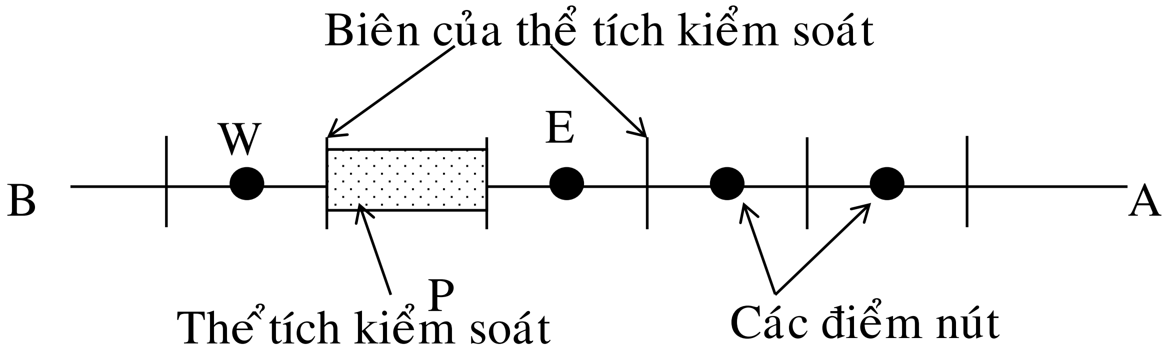
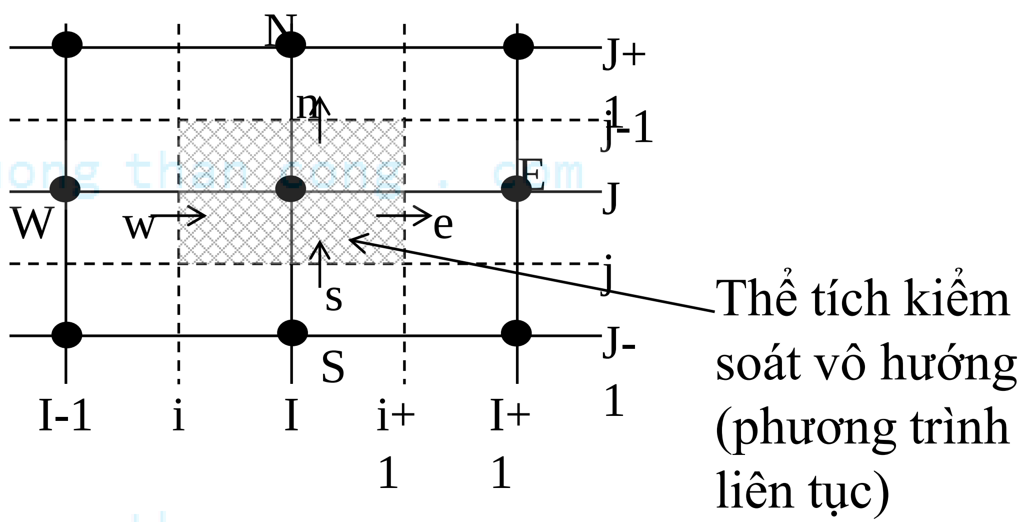
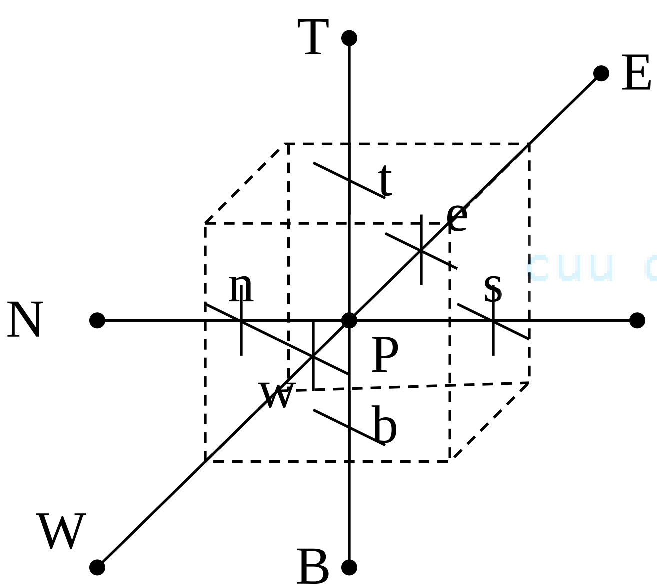
PHƯƠNG PHÁP THỂ TÍCH HỮU HẠN GIẢI CÁC BÀI TOÁN

✓**Bước một: Tạo lưới.**







Sai phân hóa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + div(\rho u\phi) = div(\Gamma grad\phi) + S_\phi$$

Tích phân theo thể tích hữu hạn rời rạc

$$\int_V \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)dt \right) dV + \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_A n.(\rho u\phi)dA \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_A n.(\Gamma grad\phi)dA \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_V S_\phi dV \right) dt$$

$$\int_V \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)dt \right) dV = \int_t^{t+\Delta t} \left(\Delta(A\Gamma\phi) \right) dt - \int_t^{t+\Delta t} \left(\nabla(A\rho u\phi) \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \overline{S}.\Delta V dt$$

$$\int_V \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)dt \right) dV = \rho(\phi_P - \phi_P^0).\Delta V$$

Sai phân hóa

$$\int_{t}^{t+\Delta t}\left(\Delta(A\Gamma\phi)\right)dt - \int_{t}^{t+\Delta t}\left(\nabla(A\rho u\phi)\right)dt =$$

$$\int_{t}^{t+\Delta t}\left(\left[(A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x})_e - (A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x})_w\right] + \left[(A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y})_n - (A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y})_s\right] + \left[(A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z})_t - (A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z})_b\right]\right)dt -$$

$$\int_{t}^{t+\Delta t}\left(\left[(A\rho u\phi)_e - (A\rho u\phi)_w\right] + \left[(A\rho u\phi)_n - (A\rho u\phi)_s\right] + \left[(A\rho u\phi)_t - (A\rho u\phi)_b\right]\right)dt$$

Rời rạc hoá phương trình tích phân

$$\left(A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e-\left(A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w=\left(A_e\Gamma_e\frac{\phi_E-\phi_P}{x_{PE}}\right)-\left(A_w\Gamma_w\frac{\phi_P-\phi_w}{x_{PW}}\right)$$

$$\left(A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n-\left(A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s=\left(A_n\Gamma_n\frac{\phi_N-\phi_P}{y_{PN}}\right)-\left(A_s\Gamma_s\frac{\phi_P-\phi_S}{y_{PN}}\right)$$

$$\left(A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_t-\left(A\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_b=\left(A_t\Gamma_t\frac{\phi_T-\phi_P}{z_{PT}}\right)-\left(A_b\Gamma_b\frac{\phi_P-\phi_B}{z_{PB}}\right)$$

Đặt:

$F = A\rho u;$ $\quad D = A\Gamma/x_{i,j}$

Rời rạc hoá phương trình tích phân

$$\rho(\phi_P - \phi_P^0).\Delta V = -\int_t^{t+\Delta t}\left\{\left[F_e\phi_e - F_w\phi_w\right] + \left[F_n\phi_n - F_s\phi_s\right] + \left[F_t\phi_t - F_b\phi_b\right]\right\}dt +$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\left\{\left(D_e(\phi_E - \phi_P)\right) - \left(D_w(\phi_P - \phi_W)\right) + \left(D_n(\phi_N - \phi_P)\right) - \left(D_s(\phi_P - \phi_S)\right) + \left(D_t(\phi_T - \phi_P)\right) - \left(D_b(\phi_P - \phi_B)\right)\right\}dt$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t}\overline{S}.\Delta V dt \qquad \textbf{(*)}$$

Rời rạc hoá phương trình tích phân

Để xác định vế phải của phương trình (*), tham số trọng lượng θ nằm trong khoảng từ 0 đến 1 sẽ được áp dụng. Các tích phân bên vế phải sẽ được viết lại như sau:

$$I_\phi = \int_t^{t+\Delta t} \phi_P \, dt = [\theta.\phi_P + (1-\theta)\phi_P^0]\Delta t \qquad (**)$$

Rời rạc hoá phương trình tích phân

Sử dụng phương trình (**) for ϕ_E, ϕ_W, ϕ_N, ϕ_S, ϕ_T, ϕ_B vào phương trình (*) và chia phương trình này cho Δt, ta được:

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho(\phi_P-\phi_P^0).\Delta V}{\Delta t} &= -\theta\left\{\left[F_e\phi_e - F_w\phi_w\right]+\left[F_n\phi_n - F_s\phi_s\right]+\left[F_t\phi_t - F_b\phi_b\right]\right\} - \\
&\quad (1-\theta)\left\{\left[F_e\phi_e^0 - F_w\phi_w^0\right]+\left[F_n\phi_n^0 - F_s\phi_s^0\right]+\left[F_t\phi_t^0 - F_b\phi_b^0\right]\right\} + \\
&\theta\left\{\left(D_e(\phi_E-\phi_P)\right)-\left(D_w(\phi_P-\phi_W)\right)+\left(D_n(\phi_N-\phi_P)\right)-\left(D_s(\phi_P-\phi_S)\right)+\left(D_t(\phi_T-\phi_P)\right)-\left(D_b(\phi_P-\phi_B)\right)\right\} + \\
&(1-\theta)\left\{\left(D_e(\phi_E^0-\phi_P^0)\right)-\left(D_w(\phi_P^0-\phi_W^0)\right)+\left(D_n(\phi_N^0-\phi_P^0)\right)-\left(D_s(\phi_P^0-\phi_S^0)\right)+\left(D_t(\phi_T^0-\phi_P^0)\right)-\left(D_b(\phi_P^0-\phi_B^0)\right)\right\} \\
&+ \bar{S}\Delta V
\end{aligned}
\qquad (***)
$$

Khi $\theta = 0$, phương trình (***) trở nên tường minh, nếu $0<\theta<1$, phương trình (***) không tường minh, còn nếu $\theta = 1$, thì phương trình (***) hoàn toàn không tường minh. Khi $\theta = 1/2$, phương trình (***) được gọi là phương trình Crank-Nicolson. Trong phần này, phương pháp rời rạc hóa không tường minh hoàn toàn sẽ được áp dụng để rời rạc hóa các phương trình tổng quát.

Rời rạc hoá phương trình tích phân

Bởi vì phương pháp này áp dụng cho quá trình thay đổi tức thời (transient), nên người ta sử dụng các phương trình khuếch tán-đối lưu và các sơ đồ chuyển đổi qua lại. Do đó, ta có:

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + a_B\phi_B + a_T\phi_T + a_P^0\phi_P^0 + S_u$$

Trong đó:

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + a_P^0 + \Delta F - S_P$$

Với:

$$a_P^0 = \frac{\rho_P^0 \Delta V}{\Delta t} \qquad \bar{S}.\Delta V = S_u + S_P\phi_P$$

Rời rạc hoá phương trình tích phân

$$a_W = \max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right]$$

$$a_E = \max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right]$$

$$a_S = \max\left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2}\right), 0\right]$$

$$a_N = \max\left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2}\right), 0\right]$$

$$a_B = \max\left[F_b, \left(D_b + \frac{F_b}{2}\right), 0\right]$$

$$a_T = \max\left[-F_t, \left(D_t - \frac{F_t}{2}\right), 0\right]$$

$$\Delta F = F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$$

Thuật toán ma trận ba đường chéo TDMA

$$
\begin{cases}
\phi_1 = C_1 \\
-\beta_2\phi_1 + D_2\phi_2 - \alpha_2\phi_3 = C2 \\
-\beta_3\phi_2 + D_3\phi_3 - \alpha_{P1}\phi_{P1} = C3 \\
\dots\dots\dots\dots \\
-\beta_n\phi_{n-1} + D_n\phi_n - \alpha_n\phi_{n+1} = C_n \\
\phi_{n+1} = C_{n+1}
\end{cases}
$$

Thuật toán ma trận ba đường chéo TDMA

Trong các phương trình trên, ϕ_1 và ϕ_{n+1} được xem là những giá trị biên. Phương trình dạng tổng quát được viết như sau:

$$-\beta_j\phi_{j-1} + D_j\phi_j - \alpha_j\phi_{j+1} = C_j$$

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2}\phi_3 + \frac{\beta_2}{D_2}\phi_1 + \frac{C_2}{D_2}$$

$$\phi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3}\phi_4 + \frac{\beta_3}{D_3}\phi_2 + \frac{C_3}{D_3}$$

....

$$\phi_n = \frac{\alpha_n}{D_n}\phi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n}\phi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n}$$

BÀI TẬP
MÔ HÌNH HÓA VÀ MÔ PHỎNG
SỬ DỤNG
PHƯƠNG PHÁP THỂ TÍCH HỮU HẠN

1. Bài toán truyền dẫn nhiệt

Quá trình truyền nhiệt ổn định qua tấm phẳng có bề dày L = 2cm; hệ số dẫn nhiệt *k = 0,5* (W/m.độ); nguồn cấp nhiệt không đổi $q/\rho C_p$ = 1000 (kW/m^3). Các bề mặt A và B của tấm phẳng có nhiệt độ 100^{o}C và 200^{o}C. Giả sử rằng kích thước theo phương y và z đủ lớn để gradient nhiệt độ chỉ xuất hiện theo phương x.

Xác định:

1) **Phương trình mô tả quá trình truyền nhiệt**
2) **Biết rằng: Nghiệm giải tích của bài toán trên có dạng:**

$$T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x)\right].x + T_A$$

Đánh giá kết quả gần đúng theo kết quả mô phỏng và kết quả chính xác theo nghiệm giải tích trên (5 nút)

Xuất phát từ phương trình tổng quát

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + div(\rho u\phi) = div(\Gamma grad\phi) + S_\phi$$

Phương trình truyền nhiệt dạng tổng quát được viết dưới dạng:

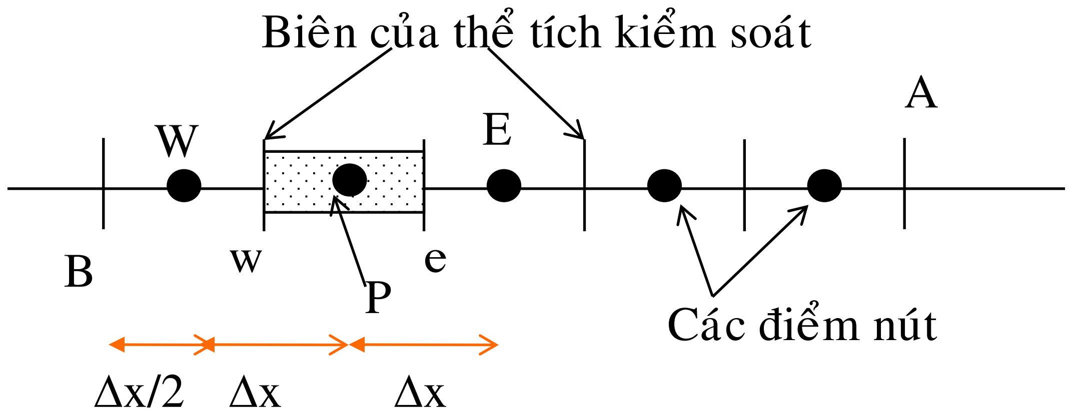
$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p\left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \left(k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + Q$$

Phương trình truyền nhiệt trong tấm phẳng có kích thước chiều y>>x và z >>x có dạng:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q$$

Trong trường hợp truyền nhiệt ổn định:

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q = 0$$



Điểm giữa

$$\int_{(V)} \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)dV + \int_{(V)} q\,dV = 0$$

$$\left(Ak\frac{dT}{dx}\right)_e - \left(Ak\frac{dT}{dx}\right)_w + q(V) = 0$$

$$\left(A_e k_e \frac{T_E - T_P}{x_{PE}}\right) - \left(A_w k_w \frac{T_P - T_W}{x_{PW}}\right) + qA\Delta x = 0$$

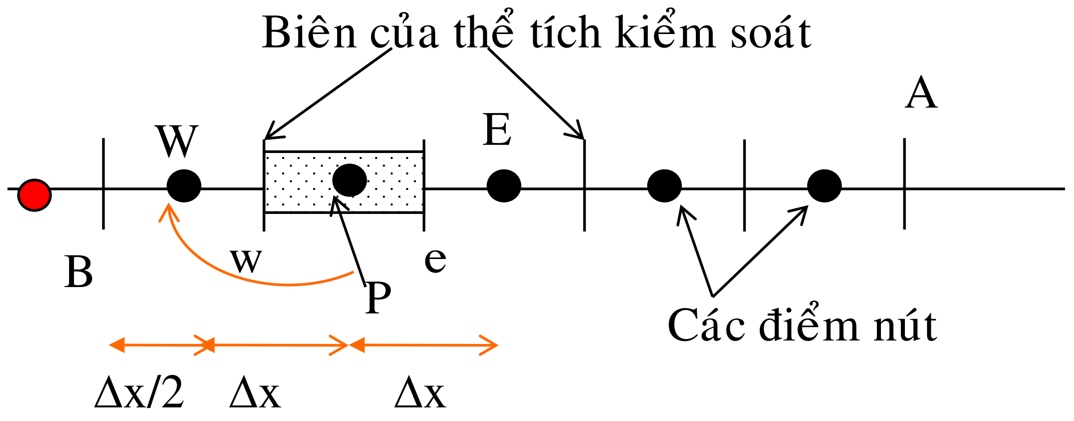
$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0 + S_u$$

$$a_W = \max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right] = D_w \qquad a_E = \max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right] = D_e$$

$$a_P = a_W + a_E - S_P$$

F = 0   D = Ak/Δx

$S_p = 0$ $S_U = qA\Delta x$



Điểm 1

$$\int_{(V)} \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)dV + \int_{(V)} q\,dV = 0$$

$$\left(Ak\frac{dT}{dx}\right)_e - \left(Ak\frac{dT}{dx}\right)_w + q(V) = 0$$

$$\left(A_e k_e \frac{T_E - T_P}{x_{PE}}\right) - \left(A_w k_w \frac{T_P - T_B}{x_{PW}/2}\right) + qA\Delta x = 0$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0 + S_u$$

$$a_W = \max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right] = 0 \qquad a_E = \max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right] = D_e$$

$$a_P = a_W + a_E - S_P$$

F = 0 D = Ak/Δx

$$S_P = -\frac{2kA}{\Delta x}$$

S_U = qAΔx+2kAT_B/Δx

Làm tương tự đối với điểm 5

$$a_W = D_w \qquad a_E = 0$$

$$a_P = a_W + a_E - S_P$$

F = 0 $\qquad$ D = Ak/Δx

$$S_P = -\frac{2kA}{\Delta x}$$

$S_U = qA\Delta x + 2kAT_A/\Delta x$

Lập bảng tính

Điểm	a_W	a_E	S_U	S_P	$a_P = a_W + a_E - S_P$
1	0	$k/\Delta x$	$q\Delta x+2kT_B/\Delta x$	$-\frac{2k}{\Delta x}$	$3k/\Delta x$
2	$k/\Delta x$	$k/\Delta x$	$q\Delta x$	0	$2k/\Delta x$
3	$k/\Delta x$	$k/\Delta x$	$q\Delta x$	0	$2k/\Delta x$
4	$k/\Delta x$	$k/\Delta x$	$q\Delta x$	0	$2k/\Delta x$
5	$k/\Delta x$	0	$q\Delta x+2kT_A/\Delta x$	$-\frac{2k}{\Delta x}$	$3k/\Delta x$

Kết quả tính

Điểm	a_W	a_E	S_U	S_P	$a_P = a_W + a_E - S_P$
1	0	125	29000	-250	375
2	125	125	4000	0	250
3	125	125	4000	0	250
4	125	125	4000	0	250
5	125	0	54000	-250	375

Lập ma trận:

$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -1250 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -1250 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -1250 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 54000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix}$$

Điểm nút	1	2	3	4	5
X(m)	0.002	0.006	0.01	0.014	0.018
Kết quả gần đúng	150	218	254	258	230
Kết quả chính xác	146	214	250	254	226
Sai số	2.73%	1.86%	1.6%	1.57%	1.76%

2. Bài toán lan truyền chất

Quá trình lan truyền ổn định một chất khí màu trong không khí, biết: khối lượng riêng lưu chất tại điều kiện lan truyền là ρ = 1kg/m^3; vận tốc đối lưu theo phương x là u_x = 0.1m/s; hệ số khuếch tán D = 0.1 m^2/s; Chiều dài quãng đường lan truyền là L = 1m. Giả sử rằng quá trình lan truyền chỉ xảy ra theo một phương x.

Xác định:

1) **Phương trình mô tả quá trình truyền vật chất**
2) **Biết rằng: Nghiệm giải tích của bài toán trên có dạng:**

$$\Phi(x) = \frac{2.71828 - \exp(x)}{1.71828}$$

Đánh giá kết quả gần đúng theo kết quả mô phỏng và kết quả chính xác theo nghiệm giải tích trên (5 nút)

Nút	Khoảng cách	Kết quả mô phỏng	Kết quả giải tích	Sai số
1	0.1	0.9421	0.9387	0.36%
2	0.3	0.8006	0.7963	0.53%
3	0.5	0.6276	0.6224	0.83%
4	0.7	0.4163	0.4100	1.53%
5	0.9	0.1579	0.1505	4.91%

3. Bài toán 2D

Cho tấm phẳng có bề dày 1cm. Độ dẫn nhiệt của vật liệu tấm phẳng là k = 1000W/mK. Mặt biên phía Tây tiếp nhận thông lượng nhiệt ổn định 500kW/m^2 và các mặt biên phía Đông và Nam được cách nhiệt.mặt biên phía Bắc được duy trì ở nhiệt độ 100^{o}C, sử dụng lưới không đổi Δx=Δy=0,1m để tính toán sự phân bố tại các điểm nút.

Xác định:

1) **Phương trình mô tả quá trình truyền nhiệt trong tấm phẳng**
2) **Mô phỏng gradient nhiệt độ trong tấm phẳng nêu trên với chiều x = 0,3m; y = 0,4m**