

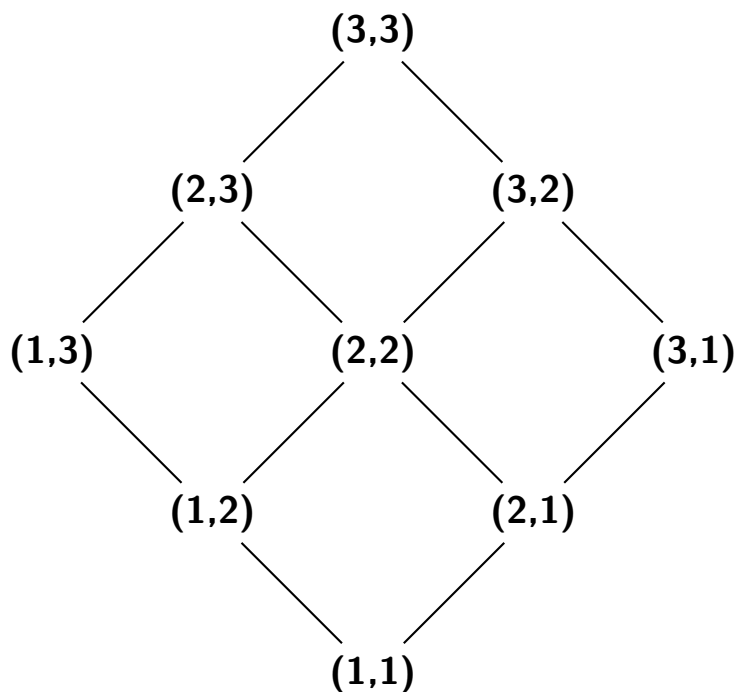
TheGI4 HA2

David Konopek(349333)
, Paul Walger(349968)
, Lukas Klammt(332263)

10. Juni 2014

Aufgabe 1

a)



b)

$$f_{inf}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} (x_1, y_1), & \text{falls } x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \\ (x_1, y_2), & \text{falls } x_1 \leq x_2 \wedge y_2 \leq y_1 \\ (x_2, y_1), & \text{falls } x_2 \leq x_1 \wedge y_1 \leq y_2 \\ (x_2, y_2), & \text{falls } x_2 \leq x_1 \wedge y_2 \leq y_1 \end{cases}$$

$$f_{sup}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} (x_1, y_1), & \text{falls } x_1 \geq x_2 \wedge y_1 \geq y_2 \\ (x_1, y_2), & \text{falls } x_1 \geq x_2 \wedge y_2 \geq y_1 \\ (x_2, y_1), & \text{falls } x_2 \geq x_1 \wedge y_1 \geq y_2 \\ (x_2, y_2), & \text{falls } x_2 \geq x_1 \wedge y_2 \geq y_1 \end{cases}$$

c)

Sei $f : 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Funktion, die $\sqcap X$ bestimmt mit

$$f(X) = \begin{cases} a & , \text{falls } \#(X) = 1 \wedge a \in X \\ f((\min(x_1, x_2), \min(y_1, y_2)) \cup (X \setminus \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\})) & , \text{sonst mit } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \end{cases}$$

Sei $g : 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Funktion, die $\sqcup X$ bestimmt mit

$$g(X) = \begin{cases} a & , falls \#(X) = 1 \wedge a \in X \\ g((\max(x_1, x_2), \max(y_1, y_2)) \cup (X \setminus \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\})) & , sonst mit (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \end{cases}$$

d)

$$\perp = (1, 1)$$

\top *existiert nicht*

e)

Der Verband ist nicht vollständig, weil nicht für jedes $A \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ein Supremum existiert (insbesondere nicht für die unendliche Menge $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$).

f)

$$z.z. \forall d_1, d_2 \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}). d_1 \leq_2 d_2 \rightarrow f(d_1) \leq_2 f(d_2)$$

Weil sowohl $2y^2 + 2y - 1$ als auch $x!$ komponentenweise monoton sind, ist auch f monoton!

Aufgabe 2

z.Z.: Wenn (X, R) ein Verband ist mit X endlich, dann ist (X, R) auch ein vollständiger Verband.

Beweis:

Sei (X, R) ein beliebiger Verband mit X endlich.

Daraus folgt dass für beliebige $d_1, d_2 \in X$ auch $\bigcap\{d_1, d_2\}$ existiert. Beweis mittels vollständiger Induktion.

Sei A_i eine beliebige Menge mit $A_i \subseteq X$ und $\#(A_i) = i$

Beweis der Existenz von \bigcap

Induktionsanfang: $A_2 = \{d_1, d_2\}$. Nach Voraussetzung existiert $\bigcap\{d_1, d_2\}$.

Induktionsvoraussetzung(IV): $\bigcap A_i$ existiert.

Induktionsschritt: $\bigcap A_{i+1}$

$\bigcap A_{i+1} = \bigcap(A_i \cup \{d\})$ für ein $d \in A_{i+1}$

Falls $\bigcap A_i \subseteq d$ dann ist $\bigcap A_{i+1} = \bigcap A_i$ (1)

Falls $d \subseteq \bigcap A_i$ dann ist $\bigcap A_{i+1} = d$ (2)

Aus (1) und (2) und (IV) folgt dass $\bigcap A_{i+1}$ existiert (3)

Beweis der Existenz von \bigcup

Induktionsanfang: $A_2 = \{d_1, d_2\}$. Nach Voraussetzung existiert $\bigcup\{d_1, d_2\}$.

Induktionsvoraussetzung(IV): $\bigcup A_i$ existiert.

Induktionsschritt: $\bigcup A_{i+1}$

$\bigcup A_{i+1} = \bigcup(A_i \cup \{d\})$ für ein $d \in A_{i+1}$

Falls $\bigcup A_i \subseteq d$ dann ist $\bigcup A_{i+1} = d$ (4)

Falls $d \subseteq \bigcup A_i$ dann ist $\bigcup A_{i+1} = \bigcup A_i$ (5)

Aus (4) und (5) und (IV) folgt dass $\bigcup A_{i+1}$ existiert (6)

Aus (3) und (6) folgt dass für jede $A \subseteq X$ sowohl $\bigcup A$ als auch $\bigcap A$ existieren, $\bigcup A_1$ und $\bigcap A_1$ trivialerweise existieren. Daraus folgt dass (X, R) nach Definition 4.3 ein vollständiger Verband ist. ■

Aufgabe 3

a)

Z.z \leq ist eine partielle Ordnung auf B .

Es genügt zu zeigen dass \leq reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Reflexiv

Sei $f \in B$ beliebig. Dann gilt $f \leq f$ da $f^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(\{1\})$ (1)

Antisymmetrisch

Es muss gelten $\forall f, g \in B : f \leq g \wedge g \leq f \rightarrow f = g$.

Sei $f, g \in B$ beliebig. Annahme: $f \leq g \wedge g \leq f$

Z.z $f = g$

Aus der Annahme folgt $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\}) \wedge g^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(\{1\})$

$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = g^{-1}(\{1\})$

Dies impliziert aber auch $f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})$ da es sich um eine boolesche Funktion handelt.

Daraus folgt dass $f = g$ (2)

Transitiv

Es muss gelten $\forall f, g, h \in B : f \leq g \wedge g \leq h \rightarrow f \leq h$.

Sei $f, g, h \in B$ beliebig. Annahme: $f \leq g \wedge g \leq h$

z.Z.: $f \leq h$

Aus der Annahme folgt, dass $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\}) \wedge g^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$

$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$

$\Rightarrow f \leq h$ (3)

Mit (1) und (2) und (3) folgt, dass \leq eine partielle Ordnung auf B ist. ■

b)

Da wir aus TheGI3 wissen dass die Menge der booleschen Funktionen über n variablen die Mächtigkeit 2^n hat ist B endlich.

Mit Aufgabe 2 müssen wir lediglich zeigen dass $\sqcup\{f, g\}$ für $f, g \in B$ existiert.

Sei $f, g \in B$ beliebig mit $f \neq g$.

Dann existieren sowohl $f^{-1}(\{1\})$ als auch $g^{-1}(\{1\})$. Auch \subseteq ist für diese beiden definiert, darauf folgt dass $f \leq g$ definiert ist

Nun gilt:

$\sqcup\{f, g\} = f$ falls $f \leq g$ sonst $\sqcup\{f, g\} = g$ ■

Aufgabe 4

a)

$$\emptyset$$

b)

$$2^{\{0,1\}}$$

c)

$$\{ \textit{Nordpol} \}$$

Aufgabe 5

$$\mathcal{F}^1(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \text{s}(\text{r}(\{ (P_2, P_6), (P_1, P_4), (P_1, P_5), (P_5, P_4) \}))$$

$$\mathcal{F}^2(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \text{s}(\text{r}(\{ (P_2, P_6), (P_1, P_5) \}))$$

$$\mathcal{F}^3(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \text{s}(\text{r}(\{ (P_1, P_5) \}))$$

$$\mathcal{F}^4(\text{Proc} \times \text{Proc}) = \mathcal{F}^3(\text{Proc} \times \text{Proc})$$

Somit erhalten wir, dass P_1 und P_5 das einzige nicht trivial bisimilare Paar ist. Es gilt $P_1 \sim P_5$

Aufgabe 6

a)

Sei (D, \sqsubseteq) ein vollständiger Verband. Sei f monoton.

Sei $A = \{x \in D \mid f(x) \sqsubseteq x\}$

Z.z $z_{\min} = \bigsqcap A$ ist der kleinste Fixpunkt.

Wir brauchen zu zeigen, dass

1. z_{\min} ist ein Fixpunkt von f .

Da \sqsubseteq antisymmetrisch ist müssen wir zeigen dass:

$f(z_{\min}) \sqsubseteq z_{\min}$ (*) und

$z_{\min} \sqsubseteq f(z_{\min})$ (**)

• (*)

Nach $z_{\min} = \bigsqcap A$ gilt $\forall x \in A : z_{\min} \sqsubseteq x$

Da f monoton ist gilt: $\forall x \in A : f(z_{\min}) \sqsubseteq f(x)$

$\Rightarrow \forall x \in A : f(z_{\min}) \sqsubseteq f(x) \sqsubseteq x$

$\Rightarrow f(z_{\min})$ ist eine untere Schranke.

$\Rightarrow f(z_{\min}) \sqsubseteq z_{\min}$ da z_{\min} die größte untere Schranke ist.

• (**)

Mit (*) gilt dass $f(z_{\min}) \sqsubseteq z_{\min}$

$\Rightarrow f(f(z_{\min})) \sqsubseteq f(z_{\min})$ da f monoton

$\Rightarrow f(z_{\min}) \in A$ nach Definition von A

$\Rightarrow z_{\min} \sqsubseteq f(z_{\min})$ da z_{\min} die untere Schranke ist

Aus (*) und (**) folgt mit der Antisymmetrie von \sqsubseteq dass z_{\min} ein Fixpunkt ist.

2. z_{\min} ist der kleinste Fixpunkt.

Widerspruchsbeweis.

Sei $z_{\min 2}$ ein Fixpunkt mit $z_{\min 2} \sqsubseteq z_{\min}$ (1).

Es gilt $z_{\min} = \bigsqcap \{x \in D \mid f(x) \sqsubseteq x\}$

Nun ist aber $z_{\min 2} \in \{x \in D \mid f(x) \sqsubseteq x\}$ da es ein Fixpunkt ist.

Das aber steht im Widerspruch zu (1), wenn z_{\min} das Infimum ist, kann $z_{\min 2}$ nicht Element der Prä-Fixpunkte sein.

b)

z.Z Aus (D, \sqsubseteq) ein endlicher vollständiger Verband und f monoton folgt dass, $z_{\max} = f^M(\top)$ ein $M \in \mathbb{N}$ der größte Fixpunkt von f ist.

Sei (D, \sqsubseteq) ein endlicher vollständiger Verband und f monoton. z.Z $z_{\max} = f^M(\top)$ ein $M \in \mathbb{N}$ der größte Fixpunkt von f .

Wir brauchen zu zeigen, dass

1. z_{\max} ist ein Fixpunkt von f .

$z_{max} = f^M(\top) = f^{M+1}(\top)$ da \top das maximale Element ist und f monoton ist.

2. z_{max} ist der größte Fixpunkt.

Sei z ein Fixpunkt.

Nun gilt $z \sqsubseteq \top$. Da f monoton ist $f(z) = z \sqsubseteq f(\top)$. Wir wenden f $M - 1$ mal an, und wir bekommen $z \sqsubseteq f^M(\top) = z_{max}$

Daraus folgt dass z_{max} der größte Fixpunkt ist.

Mit 1. und 2. folgt dass z_{max} der größte Fixpunkt ist. ■