s) \quad (3-41a)$$

$$g_{\Delta}(T_s) = \mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}(T_s) \quad (3-41b)$$

上式中， T_s 为方向余弦。从式(2-8)和(2-9)可以得知，面阵的导向向量的元素可以分解为两个正交方向上相位差的积。因此对于 xOy 平面上的均匀线阵，我们可以得到

$$g_{\Sigma}(T_x, T_y) = g_{\Sigma_a}(T_x) g_{\Sigma_e}(T_y) \quad (3-42a)$$

$$g_{\Delta_a}(T_x, T_y) = g_{\Delta_a}(T_x) g_{\Sigma_e}(T_y) \quad (3-42b)$$

$$g_{\Delta_e}(T_x, T_y) = g_{\Sigma_a}(T_x) g_{\Delta_e}(T_y) \quad (3-42c)$$

$$g_{\Delta_{\Delta}}(T_x, T_y) = g_{\Delta_a}(T_x) g_{\Delta_e}(T_y) \quad (3-42d)$$

式(3-42)中，方向余弦 $T_x = \sin \phi \cos \theta$ ， $T_y = \sin \phi \sin \theta$ 。 g_{Σ_a} 表示方位维的和波束， g_{Σ_e} 表示俯仰维的和波束， g_{Δ_a} 表示方位维的差波束， g_{Δ_e} 表示俯仰维的差波束。

然后先考虑无干扰和噪声的情况。此时俯仰通道的单脉冲比 η_E 为

$$\eta_E = \frac{P_t g_{\Delta E}}{P_t g_{\Sigma}} = \frac{P_t g_{\Sigma_a}(T_x) g_{\Delta_e}(T_y)}{P_t g_{\Sigma_a}(T_x) g_{\Sigma_e}(T_y)} = \frac{g_{\Delta_e}(T_y)}{g_{\Sigma_e}(T_y)} \quad (3-43)$$

从式(3-43)中我们可以看出，俯仰方向上单通道的单脉冲比与双通道（即方位-俯仰维）单脉冲比相同。但是当我们假设有一个主瓣干扰源，其功率为 P_i 时，俯仰方向上的单脉冲比为

$$\begin{aligned} \eta_E &= \frac{P_t g_{\Delta E1} + P_i g_{\Delta E2}}{P_t g_{\Sigma1} + P_i g_{\Sigma2}} \\ &= \frac{P_t g_{\Sigma_{a1}}(T_x) g_{\Delta_{e1}}(T_y) + P_i g_{\Sigma_{a2}}(T_x) g_{\Delta_{e2}}(T_y)}{P_t g_{\Sigma_{a1}}(T_x) g_{\Sigma_{e1}}(T_y) + P_i g_{\Sigma_{a2}}(T_x) g_{\Delta_{e2}}(T_y)} \neq \frac{g_{\Delta_e}(T_y)}{g_{\Sigma_e}(T_y)} \end{aligned} \quad (3-44)$$

此时双通道单脉冲比和单通道单脉冲比不相等。从式(3-44)中可以看出，若想去除干扰带来的影响，就必须使得 $g_{\Sigma_{a2}}(T_x)$ 尽可能的小。所以我们令干扰角度方向上的和波束 $g_{\Sigma_a}(T_x)$ 减去 w_a 倍的差波束，得到式(3-45)。

$$\begin{aligned} \eta_E &= \frac{g_{\Delta_e}(T_y) (g_{\Sigma_a}(T_x) - w_{a2} g_{\Delta_a}(T_x))}{g_{\Sigma_e}(T_y) (g_{\Sigma_a}(T_x) - w_{a1} g_{\Delta_a}(T_x))} \\ &= \frac{g_{\Delta_e}(T_y) g_{\Sigma_a}(T_x) - w_{a2} g_{\Delta_e}(T_y) g_{\Delta_a}(T_x)}{g_{\Sigma_e}(T_y) g_{\Sigma_a}(T_x) - w_{a1} g_{\Sigma_e}(T_y) g_{\Delta_a}(T_x)} \\ &= \frac{g_{\Delta E} - w_{a2} g_{\Delta \Delta}}{g_{\Sigma} - w_{a1} g_{\Delta \Delta}} \end{aligned} \quad (3-45)$$

注意，在式子(3-45)中，我们暂时省略掉了期望信号功率 P_t 与噪声功率 P_i 。

现在将波束形成器的输出记为 $r(\cdot)$ ，俯仰维主瓣干扰置零后的自适应和差波束输出记为 $\hat{r}_{\Sigma E}$ 和 $\hat{r}_{\Delta E}$ ，他们由式(3-46)给出。

$$\hat{r}_{\Sigma E} = r_{\Sigma} - w_{a1} r_{\Delta A} \quad (3-46a)$$

$$\hat{r}_{\Delta E} = r_{\Delta E} - w_{a2} r_{\Delta \Delta} \quad (3-46b)$$

利用式(3-46)和最小均方误差原则，我们将主瓣干扰置零问题转化为优化问题

$$\min_{w_{a1}} (r_{\Sigma} - w_{a1} r_{\Delta A})^H (r_{\Sigma} - w_{a1} r_{\Delta A}) \quad (3-47a)$$

$$\min_{w_{a2}} (r_{\Delta E} - w_{a2} r_{\Delta \Delta})^H (r_{\Delta E} - w_{a2} r_{\Delta \Delta}) \quad (3-47b)$$

然后我们构造代价函数并求导令其为零，得到 w_{a1} 和 w_{a2} 的最优解

$$w_{a1} = \frac{R_{\Sigma \Delta A}}{R_{\Delta A \Delta A}} \quad (3-48a)$$

$$w_{a2} = \frac{R_{\Delta E \Delta \Delta}}{R_{\Delta \Delta \Delta \Delta}} \quad (3-48b)$$

式(3-48)中, $R_{(\cdot)}$ 表示各波束通道输出结果的互相关, 其定义由式(3-49)给出。

$$R_{\Sigma\Delta_A} = E[r_{\Sigma} r_{\Delta_A}^*] = P_J g_{\Sigma}(T_x^J, T_y^J) g_{\Delta_A}^*(T_x^J, T_y^J) \quad (3-49a)$$

$$R_{\Delta_A\Delta_A} = E[r_{\Delta_A} r_{\Delta_A}^*] = P_J g_{\Delta_A}(T_x^J, T_y^J) g_{\Delta_A}^*(T_x^J, T_y^J) + P_N \quad (3-49b)$$

$$R_{\Delta_E\Delta_A} = E[r_{\Delta_E} r_{\Delta_A}^*] = P_J g_{\Delta_E}(T_x^J, T_y^J) g_{\Delta_A}^*(T_x^J, T_y^J) \quad (3-49c)$$

$$R_{\Delta_A\Delta_E} = E[r_{\Delta_A} r_{\Delta_E}^*] = P_J g_{\Delta_A}(T_x^J, T_y^J) g_{\Delta_E}^*(T_x^J, T_y^J) + P_N \quad (3-49d)$$

上式中, P_J 和 P_N 分别表示主瓣干扰功率和噪声功率, T_x^J 和 T_y^J 分别表示主瓣干扰的 x 轴方向余弦和 y 轴方向余弦, $*$ 表示共轭。当干噪比 JNR 较大时, 可以认为 w_{a1} 近似等于 w_{a2} 成立。但在实际情况中, 两者可能并不相等。

求得权值 w_{a1} 和 w_{a2} 后, 得到俯仰维的自适应单脉冲比 \hat{f}_E

$$\begin{aligned} \hat{f}_E(T_x, T_y) &= \frac{\hat{g}_{\Delta_E}(T_x, T_y)}{\hat{g}_{\Sigma_E}(T_x, T_y)} \\ &= \frac{g_{\Delta_E}(T_x, T_y) - w_a g_{\Delta_A}(T_x, T_y)}{g_{\Sigma}(T_x, T_y) - w_a g_{\Delta_A}(T_x, T_y)} \\ &= \frac{g_{\Delta_E}(T_y) (g_{\Sigma_a}(T_x) - w_a g_{\Delta_a}(T_x))}{g_{\Sigma_e}(T_y) (g_{\Sigma_a}(T_x) - w_a g_{\Delta_a}(T_x))} \\ &= \frac{g_{\Delta_e}(T_y)}{g_{\Sigma_e}(T_y)} \end{aligned} \quad (3-50)$$

关于式(3-50)中的权值 w_a , 一种可行的方式是取 $w_a = (w_{a1} + w_{a2})/2$ 。同理可得方位角通道的自适应单脉冲比 \hat{f}_A , 在此不做赘述。

3.4 两步法单脉冲测向

上面两个章节中, 我们介绍了旁瓣对消和正交置零方法, 分别用于消除旁瓣干扰和主瓣干扰。在本节中, 我们将结合两者做自适应单脉冲测向。基本流程如图所示。

3.5 本章小结

本章首先研究了时域积分方程时间步进算法的阻抗元素精确计算技术, 分别采用 DUFFY 变换法与卷积积分精度计算法计算时域阻抗元素, 通过算例验证了计算方法的高精度。

第四章 相控阵的自适应单脉冲方法

本章中，我们将介绍一些自适应单脉冲测向方法。这些方法可以抑制主旁瓣干扰并用于共形阵。我们在本章第一节中介绍最大似然方法，第二节中介绍最小方差自适应单脉冲（MVAM）方法，第三节中介绍一种基于 LCMV 结构的线性约束单脉冲测向方法，第四节给出线性约束的改进型，SVD-线性约束方法。最后，在第五节中我们对这些算法的统计性能进行对比。

4.1 最大似然方法

最大似然估计是一种自适应单脉冲测向方法，其核心在于利用已有的观测样本建立起似然函数 $\mathcal{L}(\theta)$ ，然后求该似然函数的最大解，得到待估计参数 $\hat{\theta} = \operatorname{argmax} \mathcal{L}(\theta)$ 。U. Nickel 在 1993 年将该方法应用到了单脉冲系统中 [13]。该方法的优势在于，不受限于具体的阵列形式，只要能够知道干扰叠加噪声的统计特性，就可以利用该方法进行求解。

我们以一个 M 行 N 列的均匀面阵为例，分析该方法的导出过程。首先对于均匀面阵，我们可以利用式(2-2)和(2-9)得到其接收信号模型

$$\mathbf{y} = s(t)\mathbf{a}(\theta) + \mathbf{n} \quad (4-1)$$

式(4-1)中，复数 $s(t)$ 表示期望信号的振幅，向量 $\theta = [\theta, \phi]^T$ 表示入射角度，噪声向量 $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{MN \times 1}$ 表示各阵元的噪声（或干扰叠加噪声）。若假设噪声向量服从复高斯分布 $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{Q})$ ，则可知阵列接收数据的概率分布为 $\mathbf{y} \sim \mathcal{CN}(s(t)\mathbf{a}(\theta), \mathbf{Q})$ ，进一步我们可以得到其概率密度函数为式(4-2)。

$$p(\mathbf{y} | \theta, s(t)) = \pi^{-M} |\mathbf{Q}|^{-1} \exp \left[-[\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\theta)]^H \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\theta)] \right] \quad (4-2)$$

然后我们先对该密度函数取负对数似然，并去掉无关的常数部分，得到

$$S(\theta, s(t)) = -\mathcal{L}(\theta, s(t)) = [\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\theta)]^H \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{y} - s(t)\mathbf{a}(\theta)] \quad (4-3)$$

首先对上式中的参数 $s(t)$ 求最小二乘解得到

$$s(t) = \left[\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \right]^{-1} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y} \quad (4-4)$$

我们将式(4-4)代入(4-3)并去掉所有与参数 θ 无关的常数项得到其似然函数(4-5)。

$$S(\theta) = \mathbf{y}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \left[\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \right]^{-1} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y} \quad (4-5)$$

为简化符号，定义 $\mathbf{w}(\theta)$ 为自适应和波束权向量，由式(4-6)表出。

$$\mathbf{w}(\theta) = \left[\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \right]^{-1/2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \quad (4-6)$$

将式(4-6)代入(4-5)，我们可以将似然函数 $S(\theta)$ 重写为

$$S_{\text{scan}}(\theta) = \left| \mathbf{w}^H(\theta) \mathbf{y} \right|^2 \quad (4-7)$$

接下来我们求解似然函数。为便于求解，我们令 $F(\theta) = \ln [S_{\text{scan}}(\theta)]$ 。这样不改变似然函数的单调性，且期望信号方向的估计值 $\hat{\theta}$ 可以由式(4-8)给出。

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} F(\theta) \quad (4-8)$$

然后用牛顿梯度法给出对数似然函数 $F(\theta)$ 的解，即式(4-9)。

$$\hat{\theta} = \theta_0 - \mathbf{H}^{-1} \nabla F(\theta) \quad (4-9)$$

上式中，矩阵 $\mathbf{H} = \nabla^2 F(\theta)$ 是对数似然函数 $F(\theta)$ 的海森矩阵。在牛顿法中，还需要一个初值 θ_0 ，幸运的是，单脉冲测向系统中恰好可以用阵列波束指向 θ_0 作为初值。

对于均匀面阵，其导向向量如式(2-8)和(2-9)所示，为便于后续求导，我们可以将其改写为

$$[\mathbf{a}(\theta)]_i = \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} (x_i u + y_i v) \right] \quad (4-10)$$

式(4-10)中， x_i 和 y_i 表示第 i 个阵元（一般按列优先）的坐标，而参数 u 和 v 表示 x 和 y 方向上的方向余弦

$$u = \sin \varphi \cos \theta \quad (4-11a)$$

$$v = \sin \varphi \sin \theta \quad (4-11b)$$

注意，此处我们假设均匀面阵位于 xOy 平面，若位于坐标系其他平面，则方向余弦 u 和 v 及阵元坐标可能不一样。现在，首先求对数似然函数关于的一阶偏导数，

为简化符号，我们记一阶导数 $F_u = \partial F / \partial u$ 。并且求导得

$$\begin{aligned} F_u &= \frac{(S_{\text{scan}})_u}{S_{\text{scan}}} \\ &= \frac{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}_u}{\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y}} \right\} \end{aligned} \quad (4-12)$$

式(4-12)中，自适应和波束权向量 \mathbf{w} 的一阶导数 \mathbf{w}_u 定义如式(4-13)所示。

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_u &= (\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a})^{-1/2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}_u - \operatorname{Re} \{ \mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a} / \mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a} \} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{d}_x - \mu_x \mathbf{w} \end{aligned} \quad (4-13)$$

上式中，

$$\mathbf{d}_x = (\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a})^{-1/2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}_u \quad (4-14a)$$

$$\mu_x = \operatorname{Re} \{ \mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a} / \mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a} \} \quad (4-14b)$$

我们定义向量 \mathbf{d}_x 为自适应差波束权向量，并且对于均匀面阵我们有

$$[\mathbf{a}_u]_i = j \frac{2\pi}{\lambda} x_i \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} (x_i u + y_i v) \right] \quad (4-15)$$

最后将式(4-13)代入(4-12)，得到一阶导数的最终表达式(4-16)。

$$F_u = 2 \left(\operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{d}_x^H \mathbf{y}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y}} \right\} - \mu_x \right) \quad (4-16)$$

同理，我们可以得到对数似然函数 $F(\boldsymbol{\theta})$ 关于 v 的一阶导数 F_v ，此处不做赘述。

接下来我们求解 F 的二阶导数 F_{uu} 。为简化后续计算，我们此处导出二阶导数 $F_{uu}(\boldsymbol{\theta}_{\max})$ 的近似值。

$$\begin{aligned} F_{uu}(\boldsymbol{\theta}_{\max}) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{w}_u^H \mathbf{y}}{(\mathbf{w}^H \mathbf{y})^2} \right\} (\boldsymbol{\theta}_{\max}) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{y}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y}} \right\} (\boldsymbol{\theta}_{\max}) - 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y}} \right)^2 \right\} (\boldsymbol{\theta}_{\max}) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}} \right\} (\boldsymbol{\theta}_{\max}) - 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}} \right)^2 \right\} (\boldsymbol{\theta}_{\max}) \end{aligned} \quad (4-17)$$

式中的第二项可以被改写为式(4-18)。

$$\operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}} \right)^2 \right\} (\boldsymbol{\theta}_{\max}) = \frac{1}{(\mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w})^2} \left(\operatorname{Re}^2 \{ \mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} \} - \operatorname{Im}^2 \{ \mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} \} \right) \quad (4-18)$$

首先, 我们可以得到 $\text{Re}\{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}\} = 0$, 因为在最大值 θ_{\max} 处, 一阶导数 $F_u(\theta_{\max}) = 0$ 。其次, 对于具有对称性的阵列, 有 $\text{Im}\{\mathbf{w}_u^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}\} = 0$ 成立, 详情可见文献 [13]。这样式(4.1)中只剩下了第一项 $2 \text{Re}\{\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w} / \mathbf{w}^H \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{w}\}(\theta_{\max})$ 。

接下来, 我们用数学期望 $E\{\mathbf{z} \mathbf{z}^H\}$ 代替式(4.1)中的 $\mathbf{z} \mathbf{z}^H$ 。我们取

$$E\{\mathbf{z} \mathbf{z}^H\} = \beta^2 \mathbf{a}(\theta_s) \mathbf{a}^H(\theta_s) + \mathbf{Q} \quad (4-19)$$

式(4-19)中, β^2 为期望信号的功率, θ_s 为期望信号的实际方向。而对于最大似然估计器, 参数 θ 的估计是渐进无偏的, 因此我们可以认为 $\mathbf{a}(\theta_s) \approx \mathbf{a}(\theta_{\max})$ 。并且结合(4-6)式可知 $\mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} = 1$ 。因此可以将式(4.1)重写为式(4-20)。

$$\begin{aligned} F_{uu} &= 2 \text{Re} \left\{ \frac{\beta^2 (\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{a} + \mathbf{a}^H \mathbf{w}_{uu}) (\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a})^{1/2} + (\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{a} + \mathbf{a}^H \mathbf{w}_{uu}) (\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a})^{1/2}}{\beta^2 (\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}) + 1} \right\} \\ &= \frac{\mathbf{w}_{uu}^H \mathbf{a} + \mathbf{a}^H \mathbf{w}_{uu}}{(\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a})^{1/2}} \end{aligned} \quad (4-20)$$

为了简化记号, 我们省略上式及后文中的 θ_{\max} 。利用条件 $\mathbf{w}^H \mathbf{a} \mathbf{a}^H \mathbf{w} \approx 0$ (同上文中式(4-18)的化简), 我们可以得到 $\mathbf{d}_x^H \mathbf{a} = \mu_x \mathbf{w}^H \mathbf{a}$ 在 θ_{\max} 处成立, 同理可得俯仰维 $\mathbf{d}_y^H \mathbf{a} = \mu_y \mathbf{w}^H \mathbf{a}$ 。利用这些关系我们可以得到

$$F_{uu} = 2 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \right\} - 2 \frac{\mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}_u}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \quad (4-21a)$$

$$F_{vv} = 2 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\mathbf{a}_v^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \right\} - 2 \frac{\mathbf{a}_v^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}_v}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \quad (4-21b)$$

$$F_{uv} = 2 \text{Re} \left\{ \frac{\mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \right\} \text{Re} \left\{ \frac{\mathbf{a}_v^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \right\} - 2 \frac{\mathbf{a}_u^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}_v}{\mathbf{a}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}} \quad (4-21c)$$

注意, 式(4-21)中仍然省略了 θ_{\max} 。在单脉冲测向系统中, 期望信号的真实方向 θ_s 往往处于波束指向 θ_0 的主瓣内, 这意味着 θ_s 和 θ_0 较为接近, 而最大似然估计器是一个渐进无偏估计器, 我们可以认为 $\theta_{\max} = \theta_s$, 因此可以取波束指向 θ_0 处的值代入式(4-21)作为近似。结合式(4-14)我们可以得到对数似然函数 F 的二阶导数。

$$F_{uu} = 2\mu_x^2 - 2 \frac{\mathbf{d}_x^H \mathbf{a}_u}{\mathbf{w}^H \mathbf{a}} \quad (4-22a)$$

$$F_{vv} = 2\mu_y^2 - 2 \frac{\mathbf{d}_y^H \mathbf{a}_v}{\mathbf{w}^H \mathbf{a}} \quad (4-22b)$$

$$F_{uv} = 2\mu_x \mu_y - 2 \frac{\text{Re}\{\mathbf{d}_x^H \mathbf{a}_v\}}{\mathbf{w}^H \mathbf{a}} \quad (4-22c)$$

式(4-22)中, 各参数取波束指向 θ_0 处的值。

最后，我们可以利用式(4-22)构建海森矩阵 \mathbf{H} 。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} F_{uu} & F_{uv} \\ F_{uv} & F_{vv} \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

以及对数似然函数的梯度 ∇F ，即雅可比矩阵

$$\nabla F = [F_u, F_v]^T \quad (4-24)$$

结合牛顿公式(4-9)得到方向余弦的估计值 \hat{u} 和 \hat{v} 。

$$[\hat{u}, \hat{v}]^T = [u_0, v_0]^T - \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \nabla F(\boldsymbol{\theta}_0) \quad (4-25)$$

最后利用反三角函数即可估计出期望信号的入射方向 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 。

4.2 MVAM 方法

本节中，我们同样以 M 行 N 列的均匀面阵为例，解析 MVAM 方法的一般过程。首先信号模型同式(4-1)一样。我们设单脉冲比为 R ，而无噪声的理想单脉冲比为 R_0 。它们由式(4-26)给出。

$$\begin{aligned} R &= \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{y}}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{y}} = \frac{s(t) \mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{n}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{n}} \\ &= \left(\frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} + \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{n}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \right) \left(1 + \frac{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{n}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \right)^{-1} \\ &\approx \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} + \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{n}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} - \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \frac{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{n}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \\ &= R_0(\boldsymbol{\theta}) + \frac{\mathbf{w}_\Delta^H \tilde{\mathbf{n}}}{s(t) \mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \end{aligned} \quad (4-26)$$

上式中，向量 \mathbf{w}_Σ 和 \mathbf{w}_Δ 分别是自适应和波束权向量与自适应差波束权向量（注意这里暂且没有区分方位角通道和俯仰角通道，而是给出一种通用形式）。与上一小节中一样，我们用向量 $\boldsymbol{\theta} = [\theta, \varphi]^T$ 表示信号的入射方向。而向量 $\tilde{\mathbf{n}}$ 的定义为式(4-27)。

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} - \left(\frac{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{n}}{\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})} \right) \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) \quad (4-27)$$

理想单脉冲比 $R_0(\boldsymbol{\theta})$ 可以视作是角度 $\boldsymbol{\theta}$ 的非线性函数。若我们假设波束指向 $\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}$ ，类似的，这里将式(4-26)中的参数 $\boldsymbol{\theta}$ 重定义为方向余弦 u 和 v 的函数，即

$\theta = \theta(u, v)$, 然后得到在 θ_0 处的一阶泰勒展开

$$\begin{aligned} R_0(u, v) &= \frac{\mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta)} \\ &= \frac{\mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta)} \Big|_{\theta=(0,0)} + u \left(\frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}_u(\theta) - \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}_u(\theta) \mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}(\theta)}{(\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta))^2} \right) \Big|_{\theta=(0,0)} \\ &\quad + v \left(\frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}_v(\theta) - \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}_v(\theta) \mathbf{w}_{\Delta}^H \mathbf{a}(\theta)}{(\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta))^2} \right) \Big|_{\theta=(0,0)} + O((Mu)^2, (Nv)^2) \end{aligned} \quad (4-28)$$

式(4-28)中, $O(\cdot)$ 表示高阶无穷小。

由于方向余弦 u 和 v 都是实数, 因此我们可以将四个单脉冲等式及其共轭写为式(4-29)。

$$\begin{bmatrix} R_x - a_x \\ R_y - a_y \\ R_x^* - a_x^* \\ R_y^* - a_y^* \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \\ B_{xx}^* & B_{xy}^* \\ B_{yx}^* & B_{yy}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \\ B_{xx}^* & B_{xy}^* \\ B_{yx}^* & B_{yy}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

为简化符号, 我们将式(4-29)重写为

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_s + \mathbf{n}_1 = \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{u}} \quad (4-30)$$

在式(4-30)中, (\hat{u}, \hat{v}) 表示方向余弦的估计量, 而 (u_s, v_s) 表示期望信号的方向余弦。噪声项则由式(4-31)给出。

$$n_x = \frac{\mathbf{w}_{\Delta a}^H \tilde{\mathbf{n}}}{s(t) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_m)} \quad (4-31a)$$

$$n_y = \frac{\mathbf{w}_{\Delta e}^H \tilde{\mathbf{n}}}{s(t) \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_m)} \quad (4-31b)$$

上式中, θ_m 表示单脉冲估计器的解。并且有

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{c}_x & \mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{c}_y \\ \mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{c}_x & \mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{c}_y \end{bmatrix} \quad (4-32a)$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\Delta a}^H \mathbf{1} \\ \mathbf{w}_{\Delta e}^H \mathbf{1} \end{bmatrix} / \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{1} \quad (4-32b)$$

式(4-32)中,

$$\mathbf{c}_x = \frac{(\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{1}) \mathbf{F}_x - (\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{F}_x) \mathbf{1}}{(\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{1})^2} \quad (4-33a)$$

$$\mathbf{c}_y = \frac{(\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{1}) \mathbf{F}_y - (\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{F}_y) \mathbf{1}}{(\mathbf{w}_\Sigma^H \mathbf{1})^2} \quad (4-33b)$$

$$(4-33c)$$

上式中,

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{a}_u|_{\theta=0} \quad (4-34a)$$

$$\mathbf{F}_y = \mathbf{a}_v|_{\theta=0} \quad (4-34b)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{a}|_{\theta=0} \quad (4-34c)$$

与上一节中类似, 我们用 \mathbf{a}_u 表示导向向量关于方向余弦 u 的一阶导数, 注意此时我们假定了波束指向 $\theta_0 = \mathbf{0}$ 。而向量 $\mathbf{w}_{\Delta a}$ 和 $\mathbf{w}_{\Delta e}$ 分别表示方位角通道和俯仰角通道的自适应差波束权向量。

接下来我们定义一个 4×2 的单脉冲选择矩阵 $\boldsymbol{\beta}_1$ 使之满足式(4-35)。

$$\boldsymbol{\beta}_1^H \mathbf{B}_1 = 2\mathbf{I}_2 \quad (4-35)$$

上式中, \mathbf{I}_2 表示 2×2 的单位矩阵, 此时式(4-30)就可以被改写为

$$\boldsymbol{\beta}_1^H \mathbf{R}_1 = 2\mathbf{u}_s + \boldsymbol{\beta}_1^H \mathbf{n}_1 = 2\mathbf{u}_s + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{1u}^H \\ \boldsymbol{\beta}_{1v}^H \end{bmatrix} \mathbf{n}_1 = 2\hat{\mathbf{u}} \quad (4-36)$$

从式(4-36)中我们容易得出, 当噪声项教小时, 方向余弦的估计值 $\hat{\mathbf{u}}$ 就接近于真实值 \mathbf{u}_s 。所以我们可以关于方向余弦构造出两个优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{\beta}_{1u}^H \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta}_{1u} \\ \min \quad & \boldsymbol{\beta}_{1v}^H \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\beta}_{1v} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\beta}_1^H \mathbf{B}_1 = 2\mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (4-37)$$

式(4-37)中,

$$\tilde{\mathbf{Q}} = E \{ \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1^H \} \quad (4-38)$$

假设噪声服从复高斯分布, 那么对于任意的常向量 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 , 都有式(4-39)成立。

$$E \{ (\mathbf{v}_1^H \tilde{\mathbf{n}}) (\mathbf{v}_2^H \tilde{\mathbf{n}}) \} = 0 \quad (4-39)$$

因此, 4×4 的矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 可以被表示为

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^* \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

上式中, $*$ 表示共轭, 且

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{\Omega}^H \mathbf{Q}_t \mathbf{\Omega} \quad (4-41a)$$

$$\mathbf{\Omega} = [\mathbf{w}_{\Delta a} \ \mathbf{w}_{\Delta e}] \quad (4-41b)$$

而式(4-41)中, 矩阵 \mathbf{Q}_t 的定义如下

$$\mathbf{Q}_t = E \left\{ \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{n}}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_s)} \mathbf{a}(\theta_s) \right) \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{n}}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{a}(\theta_s)} \mathbf{a}(\theta_s) \right)^H \right\} \quad (4-42)$$

由于此时波束指向 $\theta_0 = \mathbf{0}$, 而在单脉冲测向系统中, 期望信号的真实角度 θ_s 一般位于波束指向的 3dB 带宽内。所以我们可以将矩阵 \mathbf{Q}_t 近似为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &\approx E \left\{ \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{n}}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{1}} \mathbf{1} \right) \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{n}}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{1}} \mathbf{1} \right)^H \right\} \\ &= \mathbf{Q} - \frac{\mathbf{1} \mathbf{w}_{\Sigma}^H}{\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{1}} \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \frac{\mathbf{w}_{\Sigma} \mathbf{1}^H}{\mathbf{1}^H \mathbf{w}_{\Sigma}} + \frac{\mathbf{1} \mathbf{1}^H}{|\mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{1}|^2} \mathbf{w}_{\Sigma}^H \mathbf{Q} \mathbf{w}_{\Sigma} \end{aligned} \quad (4-43)$$

最后, 我们将式(4-40)代入优化问题(4-37), 解得矩阵 β_1 的前两行 β

$$\beta = \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{B} \left(\text{Re} \left\{ \mathbf{B}^H \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{B} \right\} \right)^{-1} \quad (4-44)$$

并求解得到方向余弦估计量 $\hat{\mathbf{u}}$ 的表达式。

$$\hat{\mathbf{u}} = \text{Re} \left\{ \left(\text{Re} \left\{ \mathbf{B}^H \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{B} \right\} \right)^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{R} \right\} \quad (4-45)$$

式(4-44)和(4-45)中, 矩阵 \mathbf{B} 和 \mathbf{R} 分别是矩阵 \mathbf{B}_1 和 \mathbf{R}_1 的前两行。

4.3 线性约束方法

由于时域混合场积分方程是时域电场积分方程与时域磁场积分方程的线性组合, 因此时域混合场积分方程时间步进算法的阻抗矩阵特征与时域电场积分方程时间步进算法的阻抗矩阵特征相同。

4.4 SVD-线性约束

方式的存储量大小。

4.5 本章小结

结

第五章 极化相控阵的单脉冲测向方法

5.1 极化相控阵接收信号模型

本文以时域积分方程方法为研究背景，主要对求解时域积分方程的时间步进算法以及两层平面波快速算法进行了研究。

5.1.1 各阵元摆放角度一致的接收信号模型

5.1.2 各阵元摆放角度不同的接收信号模型

5.2 各阵元摆放角度一致的极化相控阵单脉冲测向

时域积分方程方法的研究近几年发展迅速，在本文研究工作的基础上，仍有以下方向值得进一步研究：

5.2.1 原理

5.2.2 性能分析

5.2.3 仿真

5.3 各阵元摆放角度不同的极化相控阵单脉冲测向

5.3.1 原理

5.3.2 仿真

5.4 本章小结

第六章 全文总结与展望

6.1 全文总结

6.2 后续工作展望

致 谢

在攻读博士学位期间，首先衷心感谢我的导师 XXX 教授

附录 A 中心极限定理的证明

A.1 高斯分布和伯努利实验

参考文献

- [1] X. F. Liu, B. Z. Wang, W. Shao, et al. A marching-on-in-order scheme for exact attenuation constant extraction of lossy transmission lines[C]. China-Japan Joint Microwave Conference Proceedings, Chengdu, 2006, 527-529
- [2] 竺可桢. 物理学 [M]. 北京: 科学出版社, 1973, 56-60
- [3] 陈念永. 毫米波细胞生物效应及抗肿瘤研究 [D]. 成都: 电子科技大学, 2001, 50-60
- [4] 顾春. 牢牢把握稳中求进的总基调 [N]. 人民日报, 2012 年 3 月 31 日
- [5] 冯西桥. 核反应堆压力容器的 LBB 分析 [R]. 北京: 清华大学核能技术设计研究院, 1997 年 6 月 25 日
- [6] 肖珍新. 一种新型排渣阀调节降温装置 [P]. 中国, 实用新型专利, ZL201120085830.0, 2012 年 4 月 25 日
- [7] 中华人民共和国国家技术监督局. GB3100-3102. 中华人民共和国国家标准—量与单位 [S]. 北京: 中国标准出版社, 1994 年 11 月 1 日
- [8] M. Clerc. Discrete particle swarm optimization: a fuzzy combinatorial box[EB/OL]. http://clere.maurice.free.fr/ps0/Fuzzy_Discrere_PSO/Fuzzy_DPSO.htm, July 16, 2010
- [9] T. Taylor. Design of circular apertures for narrow beamwidth and low sidelobes[J]. IRE Transactions on Antennas and Propagation, 1960, 8(1): 17-22
- [10] E. T. Bayliss. Design of monopulse antenna difference patterns with low sidelobes[J]. The Bell System Technical Journal, 1968, 47(5): 623-650
- [11] M. F. Fernández, K. Yu. Blocking-matrix and quasimatrix techniques for extended-null insertion in antenna pattern synthesis[C]. 2015 IEEE Radar Conference (RadarCon), 2015, 0198-0203
- [12] Kai-Bor Yu, D. J. Murrow. Adaptive digital beamforming for angle estimation in jamming[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2001, 37(2): 508-523
- [13] U. Nickel. Monopulse estimation with adaptive arrays[J]. IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing), 1993, 140: 303-308(5)