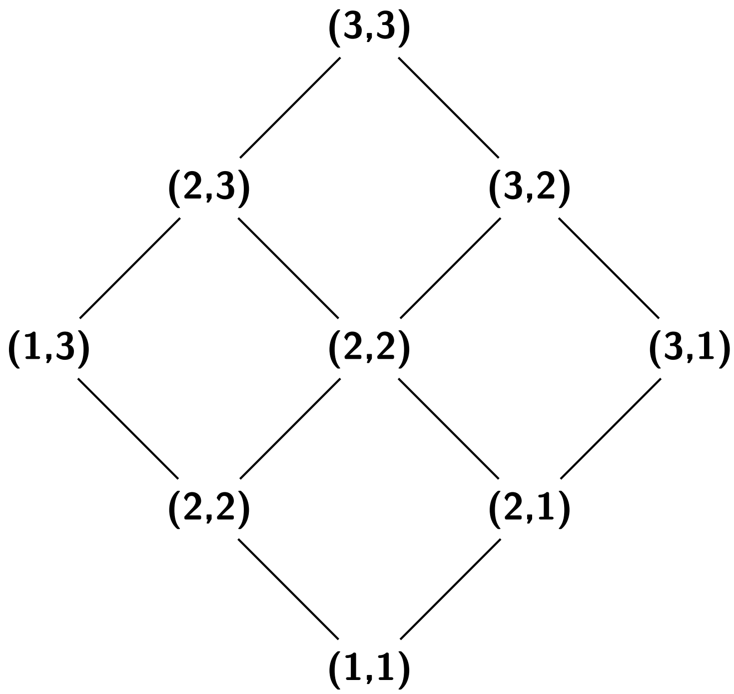
TheGI4 HA2

David Konopek(349333)
, Paul Walger(349968)
, Lukas Klammt(332263)

10. Juni 2014

Aufgabe 1

a)



Aufgabe 2

z.Z.: Wenn (X, R) ein Verband ist mit X endlich, dann ist (X, R) auch ein vollständiger Verband.

Beweis:
Sei (X, R) ein beliebiger Verband mit X endlich.
Daraus folgt dass für beliebige $d_1, d_2 \in X$ auch $\bigsqcap\{d_1, d_2\}$ existiert. Beweis mittels vollständiger Induktion.
Sei A_i eine beliebige Menge mit $A_i \subseteq X$ und $\#(A_i) = i$

Beweis der Existenz von $\bigsqcap$
Induktionsanfang: $A_2 = \{d_1, d_2\}$. Nach Voraussetzung existiert $\bigsqcap\{d_1, d_2\}$.
Inuktionsvorausetzung(IV): $\bigsqcap A_i$ existiert.
Inuktionsschritt: $\bigsqcap A_{i+1}$
$\bigsqcap A_{i+1} = \bigsqcap(A_i \cup \{d\})$ für ein $d \in A_{i+1}$
Falls $\bigsqcap A_i \sqsubseteq d$ dann ist $\bigsqcap A_{i+1} = \bigsqcap A_i$ (1)
Falls $d \sqsubseteq \bigsqcap A_i$ dann ist $\bigsqcap A_{i+1} = d$ (2)
Aus (1) und (2) und (IV) folgt dass $\bigsqcap A_{i+1}$ existiert (3)

Beweis der Existenz von $\bigsqcup$
Induktionsanfang: $A_2 = \{d_1, d_2\}$. Nach Voraussetzung existiert $\bigsqcup\{d_1, d_2\}$.
Inuktionsvorausetzung(IV): $\bigsqcup A_i$ existiert.
Inuktionsschritt: $\bigsqcup A_{i+1}$
$\bigsqcup A_{i+1} = \bigsqcup(A_i \cup \{d\})$ für ein $d \in A_{i+1}$
Falls $\bigsqcup A_i \sqsubseteq d$ dann ist $\bigsqcup A_{i+1} = d$ (4)
Falls $d \sqsubseteq \bigsqcup A_i$ dann ist $\bigsqcup A_{i+1} = \bigsqcup A_i$ (5)
Aus (4) und (5) udn (IV) folgt dass $\bigsqcup A_{i+1}$ existiert (6)

Aus (3) und (6) folgt dass für jede $A \subseteq X$ sowohl $\bigsqcup A$ als auch $\bigsqcap A$ existieren, $\bigsqcup A_1$ und $\bigsqcap A_1$ trivialerweiser existieren. Daraus folgt dass (X, R) nach Definition 4.3 ein vollständiger Verband ist. ■

Aufgabe 3

a)

Z.z $\leq$ ist eine partielle Ordnung auf B.
Es genügt zu zeigen dass $\leq$ reflexiv, antisymetrisch und transitiv ist.

Reflexiv
Sei $f \in B$ beliebig. Dann gilt $f \leq f$ da $f^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(\{1\})$ (1)

Antisymetrisch
Es muss gelten $\forall f, g \in B : f \leq g \wedge g \leq f \rightarrow f = g$.
Sei $f, g \in B$ beliebig. Annahme: $f \leq g \wedge g \leq f$
Z.z $f = g$
Aus der Annamhe folgt $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\}) \wedge g^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(\{1\})$
$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = g^{-1}(\{1\})$
Dies impliziert aber auch $f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})$ da es sich um eine boolsche Funktion handelt.
Daraus folgt dass $f = g$ (2)

Transitiv
Es muss gelten $\forall f, g, h \in B : f \leq g \wedge g \leq h \rightarrow f \leq h$.
Sei $f, g, h \in B$ beliebig. Annahme: $f \leq g \wedge g \leq h$
z.Z.: $f \leq h$
Aus der Annahme folgt, dass $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\}) \wedge g^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$
$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$
$\Rightarrow f \leq g$ (3)

Mit (1) und (2) und (3) folgt, dass $\leq$ eine partielle Ordung auf B ist. $\blacksquare$

Aufgabe 6

a)