

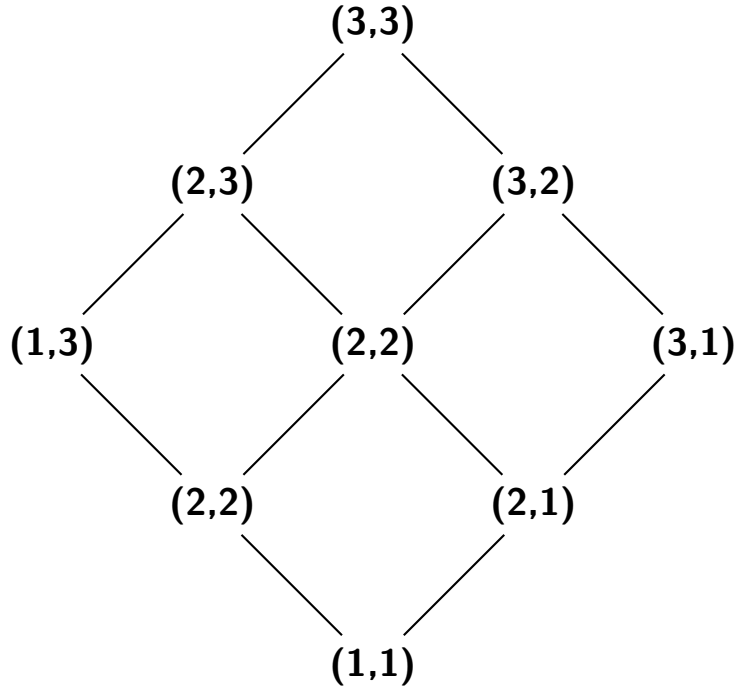
## TheGI4 HA2

David Konopek(349333)  
, Paul Walger(349968)  
, Lukas Klammt(332263)

10. Juni 2014

## Aufgabe 1

a)



b)

$$f_{inf}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} (x_1, y_1), & \text{falls } x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \\ (x_1, y_2), & \text{falls } x_1 \leq x_2 \wedge y_2 \leq y_1 \\ (x_2, y_1), & \text{falls } x_2 \leq x_1 \wedge y_1 \leq y_2 \\ (x_2, y_2), & \text{falls } x_2 \leq x_1 \wedge y_2 \leq y_1 \end{cases}$$

$$f_{sup}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} (x_1, y_1), & \text{falls } x_1 \geq x_2 \wedge y_1 \geq y_2 \\ (x_1, y_2), & \text{falls } x_1 \geq x_2 \wedge y_2 \geq y_1 \\ (x_2, y_1), & \text{falls } x_2 \geq x_1 \wedge y_1 \geq y_2 \\ (x_2, y_2), & \text{falls } x_2 \geq x_1 \wedge y_2 \geq y_1 \end{cases}$$

c)

Sei  $f : 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  die Funktion, die  $\sqcap X$  bestimmt mit

$$f(X) = \begin{cases} a & , \text{falls } \#(X) = 1 \wedge a \in X \\ f((\min(x_1, x_2), \min(y_1, y_2)) \cup (X \setminus \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\})) & , \text{sonst mit } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \end{cases}$$

Sei  $g : 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  die Funktion, die  $\sqcup X$  bestimmt mit

$$g(X) = \begin{cases} a & , falls \#(X) = 1 \wedge a \in X \\ g((\max(x_1, x_2), \max(y_1, y_2)) \cup (X \setminus \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\})) & , sonst mit (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \end{cases}$$

**d)**

$$\perp = (1, 1)$$

$\top$  *existiert nicht*

**e)**

Der Verband ist nicht vollständig, weil nicht für jedes  $A \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$  ein Supremum existiert (insbesondere nicht für die unendliche Menge  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ).

**f)**

$$z.z. \forall d_1, d_2 \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}). d_1 \leq_2 d_2 \rightarrow f(d_1) \leq_2 f(d_2)$$

Weil sowohl  $2y^2 + 2y - 1$  als auch  $x!$  komponentenweise monoton sind, ist auch  $f$  monoton!

## Aufgabe 2

z.Z.: Wenn  $(X, R)$  ein Verband ist mit  $X$  endlich, dann ist  $(X, R)$  auch ein vollständiger Verband.

Beweis:

Sei  $(X, R)$  ein beliebiger Verband mit  $X$  endlich.

Daraus folgt dass für beliebige  $d_1, d_2 \in X$  auch  $\bigcap\{d_1, d_2\}$  existiert. Beweis mittels vollständiger Induktion.

Sei  $A_i$  eine beliebige Menge mit  $A_i \subseteq X$  und  $\#(A_i) = i$

### Beweis der Existenz von $\bigcap$

Induktionsanfang:  $A_2 = \{d_1, d_2\}$ . Nach Voraussetzung existiert  $\bigcap\{d_1, d_2\}$ .

Induktionsvoraussetzung(IV):  $\bigcap A_i$  existiert.

Induktionsschritt:  $\bigcap A_{i+1}$

$\bigcap A_{i+1} = \bigcap(A_i \cup \{d\})$  für ein  $d \in A_{i+1}$

Falls  $\bigcap A_i \subseteq d$  dann ist  $\bigcap A_{i+1} = \bigcap A_i$  (1)

Falls  $d \subseteq \bigcap A_i$  dann ist  $\bigcap A_{i+1} = d$  (2)

Aus (1) und (2) und (IV) folgt dass  $\bigcap A_{i+1}$  existiert (3)

### Beweis der Existenz von $\bigcup$

Induktionsanfang:  $A_2 = \{d_1, d_2\}$ . Nach Voraussetzung existiert  $\bigcup\{d_1, d_2\}$ .

Induktionsvoraussetzung(IV):  $\bigcup A_i$  existiert.

Induktionsschritt:  $\bigcup A_{i+1}$

$\bigcup A_{i+1} = \bigcup(A_i \cup \{d\})$  für ein  $d \in A_{i+1}$

Falls  $\bigcup A_i \subseteq d$  dann ist  $\bigcup A_{i+1} = d$  (4)

Falls  $d \subseteq \bigcup A_i$  dann ist  $\bigcup A_{i+1} = \bigcup A_i$  (5)

Aus (4) und (5) und (IV) folgt dass  $\bigcup A_{i+1}$  existiert (6)

Aus (3) und (6) folgt dass für jede  $A \subseteq X$  sowohl  $\bigcup A$  als auch  $\bigcap A$  existieren,  $\bigcup A_1$  und  $\bigcap A_1$  trivialerweise existieren. Daraus folgt dass  $(X, R)$  nach Definition 4.3 ein vollständiger Verband ist. ■

## Aufgabe 3

a)

Z.z  $\leq$  ist eine partielle Ordnung auf  $B$ .

Es genügt zu zeigen dass  $\leq$  reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

### Reflexiv

Sei  $f \in B$  beliebig. Dann gilt  $f \leq f$  da  $f^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(\{1\})$  (1)

### Antisymmetrisch

Es muss gelten  $\forall f, g \in B : f \leq g \wedge g \leq f \rightarrow f = g$ .

Sei  $f, g \in B$  beliebig. Annahme:  $f \leq g \wedge g \leq f$

Z.z  $f = g$

Aus der Annahme folgt  $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\}) \wedge g^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(\{1\})$

$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = g^{-1}(\{1\})$

Dies impliziert aber auch  $f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})$  da es sich um eine boolsche Funktion handelt.

Daraus folgt dass  $f = g$  (2)

### Transitiv

Es muss gelten  $\forall f, g, h \in B : f \leq g \wedge g \leq h \rightarrow f \leq h$ .

Sei  $f, g, h \in B$  beliebig. Annahme:  $f \leq g \wedge g \leq h$

z.Z.:  $f \leq h$

Aus der Annahme folgt, dass  $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\}) \wedge g^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$

$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$

$\Rightarrow f \leq h$  (3)

Mit (1) und (2) und (3) folgt, dass  $\leq$  eine partielle Ordnung auf  $B$  ist. ■

b)

Da wir auch TheGI3 wissen dass die Menge der boolschen Funktionen über  $n$  variablen die Mächtigkeit  $2^n$  hat ist  $B$  endlich. Mit Aufgabe 2 müssen wir lediglich zeigen dass  $\sqcup\{f, g\}$  für  $f, g \in B$  existiert.

Sei  $f, g \in B$  beliebig mit  $f \neq g$ . Dann existieren sowohl  $f^{-1}(\{1\})$  als auch  $g^{-1}(\{1\})$ . Auch  $\subseteq$  ist für diese beiden definiert, darauf folgt dass  $f \leq g$  definiert ist

Nun gilt:  $\sqcup\{f, g\} = f$  falls  $f \leq g$  sonst  $\sqcup\{f, g\} = g$  ■

## Aufgabe 4

a)

$\emptyset$

b)

$2^{\{0,1\}}$

c)

$\{ Nordpol \}$

## Aufgabe 5

$$\mathcal{F}^1(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \text{s}(\text{r}(\{ (P_2, P_6), (P_1, P_4), (P_1, P_5), (P_5, P_4) \}))$$

$$\mathcal{F}^2(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \text{s}(\text{r}(\{ (P_2, P_6), (P_1, P_5) \}))$$

$$\mathcal{F}^3(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \text{s}(\text{r}(\{ (P_1, P_5) \}))$$

$$\mathcal{F}^4(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \mathcal{F}^3(\text{Proc} \times \text{Proc})$$

Somit erhalten wir, dass  $P_1$  und  $P_5$  das einzige nicht trivial bisimilare Paar ist. Es gilt  $P_1 \sim P_5$

## Aufgabe 6

a)

Sei  $(D, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband. Sei  $f$  monoton.

Sei  $A = \{x \in D \mid f(x) \sqsubseteq x\}$

Z.z  $z_{\min} = \bigsqcap A$  ist der kleinste Fixpunkt.

Wir brauchen zu zeigen, dass

**1.  $z_{\min}$  ist ein Fixpunkt von  $f$ .**

Da  $\sqsubseteq$  antisymmetrisch ist müssen wir zeigen dass:

$z_{\min} \sqsubseteq f(z_{\min})$  (\*) und

$f(z_{\min}) \sqsubseteq z_{\min}$  (\*\*)

• (\*)

Nach  $z_{\min} = \bigsqcap A$  gilt  $\forall x \in A : z_{\min} \sqsubseteq x$

Da  $f$  monoton ist gilt:  $f(z_{\min}) \sqsubseteq f(x)$

Nach Definition von  $A$  gilt  $\forall x \in A : f(x) \sqsubseteq x$

$\Rightarrow f(z_{\min}) \in A$ .

$\Rightarrow z_{\min} \sqsubseteq f(z_{\min})$  da  $z_{\min}$  das Infimum ist.

• (\*\*)

Da  $z_{\min} \in A$  gilt  $f(z_{\min}) \sqsubseteq z_{\min}$

Aus (\*) und (\*\*) folgt mit der Antisymmetrie von  $\sqsubseteq$  dass  $z_{\min}$  ein Fixpunkt ist.

**2.  $z_{\min}$  ist der kleinste Fixpunkt.**

Widerspruchsbeweis.

Sei  $z_{\min 2}$  ein Fixpunkt mit  $z_{\min 2} \sqsubseteq z_{\min}$  (1).

Es gilt  $z_{\min} = \bigsqcap \{x \in D \mid f(x) \sqsubseteq x\}$

Nun ist aber  $z_{\min 2} \in \{x \in D \mid f(x) \sqsubseteq x\}$  da es ein Fixpunkt ist.

Das aber steht im Widerspruch zu (1), wenn  $z_{\min}$  das Infimum ist, kann  $z_{\min 2}$  nicht Element der Prä-Fixpunkte sein.

b)

z.Z Aus  $(D, \sqsubseteq)$  ein endlicher vollständiger Verband und  $f$  monoton folgt dass,  
 $z_{\max} = f^M(\top)$  ein  $M \in \mathbb{N}$  der größte Fixpunkt von  $f$  ist.

Sei  $(D, \sqsubseteq)$  ein endlicher vollständiger Verband und  $f$  monoton. z.Z  $z_{\max} = f^M(\top)$  ein  $M \in \mathbb{N}$  der größte Fixpunkt von  $f$ .

Wir brauchen zu zeigen, dass

**1.  $z_{\max}$  ist ein Fixpunkt von  $f$ .**

$z_{\max} = f^M(\top) = f^{M+1}(\top)$  da  $\top$  das maximale Element ist und  $f$  monoton ist.

**2.  $z_{\max}$  ist der größte Fixpunkt.**

Sei  $z$  ein Fixpunkt.

Nun gilt  $z \sqsubseteq \top$ . Da  $f$  monoton ist  $f(z) = z \sqsubseteq f(\top)$ . Wir wenden  $f$   $M - 1$  mal



an, und wir bekommen  $z \sqsubseteq f^M(\top) = z_{max}$   
Daraus folgt dass  $z_{max}$  der größte Fixpunkt ist.

Mit 1. und 2. folgt dass  $z_{max}$  der größte Fixpunkt ist. ■