ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Email: ntcvantud@gmail.com

Tp. Hồ Chí Minh - 2019.

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ (TT)

- Hàm vô cùng bé và vô cùng lớn
- Hàm số liên tục

HÀM VÔ CÙNG BÉ-VÔ CÙNG LỚN

VÔ CÙNG LỚN - VÔ CÙNG BÉ

ĐỊNH NGHĨA

ĐỊNH NGHĨA 1.1

Hàm $f(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB-infinitely small) nếu giá trị của $f(x)$ rất bé khi $x \to a$

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

ĐỊNH NGHĨA 1.2

Hàm $f(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL-infinitely large) nếu giá trị của $|f(x)|$ rất lớn khi $x \to a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Ví dụ

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$
2. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$
3. $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$
4. $\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$
5. $\lim_{x\to 1}\ln x=0$

TÍNH CHẤT CỦA VCB

Tính chất của VCB

1. Tổng của các VCB là VCB.
2. Hiệu của các VCB là VCB.
3. Tích của các VCB là VCB.
4. $c \neq 0$, $f(x)$ là VCB thì $c.f(x)$ cũng là VCB.

SO SÁNH BẬC CỦA CÁC VÔ CÙNG BÉ

So sánh bậc của các VCB

$f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to a$. Đặt

$$K = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $K = 0$: $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$.
   Kí hiệu: $f(x) = O(g(x))$
2. $K \neq 0; \infty$: $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB đồng bậc.
3. $K = 1$: $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB tương đương.

So sánh các bậc của các VCB sau đây

1. $f(x) = 1 - \cos x, g(x) = \sin^2 x$, khi $x \to 0$
2. $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{x^2}$, khi $x \to \infty$

So sánh các bậc của các VCB sau đây

1. $f(x) = 1 - \cos x, g(x) = \sin^2 x$, khi $x \to 0$
2. $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{x^2}$, khi $x \to \infty$

ĐỊNH NGHĨA 1.3

Hai hàm vô cùng bé được gọi là tương đương nếu $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ *khi* $x \to a$

So sánh các bậc của các VCB sau đây

1. $f(x) = 1 - \cos x, g(x) = \sin^2 x$, khi $x \to 0$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, khi $x \to \infty$

ĐỊNH NGHĨA 1.3

Hai hàm vô cùng bé được gọi là tương đương nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ *khi* $x \to a$

CÁC VCB TƯƠNG ĐƯƠNG CƠ BẢN

Các VCB tương đương cơ bản khi $x \to 0$

1. $\sin x \sim x$
2. $\tan x \sim x$
3. $\arcsin x \sim x$
4. $\arctan x \sim x$
5. $e^x - 1 \sim x$
6. $\ln(1+x) \sim x$
7. $(1+x)^n - 1 \sim nx$
8. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

CÁC NGUYÊN TẮC THAY TƯƠNG ĐƯƠNG VCB

1. Trường hợp cho Tích, Thương

Cho các VCB tương đương $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ khi $x \to a$, ta có

1. $f(x).g(x) \sim f_1(x).g_1(x)$
2. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \sim \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Đặc biệt $g(x) \sim g_1(x)$ khi $x \to a$,
$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$
Lúc đó $f(x).g(x) \sim L.g(x) \sim L.g_1(x)$

2. Trường hợp với tổng nhiều VCB

Giả sử $a \neq 0, b \neq 0, \alpha, \beta$ là các hằng số thực sao cho khi $x \to a$ thì $f_1(x), f_2(x)$ là VCB tức là $f_1(x) \sim ax^\alpha, f_2(x) \sim bx^\beta$

$$f_1(x) + f_2(x) \sim \left[\begin{array}{ll} ax^\alpha, & \alpha < \beta\ (\alpha \neq \beta) \\ (a+b)x^\alpha, & \alpha = \beta\ \&\ a+b \neq 0 \\ \text{KHÔNG THAY ĐƯỢC}, & \alpha = \beta\ \&\ a+b = 0 \end{array}\right.$$

Các nhận định sau đúng hay sai khi $(x \to 0)$

1. $e^{\tan x} - 1 \sim e^x - 1 \sim x$
2. $e^{\tan x} - 1 \sim \tan x \sim x$
3. $\sin^2 x \sim x^2$
4. $\sin^{-2} x \sim x^{-2}$
5. $\ln(1 + \sin x) \sim \sin x \sim x$
6. $\ln(1 + \sin x) \sim \ln(1 + x) \sim x$

Lưu ý

1. Không chuyển vế trong tương đương cơ bản.
2. Không thay tương đương qua hàm số ngoại trừ hàm lũy thừa dương(chỉ thay tương đương cho VCB, VCL.)
3. Tính triệt tiêu trong tương đương tổng hiệu chỉ xét cho từng cặp hàm

Tìm các VCB tương đương của các hàm sau khi $x \to 0$

1. $f(x) = 2x - x^2$
2. $f(x) = x \sin \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Tìm a, α để VCB sau tương đương ax^α, khi $x \to 0$

1. $f(x) = x^2 + x - \ln(1 + x)$
2. $f(x) = \tan[(x^2 + 1) \sin x]$

Tính các giới hạn bằng cách thay VCB tương đ

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^{x^2}-1)+2x^3-\ln(x+1)}{\arctan(x^3)+1-\cos(2x)}$$
2. $$\lim_{x\to +\infty} x^2\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-\cos\frac{1}{x}}{\arctan x}\right)$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$

Tính các giới hạn bằng cách thay VCB tương đ

1. $$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln[\cos(\pi 2^x)]}$$
2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{\ln(\cos x + \sin x)}$$

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - 2\sin x}{\ln(1 + e^{\arctan x^2} - \cos x)(\sqrt{x+3} - \sqrt{3})}$$

2. $$\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{\cot^3 x}$$

TÍNH CHẤT CỦA VCL

Các tính chất của VCL

1. Tích các VCL là VCL
2. $c \neq 0$, $f(x)$ là VCL thì $c.f(x)$ cũng là VCL.
3. $f(x)$ là hàm bị chặn, $g(x)$ là VCL thì $f(x) + g(x)$ là VCL khi $x \to a$

SO SÁNH BẬC CỦA CÁC VÔ CÙNG LỚN

So sánh bậc của các VCL

$f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \to a$. Đặt

$$K = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $K = +\infty$: $f(x)$ là VCL bậc cao hơn $g(x)$. Kí hiệu: $f(x) = O(g(x))$
2. $K \neq 0; \infty$: $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL đồng bậc.
3. $K = 1$: $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL tương đương.

CÁC NGUYÊN TẮC THAY TƯƠNG ĐƯƠNG VCL

1. Chỉ được thay cho dạng Tích

Cho các VCL tương đương $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ khi $x \to a$, ta có

$$f(x).g(x) \sim f_1(x).g_1(x)$$

Đặc biệt $g(x) \sim g_1(x)$ khi $x \to a$, $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$

Lúc đó $f(x).g(x) \sim L.g(x) \sim L.g_1(x)$

2. Quy tắc ngắt bỏ VCL

$$\lim_{x\to a}\frac{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}=\lim_{x\to a}\frac{\text{VCL bậc cao nhất của tử}}{\text{VCL bậc cao nhất của mẫu}}$$

1. Khi $x \to +\infty, m, n > 0$ thì
   x^m là VCL bậc cao hơn x^n
2. Khi $x \to +\infty, p, \alpha > 0, a > 1$ thì
   $\ln^p x \ll x^\alpha \ll a^x$

Tìm các VCL tương đương của các hàm sau khi $x \to \infty$

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$
2. $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x+3}$
3. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Tính $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^{10} - 2x^5 + 2} - 2x^3 + 4}{\sqrt{x^5 + 2x^3 - x} + x^2 + 3x^3 - 2x^4}$

Tìm a, α để VCL sau tương đương ax^α

Khi $x \to \infty$

1. $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^3 + x}} - \sqrt[3]{x}$
2. $f(x) = x - \sin x$
3. $f(x) = \ln(e^x - 1)$

Tìm α để $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ với

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{8n^3 + n + 1} - \sqrt[5]{n^4 - 3n^2 + n - 2}}{n^{\alpha+2}}$$

HÀM LIÊN TỤC

ĐỊNH NGHĨA 2.1

Hàm $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x = a$ thuộc MXĐ của hàm nếu $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (Đồ thị $y = f(x)$ không bị ngắt tại $x = a$). Ngược lại, f được gọi là gián đoạn tại $x = a$

ĐỊNH NGHĨA 2.2

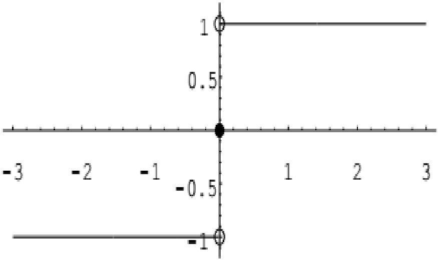
f được gọi là liên tục trái tại x = a nếu
$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
f được gọi là liên tục trái tại x = a nếu
$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
f liên tục tại x = a ⇔ f liên tục phải và trái tại x = a.

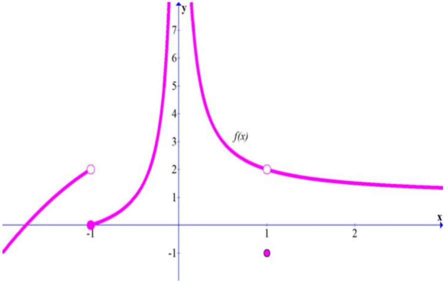
Một công ty tính phí 7.5đ/lít cho một loại sơn cho tất cả các đơn đặt hàng 50 lít trở xuống và 6.75 đ/lít cho các đơn hàng trên 50 lít. Đặt $P(x)$ đại diện cho chi phí mua x lít sơn. Tìm chi phí mua

1. 40l, 50l, 60l.
2. P không liên tục tại đâu?

Ví dụ: Xét xem f liên tục tại 0 hay không?

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$





Hãy nêu các loại hàm không liên tục tiêu biểu và các loại hàm liên tục tiêu biểu.

1. Tổng, hiệu, tích , thương (mẫu số khác 0 tại a), hợp các hàm liên tục là liên tục.
2. Các hàm sơ cấp liên tục trên miền xác định.

Ví dụ

Tìm giá trị a để hàm số sau liên tục tại $x=-2$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x, & x\le -2 \\ \sinh(x+2)-ax, & x>-2 \end{cases}$$

Bài tập về nhà

Tìm tất cả giá trị a, b, d để các hàm số sau liên tục

1. $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \leq 2 \\ bx\ln x, & x > 2 \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} e^{2x+d}, & x \geq 0 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b, & |x| \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$