

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG



BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Email: ntcvantud@gmail.com

Tp. Hồ Chí Minh - 2019.

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

- Giới hạn của hàm số
- Một số giới hạn cơ bản
- Vận dụng giới hạn tìm tiệm cận

Tỷ lệ (tốc độ) thay đổi \rightarrow Nghiên cứu mối quan hệ giữa hai đại lượng thay đổi.

- ❶ Vận tốc (tốc độ thay đổi theo thời gian)
- ❷ Tỷ lệ lây nhiễm của một bệnh dịch (cá nhân mới nhiễm mỗi tháng)
- ❸ Nhiệt độ khí quyển thay đổi theo độ cao.
- ❹ ...

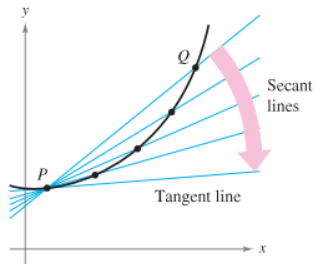
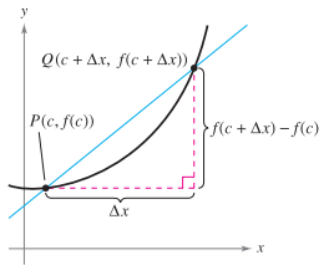
Bài tập thực tế 1. Nồng độ C của một loại thuốc trong máu của bệnh nhân t giờ sau khi tiêm được cho bởi

$$C(t) = \frac{0.15t}{t^2 + 3}.$$

a) Tìm $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$?. Giải thích ý nghĩa trong thực tế.
2. Tổng dân số P của một thị trấn nhỏ sau t năm tính từ thời điểm này được dự đoán sẽ là

$$P(t) = 35000 + \frac{10000}{(t + 2)^2}.$$

a) Tìm dân số trong tương lai.
b) Vẽ đồ thị P . Từ đồ thị cho biết thêm thông tin gì?



Secant line : Đường thẳng cắt 2 điểm

Tangent line : Đường tiếp xúc tại 1 điểm

GIỚI HẠN HÀM SỐ

ĐỊNH NGHĨA 1.1 (THEO NGHĨA THÔNG THƯỜNG)

Giả sử $f(x)$ **xác định**, L là một số thực. Khái niệm $f(x)$ tiến đến L khi x đủ gần a (**nhưng không bằng a**) là giới hạn của hàm số. Ta viết

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

và đọc "Giới hạn của $f(x)$ bằng L , khi x tiến đến a ".
cách kí hiệu thay thế là

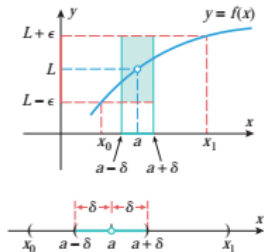
$$f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow a$$

ĐỊNH NGHĨA 1.2 (THEO NGÔN NGỮ DELTA-EPSILON)

Cho $f(x)$ là hàm xác định trên khoảng mở chứa x .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ sao cho}$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ nếu } 0 < |x - a| < \delta$$



Các tính chất của giới hạn

Giả sử $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ **tồn tại** và **có giá trị**, ta có các tính chất sau

- $$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

- $$\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

- $$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

- Nếu

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

thì

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Bài tập thực tế 1. Nồng độ C của một loại thuốc trong máu của bệnh nhân t giờ sau khi tiêm được cho bởi

$$C(t) = \frac{0.15t}{t^2 + 3}.$$

a) Tìm $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$?. Giải thích ý nghĩa trong thực tế.
2. Tổng dân số P của một thị trấn nhỏ sau t năm tính từ thời điểm này được dự đoán sẽ là

$$P(t) = 35000 + \frac{10000}{(t + 2)^2}.$$

a) Tìm dân số trong tương lai.
b) Vẽ đồ thị P . Từ đồ thị cho biết thêm thông tin gì?

Để quản lý chất lượng nước trong các hồ bị ô nhiễm, các nhà sinh học phải xác định độ sâu của các trầm tích và tốc độ bồi lắng. Người ta đã xác định rằng độ sâu của trầm tích $D(t)$ (cm) đối với thời gian (trong những năm trước năm 1990) đối với hồ Coeur D'Alene, Idaho, được mô hình hóa bằng phương trình

$$D(t) = 155(1 - e^{-0.0133t})$$

- 1 Tìm $D(20)$ và nêu ý nghĩa trong thực tế.
- 2 Tìm $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t)$ và nêu ý nghĩa trong thực tế.

Một số định lý và các giới hạn cơ bản

ĐỊNH LÝ 1.1 (ĐỊNH LÝ KẸP - SANDWICH)

Cho 3 hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ xác định và thỏa điều kiện $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Nếu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

thì

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

ĐỊNH LÝ 1.1 (ĐỊNH LÝ KẸP - SANDWICH)

Cho 3 hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định và thỏa điều kiện $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Nếu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

thì

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Giới hạn cho hàm mũ

Xét hàm số có dạng $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = a > 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} v(x) = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^b$$

Các giới hạn cơ bản

Số e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Số e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Các giới hạn cơ bản thường gặp khi $x \rightarrow 0$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\textcircled{10} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha$$

Các giới hạn cơ bản thường gặp khi $x \rightarrow \infty$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty, \alpha > 0$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^\alpha = \infty, \alpha > 0$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, a > 1$$

Các giới hạn cơ bản thường gặp khi $x \rightarrow \infty$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty, \alpha > 0$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^\alpha = \infty, \alpha > 0$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, a > 1$$

Các dạng vô định

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Các giới hạn cơ bản thường gặp khi $x \rightarrow \infty$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty, \alpha > 0$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^\alpha = \infty, \alpha > 0$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, a > 1$$

Các dạng vô định

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Ví dụ: Tính giới hạn sau

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \pi x}{2x^2}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 1} \right)^{3x^2 - 1}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{x+2}{x}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[10]{x}}{1 - \sqrt[15]{x}}$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{x - 2\pi}{\sin x}$$

Bài tập

- ❶ $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
- ❷ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2(2x))^{\frac{2}{x^2}}$
- ❸ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x + \frac{1}{x}}$
- ❹ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
- ❺ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^x - a}{x - 1}$
- ❻ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(\pi/x)}{x - 2}$

- ❼ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{\pi}{x}$
- ❽ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} \right)^x$
- ❾ $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
- ❿ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{e^{2x} + x^2}{x^2}$

GIỚI HẠN MỘT PHÍA

Chính phủ có xu hướng tăng thuế bán hàng trong những năm mà nhà nước phải đối mặt với thâm hụt ngân sách và sau đó cắt giảm thuế khi nhà nước có thặng dư. Biểu đồ dưới đây cho biết thuế bán hàng của TPHCM trong những năm gần đây. Đặt $T(x)$ đại diện cho thuế doanh thu trên mỗi ngàn đồng chi tiêu trong năm x . Tìm

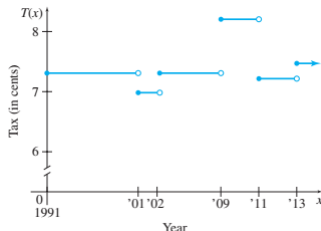
❶ $\lim_{x \rightarrow 94} T(x)$

❷ $\lim_{x \rightarrow 13^-} T(x)$

❸ $\lim_{x \rightarrow 13^+} T(x)$

❹ $\lim_{x \rightarrow 13} T(x)$

❺ $T(13)$



ĐỊNH NGHĨA 1.3 (GIỚI HẠN MỘT PHÍA)

Cho $f(x)$ tiến đến L_1 khi x đủ gần (*nhưng không bằng a*) với số a từ bên trái, thì ta viết

$$f(x) \rightarrow L_1 \text{ khi } x \rightarrow a^- \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$

thì L_1 được nói là *giới hạn trái* của $f(x)$ khi x tiến tới a .
Tương tự

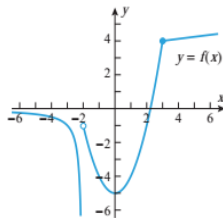
$$f(x) \rightarrow L_2 \text{ khi } x \rightarrow a^+ \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

thì L_2 được nói là *giới hạn phải* của $f(x)$ khi x tiến tới a .

Ví dụ

Tìm a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ với

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x+2), & x < -2 \\ x^2 - 5, & -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, & x > 3 \end{cases}$$

**ĐỊNH LÝ 1.2**

Hàm số $f(x)$ có giới hạn tại a khi và chỉ khi giới hạn trái và giới hạn phải **tồn tại** và **bằng nhau**.

GIỚI HẠN VÀ TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

Hai loài cùng tồn tại trong cùng một hệ sinh thái. Loài I có quần thể $P(t)$ trong t năm, trong khi Loài II có quần thể $Q(t)$. Trong đó P và Q được mô hình hóa bởi các hàm

$$P(t) = \frac{30}{3+t} \quad Q(t) = \frac{64}{4-t}$$

Với $\forall t \geq 0$, quần thể không âm.

- ❶ Dân số ban đầu của mỗi loài?
- ❷ Điều gì xảy ra với $P(t)$ khi t tăng? Gì xảy ra với $Q(t)$?
- ❸ Vẽ đồ thị của $P(t)$ và $Q(t)$.

ĐỊNH NGHĨA 2.1

Nếu một hàm f có giới hạn vô hạn một phía hoặc hai phía khi $x \rightarrow c$, thì đường $x = c$ được gọi là *tiệm cận đứng* của f .

ĐỊNH NGHĨA 2.2

Nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$$

thì ta nói đường $y = \alpha$ là một *tiệm cận ngang* của f . Tương tự, nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \beta$$

thì ta nói đường $y = \beta$ là một *tiệm cận ngang* của f .

Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, tìm **tiệm cận xiên**

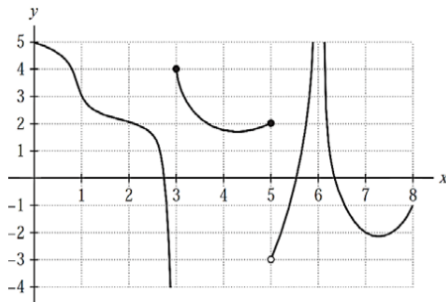
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b \end{cases}$$

Tiệm cận xiên **$y = ax + b$**

Ví dụ Tìm tiệm cận của các hàm sau

① $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

② $y = f(x) = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

Bài tập 1. Tìm giới hạn tại các nút $a = 1, 3, 5, 6$ 

2 Tìm k để $f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3}, & x \neq -3 \\ k, & x = -3 \end{cases}$$