TheGI4 HA3

David Konopek(349333),
Paul Walger(349968),
Lukas Klammt(332263)

30. Juni 2014

Aufgabe 1

Aufgabe 1 a)

(i)

$$
\begin{aligned}
[\![\, F_1 \,]\!] &= \langle \cdot a \cdot \rangle([\cdot a \cdot]\emptyset \cap [\cdot b \cdot]\emptyset \cap [\cdot c \cdot]\emptyset) \cup \langle \cdot b \cdot \rangle([\cdot a \cdot]\emptyset \cap [\cdot b \cdot]\emptyset \cap [\cdot c \cdot]\emptyset) \cup \langle \cdot c \cdot \rangle([\cdot a \cdot]\emptyset \cap [\cdot b \cdot]\emptyset \cap [\cdot c \cdot]\emptyset) \\
&= \langle \cdot a \cdot \rangle(\{p_4, p_6, p_7, q_4, q_6, q_{10}\} \cap \{p_2, p_3, p_7, q_2, q_4, q_7, q_8\} \cap \{p_1, p_3, p_7, q_1, q_3, q_5, q_9, q_{10}\}) \\
&\quad \cup \langle \cdot b \cdot \rangle(\{p_4, p_6, p_7, q_4, q_6, q_{10}\} \cap \{p_2, p_3, p_7, q_2, q_4, q_7, q_8\} \cap \{p_1, p_3, p_7, q_1, q_3, q_5, q_9, q_{10}\}) \\
&\quad \cup \langle \cdot c \cdot \rangle(\{p_4, p_6, p_7, q_4, q_6, q_{10}\} \cap \{p_2, p_3, p_7, q_2, q_4, q_7, q_8\} \cap \{p_1, p_3, p_7, q_1, q_3, q_5, q_9, q_{10}\}) \\
&= \langle \cdot a \cdot \rangle\{p_7\} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle\{p_7\} \cup \langle \cdot c \cdot \rangle\{p_7\} \\
&= \{p_5\} \cup \{p_6\} \cup \{p_4\} \\
&= \{p_4, p_5, p_6\}
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
[\![\, F_2 \,]\!] &= \langle \cdot a \cdot \rangle(\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \cap \langle \cdot a \cdot \rangle(\langle \cdot b \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \\
&= \langle \cdot a \cdot \rangle\{p_1, p_2, p_3, p_5, q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8, q_9\} \cap \langle \cdot a \cdot \rangle\{p_1, p_4, p_6, q_1, q_3, q_5, q_6, q_9, q_{10}\} \\
&= \{p_3, q_1, q_2, q_3, q_7, q_8\} \cap \{p_1, p_2, q_1, q_2, q_3, q_7, q_9\} \\
&= \{q_1, q_2, q_3, q_7\}
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
[\![\, F_3 \,]\!] &= [\cdot b \cdot](\langle \cdot c \cdot \rangle([\cdot a \cdot]\emptyset) \cup \langle \cdot b \cdot \rangle([\cdot a \cdot]\emptyset)) \\
&= [\cdot b \cdot](\langle \cdot c \cdot \rangle\{p_4, p_6, p_7, q_4, q_6, q_{10}\} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle\{p_4, p_6, p_7, q_4, q_6, q_{10}\}) \\
&= [\cdot b \cdot](\{p_4, p_5, q_4, q_6, q_7\} \cup \{p_4, p_6, q_5, q_6\}) \\
&= \{p_2, p_3, p_4, p_7, q_2, q_4, q_5, q_7, q_8\}
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
[\![\, F_4 \,]\!] &= [\cdot c \cdot](\langle \cdot a \cdot \rangle(\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc})) \cup \langle \cdot c \cdot \rangle(\langle \cdot b \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \\
&= [\cdot c \cdot](\langle \cdot a \cdot \rangle\{p_1, p_2, p_3, p_5, q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8, q_9\}) \cup \langle \cdot c \cdot \rangle\{p_1, p_4, p_5, p_6, q_1, q_3, q_5, q_6, q_9, q_{10}\}) \\
&= [\cdot c \cdot](\{p_3, q_1, q_2, q_3, q_7, q_8\}) \cup \{p_2, p_5, q_2, q_4, q_7\} \\
&= \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_7, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 a)

(i)

$$F_1 \quad = \quad \langle\, auflegen \,\rangle \langle\, warte1min \,\rangle \langle\, warte1min \,\rangle \langle\, warte1min \,\rangle \langle\, warte1min \,\rangle \langle\, wenden \,\rangle \langle\, warte1min \,\rangle \langle\, warte1min \,\rangle \langle\, warte1min \,\rangle \langle\, warte1min \,\rangle \langle\, essen \,\rangle\, tt$$

(ii)

$$F_2 \quad = \quad [\, marinieren \,]\, [\, marinieren \,]\, ff$$

Begründung:
Nein, es wird lediglich ausgeschlossen, dass nicht zweimal hintereinander mariniert werden kann.
Später im LTS könnte es weiterhin möglich sein zu marinieren.
Wenn wirklich ausgeschlossen werden soll, dass zweimal mariniert wird,
müsste die Formel rekursiv aufgebaut werden.

(iii)

$$F_3 \quad = \quad \langle\, wenden \,\rangle \langle\, warte1min \,\rangle \langle\, wenden \,\rangle\, tt$$

(iv)

$$F_4 \quad = \quad (F_3)^{c}$$

(v)

$$F_5 \quad = \quad [\, essen \,]\, [\, löschen \,]\, ff \wedge [\, auflegen \,]\, [\, warte1min \,]\, [\, wenden \,]\, (\langle\, essen \,\rangle (\langle\, löschen \,\rangle\, tt \vee \langle\, warte1min \,\rangle\, tt))$$

Aufgabe 2 b)

(i)

$$[\![\, F_1 \,]\!] = \quad \{GuF, N\}\ ,\ und\ weil\ GuF \in [\![\, F_1 \,]\!]\, gilt\ GuF \models F_{2.a(i)}$$

(ii)

$$[\![\, F_3 \,]\!] = \quad \{W\}\ ,\ und\ weil\ W \in [\![\, F_3 \,]\!]\, gilt\ W \models F_{2.a(iii)}$$

(iii)

$$[\![\, F_5 \,]\!] = \quad \mathsf{Proc} \setminus \{\ GuF,\ S,\ N\ \}\ ,$$
$$d.h\ es\ gilt\ nicht\ für\ alle\ Zustände\ X\ des\ LTS:\ \ X \models F_{2.a(v)}$$

Restliche Auswertungen

$$[\![\, F_4 \,]\!] = \quad \mathsf{Proc} \setminus \{\ W\ \}$$

$$[\![\, F_2 \,]\!] = \quad \mathsf{Proc}$$

Aufgabe 3

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{p1} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "a"'] & \mathbf{p4} \\
\mathbf{p2} \arrow[loop left, "a"] \arrow[r, "b"] & \mathbf{p3} \arrow[u, "b"']
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 4

$F_1 = \langle\, a \,\rangle \langle\, a \,\rangle \langle\, b \,\rangle\, tt$ wird von q erfüllt, aber nicht von p.
$F_2 = [\, a \,]\, (\langle\, b \,\rangle\, tt \wedge \langle\, c \,\rangle\, tt)$ wird von s aber nicht von r,
$F_3 = [\, a \,]\, \langle\, b \,\rangle\, tt$ wird von v erfüllt, aber nicht von u.

Aufgabe 5

$P \sim Q$ gilt.
$F_1 = \langle\, a \,\rangle [\, a \,]\, \mathit{ff}$ wird von V erfüllt, aber von U nicht.
$F_2 = [\, a \,]\, \langle\, b \,\rangle\, \mathit{tt}$ wird von X erfüllt aber nicht von Y.
$F_3 = \langle\, a_1 \,\rangle \langle\, a_0 \,\rangle\, \mathit{tt}$ wird von T erfüllt, aber nicht von S_n.

Aufgabe 6

Zu zeigen ist $(\forall n \in \mathbb{N}.P \sim_n Q) \Rightarrow P \sim Q$
Annahme: $(\forall n \in \mathbb{N}.P \sim_n Q)$
Zu zeigen ist nun $P \sim Q$ was aber äquivalent zu dass
$\mathcal{R} = \{(R,S)|R,S \in \mathsf{Proc} \wedge (\forall n \in \mathbb{N}.R \sim_n S)\}$ eine starke Bisimulation ist.
Unsere Annahme ist:
$(R,S) \in \mathcal{R}$ und $R \overset{a}{\to} R'$

Wir zeigen nun dass $\exists S' \in \mathsf{Proc}$ sodass $S \overset{a}{\to} S'$ und $(R',S') \in \mathcal{R}$
Da $\mathcal{R}$ symmetrisch ist (aufgrund dessen dass $\sim_n$ symmetrisch ist) genügt es nur diesen Fall zu zeigen.
Wir machen einen Widerspruchsbeweis:
Annahme: Es gibt kein S' mit $S \overset{a}{\to} S'$ und $(R',S') \in \mathcal{R}(1)$
Sei $\{S_1, .., S_n\}$ die Menge der Prozesse zu denen man mit einem a von S kommt.
Diese ist endlich, da das LTS image-finite ist.

Nun ist aber $(R,S) \in \mathcal{R}$ mit $R \overset{a}{\to} R'$, was bedeutet dass
$R \sim_{n+1} S = (R,S) \in \sim_{n+1}$
$= (R,S) \in \mathcal{F}^{n+1}(\mathsf{Proc} \times \mathsf{Proc})$
$= (R,S) \in \mathcal{F}(\mathcal{F}^n(\mathsf{Proc} \times \mathsf{Proc}))$
$= (R,S) \in \mathcal{F}(\sim_n)$
$= (R,S) \in \{(p,q) \in \mathsf{Proc} \times \mathsf{Proc}\, | p \overset{1}{\sim}_{\sim_n} q\}$.
Daraus folgt aber dass $\forall a \in \mathsf{Act}.\forall p' \in Der(p,a).\exists q' \in Der(q,a).(p',q') \in \sim_n$.
Das heißt wieder dass es ein gibt $q' \in Der(q,a).(p',q') \in \sim_n$.
Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme(1), dass es $\exists n \in \mathbb{N}.\neg(R' \sim_n S')$.

Aufgabe 7

Seien $A, B \subseteq 2^{\mathsf{Proc}}$ beliebig
Zu zeigen ist $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{O}_V(A) \subseteq \mathcal{O}_V(B)$ für alle $V \in \mathcal{M}_{\{X\}}$
Beweis durch strukturelle Induktion:
Induktionsanfang:
1. $V := X$

$$\begin{aligned} & A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{O}_X(A) \subseteq \mathcal{O}_X(B) \\ \Leftrightarrow\ & A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \end{aligned}$$

2. $V := tt$

$$\begin{aligned} & A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{O}_{tt}(A) \subseteq \mathcal{O}_{tt}(B) \\ \Leftrightarrow\ & A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{Proc} \subseteq \mathsf{Proc} \end{aligned}$$

3. $V := ff$

$$\begin{aligned} & A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{O}_{tt}(A) \subseteq \mathcal{O}_{tt}(B) \\ \Leftrightarrow\ & A \subseteq B \Rightarrow \emptyset \subseteq \emptyset \end{aligned}$$

Induktionsvorrausetzung:
$A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{O}_V(A) \subseteq \mathcal{O}_V(B)$

Induktionsschritt:
4. $V := F \vee G$

$$\begin{aligned} & A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{O}_{F \vee G}(A) \subseteq \mathcal{O}_{F \vee G}(B) \\ \Leftrightarrow\ & A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{O}_F(A) \cup \mathcal{O}_G(A) \subseteq \mathcal{O}_F(B) \cup \mathcal{O}_G(B) \end{aligned}$$

gilt da $\mathcal{O}_F(A) \subseteq \mathcal{O}_F(B)$ und $\mathcal{O}_G(A) \subseteq \mathcal{O}_G(B)$

5. $V := \langle\, a \,\rangle F$

$$\begin{aligned} & A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{O}_{\langle\, a \,\rangle F}(A) \subseteq \mathcal{O}_{\langle\, a \,\rangle F}(B) \\ \Leftrightarrow\ & A \subseteq B \Rightarrow \langle \cdot a \cdot \rangle \mathcal{O}_F(A) \subseteq \langle \cdot a \cdot \rangle \mathcal{O}_F(B) \\ \Leftrightarrow\ & A \subseteq B \Rightarrow \{p | \exists p' \in Der(p, a) \wedge p' \in \mathcal{O}_F(A)\} \subseteq \{p | \exists p' \in Der(p, a) \wedge p' \in \mathcal{O}_F(B)\} \end{aligned}$$

gilt offensichtlich da $\mathcal{O}_F(A) \subseteq \mathcal{O}_F(B)$

Aufgabe 8

a)

$X \overset{\max}{=} (([\,a\,]\, ff \wedge \langle\, b\,\rangle\, tt) \vee (\langle\, a\,\rangle\, tt \wedge [\,b\,]\, ff)) \wedge [\, \mathsf{Act}\,]\, X$

b)

$F_2 = \langle\, c\,\rangle\, tt \wedge X$
$X \overset{\min}{=} [\,a\,]\, (([\,a\,]\, ff \vee \langle\, b\,\rangle\, tt) \vee \langle\, \mathsf{Act}\,\rangle X)$

Aufgabe 9

a)

Die zugrunde liegende Formel ist $X \stackrel{\min}{=} (\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, b \,\rangle\, tt) \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\, X$.

$\mathcal{O}_{(\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, b \,\rangle\, tt) \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\, X}(\emptyset) = (\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \cap [\cdot\ \mathsf{Act}\ \cdot]\emptyset$

$= (\{\, p_1,\ p_2,\ p_5 \,\} \cup \{\, p_1,\ p_3,\ p_4 \,\}) \cap \{\, p_6 \,\}$

$= \{\, p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5 \,\} \cap \{\, p_6 \,\}$

$= \emptyset$

An dieser Stelle haben wir einen Fixpunkt erreicht, denn $\mathcal{O}_{(\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, b \,\rangle\, tt) \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\, X}(\emptyset) = \emptyset$.

b)

Die zugrunde liegende Formel ist $X \stackrel{\max}{=} (\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, b \,\rangle\, tt) \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\, X$.

$\mathcal{O}_{(\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, b \,\rangle\, tt) \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\, X}(\mathsf{Proc}) = (\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \cap [\cdot\ \mathsf{Act}\ \cdot]\, \mathsf{Proc}$

$= (\{\, p_1,\ p_2,\ p_5 \,\} \cup \{\, p_1,\ p_3,\ p_4 \,\}) \cap \mathsf{Proc}$

$= \{\, p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5 \,\}$

$(\mathcal{O}_{(\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, b \,\rangle\, tt) \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\, X})^2(\mathsf{Proc}) = (\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \cap [\cdot\ \mathsf{Act}\ \cdot]\, \{\, p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5 \,\}$

$= \{\, p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5 \,\} \cap \{\, p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_5,\ p_6 \,\}$

$= \{\, p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_5 \,\}$

$(\mathcal{O}_{(\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, b \,\rangle\, tt) \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\, X})^3(\mathsf{Proc}) = (\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \cap [\cdot\ \mathsf{Act}\ \cdot]\, \{\, p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_5 \,\}$

$= \{\, p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5 \,\} \cap \{\, p_2,\ p_5,\ p_6 \,\}$

$= \{\, p_2,\ p_5 \,\}$

$(\mathcal{O}_{(\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, b \,\rangle\, tt) \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\, X})^4(\mathsf{Proc}) = (\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \cap [\cdot\ \mathsf{Act}\ \cdot]\, \{\, p_2,\ p_5 \,\}$

$= \{\, p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5 \,\} \cap \{\, p_2,\ p_6 \,\}$

$= \{\, p_2 \,\}$

$(\mathcal{O}_{(\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, b \,\rangle\, tt) \wedge [\ \mathsf{Act}\ ]\, X})^5(\mathsf{Proc}) = (\langle \cdot a \cdot \rangle\, \mathsf{Proc} \cup \langle \cdot b \cdot \rangle\, \mathsf{Proc}) \cap [\cdot\ \mathsf{Act}\ \cdot]\, \{\, p_2 \,\}$

$= \{ \ p_1, \ p_2, \ p_3, \ p_4, \ p_5 \ \} \cap \{ \ p_2, \ p_6 \ \}$

$= \{ \ p_2 \ \}$

An dieser Stelle haben wir einen Fixpunkt erreicht, denn $\mathcal{O}_{(\langle\, a \,\rangle\, tt \vee \langle\, b \,\rangle\, tt) \wedge [\, \mathsf{Act} \,]\, X}(\{ \ p_2 \ \}) = \{ \ p_2 \ \}$.