BÀI THỰC HÀNH SỐ 4

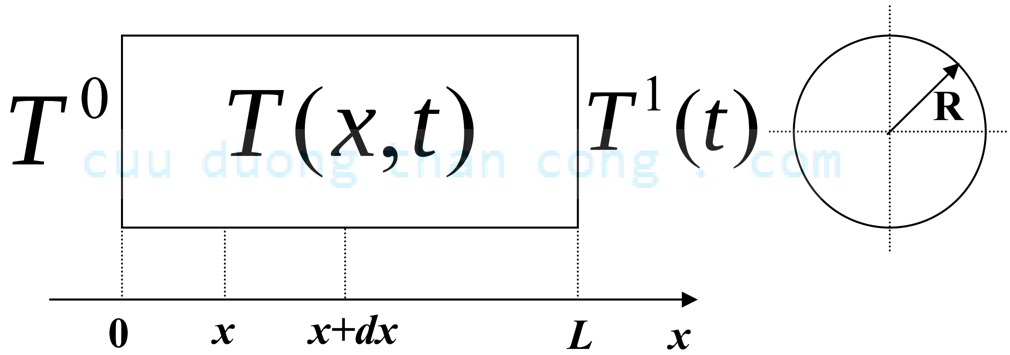
KHẢO SÁT MỘT QUÁ TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

Mục đích của bài thực hành này là mô phỏng, giải quyết các bài toán trong CNHH. Cụ thể :

1. Mô hình hóa, rời rạc hóa quá trình dẫn nhiệt trong một thanh kim loại được mô tả bằng phương trình vi phân đạo hàm riêng PDE dùng phương pháp sai phân hữu hạn để nhận được một hệ ODE.
2. Tìm nghiệm số của hệ ODE này.
3. Xấp xỉ nghiệm của bài toán dùng phương pháp nội suy Lagrange.
4. Kết luận về ảnh hưởng của số điểm nút chọn trên các nghiệm số.

1. Mô tả quá trình truyền nhiệt:

Mục đích của bài thực hành này là để khảo sát động học của nhiệt độ $T(x,t)$ phân bố trong một thanh kim loại. Chúng ta giả sử rằng nhiệt độ tại $x = 0$ của thanh kim loại được duy trì ở nhiệt độ môi trường bên ngoài T^0 và đầu kia được duy trì ở nhiệt độ T^1 có thể thay đổi theo thời gian.



Giả sử truyền nhiệt chỉ xảy ra theo chiều của trục *x*. Qua bài thực hành này, chúng ta biết cách mô phỏng tiến triển của biên dạng nhiệt độ $T(x,t)$ trong thanh kim loại (giả sử thanh đồng nhất và bỏ qua sự giản nở nhiệt).

Câu hỏi 1 (Mô hình hóa toán học): Dùng định luật Fourier và với cân bằng năng lượng được viết cho phần tử thể tích vô cùng bé giữa *x* và *x+dx*, chỉ ra rằng động học của nhiệt độ trong thanh kim loại được chi phối bởi phương trình đạo hàm riêng sau:

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

Với $\rho\,(g/cm^3)$ là khối lượng thể tích ; $c\ (J/g/K)$ và $\lambda\ (W/cm/K)$ tương ứng là nhiệt dung riêng khối lượng và hệ số dẫn nhiệt của thanh kim loại. □

Phương trình (1) có thể viết lại tương đương như sau :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{2}$$

với $D = \dfrac{\lambda}{\rho c}$. Nghiệm nếu có của phương trình (2) cần bổ sung các điều kiện ban đầu và điều kiện biên:

- Với điều kiện ban đầu

$$T(x,0) = T^{init}(x) \tag{3}$$

- Với điều kiện biên

$$\begin{cases} T(0,t) = T^{0}(t) \\ T(L,t) = T^{1}(t) \end{cases} \tag{4}$$

Trong phương trình (1) $t \in [0,\ +\infty)$, $x \in [0,\ L]$. **<u>Phương trình (2) với (3) và (4) miêu tả đầy đủ hệ thống</u>**.

Bảng dưới đây cho các dữ liệu các tham số của hệ phản ứng nghiên cứu :

D (cm²/s)	
L (cm)	
R (cm)	
$T_0(x)\ (K)$	
$T^0(t)\ (K)$	
$T^1(t)\ (K)$	

(Sinh viên tùy chọn giá trị các tham số sao cho phù hợp. Có điểm ưu tiên cho việc chọn lựa tốt, sáng tạo)

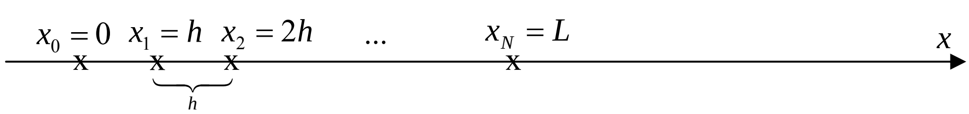
2. Nghiệm số dùng phương pháp sai phân hữu hạn bước trung tâm:

Trước tiên chúng ta xác định biểu diễn đại số của phương trình vi phân (1) mà chúng ta sẽ nhận được bởi rời rạc hóa nó dùng phương pháp sai phân hữu hạn tại từng điểm nút.

Gọi *h* là bước rời rạc không gian sao cho khoảng $[0,\ L]$ được chia thành *N* khoảng con có cùng chiều dài *h*, có nghĩa rằng $h = \dfrac{L}{N}$. Chúng ta ký hiệu x_i là các điểm rời rạc :

$$x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \ldots, x_N = L$$

Các điểm này phân bố hình học như sau :



Tiếp theo, để đơn giản cách trình bày chúng ta sẽ kí hiệu $T_0(t)=T(0,t), T_1(t)=T(h,t),...,T_N(t)=T(Nh,t)$. Tại các điểm trung gian $x_1, x_2,..., x_{N-1}$ chúng ta sử dụng các biểu thức sau để xấp xỉ đạo hàm bậc hai và bậc 1 như sau :

$$\left.\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \cong \frac{T_{i+1}(t)+T_{i-1}(t)-2T_i(t)}{h^2},\ i=1,...,N-1 \qquad (5)$$

và

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_i} \cong \frac{T_{i+1}(t)-T_{i-1}(t)}{2h},\ i=1,...,N-1$$

Cuối cùng chúng ta diễn giải điều kiện biên (4) tại các điểm đầu-cuối như sau :

$$T_0(t)=T^0(t) \text{ và } T_N(t)=T^1(t) \qquad (6a)$$

và điều kiện ban đầu (3) tại các điểm rời rạc như sau

$$T(ih,0)=T^{init}(ih),\ i=0...N \qquad (6b)$$

Sau cùng, để thuận lợi cho biểu diễn chúng ta ký hiệu :

$$X(t)=\begin{bmatrix} T(h,t) \\ T(2h,t) \\ \vdots \\ T((N-1)h,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1t} \\ T_{2t} \\ \vdots \\ T_{(N-1)t} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

3. Yêu cầu :

Chọn số điểm nút (*N>2) N=* ?

<u>Câu hỏi 2</u> :

a) Dùng xấp xỉ (5), chỉ ra rằng phương trình (2) tại điểm rời rạc *i* trở thành :

$$\frac{dT_{it}}{dt}=D\frac{T_{i+1}(t)+T_{i-1}(t)-2T_i(t)}{h^2},\ i=1,...,N-1 \qquad (8)$$

b) Tính đến các điều kiên biên (6a), chỉ ra rằng phương trình (8) có thể viết dưới dạng hệ phương trình vi phân thường sau :

$$\frac{dX(t)}{dt}=AX(t)+b \qquad (9)$$

với $X(t)$ là vector được cho trong (7) và giá trị ban đầu $X(t=0)$ có được dùng (6b). Xác định các ma trận *A*, *b* ?

c) Tìm nghiệm của (9) với Matlab dùng lệnh *ode*. Biểu diễn sự thay đổi của nhiệt độ nhận được tại các điểm rời rạc dùng lệnh *plot*.

d) Viết biểu thức nghiệm *T(x,t)* dùng nội suy kiểu đa thức Lagrange từ các nút giá trị T_{it} đã có. Biểu diễn sự thay đổi của biên dạng (profile) nhiệt độ với Matlab.

<u>Câu hỏi 3</u> (**Câu hỏi mở rộng**)

1. Giả sử rằng biểu thức của năng lượng nội năng $U(t)$ của thanh kim loại được cho bởi :

$$U(t) = \pi R^2 \int_0^L u(x,t)dx \tag{10}$$

với $u(x,t) = \rho c T$ là mật độ thể tích năng lượng. Dùng qui tắc hình thang, chứng minh rằng (13) có thể xấp xỉ như sau :

$$\frac{U(t)}{\rho c} = \pi R^2 h \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(T_{it} + T_{(i+1)t})}{2} \tag{11}$$

Lập trình tính giá trị số của (11) với giá trị các T_{it} đã tìm thấy.

2. Quan sát ảnh hưởng của số điểm nút (tăng/giảm *N*) trên các nghiệm số bằng mô phỏng ? Kết luận.