

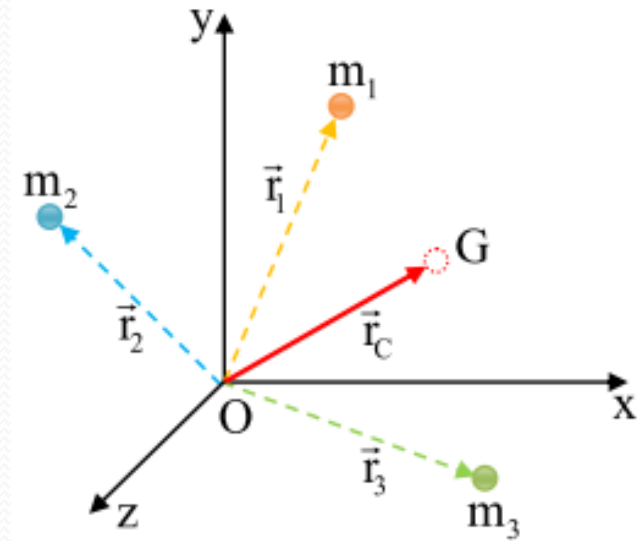
CHƯƠNG 3
CƠ HỌC HỆ
CHẤT ĐIỂM –
VẬT RẮN

- 1. KHỐI TÂM HỆ CHẤT ĐIỂM – VẬT RẮN**
 - 1.1. Vị trí khối tâm**
 - 1.2. Vận tốc khối tâm**
 - 1.3. Gia tốc khối tâm**
- 2. MOMEN**
 - 2.1. Momen quán tính**
 - 2.2. Momen lực**
- 3. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN**
 - 3.1. Chuyển động tịnh tiến**
 - 3.2. Chuyển động quay quanh trục cố định**
 - 3.3. Chuyển động quay quanh trục di động**
 - 3.4. Định lý động năng**
 - 3.5. Ma sát trong chuyển động lăn**
- 4. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN**
 - 4.1. Định luật bảo toàn động lượng**
 - 4.2. Định luật bảo toàn momen động lượng**
 - 4.3. Bài toán va chạm**

1.1. VỊ TRÍ KHỐI TÂM

- Một hệ gồm có n chất điểm có khối lượng (m_1, m_2, \dots, m_n) và tọa độ được xác định bởi vectơ vị trí $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$. Khối tâm G của hệ được xác định bởi:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$



- Tọa độ khối tâm của hệ n chất điểm trong hệ tọa độ Descartes:

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

- Vật rắn (VR) là một hệ chất điểm phân bố liên tục và khoảng cách giữa các chất điểm không thay đổi.
- Vật rắn khối lượng M có thể được chia nhỏ thành vô số phần nhỏ xem như chất điểm có khối lượng dm và vectơ vị trí \vec{r} . Khối tâm của VR được xác định bởi:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

- Tọa độ khối tâm của VR trong hệ tọa độ Descartes:

$$x_c = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$y_c = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$z_c = \frac{1}{M} \int z dm$$

- Nếu VR có hình dạng đối xứng và khối lượng phân bố đều trên toàn thể tích (đồng chất) thì khối tâm của nó luôn nằm trên trục đối xứng.
- Khối tâm của VR có thể nằm ngoài vật rắn.

BÀI TẬP VÍ DỤ 1

Một hệ gồm 3 chất điểm có khối lượng $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ và $m_3 = 2 \text{ kg}$ đặt tại lần lượt tại 3 điểm A(1, 0), B (2, 0) và C (0, 2) trong hệ tọa độ Oxy. Hãy xác định vị trí khối tâm của hệ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tọa độ khối tâm của hệ là:

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1.1 + 1.2 + 2.0}{1 + 1 + 2} = 0,75 \text{ m}$$

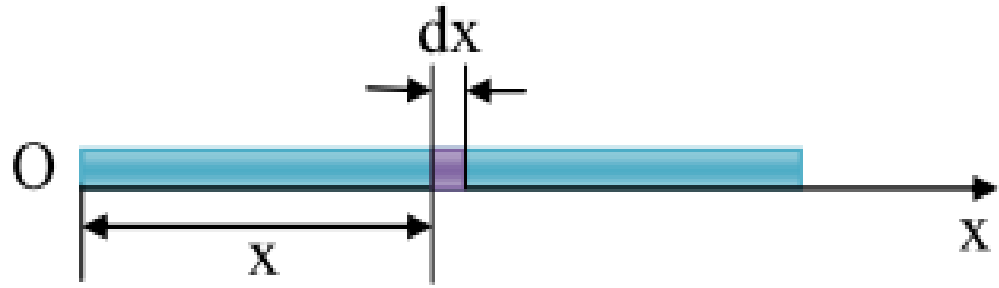
$$y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1.0 + 1.0 + 2.2}{1 + 1 + 2} = 1 \text{ m}$$

BÀI TẬP VÍ DỤ 2

Tìm khối tâm của một thanh đồng chất khối lượng M và chiều dài L .

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Chọn trục Ox như hình vẽ.
- Chia thanh thành những phần tử vi cấp có chiều dài dx và khối lượng dm .



- Vì khối lượng thanh phân bố đều trên toàn bộ chiều dài thanh nên ta giả sử thanh có mật độ khối lượng $\lambda = M/L$. Do đó: $dm = \lambda dx$
- Tọa độ khối tâm của thanh:

$$X_G = \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{L}{2}$$

Vậy khối tâm của thanh nằm chính giữa thanh.

1.2. VẬN TỐC KHỐI TÂM

- Vận tốc khối tâm của hệ n chất điểm:

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M} \quad (1)$$

Trong đó: $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ là vận tốc của chất điểm thứ i.

- Từ (1) ta có:

$$M\vec{v}_G = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{p} \quad (2)$$

Trong đó: $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ là động lượng của chất điểm thứ i.

- Từ (2) ta thấy “*tổng động lượng của hệ chất điểm bằng động lượng của một chất điểm đặt tại khối tâm của hệ, có khối lượng bằng khối lượng của hệ và có vận tốc bằng vận tốc khối tâm của hệ*”.

1.3. GIA TỐC KHỐI TÂM

- Gia tốc khối tâm của hệ n chất điểm:

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{M} \quad (3)$$

Trong đó: $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ là gia tốc của chất điểm thứ i.

- Từ (3) ta có: $M\vec{a}_G = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}$ (4) – PT chuyển động của khối tâm

Trong đó: $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$ là ngoại lực tác dụng lên chất điểm thứ i.

\vec{F} là tổng ngoại lực tác dụng lên hệ.

- Từ (4) ta thấy “khối tâm của một hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng của hệ và chịu tác dụng của một lực bằng tổng ngoại lực tác dụng lên hệ”.

BÀI TẬP VÍ DỤ 3

Một tên lửa được bắn xiên lên từ mặt đất và bị nổ tung thành nhiều mảnh trên không. Tìm quỹ đạo khối tâm của các mảnh vỡ sau khi nổ. Bỏ qua lực cản của không khí.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Trước khi nổ tên lửa khối lượng M chịu tác dụng của trọng lực $M\vec{g}$ nên có gia tốc \vec{g} và chuyển động như một chất điểm ném xiên với quỹ đạo là một đường parabol.



- Ngoại lực tổng hợp tác dụng lên tên lửa sau khi nổ không thay đổi nên khối tâm của các mảnh vỡ thu được gia tốc:

$$\vec{a}_G = \frac{\vec{F}}{M} = \frac{M\vec{g}}{M} = \vec{g}$$

→ Khối tâm vẫn chuyển động với quỹ đạo parabol.

2.1. MOMEN QUÁN TÍNH

- **Momen quán tính của chất điểm** m quay quanh một trục và cách trục quay đoạn r :

$$I = mr^2$$

- **Momen quán tính của hệ chất điểm** có khối lượng (m_1, m_2, \dots, m_n) quay quanh một trục và cách trục quay (r_1, r_2, \dots, r_n):

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

- **Momen quán tính của vật rắn** M quay quanh một trục: chia nhỏ VR thành những phần tử nhỏ khối lượng dm cách trục quay đoạn r :

$$I = \int r^2 dm$$

- **Định lý Steiner – Huyghens:** nếu VR khối lượng M có momen quán tính đối với trục quay Δ đi qua khối tâm là I , thì đối với trục quay Δ' cách trục Δ một đoạn d nó sẽ có momen quán tính I'

$$I' = I + Md^2$$

BÀI TẬP VÍ DỤ 4

Tìm momen quán tính của một vành tròn đồng chất khối lượng M , bán kính R đối với:

- trục đối xứng của vành.
- trục song song với trục đối xứng, đi qua một điểm trên vành tròn.

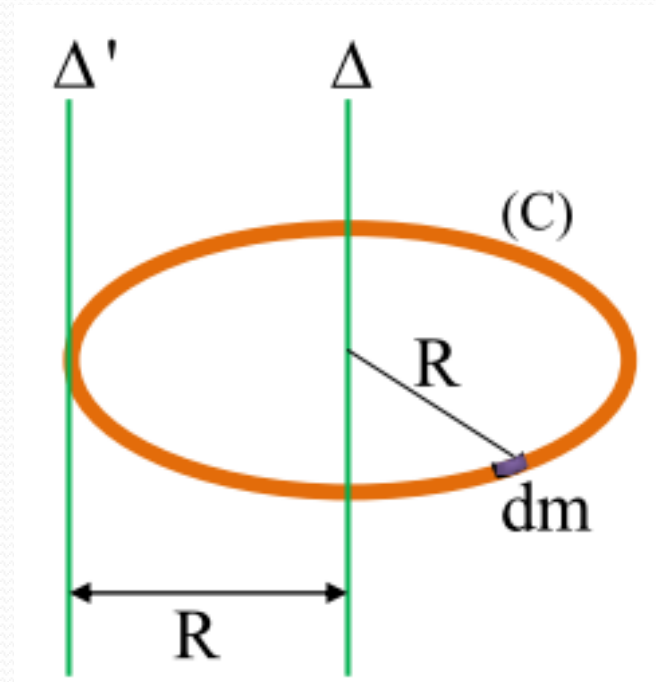
HƯỚNG DẪN GIẢI

- Chia vành tròn thành nhiều phần nhỏ khối lượng dm , momen quán tính đối với trục đối xứng Δ của vành là:

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int_{(C)} dm = MR^2$$

- Momen quán tính đối với trục Δ' song song với trục Δ :

$$I' = I + Md^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$



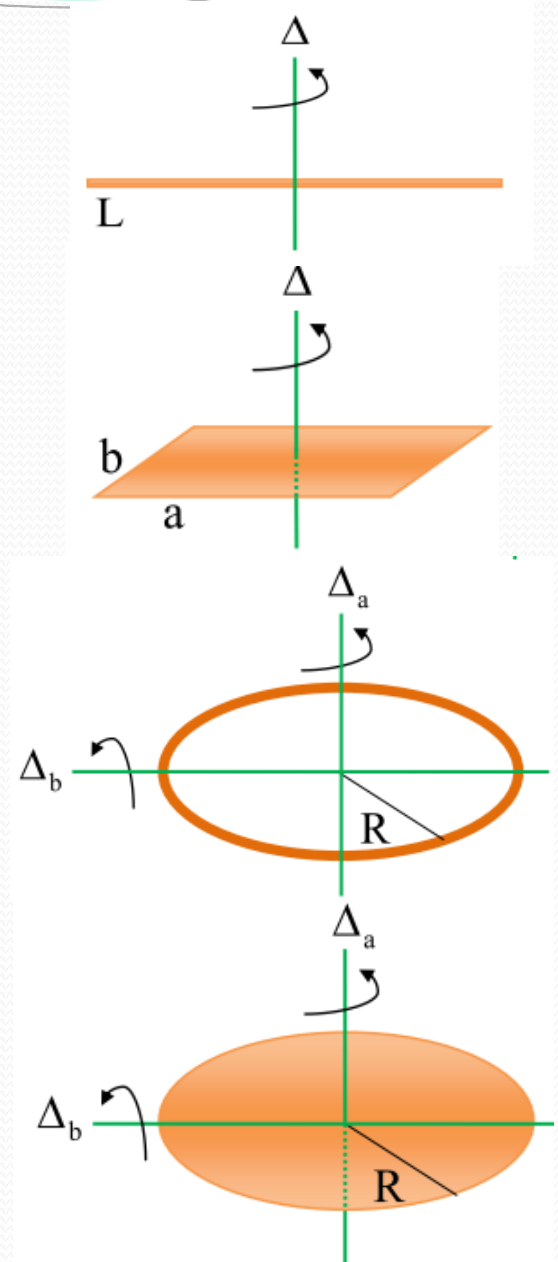
MOMEN QUÁN TÍNH MỘT SỐ VẬT ĐỐI XỨNG

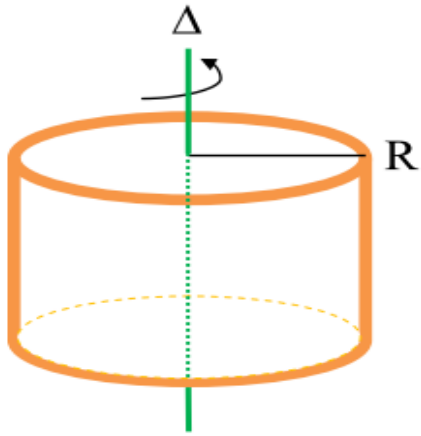
Thanh dài L $I = \frac{1}{12} ML^2$

Bản chữ nhật a*b $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$

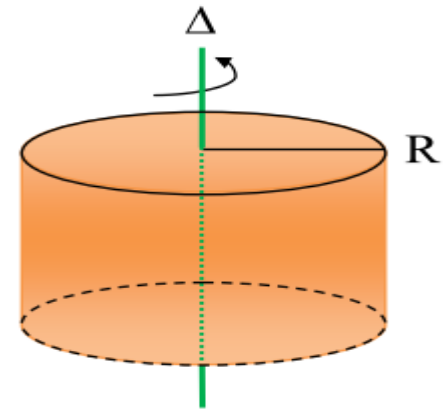
Vành tròn R $I_a = MR^2, I_b = \frac{1}{2} MR^2$

Đĩa tròn đặc R $I_a = \frac{1}{2} MR^2, I_b = \frac{1}{4} MR^2$

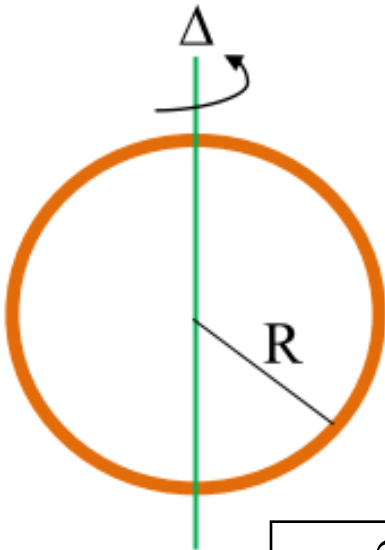




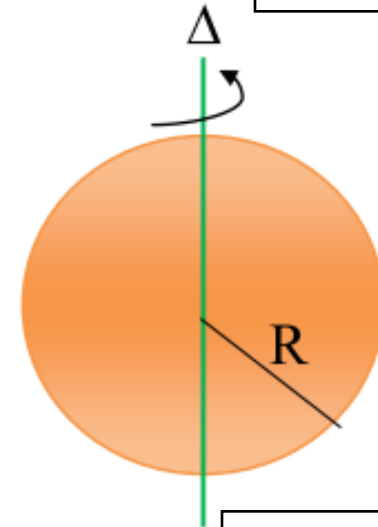
Trụ rỗng R $I = MR^2$



Trụ đặc R $I = \frac{1}{2} MR^2$



Cầu rỗng R $I = \frac{2}{3} MR^2$



Cầu đặc R $I = \frac{2}{5} MR^2$

2.2. MOMEN LỰC

- Momen của lực F tác dụng lên VR quay quanh trục Δ :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Trong đó \vec{r} là vecto vị trí của điểm đặt lực.

- Hướng của momen lực xác định bằng quy tắc bàn tay phải.

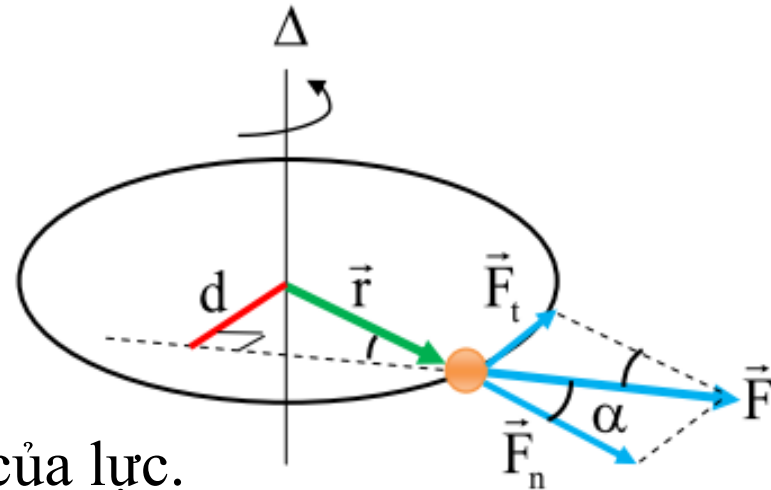
a) Xét trường hợp lực F nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay Δ .

- Độ lớn của momen lực:

$$M = rF \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} M = Fd \\ M = F_t r \end{cases}$$

Trong đó: α là góc giữa \vec{r} và \vec{F} ;

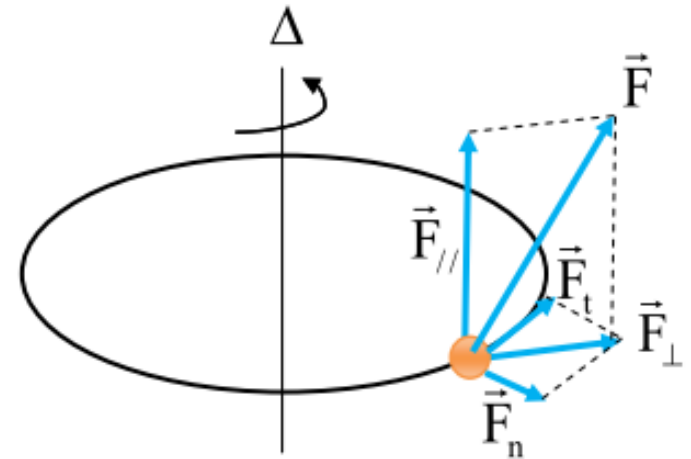
$d = r \sin \alpha$ là cánh tay đòn của lực.



- Chỉ có thành phần $F_t = F \sin \alpha$ mới làm vật quay nên momen lực $M = F_t r$ còn gọi là momen quay, còn thành phần $F_n = F \cos \alpha$ không làm vật quay, chỉ kéo vật ra xa trục Δ .

b) Xét trường hợp lực \vec{F} không nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay Δ .

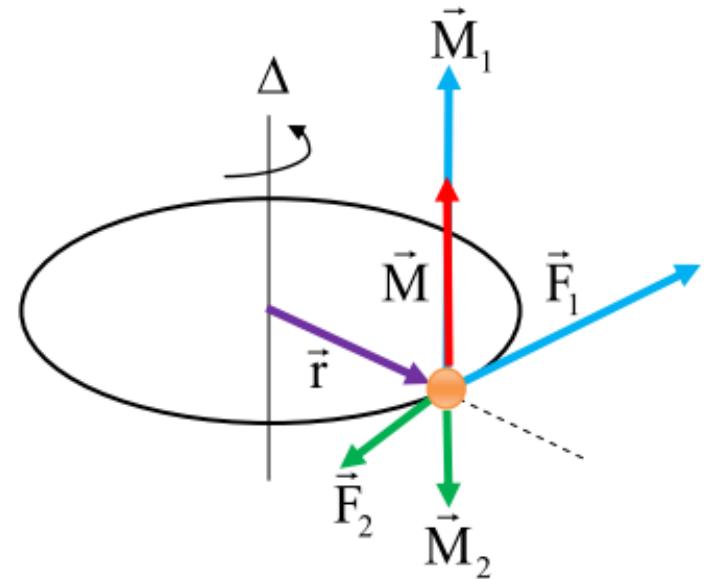
- Lực \vec{F} được phân tích thành hai thành phần: thành phần nằm trong mặt phẳng vuông góc với Δ (\vec{F}_\perp) và thành phần song song với Δ (\vec{F}_\parallel).
- Thành phần \vec{F}_\perp phân tích giống lực \vec{F} trong trường hợp (a).
- Thành phần \vec{F}_\parallel không làm vật quay mà chỉ làm vật trượt song song với Δ .



c) Nếu vật chịu tác dụng đồng thời bởi nhiều lực thì momen lực tổng hợp tác dụng lên vật là:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n$$

- Ví dụ trên hình vẽ vật chịu tác dụng của 2 lực \vec{F}_1 và \vec{F}_2 . Momen lực tổng hợp hướng lên làm vật quay ngược chiều kim đồng hồ.



3. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

3.1. CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN

- Khi VR chuyển động tịnh tiến, mọi điểm trên VR đều chuyển động theo những quỹ đạo giống nhau với cùng gia tốc a .
- PT định luật 2 Newton cho chất điểm thứ i của VR: $\vec{F}_i = m_i \vec{a}$
- PT định luật 2 Newton cho toàn bộ VR khối lượng m :

$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a} \rightarrow \boxed{\vec{F} = m \vec{a}} \quad (5)$$

Trong đó: F là ngoại lực tổng hợp tác dụng lên VR.

- **(5) là PT cơ bản của chuyển động tịnh tiến của VR.** Nó giống PT chuyển động của chất điểm có khối lượng bằng khối lượng của VR và chịu tác dụng một lực bằng tổng ngoại lực tác dụng lên VR \rightarrow (5) cũng là PT chuyển động của khối tâm VR.
- Do đó, muốn khảo sát chuyển động tịnh tiến của VR, ta chỉ cần xét chuyển động của khối tâm.
- **Động năng tịnh tiến:** $\boxed{K_t = \frac{1}{2} m v_C^2}$, với v_C là vận tốc của khối tâm.

3.2. CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VR QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

Khi VR quay quanh trục Δ cố định thì:

- Mọi điểm của VR đều chuyển động tròn với tâm quỹ đạo nằm trên trục Δ .
- Trong cùng một khoảng thời gian, mọi điểm của VR đều quay được cùng một góc θ .
- Tại cùng một thời điểm, mọi điểm của VR đều có cùng vận tốc góc ω và gia tốc góc β :

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

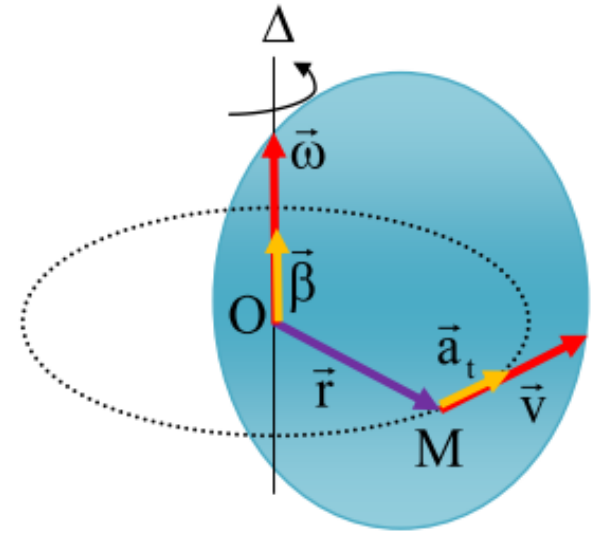
$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

- Liên hệ giữa vecto vận tốc dài \mathbf{v} và vận tốc góc ω , gia tốc tiếp tuyến \mathbf{a}_t và gia tốc góc β của một điểm trên VR cách trục quay đoạn \mathbf{r} :

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$\vec{a}_t = [\vec{\beta}, \vec{r}]$$

- Sự liên hệ giữa các đại lượng θ , ω và β trong chuyển động tròn đều và tròn biến đổi đều của VR tương tự như của chất điểm.



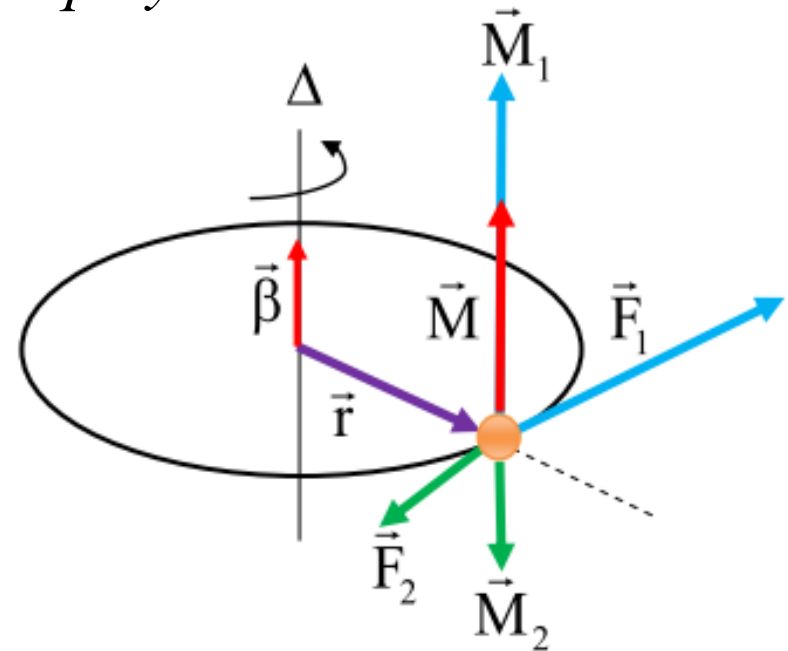
PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

Gia tốc góc trong chuyển động quay của VR quanh một trục tỉ lệ thuận với tổng momen các ngoại lực đối với trục quay và tỉ lệ nghịch với momen quán tính của VR đối với trục quay.

$$\vec{M} = I\vec{\beta}$$

Trong đó:

- M là tổng momen các ngoại lực tác dụng lên VR đối với trục quay.
- I là momen quán tính của VR đối với trục.
- β là gia tốc góc của VR.



Động năng quay của VR: $K_q = \frac{1}{2} I \omega^2$, với I là momen quán tính của VR đối với trục quay cố định.

BÀI TẬP VÍ DỤ 5

Cho cơ hệ như hình vẽ: $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$. Ròng rọc là đĩa tròn đồng chất $m = 2 \text{ kg}$, $R = 10 \text{ cm}$. Bỏ qua ma sát, sợi dây rất nhẹ, không giãn và không trượt trên RR. Biết $\alpha = 30^\circ$, $g = 10 \text{ m/s}^2$. Hãy xác định:

- Gia tốc của các vật m_1 , m_2 .
- Gia tốc góc của ròng rọc.
- Lực căng của các sợi dây nối với m_1 và m_2 .

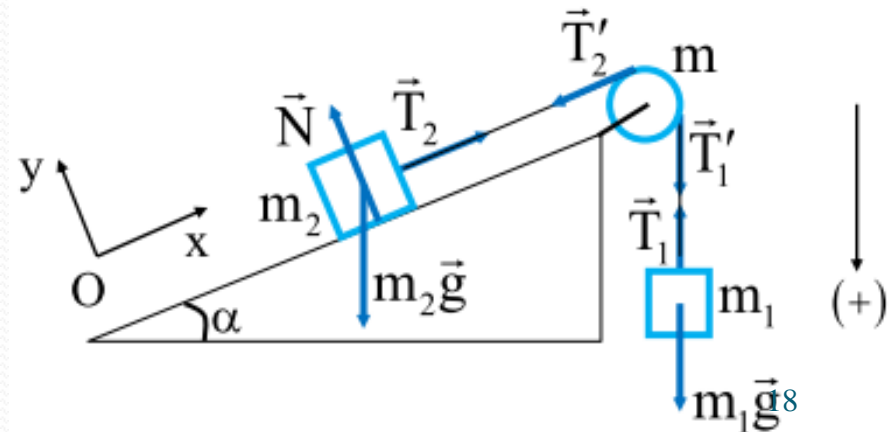
HƯỚNG DẪN GIẢI

- Vì $m_1 > m_2$ nên m_1 đi xuống, m_2 đi lên. Chọn hệ tọa độ như hình vẽ.
- Vì sợi dây rất nhẹ nên $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$
- Vì sợi dây không giãn và không trượt nên $a_1 = a_2 = a = \beta \cdot R$
- PT chuyển động tịnh tiến của m_1 và m_2 và chuyển động quay của m :

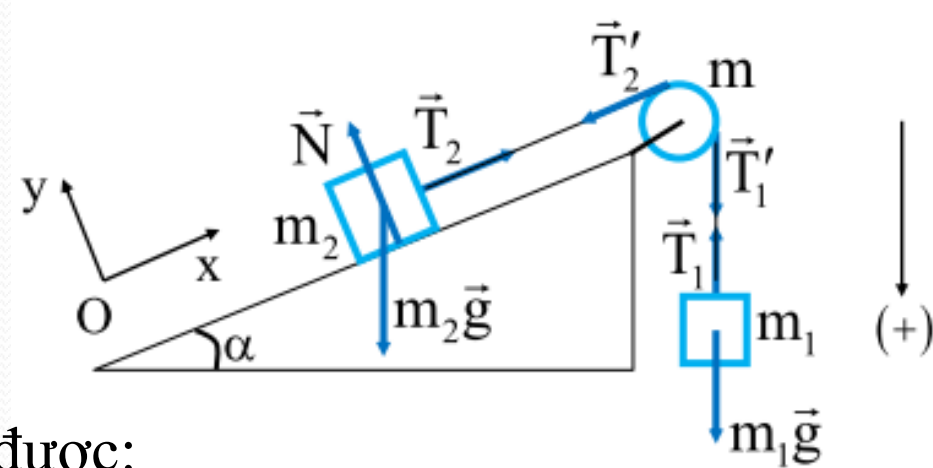
$$\begin{cases} m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N} = m_2 \vec{a} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{T_2} = I \vec{\beta} & (3) \end{cases}$$



$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a & (1) \\ -m_2 g \sin \alpha + T_2 = m_2 a & (2) \\ T_1 R - T_2 R = I \beta = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a}{R} & (3) \end{cases}$$



- Cộng hai vế của 3 PT với nhau ta được:

$$a = \frac{(m_1 - m_2 \cdot \sin \alpha) g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = \frac{(5 - 2 \cdot \sin 30^\circ) \cdot 10}{5 + 2 + \frac{2}{2}} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$\beta = \frac{a}{R} = \frac{5}{0,1} = 50 \text{ rad/s}^2$$

$$T_1 = m_1 (g - a) = 5(10 - 5) = 25 \text{ N}$$

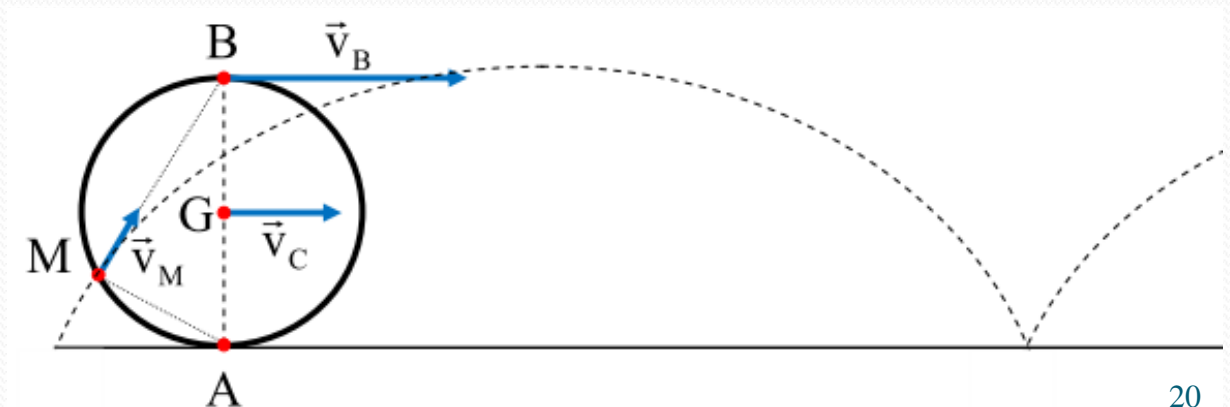
$$T_2 = m_2 (a + g \cdot \sin \alpha) = 2(5 + 10 \cdot \sin 30^\circ) = 20 \text{ N}$$

3.3. CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VR QUANH TRỤC ĐI ĐỘNG (CHUYỂN ĐỘNG LĂN)

- Chuyển động lăn có thể phân tích thành 2 chuyển động:
 - ✓ Chuyển động tịnh tiến của khối tâm bánh xe.
 - ✓ Chuyển động quay quanh trục Δ đi qua khối tâm G của bánh xe và vuông góc với mặt phẳng bánh xe.
- Điểm tiếp xúc A luôn đứng yên (vì lăn không trượt), nên trục Δ' đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng bánh xe được gọi là trục quay tức thời.
- Giả sử bánh xe bán kính R quay với vận tốc góc ω và gia tốc góc β không đổi. Vận tốc dài và gia tốc của khối tâm G là:

$$v_C = \omega R$$

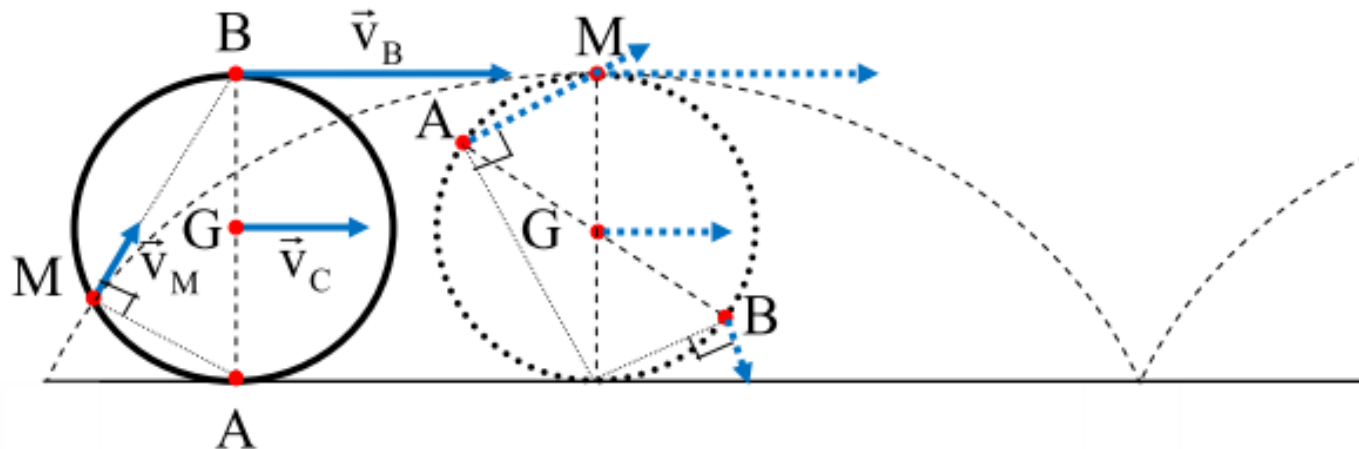
$$a_C = \beta R$$



- Vận tốc của mọi điểm trên vành bánh xe luôn vuông góc với đoạn thẳng nối điểm này với điểm A.
- Xét điểm M bất kỳ trên vành bánh xe:
 - ✓ Quỹ đạo của điểm M là đường cycloid.
 - ✓ Vận tốc của M được phân tích thành 2 thành phần theo chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

- Xét một số vị trí đặc biệt của điểm M:
 - ✓ Điểm A: $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}_A = \vec{v}_C - \vec{v}_C = 0$
 - ✓ Điểm B: $\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_C = 2\vec{v}_C$



ĐỘNG NĂNG TRONG CHUYỂN ĐỘNG LĂN

- Tại thời điểm bất kỳ, xem như bánh xe quay quanh trục tức thời Δ' đi qua A nên có động năng quay:

$$K = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

Trong đó: I_A là momen quán tính của bánh xe đối với trục quay Δ' .

- Theo định lý Steiner – Huyghens ta có:

$$I_A = I_C + MR^2$$

Trong đó: I_C là momen quán tính của bánh xe đối với trục quay Δ .

M là khối lượng bánh xe.

- Do đó động năng của bánh xe được viết lại là:

$$K = \frac{1}{2} (I_C + MR^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v_C^2$$

→ Động năng toàn phần bằng tổng động năng do chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm và động năng tịnh tiến của khối tâm.

3.4. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

- Vật rắn chịu tác dụng của ngoại lực trong khoảng thời gian $\Delta t = t_2 - t_1$ làm nó chuyển động. Ta có định lý động năng dạng tổng quát:

$$A = K_2 - K_1$$

Trong đó: A là công của ngoại lực tác dụng lên VR.

K_1 và K_2 là động năng của vật tại thời điểm t_1 và t_2 .

- Nếu VR quay quanh một trục cố định: công toàn phần của ngoại lực gây ra sự quay của VR quanh một trục cố định thì bằng độ biến thiên của động năng quay của VR.

$$A = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

Trong đó: I là momen quán tính của vật rắn đối với trục quay.

ω_1 và ω_2 là tốc độ góc của vật tại thời điểm t_1 và t_2 .

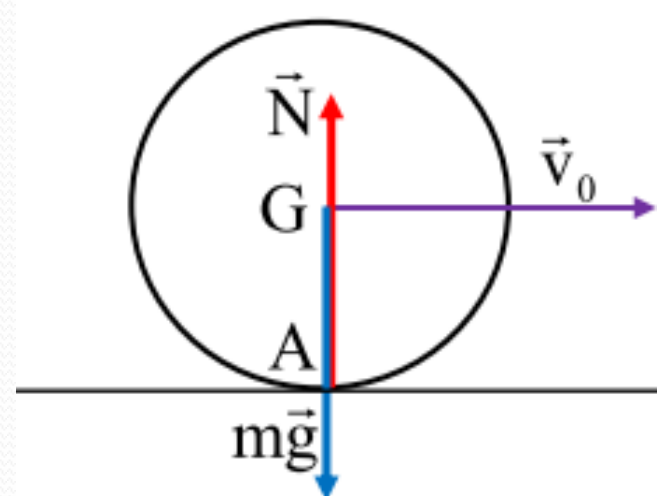
3.5. MA SÁT TRONG CHUYỂN ĐỘNG LĂN

Trong chuyển động lăn của VR ma sát đóng 2 vai trò, vừa là lực phát động, vừa làm cản trở chuyển động.

Khảo sát ảnh hưởng của ma sát lên chuyển động của khối trụ trong các trường hợp sau:

a) Tại thời điểm ban đầu, khối trụ chuyển động tịnh tiến với vận tốc v_0 .

- Nếu giữa khối trụ và mặt sàn không có ma sát, chỉ có trọng lực và phản lực tác dụng lên khối trụ. Hai lực này đi qua khối tâm nên không tạo momen quay \rightarrow vật tiếp tục chuyển động tịnh tiến với vận tốc v_0 .



- Nếu giữa khối trụ và mặt sàn có lực ma sát, lực ma sát đóng 2 vai trò:

- ✓ Cản trở chuyển động tịnh tiến theo PT định luật 2 Newton:

$$\vec{F}_{ms} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \rightarrow F_{ms} = ma \rightarrow a = F_{ms} / m$$

→ Vận tốc tịnh tiến của vật giảm theo quy luật $v = v_0 - at$

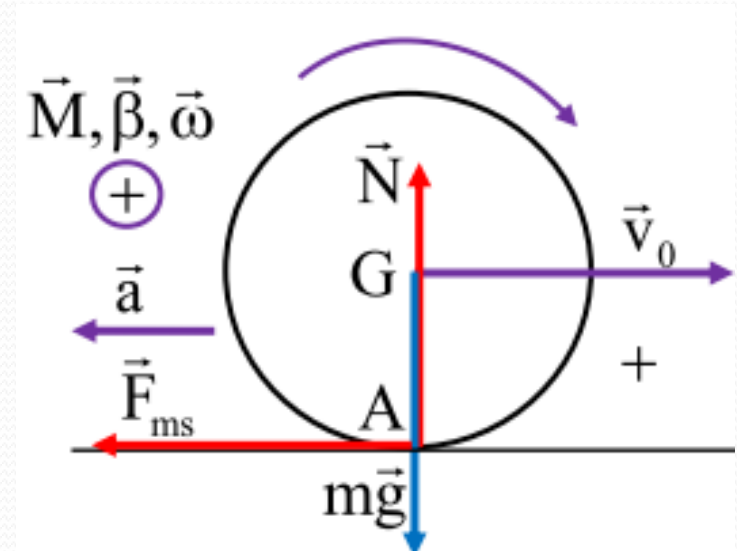
- ✓ Tạo momen quay theo PT chuyển động quay của VR:

$$\vec{M} = I\vec{\beta} \rightarrow F_{ms}.R = I\beta \rightarrow \omega = \beta t$$

- Vận tốc trượt của điểm A:

$$v_A = v - \omega R$$

- Theo thời gian, v giảm còn ω tăng. Đến một lúc nào đó $v_A = 0 \rightarrow$ điểm tiếp xúc A đứng yên \rightarrow vật lăn không trượt.
- Điểm tiếp xúc A đứng yên nên lực ma sát đặt tại A là ma sát nghỉ.



b) Tại thời điểm ban đầu, khối trụ chuyển động quay với vận tốc góc ω_0 .

- Cho khối trụ quay quanh trục với vận tốc góc ω_0 rồi nhẹ nhàng đặt xuống mặt phẳng ngang.
- Nếu không có ma sát, vật tiếp tục quay tại chỗ với vận tốc góc ω_0 không đổi.
- Nếu có ma sát tại điểm tiếp xúc A thì lực ma sát sẽ:

✓ Cản trở chuyển động quay:

$$F_{ms} \cdot R = I\beta \rightarrow \omega = \omega_0 - \beta t$$

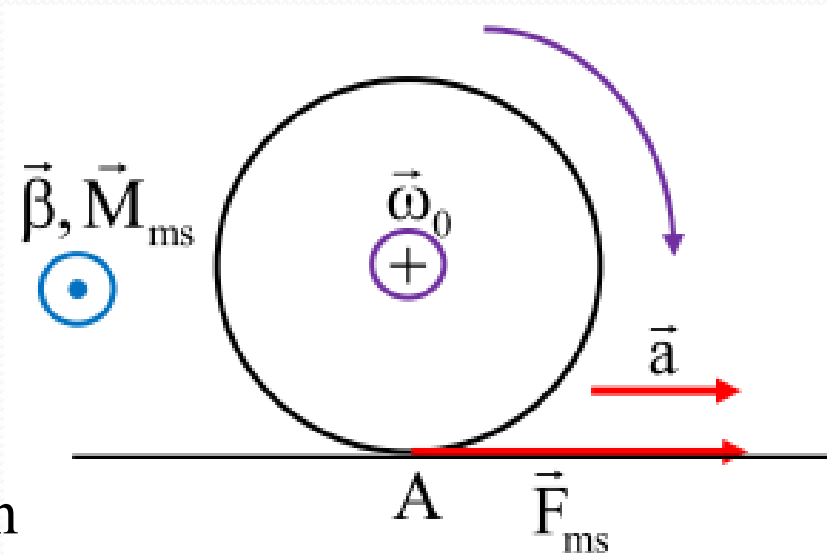
✓ Kéo vật chuyển động sang phải:

$$F_{ms} = ma \rightarrow v = at$$

- Vận tốc trượt của điểm A:

$$v_A = \omega R - v$$

- Theo thời gian, v tăng còn ω giảm. Đến một lúc nào đó $v_A = 0 \rightarrow$ điểm tiếp xúc A đứng yên \rightarrow vật lăn không trượt.



BÀI TẬP VÍ DỤ 6

Một hình trụ đặc đồng chất có bán kính R , khối lượng m phân bố đều, lăn không trượt trên dốc nghiêng góc α so với phương ngang.

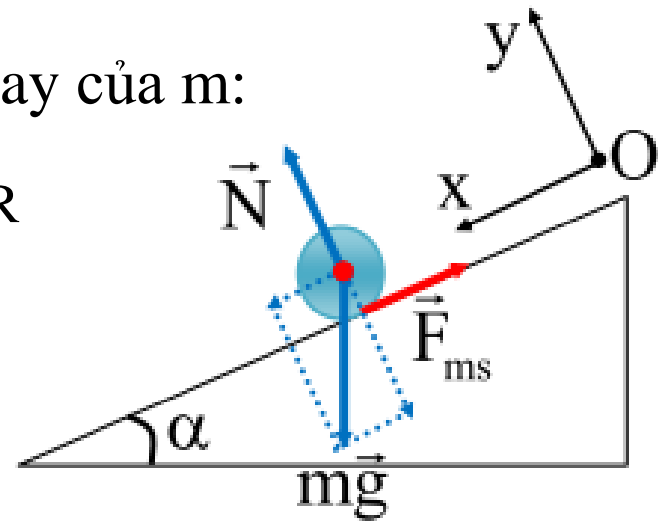
- Tìm gia tốc góc của khối trụ.
- Để vật lăn không trượt thì hệ số ma sát phải như thế nào?

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Chọn hệ tọa độ như hình vẽ.
- PT chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của m :

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{msn}} = m\vec{a} \\ \vec{M}_{\text{msn}} = I\vec{\beta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} mg \sin \alpha - F_{\text{msn}} = ma = m\beta R \\ N - mg \cos \alpha = 0 \\ F_{\text{msn}} R = \frac{1}{2} mR^2 \beta \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2g \sin \alpha}{3R} \\ F_{\text{msn}} = \frac{2mg \sin \alpha}{3} \end{cases}$$



- Để vật lăn không trượt: $F_{\text{msn}} \leq F_{\text{mst}} \rightarrow \frac{2mg \sin \alpha}{3} \leq kN = kmg \cos \alpha \rightarrow k \geq \frac{2}{3} \tan \alpha$

4.1. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN ĐỘNG LƯỢNG

- Lấy đạo hàm của PT (2) theo thời gian ta có:

$$\frac{d(M\vec{v}_G)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow M\vec{a}_G = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \quad (6)$$

- Từ (6) ta thấy “*nếu ngoại lực tổng hợp tác dụng lên hệ chất điểm bằng 0 thì động lượng của hệ bảo toàn*”.

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

- Khối tâm của hệ cô lập thì đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

- Chiếu (6) lên phương x: $\boxed{\frac{dp_x}{dt} = F_x} \quad (7)$

- Từ (7) ta thấy trong trường hợp ngoại lực tác dụng lên hệ khác 0, nhưng hình chiếu của nó lên một phương nào đó bằng 0 thì động lượng của hệ theo phương đó được bảo toàn.

4.2. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN MOMEN ĐỘNG LƯỢNG

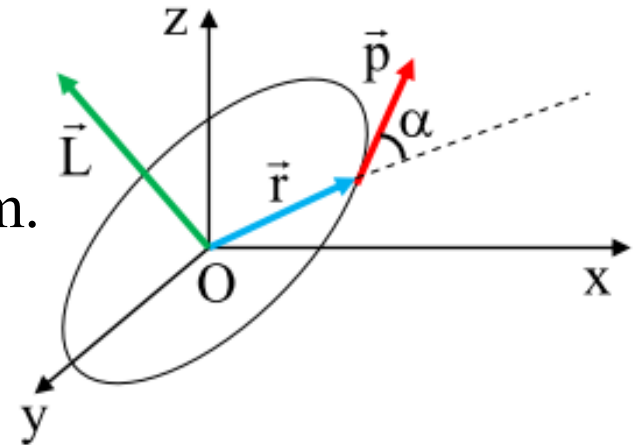
a) Momen động lượng của chất điểm đối với điểm gốc O:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Trong đó: \vec{r} là vector vị trí;

$\vec{p} = m\vec{v}$ là động lượng của chất điểm.

- Hướng của L tuân theo quy tắc bàn tay phải.
- Độ lớn của L: $L = r.p.\sin \alpha = mvr.\sin \alpha$



b) Momen động lượng của hệ chất điểm đối với điểm gốc O:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$$

c) Momen động lượng của vật rắn đối với một trục quay cố định Δ :

$$\vec{L} = I.\vec{\omega}$$

Trong đó: I là momen quán tính của vật rắn đối với trục Δ ;
 ω là tốc độ góc của vật rắn.

d) Định lý về momen động lượng:

- Theo định luật 2 Newton ta có: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
- Lấy đạo hàm theo thời gian của biểu thức momen động lượng của chất điểm:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Vì $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$ nên $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$

- Do đó ta có định lý về momen động lượng: $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$

→ Tổng momen ngoại lực tác dụng lên hệ chất điểm đối với một điểm gốc O bất kỳ bằng đạo hàm của momen động lượng đối với thời gian.

- **Mở rộng định lý đối với VR:** Tổng momen ngoại lực tác dụng lên VR đối với trục quay Δ bằng đạo hàm của momen động lượng đối với thời gian.

e) Định luật bảo toàn momen động lượng:

- Nếu momen tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên vật rắn quay xung quanh một trục triệt tiêu thì momen động lượng của vật được bảo toàn.

$$\vec{M} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const} \rightarrow I\vec{\omega} = \text{const}$$

- Do đó, nếu momen quán tính của vật tăng thì vận tốc góc giảm và ngược lại.
- Ví dụ:
 - ✓ Một vận động viên trượt băng thực hiện động tác quay tròn tại chỗ.
 - ✓ Nếu bỏ qua ma sát thì chỉ có trọng lực và phản lực tác dụng lên VĐV. Cả 2 lực này đều có momen đối với trục quay bằng 0 nên momen động lượng của VĐV bảo toàn.
 - ✓ Nếu VĐV muốn quay chậm (ω giảm) thì giang 2 tay ra để tăng momen quán tính I . Và làm ngược lại nếu muốn quay nhanh lên.

4.3. BÀI TOÁN VA CHẠM

- Xét trường hợp 2 vật rắn m_1 và m_2 va chạm với nhau tại một điểm duy nhất. Đường thẳng đi qua điểm tiếp xúc của 2 vật và vuông góc với mặt phẳng va chạm gọi là đường va chạm.
- Nếu đường va chạm đi qua khối tâm của 2 vật thì gọi là va chạm xuyên tâm.
- Trong va chạm xuyên tâm, 2 VR va chạm được xem như 2 chất điểm có khối lượng m_1 và m_2 va chạm với nhau \rightarrow bài toán VR được đưa về bài toán chất điểm.
- Theo định luật 3 Newton, 2 chất điểm va chạm sẽ tương tác với nhau bởi cặp lực và phản lực $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- Theo định luật 2 Newton, độ biến thiên động lượng trong thời gian va chạm của m_1 và m_2 là:

$$\begin{cases} \Delta \vec{p}_1 = \int \vec{F}_{21} dt \\ \Delta \vec{p}_2 = \int \vec{F}_{12} dt \end{cases} \rightarrow \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$$

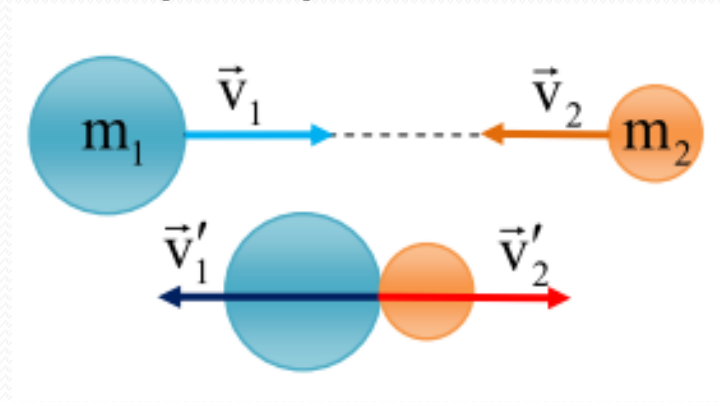
\rightarrow Động lượng của hệ trong quá trình va chạm được bảo toàn.

a) Va chạm đàn hồi:

- Va chạm đàn hồi là va chạm mà cơ năng của hệ không đổi.
- Động năng có thể chuyển một phần hoặc hoàn toàn thành thế năng biến dạng đàn hồi. Sau va chạm các vật trở lại hình dạng ban đầu và đẩy nhau.
- Tuy nhiên xét tại thời điểm ngay trước và sau va chạm thế năng của hệ không đổi nên động năng bảo toàn.
- Vậy trong va chạm đàn hồi, động lượng và động năng bảo toàn.

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$



Lưu ý: các đại lượng v trong các PT trên là giá trị đại số.

b) Va chạm không đàn hồi:

- Va chạm đàn hồi là va chạm mà cơ năng của hệ thay đổi.
- Cơ năng có thể chuyển hóa thành nhiệt năng hoặc nội năng của hệ (làm vật biến dạng).
- Sau va chạm 2 vật có thể dính vào nhau (va chạm mềm) hoặc tách ra.
- Vậy trong va chạm đàn hồi, chỉ có động lượng bảo toàn.
- Xét va chạm mềm:

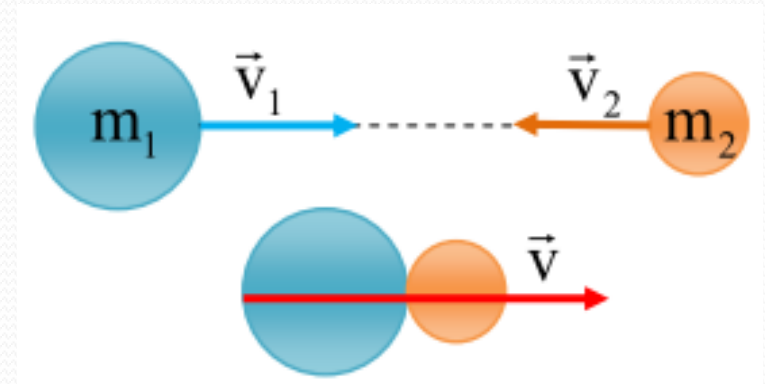
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

- Độ giảm động năng sau va chạm:

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

Lưu ý: Nếu va chạm *không xuyên tâm* thì ta chiếu phương trình định luật bảo toàn động lượng lên các trục tọa độ hoặc dùng các định lý trong tam giác để giải.



BÀI TẬP VÍ DỤ 7

Trên mặt bàn nhẵn nằm ngang một viên bi chuyển động với vận tốc $v_1 = 4 \text{ m/s}$ đến va chạm không xuyên tâm vào viên bi thứ hai đang đứng yên. Sau va chạm viên bi thứ nhất và viên bi thứ hai lần lượt có phương chuyển động hợp với phương ban đầu của viên bi thứ nhất các góc $\alpha_1 = 30^\circ$ và $\alpha_2 = 60^\circ$ (hình vẽ). Tìm vận tốc của hai viên bi ngay sau va chạm, biết hai viên bi có cùng khối lượng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Chọn hệ tọa độ như hình vẽ.
- Áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (1)$$

- Chiếu (1) lên Ox: $m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos \alpha_1 + m_2 v'_2 \cos \alpha_2 \quad (2)$

- Chiếu (1) lên Oy: $0 = m_1 v'_1 \sin \alpha_1 - m_2 v'_2 \sin \alpha_2 \quad (3)$

- Từ (2) và (3) suy ra:

$$v'_1 = \frac{v_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = 2\sqrt{3} \text{ m/s} , \quad v'_2 = \frac{m_1 v_1 \sin \alpha_1}{m_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = 2 \text{ m/s}$$

