Mục lục

Chương1

CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1.1 Cực trị tự do

1.1.1 Định nghĩa cực trị tự do

Định nghĩa 1.1. Hàm hai biến $f(x, y)$ đạt cực đại tại điểm (x_0, y_0) nếu như $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$, với mọi (x, y) nằm trong lân cận của (x_0, y_0). Giá trị $f(x_0, y_0)$ được gọi là giá trị cực đại. Nếu như $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$, với mọi (x, y) nằm trong lân cận của (x_0, y_0) thì f đạt cực tiểu tại (x_0, y_0) và giá trị $f(x_0, y_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu.

Chú ý. Nếu $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$, với mọi $(x, y) \in D_f$ thì f đạt GTLN tại (x_0, y_0). Nếu $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$, với mọi $(x, y) \in D_f$ thì f đạt GTNN tại (x_0, y_0).

1.1.2 Điều kiện cần để hàm số $z = f(x, y)$ có cực trị tự do

Định lý 1.1. *Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có cực trị tại điểm (x_0, y_0) và đạo hàm riêng cấp một của f tồn tại tại điểm (x_0, y_0) thì*

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Chứng minh. Cho $g(x) = f(x, y_0)$. Nếu f có cực trị tại điểm (x_0, y_0) thì $g(x) = f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$ (trong trường hợp (x_0, y_0) là điểm cực đại) hoặc $g(x) = f(x, y_0) \geqslant f(x_0, y_0)$ (trong trường hợp (x_0, y_0) là điểm cực tiểu), với mọi x thuộc lân cận của x_0. Như vậy, theo định lý Fermat đối với hàm một biến $g(x)$, ta có $g'(x_0) = 0$. Mặt khác, $g'(x) = f'_x(x, y_0) \Rightarrow g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Như vậy, $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Chứng minh tương tự đối với hàm $h(y) = f(x_0, y)$ ta cũng được $f'_y(x_0, y_0) = 0$■

Chú ý. Nếu $f'_x(x_0, y_0) = 0$ và $f'_y(x_0, y_0) = 0$ thì phương trình mặt phẳng tiếp diện với mặt cong $z = f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) là $z = f(x_0, y_0) = z_0$. Từ đây chúng ta suy ra ý nghĩa hình học của cực trị: Mặt phẳng tiếp diện với mặt cong $z = f(x, y)$ tại điểm cực trị là mặt phẳng nằm ngang $z = z_0$.

Điểm (x_0, y_0) được gọi là điểm dừng của f nếu $f'_x(x_0, y_0) = 0$ và $f'_y(x_0, y_0) = 0$ hoặc nếu một trong hai đạo hàm riêng không tồn tại.

Định lý trên cho ta thấy được rằng: nếu f có cực trị tại (x_0, y_0) thì (x_0, y_0) là điểm dừng của f. Tuy nhiên, giống như trường hợp hàm một biến, điều ngược lại **không đúng**.

1.1.3 Điều kiện đủ để hàm số $z = f(x, y)$ có cực trị

Định lý 1.2. *Cho hàm số $z = f(x, y)$ có đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trong lân cận của **điểm dừng** $P(x_0, y_0)$. Số $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Khi đó, theo tiêu chuẩn Sylvester, ta có:*

1. *Nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$ thì điểm $P(x_0, y_0)$ là **điểm cực tiểu** của hàm số $z = f(x, y)$. Lúc này $d^2 f(x_0, y_0) = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$ là dạng toàn phương xác định dương.*

2. *Nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$ thì điểm $P(x_0, y_0)$ là **điểm cực đại** của hàm số $z = f(x, y)$. Lúc này $d^2 f(x_0, y_0) = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$ là dạng toàn phương xác định âm.*

3. *Nếu $\Delta < 0$ thì điểm $P(x_0, y_0)$ **KHÔNG là điểm cực trị** của hàm số $z = f(x, y)$. Lúc này $d^2 f(x_0, y_0) = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$ là dạng toàn phương không xác định dấu.*

Chứng minh. Lấy tùy ý điểm $M(x, y)$ trong lân cận của điểm $P(x_0, y_0)$ sao cho $M \neq P$. Theo công thức khai triển Taylor trong lân cận của điểm (x_0, y_0) đến cấp một với phần dư Lagrange, ta có

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y), (\alpha \in (0, 1)).$$

Từ đó ta có

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2!}(f''_{xx}(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y)\Delta y^2).$$

Theo điều kiện cần để hàm $z = f(x, y)$ có cực trị thì nếu $P(x_0, y_0)$ là điểm cực trị thì $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Do đó

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y)\Delta x^2+$$

$$+2f''_{xy}(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y)\Delta y^2].$$

Vì những **đạo hàm riêng cấp hai liên tục** tại điểm $P(x_0, y_0)$ nên ta có thể biểu diễn

$$f''_{xx}(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y) = f''_{xx}(x_0, y_0) + \alpha_{11} = A + \alpha_{11}$$

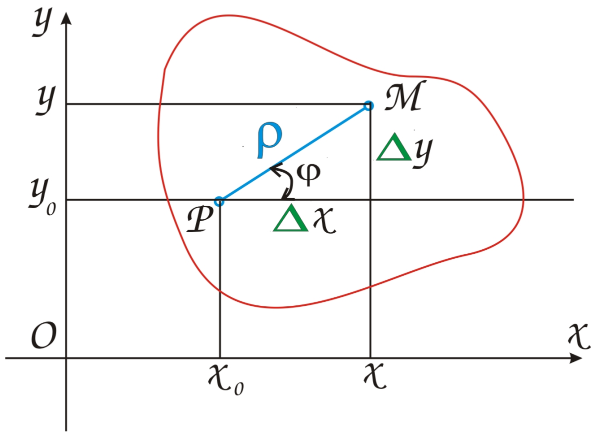
$$f''_{xy}(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha_{12} = B + \alpha_{12}$$

$$f''_{yy}(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y) = f''_{yy}(x_0, y_0) + \alpha_{22} = C + \alpha_{22},$$

trong đó $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22} \to 0$, khi $\Delta x, \Delta y \to 0$. Như vậy,

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2!}[(A+\alpha_{11})\Delta x^2 + 2(B+\alpha_{12})\Delta x.\Delta y + (C+\alpha_{22})\Delta y^2] =$$

$$= \frac{1}{2!}[(A\Delta x^2 + 2B\Delta x.\Delta y + C\Delta y^2) + (\alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x.\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2)]$$



Hình 1.1: Đổi sang hệ tọa độ cực

Đặt $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, φ là góc giữa tia PM và trục Ox. Khi đó

$$\Delta x = \rho.\cos\varphi, \Delta y = \rho.\sin\varphi.$$

Vậy

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\rho^2}{2!}[(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi.\sin\varphi + C\sin^2\varphi) + (\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi.\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi)]$$

Trường hợp 1. $AC - B^2 > 0$. Từ đó suy ra $AC > 0 \Rightarrow A \neq 0$ và

$$A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi.\sin\varphi + C\sin^2\varphi = \frac{1}{A}[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi].$$

Do hàm $|A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi.\sin\varphi + C\sin^2\varphi|$ là hàm liên tục trên đoạn $[0, 2\pi]$ nên nó có giá trị nhỏ nhất m

$$\Rightarrow |A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi.\sin\varphi + C\sin^2\varphi| \geqslant m > 0.$$

Vì khi $\Delta x, \Delta y \to 0$ thì $\rho \to 0$ và $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22} \to 0$ nên

$$|\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi.\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi| \leqslant |\alpha_{11}| + 2|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| < m,$$

với $\rho > 0$ đủ nhỏ. Như vậy,

1. nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$ thì $f(x,y) - f(x_0,y_0) \geqslant 0$ hay $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$ và điểm $P(x_0,y_0)$ là **điểm cực tiểu** của hàm số $z = f(x,y)$.

2. nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$ thì $f(x,y) - f(x_0,y_0) \leqslant 0$ hay $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$ điểm $P(x_0,y_0)$ là **điểm cực đại** của hàm số $z = f(x,y)$.

Trường hợp 2. $AC - B^2 < 0$.

Giả sử $A \neq 0$. Khi $\varphi = \varphi_1 = 0$ thì

$$A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi.\sin\varphi + C\sin^2\varphi = A$$

có dấu cùng dấu với A, còn khi $\varphi = \varphi_2$, với φ_2 là góc thỏa mãn $A\cos\varphi_2 + B\sin\varphi_2 = 0(\sin\varphi_2 \neq 0)$ thì

$$A\cos^2\varphi_2 + 2B\cos\varphi_2.\sin\varphi_2 + C\sin^2\varphi_2 = \frac{1}{A}[(A\cos\varphi_2 + B\sin\varphi_2)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi_2] = \frac{1}{A}(AC - B^2)\sin^2\varphi_2$$

có dấu trái dấu với A.

Với ρ đủ nhỏ thì $\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi.\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi$ có giá trị đủ nhỏ khi $\varphi = \varphi_1$ và $\varphi = \varphi_2$. Do đó dấu của $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ sẽ phụ thuộc vào dấu của biểu thức $A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi.\sin\varphi + C\sin^2\varphi$. Như vậy, trong lân cận của (x_0, y_0) những điểm (x, y) thuộc tia xác định bởi $\varphi = \varphi_1$ và $\varphi = \varphi_2$ có $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ mang dấu trái nhau. Điều này có nghĩa là (x_0, y_0) không là điểm cực trị.

Nếu $A = 0$ thì

$$A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi.\sin\varphi + C\sin^2\varphi = 2B\cos\varphi.\sin\varphi + C\sin^2\varphi = \sin\varphi.(2B\cos\varphi + C\sin\varphi)$$

Từ $AC - B^2 < 0 \Rightarrow B \neq 0$, do đó có thể chọn góc $\varphi = \varphi_1 \neq 0(\sin\varphi_1 \neq 0)$ sao cho

$$|C|.|\sin\varphi_1| < 2|B|.|\cos\varphi_1|.$$

Khi đó với $\varphi = \varphi_1$ và $\varphi = \varphi_2 = -\varphi_1$ biểu thức $\sin\varphi.(2B\cos\varphi + C\sin\varphi)$ sẽ có dấu trái nhau (vì $\sin\varphi_1$ và $\sin(-\varphi_1)$ có dấu trái nhau). Như vậy, với $\rho > 0$ đủ nhỏ trong lân cận của (x_0, y_0) những điểm (x, y) thuộc tia xác định bởi $\varphi = \varphi_1$ và $\varphi = \varphi_2$ có $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ mang dấu trái nhau. Điều này có nghĩa là (x_0, y_0) không là điểm cực trị.

Định lý đã được chứng minh.

1.1.4 Phương pháp tìm cực trị tự do

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên miền xác định $D(f)$. Các bước tìm cực trị tự do của hàm này như sau:

1. Tìm điểm dừng
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots$$

2. Tại điểm $P_i(x_i, y_i)$ đặt $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_i)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y_i)$, $\Delta = AC - B^2$

- Nếu $\Delta > 0, A > 0$ thì hàm đạt **cực tiểu** tại (x_i, y_i).
- Nếu $\Delta > 0, A < 0$ thì hàm đạt **cực đại** tại (x_i, y_i).
- Nếu $\Delta < 0$ thì hàm **không đạt cực trị** tại (x_i, y_i), lúc này điểm (x_i, y_i) được gọi là **điểm yên ngựa**.
- Nếu $\Delta = 0$ thì ta phải **xét bằng định nghĩa** $\Delta f = f(x, y) - f(x_i, y_i)$

***Ví dụ* 1.1.1.** Tìm cực trị tự do của hàm số $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 6y$

Giải.

Bước 1. Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} f'_x &= 3x^2 - 6x = 0 \\ f'_y &= 6y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Có 4 điểm dừng $P_1(0,-1), P_2(0,1), P_3(2,-1), P_4(2,1)$.

Bước 2. Tìm các đạo hàm riêng cấp 2

$f''_{xx} = 6x - 6, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = 12y$.

Bước 3. Khảo sát tại từng điểm dừng

1. $P_1(0,-1), A = f''_{xx}(0,-1) = -6,\ B = f''_{xy}(0,-1) = 0,\ C = f''_{yy}(0,-1) = -12,$
   $\Delta = AC - B^2 = (-6).(-12) - (0)^2 > 0.$

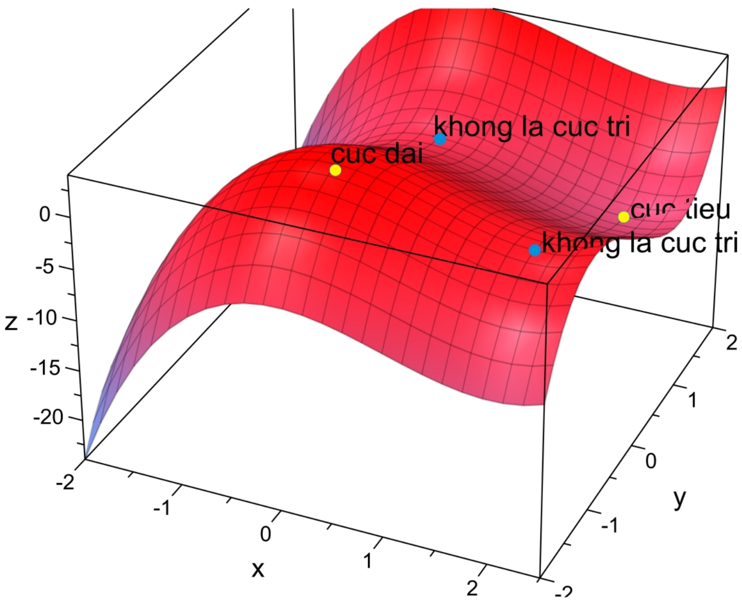
$$\Rightarrow \begin{cases} A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 \text{ là điểm cực đại, } f_{\text{CĐ}} = f(0,-1) = 4.$$

2. $P_2(0,1), A = f''_{xx}(0,1) = -6,\ B = f''_{xy}(0,1) = 0,\ C = f''_{yy}(0,1) = 12,$
   $\Delta = AC - B^2 = (-6).(12) - (0)^2 < 0.$ $\Rightarrow P_2$ không là điểm cực trị.

3. $P_3(2,-1), A = f''_{xx}(2,-1) = 6,\ B = f''_{xy}(2,-1) = 0,\ C = f''_{yy}(2,-1) = -12,$
   $\Delta = AC - B^2 = (6).(-12) - (0)^2 < 0.$ $\Rightarrow P_3$ không là điểm cực trị.

4. $P_4(2,1), A = f''_{xx}(2,1) = 6,\ B = f''_{xy}(2,1) = 0,\ C = f''_{yy}(2,1) = 12,$
   $\Delta = AC - B^2 = (6).(12) - (0)^2 > 0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} A > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow P_4 \text{ là điểm cực tiểu, } f_{\text{CT}} = f(2,1) = -8.$$



Hình 1.2: Cực trị tự do của hàm số $f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 6y$

***Ví dụ* 1.1.2.** Tìm cực trị tự do của hàm số $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Giải.

Bước 1. Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} f'_x &= 4x^3 - 4y = 0 \\ f'_y &= 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = (x^3)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Có 3 điểm dừng $P_1(0,0), P_2(1,1), P_3(-1,-1)$.

Bước 2. Tìm các đạo hàm riêng cấp 2

$f''_{xx} = 12x^2, f''_{xy} = -4, f''_{yy} = 12y^2$.

Bước 3. Khảo sát tại từng điểm dừng

1. $P_1(0,0), A = f''_{xx}(0,0) = 0,\ B = f''_{xy}(0,0) = -4,\ C = f''_{yy}(0,0) = 0,$
   $\Delta = AC - B^2 = 0.0 - (-4)^2 < 0. \Rightarrow P_1$ không là điểm cực trị.

2. $P_2(1,1), A = f''_{xx}(1,1) = 12,\ B = f''_{xy}(1,1) = -4,\ C = f''_{yy}(1,1) = 12,$
   $\Delta = AC - B^2 = (12).(12) - (-4)^2 > 0.$

   $$\Rightarrow \begin{cases} A > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow P_2 \text{ là điểm cực tiểu, } f_{\text{CT}} = f(1,1) = -1.$$

3. $P_3(-1,-1), A = f''_{xx}(-1,-1) = 12,\ B = f''_{xy}(-1,-1) = -4,\ C = f''_{yy}(-1,-1) = 12,$
   $\Delta = AC - B^2 = (12).(12) - (-4)^2 > 0.$

   $$\Rightarrow \begin{cases} A > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow P_2 \text{ là điểm cực tiểu, } f_{\text{CT}} = f(-1,-1) = -1.$$

***Ví dụ* 1.1.3.** Tìm cực trị tự do của $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 1$.

Giải.

Bước 1. Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} f'_x &= 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0 \\ f'_y &= 6xy - 36 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Có 4 điểm dừng $P_1(3,2), P_2(-3,-2), P_3(2,3), P_4(-2,-3)$.

Bước 2. Tìm các đạo hàm riêng cấp 2

$f''_{xx} = 6x, f''_{xy} = 6y, f''_{yy} = 6x$.

Bước 3. Khảo sát tại từng điểm dừng

1. $P_1(3,2), A = f''_{xx}(3,2) = 18,\ B = f''_{xy}(3,2) = 12,\ C = f''_{yy}(3,2) = 18,$
   $\Delta = AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0.$

   $$\Rightarrow \begin{cases} A > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 \text{ là điểm cực tiểu, } f_{CT} = f(3,2) = -125.$$

2. $P_2(-3,-2), A = f''_{xx}(-3,-2) = -18,\ B = f''_{xy}(-3,-2) = -12,\ C = f''_{yy}(-3,-2) = -18,$
   $\Delta = AC - B^2 = (-18).(-18) - (-12)^2 > 0.$

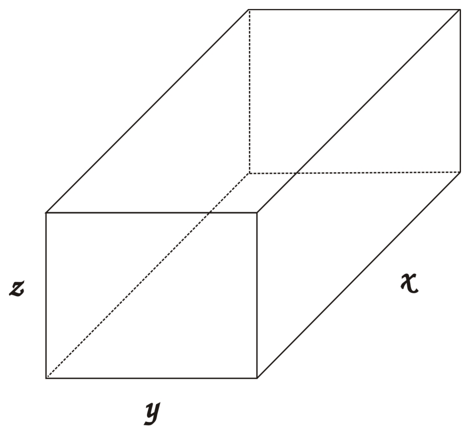
   $$\Rightarrow \begin{cases} A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow P_2 \text{ là điểm cực đại, } f_{\text{CĐ}} = f(-3,-2) = 127.$$

3. $P_3(2,3), A = f''_{xx}(2,3) = 12,\ B = f''_{xy}(2,3) = 18,\ C = f''_{yy}(2,3) = 12,$
   $\Delta = AC - B^2 = 12.12 - 18^2 < 0. \Rightarrow P_3$ không là điểm cực trị.

4. $P_4(-2,-3), A = f''_{xx}(-2,-3) = -12,\ B = f''_{xy}(-2,-3) = -18,\ C = f''_{yy}(-2,-3) = -12,$
$\Delta = AC - B^2 = (-12).(-12) - (-18)^2 < 0. \Rightarrow P_4$ không là điểm cực trị.

***Ví dụ* 1.1.4.** Cho hình hộp chữ nhật có diện tích các mặt xung quanh và mặt đáy bằng $24m^2$. Hãy tìm thể tích lớn nhất của hình hộp này.

Giải. Gọi $x, y, z (x, y, z > 0)$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hình hộp chữ nhật.



Hình 1.3: Hình hộp chữ nhật

Khi đó thể tích của hình hộp là $V = xyz$, và diện tích xung quanh và mặt đáy của hình hộp chữ nhật là

$$2xy + 2yz + 2zx = 24 \Rightarrow z = \frac{12 - xy}{x + y}$$

Vậy

$$V = xy.\frac{12 - xy}{x + y} = \frac{12xy - x^2y^2}{x + y}$$

Bước 1. Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} V'_x &= \dfrac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{(x+y)^2} = 0 \\ V'_y &= \dfrac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{(x+y)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 2xy - x^2 = 0 \\ 12 - 2xy - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$$

$\Rightarrow$ Có 1 điểm dừng $P_1(2,2)$.

Bước 2. Tìm các đạo hàm riêng cấp 2

$V''_{xx} = -\dfrac{2y^2(y^2+12)}{(x+y)^3}, V''_{xy} = -\dfrac{2xy(x^2+3xy+y^2-12)}{(x+y)^3}, V''_{yy} = -\dfrac{2x^2(x^2+12)}{(x+y)^3}.$

Bước 3. Khảo sát tại từng điểm dừng

$P_1(2,2), A = f''_{xx}(2,2) = -2,\ B = f''_{xy}(2,2) = -1,\ C = f''_{yy}(2,2) = -2,$
$\Delta = AC - B^2 = (-2).(-2) - (-1)^2 > 0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 \text{ là điểm cực đại, } f_{CĐ} = f(2,2) = 4.$$

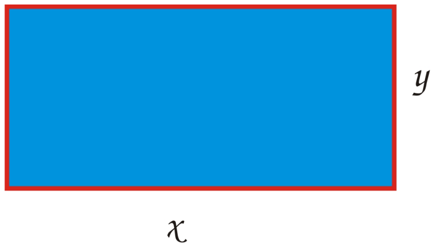
Vậy thể tích lớn nhất là $V_{max} = 4$ khi $x = 2, y = 2, z = 2$.

1.2 Cực trị có điều kiện

1.2.1 Đặt vấn đề

Trong những bài toán ứng dụng, chúng ta thường gặp bài toán tìm cực trị của hàm nhiều biến khi có thêm **điều kiện ràng buộc nào đó đối với biến số**.

***Ví dụ* 1.2.1.** Hãy xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất, biết rằng hình chữ nhật đó có chu vi là $2p$.



Hình 1.4: Hình chữ nhật

Gọi x, y lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật. Bài toán của chúng ta là tìm giá trị lớn nhất của $S(x,y) = xy$ với điều kiện $2(x+y) = 2p, x > 0, y > 0$. Từ đây, ta có $y = p - x$ và thay vào S ta được hàm một biến $S(x) = x(p-x)$ với điều kiện $0 < x < p$. Hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trong khoảng $(0,p)$ khi $x = \dfrac{p}{2}$. Như vậy, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất với chu vi cho trước là hình vuông.

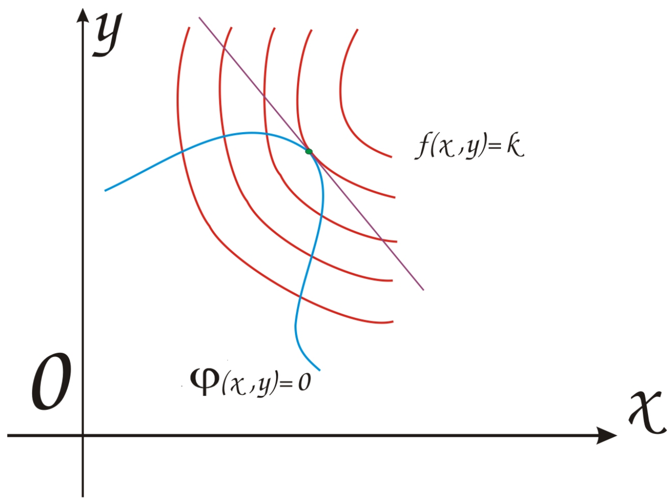
Chú ý rằng, hàm hai biến $S(x,y) = xy$ **không có cực trị tự do**, tuy nhiên lời giải cho bài toán vẫn có. Điều này có nghĩa là đối với bài toán của chúng ta, giá trị của hàm $S(x,y)$ tại những điểm không thỏa mãn phương trình $x + y = p$, không có ý nghĩa gì.

1.2.2 Định nghĩa cực trị có điều kiện

Định nghĩa 1.2. Hàm hai biến $f(x,y)$ đạt cực đại có điều kiện tại điểm (x_0, y_0) với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$, nếu như $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$, với mọi (x,y) thỏa $\varphi(x,y) = 0$, nằm trong lân cận của (x_0,y_0). Giá trị $f(x_0,y_0)$ được gọi là giá trị cực đại có điều kiện. Nếu như $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$, với mọi (x,y) thỏa $\varphi(x,y) = 0$, nằm trong lân cận của (x_0,y_0) thì f đạt cực tiểu có điều kiện tại (x_0,y_0) và giá trị $f(x_0,y_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu có điều kiện. Hàm $f(x,y)$ lúc này được gọi là **hàm mục tiêu**, còn điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ được gọi là **điều kiện ràng buộc**.

1.2.3 Điều kiện cần để hàm số $z = f(x,y)$ có cực trị có điều kiện

Giả sử chúng ta cần tìm cực trị của hàm $z = f(x,y)$ thỏa điều kiện $\varphi(x,y) = 0$. Điều này có nghĩa là chúng ta tìm cực trị của hàm f khi điểm (x,y) nằm trên đường cong $\varphi(x,y) = 0$. Trên hình (1.5), cho chúng ta thấy một số đường đẳng trị $f(x,y) = k$. Như vậy, để tìm cực đại (cực tiểu) của hàm $f(x,y)$ thỏa điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ chúng ta tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của k sao cho đường đẳng trị $f(x,y) = k$ cắt đường cong $\varphi(x,y) = 0$. Điều này xảy ra khi đường đẳng trị $f(x,y) = k$ và đường cong $\varphi(x,y) = 0$ có cùng tiếp tuyến, vì nếu ngược lại giá trị k có thể tăng lên (hoặc giảm xuống) nữa. Điều này có nghĩa là **đường vuông góc** với đường đẳng trị $f(x,y) = k$ và đường cong $\varphi(x,y) = 0$



Hình 1.5: Cực trị của $z = f(x, y)$ thỏa điều kiện $\varphi(x, y) = 0$

tại điểm cực trị (x_0, y_0) phải cùng phương với nhau. Do đó, $\nabla f(x_0, y_0) = -\lambda.\nabla\varphi(x_0, y_0), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda.\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda.\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Định lý 1.3. *Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có cực trị có điều kiện tại điểm (x_0, y_0) với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ và $\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ thì tồn tại số λ thỏa mãn hệ*

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Chứng minh.

Vì $\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ nên có ít nhất một trong hai đạo hàm riêng $\varphi'_x(x_0, y_0), \varphi'_y(x_0, y_0)$ khác 0. Không mất tính tổng quát giả sử $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$. (trường hợp $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$ chứng minh tương tự).

Phương trình $\varphi(x, y) = 0$ xác định một hàm ẩn $y = h(x)$ và

$$h'(x) = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Nếu hàm số $f(x, y)$ có cực trị có điều kiện tại (x_0, y_0) với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ thì hàm một biến $g(x) = f(x, h(x))$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó theo điều kiện cần để hàm một biến đạt cực trị thì $g'(x_0) = 0$.

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0).h'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0).\frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} = 0$$

Đặt $\lambda = -\dfrac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}$. Khi đó

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda.\varphi'_x(x_0, y_0) = 0.$$

và từ $\lambda = -\dfrac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} \Rightarrow f'_y(x_0, y_0) + \lambda.\varphi'_y(x_0, y_0) = 0.$

Định lý đã được chứng minh.

1.2.4 Điều kiện đủ để hàm số $z = f(x, y)$ có cực trị có điều kiện

Định lý 1.4. *Cho hàm số $z = f(x, y)$ có **cực trị có điều kiện** với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ tại **điểm** $P(x_0, y_0)$. Lập hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda.\varphi(x, y)$. Khi đó:*

1. *Nếu $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì $P(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu có điều kiện.*
2. *Nếu $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ thì $P(x_0, y_0)$ là điểm cực đại có điều kiện.*
3. *Nếu $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0)$ không xác định dấu thì $P(x_0, y_0)$ không là điểm cực trị.*

1.2.5 Phương pháp Lagrange tìm cực trị có điều kiện

Các bước khảo sát cực trị của $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$

1. Lập hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$. Tìm điểm dừng của $L(x, y, \lambda)$

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow P_i(x_i, y_i), \lambda_i, i = 1, 2, \ldots$$

2. Tìm tất cả $L''_{xx}, L''_{xy}, L''_{yy}$

3. Khảo sát từng điểm dừng $P_i(x_i, y_i), \lambda_i$

$$d^2L(x_i, y_i, \lambda_i) = L''_{xx}(x_i, y_i, \lambda_i)dx^2 + 2L''_{xy}(x_i, y_i, \lambda_i)dxdy + L''_{yy}(x_i, y_i, \lambda_i)dy^2$$

   Dựa vào điều kiện đủ ta kết luận

   - Nếu $d^2L(x_i, y_i, \lambda_i) > 0$ thì $P(x_i, y_i)$ là **điểm cực tiểu có điều kiện**.
   - Nếu $d^2L(x_i, y_i, \lambda_i) < 0$ thì $P(x_i, y_i)$ là **điểm cực đại có điều kiện**.
   - Nếu $d^2L(x_i, y_i, \lambda_i)$ không xác định dấu thì $P(x_i, y_i)$ **không là điểm cực trị**.

Chú ý.

- Để khảo sát $d^2L(x_i, y_i, \lambda_i)$ đôi khi ta cần sử dụng điều kiện

$$\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow d\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow d\varphi(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow \varphi'_x(x_i, y_i)dx + \varphi'_y(x_i, y_i)dy = 0$$

  Từ đây ta rút ra biểu thức dx theo dy hoặc dy theo dx. Thay vào biểu thức $d^2L(x_i, y_i, \lambda_i)$ ta được 1 hàm theo dx^2 hoặc dy^2.

- Trong bài toán cực trị có điều kiện luôn có $dx^2 + dy^2 > 0$, có nghĩa là dx, dy không đồng thời bằng 0.

- $d^2L(x_i, y_i, \lambda_i) = L''_{xx}(x_i, y_i, \lambda_i)dx^2 + +L''_{yy}(x_i, y_i, \lambda_i)dy^2 + L''_{\lambda\lambda}(x_i, y_i, \lambda_i)d\lambda^2 + 2L''_{xy}(x_i, y_i, \lambda_i)dxdy + 2L''_{\lambda x}(x_i, y_i, \lambda_i)d\lambda dx + 2L''_{\lambda y}(x_i, y_i, \lambda_i)d\lambda dy$. Vì $L''_{\lambda\lambda}(x_i, y_i, \lambda_i) = 0$ và $2L''_{\lambda x}(x_i, y_i, \lambda_i)d\lambda dx + 2L''_{\lambda y}(x_i, y_i, \lambda_i)d\lambda dy = 2(\varphi'_x(x_i, y_i)dx + \varphi'_y(x_i, y_i)dy)d\lambda = 0$ nên

$$d^2L(x_i, y_i, \lambda_i) = L''_{xx}(x_i, y_i, \lambda_i)dx^2 + 2L''_{xy}(x_i, y_i, \lambda_i)dxdy + L''_{yy}(x_i, y_i, \lambda_i)dy^2.$$

***Ví dụ* 1.2.2.** Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Tìm điểm dừng của hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda.\varphi(x, y)$

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) &= 2x + 2x\lambda = 0 \quad (1) \\ L'_y(x,y,\lambda) &= 4y + 2y\lambda = 0 \quad (2) \\ \varphi(x,y) &= x^2 + y^2 = 1 \quad (3) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $x = 0$ hoặc $\lambda = -1$. Nếu $x = 0$ thì từ (3) ta được $y = \pm 1$ và từ (2) ta được $\lambda = -2$. Nếu $\lambda = -1$ thì từ (2) ta được $y = 0$ và từ (3) ta được $x = \pm 1$

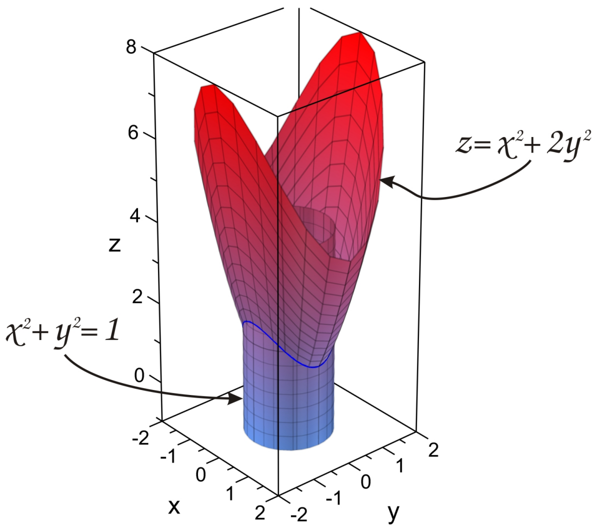
Như vậy, ta có điểm dừng $P_1(0, 1), P_2(0, -1)$ ứng với $\lambda = -2$ và $P_3(1, 0), P_4(-1, 0)$ ứng với $\lambda = -1$.

Tại $P_1(0, 1)$ ứng với $\lambda = -2$ ta có $d^2L(0, 1, -2) = L''_{xx}(0, 1, -2)dx^2 + 2L''_{xy}(0, 1, -2)dxdy + L''_{yy}(0, 1, -2)dy^2 = (2 + 2\lambda)dx^2 + (4 + 2\lambda)dy^2 = -2dx^2$. Sử dụng thêm điều kiện $\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow d\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow d\varphi(P_1) = 0 \Leftrightarrow \varphi'_x(0, 1)dx + \varphi'_y(0, 1)dy = 0 \Leftrightarrow 2.0.dx + 2.1.dy = 0 \Leftrightarrow dy = 0$. Mà $dx^2 + dy^2 > 0$ nên $dx \neq 0$. Vậy $d^2L(0, 1, -2) = -2dx^2 < 0$. Do đó tại P_1 hàm $f(x, y)$ đạt **cực đại có điều kiện**.

Tại $P_2(0, -1)$ ứng với $\lambda = -2$ ta có $d^2L(0, -1, -2) = L''_{xx}(0, -1, -2)dx^2 + 2L''_{xy}(0, -1, -2)dxdy + L''_{yy}(0, -1, -2)dy^2 = (2 + 2\lambda)dx^2 + (4 + 2\lambda)dy^2 = -2dx^2$. Sử dụng thêm điều kiện $\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow d\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow d\varphi(P_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi'_x(0, -1)dx + \varphi'_y(0, -1)dy = 0 \Leftrightarrow 2.0.dx - 2.1.dy = 0 \Leftrightarrow dy = 0$. Mà $dx^2 + dy^2 > 0$ nên $dx \neq 0$. Vậy $d^2L(0, -1, -2) = -2dx^2 < 0$. Do đó tại P_2 hàm $f(x, y)$ đạt **cực đại có điều kiện**.

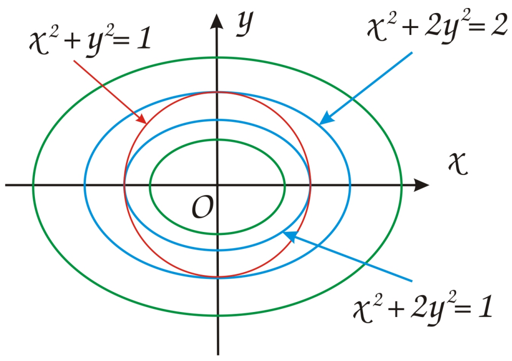
Tại $P_3(1, 0)$ ứng với $\lambda = -1$ ta có $d^2L(1, 0, -1) = L''_{xx}(1, 0, -1)dx^2 + 2L''_{xy}(1, 0, -1)dxdy + L''_{yy}(1, 0, -1)dy^2 = (2+2\lambda)dx^2+(4+2\lambda)dy^2 = 2dy^2$. Sử dụng thêm điều kiện $\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow d\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow d\varphi(P_3) = 0 \Leftrightarrow \varphi'_x(1, 0)dx + \varphi'_y(1, 0)dy = 0 \Leftrightarrow 2.1.dx + 2.0dy = 0 \Leftrightarrow dx = 0$. Mà $dx^2 + dy^2 > 0$ nên $dy \neq 0$. Vậy $d^2L(1, 0, -1) = 2dy^2 > 0$. Do đó tại P_3 hàm $f(x, y)$ đạt **cực tiểu có điều kiện**.

Tại $P_4(-1, 0)$ ứng với $\lambda = -1$ ta có $d^2L(-1, 0, -1) = L''_{xx}(-1, 0, -1)dx^2 + 2L''_{xy}(-1, 0, -1)dxdy + L''_{yy}(-1, 0, -1)dy^2 = (2 + 2\lambda)dx^2 + (4 + 2\lambda)dy^2 = 2dy^2$. Sử dụng thêm điều kiện $\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow d\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow d\varphi(P_4) = 0 \Leftrightarrow \varphi'_x(-1, 0)dx + \varphi'_y(-1, 0)dy = 0 \Leftrightarrow 2.(-1).dx + 2.0dy = 0 \Leftrightarrow dx = 0$. Mà $dx^2 + dy^2 > 0$ nên $dy \neq 0$. Vậy $d^2L(-1, 0, -1) = 2dy^2 > 0$. Do đó tại P_4 hàm $f(x, y)$ đạt **cực tiểu có điều kiện**.



Hình 1.6: Cực trị có điều kiện của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

***Ví dụ* 1.2.3.** Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.



Hình 1.7: Đường đẳng trị của hàm $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

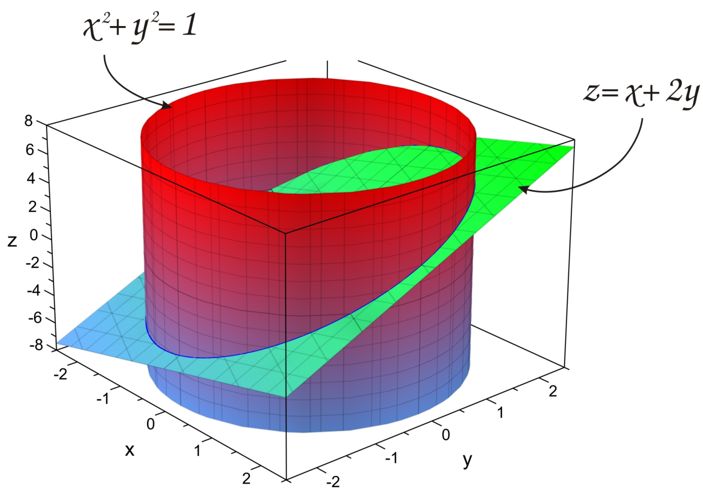
Giải. Tìm điểm dừng của hàm Lagrange $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda.\varphi(x,y)$

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) &= 1 + 2x\lambda = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) &= 2 + 2y\lambda = 0 \\ \varphi(x,y) &= x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -\dfrac{1}{2\lambda} \\ y &= -\dfrac{1}{\lambda} \\ x^2 + y^2 &= \left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = 5 \end{cases}$$

Từ đó, ta có điểm dừng $P_1(1,2)$ ứng với $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ và $P_2(-1,-2)$ ứng với $\lambda = \dfrac{1}{2}$

Tại $P_1(1,2)$ ứng với $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ ta có $d^2L(1,2,-\frac{1}{2}) = L''_{xx}(1,2,-\frac{1}{2})dx^2 + 2L''_{xy}(1,2,-\frac{1}{2})dxdy + L''_{yy}(1,2,-\frac{1}{2})dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = -dx^2 - dy^2 < 0$. Do đó tại P_1 hàm $f(x,y)$ đạt **cực đại có điều kiện**.

Tại $P_2(-1,-2)$ ứng với $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ta có $d^2L(-1,-2,\frac{1}{2}) = L''_{xx}(-1,-2,\frac{1}{2})dx^2 + 2L''_{xy}(-1,-2,\frac{1}{2})dxdy + L''_{yy}(-1,-2,\frac{1}{2})dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = dx^2 + dy^2 > 0$. Do đó tại P_2 hàm $f(x,y)$ đạt **cực tiểu có điều kiện**.



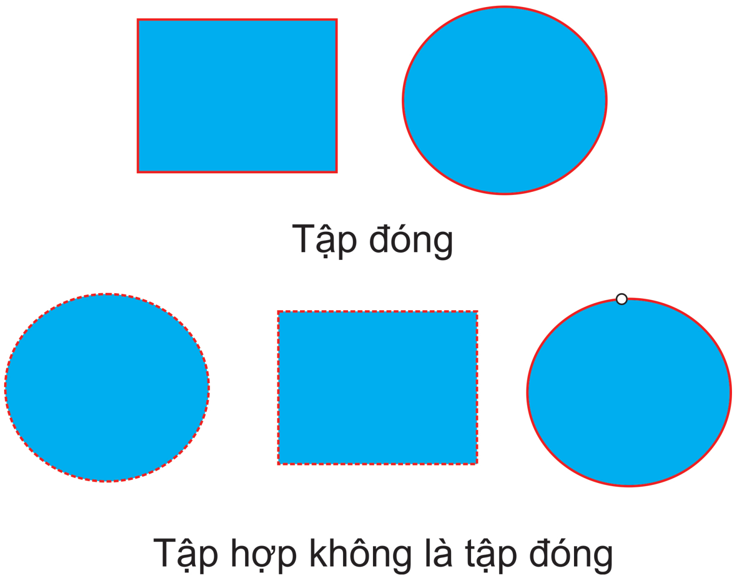
Hình 1.8: Cực trị có điều kiện của hàm $f(x,y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

1.3 Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

1.3.1 Định nghĩa tập đóng, tập mở

Định nghĩa 1.3. **Điểm biên** của tập hợp D là điểm (a, b) sao cho **mọi hình tròn** với tâm (a, b) đều chứa những điểm thuộc D và những điểm không thuộc D.

Định nghĩa 1.4. **Tập đóng** trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ là tập hợp chứa tất cả những **điểm biên** của nó.



Hình 1.9: Tập đóng và tập hợp không là tập đóng

***Ví dụ* 1.3.1.** Tập hợp $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ chứa tất cả những điểm **trên và bên trong** đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là tập đóng vì nó chứa tất cả những điểm biên của nó, ở đây những điểm biên là những điểm nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Định nghĩa 1.5. **Tập bị chặn** trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ là tập hợp được chứa trong một hình tròn nào đó.

1.3.2 Sự tồn tại GTLN, GTNN của hàm $f(x, y)$

Định lý 1.5. *Nếu hàm số $z = f(x, y)$ **liên tục trên miền đóng, bị chặn** $D \subset \mathbb{R}^2$ thì f có GTLN, GTNN trên D.*

1.3.3 Phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

Để tìm GTLN, GTNN của hàm $f(x, y)$ trên miền D ta thực hiện các bước sau:

1. Tìm cực trị tự do trong D (loại những điểm không thuộc miền trong của D). Tính giá trị của hàm $f(x, y)$ tại những điểm này.

2. Tìm cực trị có điều kiện của hàm $f(x, y)$ trên biên của miền D. Tính giá trị của hàm $f(x, y)$ tại những điểm cực trị này.

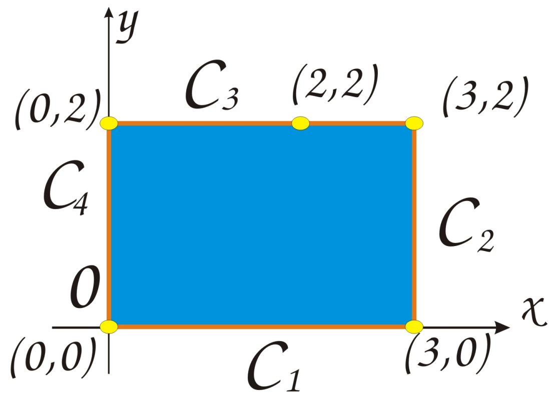
3. So sánh giá trị của hàm f tại những điểm cực trị tự do và cực trị có điều kiện để xác định GTLN, GTNN.

***Ví dụ* 1.3.2.** Tìm GTLN, GTNN của hàm $z = f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên miền $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Giải. Tìm điểm dừng bên trong miền D

$$\begin{cases} f'_x &= 2x - 2y = 0 \\ f'_y &= -2x + 2 = 0 \end{cases}$$

Điểm $P_1(1,1)$ nằm bên trong miền D và $f(P_1) = f(1,1) = 1$.



Hình 1.10: Miền $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Tìm điểm dừng trên biên của D, gồm bốn đoạn thẳng C_1, C_2, C_3, C_4.

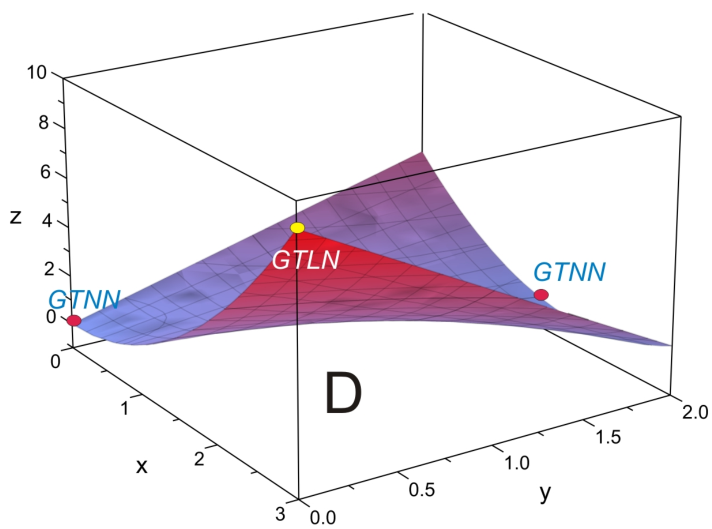
Đường thẳng C_1 có phương trình $y = 0$ nên $g(x) = f(x,0) = x^2, 0 \leqslant x \leqslant 3$. GTLN và GTNN của $g(x)$ trên $[0,3]$ lần lượt là $g(3) = f(3,0) = 9$, $g(0) = f(0,0) = 0$.

Đường thẳng C_2 có phương trình $x = 3$ nên $h(y) = f(3,y) = 9 - 4y, 0 \leqslant y \leqslant 2$. GTLN và GTNN của $h(y)$ trên $[0,2]$ lần lượt là $h(2) = f(3,2) = 1$, $h(0) = f(3,0) = 9$.

Đường thẳng C_3 có phương trình $y = 2$ nên $k(x) = f(x,2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2, 0 \leqslant x \leqslant 3$. GTLN và GTNN của $k(x)$ trên $[0,3]$ lần lượt là $k(2) = f(2,2) = 0$, $k(0) = f(0,2) = 4$.

Đường thẳng C_4 có phương trình $x = 0$ nên $\ell(y) = f(0,y) = 2y, 0 \leqslant y \leqslant 2$. GTLN và GTNN của $\ell(y)$ trên $[0,2]$ lần lượt là $\ell(0) = f(0,0) = 0$, $\ell(2) = f(0,2) = 4$.

So sánh tất cả những giá trị $f(1,1), f(0,0), f(3,0), f(3,2), f(0,2), f(2,2)$ ta được GTLN của f trên D là $f(3,0) = 9$, GTNN của f trên D là $f(0,0) = f(2,2) = 0$.



Hình 1.11: GTLN, GTNN của hàm $z = f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên miền D.

***Ví dụ* 1.3.3.** Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = x^2+y^2-12x+16y$ trên miền $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 25\}$

Giải. Tìm điểm dừng bên trong miền D

$$\begin{cases} f'_x &= 2x-12=0 \\ f'_y &= 2y+16=0 \end{cases}$$

Điểm $P_1(6,-8)$ không nằm bên trong miền D.

Tìm điểm dừng trên biên của D, có nghĩa là cực trị có điều kiện $x^2+y^2=25$

$$\begin{cases} L'_x(x,y) &= 2x-12-2\lambda x=0 \\ L'_y(x,y) &= 2y+16-2\lambda y=0 \\ \varphi(x,y) &= x^2+y^2=25 \end{cases}$$

Ta có 2 điểm dừng là $P_2(3,-4)$ và $P_3(-3,4)$ và $f(3,-4)=-75$, $f(-3,4)=125$. Vậy GTLN là 125 và GTNN là -75.

1.4 Bài tập

1.4.1 Cực trị tự do

Bài tập 1.4.1. Tìm cực trị tự do của hàm hai biến

1. $f(x,y) = (x-1)^2+2y^2$
2. $f(x,y) = (x-1)^2-2y^2$
3. $f(x,y) = x^2+y^2+xy+x-y+1$
4. $f(x,y) = 2x^3+xy^2+5x^2+y^2$
5. $f(x,y) = x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$
6. $f(x,y) = x^2+3xy-8\ln x-6\ln y$
7. $f(x,y) = x^2+y^2-32\ln xy$
8. $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$
9. $f(x,y) = x^3+8y^3-6xy+5$
10. $f(x,y) = 3x^3+y^3-3y^2-x+1$
11. $f(x,y) = 3x^2y+y^3-18x-30y$
12. $f(x,y) = 2x^4+y^4-x^2-2y^2$
13. $f(x,y) = x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$
14. $f(x,y) = 4-\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$.
15. $f(x,y) = x^2+y^2-2xy+2x-2y$
16. $f(x,y) = \dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$ trong miền $x>0, y>0$.
17. $f(x,y) = x^2+xy+y^2-3x-6y$

18. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

19. $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

20. $f(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}$

21. $f(x,y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$

22. $f(x,y) = (x + y^2)e^{\frac{x}{2}}$

23. $f(x,y) = (x^2 + y^2)(e^{-x^2-y^2} - 1)$

24. $f(x,y) = 3x^2 - x^3 + 2y^2 + 4y$

25. $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

26. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

1.4.2 Cực trị có điều kiện

Bài tập 1.4.2. Tìm cực trị có điều kiện

1. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^2y$ với điều kiện $x^2 + 2y^2 = 6$.
2. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 6 - 5x - 4y$ với điều kiện $x^2 - y^2 = 9$.
3. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 1 - 4x - 8y$ với điều kiện $x^2 - 8y^2 = 8$.
4. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ với điều kiện $x^2 + 2y^2 = 1$.
5. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + y^2$ với điều kiện $x^2 + 4y^2 = 25$.
6. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

1.4.3 Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Bài tập 1.4.3.

1. Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = 1 + 4x - 5y$ trên miền D là tam giác với các đỉnh $(0,0), (2,0), (0,3)$.
2. Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = 3 + xy - x - 2y$ trên miền D là tam giác với các đỉnh $(1,0), (5,0), (1,4)$.
3. Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ trên miền $D = \{(x,y) : |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$.
4. Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$ trên miền $D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$.
5. Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = (x-6)^2 + (y+8)^2$ trên miền $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 25\}$.
6. Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = x^2 - y^2$ trên miền $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 25\}$.
7. Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{1-x^2-y^2}$ trên miền $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.
8. Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = x^3 + y^3$ trên miền $D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 2\}$.
9. Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = x^2 + y^2$ trên miền $D = \{(x,y) : (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 5, 2x + y \geqslant 4\}$.
10. Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ trên miền $D = \{(x,y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 3\}$.

Lời giải bài tập chương 4

1.4.1 1. $P(1,0)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = 0$

2. $P(1,0)$ là điểm dừng nhưng không phải là cực tiểu.

3. $P(-1,1)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = 0$

4. $P_1(0,0)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = 0$, $P_2(-1,-2), P_3(-1,2)$ không là điểm cực trị, $P_4\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ là cực đại, $f_{\text{CĐ}} = \frac{125}{27}$

5. $P(1,2)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = 7 - 10\ln 2$

6. $P(1,2)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = 7 - 6\ln 2$

7. $P_1(-4,-4)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = 32 - 128\ln 2$, $P_2(4,4)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = 32 - 128\ln 2$

8. $P_1(1,1)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = -1$, $P_2(0,0)$ không là điểm cực trị.

9. $P_1\left(1, \frac{1}{2}\right)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = 4$, $P_2(0,0)$ không là điểm cực trị.

10. $P_1\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = -\frac{29}{9}$, $P_2\left(-\frac{1}{3}, 2\right), P_3\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ không là điểm cực trị, $P_4\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ là cực đại, $f_{\text{CĐ}} = \frac{11}{9}$

11. $P_1(1,3)$ là cực tiểu, $f_{\text{CT}} = -72$, $P_2(-3,-1), P_3(3,1)$ không là điểm cực trị, $P_4(-1,-3)$ là cực đại, $f_{\text{CĐ}} = 72$

12. $P_1\left(-\frac{1}{2}, -1\right), P_2\left(-\frac{1}{2}, 1\right), P_3\left(\frac{1}{2}, -1\right), P_4\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, là các điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu $f_{\text{CT}} = -\frac{9}{8}$, $P_5\left(\frac{1}{2}, 0\right), P_6\left(-\frac{1}{2}, 0\right), P_7(0,1), P_8(0,-1)$ không là điểm cực trị, $P_9(0,0)$ là cực đại, $f_{\text{CĐ}} = 0$

1.4.2 Câu 2.

1.4.3 Câu 2.