TheGI4 HA2

David Konopek(349333)
, Paul Walger(349968)
, Lukas Klammt(332263)

10. Juni 2014

Aufgabe 2

z.Z.: Wenn (X, R) ein Verband ist mit X endlich, dann ist (X, R) auch ein vollständiger Verband.

Beweis:
Sei (X, R) ein beliebiger Verband mit X endlich.
Daraus folgt dass für beliebige $d_1, d_2 \in X$ auch $\bigsqcap\{d_1, d_2\}$ existiert. Beweis mittels vollständiger Induktion.
Sei A_i eine beliebige Menge mit $A_i \subseteq X$ und $\#(A_i) = i$

Beweis der Existenz von $\bigsqcap$
Induktionsanfang: $A_2 = \{d_1, d_2\}$. Nach Voraussetzung existiert $\bigsqcap\{d_1, d_2\}$.
Inuktionsvorausetzung(IV): $\bigsqcap A_i$ existiert.
Inuktionsschritt: $\bigsqcap A_{i+1}$
$\bigsqcap A_{i+1} = \bigsqcap(A_i \cup \{d\})$ für ein $d \in A_{i+1}$
Falls $\bigsqcap A_i \sqsubseteq d$ dann ist $\bigsqcap A_{i+1} = \bigsqcap A_i$ (1)
Falls $d \sqsubseteq \bigsqcap A_i$ dann ist $\bigsqcap A_{i+1} = d$ (2)
Aus (1) und (2) und (IV) folgt dass $\bigsqcap A_{i+1}$ existiert (3)

Beweis der Existenz von $\bigsqcup$
Induktionsanfang: $A_2 = \{d_1, d_2\}$. Nach Voraussetzung existiert $\bigsqcup\{d_1, d_2\}$.
Inuktionsvorausetzung(IV): $\bigsqcup A_i$ existiert.
Inuktionsschritt: $\bigsqcup A_{i+1}$
$\bigsqcup A_{i+1} = \bigsqcup(A_i \cup \{d\})$ für ein $d \in A_{i+1}$
Falls $\bigsqcup A_i \sqsubseteq d$ dann ist $\bigsqcup A_{i+1} = d$ (4)
Falls $d \sqsubseteq \bigsqcup A_i$ dann ist $\bigsqcup A_{i+1} = \bigsqcup A_i$ (5)
Aus (4) und (5) udn (IV) folgt dass $\bigsqcup A_{i+1}$ existiert (6)

Aus (3) und (6) folgt dass für jede $A \subseteq X$ sowohl $\bigsqcup A$ als auch $\bigsqcap A$ existieren, $\bigsqcup A_1$ und $\bigsqcup A_0$ und $\bigsqcap A_1$ und $\bigsqcap A_0$ trivialerweiser existieren. Daraus folgt dass (X, R) nach Definition 4.3 ein vollständiger Verband ist. $\blacksquare$