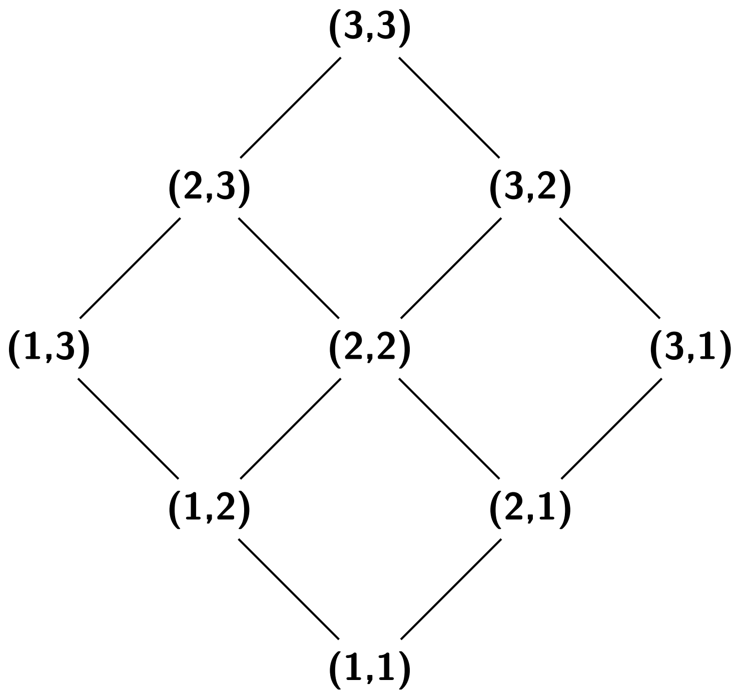
TheGI4 HA2

David Konopek(349333)
, Paul Walger(349968)
, Lukas Klammt(332263)

10. Juni 2014

Aufgabe 1

a)



b)

$$f_{inf}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} (x_1, y_1), falls\ x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \\ (x_1, y_2), falls\ x_1 \leq x_2 \wedge y_2 \leq y_1 \\ (x_2, y_1), falls\ x_2 \leq x_1 \wedge y_1 \leq y_2 \\ (x_2, y_2), falls\ x_2 \leq x_1 \wedge y_2 \leq y_1 \end{cases}$$

$$f_{sup}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} (x_1, y_1), falls\ x_1 \geq x_2 \wedge y_1 \geq y_2 \\ (x_1, y_2), falls\ x_1 \geq x_2 \wedge y_2 \geq y_1 \\ (x_2, y_1), falls\ x_2 \geq x_1 \wedge y_1 \geq y_2 \\ (x_2, y_2), falls\ x_2 \geq x_1 \wedge y_2 \geq y_1 \end{cases}$$

c)

$Sei\ f : 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ die\ Funktion,\ die\ \sqcap X\ bestimmt\ mit$

$$f(X) = \begin{cases} a & , falls\ \#(X) = 1 \wedge a \in X \\ f((min(x_1, x_2), min(y_1, y_2)) \cup (X \setminus \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\})) & , sonst\ mit\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \end{cases}$$

$Sei\ g : 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ die\ Funktion,\ die\ \sqcup X\ bestimmt\ mit$

$$g(X) = \begin{cases} a & , falls\ \#(X) = 1 \land a \in X \\ g((max(x_1, x_2), max(y_1, y_2)) \cup (X \setminus \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\})) & , sonst\ mit\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \end{cases}$$

d)

$\perp = (1, 1)$
$\top\ existiert\ nicht$

e)

Der Verband ist nicht vollständig, weil nicht für jedes $A \subseteq (\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ ein Supremum existiert (insbesondere nicht für die unendliche Menge $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$).

f)

Ja.
z.z. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}^+.(x_1, y_1) \leq_2 (x_2, y_2) \to f(x_1, y_1) \leq_2 f(x_2, y_2)$
Seien x_1, x_2, y_1, y_2 beliebig und fest.
Annahme A: $(x_1, y_1) \leq_2 (x_2, y_2)$
Aus der Definition von $\leq_2$ wissen wir, dass $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$ gilt.

Es gilt: $x_1 \leq x_2 \to x_1! \leq x_2!$ und $y_1 \leq y_2 \to 2y_1^2 + 2y_1 - 1 \leq 2y_2^2 + 2y_2 - 1$, da sowohl $2x^2 + 2x - 1$ als auch $x!$ für $x \in \mathbb{N}^+$ monoton sind.

Also gilt auch: $f(x_1, y_1) = (2y_1^2 + 2y_1 - 1, x_1!) \leq_2 (2y_2^2 + 2y_2 - 1, x_2!) = f(x_2, y_2)$

Somit haben wir bewiesen, dass $f(x, y)$ monoton ist.

Aufgabe 2

z.Z.: Wenn (X, R) ein Verband ist mit X endlich, dann ist (X, R) auch ein vollständiger Verband.

Beweis:
Sei (X, R) ein beliebiger Verband mit X endlich.
Daraus folgt dass für beliebige $d_1, d_2 \in X$ auch $\bigsqcap\{d_1, d_2\}$ existiert. Beweis mittels vollständiger Induktion.
Sei A_i eine beliebige Menge mit $A_i \subseteq X$ und $\#(A_i) = i$

Beweis der Existenz von $\bigsqcap$
Induktionsanfang: $A_2 = \{d_1, d_2\}$. Nach Voraussetzung existiert $\bigsqcap\{d_1, d_2\}$.
Inuktionsvorausetzung(IV): $\bigsqcap A_i$ existiert.
Inuktionsschritt: $\bigsqcap A_{i+1}$
$\bigsqcap A_{i+1} = \bigsqcap(A_i \cup \{d\})$ für ein $d \in A_{i+1}$
Falls $\bigsqcap A_i \sqsubseteq d$ dann ist $\bigsqcap A_{i+1} = \bigsqcap A_i$ (1)
Falls $d \sqsubseteq \bigsqcap A_i$ dann ist $\bigsqcap A_{i+1} = d$ (2)
Aus (1) und (2) und (IV) folgt dass $\bigsqcap A_{i+1}$ existiert (3)

Beweis der Existenz von $\bigsqcup$
Induktionsanfang: $A_2 = \{d_1, d_2\}$. Nach Voraussetzung existiert $\bigsqcup\{d_1, d_2\}$.
Inuktionsvorausetzung(IV): $\bigsqcup A_i$ existiert.
Inuktionsschritt: $\bigsqcup A_{i+1}$
$\bigsqcup A_{i+1} = \bigsqcup(A_i \cup \{d\})$ für ein $d \in A_{i+1}$
Falls $\bigsqcup A_i \sqsubseteq d$ dann ist $\bigsqcup A_{i+1} = d$ (4)
Falls $d \sqsubseteq \bigsqcup A_i$ dann ist $\bigsqcup A_{i+1} = \bigsqcup A_i$ (5)
Aus (4) und (5) udn (IV) folgt dass $\bigsqcup A_{i+1}$ existiert (6)

Aus (3) und (6) folgt dass für jede $A \subseteq X$ sowohl $\bigsqcup A$ als auch $\bigsqcap A$ existieren, $\bigsqcup A_1$ und $\bigsqcap A_1$ trivialerweise existieren. Daraus folgt dass (X, R) nach Definition 4.3 ein vollständiger Verband ist. ■

Aufgabe 3

a)

Z.z $\leq$ ist eine partielle Ordnung auf B.
Es genügt zu zeigen dass $\leq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Reflexiv
Sei $f \in B$ beliebig. Dann gilt $f \leq f$ da $f^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(\{1\})$ (1)

Antisymetrisch
Es muss gelten $\forall f, g \in B : f \leq g \land g \leq f \rightarrow f = g$.
Sei $f, g \in B$ beliebig. Annahme: $f \leq g \land g \leq f$
Z.z $f = g$
Aus der Annahme folgt $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\}) \land g^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(\{1\})$
$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = g^{-1}(\{1\})$
Dies impliziert aber auch $f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})$ da es sich um eine boolesche Funktion handelt.
Daraus folgt dass $f = g$ (2)

Transitiv
Es muss gelten $\forall f, g, h \in B : f \leq g \land g \leq h \rightarrow f \leq h$.
Sei $f, g, h \in B$ beliebig. Annahme: $f \leq g \land g \leq h$
z.Z.: $f \leq h$
Aus der Annahme folgt, dass $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\}) \land g^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$
$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$
$\Rightarrow f \leq g$ (3)

Mit (1) und (2) und (3) folgt, dass $\leq$ eine partielle Ordung auf B ist. $\blacksquare$

b)

Da wir aus TheGI3 wissen dass die Menge der booleschen Funktionen über n variablen die Mächtigkeit 2^n hat ist B endlich.
Mit Aufgabe 2 müssen wir lediglich zeigen dass $\bigsqcup\{f, g\}$ für $f, g \in B$ existiert.
Sei $f, g \in B$ beliebig mit $f \neq g$.
Dann existieren sowohl $f^{-1}(\{1\})$ als auch $g^{-1}(\{1\})$. Auch $\subseteq$ ist für diese beiden definiert, darauf folgt dass $f \leq g$ definiert ist
Nun gilt:
$\bigsqcup\{f, g\} = f$ falls $f \leq g$ sonst $\bigsqcup\{f, g\} = g$ $\blacksquare$

Aufgabe 4

a)

$\emptyset$

b)

$2^{\{\ 0,\ 1\ \}}$

c)

$\{\ Nordpol\ \}$

Aufgabe 5

$\mathcal{F}^1(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \text{s}(\text{r}(\{\ (P_2,\ P_6),\ (P_1,\ P_4),\ (P_1,\ P_5),\ (P_5,\ P_4)\ \}))$
$\mathcal{F}^2(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \text{s}(\text{r}(\{\ (P_2,\ P_6),\ (P_1,\ P_5)\ \}))$
$\mathcal{F}^3(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \text{s}(\text{r}(\{\ (P_1,\ P_5)\ \}))$
$\mathcal{F}^4(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \mathcal{F}^3(\text{Proc} \times \text{Proc})$

Somit erhalten wir, dass P_1 und P_5 das einzige nicht trivial bisimilare Paar ist. Es gilt $P_1 \sim P_5$

Aufgabe 6

a)

Sei $(D, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband. Sei f monoton.
Sei $A = \{x \in D | f(x) \sqsubseteq x\}$
Z.z $z_{min} = \bigsqcap A$ ist der kleinste Fixpunkt.
Wir brauchen zu zeigen, dass

1. z_{min} ist ein Fixpunkt von f.
Da $\sqsubseteq$ antisymmetrisch ist müssen wir zeigen dass:
$f(z_{min}) \sqsubseteq z_{min}$ (*) und
$z_{min} \sqsubseteq f(z_{min})$ (**)

- (*)
  Nach $z_{min} = \bigsqcap A$ gilt $\forall x \in A : z_{min} \sqsubseteq x$
  Da f monoton ist gilt: $\forall x \in A : f(z_{min}) \sqsubseteq f(x)$
  $\Rightarrow \forall x \in A : f(z_{min}) \sqsubseteq f(x) \sqsubseteq x$
  $\Rightarrow f(z_{min})$ ist einem untere Schranke.
  $\Rightarrow f(z_{min}) \sqsubseteq z_{min}$ da z_{min} das größte untere Schranke ist.

- (**)
  Mit (*) gilt dass $f(z_{min}) \sqsubseteq z_{min}$
  $\Rightarrow f(f(z_{min})) \sqsubseteq f(z_{min})$ da f monoton
  $\Rightarrow f(z_{min}) \in A$ nach Defintion von A
  $\Rightarrow z_{min} \sqsubseteq f(z_{min})$ da z_{min} die untere Schranke ist

Aus (*) und (**) folgt mit der Antisymmetrie von $\sqsubseteq$ dass z_{min} ein Fixpunkt ist.

2. z_{min} ist der kleinste Fixpunkt.
Widerspruchsbeweis.
Sei z_{min2} ein Fixpunkt mit $z_{min2} \sqsubseteq z_{min}$ (1).
Es gilt $z_{min} = \bigsqcap\{x \in D | f(x) \sqsubseteq x\}$
Nun ist aber $z_{min2} \in \{x \in D | f(x) \sqsubseteq x\}$ da es ein Fixpunkt ist.
Das aber steht im Widerspruch zu (1), wenn z_{min} das Infimum ist, kann z_{min2} nicht Element der Prä-Fixpunkte sein.

b)

z.Z Aus $(D, \sqsubseteq)$ ein endlicher vollständiger Verband und f monoton folgt dass, $z_{max} = f^M(\top)$ ein $M \in \mathbb{N}$ der größte Fixpunkt von f ist.
Sei $(D, \sqsubseteq)$ ein endlicher vollständiger Verband und f monoton. z.Z $z_{max} = f^M(\top)$ ein $M \in \mathbb{N}$ der größte Fixpunkt von f.

Wir brauchen zu zeigen, dass

1. z_{max} ist ein Fixpunkt von f.

$z_{max} = f^M(\top) = f^{M+1}(\top)$ da $\top$ das maximale Element ist und f monoton ist.

2. z_{max} ist der größte Fixpunkt.
Sei z ein Fixpunkt.
Nun gilt $z \sqsubseteq \top$. Da f monoton ist $f(z) = z \sqsubseteq f(\top)$. Wir wenden f $M-1$ mal an, und wir bekommen $z \sqsubseteq f^M(\top) = z_{max}$
Daraus folgt dass z_{max} der größte Fixpunkt ist.

Mit 1. und 2. folgt dass z_{max} der größte Fixpunkt ist.$\blacksquare$