

# TheGI4 HA3

David Konopek(349333),  
Paul Walger(349968),  
Lukas Klammt(332263)

30. Juni 2014

# Aufgabe 1

## Aufgabe 1 a)

(i)

$$\begin{aligned}
 \llbracket F_1 \rrbracket &= \langle \cdot a \cdot \rangle ([\cdot a \cdot] \emptyset \cap [\cdot b \cdot] \emptyset \cap [\cdot c \cdot] \emptyset) \cup \langle \cdot b \cdot \rangle ([\cdot a \cdot] \emptyset \cap [\cdot b \cdot] \emptyset \cap [\cdot c \cdot] \emptyset) \cup \langle \cdot c \cdot \rangle ([\cdot a \cdot] \emptyset \cap [\cdot b \cdot] \emptyset \cap [\cdot c \cdot] \emptyset) \\
 &= \langle \cdot a \cdot \rangle (\{p_4, p_6, p_7, q_4, q_6, q_{10}\} \cap \{p_2, p_3, p_7, q_2, q_4, q_7, q_8\} \cap \{p_1, p_3, p_7, q_1, q_3, q_5, q_9, q_{10}\}) \\
 &\quad \cup \langle \cdot b \cdot \rangle (\{p_4, p_6, p_7, q_4, q_6, q_{10}\} \cap \{p_2, p_3, p_7, q_2, q_4, q_7, q_8\} \cap \{p_1, p_3, p_7, q_1, q_3, q_5, q_9, q_{10}\}) \\
 &\quad \cup \langle \cdot c \cdot \rangle (\{p_4, p_6, p_7, q_4, q_6, q_{10}\} \cap \{p_2, p_3, p_7, q_2, q_4, q_7, q_8\} \cap \{p_1, p_3, p_7, q_1, q_3, q_5, q_9, q_{10}\}) \\
 &= \langle \cdot a \cdot \rangle \{p_7\} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle \{p_7\} \cup \langle \cdot c \cdot \rangle \{p_7\} \\
 &= \{p_5\} \cup \{p_6\} \cup \{p_4\} \\
 &= \{p_4, p_5, p_6\}
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \llbracket F_2 \rrbracket &= \langle \cdot a \cdot \rangle (\langle \cdot a \cdot \rangle \text{Proc}) \cap \langle \cdot a \cdot \rangle (\langle \cdot b \cdot \rangle \text{Proc}) \\
 &= \langle \cdot a \cdot \rangle \{p_1, p_2, p_3, p_5, q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8, q_9\} \cap \langle \cdot a \cdot \rangle \{p_1, p_4, p_6, q_1, q_3, q_5, q_6, q_9, q_{10}\} \\
 &= \{p_3, q_1, q_2, q_3, q_7, q_8\} \cap \{p_1, p_2, q_1, q_2, q_3, q_7, q_9\} \\
 &= \{q_1, q_2, q_3, q_7\}
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 \llbracket F_3 \rrbracket &= [\cdot b \cdot] (\langle \cdot c \cdot \rangle ([\cdot a \cdot] \emptyset) \cup \langle \cdot b \cdot \rangle ([\cdot a \cdot] \emptyset)) \\
 &= [\cdot b \cdot] (\langle \cdot c \cdot \rangle \{p_4, p_6, p_7, q_4, q_6, q_{10}\} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle \{p_4, p_6, p_7, q_4, q_6, q_{10}\}) \\
 &= [\cdot b \cdot] (\{p_4, p_5, q_4, q_6, q_7\} \cup \{p_4, p_6, q_5, q_6\}) \\
 &= \{p_2, p_3, p_4, p_7, q_2, q_4, q_5, q_7, q_8\}
 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 \llbracket F_4 \rrbracket &= [\cdot c \cdot] (\langle \cdot a \cdot \rangle (\langle \cdot a \cdot \rangle \text{Proc})) \cup \langle \cdot c \cdot \rangle (\langle \cdot b \cdot \rangle \text{Proc}) \\
 &= [\cdot c \cdot] (\langle \cdot a \cdot \rangle \{p_1, p_2, p_3, p_5, q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8, q_9\}) \cup \langle \cdot c \cdot \rangle \{p_1, p_4, p_5, p_6, q_1, q_3, q_5, q_6, q_9, q_{10}\} \\
 &= [\cdot c \cdot] (\{p_3, q_1, q_2, q_3, q_7, q_8\}) \cup \{p_2, p_5, q_2, q_4, q_7\} \\
 &= \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_7, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}
 \end{aligned}$$

## Aufgabe 2

### Aufgabe 2 a)

(i)

$$F_1 = \langle \text{auflegen} \rangle \langle \text{warte1min} \rangle \langle \text{warte1min} \rangle \langle \text{warte1min} \rangle \langle \text{warte1min} \rangle \langle \text{wenden} \rangle \langle \text{warte1min} \rangle \langle \text{warte1min} \rangle \langle \text{warte1min} \rangle \langle \text{warte1min} \rangle \langle \text{essen} \rangle \#$$

(ii)

$$F_2 = [\text{marinieren}] [\text{marinieren}] \#$$

Begründung:

Nein, es wird lediglich ausgeschlossen, dass nicht zweimal hintereinander mariniert werden kann. Später im LTS könnte es weiterhin möglich sein zu marinieren.

Wenn wirklich ausgeschlossen werden soll, dass zweimal mariniert wird, müsste die Formel rekursiv aufgebaut werden.

(iii)

$$F_3 = \langle \text{wenden} \rangle \langle \text{warte1min} \rangle \langle \text{wenden} \rangle \#$$

(iv)

$$F_4 = (F_3)^c$$

(v)

$$F_5 = [\text{essen}] [\text{löschen}] \# \wedge [\text{auflegen}] [\text{warte1min}] [\text{wenden}] (\langle \text{essen} \rangle (\langle \text{löschen} \rangle \# \vee \langle \text{warte1min} \rangle \#))$$

### Aufgabe 2 b)

(i)

$$\llbracket F_1 \rrbracket = \{GuF, N\}, \text{ und weil } GuF \in \llbracket F_1 \rrbracket \text{ gilt } GuF \models F_{2.a(i)}$$

(ii)

$$\llbracket F_3 \rrbracket = \{W\}, \text{ und weil } W \in \llbracket F_3 \rrbracket \text{ gilt } W \models F_{2.a(iii)}$$

(iii)

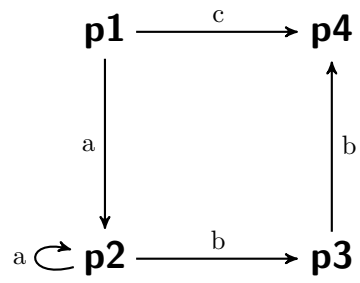
$$\llbracket F_5 \rrbracket = \text{Proc} \setminus \{GuF, S, N\}, \\ \text{d.h. es gilt nicht für alle Zustände } X \text{ des LTS: } X \models F_{2.a(v)}$$

Restliche Auswertungen

$$\llbracket F_4 \rrbracket = \text{Proc} \setminus \{W\}$$

$$\llbracket F_2 \rrbracket = \text{Proc}$$

### Aufgabe 3



## Aufgabe 4

$F_1 = \langle a \rangle \langle a \rangle \langle b \rangle \#$  wird von  $q$  erfüllt, aber nicht von  $p$ .

$F_2 = [a] (\langle b \rangle \# \wedge \langle c \rangle \#)$  wird von  $s$  aber nicht von  $r$ ,

$F_3 = [a] \langle b \rangle \#$  wird von  $v$  erfüllt, aber nicht von  $u$ .

## Aufgabe 5

$P \sim Q$  gilt.

$F_1 = \langle a \rangle [a] \nparallel$  wird von  $V$  erfüllt, aber von  $U$  nicht.

$F_2 = [a] \langle b \rangle \#$  wird von  $X$  erfüllt aber nicht von  $Y$ .

$F_3 = \langle a_1 \rangle \langle a_0 \rangle \#$  wird von  $T$  erfüllt, aber nicht von  $S_n$ .

## Aufgabe 6

Zu zeigen ist  $(\forall n \in \mathbb{N}. P \sim_n Q) \Rightarrow P \sim Q$

Annahme:  $(\forall n \in \mathbb{N}. P \sim_n Q)$

Zu zeigen ist nun  $P \sim Q$  was aber äquivalent zu dass

$\mathcal{R} = \{(R, S) \mid R, S \in \text{Proc} \wedge (\forall n \in \mathbb{N}. R \sim_n S)\}$  eine starke Bisimulation ist.

Unsere Annahme ist:

$(R, S) \in \mathcal{R}$  und  $R \xrightarrow{a} R'$

Wir zeigen nun dass  $\exists S' \in \text{Proc}$  sodass  $S \xrightarrow{a} S'$  und  $(R', S') \in \mathcal{R}$

Da  $\mathcal{R}$  symmetrisch ist (aufgrund dessen dass  $\sim_n$  symmetrisch ist) genügt es nur diesen Fall zu zeigen.

Wir machen einen Widerspruchsbeweis:

Annahme: Es gibt kein  $S'$  mit  $S \xrightarrow{a} S'$  und  $(R', S') \in \mathcal{R}(1)$

Sei  $\{S_1, \dots, S_n\}$  die Menge der Prozesse zu denen man mit einem  $a$  von  $S$  kommt.

Diese ist endlich, da das LTS image-finite ist.

Nun ist aber  $(R, S) \in \mathcal{R}$  mit  $R \xrightarrow{a} R'$ , was bedeutet dass

$R \sim_{n+1} S = (R, S) \in \sim_{n+1}$

$= (R, S) \in \mathcal{F}^{n+1}(\text{Proc} \times \text{Proc})$

$= (R, S) \in \mathcal{F}(\mathcal{F}^n(\text{Proc} \times \text{Proc}))$

$= (R, S) \in \mathcal{F}(\sim_n)$

$= (R, S) \in \{(p, q) \in \text{Proc} \times \text{Proc} \mid p \xrightarrow{1} \sim_n q\}$ .

Daraus folgt aber dass  $\forall a \in \text{Act}. \forall p' \in \text{Der}(p, a). \exists q' \in \text{Der}(q, a). (p', q') \in \sim_n$ .

Das heißt wieder dass es ein gibt  $q' \in \text{Der}(q, a). (p', q') \in \sim_n$ .

Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme(1), dass es  $\exists n \in \mathbb{N}. \neg(R' \sim_n S')$ .

## Aufgabe 7

Seien  $A, B \subseteq 2^{\text{Proc}}$  beliebig

Zu zeigen ist  $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{O}_V(A) \subseteq \mathcal{O}_V(B)$  für alle  $V \in \mathcal{M}_{\{X\}}$

Beweis durch strukturelle Induktion:

Induktionsanfang:

1.  $V := X$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow \mathcal{O}_X(A) \subseteq \mathcal{O}_X(B) \\ \Leftrightarrow A \subseteq B &\Rightarrow A \subseteq B \end{aligned}$$

2.  $V := \#$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow \mathcal{O}_{\#}(A) \subseteq \mathcal{O}_{\#}(B) \\ \Leftrightarrow A \subseteq B &\Rightarrow \text{Proc} \subseteq \text{Proc} \end{aligned}$$

3.  $V := \text{ff}$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow \mathcal{O}_{\text{ff}}(A) \subseteq \mathcal{O}_{\text{ff}}(B) \\ \Leftrightarrow A \subseteq B &\Rightarrow \emptyset \subseteq \emptyset \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{O}_V(A) \subseteq \mathcal{O}_V(B)$$

Induktionsschritt:

4.  $V := F \vee G$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow \mathcal{O}_{F \vee G}(A) \subseteq \mathcal{O}_{F \vee G}(B) \\ \Leftrightarrow A \subseteq B &\Rightarrow \mathcal{O}_F(A) \cup \mathcal{O}_G(A) \subseteq \mathcal{O}_F(B) \cup \mathcal{O}_G(B) \end{aligned}$$

gilt da  $\mathcal{O}_F(A) \subseteq \mathcal{O}_F(B)$  und  $\mathcal{O}_G(A) \subseteq \mathcal{O}_G(B)$

5.  $V := \langle a \rangle F$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow \mathcal{O}_{\langle a \rangle F}(A) \subseteq \mathcal{O}_{\langle a \rangle F}(B) \\ \Leftrightarrow A \subseteq B &\Rightarrow \langle a \cdot \rangle \mathcal{O}_F(A) \subseteq \langle a \cdot \rangle \mathcal{O}_F(B) \end{aligned}$$

gilt da  $\mathcal{O}_F(A) \subseteq \mathcal{O}_F(B)$  und  $\langle a \cdot \rangle$  TODO



## Aufgabe 8

a)

$$X \stackrel{\text{max}}{=} (([a] \text{ff} \wedge \langle b \rangle \#) \vee (\langle a \rangle \# \wedge [b] \text{ff})) \wedge [\text{Act}] X$$

b)

$$F_2 = \langle c \rangle \# \wedge X$$

$$X \stackrel{\text{min}}{=} [a] (([a] \text{ff} \vee \langle b \rangle \#) \vee \langle \text{Act} \rangle X)$$

## Aufgabe 9

a)

Die zugrunde liegende Formel ist  $X \stackrel{\min}{=} (\langle a \rangle \# \vee \langle b \rangle \#) \wedge [\text{Act}] X$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(\langle a \rangle \# \vee \langle b \rangle \#) \wedge [\text{Act}]} X(\emptyset) &= (\langle \cdot a \cdot \rangle \text{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle \text{Proc}) \cap [\cdot \text{Act} \cdot] \emptyset \\ &= (\{p_1, p_2, p_5\} \cup \{p_1, p_3, p_4\}) \cap \{p_6\} \\ &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \cap \{p_6\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

An dieser Stelle haben wir einen Fixpunkt erreicht, denn  $\mathcal{O}_{(\langle a \rangle \# \vee \langle b \rangle \#) \wedge [\text{Act}]} X(\emptyset) = \emptyset$ .

b)

Die zugrunde liegende Formel ist  $X \stackrel{\max}{=} (\langle a \rangle \# \vee \langle b \rangle \#) \wedge [\text{Act}] X$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(\langle a \rangle \# \vee \langle b \rangle \#) \wedge [\text{Act}]} X(\text{Proc}) &= (\langle \cdot a \cdot \rangle \text{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle \text{Proc}) \cap [\cdot \text{Act} \cdot] \text{Proc} \\ &= (\{p_1, p_2, p_5\} \cup \{p_1, p_3, p_4\}) \cap \text{Proc} \\ &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \\ \\ (\mathcal{O}_{(\langle a \rangle \# \vee \langle b \rangle \#) \wedge [\text{Act}]} X)^2(\text{Proc}) &= (\langle \cdot a \cdot \rangle \text{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle \text{Proc}) \cap [\cdot \text{Act} \cdot] \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \\ &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \cap \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\} \\ &= \{p_1, p_2, p_3, p_5\} \\ \\ (\mathcal{O}_{(\langle a \rangle \# \vee \langle b \rangle \#) \wedge [\text{Act}]} X)^3(\text{Proc}) &= (\langle \cdot a \cdot \rangle \text{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle \text{Proc}) \cap [\cdot \text{Act} \cdot] \{p_1, p_2, p_3, p_5\} \\ &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \cap \{p_2, p_5, p_6\} \\ &= \{p_2, p_5\} \\ \\ (\mathcal{O}_{(\langle a \rangle \# \vee \langle b \rangle \#) \wedge [\text{Act}]} X)^4(\text{Proc}) &= (\langle \cdot a \cdot \rangle \text{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle \text{Proc}) \cap [\cdot \text{Act} \cdot] \{p_2, p_5\} \\ &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \cap \{p_2, p_6\} \\ &= \{p_2\} \\ \\ (\mathcal{O}_{(\langle a \rangle \# \vee \langle b \rangle \#) \wedge [\text{Act}]} X)^5(\text{Proc}) &= (\langle \cdot a \cdot \rangle \text{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle \text{Proc}) \cap [\cdot \text{Act} \cdot] \{p_2\} \end{aligned}$$

$$= \{ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \} \cap \{ p_2, p_6 \}$$

$$= \{ p_2 \}$$

An dieser Stelle haben wir einen Fixpunkt erreicht, denn  $\mathcal{O}_{\langle \langle a \rangle \# \vee \langle b \rangle \# \rangle \wedge [\text{Act}]} X(\{ p_2 \}) = \{ p_2 \}$ .