ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

Nguyễn Thị Cẩm Vân

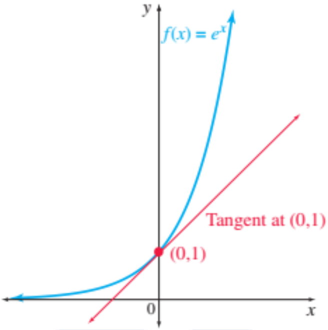
Email: ntcvantud@gmail.com

Tp. Hồ Chí Minh - 2019.

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

- Khai triển Taylor - Maclaurint
- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số một biến
- Định lý giá trị trung bình

KHAI TRIỂN TAYLOR-MACLAURINT

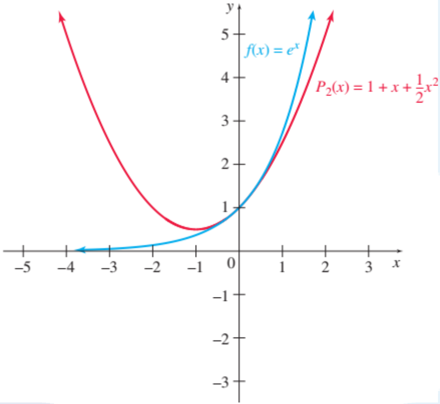


$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

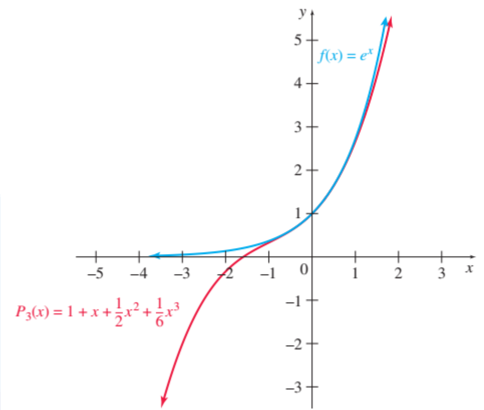
$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

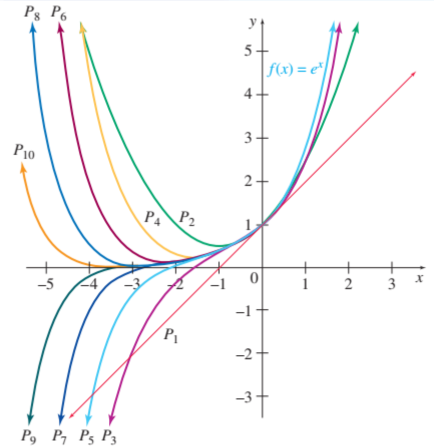
$$y = f(0) + f'(0).x$$

x	$P_1(x) = 1 + x$	$f(x) = e^x$
−1	0	0.3678794412
−0.1	0.9	0.9048374180
−0.01	0.99	0.9900498337
−0.001	0.999	0.9990004998
0	1	1
0.001	1.001	1.001000500
0.01	1.01	1.010050167
0.1	1.1	1.105170918
1	2	2.718281828


y
5
4
3
2
1
0
–1
–2
–3
–5
–4
–3
–2
–1
1
2
3
x
f(x) = e^x
P_2(x) = 1 + x + 1/2 x^2

x	$P_1(x) = 1 + x$	$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$	$f(x) = e^x$
−1	0	0.5	0.3678794412
−0.1	0.9	0.905	0.9048374180
−0.01	0.99	0.99005	0.9900498337
−0.001	0.999	0.9990005	0.9990004998
0	1	1	1
0.001	1.001	1.0010005	1.001000500
0.01	1.01	1.01005	1.010050167
0.1	1.1	1.105	1.105170918
1	2	2.5	2.718281828


y
5
4
3
2
1
$f(x) = e^x$
–5
–4
–3
–2
–1
0
1
2
3
x
–1
–2
–3
$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$



P_8
P_6
P_{10}
P_4
P_2
P_1
P_9
P_7
P_5
P_3
$f(x) = e^x$
y
x
5
4
3
2
1
0
–1
–2
–3
–5
–4
–3
–2
–1
1
2
3

ĐỊNH LÝ 2.1 (CÔNG THỨC TAYLOR)

Cho hàm f khả vi đến cấp $n+1$ trong (a,b). Khi đó, với $x, x_0 \in (a,b)$ ta có

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n$$

R_n gọi là phần dư trong công thức khai triển Taylor của hàm. Có 2 dạng phần dư thường gặp là

Phần dư dạng Lagrange: $R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Phần dư dạng Peano: $R_n = o((x-x_0)^n)$

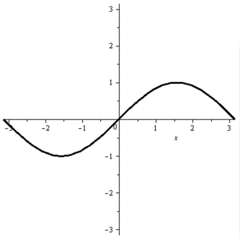
ĐỊNH LÝ 2.2 (CÔNG THỨC MACLAURINT)

f có đạo hàm cấp n tại x_0:

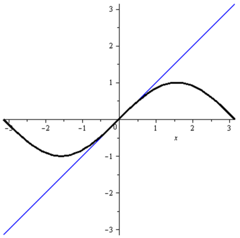
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

Khi $x_0 = 0$: thì công thức khai triển Taylor được gọi là công thức khai triển Maclaurin.

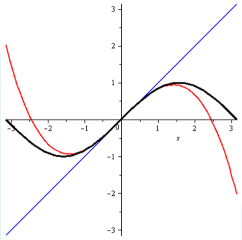
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + R_n$$



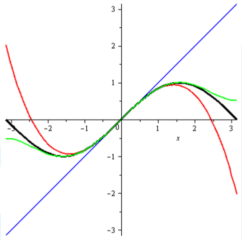
HÌNH: $f(x) = \sin x$



HÌNH: $f(x) = x + o(x)$



HÌNH: $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$



HÌNH: $f(x) = \sum_{n=1}^{4} (-1)^n \frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} + o(x^7)$

Ví dụ

1. Tìm khai triển Taylor đến cấp 3 trong lân cận $x_0 = 1$ cho $f(x) = \dfrac{1}{x}$

2. Khai triển Maclaurint đến cấp 3 của hàm $f(x) = \tan x$

KHAI TRIỂN MACLAURINT CỦA CÁC HÀM CƠ BẢN

1. $f(x) = e^x$

$$e^x = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + o\left((x-0)^n\right)$$

Ta có $f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$

Nên $e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$

2. $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o\left(x^n\right)$$

Ta có $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \Rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$

Nên $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$

3. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

$$(1+x)^{\alpha} = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$$

Ta có $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$\Rightarrow f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$

Nên $(1+x)^{\alpha} = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$

4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Áp dụng cho $\alpha = -1$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

5. $f(x) = \sin x$

Ta có $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(k)}(0) = \sin k\frac{\pi}{2}$

$k = 2p \Rightarrow f^{(2p)}(0) = 0$

$k = 2p - 1 \Rightarrow f^{(2p-1)}(0) = (-1)^{p-1}$

Mà $\sin x = f(0) + \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^{2n-1}\right)$

Nên $\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o\left(x^{2n-1}\right)$

Khai triển Maclaurin các hàm cơ bản

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

3.
$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

4. $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

5. $$\sin x = x - \underbrace{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n-1}\right)}_{\text{bậc cao hơn } x \text{ khi } x \to 0}$$

$$\Rightarrow \sin x \sim x, \text{khi } x \to 0$$

6. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)}_{\text{bậc cao hơn } x^2 \text{ khi } x \to 0}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \text{khi } x \to 0$$

7. $$\sinh x = x + \underbrace{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n-1}\right)}_{\text{bậc cao hơn } x \text{ khi } x \to 0}$$

$$\Rightarrow \sinh x \sim x, \text{khi } x \to 0$$

8. $$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)}_{\text{bậc cao hơn } x^2 \text{ khi } x \to 0}$$

$$\Rightarrow \cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}, \text{khi } x \to 0$$

Ví dụ: Khai triển Taylor đến cấp n tại $x = x_0$

1. $f(x) = e^{x^2-2x+2}, n = 6, x_0 = 1$
2. $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2+1}, n = 4, x_0 = 0$
3. $f(x) = \ln(1+\sin 2x) - 2\tan x, n = 3, x_0 = 0$
4. $f(x) = (1+x^2)\sin x; n = 3, x_0 = 0$

Các lưu ý khi viết khai triển Taylor tai x_0

1. Luôn luôn chuyển về khai triển Maclaurin
2. Áp dụng các công thức cơ bản trên biểu thức $u(x)$ với điều kiện $u(x_0) = 0$.
3. Khai triển cho tổng hiệu: từng hàm phải khai triển đến bậc được yêu cầu.
4. Khai triển cho tích: lấy bậc yêu cầu trừ ra bậc thấp nhất trong khai triển mỗi hàm để biết được bậc khai triển của hàm còn lại.
5. Khai triển cho hàm hợp: tính bậc VCB cho $u(x)$.

Theo một nghiên cứu, xác suất P để một loài nào đó sống sót cho bởi

$$P = 1 - e^{-2k}$$

với k là một hằng số. Sử dụng một đa thức Taylor để chứng minh rằng nếu k đủ nhỏ, thì P khoảng $2k$.

Liều lượng thuốc trong máu

Liều lượng (đơn vị ml) của một loại thuốc nào đó trong máu sau (x phút) thực hiện là

$$A(x) = \frac{5x}{1+8x}$$

Tìm $A(0.03)$

ĐỊNH LÝ 3.1 (TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO)

Hàm số $f(x)$, có đạo hàm tại điểm x_0 đến cấp n, được biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

trong đó

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!};\, k = 0, \ldots n \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = k! a_k.$$

Ví dụ: Khai triển Maclaurint hàm $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 4)$ và tính $f^{(10)}(0)$

2. Tìm tổng hệ số trong khai triển của $f(x) = (1 + x^2)\sin x;\, n = 3, x_0 = 0$

Bài tập về nhà: Khai triển Taylor đến cấp n tại $x = x_0$ và tính đạo hàm cấp cao.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, n = 3, x_0 = 2$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}, n = 4, x_0 = -1$
3. $f(x) = \ln\dfrac{2x+1}{2-5x}, n = 3, x_0 = 0$. Tính $f'''(0)$
4. $f(x) = \ln\cos x, n = 6, x_0 = 0$. Tính $f^{(6)}(0)$
5. $f(x) = e^{\cos x}, n = 4, x_0 = 0$. Tính $f^{(4)}(0)$

Áp dụng khai triển Taylor trong tính giới hạn

1. Nếu các phương pháp khác (như giới hạn cơ bản, VCB, L'Hospital) tính quá dài hoặc không tính được. Đa số các bài dùng Taylor rơi vào trường hợp thay VCB hoặc VCL qua tổng, hiệu gặp triệt tiêu. Do đó các biểu thức được khai triển đến khi hết triệt tiêu ở phần đa thức thì dừng.

Ví dụ: Tính giới hạn

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x - \tan x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin x - x(x+1)}{x - x^3}$

Bài tập về nhà: Áp dụng khai triển Taylor-Maclaurint để tính giới hạn.

1. $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$
2. $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^2}$
3. $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$
4. $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$
5. $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

Tìm tương đương VCB

Đa số các bài dùng Taylor rơi vào trường hợp thay VCB hoặc VCL qua tổng, hiệu gặp triệt tiêu.
Do đó các biểu thức được khai triển đến khi hết triệt tiêu ở phần đa thức thì dừng.

Ví dụ

1. $f(x) = e^x - \sqrt{1+2x}$. Tìm α, β sao cho hàm $f(x) \sim \alpha x^\beta$ khi $x \to 0$

Bài tập về nhà: Áp dụng khai triển Taylor - Maclaurint để tìm bậc $\alpha(x)$, dạng tương đương ax^{α}.

1. $x \to 0 : xe^{x} - \sin x - \tan x^{2} \sim ax^{\alpha}$. Tìm a, α
2. $x \to 0 : e^{x+x^{2}} - \cos x - \sqrt[3]{1+3x} \sim ax^{\alpha}$. Tìm a, α
3. $x \to 0 : \dfrac{x}{1+x^{2}} - xex^{2} + \sin x^{2} \sim ax^{\alpha}$. Tìm a, α
4. $\alpha(x) = e^{x} - \sin x^{2} - \sqrt{1+2x}$ khi $x \to 0$. Tính bậc của $\alpha(x)$