ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG

# BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Email: ntcvantud@gmail.com

Tp. Hồ Chí Minh - 2018.

# ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

- Đạo hàm cấp cao
- Vi phân của hàm số một biến
- Tìm giới hạn dạng vô định theo L'Hosipital
- Khai triển Taylor - Maclaurint

# ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Đạo hàm cấp cao Cho $f(x)$ có đạo hàm cấp 1 trong lân cận $x_0$, nếu $f'$ có đạo hàm tại $x_0$, đặt

$$f''(x_0) = (f'(x))'\big|_{x=x_0}$$

Hay có thể viết $f''(x) = (f'(x))'$
Tổng quát: Đạo hàm cấp $n$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

# Đạo hàm cấp cao của các hàm cơ bản

1. $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$
2. $(e^x)^{(n)} = e^x$
3. $\left[(ax+b)^\alpha\right]^{(n)} =$ $a^n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}$
4. $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\dfrac{a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

1. $$[\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{a^n}{(ax+b)^n}$$
2. $$[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right)$$
3. $$[\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right)$$

1. Đạo hàm cấp cao của tổng và hiệu

$$(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$$

2. Đạo hàm cấp cao của tích (Công thức Leibnitz)

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm cấp cao của các hàm sau

1. $y = e^{f(x^2)}$. Tính $y''$
2. $y = \sqrt[3]{2x+3}$. Tính $f^{(4)}(x)$
3. $y = (2x^2 - 1)e^{2x}$. Tính $f^{(8)}(x)$
4. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. Tính $f^{(6)}(x)$

# Đạo hàm cấp cao của hàm theo tham số

Cho các hàm số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Đặt $z = y'(x)$ với $x = x(t)$ là

Đh của hàm theo tham số cấp 1. Với $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)'_x = \frac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'(t)} = \frac{\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_t}{x'(t)}$$

Như vậy $y''(x) = \dfrac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$

Tổng quát $y^{(n)}(x) = \dfrac{\left(y^{(n-1)}(x)\right)'_t}{x'(t)}$

## Ví dụ

1. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$. Tính $y''$

Bài tập về nhà: Tính đạo hàm cấp cao của các hàm sau

1. $y = \ln(f(x))$. Tính $f^{(2)}(x)$
2. $y = \sin(f(x) + f(2x+1))$. Tính $y^{(2)}(x)$
3. $y = (x^2 + x - 2)e^{2x}$. Tính $f^{(n)}(x)$
4. $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$. Tính $y^{(10)}(x)$
5. $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$. Tính $f^{(n)}(x)$

**ĐỊNH NGHĨA 3.1 (HÀM KHẢ VI)**

*$f$ khả vi tại $x_0$ nếu tồn tại một hằng số $A$ sao cho*

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = A.(x - x_0) + o(x - x_0)$$

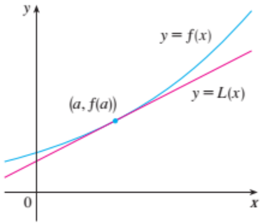
*Hay $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A.\Delta x + o(\Delta x)$*
*Khi đó đại lượng $A.\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm $f$ tại $x = x_0$, kí hiệu là $df(x_0)$*

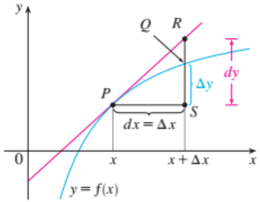
**ĐỊNH LÝ 3.1 (LIÊN HỆ GIỮA ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN)**

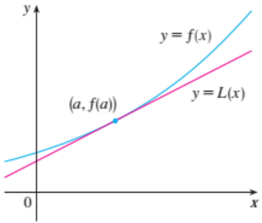
*$f$ khả vi tại $x_0 \Leftrightarrow f$ có đạo hàm tại $x_0$.*

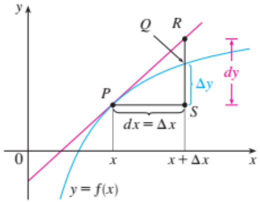
Từ Định lý suy ra $A = f'(x_0)$
Như vậy vi phân của hàm $f$ tại $x_0$

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x = f'(x_0).dx$$


y
y = f(x)
y = L(x)
(a, f(a))
0
x


y
Q
R
dy
Δy
P
S
dx = Δx
0
x
x + Δx
x
y = f(x)




**Ví dụ** Tính vi phân của các hàm sau

1. $y = \arctan(x^2 + x)$
2. $y = \ln(\sin x + \cos x)$

1. Vi phân cấp cao của hàm $f(x)$: Tức là $x$ là biến độc lập nên $dx = \Delta x$ là hằng số

$$
\begin{aligned}
d^2 f = d(df) &= d(f'(x).dx)\\
&= d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = (f''(x)dx).dx\\
&= f''(x)dx^2
\end{aligned}
$$

Suy ra $d^2 f = f''(x)dx^2$
Vi phân cấp $n$ là $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$

2. Vi phân cho hàm hợp $y = y(u(x))$

$$
\begin{aligned}
y = y'(x)dx &= y'(u(x)).u'(x).dx\\
\Rightarrow dy &= y'(u(x)).du
\end{aligned}
$$

Vi phân cấp $n$ của hàm hợp theo vi phân của biến độc lập $x$: $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$

Ví dụ: Tính $dy, d^2y$ của các hàm sau

1. $y = \ln(1+t^2), t = \tan x$
2. $y = f(e^x)$
3. $y = \sinh(e^{f(x)})$

Bài tập về nhà: Tính vi phân của các hàm sau

1. $y = \ln|x^2 - 3x + 2|$. Tính $d^2y$
2. $y = (x^2+1)^{\tan x}$. Tính $dy$
3. $y = \arcsin(f(2x+1))$. Tính $dy$
4. $y = \sqrt[3]{2x+3}$. Tính $d^4y$

## ĐỊNH LÝ 4.1

*Cho 2 hàm $f(x), g(x)$ khả vi trên khoảng $(a, b)$*

1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0(\infty)$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0(\infty)$
2. $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$
3. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Khi đó $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

**Ví dụ** Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x - \tan x}$

**Bài tập về nhà**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{chx}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} (\alpha > 0)$

## Dạng $0.\infty$

1. $0.\infty = \dfrac{0}{\frac{1}{\infty}} = \dfrac{0}{0}$
2. $0.\infty = \dfrac{\infty}{\frac{1}{0}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

## Dạng $\infty - \infty$

$\infty - \infty = \infty\left(1 - \dfrac{\infty}{\infty}\right)$

## Dạng $1^\infty, 0^0$

Ta có: $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln|y| = g(x)\ln|f(x)|$. Nếu $\lim_{x\to a} ln|y| = K$ thì $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^K$

1. $1^\infty = e^{\infty.\ln 1} = e^{0.\infty}$
2. $0^0 = e^{0.\ln 0} = e^{0.\infty}$

Ví dụ Tính $\lim_{x\to 0} = x^x$

Bài tập về nhà: Tính giới hạn sau

1. $\lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$
2. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$
3. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$
4. $\lim_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$
5. $\lim_{x\to 0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$