

命题逻辑推理问题的代数化求解

黄伟亮¹, 黄 勇², 丁 汀¹

(1. 河南机电职业学院 信息工程系, 河南 郑州 450003 2 广州大学 计算机科学与教育软件学院, 广东 广州 510006)

摘要: 数理逻辑对命题逻辑推理问题的处理采用的是公理化的形式演绎推理体系, 该方法虽严密、可靠, 但它对人的知识水平以及形式化、抽象化能力要求较高。因此, 本文用初等代数方式把命题逻辑的演绎推理转化为方程组的计算求解, 通过求解方程实现命题逻辑的演绎推理。首先用方程组表示命题逻辑推理中的前提, 然后利用数学软件求解, 最后把结果转化为要推导的结论, 进而实现了命题逻辑推理的代数化求解。实例表明: 在计算机技术的支持下, 该方法是可靠、有效的。

关键词: 命题逻辑; 推理; 逻辑联接词

中图分类号: TP301

文献标识码: A

0 前言

数理逻辑是用数学方法研究逻辑推理规律的科学, 其显著特点是符号化和形式化, 即用基于符号形式的演算来描述推理过程的一般规律^[1]。命题逻辑作为数理逻辑和离散数学的重要内容, 它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系的规律^[2-3]。数理逻辑对命题逻辑推理问题的处理采用的是公理化的形式演绎推理体系, 该方法虽严密、可靠, 但它对人的知识水平以及形式化、抽象化能力要求较高。在命题逻辑推理的代数化方面, 文献[4-5]提出了余式方法, 但该方法并未涉及代数化的实现; 文献[6]提出把命题表示成布尔环上的多项式, 但该方法不利于使用多项式方程组的方式进行求解; 文献[7-8]从理论上给出了用多项式方程组证明命题的等价式、蕴含式及重言式等, 该方法所涉及的内容都是普通的代数方程知识, 故相比之下显得较为直观、简洁、易懂, 且该方法建立了符号化与数值计算之间的联系^[9]。因此, 本文将在此基础上, 更深入地把该思想方法用于解决传统命题逻辑的推理问题上, 实现化形式化的逻辑演绎推理为代数方程的计算求解, 即化推理为计算。实践表明在计算机技术(数学软件)的强力支持下, 该方法是可靠、有效的。

1 命题逻辑联接词及其方程表示

1.1 命题逻辑中的基本逻辑联接词

逻辑命题可分为原子命题(即只表示一个基本内容的命题)和复合命题(即由若干原子命题通过逻辑联接词组合而得到的命题)。在命题逻辑推理中, 表示前提的命题之间以及前提和结论之间, 都是以逻辑联接词为基础进行推导的。在命题逻辑中, 最基本的逻辑联接词有3种: \neg 、 \wedge 、 \vee 。此外, 由这3种逻辑联接词还可以组成多种复合命题运算, 其中常用的有 \rightarrow 、 \leftrightarrow 及与非、或非、异或等。这些运算符在逻辑推理中, 起着联系各个命题的作用, 因此, 要实现命题逻辑推理问题的代数化计算求解, 必须首先对这些基本的逻辑联接词进行代数化表示。

1.2 命题逻辑联接词的方程表示

设有简单命题变项 P, Q 分别用 x, y 表示, 由于命题有真假两种情况, 故不妨假定用1表示真, 用0表示假, 并用 $x - x = 0$ 限定 x 的取值。通过真值表法来考察命题逻辑中各个逻辑联接词的运算规律, 可以得到由基本逻辑联接词组合构成的命题方程表示如下:

(1) P, Q 简单命题的方程可表示为: $x - 1 = 0, y - 1 = 0$

- (2) $\neg P$ 的方程可表示为: $\bar{x}_1=0$
- (3) $P \wedge Q$ 的方程可表示为: $x_1 x_2 - 1 = 0$
- (4) $P \vee Q$ 的方程又分两种情况:

①相容选言命题, 即断定若干可能情况中至少有一种情况存在。其方程为:
$$(x_1 + x_2 - 1)(x_1 x_2 - 1) = 0$$

②不相容选言命题, 即断定若干可能情况中有且只有一种情况存在。其方程为:
$$x_1 + x_2 - 1 = 0$$

(5) $P \supset Q$ 的方程可表示为: $x_1(1 - x_2) = 0$ (6) $P \rightarrow Q$ 的方程可表示为: $x_1 - x_2 = 0$ (7) $P \nabla Q$ (异或) 的方程可表示为: $x_1 + x_2 - 1 = 0$

上述组合命题的方程表示, 其正确性可通过真值表进行验证, 当然这种表示法并不是唯一的。由于任何一个命题公式都可用上述逻辑联接词来组合表示, 故任何一个命题的真值都可用上述相应的方程的根来表示。

2 代数化处理命题逻辑推理问题的方法步骤

命题逻辑联接词或命题逻辑运算符的代数化, 是把形式化的命题逻辑推理转化为代数化的求解的前提和基础。在命题逻辑推理过程中, 构成前提的命题条件之间以及前提命题与要推导的结论之间都是通过命题联接词进行组合运算的, 所以只要把所需的命题公式用多项式方程表示出来, 然后通过解这些多项式方程联立的方程组, 就可得到所要的解, 并把得到的结果转化为前提的演绎结论, 从而就实现了用代数计算的方法演绎命题逻辑推导的过程。具体地讲, 代数化处理命题逻辑推理问题的方法步骤如下:

- (1)分析题意找出各简单命题及其逻辑联接关系。
- (2)根据命题间的联接关系, 将其转换为相应的联立方程组。
- (3)利用数学软件求解方程组, 并将结果转换为要推导的结论。

3 应用举例

结合上述思想方法, 下面通过若干实例, 以列方程、解方程的纯代数化方式对形式化的命题逻辑推理问题, 进行计算求解, 从而以非形式化的计算方式来达到形式化演绎推理的效果。

例 1 已知 A B C 三人, 有下列 3 种正确判断:

- (1)若 A 无罪, 则 B 与 C 都有罪。
- (2)在 B 与 C 中必有一人无罪。
- (3)要么 A 无罪, 要么 B 有罪。

问 A B C 三人中谁有罪?

解 设 $x_i (i=1, 2, 3)$ 分别表示 A B C 三人有罪, 依题中前提条件, 可列方程组如下:

PS

{

$(1 - x_1)(x_2 x_3 - 1) = 0$

$x_2 x_3 = 0$

$x_2 - x_1 = 0$

$x_3 - x_1 = 0$

$x_2^2 - x_2 = 0$

$x_1^2 - x_1 = 0$

$x_1 x_2 x_3 = 0$

(1 a)

(1 b)

(1 c)

(1 d)

(1 e)

(1 f)

(1 g)

}

其中, (1^a) ~ (1^c) 为题中 3 个命题所对应的方程; (1^d) ~ (1^f) 是为限定各变量的取值为 0 或 1; (1^g) 是根据题中所隐含的条件而列出的附加方程, 即三人不可能都有罪。此外, 对于方程组求解虽然可以手工计算求解, 但计算量大、繁琐且易出错, 因此, 为了提高解题效率及让人把更多的精力放在题意理解和方程的建立上, 本文强调借助于强大的数学软件 (如 Maple 软件) 进行快速计算求解。求解过程如下:

> solve(PS);

$$\{x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0\}.$$

显然, A、B 有罪, C 无罪。其中, PS 表示联立的方程组; solve() 为 Maple 软件的解方程函数; 花括号里的内容为该方程组的解。

例 2 某车间昨晚有 A、B、C、D、E 等五人值夜班, 下班后有两人一起去看电影, 已知有下列 4 种正确的判断:

- (1) A、B 中至少有一人看电影。
- (2) C、D 中只有一人看电影。
- (3) A、D 两人都看电影或者都没看电影。
- (4) 若 B 看电影, 则 E 也一同去。

问看电影的两人是谁?

解 设 $x_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 分别表示 A、B、C、D、E 五人去看电影, 依据题中前提条件, 可列方程组如下:

$$\text{PS} \left\{ \begin{array}{ll} (x_1 + x_2 - 1)(x_3 x_2 - 1) = 0 & (2^a) \\ x_3 + x_4 - 1 = 0 & (2^b) \\ x_1 - x_4 = 0 & (2^c) \\ x_2(x_3 - 1) = 0 & (2^d) \\ x_3^2 - x_3 = 0 & (2^e) \\ x_4^2 - x_4 = 0 & (2^f) \\ x_3^2 - x_3 = 0 & (2^g) \\ x_2^2 - x_2 = 0 & (2^h) \\ x_1^2 - x_1 = 0 & (2^i) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2 = 0 & (2^j) \end{array} \right.$$

其中, (2^a) ~ (2^d) 为题中 4 个命题所对应的方程; (2^e) ~ (2ⁱ) 为限定各变量的取值为 0 或 1; (2^j) 是根据题中所隐含的条件而列的方程, 即只有两人去看电影。求解过程如下:

> solve(PS);

$$\{x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0\}.$$

显然, 只有 A、D 两人去看电影。

例 3 A、B、C、D 四人做百米赛跑, 甲、乙、丙预猜比赛的名次为:

- (1) 甲: C 第一, B 第二。
- (2) 乙: C 第二, D 第三。
- (3) 丙: A 第二, D 第四。

比赛结束后发现甲、乙、丙每人预猜的情况都是各对一半, 试问 A、B、C、D 四人的实际名次排列情况如何 (其中无并列情况存在)?

解 设用 $x_i, y_i, z_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示 A、B、C、D 为第 i 名。则依据题中前提条件, 可列方程组如下:

$$\begin{cases}
 (\bar{x}_1(1 - \bar{y}_2) - 1)(\bar{y}_2(1 - \bar{z}_1) - 1) = 0 & (3a) \\
 (\bar{x}_2(1 - \bar{z}_1) - 1)(\bar{z}_1(1 - \bar{x}_3) - 1) = 0 & (3b) \\
 (\bar{x}_3(1 - \bar{x}_4) - 1)(\bar{x}_4(1 - \bar{x}_2) - 1) = 0 & (3c) \\
 \bar{x}_1 - \bar{z}_1 = 0 & (3d) \\
 \bar{x}_2 - \bar{z}_2 = 0 & (3e) \\
 \bar{y}_2 - \bar{y}_3 = 0 & (3f) \\
 \bar{x}_1 - \bar{x}_4 = 0 & (3g) \\
 \bar{x}_3 - \bar{x}_2 = 0 & (3h) \\
 \bar{x}_3 - \bar{x}_2 = 0 & (3i) \\
 \bar{x}_3 \bar{x}_4 = 0 & (3j) \\
 \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 0 & (3k) \\
 \bar{x}_3 \bar{y}_2 = 0 & (3l) \\
 \bar{y}_2 \bar{z}_1 = 0 & (3m)
 \end{cases}$$

其中, (3a)~(3c)为题中 3 个命题判断所对应的方程; (3d)~(3i)为限定各变量的取值为 0 或 1; (3j)~(3k)为题中隐含条件, 即同一个人只能取一个名次; (3l)~(3m)是题中的要求, 即名次排列无并列情况出现。求解如下:

> solve ps;

$$\{\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_4 = 0, \bar{x}_2 = 1, \bar{y}_2 = 0, \bar{z}_1 = 1, \bar{z}_2 = 0\}.$$

由结果可以看出: C 第一, A 第二, D 第三, 则剩下的 B 就只能是第四名。

4 结论

本文通过把命题间的逻辑关系用代数方程的形式进行表示, 并在计算机工具的支持下, 通过数学软件对方程组求解得出推导结论, 实现了对形式化命题逻辑推理问题的推导和演算, 同时, 该方法也在某种程度上表明推理和计算在本质上是相通的。此外, 需要注意的是, 应把题中的隐含条件充分地挖掘出来, 否则, 由于缺少相应的条件约束, 就可能导致方程多解的情况出现, 致使某些结果不是命题逻辑前提的有效推导结论。

参考文献:

- [1] 王元元. 计算机科学中的结构[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006
- [2] 陈莉, 刘晓霞. 离散数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002
- [3] 尹宝林, 何自强, 徐光汉, 等. 离散数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003
- [4] 吴尽晗. 多值逻辑定理及其证明的代数方法[J]. 计算机学报, 1996 19(10): 773—779
- [5] 吴尽晗, 刘卓军. 一阶谓词演算定理及其证明的余式方法[J]. 计算机学报, 1996 19(10): 728—734
- [6] Kapur D, Narendran P. An Equational Approach to Theorem Proving in First-order Predicate Calculus[C] // Proc 10th International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1985: 146—153
- [7] 王礼萍, 张树功. 命题逻辑推理的代数化证明[J]. 计算机工程与科学, 2008 30(10): 78—81, 84
- [8] 王礼萍, 张树功. 重言式和矛盾式的代数化证明[J]. 计算机与数字工程, 2009 37(8): 17—21
- [9] 关晓红, 李骏, Łukasiewicz 三值命题逻辑中公式的可靠真度理论[J]. 河南科技大学学报: 自然科学版, 2009 30(2): 74—77

JIANG Ya Jun¹, ZENG Qing Song², HE Shu Qian³ (1. School of Information & Technology Guangzhou Panyu Polytechnic Institute Guangzhou 511483 China; 2. School of Information Science & Technology Sun Yat Sen University Guangzhou 510275 China; 3. School of Information Science & Technology Hainan Normal University Haikou 571158 China)

Abstract With the generalization of Fisher discriminant criterion, this paper presented the conception of the improved optimal set of statistically uncorrelated discriminant criterion. First feature was obtained in linear subspace by using PCA. Then the optimal set of discriminant vectors was constructed through the application of improving statistically uncorrelated discriminant criterion. The experiment of facial recognition shows that the improved method is superior to the existing methods in terms of correct classification rate.

Key words Pattern Recognition; Feature extraction; Optimal set of discriminant vectors; Statistically Uncorrelated

CIC number: TP391.4 Document code: A Article ID: 1672-6871(2010)06-0082-04

Algebraic Method for Solving Propositional Logic Reasoning Problems (86)
HUANG Wei Liang, HUANG Yong, DING Ting (1. Department of Information Engineering Henan Mechanical & Electrical Institute Zhengzhou 450002 China; 2. School of Computer Science & Educational Software Guangzhou University Guangzhou 510006 China)

Abstract In the fields of mathematical logic, the solution to dealing with propositional logic is to use axiomatic deductive system. The method is rigorous, reliable, but it needs higher abstract ability. Therefore, in the paper, a general algebraic way was used to convert formal propositional logic reasoning into the numerical calculation of algebraic equations. Firstly, the premise of proposition logic reasoning was expressed in algebraic equations. Secondly, the solution was obtained by mathematical software. Finally, the solution was converted to the conclusion of the proposition logic. So algebra of proposition logic was realized through solving the equations. Examples show that the method is reliable and effective in the support of computer technology.

Key words Propositional logic Reasoning; Logical link word

CIC number: TP301 Document code: A Article ID: 1672-6871(2010)06-0086-04

° Chemistry, Chemical Engineering and Others °

Accessibility of Urban Open Space in Yanji City (90)
LI Ming Yu, LI Chun Yu, ZHANG Xiao Dong (Department of Geography, Yanbian University, Yanji 133002 China)

Abstract Yanji city as the leading edge urban areas of Chang-Ji-Tu development, its livability, tourism and opening up are essential in Yanji's development. With the help of ARCGIS spatial analysis function and buffer analysis method, a quantitative analysis was used to research accessibility in Yanji city's open space, and some optimized strategy was offered in the future pattern of Yanji city's open space. This method makes up for the shortage of quantitative analysis of urban open space in the border minority areas, and provides reference for the research of accessibility of urban open space in leading region of Chang-Ji-Tu development.

Key words Urban open space; Accessibility; Yanji city; Spatial analysis

CIC number: K901.8 Document code: A Article ID: 1672-6871(2010)06-0090-05

Two kinds of Methods of Gini Coefficient Estimation (95)
NIU Xiao Qi, YUAN Xin Sheng (Department of Mathematics & Statistics Anyang Normal University Anyang 455000 China)

Abstract With the help of approximate calculation of definite integral as well as least square theory, this paper deduces two kinds of methods to estimate Gini coefficient: the parabola method and curve fitting method. The basic principles for Gini coefficient estimation are analyzed from the perspectives of quantities and spatial forms, and the accuracy of estimation is improved.

Key words Gini coefficient; Lorenz curve; Parabola; Curve fitting

CIC number: O242.2 Document code: A Article ID: 1672-6871(2010)06-0095-05