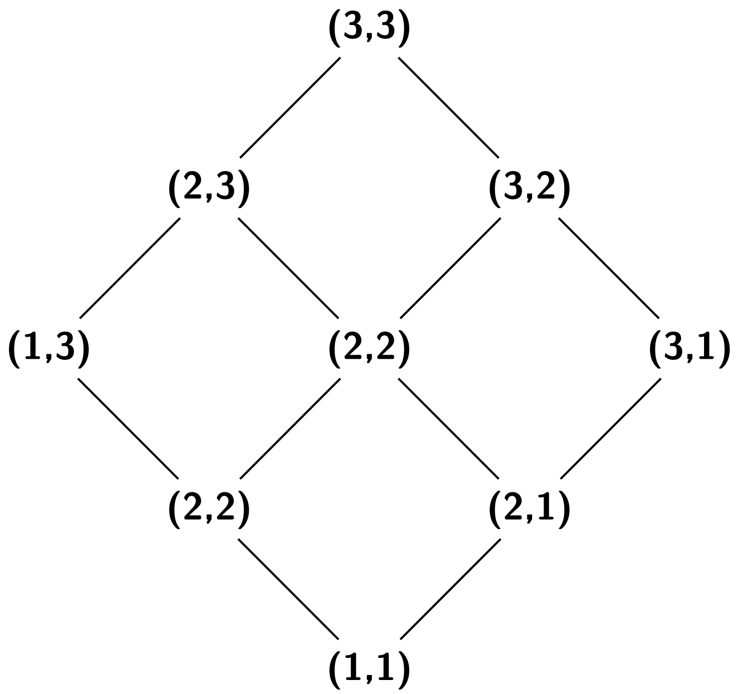
TheGI4 HA2

David Konopek(349333)
, Paul Walger(349968)
, Lukas Klammt(332263)

10. Juni 2014

Aufgabe 1

a)



b)

$$f_{inf}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} (x_1, y_1), falls\ x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \\ (x_1, y_2), falls\ x_1 \leq x_2 \wedge y_2 \leq y_1 \\ (x_2, y_1), falls\ x_2 \leq x_1 \wedge y_1 \leq y_2 \\ (x_2, y_2), falls\ x_2 \leq x_1 \wedge y_2 \leq y_1 \end{cases}$$

$$f_{sup}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} (x_1, y_1), falls\ x_1 \geq x_2 \wedge y_1 \geq y_2 \\ (x_1, y_2), falls\ x_1 \geq x_2 \wedge y_2 \geq y_1 \\ (x_2, y_1), falls\ x_2 \geq x_1 \wedge y_1 \geq y_2 \\ (x_2, y_2), falls\ x_2 \geq x_1 \wedge y_2 \geq y_1 \end{cases}$$

c)

$Sei\ f : 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ die\ Funktion,\ die\ \sqcap X\ bestimmt\ mit$

$$f(X) = \begin{cases} a & , falls\ \#(X) = 1 \wedge a \in X \\ f((min(x_1, x_2), min(y_1, y_2)) \cup (X \setminus \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\})) & , sonst\ mit\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \end{cases}$$

$Sei\ g : 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ die\ Funktion,\ die\ \sqcup X\ bestimmt\ mit$

$$g(X) = \begin{cases} a & , falls\ \#(X) = 1 \wedge a \in X \\ g((max(x_1, x_2), max(y_1, y_2)) \cup (X \setminus \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\})) & , sonst\ mit\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \end{cases}$$

d)

$\perp = (1, 1)$
$\top$ *existiert nicht*

e)

Der Verband ist nicht vollständig, weil nicht für jedes $A \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ein Supremum existiert (insbesondere nicht für die unendliche Menge $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$).

f)

$z.z. \forall d_1, d_2 \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}). d_1 \leq_2 d_2 \rightarrow f(d_1) \leq_2 f(d_2)$

Weil sowohl 2y2+2y-1 als auch x! komponentenweise monoton sind, ist auch f monoton!

Aufgabe 2

z.Z.: Wenn (X,R) ein Verband ist mit X endlich, dann ist (X,R) auch ein vollständiger Verband.

Beweis:
Sei (X,R) ein beliebiger Verband mit X endlich.
Daraus folgt dass für beliebige $d_1, d_2 \in X$ auch $\bigsqcap\{d_1, d_2\}$ existiert. Beweis mittels vollständiger Induktion.
Sei A_i eine beliebige Menge mit $A_i \subseteq X$ und $\#(A_i) = i$

Beweis der Existenz von $\bigsqcap$
Induktionsanfang: $A_2 = \{d_1, d_2\}$. Nach Voraussetzung existiert $\bigsqcap\{d_1, d_2\}$.
Inuktionsvorausetzung(IV): $\bigsqcap A_i$ existiert.
Inuktionsschritt: $\bigsqcap A_{i+1}$
$\bigsqcap A_{i+1} = \bigsqcap(A_i \cup \{d\})$ für ein $d \in A_{i+1}$
Falls $\bigsqcap A_i \sqsubseteq d$ dann ist $\bigsqcap A_{i+1} = \bigsqcap A_i$ (1)
Falls $d \sqsubseteq \bigsqcap A_i$ dann ist $\bigsqcap A_{i+1} = d$ (2)
Aus (1) und (2) und (IV) folgt dass $\bigsqcap A_{i+1}$ existiert (3)

Beweis der Existenz von $\bigsqcup$
Induktionsanfang: $A_2 = \{d_1, d_2\}$. Nach Voraussetzung existiert $\bigsqcup\{d_1, d_2\}$.
Inuktionsvorausetzung(IV): $\bigsqcup A_i$ existiert.
Inuktionsschritt: $\bigsqcup A_{i+1}$
$\bigsqcup A_{i+1} = \bigsqcup(A_i \cup \{d\})$ für ein $d \in A_{i+1}$
Falls $\bigsqcup A_i \sqsubseteq d$ dann ist $\bigsqcup A_{i+1} = d$ (4)
Falls $d \sqsubseteq \bigsqcup A_i$ dann ist $\bigsqcup A_{i+1} = \bigsqcup A_i$ (5)
Aus (4) und (5) udn (IV) folgt dass $\bigsqcup A_{i+1}$ existiert (6)

Aus (3) und (6) folgt dass für jede $A \subseteq X$ sowohl $\bigsqcup A$ als auch $\bigsqcap A$ existieren, $\bigsqcup A_1$ und $\bigsqcap A_1$ trivialerweiser existieren. Daraus folgt dass (X,R) nach Definition 4.3 ein vollständiger Verband ist. ■

Aufgabe 3

a)

Z.z $\leq$ ist eine partielle Ordnung auf B.
Es genügt zu zeigen dass $\leq$ reflexiv, antisymetrisch und transitiv ist.

Reflexiv
Sei $f \in B$ beliebig. Dann gilt $f \leq f$ da $f^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(\{1\})$ (1)

Antisymetrisch
Es muss gelten $\forall f, g \in B : f \leq g \wedge g \leq f \rightarrow f = g$.
Sei $f, g \in B$ beliebig. Annahme: $f \leq g \wedge g \leq f$
Z.z $f = g$
Aus der Annamhe folgt $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\}) \wedge g^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(\{1\})$
$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = g^{-1}(\{1\})$
Dies impliziert aber auch $f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})$ da es sich um eine boolsche Funktion handelt.
Daraus folgt dass $f = g$ (2)

Transitiv
Es muss gelten $\forall f, g, h \in B : f \leq g \wedge g \leq h \rightarrow f \leq h$.
Sei $f, g, h \in B$ beliebig. Annahme: $f \leq g \wedge g \leq h$
z.Z.: $f \leq h$
Aus der Annahme folgt, dass $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\}) \wedge g^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$
$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$
$\Rightarrow f \leq g$ (3)

Mit (1) und (2) und (3) folgt, dass $\leq$ eine partielle Ordung auf B ist. $\blacksquare$

b)

Da wir auch TheGI3 wissen dass die Menge der boolschen Funktionen über n variablen die Mächtigkeit 2^n hat ist B endlich. Mit Aufgabe 2 müssen wir ledlich zeigen dass$\bigsqcup\{f, g\}$ für $f, g \in B$ existiert.

Sei $f, g \in B$ beliebig mit $f \neq g$. Dann existieren sowohl $f^{-1}(\{1\})$ als auch $g^{-1}(\{1\})$. Auch $\subseteq$ ist für diese beiden definiert, darauf folgt dass $f \leq g$ definiert ist
Nun gilt: $\bigsqcup\{f, g\} = f$ falls $f \leq g$ sonst $\bigsqcup\{f, g\} = g$.$\blacksquare$

Aufgabe 6

a)

1. z_{min} ist ein Fixpunkt von f.
2. z_{min} ist der kleinste Fixpunkt.
Wiederspruchsbeweis.
Sei z_{min2} ein Fixpunkt mit $z_{min2} \sqsubseteq z_{min}$ (1).
Es gilt $z_{min} = \bigsqcap\{x \in D | f(x) \sqsubseteq x\}$
Nun ist aber $z_{min2} \in \{x \in D | f(x) \sqsubseteq x\}$ da es ein Fixpunkt ist.
Das aber steht im Wiederspruch zu (1), wenn z_{min} das Infimum ist, kann z_{min2} nicht Element der Prä-Fixpunkte sein.

(b)

z.Z Aus $(D, \sqsubseteq)$ ein endlicher vollstänger Verband und f monoton folgt dass, $z_{max} = f^M(\top)$ ein $M \in \mathbb{N}$ der größte Fixpunkt von f ist.
Sei $(D, \sqsubseteq)$ ein endlicher vollstänger Verband und f monoton. z.Z $z_{max} = f^M(\top)$ ein $M \in \mathbb{N}$ der größte Fixpunkt von f.

Wir brauchen zu zeigen, dass

1. z_{max} ist ein Fixpunkt von f.
$z_{max} = f^M(\top) = f^{M+1}(\top)$ da $\top$ das maximale Element ist und f monton ist.

2. z_{max} ist der größte Fixpunkt.
Sei z ein Fixpunkt.
Nun gilt $z \sqsubseteq \top$. Da f monoton ist $f(z) = z \sqsubseteq f(\top)$. Wir wenden f $M-1$ mal an, und wir bekommen $z \sqsubseteq f^M(\top) = z_{max}$
Daraus folgt dass z_{max} der größte Fixpunkt ist.

Mit 1. und 2. folgt dass z_{max} der größte Fixpunkt ist.■