

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG



BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

Nguyễn Thị Cẩm Vân

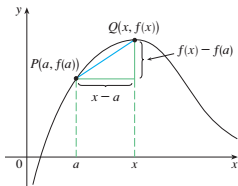
Email: ntcvantud@gmail.com

Tp. Hồ Chí Minh - 2019.

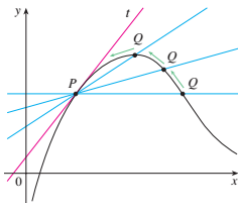
ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

- Khái niệm đạo hàm
- Đạo hàm cấp cao
- Vi phân của hàm số một biến

KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM



$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

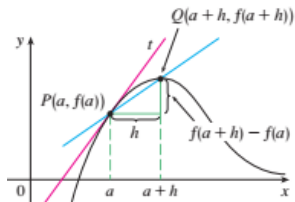


Hệ số góc của tiếp tuyến

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm P

$$f(x) = m(x - a) + f(a)$$



$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến đường cong

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Đặt $n = f(t)$ là số lượng cá thể của một quần thể động vật hay thực vật vào thời điểm t .

Sự thay đổi của kích thước quần thể giữa thời gian $t = t_1$ và $t = t_2$ là $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$.

Tốc độ tăng trưởng trung bình trong chu kì thời gian $t_1 \leq t \leq t_2$ là

$$\text{Tốc độ tăng trưởng trung bình} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Tốc độ tăng trưởng tức thời thu được từ tốc độ tăng trưởng trung bình bằng cách cho chu kì thời gian tiến tới 0

$$\text{Tốc độ tăng trưởng tức thời} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Cụ thể xét một quần thể vi khuẩn trong môi trường dinh dưỡng thuần nhất. Giả sử rằng bằng cách lấy mẫu quần thể ở một khoảng thời gian nhất định thì xác định được rằng quần thể tăng **gấp đôi mỗi giờ**. Với lượng quần thể ban đầu là n_0

Như vậy, bằng cách lập luận ta có

Hàm quần thể là $n = n_0 \cdot 2^t$

Câu hỏi đặt ra là $n'(t)$ có ý nghĩa gì?

ĐỊNH NGHĨA

ĐỊNH NGHĨA 1.1 (ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM)

Cho $y = f(x)$ xác định trong lân cận x_0 , xét tỷ số

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nếu tỷ số trên có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow x_0$ hay $\Delta x \rightarrow 0$ thì f có đạo hàm tại x_0 . Lúc đó

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Kí hiệu đạo hàm của hàm f tại x_0 .

$$f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad Df(x_0), \quad Dy(x_0)$$

Đạo hàm trái của f tại a

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Đạo hàm phải của f tại a

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f \text{ có đạo hàm tại } x_0 \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Quy tắc tính đạo hàm

$$\textcircled{1} (f + g)' = f' + g'$$

$$\textcircled{2} (\alpha \cdot g)' = \alpha \cdot g'$$

$$\textcircled{3} (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\textcircled{4} \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Xấp xỉ hàm tuyến tính

Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ và x gần x_0 (hay Δx đủ nhỏ), thì

$$f(x) \approx L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Xấp xỉ tuyến tính được ước lượng

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

Tính gần đúng

❶ $\sqrt{1.1}$ tại $x_0 = 1$

Bảng đạo hàm các hàm cơ bản

Bảng đạo hàm các hàm cơ bản

$$1. (x^a)' = ax^{a-1}$$

$$2. (chx)' = shx$$

$$3. (\sin x)' = \cos x$$

$$4. (\cos x)' = -\sin x$$

$$5. (shx)' = chx$$

$$6. (a^x)' = a^x \ln a \Rightarrow (e^x)' = e^x$$

$$7. (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$8. (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

$$9. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)$$

$$10. (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

$$11. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Tỷ lệ thay đổi là trong lĩnh vực kinh tế. Các nhà kinh tế đề cập đến **lợi nhuận cận biên**, **doanh thu cận biên** và **chi phí cận biên** là tỷ lệ thay đổi của lợi nhuận, doanh thu, và chi phí liên quan đến số x của các đơn vị sản xuất hoặc bán.

Mối liên hệ giữa 3 đại lượng trên

$$P = R - C$$

- ① P = Total **P**rofit : Tổng lợi nhuận
- ② R = Total **R**evenue: Tổng doanh thu
- ③ C = Total **C**ost : Tổng chi phí

① $\frac{dP}{dx}$ = Marginal Profit: Lợi nhuận cận biên.

② $\frac{dR}{dx}$ = Marginal Revenue: Doanh thu cận biên.

③ $\frac{dC}{dx}$ = Marginal Cost: Chi phí cận biên.

BÀI TOÁN XẤP XỈ HÀM SẢN XUẤT

Đặt hàm sản xuất $p(x)$ cho số lượng hàng hóa được sản xuất khi dùng x lao động. Nếu 5000 lao động hiện đang làm việc, $p(5000) = 300$ và $p'(5000) = 2$.

- 1 Ý nghĩa của $p(5000) = 300$ và $p'(5000) = 2$ trong thực tế.
- 2 Ước tính số lượng hàng hóa được sản xuất bổ sung khi x tăng từ 5000 lên $5000\frac{1}{2}$
- 3 Ước tính sự thay đổi số lượng hàng hóa được sản xuất khi x giảm từ 5000 xuống còn 4999 lao động.

BÀI TOÁN GIÁ TRỊ CẬN BIÊN

BÀI TOÁN GIÁ TRỊ CẬN BIÊN

Chi phí cận biên là mức thay đổi trong tổng chi phí khi **hãng sản xuất** tăng **sản lượng** thêm một đơn vị. Ở đây, chúng ta giả thiết là trang thiết bị sản xuất của hãng không thay đổi.

Tổng chi phí tính bằng ngàn đô la sản xuất x đơn vị của một mặt hàng nhất định là

$$C(x) = 6x^2 + 2x + 10$$

- 1 Tìm hàm chi phí cận biên.
- 2 Tìm chi phí và chi phí cận biên khi 10 đơn vị được sản xuất.
- 3 Sử dụng chi phí cận biên để ước tính chi phí sản xuất đơn vị thứ 11.
- 4 Sử dụng chi phí cận biên để ước tính chi phí phát sinh thêm nếu mức sản xuất tăng từ 10 lên 10.5 đơn vị.

Tìm đạo hàm của các hàm sau

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1.$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = x^2 - 4|x| + 5$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\sqrt[13]{x^2 + 1} \cdot \sqrt[15]{x + 2}}{\sqrt[17]{x^3 + 2}}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = (x^3 + \tan x)^{\sin x + \cos x}$$

1. Một nhà sản xuất sản xuất cuộn vải có chiều rộng cố định. Chi phí sản xuất x yards của cuộn vải này là $C = f(x)$ đô la. (yards: đại lượng đo lường của Anh bằng cỡ 0.9144m).

a) Ý nghĩa đạo hàm $f'(x)$. Đơn vị là gì?

b) Trong thực tế, thì $f'(1000) = 9$ có nghĩa là gì?

c) Theo bạn thì $f'(50)$ và $f'(500)$ cái nào lớn hơn?. Còn $f'(5000)$ thì như thế nào?

2) Tìm tất cả giá trị a, b để hàm số có đạo hàm với tất cả các giá trị của x

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < -1 \\ bx^2 - 3, & x > 1 \end{cases}$$

Chủ cửa hàng photocopy tính phí là 7 cent/bản copy cho 100 bản sao đầu tiên và 4 cent/mỗi bản copy cho mỗi bản copy vượt 100. Bên cạnh đó, có một khoản phí cố định là \$2.50 cho mỗi lần photocopy.

- 1 Xác định hàm doanh thu $R(x)$, từ việc bán các bản copy x
- 2 Nếu chi phí là 3 cent cho mỗi bản copy, lợi nhuận từ việc bán x bản là gì? (Biết lợi nhuận là doanh thu trừ đi chi phí.)

ĐẠO HÀM HÀM HỢP

Một giếng dầu bị rò rỉ ngoài khơi, làm trải một màng dầu hình tròn trên mặt nước. Tại thời điểm t (tính bằng phút) sau khi bắt đầu rò rỉ, bán kính của vết dầu tròn (tính bằng mét) được cho bởi

$$r(t) = 4t$$

Tìm tốc độ thay đổi diện tích của vết dầu loang theo thời gian.

ĐỊNH LÝ 1.1 (ĐẠO HÀM HÀM HỢP)

Nếu $g(x)$ có đạo hàm tại x , f có đạo hàm tại $g(x)$ thì hàm hợp $F = f \circ g = f(g(x))$ có đạo hàm tại x và F' được cho bởi công thức sau

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm hợp sau

① $h(x) = -f(-x)$

② $h(x) = \sqrt{f(x^2)}$

③ $y = \cot(x^3 + x)$

④ $y = \ln(f(e^x + 1))$

⑤ $y = \sin(f(x^2 + 2x))$

Nhà sinh thái học ước tính, dân số của một thành phố là x nghìn người, mức trung bình của carbon monoxide trong không khí sẽ là L ppm (parts per million), với

$$L = 10 + 0.4x + 0.0001x^2$$

Dân số trong thành phố được ước lượng bởi hàm

$$x = 752 + 23t + 0.5t^2$$

ngàn người, t (năm) tính từ 2019.

- 1 Tìm tốc độ thay đổi của khí carbon monoxide tương ứng với dân số của thành phố.
- 2 Tìm tốc độ thay đổi của dân số khi $t = 2$.
- 3 Mức độ carbon monoxide thay đổi nhanh như thế nào (đối với thời gian) tại thời điểm $t = 2$?

A Model for Carbon Monoxide Levels

Ecologists estimate that, when the population of a certain city is x thousand persons, the average level L of carbon monoxide in the air above the city will be L ppm (parts per million), where

$$L = 10 + 0.4x + 0.0001x^2$$

The population of the city is estimated to be

$$x = 752 + 23t + 0.5t^2$$

thousand persons t years from the present.

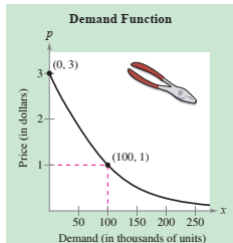
- 1 Find the rate of change of carbon monoxide with respect to the population of the city.
- 2 Find the time rate of change of the population **when** $t = 2$.
- 3 How fast (with respect to time) is the carbon monoxide level changing **at** time $t = 2$?

ĐẠO HÀM HÀM ẨN (Tự đọc)

Hàm cầu cho một sản phẩm được mô hình hóa bởi

$$p = \frac{3}{0.000001x^3 + 0.01x + 1}$$

trong đó p tính bằng đô la và x đơn vị tính bằng hàng nghìn. Tìm tốc độ thay đổi của nhu cầu x đối với giá p với $x = 100$



Đạo hàm hàm ẩn Hàm số $y = f(x)$ xác định bởi phương trình

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

gọi là hàm ẩn được xác định bởi (1)

Cách tìm $y'(x)$: Lấy đạo hàm phương trình (1) theo x , giải phương trình tìm y' theo hai biến x, y

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm ẩn sau

1) $x^3 + y^3 = 1$

2) $x^3 + y^3 = 3xy^2$

ĐẠO HÀM HÀM NGƯỢC (Tự đọc)

Đạo hàm hàm ngược Cho $y = f(x)$ là hàm đơn điệu tăng/giảm, liên tục và có đạo hàm $f'(x_0) \neq 0$. Khi đó tồn tại hàm ngược $x = g(y) = f^{-1}(y)$ có đạo hàm tại điểm tương ứng $y_0 = f(x_0)$ và

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \Leftrightarrow x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm ngược sau

1) $y = \arcsin x$ 2) $y = 2x^3 - 1$

Bảng đạo hàm các hàm ngược

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \textcircled{2} \quad (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \textcircled{3} \quad (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ \textcircled{4} \quad (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

ĐẠO HÀM HÀM THEO THAM SỐ

Một người leo núi dọc con đường trong rừng được mô tả bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 80 - 0.7t \\ y = 0.3t \end{cases}$$

Một con gấu rời khỏi khu vực của rừng tới phía tây và đi dọc theo con đường được mô tả bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 0.2t \\ y = 20 + 0.1t \end{cases}$$

- 1 Đường đi của người đi bộ và gấu có giao nhau không?
- 2 Người đi bộ và gấu có va chạm không?

Đạo hàm hàm cho theo tham số

Hàm theo tham số có dạng $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Ta có $x = x(t), y = y(t)$ có đạo hàm, $x'(t) \neq 0$. Thì

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm theo tham số sau

$$1) \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \frac{1}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t}{t^3 + 1} \end{cases}$$

Tính đạo hàm cấp 1 tổng quát hoặc tại $x = x_0$

- 1 $y = |x + 1| + |x - 1|$
- 2 $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$
- 3 $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| < 1 \\ 1/e, & |x| > 1 \end{cases}, x_0 = \pm 1$

Tính đạo hàm hàm ngược

- 1 $y = \sinh x$
- 2 $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$

Tính đạo hàm của các hàm cho bởi pt tham số

- 1 $y = \begin{cases} x(t) = t \ln(t^2 + 1) \\ y(t) = (t^2 + 1) \ln \end{cases}$
- 2 $y = \begin{cases} x(t) = \arctan t \\ y(t) = \ln(1 + t^2) \end{cases}$

Tính đạo hàm hàm hợp

- 1 $y = f(x^2 + 1)e^{f(x^2 + 1)}$
- 2 $y = \frac{e^{f(x) + 1}}{f(e^x + 1)}$