# SUR LA FORMATION

DES

# TOURBILLONS DANS UN FLUIDE
## SANS FROTTEMENT

### avec une application à l'analogie des phénomènes hydrodynamiques et électrostatiques

PAR

**V. BJERKNES**

à Stockholm[1]

---

En 1881, à Paris, dans le local de l'exposition des appareils d'électricité, des expériences sur l'attraction et la répulsion mutuelle de sphères, immergées dans l'eau et animées de pulsations rythmées, attirèrent vive-

[1] Les équations différentielles de l'élasticité conduisent à la solution mécanique des actions d'un milieu ambiant sur les corps qui s'y trouvent. Or, les phénomènes où l'éther joue un rôle essentiel, ceux de l'électricité et du magnétisme, sont évidemment de cette nature, et l'analogie qu'un travail récent de M. V. Bjerknes met en lumière entre les phénomènes hydrodynamiques et électrostatiques est mieux qu'un simple rapprochement, puisqu'il trouve la même expression mathématique, au signe près, pour les deux cas. L'importance de ce résultat mérite, nous semble-t-il, d'être signalée, et nous reproduisons, en abrégeant quelques calculs, ces recherches analytiques, très riches en conséquences nouvelles dans un sujet qui pouvait paraître épuisé. — L. d. l. R.

ment l'attention des physiciens. C'est l'étude du problème hydrodynamique dont ces expériences intéressantes étaient une application que le savant norvégien C.-A. Bjerknes a, comme on le sait, entreprise et poursuivie avec l'énergie et l'intuition géniale qui le caractérisaient. Bien avant l'apparition de la théorie de Maxwell, il s'était insurgé contre la notion d'action à distance, alors acceptée sans contestation, et il pensait avoir trouvé dans les phénomènes hydrodynamiques le type auquel ramener les actions à distance apparentes de la gravitation, de l'électricité et du magnétisme. On peut résumer ses longues et difficiles recherches analytiques et expérimentales en disant qu'il a trouvé que la force à distance hydrodynamique peut se décomposer en deux : la force inductive, qui n'obéit pas à l'égalité de l'action et de la réaction, et la force d'énergie, qui agit conformément à ce principe. De là suit qu'en particulier les attractions et répulsions électriques peuvent être des actions à distance apparentes dues à un fluide ambiant; mais il y a eette particularité à noter que, en hydrodynamique, les semblables s'attirent et les dissemblables se repoussent, l'inverse de ce qui a lieu en électrostatique. C'est avec la collaboration de son fils, M. V. Bjerknes, que ce savant éminent a eu la satisfaction de donner une forme définitive à une partie de ses travaux [1].

L'étude approfondie de cette question des corps solides en mouvement, immergés dans un fluide sans

[1] Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C.-A. Bjerknes' Theorie von V. Bjerknes. 2 Bände 1900-1902. J.-A. Barth, Leipzig.

frottement qui, au point de vue analytique, présente de grandes difficultés, a conduit M. V. Bjerknes à l'envisager à un point de vue nouveau. Si, comme tout semble le prouver, l'action à distance, que l'analyse fait découvrir et que l'expérience vérifie, entre des sphères solides animées de contractions et dilatations régulières, existe aussi bien entre des sphères qui seraient formées du fluide même et seraient animées des mêmes mouvements, la théorie sera simplifiée et généralisée en ne considérant que le système fluide et lui appliquant les équations différentielles connues. Et le point essentiel de ce plan de recherche est la remarque suivante : lorsqu'une masse prise dans le fluide et présentant le phénomène des contractions et dilatations régulières est en mouvement par suite de la force apparente, il se produit forcément une surface de glissement autour de cette masse, et cette surface peut être considérée comme la limite d'un ensemble de tourbillons dont le rayon tend vers zéro ; il en résulte que la théorie complète des tourbillons conduira à des conclusions relatives aux actions à distance.

Avant de suivre l'auteur dans ses calculs, nous rappelons brièvement quelques points essentiels relatifs à l'analyse des vecteurs, indispensables pour l'intelligence de ce travail.

En tout point d'un certain espace ou champ, une fonction des coordonnées $\Phi$ prend une certaine valeur, ce qui constitue un *scalaire*.

Lorsqu'à la grandeur de la quantité se joint la notion de direction, cette double propriété, variant d'un point à un autre, constitue un *vecteur*.

Le vecteur A a pour projections $A_x$, $A_y$, $A_z$.
» B » $B_x$, $B_y$, $B_z$.
» A + B » $A_x + B_x$, $A_y + B_y$, $A_z + B_z$.
c'est-dire que les vecteurs se composent comme des vitesses.

On obtient un vecteur au moyen d'un scalaire, en prenant pour ses projections les trois dérivées partielles $\frac{d\Phi}{dx}$, etc. Ce vecteur est indépendant du système d'axes. Sa direction est celle de la variation maxima de $\Phi$, et son sens est celui de son accroissement positif. On l'appelle le *gradiant* de $\Phi$, et il est normal à la surface $\Phi = \text{const}$. On le représente par : $\nabla \Phi$.

Un déplacement élémentaire d'un ensemble de points constituant un milieu quelconque, donne lieu à une application importante des vecteurs. Si $x$ est la position d'un point avant le déplacement et $x'$ celle de ce point après le déplacement, rapportée à la nouvelle position de l'origine et que A soit un vecteur vitesse, on a :

$$x' = \left(1 + \frac{\delta A_x}{\delta x}\, dt\right) x + \frac{\delta A_y}{\delta y}\, dt\, y + \frac{\delta A_z}{\delta z}\, dt\, z, \text{ etc.}$$

Ce déplacement se décompose en une certaine déformation et en un système de trois rotations autour des axes, dont les angles de rotation élémentaire sont exprimés par :

$$C_x = \frac{\delta A_z}{\delta y} - \frac{\delta A_y}{\delta z},\quad C_y = \frac{\delta A_x}{\delta z} - \frac{\delta A_z}{\delta x},\quad C_z = \frac{\delta A_y}{\delta x} - \frac{\delta A^x}{\delta y}$$

Le vecteur C s'appelle le *Curl de* A.

D'autre part, la déformation subie par le milieu donne lieu à une dilatation cubique dont l'expression, qui s'appelle la *Divergence* de A, est la suivante :

$$\text{Div. } A = \frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{\delta A_y}{\delta y} + \frac{\delta A_z}{\delta z}$$

On voit aisément que la divergence d'un curl est toujours nulle et que, d'autre part, si le curl d'un vecteur est identiquement nul dans tout le champ, ce vecteur est à potentiel, ce qui revient à dire qu'il est le gradiant d'une fonction $\Phi$.

Le vecteur défini comme le produit de deux vecteurs A et B, ce qui s'écrit $H = A \times B$, a pour projections

$$H_y = A_z B_y - A_y B_z, \text{ etc.}$$

Sa direction est normale aux plans de A et de B, et sa valeur arithmétique est $H = AB \sin (A. B.)$

Il importe de remarquer que le signe du vecteur H dépend de l'ordre dans lequel sont placés les deux vecteurs A et B, et que l'on a : $A \times B = - B \times A$.

## I. *Equations différentielles du mouvement d'un fluide sans frottement.*

Pour abréger, on n'écrira que la première des trois équations qui se rapportent aux trois axes, $x$, $y$, $z$, en la faisant suivre de l'indication, etc.

Une molécule est animée au temps $t$ d'une vitesse $u$; son déplacement est donc : $u_x dt$, etc. Une propriété de cette molécule, telle que sa densité, par exemple, subit une double variation, celle du point du champ où elle se trouve et celle due à son transport; cette relation s'exprime par l'égalité d'Euler :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\delta}{\delta t} + u_x \frac{\delta}{\delta x} + u_y \frac{\delta}{\delta y} + u_z \frac{\delta}{\delta z}$$

La lettre $d$ se rapporte à la variation totale, et la lettre $\delta$ à la variation d'un point fixe du champ.

Les équations du mouvement sont sous la forme ordinaire, $p$ étant la pression,

$$m\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{\delta p}{\delta x}, \text{ etc.}$$

Soient $q$ la densité, k l'inverse de la densité ou le volume spécifique, $u' = qu$ la quantité de mouvement spécifique, $f$ la force sur l'unité de masse, $f' = qf$ la force sur l'unité de volume; les équations ci-dessus prennent la forme :

$$(1) \qquad \frac{du_x}{dt} = f_x - \frac{1}{q}\frac{\delta p}{\delta x}, \text{ etc.}$$

Il s'agit de transformer ces équations en prenant pour variable la quantité de mouvement au lieu de la vitesse. Pour cela, on les multiplie par $q$, ce qui donne :

$$q\frac{du_x}{dt} = f'_x - \frac{\delta p}{\delta x}, \text{ etc.}$$

D'autre part, l'équation de continuité, qui exprime que la variation de densité est celle qui résulte de l'apport de matière, s'écrit :

$$\frac{\delta u_x}{\delta a} + \frac{\delta u_y}{\delta y} + \frac{\delta u_z}{\delta z} + \frac{1}{q}\frac{\delta q}{dt} = 0$$

ou

$$e + \frac{1}{q}\frac{\delta q}{\delta t} = 0$$

en faisant $e = \text{div. } u$.

De plus, en différenciant le produit $qu_x$, on a :

$$q\frac{du_x}{dt} = \frac{du'_x}{dt} - \frac{1}{q}\frac{dq}{dt}u'_x$$

Il résulte de ces deux relations que les équations (1) s'écrivent :

$$(2) \qquad \frac{du'_x}{dt} + eu'_x = f'_x - \frac{\delta p}{\delta x}, \text{ etc.}$$

En appliquant l'égalité d'Euler au premier terme du premier membre, ce terme devient :

$$\frac{\delta' u_x}{\delta t} + u_x \frac{\delta u'_x}{\delta x} + u_y \frac{\delta u'_x}{\delta y} + u_z \frac{\delta u'_x}{\delta z}$$

qui s'écrit :

$$\frac{\delta u'_x}{\delta t} + \left[ u_x \frac{\delta u'_x}{\delta x} + u_y \frac{\delta u'_y}{\delta y} + u_z \right] + u_z \xi'_y - u_y \xi_z$$

où le vecteur $\xi'$ est le curl de $u'$, défini par les équations :

$$\xi'_x = \frac{\delta u'_z}{\delta y} - \frac{\delta u'_y}{\delta z}, \text{ etc.}$$

et en remplaçant $u_x$ par $\frac{u'_x}{k}$, l'expression ci-dessus devient

$$\frac{\delta u'_x}{\delta t} + \frac{1}{2} k \frac{\delta u'^2}{\delta x} + u_z \xi'_y - u_y \xi'_z$$

de manière que les équations (2) prennent la forme :

$$(3) \quad \frac{\delta u'_x}{dt} + u_z \xi'_y - u_y \xi'_z = f'_x - \frac{\delta p}{\delta x} e u'_x - \frac{1}{2} k \frac{\delta u'_z}{\delta x}, \text{ etc.}$$

Les équations (3) permettent d'éliminer la pression ; on différentie la troisième par rapport à $y$, la seconde par rapport à $z$ et on retranche, ce qui donne, après certaines réductions :

$$(4) \quad \frac{\delta \xi'_x}{dt} = \xi'_x \left( \frac{\delta u_y}{\delta y} + \frac{\delta u_z}{\delta z} \right) + \xi'_y \frac{\delta u_x}{\delta y} + \xi'_z \frac{\delta u_x}{\delta z}$$
$$+ \left( \frac{\delta f'_z}{\delta y} + \frac{\delta f'_y}{\delta z} \right)$$
$$- \left( \frac{\delta e u'_x}{\delta y} - \frac{\delta e u'_y}{\delta z} \right)$$
$$- \frac{1}{2} \left( \frac{\delta K}{\delta y} \frac{\delta u'_z}{\delta z} - \frac{\delta K}{dz} \frac{\delta u'^2}{\delta y} \right), \text{ etc.}$$

et les quatre termes dont se compose le second membre sont désignés par les indices 1, 2, 3, 4, de manière que l'équation s'écrit :

$$\frac{d\xi'_x}{dt} = \left(\frac{d\xi'_x}{dt}\right)_1 + \left(\frac{d\xi'_x}{dt}\right)_2 + \left(\frac{d\xi'_x}{dt}\right)_3 + \left(\frac{d\xi'_x}{dt}\right)_4$$

## II. *Discussion*.

L'équation (4) est l'expression la plus générale de l'accélération du mouvement de rotation dans un fluide sans frottement. Il faut remarquer que le vecteur $\xi'$ est une quantité de mouvement rotatoire. Nous considérons maintenant chacun des termes dans lesquels l'équation est décomposée.

A.

$$(5)\quad \left(\frac{d\xi'}{dt}\right)_1 = -\xi'_x\left(\frac{\delta u_y}{\delta y} + \frac{\delta u_z}{dz}\right) + \xi'_y\frac{\delta u_x}{\delta y} + \xi'_z\frac{\delta u_x}{\delta z}, \text{ etc.}$$

Le mémoire classique de Helmholtz sur la conservation du tourbillon suppose le fluide incompressible et homogène. Ces deux conditions, jointes à celle que les forces en jeu sont conservatives ou à potentiel, annulent dans l'équation (4) les termes qui suivent $\left(\frac{d\xi'_x}{dt}\right)$. Quant à l'équation (5), elle se réduit à la forme donnée par Helmholtz, lorsqu'on tient compte de la condition $e = o$, et par conséquent on peut en déduire les résultats connus.

En conservant au problème toute sa généralité, on voit que l'équation (5) ne donne production d'un tourbillon que s'il en existe déjà au temps considéré, puisque sans cela le second membre est nul; elle fait donc connaître seulement les modifications que subit un tourbillon existant, et en remarquant que le facteur $\frac{\delta u_y}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta z}$ est la dilatation de surface dans le plan $yz$, on voit que ce terme négatif implique une augmentation du moment d'inertie relatif à l'axe $x$.

B.

$$\left(\frac{d\xi'_x}{dt}\right)_2 = \frac{\delta f'_z}{\delta y} - \frac{\delta f'_y}{\delta z}, \text{ etc.} \tag{6}$$

Il faut remarquer en premier lieu que l'équation (6), relative à la production du tourbillon par la force extérieure, montre que cette production est compatible avec le fait d'une force conservatrice, pourvu que la densité ne soit pas constante. En effet, si la force a $\Phi$ pour potentiel, on a :

$$f'_z = \frac{\delta \Phi}{\delta z}, f'_y = q\frac{\delta \Phi}{\delta y}$$

d'où, pour le second membre de l'équation :

$$\frac{\delta q}{\delta y} \cdot \frac{\delta \Phi}{\delta z} - \frac{\delta q}{\delta z}\frac{\delta \Phi}{\delta y}$$

ce qui fait que les trois équations relatives à $x$, $y$, $z$ s'expriment par la relation vectorielle :

$$\left(\frac{d\xi'}{dt}\right)_2 = \nabla q \times \nabla \Phi.$$

puisque, comme on l'a indiqué dans l'introduction, les trois composantes sont celles du produit des deux gradiants de $q$ et de $\Phi$. Comme on l'a dit également, le gradiant de $q$ est normal aux surfaces de niveau $q$=const. et il est dirigé dans le sens de l'augmentation de densité. De même pour le gradiant de $\Phi$ relativement aux surfaces $\Phi$ = const. Puisque le vecteur produit est perpendiculaire aux deux vecteurs, l'axe du tourbillon devant se trouver à la fois dans les deux surfaces de niveau coïncide avec leur intersection. De plus, vu l'ordre dans lequel les deux facteurs se trouvent, le sens de la rotation est celui par lequel le vecteur $q$ est amené par le plus court chemin à coïncider avec le vecteur $\Phi$. De là l'énoncé suivant :

*Il se produit un tourbillon autour de la ligne d'intersection de la surface d'équidensité et de la surface équipotentielle, dans le sens allant du vecteur densité au vecteur potentiel.*

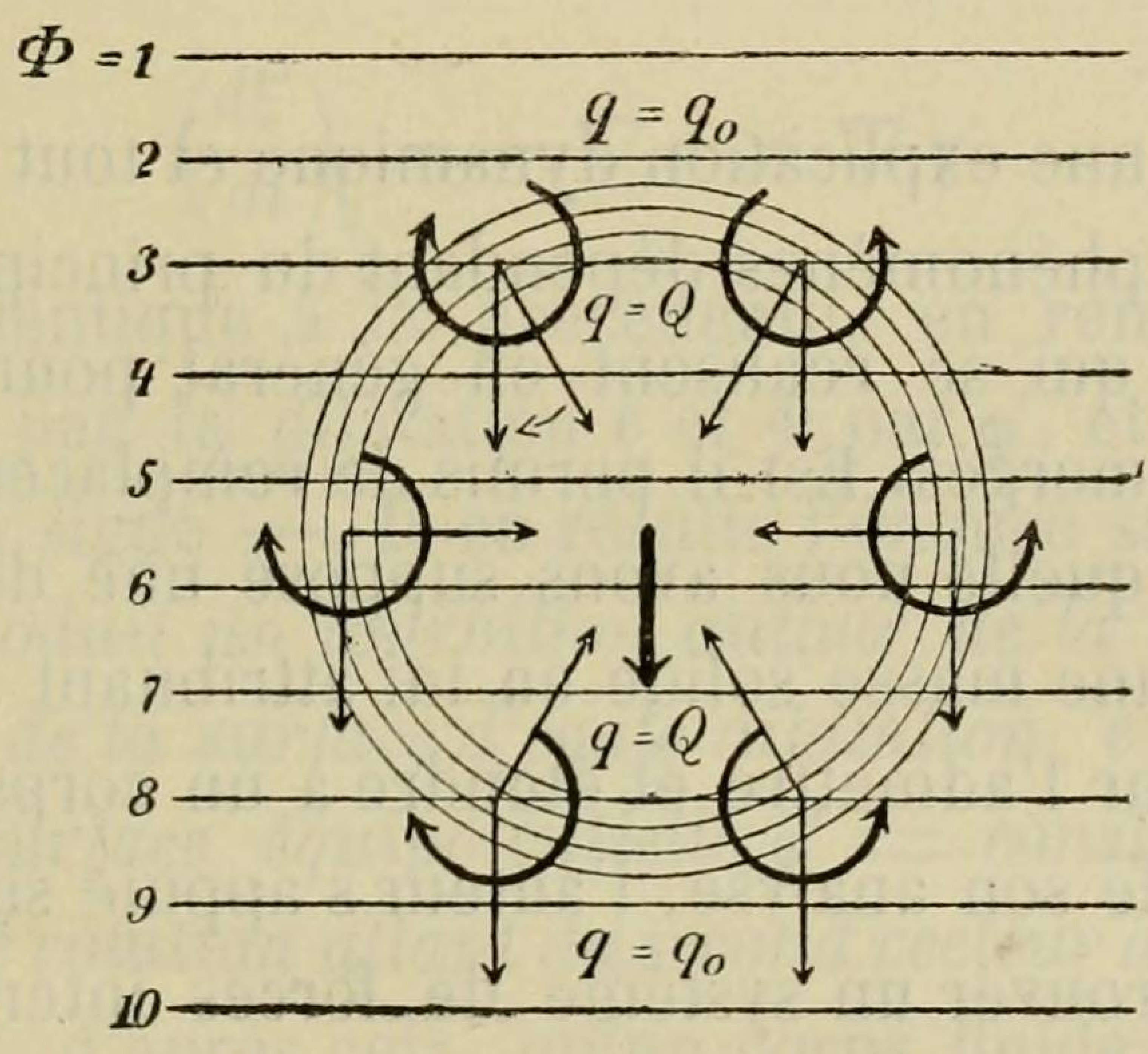


Fig. 1.

Considérons dans un fluide homogène de densité $q = q_0$ une masse composée aussi de fluide, mais limitée et d'une densité $q = Q$, plus grande que $q_0$, et que, pour abréger, on désigne par le *corps*. Dans la couche de transition, on admet que la densité passe de $q_0$ à Q d'une manière continue, mais très rapide. La fig. 1 représente une coupe verticale; dans la couche de transition on voit une série de surfaces d'équidensité qui sont coupées par les lignes horizontales représentant les surfaces de niveau de la pesanteur. C'est seulement dans la couche de transition que le gradiant de $q$ n'est pas nul et, par conséquent, qu'il se produit un tourbillon. Le sens de la rotation déduit de la disposition relative des deux vecteurs, indiqué par une flèche, est tel, comme on le voit, qu'il ne peut se produire que si le corps prend un mouvement de haut en bas par rapport au fluide. On peut donc énoncer le principe suivant : *Relativement au fluide dans lequel il est immergé, un corps plus lourd prend un mouvement descendant, et un corps moins lourd un mouvement ascendant.*

C'est là une explication dynamique et tout à fait nouvelle des phénomènes dépendant du principe d'Archimède, et qui se réalisent en général pour les corps solides immergés. Est-il permis de remplacer la masse fluide à laquelle nous avons supposé une densité spéciale par une masse solide en lui attribuant les mêmes effets ? Pour l'admettre et étendre à un corps solide les résultats de son analyse, l'auteur s'appuie sur la possibilité de trouver un système de forces intérieures qui ferait prendre aux molécules du fluide les mêmes mouvements que si elles appartenaient à un corps solide. Et comme, d'autre part, ces forces peuvent être conservatives, l'équation relative aux tourbillons n'est pas altérée.

C. Les trois équations

$$(7) \qquad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_3 = \left(\frac{\delta eu'_z}{\delta y} - \frac{\delta eu'_y}{\delta z}\right), \text{ etc.}$$

peuvent s'exprimer par la relation vectorielle

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_3 = - \operatorname{curl} eu'$$

Par conséquent, si $eu'$ a un curl qui ne soit pas nul, il se produit un tourbillon dynamique, c'est-à-dire dû à la quantité de mouvement $u'$, et il faut remarquer que le vecteur lui-même est nul si $e$ est nul, ce qui est le cas pour un fluide incompressible. Revenant à l'équation (4), nous considérons le cas où il n'y a pas de tourbillon à l'origine, ce qui implique que $u'$ a un potentiel $\varphi'$, d'où résulte pour l'équation (7)

$$\left(\frac{d\xi_x}{dt}\right)_3 = - \left(\frac{\delta e}{\delta y}\frac{\delta \varphi'}{\delta z} - \frac{\delta e}{\delta z}\frac{\delta \varphi'}{\delta h}\right) \text{etc.}$$

d'où la relation vecterielle :

$$\left(\frac{d\xi'}{dt}\right)_3 = - \nabla e \times \nabla \varphi'$$

relation identique à la précédente, en remplaçant la densité $q$ par la dilatation $e$ et $\Phi$ par $\varphi'$, et en tenant compte du signe —. Il en résulte l'énoncé suivant :

*Il se produit un tourbillon autour de la ligne d'intersection de la surface d'égale dilatation, $e =$ const., et de la surface équipotentielle $\varphi' =$ const., dans le sens d'une rotation allant du second vecteur au premier.*

On voit, d'après cela, qu'un corps fluide se dilatant ou se contractant dans un champ de potentiel de quantité de mouvement est analogue à un corps plus lourd ou plus léger dans un champ de pesanteur. C'est seulement dans la couche de transition que la variation de dilatation existe et par conséquent qu'il y a production de tourbillon. La fig. 2 représente les surfaces dont l'intersection est l'axe du tourbillon, normal par conséquent au plan de la figure. A cause du signe négatif, la rotation s'effectue dans un sens contraire à celui de la fig. 1. Par conséquent : *Relativement au fluide en mou-*

*vement qui l'entoure, un corps qui se contracte prend un mouvement dans le sens de celui du fluide et s'il se dilate en sens contraire.*

Cet énoncé comprend le principe dynamique, qui est à la base de la répulsion ou de l'attraction des sphères pulsatiles, et il est ici généralisé et rendu indépendant de la forme du corps.

Ajoutons que si le courant d'énergie du milieu ambiant est aussi périodique, les deux vecteurs $e$ et $\varphi'$ changent de signe simultanément. Tel sera le cas si le

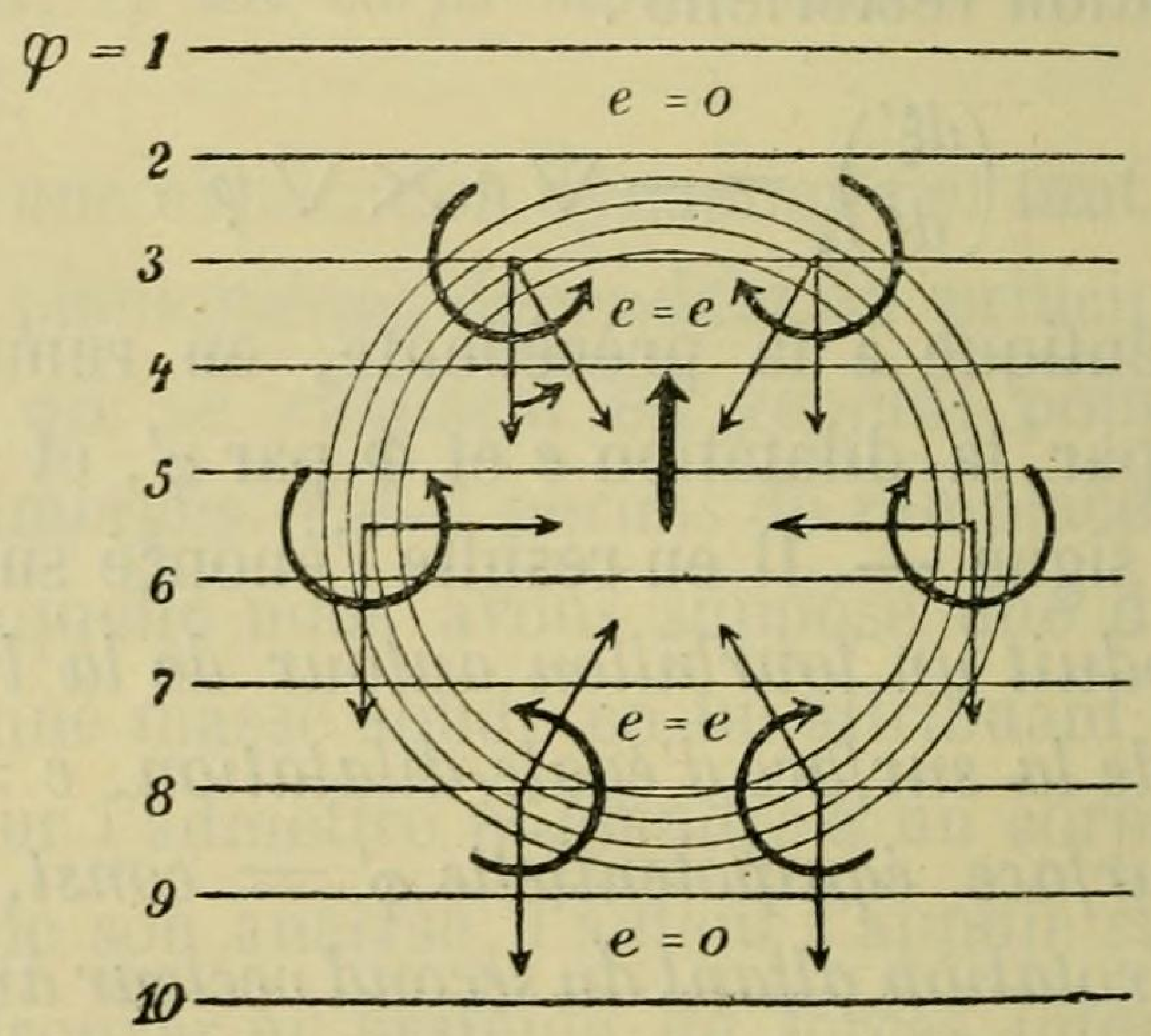


Fig. 2.

courant est de son côté produit par un autre corps qui subit des contractions et des dilatations successives synchrones à celles du premier corps. Il en résulte que l'action reste de même sens.

D.

$$(8) \qquad \left[\frac{d\xi'_x}{dt}\right]_4 = -\frac{1}{2}\left[\frac{\delta k}{\delta y}\frac{\delta u'^2}{\delta z} - \frac{\delta k}{\delta z}\frac{\delta u'^2}{\delta y}\right], \text{etc.}$$

Ces trois équations donnent la relation vectorielle :

$$\left(\frac{d\xi'}{dt}\right)_4 = -\frac{1}{2}\nabla k \times \nabla u'^2$$

qui est de la même forme que les deux précédentes. En la comparant à la première, c'est-à-dire à l'équation (6), il y a à noter les trois différences suivantes : le signe négatif, au lieu de la densité $q$ la réciproque $k$, et à la place du potentiel d'une force telle que la pesanteur, le carré de la quantité de mouvement hydrodynamique ; l'énoncé est le suivant :

Il se produit un tourbillon autour de la ligne d'intersection de la surface $k =$ const., de volume spécifique constant, et de la surface $u'^2 =$ const., et dans le sens allant du vecteur $u'^2$ au vecteur $k$. Or, dans le fluide qu'on suppose homogène, le carré de la quantité de mouvement est proportionnel à l'énergie, et le vecteur $\nabla u'^2$ est dirigé dans le sens de l'énergie croissante. Par conséquent : *Relativement au fluide environnant, un corps d'un plus grand volume spécifique se meut dans la direction de l'énergie décroissante, et de volume spécifique moindre en sens contraire.*

Lorsqu'on suppose le volume spécifique plus grand, la figure est la même que la fig. 2 ; les cercles représentent les surfaces, $k =$ const., et les lignes horizontales les surfaces $u'^2 =$ const.

## III. *Analogie entre la force productrice du tourbillon dans le fluide et la force pondéromotrice du champ électrostatique.*

Revenons à l'équation générale (4) et admettons que des forces extérieures soient telles qu'elles contrebalancent l'action intérieure qui produit le tourbillon, de manière qu'on ait d'une façon permanente :

$$\xi'_x = \xi'_y = \xi'_z = 0$$

L'équation, dont les termes en $\xi'$ s'annulent, devient :

$$\frac{\delta f_z}{\delta y} - \frac{\delta f_y}{\delta z} = \frac{\delta e}{\delta y}\frac{\delta \varphi}{\delta z} - \frac{\delta e}{\delta z}\frac{\delta \varphi'}{\delta y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta K}{\delta y}\frac{\delta u'^2}{\delta z} - \frac{\delta K}{\delta z}\frac{\delta u'^2}{\delta y}\right), \text{ etc.}$$

et ces trois équations s'expriment par la relation vectorielle

$$\text{curl}\, f = \nabla e \times \nabla \varphi' + \frac{1}{2} \nabla k \times \nabla u'^2$$

C'est l'équation à laquelle doit satisfaire la force $f'$ pour annuler le tourbillon, et par conséquent une force égale et contraire $f'_e = - f'$ peut être considérée comme le produisant. On a vu, par ce qui précède, que cette force, en donnant lieu aux tourbillons, produit des mouvements, soit de masses pulsatiles, soit de masses plus lourdes ou plus légères ; c'est, en d'autres termes, la force d'énergie hydrodynamique ainsi désignée par C.-A. Bjerknes. En remplaçant dans l'équation $\nabla \varphi'$ par sa valeur $u'$, l'équation devient :

$$\text{curl}\, f_e = - \nabla e \times u' - \frac{1}{2} \nabla k \times \nabla u^2$$

Considérons, d'autre part, la force pondéromotrice qui s'exerce sur l'unité de volume de matière dans le champ électrostatique. Afin de rendre la comparaison plus facile, prenons les mêmes lettres et désignons par $u'$ l'intensité électrostatique, par $k$ la constante diélectrique et par $e$ l'électricité vraie ; la force pondéromotrice $f$ a pour valeur

$$f_x = eu'_x - \frac{1}{2} u'_z \frac{dk}{dx}, \text{ etc.}$$

expression généralement admise.

Si maintenant on opère sur ces trois équations de manière à calculer le curl de $f'$, on trouve une expression qui est identique au curl de la force hydrodynamique, mais de signe contraire, ce qui implique une notion de renversement, comme une image par rapport à l'objet. Il en résulte :

$$\text{Curl}\, f = -\, \text{Curl}\, f'_e$$

*La force pondéromotrice dans le champ électrostatique et la force d'énergie dans le champ hydrodynamique ont des curls égaux et de signes contraires.*

Ce résultat permet d'établir entre les deux champs une analogie en ce qui concerne la production des tourbillons et, par conséquent aussi, du mouvement des masses.

*La force d'énergie dans le champ hydrodynamique et la force pondéromotrice du champ électrostatique produisent des mouvements égaux et contraires des corps qui s'y trouvent.*

## *Analogie des phénomènes hydrodynamiques et électrostatiques.*

Il s'agit d'un équilibre hydrodynamique à un moment donné analogue à un équilibre électrostatique. Dans un cas comme dans l'autre, il faut supposer des forces extérieures qui s'opposent au mouvement des corps. Comme on l'a vu, s'il n'y a pas de mouvement des masses et, par conséquent, pas de tourbillon, $u'$, la quantité de mouvement, est un vecteur à potentiel. Il en est de même, comme on le sait, pour l'intensité électrostatique, et la condition

$$\text{Curl}\, u' = 0$$

est commune aux deux champs.

En multipliant $u'$ par $k$, le volume spécifique, on obtient dans le premier champ un vecteur nouveau, la vitesse, et dans le second, le déplacement $u = ku'$; la divergence de la vitesse donne la dilatation, d'une part, et de l'autre la divergence du déplacement donne l'électricité vraie :

$$\text{div.}\, u = e$$

On sait que le champ électrostatique est déterminé sans ambiguité lorsqu'on connaît en un point quelconque la densité de l'électricité vraie $e$ et la constante K. Puisque $u'$ dépend de ces données de la même manière dans les deux cas, on en conclut :

*Dans un système hydrodynamique, en identifiant la distribution du volume spécifique à celle de la constante diélectrique et celle de la dilatation à celle de l'électricité vraie, la quantité de mouvement est répartie comme le serait l'intensité électrostatique.*

Dans les deux cas, comme on l'a dit, il faut supposer des forces extérieures qui s'opposent à la formation de tourbillons. Nous ne connaissons pas les forces elles-mêmes, mais seulement leur curl, qui est identique et de signe contraire.

$$\text{Curl}\, f' = \pm \nabla e \times \nabla u' \pm \frac{1}{2} \nabla k \times \nabla u'^2$$

Le signe supérieur se rapporte au champ électrostatique, et le signe inférieur au champ hydrodynamique.