

# 相干逻辑与蕴涵怪论

冯 棉

(华东师范大学哲学系, 上海, 200062)

**摘要:**“蕴涵怪论”产生于命题逻辑而非谓词逻辑的层面上, 相干性的缺失导致某些“蕴涵怪论”的产生, 却不是另一些“蕴涵怪论”生成的原因。通过对“蕴涵怪论”的分类处理, 并结合现有相干逻辑系统的恰当性分析, 有助于探索相干逻辑研究的新思路。

**关键词:** 相干逻辑; 蕴涵怪论; 衍推; 恰当性

(中图分类号) B81

(文献标识码) A

(文章编号) 1002-8862-(2005)增刊-0076-04

## 1. 相干逻辑的历史和研究现状

相干逻辑是上世纪 50—60 年代建立的重要的现代逻辑分支。其基本出发点是: 坚持演绎推理的相干性, 拒斥不根据前提的推理方式, 进而避免形形色色的“蕴涵怪论”。与经典逻辑相比, 相干逻辑更接近人们的日常推理方式, 因而对人工智能的开发具有重要的理论意义和实际价值。

相干逻辑的早期工作可以追溯到 I.E.Orlov 于 1928 年提出的公理系统, 它是标准的相干命题逻辑系统 R 的“蕴涵—否定片段”<sup>[1]</sup>。1950 年, 莫绍揆教授建构了相干命题逻辑系统 R 的“纯蕴涵片段”<sup>[2]</sup>。1956 年, W.Ackermann 构造了完整的相干命题逻辑系统<sup>[3]</sup>, 50 年代末至 60 年代, A. R.Anderson 和 N. D. Belnap 对 Ackermann 系统作了修改, 建立了具有模态涵义的相干命题逻辑系统 E (具有模态涵义的相干逻辑称为“衍推逻辑”), 进而又构建了标准的相干命题逻辑系统 R, 这标志着相干逻辑这一现代逻辑分支学科的建立。

之后, 相干逻辑的研究主要在以下几个方向上进行:

### 1. 相干逻辑系统的建构以及相干逻辑与其它现代逻辑分支的结合研究

已经建构了多种相干逻辑系统 (除了前述的 E、R 之外, 还有相干命题逻辑系统 B、T、Efde、RM 和相干谓词逻辑系统 BQ、EQ、RQ 等等), 包括公理系统、自然推理系统和加标演绎系统 (D. M. Gabbay)<sup>[4]</sup>, 并对这些系统的特性和诸系统之间的相互关系作了较充分的讨论。近年来, 相干逻辑与其它现代逻辑分支的结合研究受到重视, 已经在相干模态逻辑 (衍推逻辑)、相干道义逻辑 (W. Stelzner)<sup>[5]</sup>、相干次协调逻辑 (桂起权等, 张清宇)<sup>[6] [7]</sup>和相干时态逻辑 (J. Cheng)<sup>[8]</sup>等方向上作了多方面的研究。

## 2. 相干逻辑的语义研究

相干逻辑的形式语义主要有代数语义、集合论—关系语义和邻域语义。在代数语义方面, 有建立在德摩根格基础上的相干代数 (J. M. Dunn)<sup>[9]</sup>和自由半群框架语义 (D. M. Gabbay)<sup>[4]</sup>。在集合论—关系语义方面, 有算子语义 (A. Urquhart)<sup>[10]</sup>和极具影响力的三元关系语义 (R. Routley and R. K. Meyer)<sup>[11]</sup>。相干邻域语义是近年来发展起来的, 刘壮虎教授作了开创性的工作, 他的相干邻域语义简明且具有普适性<sup>[12]</sup>; 更新的成果有: 基于衍推的邻域语义 (L. Goble)<sup>[13]</sup>和四值邻域语义理论 (E. D. Mares)<sup>[14]</sup>。在相干逻辑的直观语义方面, 相干关系

**基金项目:** 国家社会科学基金 (相干逻辑研究) 资助项目 (05BZX050)。

**作者简介:** 冯棉 (1948—), 男, 上海人, 华东师范大学哲学系教授。主要研究方向: 现代逻辑, 逻辑哲学。

语义的信息论解释 (E. D. Mares)<sup>[15]</sup>较有影响。

### 3. 证明论和判定问题的研究

证明论方面的重要成果有相干演绎定理和“相干原理”(A. R. Anderson and N. D. Belnap)<sup>[16]</sup>等,后者揭示了相干蕴涵是一种顾及前、后件之间内容方面联系的蕴涵,而这种内容方面联系又是由共同的命题变元来显现的。判定问题的最重要结果是:A. Urquhart 证明了相干逻辑系统 T、E 和 R 的不可判定性<sup>[17]</sup>。另外,通过组合算子,构建证明论与形式语义之间桥梁的工作,也是研究的重要一环<sup>[18]</sup>。

在相干逻辑的研究中,以下文献值得重视:参考文献[9]和[17]对相干逻辑的研究成果作了阶段性的总结,是详尽的百科全书式的研究著作;参考文献[11]、[18]和[19]则是对相干逻辑的概要性的综述。

## 2. 蕴涵怪论

“蕴涵怪论”困扰着现代逻辑:经典逻辑中有“实质蕴涵怪论”,模态逻辑中有“严格蕴涵怪论”等等。最典型的“蕴涵怪论”是经典命题逻辑中的下述重言式:

- ①  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- ②  $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
- ③  $q \rightarrow (p \vee \neg p)$
- ④  $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
- ⑤  $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
- ⑥  $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$
- ⑦  $(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$

先来分析表达式①—⑤:

当我们把表达式中的 $\neg$ 、 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 分别解释为“并非…”、“…并且…”、“…或者…”和

表示充分条件关系的联结词“如果…,那么…”时,①意味着,如果 $p$ 是真的,那么任何命题 $q$ 都可以推出 $p$ ,即任何命题可以推出一个真命题;②意味着,如果 $p$ 是假的,那么 $p$ 可以推出任何命题 $q$ ,即一个假命题可以推出一切命题;③意味着,任何命题 $q$ 都可以推出如 $p \vee \neg p$ (排中律)这样的重言命题;④意味着,如 $p \wedge \neg p$ 这样的矛盾命题可以推出一切命题;⑤意味着,任何两个命题 $p$ 、 $q$ 之间,不是前者推出后者,就是后者推出前者。

这五个表达式的共同点是:命题 $p$ 与命题 $q$ 之间可以没有任何内容、意义方面的联系,即这两个命题之间缺乏相干性,这是导致上述五个“蕴涵怪

论”的根本原因。我想把这类由于相干性缺失所造成的“蕴涵怪论”称为“第一类蕴涵怪论”。

再来看表达式⑥:

当我们把⑥式中的 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 分别解释为“…并且…”、“…或者…”和表示充分条件关系的联结词“如果…,那么…”时,⑥意味着:如果以 $p$ 和 $q$ 为前提推出了 $r$ ,那么,不是 $p$ 能推出 $r$ 就是 $q$ 能推出 $r$ 。

在上述解释下,⑥式不是一个直观上有效的推理形式,要说明这一点,只要举一个具体的实例就可以了。下面是一个数学的实例:

用 $a$ 、 $b$ 表示任意的实数,用三个具体命题“ $a \geq b$ ”(a 不大于 b)、“ $a \leq b$ ”(a 不小于 b)、“ $a = b$ ”分别取代 $p$ 、 $q$ 和 $r$ ,则⑥式前件意为“如果( $a \geq b$ 并且 $a \leq b$ ),那么 $a = b$ ”,是一个真命题,但是,仅由 $a \geq b$ 却推不出 $a = b$ ,仅由 $a \leq b$ 也推不出 $a = b$ ,进而知其后件“(如果 $a \geq b$ ,那么 $a = b$ )或者(如果 $a \leq b$ ,那么 $a = b$ )”并不是真命题,由此可见,⑥式不是直观上有效的推理形式。

在科学研究和日常生活中,类似的实例很多。我们常碰到这样的情况:结论 $r$ 是由两个前提 $p$ 和 $q$ 共同得出的,这两个前提缺一不可,单独的一个前提(无论是 $p$ 还是 $q$ )并不能推出 $r$ 。例如,当我们把理想婚姻( $r$ )界定为夫妻双方互相爱慕( $p \wedge q$ )的婚姻时,丈夫对妻子的爱慕 $p$ (或妻子对丈夫的爱慕 $q$ )并不是理想婚姻( $r$ )的充分条件。

与⑥类似的还有

- ⑦  $(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$ ,

它意味着:如果以 $p$ 为前提推出了“ $q$ 或者 $r$ ”,那么,不是 $p$ 能推出 $q$ 就是 $p$ 能推出 $r$ 。

⑦式也不是一个直观上有效的推理形式,下面是一个数学的实例:

用 $a$ 、 $b$ 表示任意的整数, $p$ 为“ $a \neq b$ ”, $q$ 为“ $a > b$ ”, $r$ 为“ $a < b$ ”。这时,⑦的前件意为

“如果 $a \neq b$ ,那么, $a > b$ 或者 $a < b$ ”,

是一个真命题;但是,仅由 $a \neq b$ 却推不出 $a > b$ ,仅由 $a \neq b$ 也推不出 $a < b$ 。

请注意,⑥式并不违反相干性:当 $p$ 和 $q$ 可以推出 $r$ 时,意味着 $p$ 、 $q$ 和 $r$ 是相干的,即⑥式前件 $(p \wedge q) \rightarrow r$ 的相干性保证了其后件 $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ 的(两个析取支的)相干性。⑦式也是如此。由此可见,相干性的缺失导致某些“蕴涵怪论”(例如①—⑤)

的产生,却不是另一些“蕴涵怪论”(例如⑥⑦)生成的原因。我想把后一类“蕴涵怪论”(例如⑥⑦)称为“第二类蕴涵怪论”,其特点是:具有相关性,但不是直观上有效的推理形式。

对“蕴涵怪论”的分类处理,有助于澄清各类“蕴涵怪论”的不同成因,并推动相关逻辑的深入研究。

### 3. 相关逻辑系统的恰当性

逻辑学的研究表明,以下四组公式的合并使用会导致蕴涵怪论:

- (1)  $(A \wedge B) \rightarrow A$  和  $(A \wedge B) \rightarrow B$
- (2)  $A \rightarrow (A \vee B)$  和  $B \rightarrow (A \vee B)$
- (3)  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (4)  $((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$

为了避免形形色色的“蕴涵怪论”,相关逻辑采纳了(1)——(3),排斥了(4),这一处理方式引起了争议。(4)通常被称作“选言推理”或“析取三段论”,意为:如果 A 或者 B 为真,并且 A 不真,那么 B 为真。从直观上看,(4)式的特例 $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ 是正确的推理形式,相关逻辑为了避免“蕴涵怪论”放弃了(4)似乎是不得已而为之,但这样的处理方式使得 B、T、E、R 等相关逻辑系统的范围都显得过于狭窄。这提示我们:有必要对上述(1)——(4)重新做出评估。

笔者在《含预设的推理与推理的有效性》<sup>[20]</sup>一文中提出了日常的具体推理具有三个基

本要求的观点,这三个基本要求是:“必然性”(当全部前提都真时,必然能得出结论为真)、“相关性”(推理的前提和结论之间有意义、内容方面的联系)和“前提可假设为真”(其先决条件是:全部前提必须是无逻辑矛盾的)。据此考察表达式(1),其特例中就包含了前件为矛盾式的情况,例如

$$(p \wedge \neg p) \rightarrow p \text{ 和 } (p \wedge \neg p) \rightarrow \neg p$$

就是如此,违反了“前提可假设为真”的要求。因此,一个值得尝试的构想是:对(1)的使用加以限制,即不允许其前件  $A \wedge B$  是矛盾式。对(2)——(4)式的使用也可作类似的考虑,以此来避免“蕴涵怪论”,并探寻相关逻辑研究的新思路。

此外,现有的相关谓词逻辑系统的语义不能令人满意,相关谓词逻辑系统 BQ、EQ、RQ 相对于常域语义不具有完全性,取而代之的是 K. Fine 建构的极为复杂的变域语义<sup>[21]</sup>,这种语义繁琐而不自然,

削弱了相关谓词逻辑的实际效用。从恰当性的角度来看,有必要加以改进。

上述缺陷的产生,究其原因,是因为现有的相关谓词逻辑系统对全称语句采用了相关蕴涵式的处理方式。笔者的观点是:“蕴涵怪论”产生在命题逻辑的层面上,而非在谓词逻辑的层面上,形式为“所有的 S 是 P”的全称语句,是形式为“…是…”的简单陈述句,而不是形式为“如果…,那么…”的条件句,这类全称语句更适合的处理方式是经典的实质蕴涵式

$$(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x)),$$

即

$$(\forall x)(\neg S(x) \vee P(x)),$$

它显示了具有性质 P 的对象集和具有性质 S 的对象集之间的包含关系,采用相关蕴涵式的处理方式并不恰当。遵循这一思路,修改现有的相关谓词逻辑系统,建构新的弱化的相关谓词逻辑系统及其语义,研究它的元逻辑特性,也将为相关谓词逻辑的研究展现新的前景。

### 参 考 文 献

- [1] Kosta Dosen, “The First Axiomatization of Relevant Logic”, *Journal of Philosophical Logic*, 21 (1992), pp.339-356.
- [2] Shaw-Kwei Moh (莫绍揆), “The Deduction Theorems and Two New Logical Systems”, *Methodos*, 2 (1950), pp.56-75.
- [3]. Ackermann W., “Begründung Einer Strengen Implikation”, *The Journal of Symbolic Logic*, 21 (1956), pp.113-128.
- [4] Gabbay, D. M., *Labelled Deductive Systems*, Vol. 1, Oxford University Press, 1996.
- [5] Stelzner, W., “Relevant Deontic Logic”, *Journal of Philosophical Logic*, 21 (1992), pp.193-216.
- [6] 桂起权、陈自立、朱福喜:《次协调逻辑与人工智能》,武汉大学出版社,2002, pp.260-392.
- [7] 张清宇:《弗协调逻辑》,中国社会出版社,2003, pp.229-258.
- [8] Cheng, J., “Spatio-temporal Relevant Logic as the Logical Basis for Specifying, Verifying, and Reasoning About Mobile Multi-agent Systems,” in S. Wang et al. (eds), *ER Workshops 2004*, LNCS 3289 (2004), pp.470-483.
- [9] Anderson, A. R. and Belnap, N. D., Jr., *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Vol. 1, Princeton University

Press, 1975, pp.352-371.

[10] Urquhart, A., "Semantics for Relevant Logics", *The Journal of Symbolic Logic*, 37 (1972), pp.159-169.

[11] Dunn, J. M. and Restall, G., "Relevance Logic", in D. M. Gabbay and F. Guenther (eds), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol.6, 2002, pp.67-82.

[12] 刘壮虎:《相关逻辑的邻域语义学》,载《自然辩证法研究》(逻辑学研究专刊),1995, pp.6-11。

[13] Goble, L., "Neighborhoods for Entailment", *Journal of Philosophical Logic*, 32 (2003), pp.483-529.

[14] Mares, E. D., "'Four-Valued' Semantics for The Relevant Logic R", *Journal of Philosophical Logic*, 33 (2004), pp.327-341.

[15] Mares, E. D., "Relevant Logic and the Theory of Information", *Synthese*, 109 (1996), pp.345-360.

[16] 冯棉:《相关与衍推逻辑》,上海人民出版社,1993, pp.148-155。

[17] Anderson, A. R., Belnap, N. D., Jr. and Dunn, J. M., *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Vol. II, Princeton University Press. 1992, pp.348-375.

[18] Mares, E. D. and Meyer, R. K., "Relevant Logics", in L. Goble (ed), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, 2001, pp.293-300.

[19] Mares, E. D., "Relevance Logic," in D. Jacquette (ed), *A Companion to Philosophical Logic*, 2002, pp.609-627.

[20] 冯棉:《含预设的推理与推理的有效性》,载《华东师范大学学报》,2003年第4期, pp.52-57。

[21] Fine, K., "Semantics for Quantified Relevance Logic", *Journal of Philosophical Logic*, 17 (1988), pp.27-59.

## Relevance Logic and Paradoxes of Implication

*Feng Mian*

(Philosophy Department, East China Normal University, Shanghai, 200062)

**Abstract:** Paradoxes of implication emerge at the level of propositional logic rather than predicate logic. Lack of relevance may lead to certain types of paradoxes of implication though is not the cause of other types thereof. Based on these observations, this article tries to establish a new approach to our investigation of relevance logic through classification of paradoxes of implication, in combination of an analysis of the adequacy of existing systems of relevance logic.

**Key words:** relevance logic; paradoxes of implication; entailment; adequacy