ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Email: ntcvantud@gmail.com

Tp. Hồ Chí Minh - 2019.

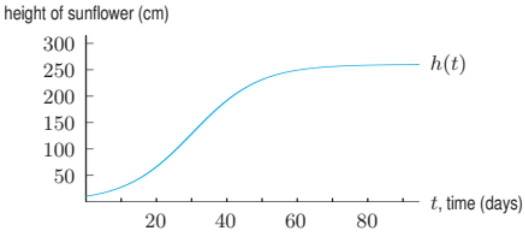
HÀM SỐ

- Định nghĩa hàm số
- Hàm hợp và Hàm ngược
- Hàm sơ cấp
- Hàm lượng giác
- Hàm Hyperbolic

KHÁI NIỆM HÀM SỐ

Một cây hướng dương được đo mỗi ngày t $(t \geq 0)$. Chiều cao, $h(t)$ cm, của cây có thể được mô hình hóa bằng cách sử dụng hàm logistic

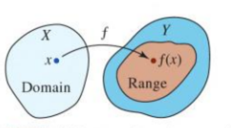
$$h(t) = \frac{260}{1 + 24(0.9)^t}$$



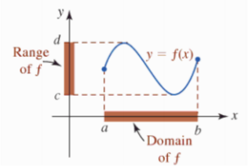
MXĐ, MGT của hàm là gì?. Điều đó có nói lên điều gì về chiều cao của hoa hướng dương không?

ĐỊNH NGHĨA 2.1

Hàm số $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ *là*
Quy luật tương ứng mỗi $x \in X$ *với duy nhất* $y = f(x) \in Y$.



(A) Miền xác định (Domain) và miền giá trị (Range) của hàm f



(B) Miền xác định và miền giá trị được thể hiện qua đồ thị

- Miền xác định(MXĐ): $D = \{x | f(x) \text{ có nghĩa}\}$
- Miền giá trị(MGT): $R = \{y = f(x), x \in D\}$

- Miền xác định(MXĐ): $D = \{x | f(x) \text{ có nghĩa}\}$
- Miền giá trị(MGT): $R = \{y = f(x), x \in D\}$

VÍ DỤ 2.1

Tìm MXĐ và MGT của các hàm sau

- $f(x) = x^2 + 3$
- $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$
- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Các bước tìm miền giá trị của hàm số

1. Đặt $y = f(x)$.
2. Giải nghiệm x theo y.
3. MGT của f là tập tất cả giá trị y với $x \in D$.

Các bước tìm miền giá trị của hàm số

1. Đặt $y = f(x)$.
2. Giải nghiệm x theo y.
3. MGT của f là tập tất cả giá trị y với $x \in D$.

Ví dụ: Tìm MXĐ và MGT của các hàm sau

1. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$
2. $y = \sqrt{x^2 - x + 5}$
3. $y = \log(1 - 2\cos x)$
4. $y = \cos^{-1} \dfrac{2x}{1 + x^2}$
5. $f(x) = \sin^{-1}\left(\log \dfrac{x}{10}\right)$

Ứng dụng: Phí vận chuyển

Dịch vụ giao hàng qua đêm tính phí 25 đồng cho gói hàng có trọng lượng 2 kg. Đối với mỗi kg bổ sung, hoặc một phần của chúng, chi phí tăng thêm là 3 đồng. Đặt D(w) biểu thị chi phí để gửi gói có trọng lượng w kg. Vẽ đồ thị D(w) với w trong khoảng [0, 6].

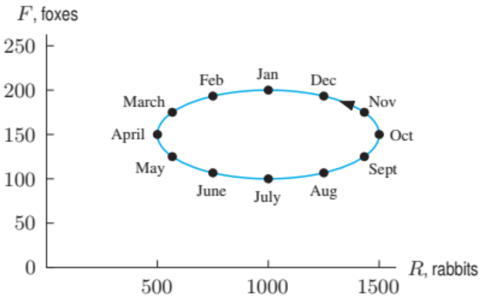
Trong một đợt hạn hán, dân của tỉnh Bến Tre, đã phải đối mặt với tình trạng thiếu nước nghiêm trọng. Để ngăn chặn việc sử dụng nước quá mức, tỉnh Bến Tre bắt đầu ra chính sách giá nước hàng tháng với một gia đình bốn người như sau

1. 1.22 ngàn /1 khối nước cho 12 khối đầu tiên
2. 10 ngàn cho 12 khối tiếp theo
3. 50 ngàn cho mỗi khối sau đó

Thể hiện hóa đơn nước hàng tháng cho một gia đình bốn người như là một hàm của lượng nước được sử dụng.

Trong một công viên động vật hoang dã, cáo săn mồi thỏ. Giả sử F là số lượng cáo, R là số thỏ, t là số tháng kể từ ngày 1 tháng 1,

$$R = 1000 - 500\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \qquad F = 150 + 50\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$



1. Dạng quen thuộc (tường minh): $y = f(x)$. Ví dụ:
   - $y = x^2,\ y = a^x,\ y = \sqrt{x}, \ldots$
   - $y = |x|$ (Hàm giá trị tuyệt đối)
   - $y = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$ (Hàm xác định từng mảnh)

1. Dạng quen thuộc (tường minh): $y = f(x)$. Ví dụ:
   - $y = x^2,\ y = a^x,\ y = \sqrt{x},\ldots$
   - $y = |x|$ (Hàm giá trị tuyệt đối)
   - $y = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}$ (Hàm xác định từng mảnh)
2. Dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Ví dụ:
   - $x = 2t+1,\ y = t-1$ (Đường thẳng)
   - $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ (Đường tròn)

1. Dạng quen thuộc (tường minh): $y = f(x)$. Ví dụ:
   - $y = x^2,\ y = a^x,\ y = \sqrt{x}, \dots$
   - $y = |x|$ (Hàm giá trị tuyệt đối)
   - $y = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}$ (Hàm xác định từng mảnh)
2. Dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Ví dụ:
   - $x = 2t+1,\ y = t-1$ (Đường thẳng)
   - $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ (Đường tròn)
3. Dạng ẩn $F(x,y) = 0 \Rightarrow y = f(x)$ (Implicit). Ví dụ

   Đường tròn $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0$

CÁC HÀM SƠ CẤP

HÀM MŨ $y = b^x,\ (b > 0)$

1. **MXĐ** : $\mathbb{R}$ **MGT** : $(0, +\infty)$
2. **Đơn điệu**

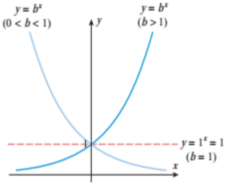
$$b > 1 \rightarrow \text{Hàm tăng}$$

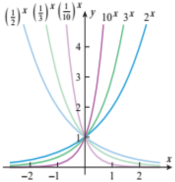
$$0 < b < 1 \rightarrow \text{Hàm giảm}$$

3. **Giới hạn**

$$b > 1: \lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty;\ \lim_{x\to-\infty} b^x = 0$$

$$0 < b < 1: \lim_{x\to+\infty} b^x = 0;\ \lim_{x\to-\infty} b^x = \infty$$





HÌNH: Đồ thị hàm mũ

NHẬN XÉT 2.1

Nếu tốc độ biến thiên (sự tăng trưởng hoặc suy giảm) được mô tả theo tỷ lệ phần trăm (hoặc tỷ lệ) không đổi thì hàm được biểu diễn dưới dạng hàm mũ.

NHẬN XÉT 2.1

Nếu tốc độ biến thiên (sự tăng trưởng hoặc suy giảm) được mô tả theo tỷ lệ phần trăm (hoặc tỷ lệ) không đổi thì hàm được biểu diễn dưới dạng hàm mũ.

Ví dụ

Các chất phóng xạ phân rã theo thời gian và tốc độ phân rã phụ thuộc vào nguyên tố. Nếu có G gram hydro H_3 được chứa trong một cái thùng, thì do sự phân rã phóng xạ, 1 năm sau sẽ có $0,783G$ gram hydro. Giả sử ban đầu với 50 gram hydro.

1. Biểu diễn G gam còn lại sau t năm là hàm số mũ của t.
2. Bao nhiêu hydro còn lại sau 5 năm?

HÀM LOGARIT $y = \log_b x,\ (b > 0)$

1. **MXĐ** : $x > 0$ **MGT** : $\mathbb{R}$
2. **Đơn điệu**

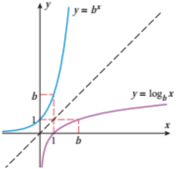
$$b > 1 \rightarrow \text{Hàm tăng}$$

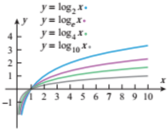
$$0 < b < 1 \rightarrow \text{Hàm giảm}$$

3. **Giới hạn**

$$b > 1 : \lim_{x\to+\infty} \log_b x = +\infty; \lim_{x\to0+} \log_b x = -\infty$$

$$0 < b < 1 : \lim_{x\to+\infty} \log_b x = -\infty; \lim_{x\to-\infty} \log_b x = +\infty$$

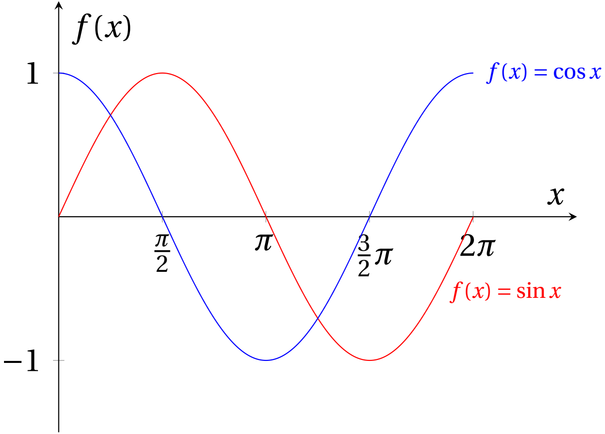


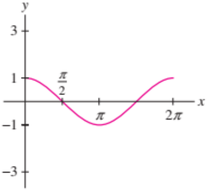


HÌNH: Đồ thị hàm logarit

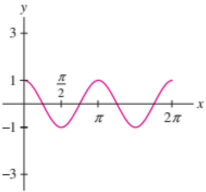
HÀM LƯỢNG GIÁC $f(x) = \sin x;\ f(x) = \cos x$

MXĐ : $\mathbb{R}$ **MGT** : $[-1, 1]$

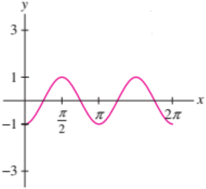




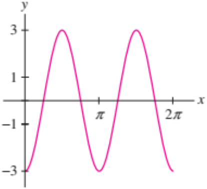
(A) $y = \cos x$



(B) $y = \cos 2x$



(C) $y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



(D) $y = 3\cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Hàm $y = a\sin(bx - c) + d$ hoặc $y = a\cos(bx - c) + d$,

1. a : Biên độ
2. $\dfrac{2\pi}{b}$: Chu kỳ
3. $\dfrac{b}{2\pi}$: Tần số
4. $\dfrac{c}{b}$: Thay đổi pha
5. d: Dịch chuyển theo trục tung

Bài tập thực tế: Giả thuyết Transylvania

Ngày Rằm (trăng tròn) có ảnh hưởng đến hành động liên quan tới sức khoẻ. Một cuộc điều tra đã cho thấy giữa những chu kì mặt trăng có mối quan hệ với số lượng những buổi tư vấn sức khoẻ toàn quốc, được cho bởi

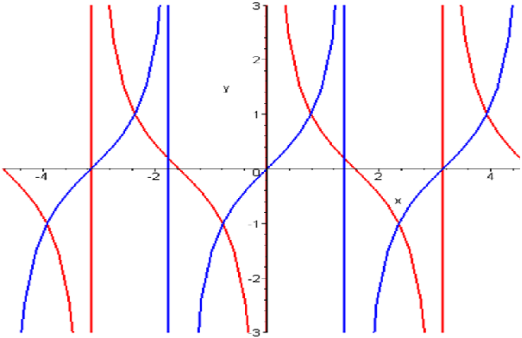
$$y = 100 + 1.8\cos\left[\frac{(t-6)\pi}{14.77}\right]$$

Trong đó y là số lượng tư vấn theo tỷ lệ phần trăm của trung bình hàng ngày và t là những ngày kể từ lần trăng tròn cuối cùng.

1. Chu kỳ của hàm này là bao nhiêu? Và có ý nghĩa gì trong thực tế?
2. Có trăng tròn vào 8/10/2014. Công thức này dự đoán số lượng tư vấn tối đa vào ngày nào? Dự đoán phần trăm tăng cho ngày hôm đó?
3. Công thức dự đoán gì cho ngày 25/10/2014?

HÀM LƯỢNG GIÁC $f(x) = \tan x;\ f(x) = \cot x$

$f(x) = \tan x$ **MXĐ** : $x \neq \pi/2 + k\pi$;
$f(x) = \cot x$ **MXĐ** : $x \neq k\pi$
MGT : $\mathbb{R}$



HÌNH: Đồ thị hàm $f(x) = \tan x$; $f(x) = \cot x$

HÀM HỢP VÀ HÀM NGƯỢC

Giả sử cân nặng của một bé trai từ 6 đến 16 tuổi phụ thuộc vào chiều cao của bé được mô phỏng dưới hàm

$$w = 4.4h - 150$$

Với cân nặng (kg), chiều cao (m). Giả sử chiều cao của bé lại phụ thuộc vào độ tuổi cho bởi hàm

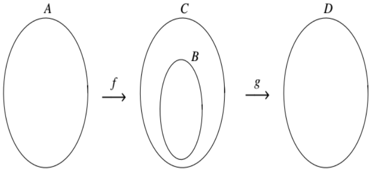
$$h = 1.9t + 40$$

Cân nặng bé 11 tuổi là bao nhiêu?

HÀM HỢP

ĐỊNH NGHĨA 2.2 (HÀM HỢP)

Cho 2 hàm $f : A \to B, g : C \to D$. Ta gọi hàm hợp của 2 hàm là $h = g \circ f$.
Được xác định như sau $h : A \to D, \quad h(x) = g(f(x))$



HÌNH: Hàm hợp

Độ cao của máy bay sau t cất cánh được cho bởi hàm bởi

$$A(t) = -2.8t^2 + 6.7t \text{ ngàn mét, } 0 \le t \le 2$$

Nhiệt độ không khí ở vùng độ cao x ngàn mét là

$$f(x) = 68 - 3.5x \text{ độ C}$$

1. Hàm hợp $h(t) = f(A(t))$ để đo gì?
2. Tính $h(1)$ và nếu ý nghĩa giá trị đó trong thực tế.
3. Tìm công thức $h(t)$
4. Hỏi hàm $A(f(x))$ có ý nghĩa thực tế trong trường hợp này không?

VÍ DỤ 2.2

Cho $f(x) = x^2 + 3$ *và* $g(x) = \sqrt{x}$. *Tìm* $f \circ g$, $g \circ f$

VÍ DỤ 2.2

Cho $f(x) = x^2 + 3$ *và* $g(x) = \sqrt{x}$. *Tìm* $f \circ g$, $g \circ f$

NHẬN XÉT 2.2

Hàm hợp không có tính giao hóa, tức là $f \circ g \neq g \circ f$.

BÀI TẬP 2.1

Cho $f(x) = x + 1$ *và* $g(x) = \sqrt{x}$. *Tìm MXĐ của* $f \circ g$, $g \circ f$

Năng lượng bơi

Tiêu hao năng lượng (tính bằng kcal / km) cho động vật bơi trên mặt nước được cho bởi hàm

$$y = f(x) = 0.01x^{0.88}$$

Trong đó x là trọng lượng của động vật tính bằng gam.

1. Tìm lượng năng lượng tiêu hao cho các động vật sau:
   a. Một con xạ hương nặng 800 g
   b. Một con rái cá biển nặng 20.000 g
2. Giả sử trọng lượng của động vật được tính bằng kilogam. Biết 1 kg = 1000 g, tìm hàm $x = g(z)$ cho trọng lượng của động vật tính bằng gam nếu z là trọng lượng động vật tính bằng kilogam.

HÀM NGƯỢC

ĐỊNH NGHĨA 2.3 (HÀM NGƯỢC)

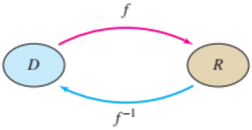
Nếu

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

thì

$$\begin{aligned} \varphi : Y &\to X \\ y &\mapsto x = \varphi(y) \text{ với } y = f(x) \end{aligned}$$

gọi là hàm ngược của f. Kí hiệu hàm ngược: $\varphi = f^{-1}$



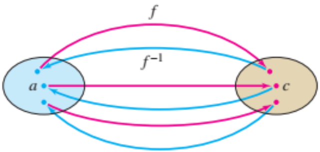
Ví dụ 1

$P = f(t)$, trong đó P đại diện cho số lượng loài chim trên một hòn đảo (đơn vị nghìn), t là số năm tính từ năm 2007

1. $f(4)$ ý nghĩa là gì?
2. $f^{-1}(4)$ ý nghĩa là gì?

Ví dụ 2

Giả sử g là hàm ngược, với $g(10) = -26$ và $g(0) = 7$. Bạn có biết giá trị nào khác của g và g^{-1} không?



NHẬN XÉT 2.3

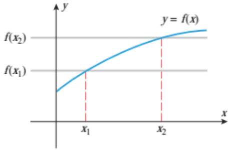
- *MXĐ của* f^{-1} = *MGT của* f
- *MGT của* f^{-1} = *MXĐ của* f

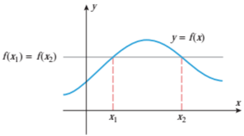
Có phải hàm số nào cũng có hàm ngược hay không?

Có phải hàm số nào cũng có hàm ngược hay không?

ĐỊNH LÝ 2.1

Hàm số có hàm ngược nếu và chỉ nếu nó là song ánh.



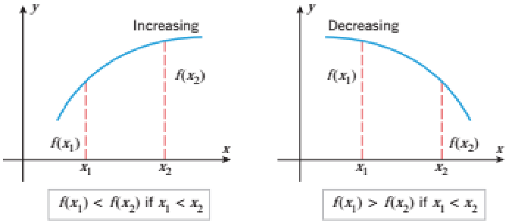


(B) Không song ánh, bởi vì $f(x_1) = f(x_2)$ mà

(A) Song ánh, bởi vì $f(x_1) \neq f(x_2)$ nếu $x_1 \neq x_2$ $x_1 \neq x_2$

NHẬN XÉT 2.4

Hàm Tăng (Increasing) / Giảm (Decreasing) có hàm ngược.



HÌNH: Hàm Tăng (Increasing) / Giảm (Decreasing)

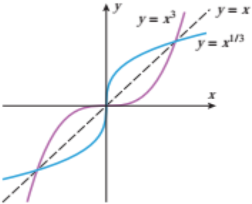
Ví dụ: Chứng minh hàm $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$ có hàm ngược và tìm f^{-1}

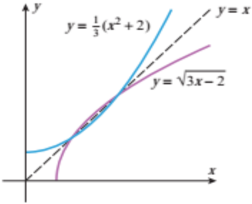
1. Tìm MXĐ của $f(x)$ và MGT của $f^{-1}(x)$
2. Tìm MXĐ của $f^{-1}(x)$ và MGT của $f(x)$

BÀI TẬP 2.2

Các hàm sau có hàm ngược không?. Tìm hàm ngược nếu có. Sau đó tìm MXĐ và MGT của f^{-1}.

- $f(x) = 3 + \sqrt{2x - 1}$
- $f(x) = x^2 - 2x$
- $f(x) = \dfrac{x-1}{x-4}$
- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$





HÌNH: Đồ thị hàm f và f^{-1}

ĐỊNH LÝ 2.2

Nếu hàm f có hàm ngược f^{-1} thì đồ thị của $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ là đối xứng qua đường thẳng $y = x$.

Các bước tìm hàm ngược

B1: Từ pt $y = f(x)$, giải tìm nghiệm $x = f^{-1}(y)$.

B2: Đổi vai trò x, y trong biểu thức nghiệm.

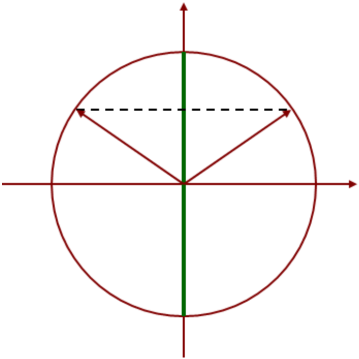
Bài tập về nhà

Cửa hàng in áo thun theo yêu cầu với giá 120.000 áo thun cộng với chi phí in 20.000.

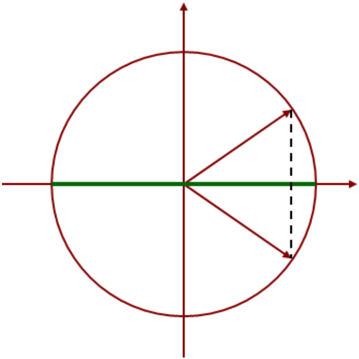
1. Viết một hàm mô tả chi phí C của áo thun in tại cửa hàng.
2. Chứng minh $C(n)$ là hàm khả nghịch (có hàm ngược).
3. Tìm hàm ngược của $C(n)$. Nêu ý nghĩa trong thực tế?
4. Với 1.500.000 tính số lượng áo thun cửa hàng có thể sản xuất.

HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

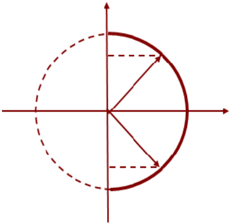
Lưu ý: Các hàm lượng giác trên toàn bộ miền xác định không phải song ánh



(A) Các góc φ và $\pi - \varphi$ có cùng giá trị sin



(B) Các góc φ và $-\varphi$ có cùng giá trị cos

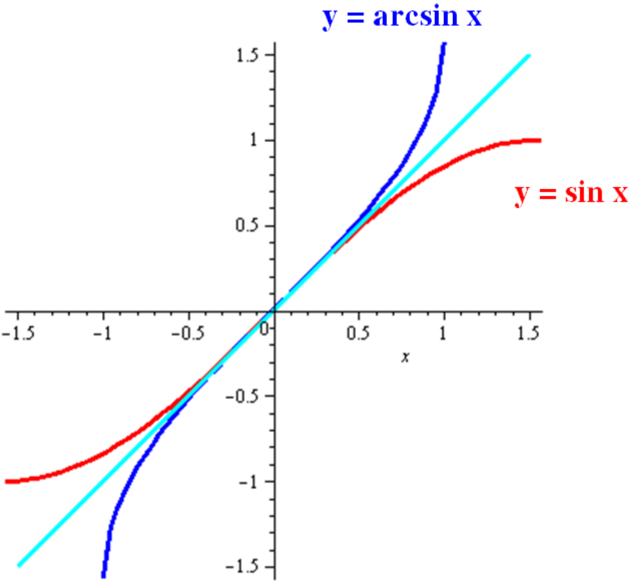


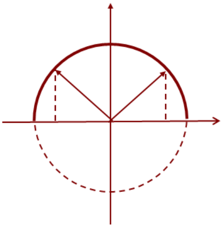
- $y = \sin x$ là song ánh trên $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\text{s.ánh}} [-1, 1]$ nên tồn tại hàm ngược.

$$y = \sin^{-1} x = \arcsin x : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \arcsin y$$


y = arcsin x
y = sin x
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
x

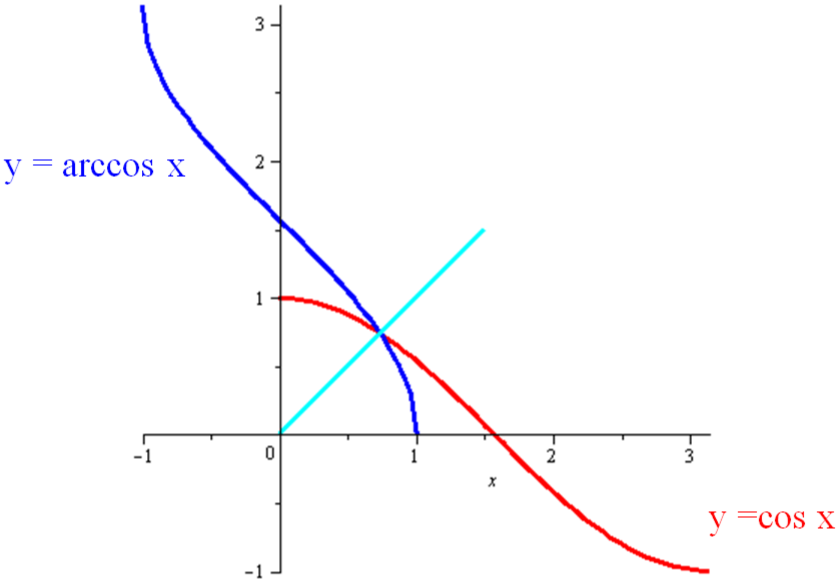


- $y = \cos x$ là song ánh trên $[0, \pi]$

$\cos : [0, \pi] \xrightarrow{\text{s.ánh}} [-1, 1]$ nên tồn tại hàm ngược.

$$y = \cos^{-1} x = \arccos x : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$y = \cos x, x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x = \arccos y$$


y = arccos x
y =cos x
3
2
1
-1
-1
0
1
2
3
x

Tương tự

- $y = \tan x$ là song ánh : $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$$y = \arctan x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

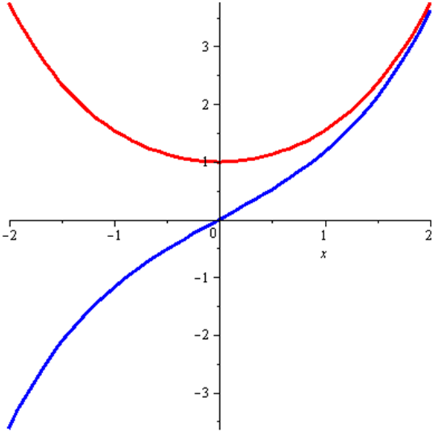
- $y = \cot x$ là song ánh : $(0, \pi) \to \mathbb{R}$

$$y = arccotx : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

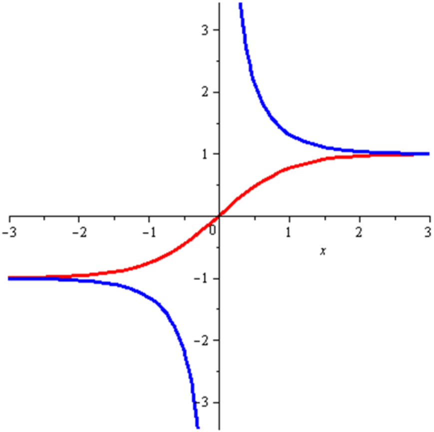
HÀM HYPERBOLIC

1. $\sinh x = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $\cosh x = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
3. $\tanh x = thx = \dfrac{shx}{chx}$
4. $\coth x = cthx = \dfrac{chx}{shx}$
5. $\sec x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$
6. $\csc x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

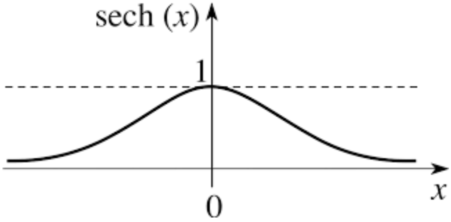
Miền xác định, miền giá trị.
Xét tính chẵn, lẻ.



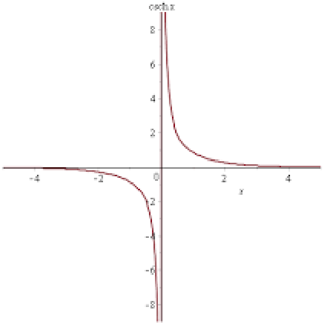
(A) Đồ thị f(x) = sinh x, f(x) = cosh x



(B) Đồ thị f(x) =tanh x, f(x) = coth x



(A) Đồ thị f(x) = sec x



(B) Đồ thị f(x) = csc x

Hàm Hyperbolic		
Hàm	MXĐ	MGT
$y = \sinh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = \cosh x$	$\mathbb{R}$	$x \geq 1$
$y = \tanh x$	$\mathbb{R}$	$\lvert x\rvert < 1$
$y = \coth x$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$\lvert x\rvert > 1$
$y = \sec x$	$\mathbb{R}$	$0 < x \leq 1$
$y = \csc x$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$x \neq 0$

NHẬN XÉT 2.5

Hàm $y = \cosh x$ *và* $y = \sec x$ *không phải hàm song ánh trên toàn miền xác định.*

CHÚ Ý 2.1

Hàm $y = \cosh x$ *và* $y = \sec x$ *chỉ xét trên đoạn* $[0, +\infty)$ *để tồn tại hàm ngược.*

Hàm ngược Hyperbolic	
Hàm	MXĐ
$y = \sinh^{-1} x$	$\forall x$
$y = \cosh^{-1} x$	$x \geq 1$
$y = \tanh^{-1} x$	$\lvert x\rvert < 1$
$y = \coth^{-1} x$	$\lvert x\rvert > 1$
$y = \sec^{-1} x$	$0 < x \leq 1$
$y = \csc^{-1} x$	$x \neq 0$

Ví dụ

1. Chứng minh $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x$
2. Giải phương trình $\sinh(x) = 1$

BẢNG CÔNG THỨC HÀM HYPERBOLIC

Công thức lượng giác	Công thức Hyperbolic
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	$\text{ch}(x \pm y) = \text{ch}x\text{ch}y \pm \text{sh}x\text{sh}y$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$	$\text{sh}(x \pm y) = \text{sh}x\text{ch}y \pm \text{sh}y\text{ch}x$
$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$	$\text{ch}(2x) = 2\text{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\text{sh}^2 x$
$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$	$\text{sh}(2x) = 2\text{sh}x\text{ch}x$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\text{ch}x + \text{ch}y = 2\text{ch}\frac{x+y}{2}\text{ch}\frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$	$\text{ch}x - \text{ch}y = 2\text{sh}\frac{x+y}{2}\text{sh}\frac{x-y}{2}$