

BÀI TẬP MÔ PHỎNG LẦN 5 (PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN RIÊNG PHẦN PDE)**BÀI 1 (Slide 39 – Lesson8b-Phương trình Elliptic PDE)**

Đề bài: Giải phương trình vi phân riêng phần: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

Biết: $u(0, y) = y^2 \quad u(1, y) = 1$

$$u(0, x) = x^2 \quad u(x, 1) = 1$$

Giải

Giải phương trình vi phân này theo

Phương pháp chia lưới

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

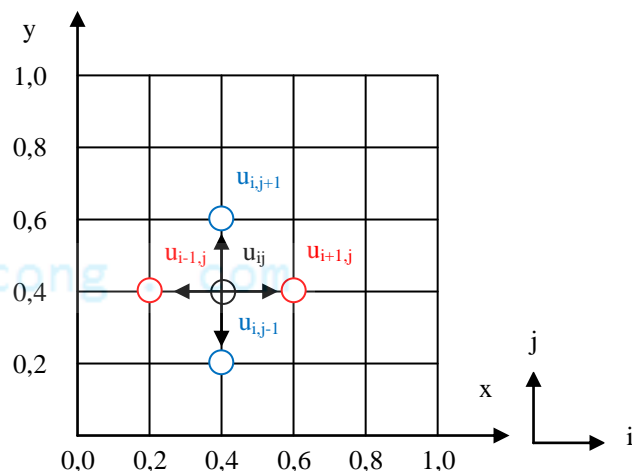
Chọn $\Delta x = \Delta y = 1/5 = 0,2$ khi đó ta được:

$$u_{ij} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{4}, \quad (i, j \neq 0, 1)$$

$$u_{0,j} = y^2, \quad u_{i,0} = x^2, \quad u_{1,j} = 1, \quad u_{i,1} = 1$$

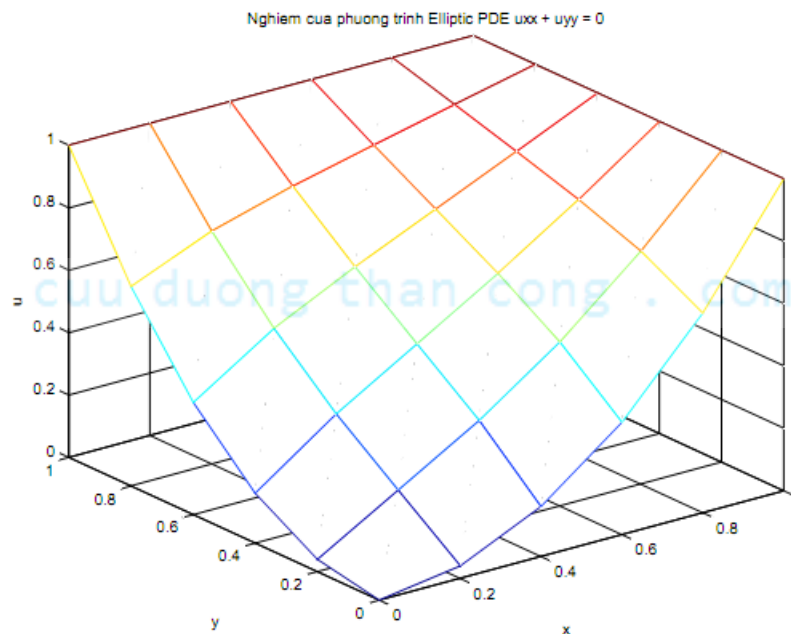
Kết quả tính toán ta được:

	y	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
x	i\j	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0.04	0.16	0.36	0.64	1
0.2	1	0.04	0.1921	0.3442	0.5260	0.7466	1
0.4	2	0.16	0.3442	0.4986	0.6532	0.8205	1
0.6	3	0.36	0.5260	0.6532	0.7677	0.8823	1
0.8	4	0.64	0.7466	0.8205	0.8823	0.9412	1
1	5	1	1	1	1	1	1



Dùng hàm *mesh* của matlab để vẽ nghiệm của phương trình vi phân riêng phần trên ta được nghiệm hình của phương trình

```
X = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
Y = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
U = [0      0.04    0.16    0.36    0.64    1
     0.04    0.1921  0.3442  0.5260  0.7466  1
     0.16    0.3442  0.4987  0.6533  0.8206  1
     0.36    0.5260  0.6532  0.7677  0.8823  1
     0.64    0.7466  0.8205  0.8823  0.9412  1
     1      1      1      1      1      1];
mesh(X,Y,U)
grid on
title('Nghiệm của phương trình Elliptic PDE  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ')
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('u');
```



BÀI 2 (Slide 41-Lesson8b-Phương trình Parabolic PDE)

Đề bài:

Giải phương trình vi phân riêng phần: $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Biết: $u(x,0) = x^4$ ($0 < x < 1$); $u(0,t) = 0$ ($0 < t$); $u(1,t) = 1$ ($0 < t$)

Giải:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

Để hệ ổn định chọn: $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Nếu chọn: $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2}$ ($\Delta x = 0,2 \Rightarrow \Delta t = 0.02$) ta được:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} \quad (i \neq 0, 1; j \neq 0)$$

$$u(x,0) = x^4 \quad (0 < x < 1); \quad u(0,t) = 0 \quad (0 < t); \quad u(1,t) = 1 \quad (0 < t)$$

Kết quả tính toán trên Excel ta được:

	t	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
x	i\j	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	1	0.0016	0.0128	0.0328	0.0576	0.087	0.1049
0.4	2	0.0256	0.0656	0.1152	0.174	0.2098	0.2514
0.6	3	0.1296	0.2176	0.3152	0.362	0.4158	0.4454
0.8	4	0.4096	0.5648	0.6088	0.6576	0.681	0.7079
1	5	1	1	1	1	1	1

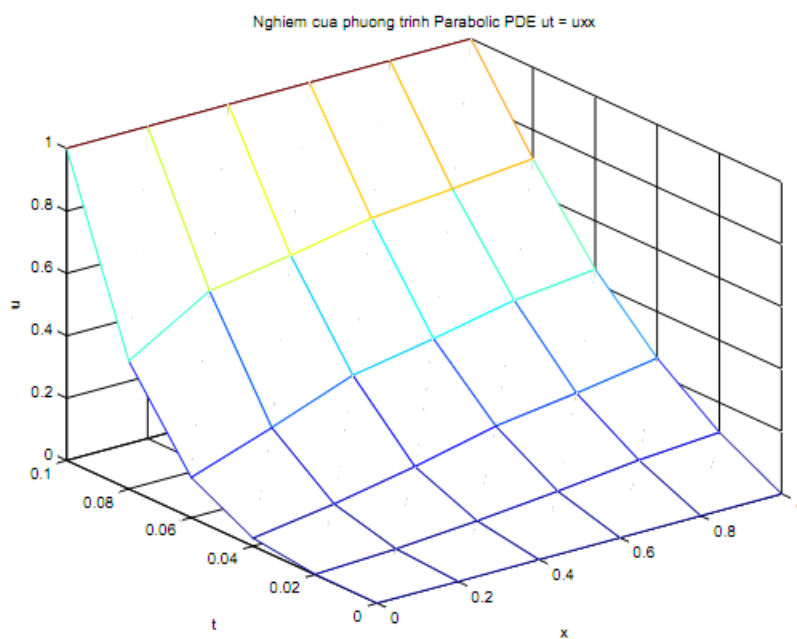
Dùng hàm *mesh* của matlab để vẽ nghiệm của phương trình vi phân riêng phần trên ta được nghiệm hình của phương trình.

```

X = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
T = [0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1];
U = [0 0 0 0 0 0
      0.0016 0.0128 0.0328 0.0576 0.087 0.1049
      0.0256 0.0656 0.1152 0.174 0.2098 0.2514
      0.1296 0.2176 0.3152 0.362 0.4158 0.4454
      0.4096 0.5648 0.6088 0.6576 0.681 0.7079
      1 1 1 1 1 1];

mesh(X,T,U)
grid on
title('Nghiệm của phương trình Parabolic PDE ut = uxx')
xlabel('x'); ylabel('t'); zlabel('u');

```



cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com