Mục lục

Chương 1

CHUỖI

1.1 Khái niệm chuỗi số

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. Biểu thức có dạng

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

với a_i là số thực, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ được gọi là chuỗi số thực. Ký hiệu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Chú ý. Thường thì những phần tử của chuỗi được đánh số từ 0. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, chúng ta thường đánh số những phần tử của chuỗi từ 1 vì tại $n = 0$ phần tử tổng quát a_n không có nghĩa. Khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Nói chung những phần tử của chuỗi có thể được đánh số từ một số bất kỳ $n_0 \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n + \ldots.$$

cũng được gọi là chuỗi.

Định nghĩa 1.2. Với mọi $n \in \mathbb{N}$ tổng $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi số thực $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Định nghĩa 1.3. Chuỗi số thực $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ, nếu tồn tại **giới hạn hữu hạn** S của dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Khi đó, S được gọi là tổng của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S, S \neq \infty.$$

***Ví dụ* 1.1.1.** Xét chuỗi số

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Tổng riêng thứ n là

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Cho $n \to \infty$ thì giới hạn của tổng riêng S_n là

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ và có tổng bằng 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots = 2.$$

Định nghĩa 1.4. Chuỗi số thực $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là phân kỳ, nếu dãy những tổng riêng $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ không có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$, có nghĩa là giới hạn này không tồn tại hoặc bằng vô cùng.

***Ví dụ* 1.1.2.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n, q \in \mathbb{R}$. Nếu chuỗi hội tụ hãy tính tổng của nó.

Tổng riêng thứ n của chuỗi đã cho là

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{q(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}$$

1. Khi $|q| \neq 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q(1-q^n)}{1-q} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{q}{1-q} - \dfrac{q^{n+1}}{1-q}\right) = \begin{cases} \dfrac{q}{1-q}, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1 \end{cases}$

2. Khi $q = 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

3. Khi $q = -1$ thì chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$.

   Đối với chuỗi này các tổng riêng $S_1 = -1, S_2 = -1 + 1 = 0, S_3 = -1 + 1 - 1 = -1, S_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0, \ldots, S_{2k+1} = -1, S_{2k} = 0, \forall k = 1, 2, \ldots$. Như vậy, tồn tại hai dãy con $\{S_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ của dãy $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ có **giới hạn khác nhau**

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = -1, \quad \lim_{k\to\infty} S_{2k} = 0.$$

   Do đó, giới hạn của dãy những tổng riêng $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ khi $n \to \infty$ **không tồn tại**, có nghĩa là chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ phân kỳ.

Tóm lại chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n, q \in \mathbb{R}$ hội tụ khi $|q| < 1$ và phân kỳ khi $|q| \geqslant 1$.

Khi $|q| < 1$ thì tổng của chuỗi đã cho là

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

***Ví dụ* 1.1.3.** Tìm tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

Dãy các tổng riêng của chuỗi đã cho là $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ với

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Nhận xét thấy

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Do đó

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Từ đó ta có

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Vậy tổng của chuỗi đã cho là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

1.1.2 Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Định lý 1.1. *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *hội tụ thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Chứng minh. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ thì tồn tại giới hạn của dãy các tổng riêng của chuỗi này, có nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Khi đó theo tính chất của giới hạn của dãy hội tụ, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Chú ý. Điều kiện $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ **không phải là điều kiện đủ** để chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ.

***Ví dụ* 1.1.4.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Đối với chuỗi này, **điều kiện cần thỏa mãn**: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Tuy nhiên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

Tổng riêng của chuỗi là

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant n.\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}$$

Theo tính chất của giới hạn, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \geqslant \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

Chú ý. Nếu điều kiện cần để chuỗi hội tụ **không thỏa mãn** thì chuỗi sẽ phân kỳ.

Hệ quả 1.1. *Nếu a_n **không có giới hạn** hoặc **có giới hạn khác** 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ.*

***Ví dụ* 1.1.5.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^5 \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{3n+2}$.

$$a_n = n^5 \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{3n+2} = n^5.\left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}.\frac{2(3n+2)}{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ theo điều kiện cần.

1.1.3 Tính chất của chuỗi hội tụ

1^0 Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n, (n_0 > 1)$ hội tụ. Khi đó

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

2^0 Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ và có tổng là S thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha.a_n (\alpha \in \mathbb{R})$ cũng hội tụ và có tổng là $\alpha.S$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha.a_n = \alpha.\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

3^0 Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là S_1, S_2 thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ cũng hội tụ và có tổng là $S_1 + S_2$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

1.2 Chuỗi không âm

1.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.5. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ được gọi là chuỗi không âm nếu như $a_n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$.

Chú ý.

1. Đối với **chuỗi không dương**, chúng ta có thể chuyển về chuỗi không âm và khảo sát sự hội tụ của chúng.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n) = -\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \ (a_n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}).$$

2. Dãy các tổng riêng của chuỗi không âm $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ không giảm, vì $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$. Khi đó theo định lý Weierstrass, dãy $\{S_n\}$ có giới hạn hữu hạn (chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ **hội tụ**) khi và chỉ khi dãy

$\{S_n\}$ **bị chặn trên**, có nghĩa là tồn tại $M > 0$ sao cho $S_n \leqslant M, n \in \mathbb{N}$. Do đó, đối với chuỗi không âm hội tụ, ta ký hiệu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

3. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ **phân kỳ** khi và chỉ khi dãy $\{S_n\}$ **không bị chặn trên**, có nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Khi đó, đối với chuỗi không âm hội tụ, ta ký hiệu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$

1.2.2 Dấu hiệu hội tụ tích phân Cauchy

Định lý 1.2. *Cho $f(x)$ là **hàm liên tục, không âm, đơn điệu giảm** trên khoảng $[1, +\infty)$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ và tích phân suy rộng loại một $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ **cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ**.*

***Ví dụ* 1.2.1.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$

Vì những hàm $x, \ln x, \ln^2 x$ liên tục, không âm, đơn điệu tăng trên khoảng $[2, \infty)$ nên hàm $\dfrac{1}{x\ln x}, \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ **liên tục, không âm, đơn điệu giảm** trên khoảng $[2, \infty)$.

Mặt khác,

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \int\limits_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = [\ln\ln x]_2^{\infty} = +\infty$$

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int\limits_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

Ta có tích phân $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x\ln x}$ phân kỳ nên chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$, còn tích phân $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$ hội tụ nên chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ hội tụ.

1.2.3 Một số chuỗi không âm cơ bản

Từ định nghĩa của chuỗi và dấu hiệu tích phân, ta thu được **một số chuỗi không âm cơ bản:**

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ hội tụ nếu $|q| < 1$ và phân kỳ nếu $|q| \geqslant 1$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $\alpha \leqslant 1$.

3. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ hội tụ nếu $\alpha > 1$ hoặc nếu $\alpha = 1, \beta > 1$ và phân kỳ nếu $\alpha < 1$ hoặc nếu $\alpha = 1, \beta \leqslant 1$.

1.2.4 Tiêu chuẩn so sánh 1

Định lý 1.3. *Hai chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *thỏa điều kiện*

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n, \forall n \geqslant n_0$$

1. *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *hội tụ.*

2. *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *phân kỳ.*

***Ví dụ* 1.2.2.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5+(-1)^n.3}{2^{n+3}}$.

$0 \leqslant a_n = \dfrac{5+(-1)^n.3}{2^{n+3}} \leqslant \dfrac{8}{2^{n+3}} = \dfrac{1}{2^n} = b_n,\ \forall n \geqslant 1.$

Mặt khác, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1/2}{1-1/2} = 1$ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ. Vậy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ.

1.2.5 Tiêu chuẩn so sánh 2

Định lý 1.4. *Cho* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *là hai chuỗi không âm. Tính* $K = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

1. $K = 0$. *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *hội tụ.*

2. K *hữu hạn. Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

3. $K = +\infty$. *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *hội tụ.*

***Ví dụ* 1.2.3.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^n+n^3}{2^n+\ln^3 n}$.

Ta có $a_n = \dfrac{e^n+n^3}{2^n+\ln^3 n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{2^n} = \left(\dfrac{e}{2}\right)^n = b_n$. Mặt khác $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ phân kỳ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ.

***Ví dụ* 1.2.4.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(1+\sin\frac{1}{n})}{n+\ln^2 n}$.

Ta có $a_n = \dfrac{\ln(1+\sin\frac{1}{n})}{n+\ln^2 n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2} = b_n$. Mặt khác $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ.

***Ví dụ* 1.2.5.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n^3}(\cosh\frac{\pi}{n}-1)$.

Ta có $a_n = \sqrt{n^3}(\cosh\frac{\pi}{n}-1) \overset{n\to\infty}{\sim} n^{3/2}.\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2 \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{n^{1/2}} = b_n$. Mặt khác $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ phân kỳ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ.

1.2.6 Tiêu chuẩn D' Alembert

Định lý 1.5. *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*, thỏa điều kiện* $a_n > 0, n \geqslant n_0$*.* $D = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$*,* D *có thể là giới hạn hữu hạn hoặc vô cùng.*

1. $D < 1$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *hội tụ.*

2. $D > 1$ *hoặc* $D = +\infty$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *phân kỳ.*

3. $D = 1$ *chưa kết luận được, chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kỳ.*

Chú ý. Trường hợp $D = 1$ ta chưa kết luận được chuỗi hội tụ hay phân kỳ. Ví dụ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ có $D = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ phân kỳ. Tuy nhiên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ có $D = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ nhưng hội tụ.

***Ví dụ* 1.2.6.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n.n!}{n^n}$.

Ta có $a_n = \dfrac{3^n.n!}{n^n}$. Xét $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\dfrac{n^n}{3^n.n!} = 3.\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{3}{e} > 1$. Vậy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ theo D'Alembert.

***Ví dụ* 1.2.7.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2.5.8\ldots(3n-1)}{1.6.11\ldots(5n-4)}$.

Ta có $a_n = \dfrac{2.5.8\ldots(3n-1)}{1.6.11\ldots(5n-4)}$. Xét $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2.5.8\ldots(3n-1)(3n+2)}{1.6.11\ldots(5n-4)(5n+1)}.\dfrac{1.6.11\ldots(5n-4)}{2.5.8\ldots(3n-1)} = \dfrac{3n+2}{5n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{3}{5} < 1$. Vậy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ theo D'Alembert.

Chú ý. Từ những ví dụ trên, ta thấy dấu hiệu D'Alembert có thể áp dụng hiệu quả để khảo sát chuỗi có phần tử a_n ở dạng phân số, có tử số và mẫu số là tích của n phần tử đầu tiên của một dãy số nào đó.

1.2.7 Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 1.6. *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*, thỏa điều kiện* $a_n > 0, n \geqslant n_0$*.* $C = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$*,* C *có thể là giới hạn hữu hạn hoặc vô cùng.*

1. $C < 1$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *hội tụ.*

2. $C > 1$ *hoặc* $C = +\infty$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *phân kỳ.*

3. $C = 1$ *chưa kết luận được, chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kỳ.*

***Ví dụ* 1.2.8.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^5\left(\dfrac{3n+2}{4n+3}\right)^n$.

Ta có $a_n = n^5\left(\dfrac{3n+2}{4n+3}\right)^n$. Xét $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^5}.\dfrac{3n+2}{4n+3} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{3}{4} < 1$.

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ theo Cauchy.

Chú ý. Từ những ví dụ trên, ta thấy dấu hiệu Cauchy có thể áp dụng hiệu quả để khảo sát chuỗi có phần tử a_n ở dạng tích, có chứa biểu thức mũ n.

1.3 Chuỗi có dấu tùy ý

Khác với chuỗi không âm, chuỗi không dương, chuỗi mà những phần tử của nó có dấu khác nhau, được gọi là chuỗi có dấu thay đổi

1.3.1 Sự hội tụ tuyệt đối

Định nghĩa 1.6. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối, nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ.

Định lý 1.7. *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *cũng hội tụ.*

Chú ý. Theo định lý này, khi khảo sát sự hội tụ của chuỗi ta sẽ bắt đầu từ việc khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của nó. Vì sự hội tụ tuyệt đối là sự hội tụ của chuỗi không âm nên mọi dấu hiệu hội tụ đối với chuỗi không âm ta có thể áp dụng được đối với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Tuy nhiên, theo định lý này, điều ngược lại chưa chắc đúng, có nghĩa là nếu chuỗi **không hội tụ tuyệt đối** (chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ phân kỳ) thì **không thể kết luận được** chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ

Định nghĩa 1.7. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ được gọi là hội tụ có điều kiện, nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ, còn chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ phân kỳ.

***Ví dụ* 1.3.1.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\arctan(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$.

Ta có $a_n = \dfrac{\arctan(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$. Xét $|a_n| = \dfrac{|\arctan(-n)^n|}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}} \leqslant \dfrac{\pi/2}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi/2}{\sqrt[4]{2}n^{6/4}} = b_n$. Mặt khác, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ. Từ đó suy ra $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối nên chuỗi đã cho hội tụ.

1.3.2 Chuỗi đan dấu. Tiêu chuẩn Leibnitz

Định nghĩa 1.8. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, $(a_n \geqslant 0, \forall n$ hoặc $a_n \leqslant 0, \forall n)$ được gọi là chuỗi đan dấu.

Định lý 1.8. *Tiêu chuẩn Leibnitz*

Cho chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ *thỏa điều kiện*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

2. *Dãy* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *là dãy giảm.*

Khi đó chuỗi đan dấu đã cho hội tụ.

***Ví dụ* 1.3.2.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Ta có $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} < 0, \forall x > e^2$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
2. Dãy $(a_n)_{n=8}^{+\infty}$ là dãy giảm.

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

1.4 Sơ đồ khảo sát sự hội tụ của chuỗi

Để khảo sát sự hội tụ của chuỗi số, ta thực hiện sơ đồ sau:

Bước 1. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi.

1. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ hội tụ.
2. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ phân kỳ do không thỏa mãn điều kiện cần ($\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$) thì $\lim\limits_{n\to\infty}a_n \neq 0$. Do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ phân kỳ.
3. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ phân kỳ, nhưng thỏa mãn điều kiện cần ($\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$) thì ta sẽ chuyển sang bước 2.

Bước 2. Khảo sát sự hội tụ có điều kiện. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ là chuỗi đan dấu thì ta áp dụng tiêu chuẩn Leibnitz.

Bước 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi không âm bằng cách áp dụng các tiêu chuẩn tích phân, so sánh, D'Alambert, Cauchy.

***Ví dụ* 1.4.1.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

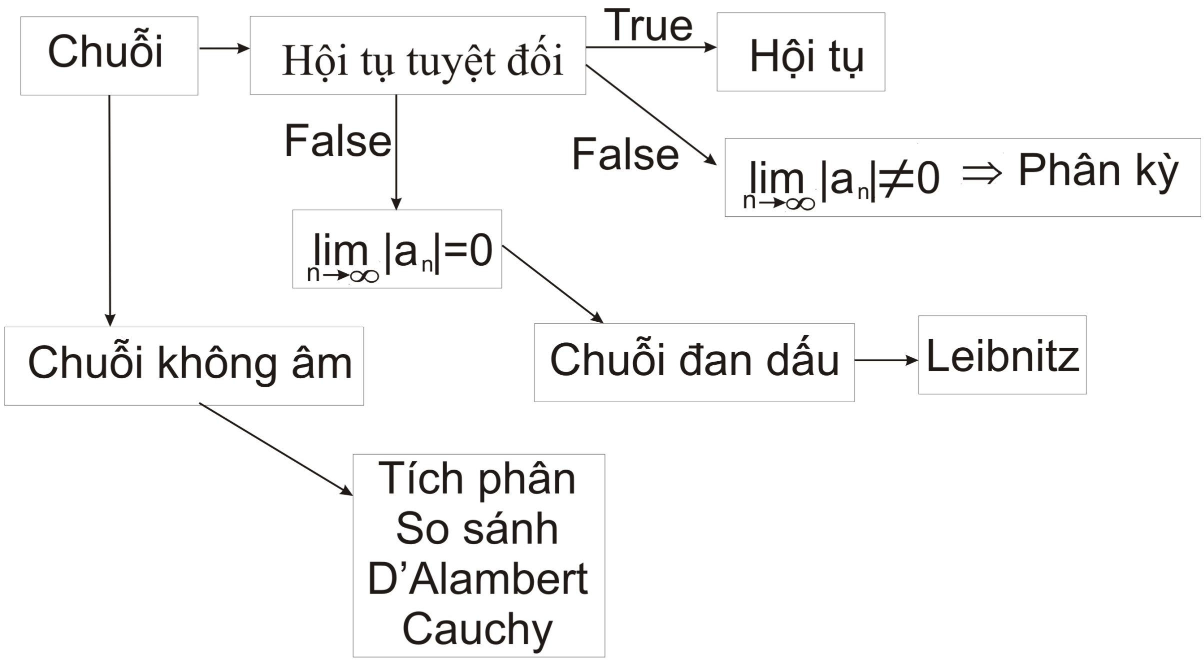
Đầu tiên, chúng ta sẽ khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$$

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ. Do đó, chuỗi đã cho $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ **không hội tụ tuyệt đối**. Nhưng $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, có nghĩa là điều kiện cần để chuỗi hội tụ thỏa mãn.

Chuỗi đã cho có dạng $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$, với $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Do đó, chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu có

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy giảm
2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$.



Hình 1.1: Sơ đồ khảo sát sự hội tụ của chuỗi

Theo tiêu chuẩn Leibnitz chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ **hội tụ**. Như vậy, chuỗi đã cho $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ hội tụ có điều kiện.

***Ví dụ* 1.4.2.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

Đầu tiên, chúng ta sẽ khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\left(-\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ **phân kỳ** do không thỏa mãn điều kiện cần để chuỗi hội tụ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(-\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1).\frac{-n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Như vậy, chuỗi đã cho $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ **phân kỳ**.

***Ví dụ* 1.4.3.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{3}{2n+1}\right)^n$

Đầu tiên, chúng ta sẽ khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\left(-\frac{3}{2n+1}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2n+1}\right)^n.$$

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3}{2n+1}\right)^n$ **hội tụ** theo tiêu chuẩn Cauchy vì

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2n+1}\right) = 0 < 1.$$

Như vậy, chuỗi đã cho $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{3}{2n+1}\right)^n$ **hội tụ tuyệt đối** nên **hội tụ**.

1.5 Chuỗi lũy thừa

1.5.1 Miền hội tụ

Định nghĩa 1.9. Chuỗi lũy thừa là chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.10. Tập hợp tất cả những giá trị x sao cho khi thay x vào chuỗi lũy thừa thì ta sẽ được 1 chuỗi số hội tụ, được gọi là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.

1.5.2 Bán kính hội tụ

Định lý 1.9. *Cho chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$. *Khi đó tồn tại duy nhất số* $R \in [0, +\infty)$ *được gọi là bán kính hội tụ thỏa*

- *Chuỗi hội tụ* $\forall x, |x-x_0| < R$
- *Chuỗi phân kỳ* $\forall x, |x-x_0| > R$

1.5.3 Dấu hiệu D' Alembert

Định lý 1.10. *Cho chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$. *Giả sử* $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0 : a_n \neq 0$ *và*

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Khi đó bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho}$

1.5.4 Dấu hiệu Cauchy

Định lý 1.11. *Cho chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$. *Giả sử*

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Khi đó bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho}$

Ví dụ 1.5.1. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{2n+1}$.

Ta có $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1} \Rightarrow \rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2n+3} = 1$. Bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho} = 1$.

- Tại $x = 1$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ hội tụ theo Leibnitz vì dãy $\dfrac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ và là dãy giảm.
- Tại $x = -1$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+1}$ phân kỳ vì $\dfrac{1}{2n+1} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2n}$ phân kỳ.

Vậy bán kính hội tụ là $R = 1$, và miền hội tụ là $(-1, 1]$.

***Ví dụ* 1.5.2.** Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5^n + (-2)^n}{n+1} x^n$.

Ta có $a_n = \dfrac{5^n + (-2)^n}{n+1} \Rightarrow \rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+2} . \dfrac{n+1}{5^n + (-2)^n} = 5$.
Bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{5}$.

- Tại $x = \dfrac{1}{5}$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5^n + (-2)^n}{n+1} . \dfrac{1}{5^n}$ phân kỳ vì $\dfrac{5^n + (-2)^n}{n+1} . \dfrac{1}{5^n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ.
- Tại $x = -\dfrac{1}{5}$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5^n + (-2)^n}{n+1} . \dfrac{(-1)^n}{5^n}$ hội tụ theo Leibnitz vì dãy $\dfrac{5^n + (-2)^n}{n+1} . \dfrac{1}{5^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ và là dãy giảm.

Vậy bán kính là $R = \dfrac{1}{5}$, và miền hội tụ là $\left[-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.

***Ví dụ* 1.5.3.** Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$.

Đặt $X = (x-2)^2 \Rightarrow X \geqslant 0$. Khi đó chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n X^n$.

Ta có $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n \Rightarrow \rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n\right|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho} = 2$.

Tại $X = 2$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n 2^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n$ phân kỳ vì $\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{2n+1}\right)^{(2n+1).\frac{n}{2n+1}} \overset{n\to\infty}{\to} e^{1/2} \neq 0$.

Vậy bán kính là $R = 2$ và miền hội tụ là $0 \leqslant X < 2 \Rightarrow 0 \leqslant (x-2)^2 < 2 \Rightarrow 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$.

1.5.5 Tính chất của chuỗi lũy thừa

1. Tổng của chuỗi lũy thừa là một hàm liên tục trên miền hội tụ của nó.
2. Trong khoảng hôi tụ, đạo hàm của tổng bằng tổng của các đạo hàm
$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n (x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$
3. Trong khoảng hôi tụ, tích phân của tổng bằng tổng của các tích phân
$$\int \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int a_n (x-x_0)^n dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + C$$

1.5.6 Chuỗi Taylor- Maclaurin

Công thức khai triển Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

Khi $x_0 = 0$ ta có công thức khai triển Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

***Ví dụ* 1.5.4.** Tìm khai triển Maclaurin của hàm $f(x) = e^x$ và miền hội tụ của chuỗi Maclaurin thu được.

Vì $f(x) = e^x$ nên $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Do đó chuỗi Maclaurin của hàm $f(x) = e^x$ là

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Với $a_n = \dfrac{1}{n!}$, theo dấu hiệu D'Alambert, ta có

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Do đó bán kính hội tụ của chuỗi Maclaurin của hàm $f(x) = e^x$ là $R = \dfrac{1}{\rho} = \infty$.

Vậy $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ với MHT $\mathbb{R}$.

Phân tích một số hàm cơ bản thành chuỗi Maclaurin:

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ với MHT $\mathbb{R}$.
2. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ với MHT $(-1, 1]$.
3. $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ với MHT $\mathbb{R}$.
4. $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ với MHT $\mathbb{R}$.
5. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))x^n}{n!}$ với MHT $(-1, 1)$.
6. $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ với MHT $(-1, 1)$
7. $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ với MHT $(-1, 1)$
8. $\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ với MHT $\mathbb{R}$.
9. $\cosh(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ với MHT $\mathbb{R}$.
10. $\sinh(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ với MHT $\mathbb{R}$.

1.6 Một số phương pháp tính tổng của chuỗi

1.6.1 Tính trực tiếp giới hạn của dãy các tổng riêng của chuỗi

***Ví dụ* 1.6.1.** Tìm tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Dãy các tổng riêng của chuỗi đã cho là $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ với

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Nhận xét thấy

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Do đó

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Từ đó ta có

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)}\right) = \frac{1}{4}.$$

Vậy tổng của chuỗi đã cho là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{4}.$$

1.6.2 Sử dụng khai triển Taylor-Maclaurin của những hàm cơ bản

***Ví dụ* 1.6.2.** Tính tổng $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 1 + 2 + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^3}{3!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!} + \ldots.$

Xét chuỗi Maclaurin của hàm $f(x) = e^x$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

với MHT $\mathbb{R}$.

Khi $x = 2$ ta có

$$e^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Vậy tổng $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 1 + 2 + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^3}{3!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!} + \ldots = e^2.$

***Ví dụ* 1.6.3.** Tính tổng $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+3}(2n+1)!} = \dfrac{1}{2^3} - \dfrac{1}{2^5.3!} + \dfrac{1}{2^7.5!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+3}(2n+1)!} + \ldots$

Xét chuỗi Maclaurin của hàm $f(x) = \sin x$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

với MHT $\mathbb{R}$.

Chuỗi đã cho có thể viết lại dưới dạng

$$\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^3.3!}+\frac{1}{2^5.5!}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}+\dots\right)$$

Khi $x=\dfrac{1}{2}$ ta có

$$\frac{1}{2^2}.\sin\frac{1}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+3}(2n+1)!}=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5.3!}+\frac{1}{2^7.5!}+\dots+\frac{(-1)^n}{2^{2n+3}(2n+1)!}+\dots.$$

Vậy tổng $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+3}(2n+1)!}=\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{2^5.3!}+\dfrac{1}{2^7.5!}+\dots+\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+3}(2n+1)!}+\dots=\dfrac{1}{4}.\sin\dfrac{1}{2}$.

1.6.3 Sử dụng đạo hàm và tích phân của chuỗi

***Ví dụ* 1.6.4.** Tính tổng $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n.2^n}$.

Xét chuỗi $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}x^n\Rightarrow S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$, với $|x|<1$.

Vậy

$$S(x)=\int\frac{1}{1-x}dx+C=-\ln|1-x|+C.$$

Vì $S(0)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}0^n=0$ nên $S(0)=-\ln|1-0|+C=0\Rightarrow C=0$.

Thay $x=\dfrac{1}{2}$ vào $S(x)=-\ln|1-x|$ ta được $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2$.

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n.2^n}=\ln 2$

***Ví dụ* 1.6.5.** Tính tổng $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{n(n+1).3^n}$.

Với $|x|<1$, xét chuỗi

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n=$$

$$=-\ln|1-x|-\frac{1}{x}\left(-\ln|1-x|-x\right).$$

Thay $x=\dfrac{2}{3}$ ta được $S\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2-\ln 3}{2}$.

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{n(n+1).3^n}=\dfrac{2-\ln 3}{2}$.

***Ví dụ* 1.6.6.** Tính tổng $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n$.

Ta có $a_n=n\Rightarrow\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$. Bán kính hội tụ $R=\dfrac{1}{\rho}=1$.

- Tại $x=1$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n.1^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n$ phân kỳ theo điều kiện cần vì dãy $n\xrightarrow{n\to\infty}\infty\neq 0$.

- Tại $x = -1$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n.(-1)^n$ phân kỳ theo điều kiện cần vì không tồn tại giới hạn của dãy $b_n = n.(-1)^n$. Dãy $b_{2n} = 2n.(-1)^{2n} = 2n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ còn dãy $b_{2n+1} = (2n+1).(-1)^{2n+1} = -(2n+1) \xrightarrow{n\to+\infty} -\infty$.

Vậy bán kính hội tụ là $R = 1$, và miền hội tụ là $(-1, 1)$.

Với $|x| < 1$, xét chuỗi

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Lấy đạo hàm hai vế của chuỗi này, ta được

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Nhân 2 vế của chuỗi thu được cho x ta được

$$x.S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

1.7 Bài tập

1.7.1 Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Bài tập 1.7.1. Dùng điều kiện cần để khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{3n+2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n.\dfrac{2n+1}{n+2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\dfrac{n+1}{2n+3}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^2}}$.

1.7.2 Chuỗi không âm

Bài tập 1.7.2. Sử dụng chuỗi cơ bản để khảo sát sự hội tụ của chuỗi

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n + 5^n}{10^n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n + n^2}{n.2^n}$.

Bài tập 1.7.3. Dùng tiêu chuẩn so sánh 1 để khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n(n+1)}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3(2+\sin\sqrt{n})}{3^n + n^2}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n^3}$.
4. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n \ln(n+1)}$.

Bài tập 1.7.4. Dùng tiêu chuẩn so sánh 2 để khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n+1}.\ln\left(\cosh\dfrac{1}{n}\right)$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\arctan(n^2+2n)}{3^n + n^2}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\arctan n}{2n^2+3}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3.\ln^n n}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4n}}{\sqrt[5]{2n^5-1}}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n.\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{3^n + n - \ln n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{7n^2 + n\sqrt{n} + 1}{\sqrt{9n^6 + 5n^5 + 2}}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^n + n^3 + 1}{4^n + \ln^2(n+1) + \sin n}$.

12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)+e^{1/n}-\cos\frac{1}{n}}{n+\ln^2 n+\arctan n^2}$.

Bài tập 1.7.5. Dùng tiêu chuẩn D' Alembert khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n+n^2}{3^n+n}$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{3^n.(n!)^2}$.
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2.5.8\ldots(3n+2)}{2^n(n+1)!}$.
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$.
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n+1)!}{2^n.n}$.
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{7^{3n}}{(2n-5)!}$.

Bài tập 1.7.6. Dùng tiêu chuẩn Cauchy khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^4+3n+1}}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}.\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n+2}{n+3}\right)^{n}.\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n-4}{2n+1}\right)^{n(n+2)}$.

1.7.3 Chuỗi có dấu tùy ý

Bài tập 1.7.7. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n+3)\cos 3n}{\sqrt[3]{n^7+n+1}}$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3-4\cos n}{\sqrt{n^3}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n.\sin n}{n^2}$.

Bài tập 1.7.8. Dùng tiêu chuẩn Leibnitz khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu sau

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n.n}{\sqrt{n^5+3n-2}}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

1.7.4 Chuỗi lũy thừa

Bài tập 1.7.9. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(x+1)^n}{n\ln^2(n+1)}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}.\ln\frac{3n-2}{3n+2}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}.(x+3)^n$
4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}.x^n}{2n-1}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n.x^n}{n}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}.x^n}{2^n}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$

1.7.5 Tính tổng của chuỗi

Bài tập 1.7.10. Tính tổng của chuỗi số

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n.n.(n+1)}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n.(2n+1)}$.

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1).2^n}{n!}$.

8. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) . \frac{1}{3^n}$.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n.(n+2).5^{n+1}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!!}$.

Bài tập 1.7.11. Tính tổng của chuỗi lũy thừa

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n, x \in (-1,1)$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n, x \in (-1,1)$.

Lời giải bài tập chương 8

1.7.1 1. Phân kỳ

2. Phân kỳ
3. Phân kỳ
4. Phân kỳ
5. Phân kỳ
6. Phân kỳ
7. Phân kỳ
8. Phân kỳ
9. Phân kỳ

1.7.2 1. Hội tụ

2. Phân kỳ

1.7.3 1. Hội tụ

2. Hội tụ
3. Hội tụ
4. Phân kỳ
5. Hội tụ

1.7.4 1. Hội tụ

2. Hội tụ
3. Hội tụ
4. Hội tụ
5. Phân kỳ
6. Phân kỳ

7. Phân kỳ
8. Hội tụ
9. Hội tụ
10. Phân kỳ
11. Hội tụ
12. Hội tụ

1.7.5
1. Hội tụ
2. Hội tụ
3. Hội tụ
4. Phân kỳ
5. Hội tụ
6. Hội tụ
7. Hội tụ

1.7.6
1. Hội tụ
2. Hội tụ
3. Hội tụ
4. Phân kỳ
5. Phân kỳ
6. Hội tụ
7. Hội tụ

1.7.7
1. Hội tụ tuyệt đối
2. Hội tụ tuyệt đối
3. Hội tụ tuyệt đối

1.7.8
1. Hội tụ
2. Hội tụ
3. Hội tụ

1.7.9
1. $\left[-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right]$
2. $[-2, 0]$
3. $[-4, -2]$
4. $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$
5. $(-1, 1]$
6. $(-1, 1)$
7. $(-1, 1)$

1.7.10
1. 1
2. $\dfrac{1}{4}$

3. $-\dfrac{1}{4}$

4. $-\ln 2$

5. $-\ln 2 + 1$

6. $\sqrt{3}.\dfrac{\pi}{6} - 1$

7. $3e^2 - 1$

8. $\dfrac{1}{4} - \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

9. $\dfrac{16}{90}.\ln\left(\dfrac{8}{5}\right) - \dfrac{7}{60}$

10. $e^{3/2}$

1.7.11 1. $\dfrac{2x - x^2}{(1-x)^2}$.

2. $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.