数学分析
学习指导书

上　册

吴良森　毛羽辉
韩士安　吴　畏　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是与华东师范大学数学系编《数学分析》(第三版,上册)配套的学习指导书,主要是作为学习本课程的课后复习和提高之用。本书按节编写,每节包含:内容提要、释疑解惑、范例解析、习题选解,每章后附有总练习题提示和解答(解答部分约占 50%)及测试题。本书切合实际,注意提高学生对数学分析基本概念、基本定理、基本计算技巧的理解和应用,可作为师范院校或其他类型数学专业学生使用,对教师也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析学习指导书.上册 吴良森等编著.—北京:高等教育出版社,2004.8
ISBN 7-04-014363-1

Ⅰ.数... Ⅱ.吴... Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063573 号

策划编辑 李 蕊 责任编辑 舒敬江 封面设计 于文燕
责任绘图 吴文信 版式设计 张 岚 责任校对 尤 静
责任印制

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
印 刷

开 本 787×960 1/16
印 张 24.5
字 数 460 000

版 次 年 月第 1 版
印 次 年 月第 次印刷
定 价 28.10 元

前　言

数学分析是高等院校数学专业和应用数学专业的一门重要基础课程。本书是与华东师范大学数学系编的《数学分析》第三版(上、下册)相配套的学习指导书,主要是作为学习数学分析课程的学生课后复习与提高之用,并希望对任课教师也有参考价值。

本书按节编写,每节内容包括如下四部分:

一、内容提要　陈述每节中的基本概念,重要定理、公式及要点与难点分析。

二、释疑解惑　通过一系列问题与解答,用以解释数学分析学习过程中的某些疑难问题。主要包括对课程中某些较难概念的理解;重要定理的条件分析和使用要领;典型方法和技巧的总结;对某些似是而非的论断的辨析。

三、范例解析　在每节中选择 5～8 个中等和中等以上难度的例题(一般按难易程度排序),通过分析、求解和注释,介绍与该例题有关的典型解题方法和计算技巧,也适度地引入一些物理和其他应用实例。认真钻研这部分内容,对读者掌握基本要求、提高分析和解决问题的能力会有实质性的帮助。

四、习题选解(也有的节略去了这一部分)　对每节中较难的习题给出适当提示或解答。希望读者能正确对待这部分内容,坚持‘先做后看’的原则,才能取得事半功倍的效果。

对每章末的总练习题,同样为难度较高的部分习题给出了提示或解答。

本书在各章后设有测试题(分 A,B 两卷),作为学完各章内容后检测自己掌握知识的程度之用。在书末附有测试题的提示或解答。

在附录中,我们为读者选编了几套我校考研试题,并附解答。

本书分上、下两册,其中第一至第七章和第十三章由吴良森编写;第八至第十一章和第十六章由毛羽辉编写;第十二、十四、十五、十七、十八章由韩士安编写;第十九至第二十三章由吴畏编写;书末考研题由毛羽辉编撰。

编写过程中,由吴良森担任策划、组织工作,毛羽辉和吴良森分别阅读和修改了初稿,最后由毛羽辉整理全书。

高等教育出版社徐刚、王瑜、李蕊、舒敬江等同志对本书编写给予很大帮助,在此一并致谢。

本书承高等教育出版社文小西编审认真审改,提出宝贵的修改意见和建议,在此表示衷心感谢。

由于我们对编写学习指导书缺乏经验,因此难免有不足和错误之处,恳请同行和读者批评指正。

编　者

2004 年 2 月

目　　录

第一章　实数集与函数

§1 实　数

一、内容提要

1° 在中学数学中已经知道实数包括有理数和无理数.有理数可用分数$\frac{p}{q}$(p, q 为互质整数, $q \neq 0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示. 2是首先遇到的无理数,它与古希腊时期所发现的不可公度线段理论有直接联系,且可以表示为无限十进不循环小数.

实数的无限十进小数表示在人类实践活动中被普遍采用,我们是由无限十进小数表示出发来叙述实数理论的.

2° 若 $x = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$为非负实数,称有理数

$$x_n = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n$$

为实数 x 的 n 位不足近似,而有理数

$$\bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

称为 x 的 n 位过剩近似.

实数的无限十进小数理论的核心在于定义实数的四则运算,两个有限小数的四则运算可以从末位开始进行,但是两个无限十进小数的运算无法从末位开始.在定义过程中,实数的不足近似和过剩近似起了重要的作用,在教材上册第300 页对无限十进小数的四则运算作了严格的定义.

在§2 中证明确界原理时,下述命题将起重要的作用.

命题　设 $x = a_0 . a_1 a_2 \cdots$与 $y = b_0 . b_1 b_2 \cdots$为两实数,则 $x > y$ 的等价条件是:存在正整数 n,使得

$$x_n > \bar{y}_n .$$

我们对上述命题作一个直观的解释:因为 x_n当 n 增加时是递增的,即对任何 n, $x_{n+1} \geq x_n$,而$\bar{y}_n$是递减的,即对任何 n,$\bar{y}_{n+1} \leq \bar{y}_n$,于是 $x_n - \bar{y}_n$是递增的,而且随着 n 增大与 $x - y$ 越来越接近.若 $x - y > 0$,则必定存在某个正整数 n,使得 $x_n > \bar{y}_n$,而且从这个 n 起不等式一直成立.

3° 在数学分析课程中不等式占有重要的地位，在后继课程中，某些不等式可以成为某个研究方向的基础.中学数学中的数学归纳法是证明某些不等式的重要工具，我们在本节范例中将举出这方面的应用，希望读者重视这类技巧.

二、释疑解惑

问题 1 为什么 2.001 与 2.000 999 9…表示同一实数？

答 因为

$$0.001=\frac{1}{1\ 000}=3\times\frac{1}{3\ 000}=3\times0.000\ 333\ 3\cdots$$
$$=0.000\ 999\ 9\cdots,$$

于是 2.001 与 2.000 999 9…表示同一实数.为了实数的无限十进小数表示的唯一性，约定把 2.001 表示为 2.000 999 9….

问题 2 为什么有理数$\frac{p}{q}$(p,q为互质的整数，$q\neq0$)可以表示为无限十进循环小数？

答 不妨设有理数$\frac{p}{q}\in(0,1)$，$p<q$.由实数的阿基米德性可知：存在 a_1 和 r_1，使得

$$10p=a_1q+r_1,\quad 0\leq a_1\leq9,\quad 0\leq r_1\leq q-1,$$

(注：对 $10p$，q，(i) 若 $10p<q$，则 $a_1=0$，$r_1=10p$；(ii) 若 $10p=q$，则 $a_1=1$，$r_1=0$；(iii) 若 $10p>q$，由实数的阿基米德性，存在正整数 a_1，$0<a_1\leq9$，使得$(a_1+1)q>10p$，$a_1q\leq10p$，于是 $r_1=10p-a_1q$.)于是

$$\frac{p}{q}=\frac{a_1}{10}+\frac{r_1}{10q},\quad 0\leq\frac{r_1}{10q}<\frac{1}{10}.$$

同样成立

$$10r_1=a_2q+r_2,\quad 0\leq a_2\leq9,\quad 0\leq r_2\leq q-1,$$

于是

$$\frac{r_1}{10q}=\frac{a_2}{10^2}+\frac{r_2}{10^2q},\quad 0\leq\frac{r_2}{10^2q}<\frac{1}{10^2},$$
$$\frac{p}{q}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{r_2}{10^2q}.$$

重复以上步骤可得

$$\begin{aligned}&10p=a_1q+r_1,\\&10r_1=a_2q+r_2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&10r_{n-1}=a_nq+r_n,\quad 0\leq a_n\leq9,\quad 0\leq r_n\leq q-1,\end{aligned}\tag{1.1}$$

于是有

$$\frac{p}{q}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{r_n}{10^n q},0\leq\frac{r_n}{10^n q}<\frac{1}{10^n},$$

这样

$$\frac{p}{q}=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots.$$

因为上述各式中的余数 r_n 为$\{0,1,2,\cdots,q-1\}$中某数,于是等式组(1.1)从某个 n 开始重复,即$\frac{p}{q}$是无限十进循环小数.

三、范例解析

例 1 设 a,b 为任意实数,证明:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}. \tag{1.2}$$

证 我们将从函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$的性质着手证明不等式.

设 $f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$, $x>0$,若 $0<x_1<x_2$,则 $f(x_1)<f(x_2)$.

因为$|a+b|\leq|a|+|b|$,于是有

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leq\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

□

例 2 利用数学归纳法证明二项式展开定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}, \tag{1.3}$$

其中 a,b 为任意实数, n 为正整数.

证 $n=1$ 时,等式(1.3)显然是成立的.设等式当 $n=m$ 时成立,即

$$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k a^k b^{m-k},$$

当 $n=m+1$ 时,

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1}&=(a+b)(a+b)^m\\&=(a+b)\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k a^k b^{m-k}\\&=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k a^k b^{m-k+1}+\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k a^{k+1}b^{m-k}\end{aligned}$$

$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + a^{m+1}$$
$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^k b^{m-k+1} + a^{m+1}$$
$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^k + C_m^{k-1}) a^k b^{m+1-k} + a^{m+1}$$
$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k} + a^{m+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k},$$

其中应用了组合公式 $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$.于是由数学归纳法,二项式展开定理对任意正整数 n 成立 . □

注　证明中应用了数学归纳法 .本节在后面的例 3、例 5 中将应用它证明其他一些不等式,这是分析证明中常用的方法之一 .

例 3　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个实数, a_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 符号相同, 且 $a_i > -1$, 证明不等式

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n . \tag{1.4}$$

当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = x$, $x > -1$ 时,成立伯努利(Bernoulli)不等式

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad (x > -1) \qquad n \in \mathbf{N}_+ . \tag{1.5}$$

证　$n = 1$ 时不等式(1.5)显然成立 .现设 $n = m$ 时不等式成立,即

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_m) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

其中 a_i 符号相同且 $a_i > -1$ ($i = 1, 2, \cdots, m$) .

当 $n = m + 1$ 时,因为 $1 + a_{m+1} > 0$,利用 $n = m$ 时的不等式,有

$$\begin{aligned}&(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_m)(1 + a_{m+1})\\ \geq\ &(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(1 + a_{m+1})\\ =\ &1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) a_{m+1}\\ \geq\ &1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{m+1},\end{aligned}$$

其中最后不等式成立是由于 a_{m+1} 与 a_i ($i = 1, 2, \cdots, m$)同号 .再在不等式(1.5)中令 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = x$, $x > -1$,则有伯努利不等式

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (x > -1) .$$ □

例 4　证明柯西(Cauchy)不等式:设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为两组实数,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) . \tag{1.6}$$

证　本例中将应用中学数学中二次三项式恒正的判别式来完成证明 .

设 t 为任何实数, t 的二次三项式

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + tb_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + t^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq 0,$$

于是有

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i{}^{\ 2} - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i{}^{\ 2} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad \sum_{i=1}^{n} b_i^2 . \qquad \square$$

例 5 设 $p, n, m \in \mathbf{N}_+$.证明:

(1) $b^m - a^m = (b-a)(b^{m-1} + b^{m-2}a + b^{m-3}a^2 + \cdots + a^{m-1})$. (1.7)

(2) $n^p < \dfrac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} < (n+1)^p$. (1.8)

(3) 试用归纳法证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p . \tag{1.9}$$

证 (1) $(b-a)(b^{m-1} + b^{m-2}a + b^{m-3}a^2 + \cdots + a^{m-1})$

$$\begin{aligned} &= b^m + b^{m-1}a + b^{m-2}a^2 + \cdots + ba^{m-1} - \\ &\quad b^{m-1}a - b^{m-2}a^2 - \cdots - ba^{m-1} - a^m \\ &= b^m - a^m . \end{aligned}$$

(2) 在(1.7)中设 $b = n+1$, $a = n$, $m = p+1$, 有

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = (n+1)^p + (n+1)^{p-1}n + \cdots + n^p ,$$

于是

$$(p+1)n^p < (n+1)^{p+1} - n^{p+1} < (p+1)(n+1)^p ,$$

这样就证得

$$n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} < (n+1)^p .$$

(3) 易证 $n=2$ 时, 当 p 为正整数时,

$$1^p < \frac{2^{p+1}}{p+1} < 1^p + 2^p .$$

现设不等式(1.9)当 $n = m$ 时成立, 有

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^p < \frac{m^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{m} k^p , \tag{1.10}$$

当 $n = m+1$ 时, 由(1.8), (1.10)可得

$$\frac{(m+1)^{p+1}}{p+1} = \frac{(m+1)^{p+1} - m^{p+1}}{p+1} + \frac{m^{p+1}}{p+1}$$

$$< (m+1)^p + \sum_{k=1}^{m} k^p$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} k^p .$$

同样可证

$$\frac{(m+1)^{p+1}}{p+1} = \frac{(m+1)^{p+1} - m^{p+1}}{p+1} + \frac{m^{p+1}}{p+1}$$

$$\geq m^p + \sum_{k=1}^{m-1} k^p$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k^p .$$

于是不等式(1.9)当 $n = m+1$ 时也成立. □

四、习题选解(教材上册第 4 页)

6．设 a、b、$c \in \mathbf{R}_+$ ($\mathbf{R}_+$ 表示全体正实数集合).证明:

$$\left| \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2} \right| \leq |b-c| .$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证　利用根式有理化的方法,有

$$\left| \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2} \right|$$

$$= \frac{|b+c||b-c|}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\leq \frac{|b|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}} |b-c|$$

$$\leq |b-c| .$$ □

关于不等式的几何意义请读者通过画图自行解答.

8．设 p 为正整数.证明:若 p 不是完全平方数,则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

证　用反证法.假若 $\sqrt{p}$ 为有理数,设

$$\sqrt{p} = \frac{u}{v},\ u,\ v \text{ 为正整数,互质,且 } v \neq 0,$$

于是有 $p = \dfrac{u^2}{v^2}$.

一方面,p 为非平方数,故 $v^2 \neq 1$.另一方面,因 u 与 v 互质,故 u^2 与 v^2 也互质;但由 $u^2 = pv^2$,v^2 为 u^2 的一个整数因子,故必有 $v^2 = 1$,矛盾.由此可见 $\sqrt{p}$ 为无理数.

§2 数集·确界原理

一、内容提要

1° 邻域是数学分析中重要的基本概念.某点的邻域是与该点靠近的数的集合,它是今后描述极限概念的基本工具.

在无限区间记号$(-\infty, a]$,$(-\infty, a)$,$[a, +\infty)$,$(a, +\infty)$,$(-\infty, +\infty)$中出现的$-\infty$与$+\infty$仅是常用的记号,它们并不表示具体的数.在数学分析课程范围内,不要把$+\infty$,$-\infty$,∞当作数来运算.

2° 有界集和无界集是本节中关键的概念.要熟练掌握验证某个数集S是有界集或无界集的方法,其中重要的是证明数M不是数集S的上界(或下界)的方法:

M不是数集S的上(下)界 $\Leftrightarrow$ $\exists x_0 \in S$,使得$x_0 > M(x_0 < M)$.要证S无上(下)界,只需证明任何数M都不是S的上(下)界就可以了(注意本节释疑解惑问题2).读者掌握了这种技巧就容易了解如何验证确界的方法.

3° 确界是数学分析的基础严格化中的重要的概念.在初等数学中我们知道有限个数存在最大数和最小数,但是无限数集不一定有最大(小)数.例如:$S=(a, b)$是有界数集,但没有最大(小)数,但是S有最小上界b和最大下界a.定义有界数集S的最小上界为S的上确界,最大下界为S的下确界,由此可见,上(下)确界是最大(小)数在无限数集情况下的推广.

确界概念有两种等价的叙述方法,以上确界为例:

设S是$\mathbf{R}$中一个数集,若数η满足

(1) (i) 对一切$x \in S$,有$x \leq \eta$,即η是S的上界;
(ii) 对任何$\alpha < \eta$,存在$x_0 \in S$,使得$x_0 > \alpha$,即η又是S的最小上界.

或

(2) (i) 对一切$x \in S$,有$x \leq \eta$,即η是S的上界;
(ii) 对任何$\varepsilon > 0$,存在$x_0 \in S$,使得$x_0 > \eta - \varepsilon$,即η又是S的最小上界.

这两种定义是等价的.(2)中的$\eta - \varepsilon$相当于(1)中的α.在上述定义中可以限定$\varepsilon < \varepsilon_0$,其中$\varepsilon_0$为充分小的正数.定义(2)在某些证明题中使用起来更方便些.

4° 确界原理:设S是非空数集,若S有上界,则S必有上确界;若S有下界,则S必有下确界.

确界原理是实数系完备性的几个等价定理中的一个.在不少数学分析教程中把它作为叙述实数理论的出发点.确界定理的证明中主要是构造区间列

$$n.n_1n_2\cdots n_k,\quad n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k},\ k=1,2,\cdots,$$

使得每个区间的左端点 $n.n_1n_2\cdots n_k$ 不是数集 S 的上界,但是右端点 $n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k}$ 是数集 S 的上界,而 $\eta=n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$ 正好是数集 S 的上确界,这种证明是一种搜索上确界的过程,而且容易在计算机上得到实现.

二、释疑解惑

问题 1 非空有界数集 S 的上确界是否是 S 中的最大数?下确界是否是 S 中的最小数?在什么情况下,非空有界数集的上确界是最大数,下确界是最小数?

答 如果一个数集 S 的最大(小)数存在,则它就是 S 的上(下)确界.有限数集必有最大(小)数,故有限数集必有上(下)确界.而无限集 S 的上(下)确界就不一定是 S 的最大(小)数.例如数集

$$S=\left\{(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\middle|\,n=1,2,\cdots\right\},$$

可证

$$\sup S=1,\quad \inf S=-1.$$

先证 $\sup S=1$,注意到 $n=2k$,且 n 充分大时,$(-1)^{2k}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$ 可以充分靠近 1.于是

(i) $\forall n,(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq 1$;

(ii) $\forall\varepsilon>0$,当 k 充分大时 $k>\frac{1}{2\varepsilon}$,有 $1-\varepsilon<1-\frac{1}{2k}$,于是 $\sup S=1$.

同理可证 $\inf S=-1$.但是 $\sup S,\inf S$ 并不是 S 的最大、最小数.

若非空有界数集 S 的上确界 $\sup S\in S$,则 $\sup S$ 是最大数;若 S 的下确界 $\inf S\in S$,则 $\inf S$ 是最小数.故对于有界无限数蒋来说,其上(下)确界可以看作最大(小)数的推广.

问题 2 怎样给出无下界数集和无界数集的正面陈述?

答 无下界集:设数集 $S\subset\mathbf{R}$,若 $\forall L,\exists x\in S$,使得 $x<L$,则称 S 是无下界集.

无界集:设数集 $S\subset\mathbf{R}$,若 $\forall M>0,\exists x\in S$,使得 $|x|>M$,则称 S 是无界集.

例如,$S=\{-n^{(-1)^n}\mid n=1,2,\cdots\}$ 是无下界集.这是因为 $\forall L,\exists n=2k_0>|L|$,使得 $-n^{(-1)^n}=-2k_0<L$.

比较有界集与无界集的定义,把有界集定义中"$\exists M>0$"换成"$\forall M>0$";"$\forall x\in S$"换成"$\exists x\in S$";不等式"$|x|\le M$"换成"$|x|>M$",即可得无界集的正面陈述.无上界集的含义是任何 M 都不是数集的上界.把数学形式的陈述与其直观意义结合在一起理解,有利于掌握否定形式的陈述.

问题 3　怎样给出数 ζ 不是数集 S 的上确界的正面陈述?

答　若 ζ 不是数集 S 的上确界,则或者 ζ 不是 S 的上界,或者 ζ 是 S 的上界,但不是最小上界.于是数 ζ 不是数集 S 的上确界的正面陈述为:

(i) $\exists x_0\in S$,使得 $x_0>\zeta$;或者

(ii) $\exists \alpha_0<\zeta$, $\forall x\in S$, $x\le\alpha_0$.

三、范例解析

例 1　求数集 $S=\left\{\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\ \middle|\ n\in\mathbf{N}_+\right\}$ 的上、下确界.

分析　当 $n=2k$ 时,$\sqrt[2k]{1+2^{2k}}=2\sqrt[2k]{1+\frac{1}{2^{2k}}}$,容易看出 $k=1$ 时 $2\sqrt{1+\frac{1}{2^2}}$ 是偶数项中的最大数.当 $n=2k+1$ 时,$\sqrt[2k+1]{1+2^{-(2k+1)}}=\sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}>1$,当 k 充分大时,奇数项与数 1 充分靠近.因为 $2\sqrt{1+\frac{1}{2^2}}=\sqrt{5}$ 是 S 中最大数,于是 $\sup S=\sqrt{5}$,由上面分析可以看出 $\inf S=1$.

解　因为 $\sqrt{5}$ 是 S 中最大数,于是 $\sup S=\sqrt{5}$.再证 $\inf S=1$,这是因为

(i) $\forall n$, $\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\ge 1$;

(ii) 设 $a=\sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}$,由等式 $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)$ 可知,

$$\sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}-1=\frac{\frac{1}{2^{2k+1}}}{a^{2k}+a^{2k-1}+\cdots+1}\le\frac{1}{2^{2k+1}},$$

于是 $\forall \varepsilon>0$, $\exists k_0\in\mathbf{N}_+$ $\left(只要\ k_0>\frac{1}{2}\left(\log_2\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\right)$,使得

$$\sqrt[2k_0+1]{1+\frac{1}{2^{2k_0+1}}}-1\le\frac{1}{2^{2k_0+1}}<\varepsilon,$$

即

$$\sqrt[2k_0+1]{1+\frac{1}{2^{2k_0+1}}}<1+\varepsilon,$$

这样便证得 $\inf S = 1$. □

例 2 设数集 $S = \ 1 + n\sin\frac{n\pi}{3} \Big| n \in \mathbf{N}_+ \ $,求 $\sup S, \inf S$.

解 不妨取 $n = 6k+1, 6k+2, \cdots, 6k+5 (k = 1, 2, \cdots)$验证相应数值,可以发现一些规律 取 $n = 6k+1 (k = 1, 2, 3, \cdots)$得到数集 S 的子集

$$S_1 = \ 1 + (6k+1)\frac{3}{2} \Big| k \in \mathbf{N}_+ \ ;$$

取 $n = 6k+5 (k = 1, 2, 3, \cdots)$又得到子集

$$S_2 = \ 1 - (6k+5)\frac{3}{2} \Big| k \in \mathbf{N}_+ \ .$$

因为 S_1 是无上界数集, S_2 是无下界数集,所以

$$\sup S = +\infty, \ \inf S = -\infty .$$ □

例 3 设数集 $S = \{ y \mid y = 1 + x^2, x \text{ 为有理数} \}$,试求 $\inf S, \sup S$.

分析 因为数集 S 无上界,所以 $\sup S = +\infty$.又因数 1 是 S 的下界,当有理数 x 充分小时, $y = 1 + x^2$ 与 1 很靠近,于是可以推测 1 是 S 的下确界 .

解 先验证 $\sup S = +\infty$.

$\forall M > 0, \exists$ 有理数 x_0 (设 $M > 1$,只要 $x_0 > \ M - 1$),使得 $1 + x_0^2 > M$,于是 S 是无上界数集 .按定义, $\sup S = +\infty$.

再验证 $\inf S = 1$:

(i) $\forall y \in S, y = 1 + x^2 \geq 1 (x$ 为有理数$)$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0$,由有理数的稠密性, $\exists$ 有理数 x_0,使得 $- \ \varepsilon < x_0 < \ \varepsilon$,于是 $1 + x_0^2 < 1 + \varepsilon$.

由此可见 $\inf S = 1$. □

例 4 设 a 为任意实数, A 为 $\mathbf{R}$ 中非空有界数集,证明:

$$\sup(a + A) = a + \sup A, \ \inf(a + A) = a + \inf A,$$

其中 $a + A = \{ a + x \mid x \in A \}$.

证 先证 $\sup(a + A) = a + \sup A$.

由 $\sup A$ 的定义,满足:

(i) $\forall x \in A, x \leq \sup A$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A, x_0 > \sup A - \varepsilon$.

于是又满足:

(i) $\forall x \in A, a + x \leq a + \sup A$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A, a + x_0 > a + \sup A - \varepsilon$.

因而证得

$$\sup(a + A) = a + \sup A .$$

同理可证

$$\inf(a + A) = a + \inf A . \qquad \square$$

例 5 设 A, B 是数轴上位于原点右方的非空有界数集，记 $AB = \{xy | x \in A, y \in B\}$，证明：

$$\sup AB = \sup A \cdot \sup B .$$

证 先证 $\sup AB \leq \sup A \cdot \sup B$.

由上确界定义，" $x \in A$, $x \leq \sup A$, " $y \in B$, $y \leq \sup B$，因为 $x \geq 0$, $y \geq 0$，所以 $xy \leq \sup A \cdot \sup B$，这说明 $\sup A \cdot \sup B$ 是 AB 的一个上界，于是

$$\sup AB \leq \sup A \cdot \sup B .$$

再证 $\sup A \cdot \sup B \leq \sup AB$.

按上确界定义，" $\varepsilon > 0$（不妨设 $\varepsilon < 1$），v $x_0 \in A$, $x_0 > \sup A - \varepsilon$，v $y_0 \in B$, $y_0 > \sup B - \varepsilon$，于是 v $x_0 y_0 \in AB$，使

$$x_0 y_0 > (\sup A - \varepsilon)(\sup B - \varepsilon) .$$

这样就有

$$\begin{aligned} \sup AB \geq x_0 y_0 &> (\sup A - \varepsilon)(\sup B - \varepsilon), \\ &= \sup A \cdot \sup B - (\sup A + \sup B)\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &> \sup A \cdot \sup B - (\sup A + \sup B + 1)\varepsilon . \end{aligned}$$

由于 A, B 中元素皆非负，因此 $\sup A \geq 0$, $\sup B \geq 0$, $\sup A + \sup B + 1 > 0$，于是 $\varepsilon' = (\sup A + \sup B + 1)\varepsilon$ 仍为一任意小的正数 这样证得 $\sup AB \geq \sup A \cdot \sup B$.

由此得到

$$\sup AB = \sup A \cdot \sup B . \qquad \square$$

四、习题选解（教材上册第 9 页）

8．设 $a > 0$, $a \neq 1$, x 为有理数，证明：

$$a^x = \begin{cases} \sup\{a^r \mid r \text{ 为有理数}, r < x\}, & \text{当 } a > 1, \\ \inf\{a^r \mid r \text{ 为有理数}, r < x\}, & \text{当 } a < 1 . \end{cases}$$

证 首先把要证的结论用确界的定义确切地写出来 .不妨设 $a > 1$，需证：

(i) " $r < x$, r 为有理数, $a^r \leq a^x$;

(ii) " $\alpha < a^x$, v 有理数 r, $r < x$, 使得 $\alpha < a^r < a^x$.

因为 r, x 都是有理数，由有理数指数性质可得(i) .再证(ii)，因为 $0 < \alpha < a^x$，所以 $\log_a \alpha < x$，由有理数的稠密性，v 有理数 r, $\log_a \alpha < r < x$，于是 $\alpha < a^r < a^x$.

同理可证 $0 < a < 1$ 的情形 . $\square$

§3 函数概念

一、内容提要

1° 初等数学中函数的定义是:设有两个变量 x 和 y,若变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$.

数学分析教材中的函数定义与上述定义的差别在于:(1) 给定任意两个数集 D 和 M,而不一定是区间,而上面定义中变量 x 一般在区间中变化.(2) 对 D 中每一个数,都有唯一的 $y\in M$ 与它对应,这里强调了对应的唯一性,排除了“多值性”的可能.(3) 称对应(或映射) f 为函数,而不是称 y 是 x 的函数.

教材中函数的定义比初等数学中的函数定义有了进一步的发展,今后在向量函数微分学中将有更加广泛的向量函数的定义方法.

2° 函数表示法中出现了分段函数的概念,即在其定义域的不同部分用不同公式表达的函数,掌握好这部分内容对今后学习有重要意义.

定义在 **R** 上的狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

和定义在[0,1]上的黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{当 } x = \dfrac{p}{q}\ (p,\ q\in \mathbf{N}_+,\ p,\ q \text{ 互质}), \\ 0, & \text{当 } x = 0,1 \text{ 和 } (0,1) \text{ 内的无理数}, \end{cases}$$

对今后微分学和积分学中的理论分析有重要意义.

3° 复合函数和反函数:

给定两个函数 $y = f(u)$, $u\in D$ 和 $u = g(x)$, $x\in E$,并非总是可以复合为 $(f\circ g)(x)$.可以复合的条件是

$$E^* = \{x \mid g(x)\in D\}\cap E\neq \varnothing,$$

这是复合函数概念中的要点.

对函数 $y = f(x)$, $x\in D$,若 f 是 D 与 $f(x)$ 之间的一一对应,则存在反函数 $x = f^{-1}(y)$, $y\in f(D)$.验证一一对应是确定反函数 f^{-1} 的重要条件.初学者容易认为总成立 $f^{-1}(f(D)) = D$,其实这等式在一般情况下并不一定成立,关于这个问题的讨论请参见本节释疑解惑问题 2.

4° 确界和确界原理的重要应用是无理指数幂 a^x $(a > 0,\ a\neq 1)$的定义,当 x 为无理数时,定义

$$a^x = \begin{cases} \sup\limits_{r<x}\{a^r \mid r\text{ 为有理数}\}, & a>1, \\ \inf\limits_{r<x}\{a^r \mid r\text{ 为有理数}\}, & 0<a<1. \end{cases}$$

这里用有理指数幂的确界来定义无理指数幂的方法，相当于用函数值的确界填补了 a^x 的值域中的“空隙”.

二、释疑解惑

问题 1 设狄利克雷函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{ 为无理数}, \end{cases}$$

$g(x)=\frac{1}{x}, |x|>1$，试问复合函数 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 是否存在？

答 设有两函数

$$y=f(u),\ u\in D,\ u=g(x),\ x\in E,$$

记 $E^* = \{x \mid g(x)\in D\}\cap E$，若 $E^*\neq\varnothing$，则 f 与 g 可以复合成函数

$$y=f(g(x)),\ x\in E^*.$$

(1) 对 $f(u)=\begin{cases} 1, & u\text{ 为有理数}, \\ 0, & u\text{ 为无理数}, \end{cases}$ $D=\mathbf{R}$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $|x|>1$, $E=\{x \mid |x|>1\}$，有 $E^*=\{x \mid g(x)\in D\}\cap E=E\neq\varnothing$，于是 f 与 g 可以复合成 $f\circ g$，其定义域为 E.

(2) 对 $g(u)=\frac{1}{u}$, $D=\{u \mid |u|>1\}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{ 为无理数}, \end{cases}\quad E=\mathbf{R},$$

$$E^* = \{x \mid f(x)\in D\}\cap E=\varnothing,$$

于是 g 与 f 不能复合为 $g\circ f$.

问题 2 等式 $\arcsin(\sin x)=x$, $\forall x\in\mathbf{R}$ 是否正确？若不正确，它与 $f^{-1}(f(x))=x$, $x\in D$（其中 f^{-1} 是 f 的反函数）是否有矛盾？

答 $\forall x\in\mathbf{R}$，等式 $\arcsin(\sin x)=x$ 是错误的. 这是因为 $\arcsin y$ 是反正弦函数的主值，$-\frac{\pi}{2}\leq\arcsin y\leq\frac{\pi}{2}$，$\arcsin(\sin x)$ 的值应当取在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上.

当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$-\frac{\pi}{2}\leq x-2k\pi<\frac{\pi}{2}$，$\sin x=\sin(x-2k\pi)$，于是

$$\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(x-2k\pi))=x-2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

当 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leq x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$时，$-\dfrac{\pi}{2}<(2k+1)\pi-x\leq\dfrac{\pi}{2}$，$\sin((2k+1)\pi-x)=\sin x$，于是

$$\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin[(2k+1)\pi-x])=(2k+1)\pi-x,\ k\in\mathbf{Z}.$$

所以有

$$\arcsin(\sin x)=\begin{cases}x-2k\pi, & 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leq x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ (2k+1)\pi-x, & 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leq x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},\end{cases}\quad k\in\mathbf{Z}.$$

这与 $f^{-1}(f(x))=x$，$x\in D$ 并不矛盾.这是因为定义反函数 f^{-1} 时，"$y\in f(D)$，规定 D 中有且仅有一个 x 使得 $f(x)=y$；但现在是"$y\in[-1,1]$，有无限多个 $x\in\mathbf{R}$，使得 $\sin x=y$.如果把 x 的取值限制在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上，则等式

$$\arcsin(\sin x)=x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

是正确的.

三、范例解析

例 1 模拟一个三级火箭，设各级质量分别为 8 000 kg，4 000 kg，2 000 kg，燃料均匀消耗率为 10 kg/s，各级火箭燃烧时间分别为 600 s，300 s，150 s.每级火箭的燃料耗完后，外壳自行脱落，下一级火箭就开始燃烧，最后一级火箭燃烧完后成为人造卫星，绕地球运行.试写出火箭质量随时间变化的规律，并作图像.

解 三级火箭初始总质量为 14 000 kg，用 $G(t)$表示火箭在时刻 t 时的质量.在开始 600 s 内，即 $0\leq t<600$ 时，有

$$G(t)=14\ 000-10t;$$

在 $t=600$ s 时，第一级火箭脱落，火箭瞬时质量变为 6 000 kg.当 $600\leq t<900$ 时，

$$G(t)=6\ 000-10(t-600);$$

在 $t=900$ s 时，第二级火箭脱落，此刻质量变为 2 000 kg.当 $900\leq t\leq 1\ 050$ 时，

$$G(t)=2\ 000-10(t-900).$$

当 $t>1\ 050$ 时，

$$G(t)=500.$$

综上所述，

$$G(t)=\begin{cases}14\ 000-10t, & 0\leq t<600,\\ 6\ 000-10(t-600), & 600\leq t<900,\\ 2\ 000-10(t-900), & 900\leq t\leq 1\ 050,\\ 500, & 1\ 050<t.\end{cases}$$

其图像如图 1 - 1 所示 . □

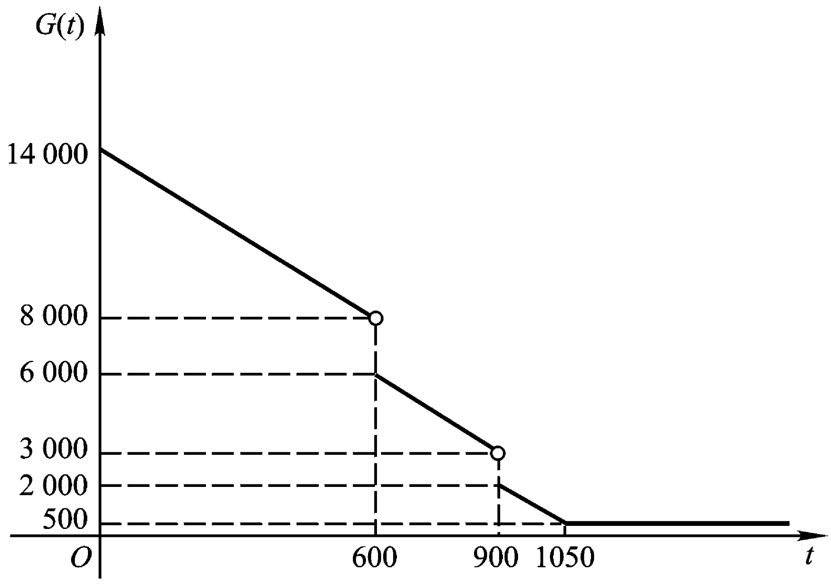


图 1 - 1

例 2 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,求

$$f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f}_{n\text{个}}(x)))\ .$$

解 因为函数 f 的值域包含于 f 的定义域内,所以 f 与 f 可以复合,于是有

$$f(f(x))=\frac{\dfrac{x}{1+x^2}}{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}=\frac{x}{1+2x^2};$$

$$f(f(f(x)))=\frac{\dfrac{x}{1+2x^2}}{1+\dfrac{x^2}{1+2x^2}}=\frac{x}{1+3x^2}\ .$$

由此可猜测 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2}$,下面用数学归纳法证明 .

若 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2}$,则

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))=\frac{\dfrac{x}{1+nx^2}}{1+\dfrac{x^2}{1+nx^2}}=\frac{x}{1+(n+1)x^2}\ .$$ □

例 3 设函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & 当\ |x|\leq 1,\\ 0, & 当\ |x|>1,\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & 当\ |x|\leq 2,\\ 2, & 当\ |x|>2.\end{cases}$$

试求 $y=\varphi(\psi(x))$.

解　首先观察到函数 ψ 的值域包含在函数 φ 的定义域中,因而 φ 与 ψ 可以复合.

先求集合 $\{x \mid |\psi(x)|\leq 1\}=\{x \mid |2-x^2|\leq 1\}$,解不等式 $|2-x^2|\leq 1$ 可得 $1\leq |x|\leq \sqrt{3}$,此时有 $\varphi(\psi(x))=1$.

又当 $|x|<1$ 或 $|x|>\sqrt{3}$ 时,有 $|\psi(x)|>1$,于是 $\varphi(\psi(x))=0$,这就得到

$$\varphi(\psi(x))=\begin{cases}1, & 1\leq |x|\leq \sqrt{3},\\ 0, & |x|<1\ 或\ |x|>\sqrt{3}.\end{cases}$$ □

例 4　证明恒等式

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ |x|\leq 1.$$

证　当 $x=0$ 时,等式显然成立.

当 $0<x\leq 1$ 时,设 $\alpha=\arcsin x$, $\beta=\arccos x$,有

$$\sin\alpha=x,\ \cos\beta=x,$$

于是

$$\cos\alpha=\sqrt{1-x^2},\ \sin\beta=\sqrt{1-x^2},$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ &=x\cdot x+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}\\ &=1.\end{aligned}$$

因为 $0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq\beta<\frac{\pi}{2}$,有 $0<\alpha+\beta<\pi$,所以

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2},$$

即

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ 0<x\leq 1.$$

同理可证当 $-1\leq x<0$ 时等式也成立. □

例 5　求狄利克雷函数 $D(x)$ 与黎曼函数 $R(x)$ 的复合函数 $D(R(x))$ 和 $R(D(x))$.

解　先求 $D(R(x))$.因为 $R(x)$ 的值域包含在 D 的定义域中,于是 D 与 R 可以复合.

当 $x\in(0,1)$, $x=\frac{p}{q}$, p,q 为互质正整数,有 $R\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}$,而 $D\left(R\left(\frac{p}{q}\right)\right)=D\left(\frac{1}{q}\right)=1$.

当 x 为 0,1 或(0,1)中无理数时, $R(x)=0$,而 $D(0)=1$,因而 $D(R(x))\equiv 1$, $x\in[0,1]$.

再讨论 $R(D(x))$.因为 $D(x)$的值域仅有$\{0,1\}$两点,包含于 $R(x)$的定义域中,且 $R(0)=R(1)=0$,于是 $R(D(x))\equiv 0$, $x\in\mathbf{R}$. □

四、习题选解(教材上册第 15 页)

12. 证明关于函数 $y=[x]$的如下不等式:

(1) 当 $x>0$ 时, $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1$;

(2) 当 $x<0$ 时, $1\leq x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$.

证 (1) 当 $x>0$ 时, $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}$,即 $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1$.

(2) 当 $x<0$ 时, $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}$,因为 $x<0$,所以

$$1\leq x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x .$$

§4 具有某些特性的函数

一、内容提要

1° 有界函数是数学分析中常用的一类函数 .这部分内容中需注意关于无上(下)界函数、无界函数的正面陈述,现以无界函数为例:

$$f(x),\ x\in D \text{ 是无界函数 } \Leftrightarrow \forall M>0,\exists x_0\in D,\ |f(x_0)|>M .$$

读者应当掌握这种陈述方式,它在今后一些证明题(反证法)中经常会用到 .

2° 有界函数的函数值集的确界:对有界函数 $f(x)$, $x\in D$,它的值域是有界集,由确界原理,存在$\sup\limits_{x\in D}f(x)$和$\inf\limits_{x\in D}f(x)$:

$\eta=\sup\limits_{x\in D}f(x)$ ⟺
(i) $\forall x\in D$, $f(x)\leq\eta$;
(ii) $\forall \alpha<\eta$, $\exists x_0\in D$,使得 $f(x_0)>\alpha$
(或者 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in D$,使得 $f(x_0)>\eta-\varepsilon$) .

注意数集的确界与函数值集确界的联系和区别 .

3° 严格增(减)函数必有反函数,这是严格单调函数的重要性质,但是并非存在反函数的函数必定是严格单调的,注意本节范例解析例 3 .

4° 周期函数不一定有基本周期,例如 **R** 上的狄利克雷函数,任何正的有理数都是它的周期,但是它不具有基本周期 .

二、释疑解惑

问题 1 怎样给出数集 D 上无上(下)界函数和无界函数的正面陈述 ?

答 在 D 上无上界函数 $f(x)$的定义如下:

$$\forall M, \exists x_0 \in D, \text{使得 } f(x_0) > M;$$

在 D 上无下界函数 $f(x)$的定义如下:

$$\forall L, \exists x_0 \in D, \text{使得 } f(x_0) < L;$$

在 D 上无界函数 $f(x)$的定义如下:

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in D, \text{使得} |f(x_0)| > M .$$

问题 2 由§2,习题 7 可知:若 A, B 皆为有界数集,则有

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B . \tag{4.1}$$

而本节教材例 2 中,若 f, g 为 D 上的有界函数,则

$$\sup_{x\in D}\{f(x) + g(x)\} \leqslant \sup_{x\in D} f(x) + \sup_{x\in D} g(x), \tag{4.2}$$

而且可能成立严格不等式 .上面二式(4.1)与(4.2)是否有矛盾 ? 为什么 ?

答 (4.1)与(4.2)并不矛盾,这是因为

$$\{f(x) + g(x) | x\in D\} \subset \{f(x) | x\in D\} + \{g(x) | x\in D\}, \tag{4.3}$$

而且在包含关系(4.3)中左、右两边的集合可能不相等 .例如, $f(x) = x$, $g(x) = -x$, $D = [0,1]$,易见

$$\{f(x) + g(x) | x\in D\} = \{0\},$$

$$\{f(x) | x\in[0,1]\} + \{g(x) | x\in[0,1]\} = [-1,1],$$

于是

$$\{f(x) + g(x) | x\in D\} \subset \{f(x) | x\in D\} + \{g(x) | x\in D\} .$$

出现不等的原因在于数集$\{f(x) + g(x) | x\in D\}$中对函数 f 和 g 的相加, x 取同一值;而在数集$\{f(x) | x\in D\} + \{g(x) | x\in D\}$中 x 是独立地取自 D 中 .若把(4.3)式中左、右两边的数集看作相同而应用(4.1),将导致错误的结论 .

问题 3 试问周期函数的定义域是否必定是$(-\infty, +\infty)$?

答 否 .例如 $f(x) = \sqrt{\sin x}$,其周期 $\sigma = 2\pi$,但是定义域为$[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k\in \mathbf{Z}$.由此可见周期函数的定义域不一定为$(-\infty, +\infty)$.

问题 4 试问周期函数是否必定有基本周期(最小正周期) ?

答 否 .例如,常数函数,狄利克雷函数都是周期函数 .任何正实数都是常数

函数的周期,任何正的有理数都是狄利克雷函数的周期,但是这两个函数都无最小正周期(见本节习题第 10 题) .

问题 5 一般定义在区间 I 上的函数 f 不一定是单调的.试问是否必定存在一个子区间 $I^* \subset I$,使得 f 在 I^* 上是单调的?

答 否.例如狄利克雷函数不存在单调子区间(参见范例 3) .

问题 6 怎样给出函数 f 在区间 I 上不是严格单调的正面陈述?

答

f 在 I 上不是严格单调 $\Leftrightarrow$ f 在 I 上不是严格递减,也不是严格递增;

f 在 I 上不是严格递减 $\Leftrightarrow$ $\exists\ a_1, a_2 \in I,\ a_1 < a_2,\ f(a_1) \leq f(a_2)$;

f 在 I 上不是严格递增 $\Leftrightarrow$ $\exists\ a_3, a_4 \in I,\ a_3 < a_4,\ f(a_3) \geq f(a_4)$.

三、范例解析

例 1 试验证 $y = \ln x$ 在$(0, +\infty)$上既无上界又无下界.

证 应用无上界函数,无下界函数的正面陈述,先验证 $y = \ln x$ 在$(0, +\infty)$内无上界:

$$\forall M, \exists\ x_0 > e^M, \text{使得} \ln x_0 > M .$$

再验证 $y = \ln x$ 在$(0, +\infty)$内无下界:

$$\forall L, \exists\ x_0\ (0 < x_0 < e^L), \text{使得} \ln x_0 < L .$$

上面应用了 $y = \ln x$ 在定义域中的严格递增性. □

例 2 证明函数

$$f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

在 $x = 0$ 的任何空心邻域中无界.

解 利用无界函数的正面陈述,设 $U^\circ(0)$为 $x = 0$ 的任何空心邻域.$\forall M > 0, \exists\ x_0 = \dfrac{1}{2n\pi}$,其中 $n > \dfrac{M}{2\pi}$,且 n 充分大使得 $x_0 \in U^\circ(0)$,则

$$|f(x_0)| = 2n\pi > M,$$

于是 $f(x)$在 $x = 0$ 的任何空心邻域内无界. □

例 3 定义在数集 D 上的严格单调函数,必存在严格单调的反函数.反之若数集 D 上的函数 f 存在反函数,此时 f 是否必定严格单调?

解 否,例如 $D = [0, 1]$上的函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ -x, & x \text{ 为无理数} . \end{cases}$$

不难看出函数 f 是 D 与 $f(D)$之间一对一的映射,于是 f 存在反函数.

但是 f 既不是严格递增函数,又不是严格递减函数.这是因为,若取 x_1, x_2

$\in[0,1]$, $x_1<x_2$, x_1 为有理数, x_2 为无理数, 则 $f(x_1)=x_1$, $f(x_2)=-x_2$, 于是 $f(x_1)>f(x_2)$, 即 f 不是严格递增的. 同理, 若取 $x_1<x_2$, x_1 为无理数, x_2 为有理数, 则 $f(x_1)=-x_1$, $f(x_2)=x_2$, 于是 $f(x_2)>f(x_1)$, 即 f 也不是严格递减的. □

注 由第四章§2 范例 4 中可证, 如果 f 是区间 I 上的连续函数(其图像是一条连续不断的曲线), 此时本例结论成立, 即有

$$f\text{ 在 } I \text{ 上为一一映射} \Leftrightarrow f \text{ 在 } I \text{ 上严格单调}.$$

例 4 证明: 函数 $f(x)$, $x\in D$ 为严格单调函数的充要条件是, 对任何 x_1, x_2, $x_3\in D$, $x_1<x_2<x_3$, 有

$$[f(x_1)-f(x_2)][f(x_2)-f(x_3)]>0. \tag{4.4}$$

证 [必要性] 不妨设 $f(x)$ 是严格递增函数, 则 $\forall x_1, x_2, x_3\in D$, $x_1<x_2<x_3$, 有

$$f(x_1)-f(x_2)<0,\quad f(x_2)-f(x_3)<0,$$

于是(4.4)式成立.

[充分性] 用反证法. 若 $\forall x_1, x_2, x_3\in D$, $x_1<x_2<x_3$, $f(x)$ 满足(4.4)式, 但 f 不是严格单调的, 则 $\exists a_1, a_2\in D$, $a_1<a_2$, $f(a_1)\le f(a_2)$, 又 $\exists a_3, a_4\in D$, $a_3<a_4$, $f(a_3)\ge f(a_4)$. 通过讨论不难知道: 在 a_1, a_2, a_3, a_4 四点中总可选出三点, 记为 x_1, x_2, x_3, 它们满足 $x_1<x_2<x_3$, 且

$$f(x_1)\le f(x_2),\ f(x_2)\ge f(x_3)\ (\text{或 } f(x_1)\ge f(x_2),\ f(x_2)\le f(x_3)),$$

于是 $[f(x_1)-f(x_2)][f(x_2)-f(x_3)]\le 0$ 与(4.4)式相矛盾. 由此可见 f 为严格单调函数. □

说明 在充分性证明中, 若直接由(4.4)可得 $\forall x_1, x_2, x_3\in D$, $x_1<x_2<x_3$, 有 $f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)$ 或 $f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)$, 这时仍无法证得 f 是严格递增的.

例 5 证明: 若 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于两条竖直线 $x=a$ 和 $x=b(b>a)$ 都是对称的, 则函数 $f(x)$ 必为周期函数.

证 因为函数 $y=f(x)$ 的图形关于竖直线 $x=a$ 对称, 于是 $\forall x\in\mathbf{R}$, 必有

$$f(a-x)=f(a+x). \tag{4.5}$$

同理又有

$$f(b-x)=f(b+x), \tag{4.6}$$

并可随之推得

$$\begin{aligned} f(x+2(b-a)) &= f(b+x+b-2a) \\ &= f(b-x-b+2a) \qquad \text{由(4.6)} \\ &= f(2a-x) \end{aligned}$$

$$= f(a + a - x)$$

$$= f(a - a + x) \qquad \text{由}(4.5)$$

$$= f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$$

这表明 $f(x)$是以 $2(b - a)$为周期的周期函数. □

四、习题选解(教材上册第 20 页)

11. 证明: $f(x) = x + \sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格递增.

证 设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_2 > x_1$,

$$
\begin{aligned}
f(x_2) - f(x_1) &= x_2 - x_1 + \sin x_2 - \sin x_1 \\
&= x_2 - x_1 + 2\cos\frac{x_2 + x_1}{2}\sin\frac{x_2 - x_1}{2} \\
&\geq x_2 - x_1 - 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2} \\
&> x_2 - x_1 - (x_2 - x_1) = 0,
\end{aligned}
$$

其中应用了不等式$|\sin x| < |x|, (x \neq 0)$.

12. 设定义在$[a, +\infty)$上的函数 f 在任何闭区间$[a, b]$上有界,定义$[a, +\infty)$上的函数:

$$m(x) = \inf_{a \leq y \leq x} f(y), \quad M(x) = \sup_{a \leq y \leq x} f(y).$$

试讨论 $m(x)$与 $M(x)$的图像,其中

(1) $f(x) = \cos x, x \in [0, +\infty)$; (2) $f(x) = x^2, x \in [-1, +\infty)$.

答 (1) $m(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -1, & \pi < x < +\infty; \end{cases}$

$M(x) \equiv 1, \ 0 \leq x < +\infty$.

(2) $m(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < +\infty; \end{cases}$

$M(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ x^2, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$

总练习题提示与解答

(教材上册第 21 页)

1. 设 $a, b \in \mathbf{R}$,证明:

(1) $\max\{a, b\} = \dfrac{1}{2}(a + b + |a - b|)$;

(2) $\min\{a, b\} = \dfrac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

提示 讨论 $a \geq b$ 和 $a < b$ 两种情况 .

2. 设 f 和 g 都是 D 上的初等函数 .定义

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad m(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \ x \in D .$$

试问 $M(x)$ 和 $m(x)$ 是否为初等函数 ?

解 应用第 1 题结论,可得

$$M(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) .$$

若 $f(x), g(x)$ 是初等函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 也是初等函数 .$|f(x) - g(x)|$ 可看作初等函数 $y = |u| = \sqrt{u^2}$ 与 $u = f(x) - g(x)$ 的复合函数,因而也是初等函数,于是 $M(x)$ 是初等函数 .同理 $m(x)$ 也是初等函数 .

3. 设函数 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$,求:

$$f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}, f(x^2), f(f(x)) .$$

$$\frac{1+x}{1-x}, \quad -\frac{x}{2+x}, \quad \frac{2}{1+x}, \quad \frac{x-1}{x+1}, \quad \frac{1+x}{1-x}, \quad \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad x$$

4. 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$,求 $f(x)$. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$

5. 利用函数 $y = [x]$ 求解:

(1) 某系各班级推选学生代表,每 5 人推选一名代表,余额满 3 人可增选 1 名 .写出可推选代表数 y 与班级学生数 x 之间的函数关系(假设每班学生数为 30～50 人); $y = \left[\dfrac{x+2}{5}\right]$, $x = 30, 31, \cdots, 50$

(2) 正数 x 经四舍五入后得整数 y,写出 y 与 x 之间的函数关系 .($y = [x + 0.5]$, $x > 0$)

6. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像,试作下列各函数的图像:

(1) $y = -f(x)$; (2) $y = f(-x)$; (3) $y = -f(-x)$; (4) $y = |f(x)|$; (5) $y = \operatorname{sgn} f(x)$; (6) $y = \dfrac{1}{2}[|f(x)| + f(x)]$; (7) $y = \dfrac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]$.

7. 已知函数 f 和 g 的图像,试作下列各函数的图像:

(1) $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$; (2) $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

提示 应用上面第 2 题解答和第 6 题(6),(7) .

8. 设 f, g 和 h 为增函数,满足

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \ x \in \mathbf{R} .$$

证明: $f(f(x)) \leq g(g(x)) \leq h(h(x))$.

证 因为 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \leq g(x)$,且 f 为增函数,所以

$$f(f(x)) \leq f(g(x));$$

又因 $f(y) \leq g(y)$，取 $y = g(x)$，即有 $f(g(x)) \leq g(g(x))$；于是证得 $f(f(x)) \leq g(g(x))$.同理，利用 $g(x)$ 是增函数可证 $g(g(x)) \leq h(h(x))$.这里没有用到 $h(x)$ 的增函数性质（如果顺序倒过来证，就会用到 $h(x)$ 的递增性）.

9. 设 f 和 g 为区间 (a, b) 上的增函数，证明第 7 题中定义的函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也都是 (a, b) 上的增函数 .

证 现证 $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 为增函数 .设 $x_1, x_2 \in (a, b)$，$x_1 < x_2$，按定义

$$f(x_1) \leq f(x_2), \quad g(x_1) \leq g(x_2),$$

于是

$$\min\{f(x_1), g(x_1)\} \leq f(x_1) \leq f(x_2),$$

$$\min\{f(x_1), g(x_1)\} \leq g(x_1) \leq g(x_2) .$$

这样就证得

$$\min\{f(x_1), g(x_1)\} \leq \min\{f(x_2), g(x_2)\},$$

即 $\min\{f(x), g(x)\}$ 为增函数 .同理可证 $\max\{f(x), g(x)\}$ 也为增函数 . □

10. 设 f 为 $[-a, a]$ 上的奇（偶）函数 .证明：若 f 在 $[0, a]$ 上增，则 f 在 $[-a, 0]$ 上增（减）.

提示 若 $x_1, x_2 \in [-a, 0]$，$x_1 < x_2$，则 $-x_1, -x_2 \in [0, a]$，且 $-x_1 > -x_2$，于是 $f(-x_1) > f(-x_2)$.

12. 设 f, g 为 D 上的有界函数 .证明：

(1) $\inf\limits_{x \in D}\{f(x) + g(x)\} \leq \inf\limits_{x \in D} f(x) + \sup\limits_{x \in D} g(x)$；

(2) $\sup\limits_{x \in D} f(x) + \inf\limits_{x \in D} g(x) \leq \sup\limits_{x \in D}\{f(x) + g(x)\}$.

证法一 (1) 因为 $\forall x \in D$，$g(x) \leq \sup\limits_{x \in D} g(x)$，于是

$$f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup_{x \in D} g(x) .$$

由教材 §4，习题 7 可知

$$\begin{aligned} \inf_{x \in D}\{f(x) + g(x)\} &\leq \inf_{x \in D}\{f(x) + \sup_{x \in D} g(x)\} \\ &= \inf_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x), \end{aligned}$$

最后等式是应用了本书 §2 范例 4 中的结论 .

(2) $\forall x \in D$，$f(x) + \inf\limits_{x \in D} g(x) \leq f(x) + g(x)$，

于是

$$\sup_{x \in D} \quad f(x) + \inf_{x \in D} g(x) \quad \leq \sup_{x \in D}\{f(x) + g(x)\},$$

由此即得

$$\sup_{x\in D} f(x) + \inf_{x\in D} g(x) \leq \sup_{x\in D}\{ f(x) + g(x)\} .$$ □

证法二　(1) **由** $\sup\limits_{x\in D} g(x) = - \inf\limits_{x\in D}\{ - g(x)\}$, **应用教材§4例2中的结论,有**

$$\inf_{x\in D}\{ f(x) + g(x)\} + \inf_{x\in D}\{ - g(x)\} \leq \inf_{x\in D} f(x),$$

于是

$$\inf_{x\in D}\{ f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x\in D} f(x) + \sup_{x\in D} g(x) .$$

同理可证(2) . □

13. **设** f, g **为** D **上非负有界函数,证明:**

(1) $\inf\limits_{x\in D} f(x)\cdot \inf\limits_{x\in D} g(x) \leq \inf\limits_{x\in D}\{ f(x) g(x)\}$;

(2) $\sup\limits_{x\in D}\{ f(x) g(x)\} \leq \sup\limits_{x\in D} f(x)\cdot \sup\limits_{x\in D} g(x)$.

证　(1) **因为** f, g **为** D **上的非负有界函数,于是** $\inf\limits_{x\in D} f(x) \geq 0$, $\inf\limits_{x\in D} g(x) \geq 0$. **若** $\inf\limits_{x\in D} f(x)$, $\inf\limits_{x\in D} g(x)$ **中有一为零,则不等式显然成立,故不妨设** $\inf\limits_{x\in D} f(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in D} g(x) > 0$.**由于** f, g **的非负性,因此**

$$f(x)\cdot \inf_{x\in D} g(x) \leq f(x) g(x),$$

由此可得

$$\inf_{x\in D}\{ f(x)\cdot \inf_{x\in D} g(x)\} \leq \inf_{x\in D}\{ f(x) g(x)\},$$

于是有

$$\inf_{x\in D} f(x)\cdot \inf_{x\in D} g(x) \leq \inf_{x\in D}\{ f(x) g(x)\},$$

最后不等式是应用了 $\inf\limits_{x\in D}\{ af(x)\} = a\cdot \inf\limits_{x\in D} f(x)\ (a > 0)$.

若 f, g **的非负性条件不满足,结论**(1)**可能不成立** .**例如,**

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1),\quad g(x) = -\frac{1}{2}x,\quad x \in D = [0,1],$$

f **是非负函数,** g **是非正函数,不难验证**

$$\inf_{x\in D} f(x) = 0,\quad \inf_{x\in D} g(x) = -\frac{1}{2},$$

$$\inf_{x\in D} f(x) g(x) = \inf_{x\in D} \quad \frac{1}{4} x(x - 1) \quad = -\frac{1}{16},$$

因而(1)**中不等式不成立** .

同理可证(2) .

14. **将定义在**$(0, +\infty)$**上的函数** f **延拓到** $\mathbf{R}$ **上,使延拓后的函数为**(i)**奇函数,**(ii) **偶函数,设**

(1) $f(x) = \sin x + 1$;

(2) $f(x) = \begin{cases} 1 - \quad 1 - x^2, & 0 < x \leq 1, \\ x^3, & x > 1 . \end{cases}$

解 (1) f 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的，为了把函数 f 延拓到 $\mathbf{R}$ 上，必须将 f 的定义域扩充到 $(-\infty,0]$ 上去，得到 $\mathbf{R}$ 上的函数 $F(x)$，但 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上应当与 $f(x)$ 相合．

(i) 为了使 f 延拓后成为奇函数，而奇函数的图形关于原点对称，所以应当定义

$$F_1(x)=\begin{cases}\sin x+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \sin x-1 & x<0.\end{cases}$$

容易验证，$\forall x\in\mathbf{R}$，$F_1(-x)=-F_1(x)$，因此 $F_1(x)$ 即为所求的奇函数．

(ii)
$$F_2(x)=\begin{cases}\sin x+1, & x\geq 0,\\ 1-\sin x, & x<0\end{cases}$$

为所求的偶函数．

(2) (i)

$$F_1(x)=\begin{cases}x^3, & x>1,\\ 1-\sqrt{1-x^2}, & 0\leq x\leq 1,\\ -1+\sqrt{1-x^2}, & -1\leq x<0,\\ x^3, & x<-1\end{cases}$$

为所求的奇函数．

(ii)

$$F_2(x)=\begin{cases}x^3, & x>1,\\ 1-\sqrt{1-x^2}, & |x|\leq 1,\\ -x^3, & x<-1\end{cases}$$

为所求的偶函数．

15．设 f 为定义在 $\mathbf{R}$ 上以 h 为周期的函数，a 为实数．证明：若 f 在 $[a,a+h]$ 上有界，则 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界．

证 由条件 f 在 $[a,a+h]$ 上有界，故 $\exists M>0$，对于 $\forall x\in[a,a+h]$，有 $|f(x)|\leq M$．

$\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists m\in\mathbf{Z}$，使得 $x=mh+x_1$，其中 $x_1\in[a,a+h]$．因为 f 以 h 为周期，所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，满足

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|f(mh+x_1)|\\&=|f(x_1)|\leq M,\end{aligned}$$

即 f 是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数．

16．设 f 在区间 I 上有界．记

$$M = \sup_{x \in I} f(x), \quad m = \inf_{x \in I} f(x).$$

证明:

$$\sup_{x', x'' \in I} | f(x') - f(x'') | = M - m.$$

证　按确界定义,应当证明:

(1) $\forall\ x', x'' \in I, | f(x') - f(x'') | \leq M - m$;

(2) $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ x', x'' \in I, | f(x') - f(x'') | > M - m - \varepsilon$.

先证(1) .$\forall\ x', x'' \in I,\ f(x') \leq M,\ f(x'') \geq m$,**于是有**

$$f(x') - f(x'') \leq M - m,$$

同理又有

$$f(x'') - f(x') \leq M - m,$$

即

$$| f(x') - f(x'') | \leq M - m.$$

再证(2) .**若** $M = m$,**则** $f(x)$**在** I **上恒为常数,结论是显然的** .**不妨设** $M > m$,**取正数** $\varepsilon < M - m$.**因为**

$$M = \sup_{x \in I} f(x), \quad m = \inf_{x \in I} f(x),$$

所以 $\forall\ \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists\ x', x'' \in I$,**使得**

$$M - \frac{\varepsilon}{2} < f(x'), \quad f(x'') < m + \frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$M - m - \varepsilon < f(x') - f(x'') \leq | f(x') - f(x'') |.$$

由此可见

$$\sup_{x', x'' \in I} | f(x') - f(x'') | = M - m.$$

第一章测试题

(A)

1. **证明**: $n \geq 1$ **时,有不等式**

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

然后利用它证明:**当** $m \geq 2$ **时,有**

$$2\sqrt{m} - 2 < \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m}.$$

2. **设** S **是非空数集,试给出数** ξ **是** S **的下界,但不是** S **的下确界的正面陈述** .

3. 验证函数 $f(x)=x\sin x$, $x\in\mathbf{R}$,既无上界又无下界.

4. 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $g(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 试问 $f(g(x))$, $g(f(x))$是奇函数还是偶函数?

5. 证明: $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\ (x\neq 0)$.

6. 试问下列函数的图形关于哪一竖直轴线对称:

(1) $y=ax^2+bx+c$; (2) $y=\quad a+x+\quad b-x$.

7. 设 A, B 为 $\mathbf{R}$ 中非空数集,且满足下述条件:

(1) 对任何 $a\in A$, $b\in B$ 有 $a<b$;

(2) 对任何 $\varepsilon>0$,存在 $x\in A$, $y\in B$,使得 $y-x<\varepsilon$.

证明: $\sup A=\inf B$.

(**B**)

1. 设 n 为正整数.

(1) 利用二项式展开定理证明:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right),$$

其中 $\prod\limits_{r=0}^{k-1}$ 是连乘记号.

(2) 若 $n>1$, 证明:

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<3.$$

2. 设 $E=\{r\mid r^2<7, r\text{ 为有理数}\}$, 求 $\sup E$, $\inf E$.

3. 设 A, B 为位于原点右方的非空数集,

$$AB=\{xy\mid x\in A, y\in B\}.$$

证明: $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$.

4. 设函数 $f(x)$定义于$(0,+\infty)$内, 试把 $f(x)$延拓成 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $f(x)$分别如下:

(1) $f(x)=\mathrm{e}^x$; (2) $f(x)=\ln x$.

5. 试给出函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 不是单调函数的正面陈述.

6. 证明: 当 $xy<1$ 时,有不等式

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}.$$

7. 设 A, B 是非空数集,记 $S=A\cup B$, 证明:

(1) $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$;

(2) $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

第二章　数列极限

§1　数列极限概念

一、内容提要

1° 描述 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,有下述两种方法:

(1) ε - N 方法:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$　" $\varepsilon > 0$, v N,当 $n > N$ 时,$|a_n - a| < \varepsilon$.

(2) 邻域表示方法:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$　　对 a 的任一 ε 邻域 $U(a;\varepsilon)$,只有有限多项 $a_n \notin U(a;\varepsilon)$.

读者应当熟练掌握教材例题中如何由任给 $\varepsilon > 0$ 求相应的 N 的方法.

2° 验证数列发散的方法:

验证 " $a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$,按定义也有两种方法:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$　v $\varepsilon_0 > 0$, " $N \in \mathbf{N}_+$, v $n' \geq N$,使得

$$|a_{n'} - a| \geq \varepsilon_0 .$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$　v a 的某一 ε_0 邻域 $U(a;\varepsilon_0)$,数列中有无限多项

$$a_n \notin U(a,\varepsilon_0) .$$

极限概念是数学分析课程中最基本的概念,这是学好这门课程的关键.数列 $\{a_n\}$ 的极限是描述当 n 充分大时,数列的项 a_n 与某常数 a 无限靠近的动态特性.

极限概念的形成经历了一个相当长的发展过程.历史上数列极限开始是用直观的方法描述的,即“当 n 越来越大,a_n 与定数 a 越来越接近”.由于数学分析理论的严格化的需要,逐步发展成为现在沿用的 ε - N 方法.这种定义方法克服了以往的一些不确切的描述,采用“静态”的陈述方式来刻画极限过程的动态特征,从而为极限理论奠定了坚实的基础.定义中任给的 $\varepsilon > 0$,既具有任意性,又具有给定性;与之相应的 $N \in \mathbf{N}_+$ 贵在存在;要使得 $n > N$ 时满足 $|a_n - a| < \varepsilon$,这就是用来替代“a_n 愈来愈靠近 a”的一种定量的“静态”描述.通常情形下,ε 越小,与之对应的 N 越大.对于希望更多地了解微积分发展历史的读者,可以阅读

波耶著《微积分概念史》(李锐夫、程其襄等译,上海人民出版社).

3° **无穷小数列** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则称$\{a_n\}$为无穷小数列.显然有:

$$\{a_n\}\text{收敛于 } a \iff \{a_n - a\}\text{为无穷小数列}.$$

依据它便可用无穷小数列的性质来代替一般数列极限的性质.

二、释疑解惑

问题 1 如何用适当放大$|a_n - a|$的方法,按 $\varepsilon - N$ 定义验证数列极限?

答 在用 $\varepsilon - N$ 方法验证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 时,常用的一种方法是:$\forall \varepsilon > 0$,把$|a_n - a|$适当放大后化为

$$|a_n - a| \leq \cdots \leq G(n) < \varepsilon,$$

而由 $G(n) < \varepsilon$ 比较容易求得 N_1,当 $n > N_1$ 时 $G(n) < \varepsilon$,即有$|a_n - a| < \varepsilon$.注意:

(1) $G(n)$仍应是无穷小数列(放大要适当);

(2) 由 $G(n) < \varepsilon$ 容易求得 N_1;

(3) 为了放大过程的方便,有时需要预先假定 $n > N_0$,最后取

$$N = \max\{N_0, N_1\}.$$

例如本节教材第 24 页中,在例 3 验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-3} = 3$ 时,取 $N_0 = 3$,$G(n) = \frac{9}{n}$,由 $\left|\frac{3n^2}{n^2-3} - 3\right| < \frac{9}{n} < \varepsilon$ 又得 $N_1 = \left[\frac{9}{\varepsilon}\right]$ 也可取 $N_1 = \frac{9}{\varepsilon}$,最后得到 $N = \max\left\{3, \frac{9}{\varepsilon}\right\}$.在例 4 验证 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\,(|q| < 1)$ 时,取 $G(n) = \frac{1}{nh}$,这里 $h = \frac{1}{|q|} - 1$,由$|q^n - 0| < \frac{1}{nh} < \varepsilon$ 易解出 $N = \frac{1}{\varepsilon h}$.又在例 5 验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1\,(a > 1)$ 时,取 $G(n) = \frac{a-1}{n}$,由 $a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n} < \varepsilon$ 易解出 $N = \frac{a-1}{\varepsilon}$.这些例题都是这样处理的.

问题 2 如何用 $\varepsilon - N$ 方法给出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$ 的正面陈述?并验证$\{n^2\}$和$\{(-1)^n\}$是发散数列.

答 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$ 的正面陈述:$\exists\, \varepsilon_0 > 0$,$\forall N \in \mathbf{N}_+$,$\exists\, n' \geq N$,使得

$$|a_{n'} - a| \geq \varepsilon_0.$$

数列$\{a_n\}$发散 $\iff \forall a \in \mathbf{R}$,$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$.

(1) $a_n = n^2$.$\forall a$,$\exists\, \varepsilon_0 = \frac{1}{4}$,$\forall N \in \mathbf{N}_+$,只要取 $n' = \max\left\{\left[|a| + \frac{1}{2}\right], N\right\}$,

便可使 $|n'^2-a|\geq n'^2-|a|\geq\left(|a|+\frac{1}{2}\right)^2-|a|\geq\frac{1}{4}$，于是 $\{n^2\}$ 为发散数列.

(2) $a_n=(-1)^n$. 若 $a=1$，$\forall\ \varepsilon_0=1$，取 n' 为任何奇数时，有 $|a_{n'}-1|=2>\varepsilon_0$. 若 $a=-1$，$\forall\ \varepsilon_0=1$，取 n' 为任何偶数时，有 $|a_{n'}-(-1)|=2>\varepsilon_0$. 若 $a\neq\pm1$，$\forall\ \varepsilon_0=\frac{1}{2}\min\{|a+1|,|a-1|\}$，对任何 $n\in\mathbf{N}_+$，有 $|a_n-a|\geq\varepsilon_0$. 故 $\{(-1)^n\}$ 为发散数列.

三、范例解析

例 1 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 利用级数一般项拆项的办法，有

$$
\begin{aligned}
x_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right),
\end{aligned}
$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{4}.$$ □

例 2 按 $\varepsilon-N$ 定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}=\frac{5}{3}.$$

证

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}-\frac{5}{3}\right|\\
=&\left|\frac{3n+4}{3(3n^2-2)}\right|\\
\leq&\frac{4n}{3\cdot2n^2}\quad(n>4)\\
=&\frac{2}{3n},
\end{aligned}
$$

取 $N=\max\left\{\left[\frac{2}{3\varepsilon}\right]+1,4\right\}$，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon.$$ □

注 扩大分式是采用扩大分子或缩小分母的方法.这里先限定 $n>4$,扩大之后的分式 $G(n)=\frac{2}{3n}$仍是无穷小数列.

例 3 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{c^{n}}=0(\alpha>0,\ c>1)$.

分析 设 $k=[\alpha]+1$,有

$$\frac{n^{\alpha}}{c^{n}}\leq\frac{n^{k}}{c^{n}}=\left(\frac{n}{(\sqrt[k]{c})^{n}}\right)^{k}=\left(\frac{n}{a^{n}}\right)^{k},$$

其中 $\sqrt[k]{c}=a>1$,而对$\frac{n}{a^{n}}$应用二项式展开适当放大后可以证明它趋向于零.

证 设 $k=[\alpha]+1$,则有

$$\frac{n^{\alpha}}{c^{n}}\leq\frac{n^{k}}{c^{n}}=\left(\frac{n}{(\sqrt[k]{c})^{n}}\right)^{k}.$$

令 $\sqrt[k]{c}=1+h(h>0)$,应用二项式展开有

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{(\sqrt[k]{c})^{n}}\right)^{k}&=\left(\frac{n}{(1+h)^{n}}\right)^{k}\\&\leq\left(\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}h^{2}}\right)^{k}\\&=\left(\frac{2}{(n-1)h^{2}}\right)^{k}.\end{aligned}$$

取 $N=\frac{2}{h^{2}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{k}}}+1$,当 $n>N$ 时就能保证

$$\frac{n^{\alpha}}{c^{n}}<\left(\frac{2}{(n-1)h^{2}}\right)^{k}<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k}}{c^{n}}=0.$$ □

例 4 按定义验证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^{n}}{n!}=0\ (c>0).$$

分析 当 $0<c\leq1$ 时,$\frac{c^{n}}{n!}\leq\frac{1}{n!}<\frac{1}{n}$,结论显然成立.不妨设 $c>1$,注意到

$$\frac{c^{n}}{n!}=\frac{c\cdot c\cdots c}{1\cdot2\cdots m}\cdot\frac{c}{m+1}\cdots\frac{c}{n-1}\cdot\frac{c}{n},$$

当 m 充分大时,$\frac{c}{m+1}<1$.

证 设 $c>1$,取 $k=[c]+1$,则 $k-1\leq c<k$,故当 $n>k$ 时,

$$\frac{c^n}{n!}=\frac{c\cdot c\cdots c}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\cdot\frac{c}{k}\cdots\frac{c}{n}$$
$$\leq\frac{c^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{c}{n}=M_0\cdot\frac{1}{n},$$

其中 $M_0=\frac{c^k}{(k-1)!}$为固定的常数.因为$\frac{1}{n}$是无穷小数列,所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$,当 $n>N_1$ 时,

$$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{M_0},$$

于是当 $n>N=\max\{N_1,k\}$时,有

$$\frac{c^n}{n!}\leq\frac{M_0}{n}<\varepsilon.$$

此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0\ (c>0)$得证. □

例 5 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

证 要证 $\forall A\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\neq A$,即$\exists\varepsilon_0>0$, $\forall N>0$, $\exists n'>N$,使得 $|\sin n'-A|\geq\varepsilon_0$.

不妨设 $A\geq 0$,(同理可证 $A<0$ 的情形).取 $\varepsilon_0=\frac{2}{2}$, $\forall N>0$,在开区间 $\left(2N\pi+\frac{5\pi}{4},2N\pi+\frac{7\pi}{4}\right)$ 中必存在正整数 n',且 $n'>N$,使得

$$|\sin n'-A|>\left|\sin\frac{5\pi}{4}-A\right|\geq\frac{2}{2}=\varepsilon_0.$$ □

四、习题选解(教材上册第 27 页)

4.**证明**:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则对任一正整数 k,有$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

提示 由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 可知:$\forall\varepsilon>0,\exists N_1$,当 $n>N_1$ 时,$|a_n-a|<\varepsilon$.需证:$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $n>N$ 时,

$$|a_{n+k}-a|<\varepsilon.$$

7.**证明**:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.当且仅当 a 为何值时反之亦成立.

证 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,$|a_n-a|<\varepsilon$.由不等式 $||a_n|-|a||\leq|a_n-a|$,可知$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

可证当且仅当 $a=0$ 时由$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$可推得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

先证若 $a=0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$,则$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,$||a_n|-0|=|a_{n-0}|<\varepsilon$,于是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

若由 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则必有 $a=0$.不然的话,若 $a\neq0$,令 $a_n=(-1)^n a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$,但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n a$ 不存在. □

§2 收敛数列的性质

一、内容提要

1° 收敛数列的性质

(1) **唯一性** 若数列 $\{a_n\}$ 收敛,则它只有一个极限.

(2) **有界性** 若数列 $\{a_n\}$ 收敛,则存在 M,对一切 $n\in\mathbf{N}_+$,$|a_n|\leq M$.

(3) **保号性** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$(或 <0),则存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,$a_n>\dfrac{a}{2}>0$ 或 $a_n<\dfrac{a}{2}<0$.

(4) **保不等式性** 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为收敛数列,若存在正整数 N_0,使得当 $n>N_0$ 时有 $a_n\leq b_n$,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}b_n.$$

(5) **迫敛性** 设收敛数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都以 a 为极限,若存在正整数 N_0,当 $n>N_0$ 时,数列 $\{c_n\}$ 满足

$$a_n\leq c_n\leq b_n,$$

则数列 $\{c_n\}$ 也收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

2° 一些常用的极限

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0}{b_k n^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_m}, & k=m,\\ 0, & k>m,\end{cases}$$

其中 $k\geq m$,$a_m\neq0$,$b_k\neq0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

2) 又若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n^k}=0\ (a>0,\ a\neq1,\ k\geq1)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{c^n}=0\ (c>1)$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c^n}{n!}=0\ (c>0)$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

(8) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $a>0$, $a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

3° 数列的子列是收敛数列理论中的重要概念 .若 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列, 下标 n_k 的重要性质是(1) $n_k<n_{k+1}$; (2) $n_k\geq k$, 这是掌握子列概念的要点 .

数列 $\{a_n\}$ 收敛　　$\{a_n\}$ 的任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 都收敛 .

数列 $\{a_n\}$ 发散　　存在 $\{a_n\}$ 某子列是发散的, 或者存在 $\{a_n\}$ 的两个子列收敛, 但极限不相等 .

上面两个结论在证明数列敛散性时很有用 .

二、释疑解惑

问题 1　数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的下标 n_k, 是 n 在变动还是 k 在变动 ?

答　子列 $\{a_{n_k}\}$ 的下标 n_k 是随着 k 变动的 .例如 $\{a_{2k}\}$ 是由 $\{a_n\}$ 中偶数项组成的子列, 其中 $n_k=2k$.子列的下标 n_k 满足① $n_k<n_{k+1}$; ② $n_k\geq k$.这是子列下标的两个基本性质 .

问题 2　如何从 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$, 推得存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得

$$|a_{n_k}-a|\geq\varepsilon_0\ ?$$

答　这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$, 于是 $\exists\,\varepsilon_0>0$, $\forall N>0$, $\exists\,n'>N$, 使得

$$|a_{n'}-a|\geq\varepsilon_0\ .$$

取 $N=1$, $\exists\,n_1>1$, 使得 $|a_{n_1}-a|\geq\varepsilon_0$,

取 $N=n_1$, $\exists\,n_2>n_1$, 使得 $|a_{n_2}-a|\geq\varepsilon_0$,

…………

取 $N=n_{k-1}$, $\exists\,n_k>n_{k-1}$, 使得 $|a_{n_k}-a|\geq\varepsilon_0$,

…………

这样就选出 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 满足

$$|a_{n_k}-a|\geq\varepsilon_0\ .$$

注　这是由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$ 选出子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $|a_{n_k}-a|\geq\varepsilon_0$ 的方法 .这种方法在以后类似的问题中将会多次遇到 .

三、范例解析

例 1　求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)\quad(a>1).$$

解　设 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}$,**等式两边乘** $\frac{1}{a}$ **可得**

$$\frac{1}{a}S_n=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^{n+1}},$$

两式相减后得到

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)S_n=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}-\frac{n}{a^{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)}{1-\frac{1}{a}}-\frac{n}{a^{n+1}}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^{n+1}}=0$, **于是由极限四则运算可得**

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2}-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^{n+1}}$$

$$=\frac{a}{(a-1)^2}.$$ □

例 2　求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n^n+1}}\right).$$

解　由不等式

$$\frac{n}{n+1}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n^n+1}}\leq\frac{n}{\sqrt[n]{n^n+1}},$$

当 $n\to\infty$ **时**, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n^n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^n}}}=1$(**利用** 2°(8)),**由迫敛性可得**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n^n+1}}\right)=1.$$ □

例 3　设数列 $\{a_n\}$.**证明:若存在正整数** N_0 **与实数** $k(0<k<1)$,**当** $n\geq N_0$ **时满足**

$$0 < a_{n+1} < ka_n,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证 由所设条件, $\forall n\in\mathbf{N}_+$ 有

$$0 < a_{n+N_0} < ka_{n+N_0-1} < \cdots < k^n a_{N_0}.$$

因为当 $0 < k < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} k^n = 0$, 于是由迫敛性有

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+N_0} = 0,$$

这样就证得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad \square$$

例 4 证明:当 $a > 0$, $a\neq 1$, $k\geq 1$ 时,成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^k} = 0.$$

分析 若 $a > 1$,有

$$0 < \frac{\log_a n}{n^k}\leq\frac{\log_a n}{n} = \log_a \sqrt[n]{n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$,设法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\log_a\sqrt[n]{n} = 0$ 即可.

证 先证当 $a > 1$, $k\geq 1$ 时等式成立.由不等式

$$0\leq\frac{\log_a n}{n^k}\leq\frac{\log_a n}{n}$$

和迫敛性,只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0.$$

按定义,需证 $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, N > 0$,当 $n > N$ 时,满足

$$0 < \log_a\sqrt[n]{n} < \varepsilon,$$

即

$$1 < \sqrt[n]{n} < a^{\varepsilon}.$$

这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$,对 $a^{\varepsilon} > 1$, $\exists\, N > 0$,当 $n > N$ 时,必有 $1 < \sqrt[n]{n} < a^{\varepsilon}$.

又当 $0 < a < 1$ 时,由于

$$\log_a n = -\log_{\frac{1}{a}} n,$$

而 $\frac{1}{a} > 1$,于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^k} = -\lim_{n\to\infty}\frac{\log_{\frac{1}{a}} n}{n^k} = 0. \qquad \square$$

注 与内容提要 2°中的公式合在一起,当 $a > 0$, $a\neq 1$, $k\geq 1$, $c > 1$ 时,以下

数列

$$\frac{\log_a n}{n^k},\quad \frac{n^k}{c^n},\quad \frac{c^n}{n\,!},\quad \frac{n\,!}{n^n}$$

都是无穷小数列,有时记作

$$\log_a n \ll n^k \ll c^n \ll n\,! \ll n^n\ (n\to\infty).$$

例 5 证明斯笃茨(Stolz)定理:

设数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$满足$\forall n\in\mathbf{N}_+$, $x_n < x_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a.$$

分析 证明的基本思路是:设

$$\beta_n=\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}-a,$$

由条件可得 β_n 为无穷小数列,然后利用递推关系,设法找出 y_n 与 x_n 之间的关系.

证 设

$$\beta_n=\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}-a.$$

由已知条件,$\forall \varepsilon>0$,$\exists N_1>0$,当 $n\geq N_1$ 时

$$|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

把 β_n 设定式改写成$(n>N_1)$:

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1}+(\beta_{n-1}+a)(x_n-x_{n-1})\\ &= y_{n-2}+(\beta_{n-2}+a)(x_{n-1}-x_{n-2})+(\beta_{n-1}+a)(x_n-x_{n-1})\\ &= \cdots\cdots\\ &= y_{N_1}+(\beta_{N_1}+a)(x_{N_1+1}-x_{N_1})+\cdots+(\beta_{n-1}+a)(x_n-x_{n-1})\\ &= y_{N_1}+\beta_{N_1}(x_{N_1+1}-x_{N_1})+\cdots+\beta_{n-1}(x_n-x_{n-1})+a(x_n-x_{N_1}), \end{aligned}$$

在等式两边同时除以 x_n(n 充分大时 $x_n>0$),再减去 a 后取绝对值,又得

$$\begin{aligned} \left|\frac{y_n}{x_n}-a\right| &\leq \left|\frac{y_{N_1}-ax_{N_1}}{x_n}\right|+\frac{|\beta_{N_1+1}|(x_{N_1+1}-x_{N_1})+\cdots+|\beta_{n-1}|(x_n-x_{n-1})}{|x_n|}\\ &\leq \left|\frac{y_{N_1}-ax_{N_1}}{x_n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{x_{N_1}}{x_n}\right) \end{aligned}$$

$$\leq \left|\frac{y_{N_1} - a x_{N_1}}{x_n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$,所以$\exists N_2>0$,当 $n>N_2$时,

$$\left|\frac{y_{N_1} - a x_{N_1}}{x_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是取 $N=\max\{N_1, N_2\}$,当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{y_n}{x_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

注　若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,在斯笃茨定理中设 $x_n = n$, $y_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$.因而斯笃茨定理是它的推广形式.

例 6　证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}\ (p\text{ 为正整数}).$$

证　设 $y_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$, $x_n = n^{p+1}$,有 $x_{n+1} > x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$,且

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^{p+1} + \mathrm{C}_{p+1}^1 n^p + \cdots + 1 - n^{p+1}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots + 1} = \frac{1}{p+1},$$

因此利用斯笃茨定理,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}. \qquad \square$$

四、习题选解(教材上册第 33 页)

5. 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中一个是收敛数列,另一个是发散数列.证明$\{a_n \pm b_n\}$是发散数列.又问$\{a_n b_n\}$和$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b_n \neq 0)$是否必为发散数列.

证　设$\{a_n\}$是收敛数列,$\{b_n\}$是发散数列.用反证法,假若$\{a_n \pm b_n\}$是收敛数列.设 $a_n \pm b_n = c_n$,则 $b_n = \pm(c_n - a_n)$,由四则运算性质可知$\{b_n\}$也是收敛数列,与所设矛盾,于是$\{a_n \pm b_n\}$是发散数列.

在题设条件下,$\{a_n b_n\}$未必是发散数列,可以考虑反例: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$.

9. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

证 设 $a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$,有

$$a = \sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma^n} = \sqrt[n]{m}\cdot a,$$

令 $n\to\infty$,利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m} = 1$,由迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a.$$

§3 数列极限存在的条件

一、内容提要

1° 单调有界定理 在实数系中,单调有界数列必有极限.

2° 自然对数的底 e

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 是单调有界数列,记

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}. \tag{3.1}$$

以 e 为底的对数称为自然对数,记作

$$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x.$$

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 是递增数列, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是递减数列,且

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{3.2}$$

注 关于 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 的递减性,见本节习题第 9 题.

3° 柯西(Cauchy)收敛准则 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是:对任给的 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N,使得当 $n, m > N$(或 $n > N$,对任何正整数 p)时有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \ (|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon). \tag{3.3}$$

历史上,柯西认为在收敛与级数和的定义中表现为外部关系的那个数的存在性,可以从表现在柯西收敛准则的内部关系中得到.因而有时称为是自身收敛,即根据数列本身(通项)的特征(3.3)可以鉴别其敛散性.

柯西收敛准则的必要性容易从定义来加以验证,但是充分性的证明要困难得多,今后在第七章“实数系的完备性”中将给出严格的证明.

二、释疑解惑

问题 1　如何给出柯西收敛准则的否定形式的正面陈述?

答　柯西收敛准则的否定形式是:

$\{a_n\}$**发散**　$\quad \exists\ \varepsilon_0>0, \forall\ N>0, \exists\ n_0, m_0>N$,**使**$|a_{n_0}-a_{m_0}|\geq\varepsilon_0$.

它的直观意义是:总存在正数 ε_0,**不论** N **怎样大,总存在大于** N **的** n_0, m_0,**使得** a_{n_0} **与** a_{m_0} **之间的距离大于或等于** ε_0.

上述准则的一个重要应用是可以用它证明数列的发散性,例如 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$**为一发散数列 这是因为:**$\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{2}, \forall\ N, \exists\ n, 2n>N$,**使得**

$$|a_n-a_{2n}|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

这个结论在级数理论中将有重要的作用.

问题 2　试对验证数列收敛和发散的一些充要条件或充分条件加以总结.

答　验证数列收敛的一些方法如下——

(1) **按定义验证:**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad \forall\ \varepsilon>0, \exists\ N, \forall\ n>N, \text{有} |a_n-a|<\varepsilon.$$

(2) **用邻域形式验证:**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad \forall\ \varepsilon>0, \text{在 } U(a;\varepsilon) \text{外最多只有数列} \{a_n\} \text{中有限项}.$$

(3) **子列定理:**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad \forall\{a_{n_k}\} \quad \{a_n\}, \text{有} \lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a.$$

$$\{a_n\}\text{收敛} \quad \forall\{a_{n_k}\} \quad \{a_n\}, \text{有}\{a_{n_k}\}\text{收敛}.$$

(4) **柯西准则:**

$$\{a_n\}\text{收敛} \quad \forall\ \varepsilon>0, \exists\ N, \forall\ n, m>N, \text{有} |a_n-a_m|<\varepsilon.$$

(5) **单调有界定理:**

$$\text{若}\{a_n\}\text{单调有界} \quad \{a_n\}\text{收敛}.$$

(6) **迫敛性:若** $a_n\leq c_n\leq b_n$,**且**$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$,**则**$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

验证数列发散的一些方法如下——

(1) **按极限定义的否定形式验证:**

$$\{a_n\}\text{发散} \quad \forall\ a, \lim_{n\to\infty}a_n\neq a.$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq a \quad \exists\ \varepsilon_0>0, \forall\ N, \exists\ n'>N, |a_{n'}-a|\geq\varepsilon_0.$$

(2) **用邻域形式验证:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0, \text{在 } U(a;\varepsilon_0) \text{ 外存在数列} \{a_n\} \text{中无限多项}.$$

(3) 用子列验证:

若$\exists\, \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$, $\{a_{n_k}\}$发散 $\Rightarrow$ $\{a_n\}$发散.

若$\exists$ 两个子列
$$\left.\begin{array}{l} \{a'_{n_k}\} \subset \{a_n\}, \lim\limits_{k\to\infty} a'_{n_k} = a', \\ \{a''_{n_k}\} \subset \{a_n\}, \lim\limits_{k\to\infty} a''_{n_k} = a'', \end{array}\right\} a' \neq a'' \Rightarrow \{a_n\}\text{发散}.$$

(4) 用柯西准则否定形式验证:

$$\{a_n\}\text{发散} \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists\, n_0, m_0 > N, |a_{n_0} - a_{m_0}| \geq \varepsilon_0.$$

(5) 若数列$\{a_n\}$无界 $\Rightarrow$ $\{a_n\}$发散.

三、范例解析

例 1 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

分析 题中极限式与$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$相近但有区别,在$\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$中比$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$多出了一项$\dfrac{1}{n^2}$.合理的途径是化简$\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$为$\left(1+\dfrac{n+1}{n^2}\right)^n$,然后应用迫敛性来求解.

解 因为$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n+1}{n^2}<\dfrac{n+1}{n^2-1}=\dfrac{1}{n-1}$,所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

由(3.1),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \mathrm{e}.$$

应用迫敛性,即有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n = \mathrm{e}.$$ □

例 2 设 $x_1 > -6$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ $(n=1,2,\cdots)$.证明数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限.

证
$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n+6} - x_n = \frac{6 + x_n - x_n^2}{\sqrt{x_n+6} + x_n}$$

$$= \frac{(2+x_n)(3-x_n)}{\sqrt{x_n+6}+x_n}. \tag{3.4}$$

若 $x_1<3$,**有** $x_2=\sqrt{x_1+6}<3$,**由归纳法**,**若** $x_n<3$,**则** $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}<3$,**于是**$\{x_n\}$**有上界**.**由**(3.4) $x_{n+1}>x_n$,**即**$\{x_n\}$**为递增有上界数列**,**于是** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ **存在**.

若 $x_1>3$,**易证** $x_n>3$, $n=2,3,\cdots$.**于是由**(3.4),$\forall n$, $x_{n+1}<x_n$,**又** $x_n\geq 0$,**故**$\{x_n\}$**为递减有下界数列**,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$**存在**.

若 $x_1=3$, $x_n\equiv 3$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$**也存在**.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,**则有** $a=\sqrt{a+6}$,**解得** $a=3$,**于是**

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3.$$ □

例 3　证明:**对任何正整数** n **成立**

$$(1)\ \frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}; \tag{3.5}$$

(2) $\{c_n\}=\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right\}$ **是递减的收敛数列**.

分析　由基本不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ **两边取自然对数后可以得到**(3.5)**式**;**然后应用**(3.5)**不难证得**(2).

证　(1) **由**(3.2),

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

在上面不等式两边取自然对数,**可得**

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

即

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

(2) **先证**$\{c_n\}$**是递减数列**:**由不等式**(3.5),

$$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)$$
$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0.$$

再证$\{c_n\}$**有下界**:**由不等式**(3.5),$\forall k\in\mathbf{N}_+$,**有**

$$\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k},$$

对 $k=1,2,3,\cdots,n$ **把上面不等式相加**,**可得**

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

于是

$$0<\ln(n+1)-\ln n<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n.$$

这就证得$\{c_n\}$是递减有下界数列,由单调有界定理,存在极限

$$\lim_{n\to\infty}c_n=c=0.577\ 215\ 664\ 9\cdots. \qquad \square$$

注 c 称为欧拉(Euler)常数.这样,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n, \tag{3.6}$$

其中 ε_n 为无穷小数列,(3.6)式刻画了 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$发散的数量级与 $\ln n$ 相当.

例 4 设 $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$,试求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$存在,由 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$,两边取极限后即有

$$a=\frac{1}{1+a},$$

于是可解得 $a_1=0.618\cdots$, $a_2=-1.618\cdots$,由 $x_n\geq 0$,可知 $a=0.618\cdots$ 这样,问题归为只须证明$\{x_n\}$收敛.

证

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}=\frac{-(x_n-x_{n-1})}{(1+x_n)(1+x_{n-1})},$$

由 $x_2-x_1<0$,可得 $x_3-x_2>0$,以此类推 $x_4-x_3<0,\cdots,x_{2k}-x_{2k-1}<0$, $x_{2k+1}-x_{2k}>0,\cdots$ 显然$\{x_n\}$本身不是单调数列.

利用以上分析中的$\frac{1}{1+a}=a(a=0.618\cdots)$,若 $x_n<a$,则 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}>\frac{1}{1+a}=a$;若 $x_n>a$,则 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}<\frac{1}{1+a}=a$;而 $x_1=1>0.618\cdots$,于是可得

$$x_{2k-1}>a,\quad x_{2k}<a,$$

这样可推测$\{x_n\}$是摆动地趋向于 a.现在来讨论$\{x_{2k}\}$与$\{x_{2k-1}\}$的单调性.

由于

$$\begin{aligned}x_{n+2}-x_n&=\frac{1}{1+x_{n+1}}-x_n \\ &=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}}-x_n\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$= \frac{1 - x_n - x_n^2}{2 + x_n}$$

$$= \frac{(1 + a + x_n)(a - x_n)}{2 + x_n},$$

因此当 $x_n < a$ 时,有 $x_{n+2} - x_n > 0$;当 $x_n > a$ 时,有 $x_{n+2} - x_n < 0$.但因 $x_{2k} < a$, $x_{2k-1} > a$,所以$\{x_{2k}\}$是递增有上界数列(a 为上界),$\{x_{2k-1}\}$是递减有下界数列(a 为下界).由单调有界定理,存在如下极限

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \alpha, \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \beta .$$

对递推关系 $x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$分别当 $n = 2k - 1$, $n = 2k$ 取极限,可得

$$\beta = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{1 + \beta},$$

由此容易解出

$$\alpha = \beta = a = 0.618\cdots .$$

因为$\{x_{2k-1}\}$与$\{x_{2k}\}$收敛于同一数 a,所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = 0.618\cdots . \qquad \square$$

注　$a = 0.618\cdots$在最优化理论中是有名的常数.有时也称它是“黄金分割比”.

例 5　天体力学中的开普勒(Kepler)方程为

$$x = q\sin x + a,$$

其中 a 和 q 为常数, q 满足 $0 < q < 1$.任取 x_0,构造迭代公式

$$x_{n+1} = q\sin x_n + a, \ n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{3.8}$$

试证:$\{x_n\}$收敛,且其极限为开普勒方程的解.

分析　由迭代公式(3.8)可得

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &= q|\sin x_1 - \sin x_0| \\ &= 2q\left|\sin\frac{x_1 - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x_1 + x_0}{2}\right| \\ &\leq q|x_1 - x_0|; \end{aligned}$$

同理可得

$$|x_3 - x_2| \leq q|x_2 - x_1| \leq q^2|x_1 - x_0|;$$

由数学归纳法,有

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq q^n|x_1 - x_0| .$$

由此对任何 $p \in \mathbf{N}_+$,又有

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (q^{n+p-1}+\cdots+q^{n})|x_1-x_0| \\
&= \frac{q^{n}(1-q^{p})}{1-q}|x_1-x_0| \\
&\leq \frac{q^{n}}{1-q}|x_1-x_0| .
\end{aligned}
$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|=0$,不难观察到$\{x_n\}$满足柯西准则的条件.

证　由分析可知

$$|x_{n+p}-x_n|\leq\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|,$$

因为$0<q<1$,所以

$$\lim_{n\to\infty} q^n\cdot\frac{|x_1-x_0|}{1-q}=0 .$$

于是$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,对一切$p\in\mathbf{N}_+$,有

$$|x_{n+p}-x_n|\leq q^n\frac{|x_1-x_0|}{1-q}<\varepsilon,$$

即$\{x_n\}$满足柯西准则的条件,故存在极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=l .$$

又因

$$|\sin x_n-\sin l|\leq|x_n-l|,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n=\sin l .$$

最后,对迭代式(3.8)取$n\to\infty$的极限,得

$$l=\sin l+a,$$

即l是开普勒方程的解. □

注　本题是柯西收敛准则在解函数方程中的应用,上述由x_0构造$\{x_n\}$的方法称为迭代法.

四、习题选解(教材上册第39页)

8. 证明:若$\{a_n\}$为递增(递减)有界数列,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n\}(\inf\{a_n\}) .$$

又问逆命题成立否?

证1　不妨设$\{a_n\}$为递增有界数列.由确界原理,存在$\eta=\sup\{a_n\}$,由确界定义,$\forall\varepsilon>0$,$\exists a_{n_0}$,$\eta-\varepsilon<a_{n_0}$,由$\{a_n\}$的递增性,当$n>n_0$时,$\eta-\varepsilon<a_{n_0}\leq a_n<\eta+\varepsilon$.由此可见:$\forall\varepsilon>0$,$\exists n_0$,当$n>n_0$时,$|a_n-\eta|<\varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}.$$

反之不然,反例: $a_n = 1 - \dfrac{1}{2n}(1 + (-1)^n)$.

证 2 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 由 $a_n \leq \eta$, 由保不等式性有 $a \leq \eta$, 设法证明 $a < \eta$ 是不可能的(请读者补充证明).

12. 设$\{a_n\}$为有界数列, 记

$$\overline{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\},$$

$$\underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

证明:(1) 对任何正整数 n, $\overline{a}_n \geq \underline{a}_n$;

(2) $\{\overline{a}_n\}$为递减有界数列, $\{\underline{a}_n\}$为递增有界数列, 且对任何正整数 n, m 有 $\overline{a}_n \geq \underline{a}_m$;

(3) 设 $\overline{a}$ 和 $\underline{a}$ 分别为$\{\overline{a}_n\}$和$\{\underline{a}_n\}$的极限, 则 $\overline{a} \geq \underline{a}$.

(4) $\{a_n\}$收敛的充要条件是 $\overline{a} = \underline{a}$.

证 (1) 由确界性质可知: $\forall n$, 必有

$$\sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \geq \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\},$$

即 $\overline{a}_n \geq \underline{a}_n$.

(2) 因为$\{a_n\}$有界, $\exists M > 0$, $\forall n$, $-M \leq a_n \leq M$, 于是 $-M \leq \underline{a}_n \leq \overline{a}_n \leq M$, 即$\{\overline{a}_n\}$, $\{\underline{a}_n\}$为有界数列. 由

$$\overline{a}_{n+1} = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = \overline{a}_n$$

可知$\{\overline{a}_n\}$为递减数列. 同理可证$\{\underline{a}_n\}$为递增数列. $\forall n, m$, $\overline{a}_n \geq \overline{a}_{m+n} \geq \underline{a}_{m+n} \geq \underline{a}_m$.

(3) 由单调有界定理, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n = \overline{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{a}_n = \underline{a}$. 因为 $\overline{a}_n \geq \underline{a}_n$, 令 $n \to \infty$, 由保不等式性有 $\overline{a} \geq \underline{a}$.

(4) [必要性] 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$ 时 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. 于是 $n > N$ 时 $a - \varepsilon \leq \underline{a}_n \leq \overline{a}_n \leq a + \varepsilon$, 令 $n \to \infty$, 又有 $a - \varepsilon \leq \underline{a} \leq \overline{a} \leq a + \varepsilon$ $0 \leq \overline{a} - \underline{a} \leq 2\varepsilon$ $\overline{a} = \underline{a} = a$.

[充分性] 若 $\underline{a} = \overline{a} = a$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n = \overline{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{a}_n = \underline{a}$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$ 时 $a - \varepsilon < \underline{a}_n \leq \overline{a}_n < a + \varepsilon$, 于是 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, 这样就有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

总练习题提示与解答

(教材上册第 40 页)

1. 求下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}\ (=3)$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{e^n}\ (=0)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\ (=0)$.

2. **证明**:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0\ (|q|<1)$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n^\alpha}=0\ (\alpha\geq 1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

提示　(1) 设 $|q|=\dfrac{1}{1+h}$, $h>0$.

(2) 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n}=0$.

(3) $\forall\varepsilon>0$, 试证 $\exists N$, $\forall n>N$, $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon$, 设 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 即 $\dfrac{M^n}{n!}<1$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ (又问由此等式能否反过来推出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$);

(2) 若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

证　(1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$, $\forall n>N_1$ 时, $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leq\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}$$
$$\leq\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$

当 N_1 固定, 取 n 充分大, $n>N_2$ 时 $\dfrac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 于是当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

反之不必然, 例如 $a_n=(-1)^n$, $\{a_n\}$ 发散, 但是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0.$$

注　所证结论可作为 §2 范例 5 中施笃茨定理的推论.

(2) 若 $a=0$, 因为

$$0\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

令 $n\to\infty$,由(1)有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$,应用迫敛性,有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0\ .$$

若 $a>0$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$.又因为 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,利用不等式(其证明见教材第六章§5 习题 8(1))

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a\ .$$

由迫敛性证得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a\ .$$

注　上述结论也可以利用指数函数连续性和(1)来证明 .

4．应用上题结论证明下列各题:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$;(提示: $a_1=a$, $a_i=1(i\geq2)$)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$;(提示:在题 3(2)中取 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$)

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$;

(7) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=a(b_n>0)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=a$;

(8) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$.

5．证明:若$\{a_n\}$为递增数列,$\{b_n\}$为递减数列,且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在且相等 .

提示 证明$\{a_n\}$,$\{b_n\}$为有界数列 .

6．设数列$\{a_n\}$满足:存在正数 M,对一切 n,有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \le M .$$

证明:数列$\{a_n\}$与$\{A_n\}$都收敛 .

证 因$\{A_n\}$是递增有界数列,由单调有界定理,数列$\{A_n\}$收敛 .由数列极限的柯西准则(必要性),$\forall\, \varepsilon > 0$,$\exists\, N$,$\forall\, n > N$,对任何正整数 p,有

$$|A_{n+p} - A_n| < \varepsilon,$$

即

$$|a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon .$$

于是又有

$$\begin{aligned}|a_{n+p} - a_n| &= |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \\ &\le |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

对数列$\{a_n\}$应用柯西准则(充分性),可知$\{a_n\}$也是收敛的 .

注 满足本题条件的数列称为有界变差数列 .

7．设 $a > 0$,$\sigma > 0$,$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{\sigma}{a}\right)$,$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\sigma}{a_n}\right)$,$n = 1, 2, \cdots$.证明:数列$\{a_n\}$收敛,且其极限为 $\sqrt{\sigma}$.

证 $\forall\, n$,有

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\sigma}{a_n}\right) \ge \sqrt{a_n \cdot \frac{\sigma}{a_n}} = \sqrt{\sigma},$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{\sigma}{a}\right) \ge \sqrt{\sigma},$$

于是$\{a_n\}$是有下界数列 .

再证$\{a_n\}$的递减性:$\forall\, n$,又有

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\sigma}{a_n}\right) = \frac{a_n}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{a_n^2}\right) \le \frac{a_n}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{\sigma}\right) = a_n .$$

由数列极限的单调有界定理,存在 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

在 $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\sigma}{a_n}\right)$ 中令 $n\to\infty$,得到

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\sigma}{l}\right),$$

解出 $l = \pm \sigma$并舍去负根,有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sigma$.

8．设 $a_1 > b_1 > 0$, 记

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},\ b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}},\ n = 2,3,\cdots .$$

证明:数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的极限都存在且等于 $a_1 b_1$.

提示 $a_n \geq b_n$.

9．按柯西收敛准则叙述数列$\{a_n\}$发散的充要条件,并用它证明下列数列$\{a_n\}$是发散的:

(1) $a_n = (-1)^n n$; (2) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$; (3) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

解 (1) $\varepsilon_0 = 1$, $\forall N$, 取 $n_0 = N + 1$, $m_0 = N + 2$,

$$|a_{n_0} - a_{m_0}| \geq \varepsilon_0 .$$

(2) $\varepsilon_0 = 1$, $\forall N$, 取 $n_0 = N + 1$, $m_0 = N + 2$,

$$|a_{n_0} - a_{m_0}| \geq \varepsilon_0 .$$

10．设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 记

$$S_n = \max\{a_n, b_n\},\ T_n = \min\{a_n, b_n\},\ n = 1,2,\cdots .$$

证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \max\{a, b\}$;(2) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \min\{a, b\}$.

提示 参考第一章总练习题 1 的结论 .

第二章测试题

(A)

1．按定义验证下列极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2 + n - 4}{2n^2 - 3} = \frac{5}{2} .$$

2．设 $b_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2^{1+2+\cdots+n}}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

3．若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = S$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) = 0 .$$

4．设 a_n由下式定义

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3}\quad (n > 1, a_1 > 1) .$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

5. 试问下述论断是否正确,并说明理由:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$

$= 0+0+\cdots+0 = 0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\inf\{a_n\}\leq a\leq\sup\{a_n\}$.

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(a_0 + \mathrm{C}_n^1 a_1 + \cdots + \mathrm{C}_n^k a_k + \cdots + \mathrm{C}_n^n a_n) = A.$$

7. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0\leq x_{m+n}\leq x_m + x_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \inf\left\{\frac{x_n}{n}\right\}.$$

(B)

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 其中

(1) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)$;

(2) $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1^3+2^3+\cdots+i^3}$.

2. 设 $0\leq x\leq 1$, $y_1 = \dfrac{x}{2}, \cdots, y_n = \dfrac{x}{2}+\dfrac{y_{n-1}^2}{2}$ $(n = 2,3,\cdots)$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a < b$. 试证存在发散数列 $\{c_n\}$, 满足 $a_n\leq c_n\leq b_n$.

4. 设正数数列 $\{x_n\}$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n} = 0$, 则 $\{x_n\}$ 必能取到下确界.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

6. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\sigma_n = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$, $\lambda_i > 0$, $(i = 1,2,\cdots,n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sigma_n} = 0$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = a.$$

7. 证明:若有界数列满足 $2x_n\leq x_{n-1} + x_{n+1}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0.$$

第三章　函 数 极 限

§1　函数极限概念

一、内容提要

1°　x 趋于∞时函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$　$\forall\varepsilon>0, \exists M>0$, 当 $x>M$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$　$\forall\varepsilon>0, \exists M>0$, 当 $x<-M$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$　$\forall\varepsilon>0, \exists M>0$, 当 $|x|>M$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2°　x 趋于 x_0 时函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$　$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$　$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$　$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$　$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

自从牛顿、莱布尼茨总结前人的经验创立了微积分学的基本方法,许多数学家把微积分方法应用到物理和应用科学中并取得重大的成就.但是微积分由于缺乏严格的理论基础,引起了不少争论和批评,争论的焦点在于极限概念的定义不够严密.许多数学家在这方面做了不懈的努力,直到 19 世纪中叶,终于使极限理论有了严格的基础.

法国数学家柯西在他的《分析教程》中,摆脱了与几何图形及几何量的任何牵连,给出极限的定义:“若代表某变量的一串数值无限地趋向某一固定数值时,其差可随意小,则该固定值称为这一串数值的极限.”柯西用变量和函数的概念给出了到他那时为止最清楚的极限定义.

德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass)给出了更为明白和精确的极限定义:“设 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 定义域内的一点.若对给定的任一随意小的数 ε,可求得另一数 δ,使得与 x_0 相差小于 δ 的一切 x 值, $f(x)$ 与一个数 L 的差小于 ε,则数 L 是函数 $f(x)$ 于点 x_0 的极限”.这与今天数学分析教程中普遍采用的

ε - δ方法很接近，在现在的定义中，$f(x)$在点 x_0 是否有定义在极限问题中是无关紧要的．

二、释疑解惑

问题 1　在函数极限的 ε - δ 定义中，怎样理解 ε 的“任意”和“给定”这两个性质？

答　ε - δ 方法是用“静态”的定量形式描述动态的极限过程．“对给定的 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$”，形式上是一个“静态”的描述；当 ε 变动趋向于零时，一系列“静态”描述就刻画了动态的极限过程．由此可见正数 ε 的“任意”和“给定”这两个特性在上述过程中是相辅相成的．

问题 2　试总结当 $f(x)$ 为分式时，用 ε - δ 方法验证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的具体步骤．

答　(1) 简化分式 $f(x)$ 的形式：当分子分母有当 $x\to x_0$ 时的零化因子 $(x-x_0)$ 时，则应消去这些因子．

(2) 把 $|f(x)-A|$ 化简为下述形式：

$$|f(x)-A|=|\varphi(x)||x-x_0|.$$

(3) 选取合适的 $\eta>0$，当 $x\in U^{\circ}(x_0;\eta)$ 时，估算得 $|\varphi(x)|\leq M$，即估计 $|\varphi(x)|$ 在 $U^{\circ}(x_0;\eta)$ 内的上界．

(4) 对任给 $\varepsilon>0$，求得 $\delta=\min\left\{\eta,\dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$．

问题 3　如何给出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$ 的正面陈述？

答　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$ 的正面陈述：

$\exists\ \varepsilon_0>0$，$\forall\ \delta>0$，$\exists\ x'$，$0<|x'-x_0|<\delta$，使得

$$|f(x')-A|\geq\varepsilon_0 .$$

或者用邻域形式叙述为：

存在 $\varepsilon_0>0$，无论 δ 多么小，在点 x_0 的空心邻域 $U^{\circ}(x_0;\delta)$ 内总存在点 x'，使得 $f(x')\notin U(A;\varepsilon_0)$．

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$ 的正面陈述：

$\exists\ \varepsilon_0>0$，$\forall\ M>0$，$\exists\ x'>M$，使得

$$|f(x')-A|\geq\varepsilon_0 .$$

或者：存在 $\varepsilon_0>0$，无论 M 多大，在 $U(+\infty)=\{x|x>M\}$ 中总存在点 x'，使得 $f(x')\notin U(A;\varepsilon_0)$．

三、范例解析

例 1 用 ε - δ 方法验证:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}=-3.$$

解 (1) 消去分式分子、分母中当 $x\to 1$ 时的零化因子 $(x-1)$:

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x+2}{x(x-2)}.$$

(2) 把 $|f(x)-(-3)|$ 化为 $|\varphi(x)|\cdot|x-1|$,其中 $\varphi(x)$ 为 x 的分式:

$$\begin{aligned}|f(x)+3|&=\left|\frac{x+2}{x(x-2)}+3\right|\\&=\left|\frac{3x^2-5x+2}{x(x-2)}\right|\\&=\frac{|3x-2|}{|x^2-2x|}|x-1|,\end{aligned}$$

其中 $\varphi(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-2x}$.

(3) 确定 $x_0=1$ 的邻域 $0<|x-1|<\eta$,并估计 $\varphi(x)$ 在此邻域内的上界:取 $\eta=\dfrac{1}{2}$,当 $0<|x-1|<\dfrac{1}{2}$ 时,可得

$$|3x-2|\leq 3|x-1|+1<\frac{5}{2},$$

$$|x^2-2x|=|1-(x-1)^2|>\frac{3}{4},$$

于是

$$\frac{|3x-2|}{|x^2-2x|}<\frac{5}{2}\Big/\frac{3}{4}=\frac{10}{3}.$$

(4) 要使 $|f(x)+3|=\dfrac{|3x-2|}{|x^2-2x|}|x-1|\leq\dfrac{10}{3}|x-1|<\varepsilon$,只要取 $|x-1|<\dfrac{3}{10}\varepsilon$.于是应取

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{3\varepsilon}{10}\right\},$$

当 $0<|x-1|<\delta$ 时,$|f(x)-(-3)|<\varepsilon$. □

例 2 用 ε - M 方法验证:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\frac{1}{2}.$$

解 $$\left|\frac{x}{x^2+1-x} - \quad -\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x^2+1+x}{2(\quad x^2+1-x)}\right|$$

$$= \frac{1}{2(\quad x^2+1-x)^2}.$$

注意到当 $x\to-\infty$时,上式可以充分小,但是直接解不等式

$$\frac{1}{2(\quad x^2+1-x)^2} < \varepsilon,$$

希望由此得到 $x < -M$,整个过程相当繁复,现用放大法简化求 M 的过程.因为由

$$\frac{1}{2(\quad x^2+1-x)^2} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-2x)^2} = \frac{1}{8x^2} < \varepsilon,$$

便可求得 $x^2 > \frac{1}{8\varepsilon}$,考虑到 $x\to-\infty$所需要的是 $x < - \quad \frac{1}{8\varepsilon}$.于是" $\varepsilon>0$, v $M = \frac{1}{8\varepsilon}$,当 $x < -M$ 时,

$$\left|\frac{x}{x^2+1-x} - \quad -\frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

□

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x\neq 0$.

分析 利用极限否定形式的正面陈述证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x\neq 0$ **是学习函数极限中的难点.关键在于仔细观察 $x\to+\infty$时,函数 $\sin x$ 变化的状态,适当选取 $\varepsilon_0>0$ 与 $x'>M$(" $M>0$),使得 $|\sin x'|\geq\varepsilon_0$.这是今后掌握证明题和学习后继课程的基本技巧.**

证 利用 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$ **的正面陈述,应当证:**v $\varepsilon_0>0$, " $M>0$, v $x'>M$,**使得** $|\sin x'|\geq\varepsilon_0$.

为此取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, " $M>0$,**取** $n_0\in\mathbf{N}_+$,**使得** $x'=2n_0\pi+\frac{\pi}{2}>M$,**于是**

$$|\sin x'| = \left|\sin \quad 2n_0\pi+\frac{\pi}{2}\right| = 1 > \varepsilon_0,$$

这样就证得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x\neq 0$.

□

例 4 设

$$f(x) = x - [x].$$

求在整数点 n 处的极限 $\lim\limits_{x\to n+} f(x)$**与** $\lim\limits_{x\to n-} f(x)$.

分析 初学的读者可能对求函数在某点的左、右极限感到困难,有效的方法是仔细观察函数在该点的左、右邻域内的表达式与变化的状态.

解 先求 $\lim\limits_{x \to n^+} f(x)$. 设 $\delta < 1$, 当 $0 < x - n < \delta$ 时, 有

$$f(x) = x - [x] = x - n,$$

于是

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} (x - n) = 0 .$$

同理, 设 $\delta < 1$, 当 $-\delta < x - n < 0$ 时, 有

$$f(x) = x - [x] = x - (n - 1),$$

于是

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} (x - n + 1) = 1 . \qquad \square$$

例 5 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases} \quad x \in (0, +\infty)$$

在任何点 x_0 处 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在.

证 若 $x_0 \in (0, +\infty)$, 要证 $\forall A$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq A$ 即

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x' \in U^\circ(x_0; \delta), |f(x') - A| \geq \varepsilon_0 .$$

若 $A = 0$, 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{x_0}{2}$, $\forall \delta > 0$ $(\delta < x_0)$, 由实数的稠密性, $\exists$ 有理数 $x' \in U^\circ_+(x_0; \delta)$ (为何在 $U^\circ_+(x_0; \delta)$ 中取 x'?)

$$|f(x') - 0| = |x'| \geq \frac{x_0}{2} = \varepsilon_0 .$$

若 $A \neq 0$, 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{|A|}{2}$, $\forall \delta > 0$ $(\delta < x_0)$, $\exists$ 无理数 $x' \in U^\circ(x_0; \delta)$,

$$|f(x') - A| = |A| > \frac{|A|}{2} = \varepsilon_0 .$$

于是有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在. $\square$

对于 $x_0 = 0$ 的情形, 只需考虑右极限 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

四、习题选解 (教材上册第 47 页)

7. 设 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, 证明 $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = A$.

证 由 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 可知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$, 当 $x > M$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$ 在上式中作变换 $y = \dfrac{1}{x}$, 并取 $\delta = \dfrac{1}{M}$, 有 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $0 < y < \delta$ 时,

$\left| f\left(\frac{1}{y}\right) - A \right| < \varepsilon$,即

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = A .$$

8. **证明:对黎曼函数 $R(x)$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$, $x_0 \in [0,1]$(当 $x_0 = 0$ 或 1 时,考虑单侧极限).**

证 $R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & 当\ x = \dfrac{p}{q}\,(p, q \in \mathbf{N}_+,\ p、q\ 互质), \\ 0, & 当\ x\ 为\ 0,1\ 与\ (0,1)\ 内的无理数 . \end{cases}$

不妨设 $x_0 \in (0,1)$, $x_0 = 0$ 或 1 时只需讨论单侧极限.为了证明 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$,按定义要证:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,$|R(x) - 0| < \varepsilon$.

当 $x \in U^\circ(x_0;\delta)$, x 为无理数时 $R(x) = 0$,于是 $|R(x)| < \varepsilon$ 自然成立;当 $x \in U^\circ(x_0;\delta)$, x 为有理数 $\frac{p}{q}$ 时,$R(x) = \frac{1}{q}$,需证 $\exists \delta > 0$,使得当 $\frac{p}{q} \in U^\circ(x_0;\delta)$ 时,有 $\frac{1}{q} < \varepsilon$.

先取定 $\varepsilon > 0$,现讨论使得 $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$ 的有理点 $\frac{p}{q}$,亦即使得 $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ 的有理点,这类有理点只有有限个,设为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$,现设法取 $\delta > 0$,使这有限个有理点被排除在 $U^\circ(x_0;\delta)$ 之外.设

$$\delta = \min\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \cdots, |x_k - x_0|, x_0, 1 - x_0\},$$

于是 $\forall x \in U^\circ(x_0;\delta) \cap (0,1)$,且 x 为有理数时 $R(x) < \varepsilon$.这样,$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $x \in U^\circ(x_0;\delta)$ 时,无论 x 是有理数还是无理数,都使 $R(x) < \varepsilon$,即

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = 0 . \qquad \square$$

§2 函数极限的性质

一、内容提要

1° 函数极限的基本性质

(1) 唯一性 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则此极限是唯一的.

(2) 局部保号性 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$(或 < 0),则对任何正数 $r < A$(或 $r < -A$),存在 $U^\circ(x_0)$,使得对一切 $x \in U^\circ(x_0)$ 有

$$f(x)>r>0 \text{（或} f(x)<-r<0\text{）}.$$

(3) **局部有界性** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则 f 在 x_0 的某空心邻域内有界.

(4) **保不等式性** 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在,且在某邻域 $U^\circ(x_0;\delta)$ 内有 $f(x)\leq g(x)$,则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leq \lim_{x\to x_0} g(x). \tag{2.1}$$

(5) **迫敛性** 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$,且在某 $U^\circ(x_0;\delta)$ 内有

$$f(x)\leq h(x)\leq g(x),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

2° **四则运算法则** 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在,则

(1) $$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x). \tag{2.2}$$

(2) $$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x). \tag{2.3}$$

(3) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right). \tag{2.4}$$

二、释疑解惑

问题 1 区间 (a,b) 上的函数 $f(x)$ 若在定义域中每点处局部有界,试问 $f(x)$ 是否在 (a,b) 上有界? 是否存在 (a,b) 上的函数 $f(x)$,它在定义域中任何点处都不是局部有界的?

答 设函数 $f(x)$, $x\in(a,b)$, $x_0\in(a,b)$,若存在 $U(x_0)$, $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有界,则称 $f(x)$ 在 x_0 局部有界.函数的局部有界性是局部性概念,而函数在 (a,b) 上的有界性是整体性概念,两者含义不同.

(a,b) 上的有界函数一定在 (a,b) 内每点局部有界;但在 (a,b) 内每点处局部有界的函数不一定是有界函数.例如:

$$f(x)=\frac{1}{x},\ x\in(0,1).$$

$\forall x_0\in(0,1)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}$,由函数极限的局部有界性定理可知 $f(x)$ 在点 x_0 处局部有界,但是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是无界的.

存在 $(0,1)$ 上的函数 $f(x)$,它在 $(0,1)$ 内任何点都不是局部有界的.例如:定义在 $(0,1)$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases} q, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q},\ p,q \text{ 为互质正整数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为}(0,1)\text{内的无理数}. \end{cases}$$

$\forall x_0 \in (0,1)$，$\exists$ 有理数列$\{x_k\}$，严格递增，且 $x_k \to x_0$．设 $x_k = \dfrac{p_k}{q_k}$，数列$\{q_k\}$必定无界，这是因为假如$\{q_k\}$有界，则$\{x_k\}$中最多有限项互不相等，与$\{x_k\}$的严格递增性相矛盾．对 x_0 的任何邻域 $U(x_0)$，$\exists K>0$，当 $k>K$ 时，$x_k \in U(x_0)$．由$\{q_k\}$的无界性，$\forall M>0$，$\exists x_k(k>K)$，使得 $f(x_k)=q_k>M$，即 $f(x)$在点 x_0 的任何邻域内无界，即 $f(x)$在$(0,1)$中任何点处都不是局部有界的．

问题 2　极限除法法则(2.4)中为什么只假设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，而不假设 $g(x)\neq 0$？

答　若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，由函数极限局部保号性，$\exists$ 邻域 $U(x_0)$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0)$，$f(x)\neq 0$，这就保证了分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在 $\mathring{U}(x_0)$内有意义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$．

若只设 $g(x)\neq 0$，有可能 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，于是极限除法法则不成立．例如 $g(x)=(x-x_0)^2$，当 $x\neq x_0$ 时，$g(x)\neq 0$，但是 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$．

三、范例解析

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$．

分析　求极限中的困难是 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[5]{1+5x}-(1+x))=0$，且其中出现根式 $\sqrt[5]{1+5x}$，使用的方法是作变换 $y=\sqrt[5]{1+5x}$，然后对变量 y 的分式应用四则运算法则简化后求极限．

解　作变换 $y=\sqrt[5]{1+5x}$，$x=\dfrac{y^5-1}{5}$，$1+x=\dfrac{y^5+4}{5}$，于是

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)} &= \frac{1}{25}\cdot\frac{(y^5-1)^2}{y-\dfrac{y^5+4}{5}}\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{(y^5-1)^2}{5(y-1)-(y^5-1)}\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{(y^4+y^3+y^2+y+1)^2(y-1)^2}{[4-(y^3+y^2+y)](y-1)}\\
&= -\frac{1}{5}\frac{(y^4+y^3+y^2+y+1)^2}{y^3+2y^2+3y+4}.
\end{aligned}
$$

当 $x\to 0$ 时，$y\to 1$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$$

$$=\lim_{y\to 1}\left(-\frac{1}{5}\cdot\frac{(y^4+y^3+y^2+y+1)^2}{y^3+2y^2+3y+4}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}.$$ □

例 2 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，在 x_0 某邻域 $\mathring{U}(x_0;\delta_1)$ 内 $\varphi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{t\to a}f(t)=A$。证明

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A. \tag{2.5}$$

解 由 $\lim\limits_{t\to a}f(t)=A$，$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\eta>0$，$\forall\,t\in\mathring{U}(x_0;\eta)$ 时，

$$|f(t)-A|<\varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，故对上述 $\eta>0$，$\exists\,\delta>0$（不妨取 $\delta<\delta_1$），当 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)$ 时，$|\varphi(x)-a|<\eta$。由此可得：$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)$ 时

$$|f(\varphi(x))-A|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A.$$ □

注 称(2.5)为复合求极限法，(2.5)不仅对 $x\to x_0$ 型的极限成立，且对于 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$ 都成立。

例 3 求下列极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=1,$$

最后等式是应用了复合求极限法。 □

例 4 设 $a>0$，证明

$$\lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 .$$

分析 我们知道数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$，下面是用这已知的数列极限求证函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$.

证 设 $a>1$，当 $n\leq x<n+1$ 时（$n\in\mathbf{N}_+$）

$$a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{x}} \leq a^{\frac{1}{n}} .$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，所以 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，$\forall\ n>N$，$1-\varepsilon<a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$.

于是当 $x>N+1$ 时，$[x]+1>x\geq[x]>N$，则有

$$1-\varepsilon<a^{\frac{1}{[x]+1}}<a^{\frac{1}{x}}\leq a^{\frac{1}{[x]}}<1+\varepsilon,$$

即证得

$$\lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 .$$

同理可证当 $a\leq1$ 时结论也成立 . □

例 5 设 $a_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$），证明

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\max_{1\leq i\leq n} a_i .$$

证 设 $\max\limits_{1\leq i\leq n} a_i = a_k$（$1\leq k\leq n$），于是有

$$a_k\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{a_k^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leq\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leq\left(\frac{na_k^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=a_k,$$

令 $x\to+\infty$，从例 4 可知 $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\to1$，由函数极限的迫敛性，证得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\max_{1\leq i\leq n} a_i . \quad □$$

四、习题选解（教材上册第 51 页）

5．设 $f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.证明

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A},$$

其中 $n\geq2$ 为正整数 .

提示 讨论 $A=0$ 和 $A>0$ 两种情况 .$A>0$ 时应用

$$\left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\right|=\frac{|f(x)-A|}{f(x)^{\frac{n-1}{n}}+f(x)^{\frac{n-2}{n}}A^{\frac{1}{n}}+\cdots+A^{\frac{n-1}{n}}}$$

来证明 .

9．(1) 证明:若$\lim\limits_{x\to0}f(x^3)$存在,则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x^3)$.

(2) 若$\lim\limits_{x\to0}f(x^2)$存在,试问是否成立$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x^2)$?

解　(1) 由$\lim\limits_{x\to0}f(x^3)$存在,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<|x|<\delta$时,$|f(x^3)-A|<\varepsilon$,作变换 $y=x^3$,当$0<\sqrt[3]{|y|}<\delta$时,$|f(y)-A|<\varepsilon$,即$0<|y|<\delta^3$时,$|f(y)-A|<\varepsilon$,于是

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}f(x^3)=A .$$

(2) 否 .反例:
$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geq0,\\ 1, & x<0,\ x\text{ 为有理数},\\ 0, & x<0,\ x\text{ 为无理数} .\end{cases}$$

易见$\lim\limits_{x\to0}f(x^2)=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$,而$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$不存在,因此$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在 .

§3　函数极限存在的条件

一、内容提要

1°　归结原则

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对任何数列 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$,有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A . \tag{3.1}$$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对任何数列 $x_n\to x_0^+\ (n\to\infty)$,有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A . \tag{3.2}$$

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对任何数列 $x_n\to x_0^-\ (n\to\infty)$,有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A . \tag{3.3}$$

单侧极限的归结原则可表示为更强的形式:

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对任何以 x_0 为极限的递减数列 $\{x_n\}\subset U^\circ_+(x_0)$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. (3.4)

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对任何以 x_0 为极限的递增数列 $\{x_n\}\subset U^\circ_-(x_0)$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. (3.5)

2°　函数极限的单调有界定理

(1) 设 $f(x)$为定义在 $U^\circ_+(x_0)$上的有界函数,若 f 为递增函数,则

$$f(x_0+0)=\inf_{x\in U^\circ_+(x_0)}f(x); \tag{3.6}$$

若 f 为递减函数,则

$$f(x_0+0)=\sup_{x\in U^\circ_+(x_0)} f(x). \tag{3.7}$$

(2) 设 f 为 $U^\circ(x_0)$上的递增函数,则

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U^\circ_-(x_0)} f(x),\ f(x_0+0)=\inf_{x\in U^\circ_+(x_0)} f(x). \tag{3.8}$$

同样可讨论 f 为 $U^\circ(x_0)$上递减函数的情形.

3° 函数极限的柯西准则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in U^\circ(x_0;\delta),\text{有}\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{3.9}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad \forall\varepsilon>0,\exists M>0,\text{当}\ x'>M,x''>M\ \text{时,有}\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{3.10}$$

二、释疑解惑

问题 1 设 f 为定义在 $U^\circ_+(x_0)$上的单调有界函数,则 $f(x_0+0)$存在.但在(3.8)中,若 f 为 $U^\circ(x_0)$上的单调函数,则 $f(x_0+0)$也存在,那里并不要求有界性条件,为什么?

答 在那里 f 在 $U^\circ(x_0)$上的递增性,保证了 f 在 $U^\circ_+(x_0)$内的有下界性.这是因为取定 $x'\in U^\circ_-(x_0)$, $\forall x\in U^\circ_+(x_0)$,有 $f(x)\geq f(x')$,即 $f(x')$为 $f(x)$在 $U^\circ_+(x_0)$内的一个下界,于是由函数极限的单调有界定理,

$$f(x_0+0)=\inf_{x\in U^\circ_+(x_0)} f(x).$$

问题 2 试述判别 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在的各种方法.

答 (1) 按定义验证:$\forall A$,证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$,即

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A \quad \exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x'\in U^\circ(x_0;\delta)$,使得

$$|f(x')-A|\geq\varepsilon_0.$$

(2) 利用归结原则:

(i) $\exists x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在 $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

(ii) $\exists$ 两个数列$\{x'_n\},\{x''_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} x'_n=x_0,\ \lim_{n\to\infty} x''_n=x_0,\ \lim_{n\to\infty} f(x'_n)\neq\lim_{n\to\infty} f(x''_n) \quad \lim_{x\to x_0} f(x)\text{不存在}. \tag{3.11}$$

(3) 利用函数极限的柯西准则的否定形式:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在 $\quad$ $\exists\, \varepsilon_0 > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, x', x'', 0 < |x' - x_0| < \delta,$ $0 < |x'' - x_0| < \delta$,使得$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.

三、范例解析

例 1 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

试用归结原则证明 $x_0 \neq 0$ 时,$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在 .

证 若 $x_0 \neq 0$,取$\{x'_n\}$为有理点列,$\lim\limits_{n \to \infty} x'_n = x_0$;取$\{x''_n\}$为无理点列,$\lim\limits_{n \to \infty} x''_n = x_0$.因为

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n) = \lim_{n \to \infty} x'^2_n = x_0^2,$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x''_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0,$$

于是由归结原则可知$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在 . □

例 2 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ -x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

若 $x_0 \neq 0$,用柯西准则的否定形式证明$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在 .$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$是否存在 ?

证 需证$\exists\, \varepsilon_0 > 0$, $\forall\, \delta, \exists\, x', x'' \in U^\circ(x_0)$,使得$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.当 $x_0 > 0$,取 $\varepsilon_0 = x_0$, $\forall\, \delta > 0$,取 $x', x'' \in U^\circ_+(x_0; \delta)$,使 x'为有理数, x''为无理数,此时

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - (-x'')| = x' + x'' > 2x_0 > \varepsilon_0 .$$

当 $x_0 < 0$,取 $\varepsilon_0 = |x_0|$, $\forall\, \delta > 0$,取 $x', x'' \in U^\circ_-(x_0; \delta)$,使 x'为无理数, x''为有理数,此时

$$|f(x') - f(x'')| = |-x' - x''| = -x' - x'' > 2|x_0| > \varepsilon_0 .$$

由此可知 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在 .

因为$|f(x)| \leq |x| \to 0 (x \to 0)$,所以$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. □

例 3 设 $f(x)$是$[a, b]$上严格递增函数,又若对 $x_n \in (a, b] (n = 1, 2, \cdots)$,有$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.证明

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a .$$

分析 因为 $f(x)$是$[a, b]$上的严格递增函数,所以存在反函数 f^{-1} .如果以为从$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$可以推得$\lim\limits_{n \to \infty} (f^{-1} \circ f)(x_n) = (f^{-1} \circ f)(a)$,因而$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$

$= a$,那就错了,这是因为 $f(x)$并非是$[a,b]$上的连续函数(第四章),因而不能断定 f^{-1}的连续性.本题证明应从反证法着手,由此可见数列极限的否定形式的正面陈述在证明题中的重要性.

证 用反证法,若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$,则$\exists\ \varepsilon_0 > 0$,$\exists\ \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$,使得

$$|x_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0 .$$

由 $x_{n_k} \geq a + \varepsilon_0$,和 $f(x)$的严格递增性,有

$$f(x_{n_k}) \geq f(a + \varepsilon_0) > f(a) .$$

因为$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$,于是对上式取 $k\to\infty$的极限后,得到 $f(a) \geq f(a+\varepsilon_0) > f(a)$,而这是不可能的.所以有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

例 4 设函数 $f(x)$在$[a,x_0)$上单调,则极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在的充要条件是 f 在$[a,x_0)$上有界.

分析 上述结论说明函数单侧极限的单调有界定理的条件不仅是充分而且是必要的,而它的必要性的证明是利用了单侧函数极限的局部有界性.

证 [必要性] 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在,则由函数极限的局部有界性,$\exists\ \delta_0 > 0$,$f(x)$在 $U_-^\circ(x_0;\delta_0)$内有界.而在$[a,x_0-\delta_0]$(不妨设 $a < x_0 - \delta_0$)上 $f(x)$是单调函数,于是$\forall\ x\in[a,x_0-\delta_0]$,$|f(x)| \leq \max\{|f(a)|,|f(x_0-\delta_0)|\}$,由此函数 f 在$[a,x_0)$上有界.

[充分性] 若函数 f 在$[a,x_0)$上有界,因为 f 在$[a,x_0)$上单调,由函数极限的单调有界定理,$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在. □

例 5 设 $f(x)$在点 x_0的邻域 $U^\circ(x_0)$内有定义.试证:若对任何满足下述条件的数列$\{x_n\}$,$x_n \in U^\circ(x_0)$,$x_n\to x_0$,

$$0 < |x_{n+1} - x_0| < |x_n - x_0|, \tag{3.12}$$

都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

分析 由归结原则可知:上述结论不仅是充分的,而且是必要的.本题可看作函数极限归结原则的加强形式,即子列$\{x_n\}$只要满足(3.12)的加强条件就可以了.注意下面证明中选子列的方法.

证 用反证法.若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$,则

$\exists\ \varepsilon_0 > 0$,$\forall\ \delta > 0$,$\exists\ x' \in U^\circ(x_0;\delta)$,使得$|f(x') - A| \geq \varepsilon_0$.取 $\delta_1 = 1$,$\exists\ x_1 \in U^\circ(x_0;\delta_1)$,使得$|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$;取 $\delta_2 = \min\left\{\dfrac{1}{2},|x_1 - x_0|\right\}$,$\exists\ x_2 \in U^\circ(x_0;\delta_2)$,使得$|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$;

…………

取 $\delta_n = \min\left\{\frac{1}{n}, |x_{n-1} - x_0|\right\}$，$\exists\ x_n \in U^\circ(x_0;\delta_n)$，使得 $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$；

…………

数列 $\{x_n\}$，满足 $0 < |x_{n+1} - x_0| < |x_n - x_0|$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，但 $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 相矛盾.所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 成立 . □

四、习题选解(教材上册第 55 页)

7. 证明:若 f 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,则 $f(x)\equiv 0$, $x\in\mathbf{R}$.

证　设 T 为 f 的周期 .因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,则 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ M > 0$, $\forall\ x > M$ 时, $|f(x)| < \varepsilon$. $\forall\ x_0 \in \mathbf{R}$, $\exists\ n\in\mathbf{N}_+$,使得 $x = x_0 + nT > M$.由函数 f 的周期性, $|f(x_0)| = |f(x_0 + nT)| = |f(x)| < \varepsilon$,令 $\varepsilon\to 0$,得 $f(x_0) = 0$,于是 $f(x)\equiv 0$, $\forall\ x\in\mathbf{R}$.

8. 证明定理 3.9 .

提示　充分性用反证法 .若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq A$,选出以 x_0 为极限的递减数列 $\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0)$,但 $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$, ε_0 为某正数 .

§4　两个重要的极限

一、内容提要

1°　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

2°　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{y\to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e}$.

二、释疑解惑

问题 1　为何不能直接利用不等式

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad(n\leq x<n+1),$$

其中令 $n\to\infty$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\mathrm{e}$ 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$?

答 不等式的两边是数列 $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$ 和 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,而中间项是函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$,这就不能利用函数极限的迫敛性来证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

为此需要定义两个阶梯函数:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n},\ n\leq x<n+1,\\ g(x)&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ n\leq x<n+1,\end{aligned}\right\}\quad n\in\mathbf{N}_{+}.$$

其中 $f(x)$ 递增有上界,$g(x)$ 递减有下界,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\mathrm{e}$.于是由

$$f(x)<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<g(x),$$

令 $x\to+\infty$,根据函数极限的迫敛性,证得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

注 若不用迫敛性,也可用 $\varepsilon-N$ 与 $\varepsilon-M$ 的方法由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\mathrm{e}$ 证得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$,这证明就留给读者.

三、范例解析

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

解 作变换 $y=x-\frac{\pi}{3}$,当 $x\to\frac{\pi}{3}$ 时,$y\to0$,于是有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}&=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{1-2\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)}\\&=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{1-\cos y+\sqrt{3}\sin y}\\&=\lim_{y\to0}\frac{1}{\frac{1-\cos y}{\sin y}+\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1}{\dfrac{2\sin^2 \dfrac{y}{2}}{2\sin \dfrac{y}{2} \cos \dfrac{y}{2}} + 3}$$

$$= \frac{1}{3}. \qquad \square$$

例 2 **求极限** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x + x_0)\tan(x - x_0) + \tan^2 x_0}{x^2}$, $x_0 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x + x_0)\tan(x - x_0) + \tan^2 x_0}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\tan^2 x - \tan^2 x_0}{1 - \tan^2 x \tan^2 x_0} + \tan^2 x_0}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x(1 - \tan^4 x_0)}{(1 - \tan^2 x \tan^2 x_0) x^2}$$

$$= (1 - \tan^4 x_0) \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - \tan^2 x \tan^2 x_0}$$

$$= (1 - \tan^4 x_0). \qquad \square$$

例 3 **求极限** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + n}{x - n}\right)^x$ (n **为正整数**).

解 $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + n}{x - n}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2n}{x - n}\right)^x.$$

作变换 $y = \dfrac{2n}{x - n}$, **当** $x \to \infty$ **时**, $y \to 0$, **于是**

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + n}{x - n}\right)^x = \lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{2n}{y} + n}$$

$$= \lim_{y \to 0} \left[(1 + y)^{\frac{1}{y}}\right]^{2n} \lim_{y \to 0} (1 + y)^n$$

$$= e^{2n}. \qquad \square$$

例 4 **试求下列极限**:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin x$;　　(3) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin x$;　　(5) $\lim\limits_{x \to -\infty} x \sin \dfrac{1}{x}$.

分析 **这几个极限不小心时容易混淆.把**(1)**误认为** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$; (2)**与**(4)**函**

数相同,但变量 x 的趋向不同;(3)与(5)也有类似的情况.注意变量的趋向是避免出错的关键.

解 (1) 由 $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$,可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

(2) 由 $|x\sin x| \leq |x|$,可得 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin x = 0$(也可按 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin x = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ 求得相同结果).

(3) 因为 $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$,所以 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

(4) 取 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \sin x_n = +\infty$,由归结原则, $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin x$ 不存在.

(5) 作变换 $y=\frac{1}{x}$,有 $y\to 0$,于是

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1. \qquad \square$$

例 5 设某种细菌繁殖的速度在合适的条件下与当时已有的数量 B_0 成正比,即 $V = kB_0$,其中 k 为比例常数,问经过时间 t 以后细菌数量为多少?

解 为了计算出时刻 t 时的细菌数量,先把时间间隔等分为 n 份 $\left[0, \frac{t}{n}\right]$, $\left[\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right]$, …, $\left[\frac{n-1}{n}t, t\right]$.由于繁殖过程可看作连续变化的,因此当 n 充分大时,在每个小区间中繁殖速度可近似看作常数.

在 $\left[0, \frac{t}{n}\right]$ 内细菌繁殖数量为 $kB_0\frac{t}{n}$,在这段时间末细菌数量为 $B_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)$;

在 $\left[\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right]$ 末细菌数量为 $B_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)^2$;

…………

在时间 t 时,细菌数量为 $B_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)^n$.

当 n 越来越大时,上述数量与实际的数量越来越接近.设 $\frac{1}{x}=\frac{kt}{n}$,有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} B_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)^n &= \lim_{x\to\infty} B_0\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ktx} \\ &= \lim_{x\to\infty} B_0\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{kt} \\ &= B_0 e^{kt}.\end{aligned}$$

由此可见,这类细菌的增长规律是符合于指数规律的． □

注　实际上,上述证明中应用了幂函数的连续性(见第四章)．

四、习题选解(教材上册第 58 页)

3．**证明**:$\lim\limits_{x\to 0}\ \lim\limits_{n\to\infty}\ \cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\quad = 1$．

提示　先利用 $2^{n+1}\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\cdot\sin\dfrac{x}{2^n} = \sin 2x$ 作化简,然后应用$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ 来证明．

§5　无穷小量与无穷大量

一、内容提要

1°　无穷小量:设 $f(x)$在某个邻域 $U^\circ(x_0)$内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$,则称 f 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量．

注 **1**　类似地可定义 $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, $x\to\pm\infty$, $x\to\infty$时的无穷小量.例如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$为 $x\to\infty$时的无穷小量．

注 **2**　关于无穷小量,必须要注意 x 的变化趋向,在自变量的同一变化过程中的无穷小量才能进行运算和比较．

性质 1．两个(相同类型)无穷小量之和、差、积仍为无穷小量．

性质 2．无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量．

性质 3．$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A\quad f(x) - A$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量．

性质 4．无穷小量与无穷大量的关系:若在自变量的同一变化过程中 $f(x)$为无穷小量, $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量,反之亦然．

2°　无穷小量的比较　设当 $x\to x_0$ 时, f 与 g 都为无穷小量．

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$,则称当 $x\to x_0$ 时 f 为 g 的高阶无穷小量,或称 g 为 f 的低阶无穷小量,记作

$$f(x) = o(g(x))\qquad (x\to x_0)．$$

(2) 若存在正数 K 和 L,使得在某个邻域 $U^\circ(x_0)$内有

$$0 < K\leq\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leq L,$$

则称 f 与 g 为当 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量.特别当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$ 时,f 与 g 必为当 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量.

若

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leq L,\ x\in \mathring{U}(x_0),$$

则记作

$$f(x)=O(g(x))\ (x\to x_0).$$

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 f 与 g 是当 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量,记作

$$f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0).$$

常用的等价无穷小量:$x\to 0$ 时,有

$$\begin{aligned}&\sin x\sim x, &&\tan x\sim x,\\ &\arcsin x\sim x, &&\arctan x\sim x,\\ &1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

(4) 乘积因子的等价无穷小量代换:

设函数 f,g,h 在 $\mathring{U}(x_0)$内有定义,且有

$$f(x)\sim g(x)\quad (x\to x_0).$$

(i) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=A$.

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=B$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=B$. (5.2)

(5) 若当 $x\to 0$ 时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=k\quad (0<|k|<+\infty),\tag{5.3}$$

则称 $f(x)$为对于无穷小量 x 的 $\boldsymbol{n}$ 阶无穷小量.

其中 $x\to x_0$ 也可改为 $x\to x_0^+,\ x_0^-,\ x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$.

3° 无穷大量 设函数 f 在 $\mathring{U}(x_0)$内有定义,统称下列情况中的 f 为当 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty \quad \forall\, G>0,\ \exists\, \delta>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)$时,$|f(x)|>G$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty \quad \forall\, G>0,\ \exists\, \delta>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)$时,$f(x)>G$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty \quad \forall\, G>0,\ \exists\, \delta>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0;\delta)$时,$f(x)<-G$.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty(\pm\infty) \quad \forall\, G>0,\ \exists\, N$,当 $n>N$ 时,$|a_n|>G\ \begin{pmatrix}a_n>G\\ a_n<-G\end{pmatrix}$.

其中 $x\to x_0$ 也可改为 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to\pm\infty$．

4° **无穷大量的比较** 设 f,g 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则称当 $x\to x_0$ 时 g 为 f 的高阶无穷大量．

由函数极限可知：若 $\varepsilon>0$，$A>0$，$c>1$，$a>1$，当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^A}{c^{\varepsilon x}}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^{\varepsilon}}=0\ . \tag{5.4}$$

于是当 $x\to+\infty$ 时，$c^{\varepsilon x}$ 为 x^A 的高阶无穷大量，x^{ε} 为 $\log_a x$ 的高阶无穷大量．

5° **曲线的渐近线** 若曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$，则

$$\begin{aligned}k&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\ \text{或}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\\ b&=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]\ (\text{或}\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx])\ .\end{aligned}\tag{5.5}$$

若函数 f 满足

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\ (\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty),$$

则 $f(x)$ 有垂直渐近线 $x=x_0$（或单侧垂直渐近线 $x=x_0$）．

柯西曾定义过，对无穷小量 x，若有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y}{x^{n-\varepsilon}}=0,\quad \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y}{x^{n+\varepsilon}}=\pm\infty,$$

则称 $y=f(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小，其中 ε 是任意小的正的常数．这定义接近于现在教材中所用的定义．

二、释疑解惑

问题 1 在本节教材例 2 中求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$$

时，为何用等价无穷小量代换 $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$ 会引出错误的结果？

答 由定理 3.12 可知，在求极限时，只有对极限式中相乘或相除的因式才能用等价无穷小量来替代．而在极限式的和、差运算中应用等价无穷小量代换时，经常会丢失高阶无穷小量，而引起错误的结果．

今后在微分学中由泰勒公式可知

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

这里 $o(x^3)$ 是比 x^3 高阶的无穷小量,于是

$$\tan x - \sin x = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3),$$

若随意地在原式中用 $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$ 作代换,将会不合理地舍弃了高阶无穷小量 $\frac{1}{2}x^3$,因而导致错误的结论 .

问题 2　怎样给出当 $x \to x_0$ 时的非无穷大量的正面陈述?

答　若 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大量,则其定义为

$\forall G > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0;\delta)$ 时,有 $|f(x)| > G$.

若 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的非无穷大量,则其定义为

$\exists G_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x' \in \mathring{U}(x_0;\delta)$,使得 $|f(x')| \leq G_0$.

作为上述非无穷大量的正面陈述的应用,可以证明:若 $f(x)$ 是 $\mathring{U}(x_0)$ 上当 $x \to x_0$ 时的非无穷大量,则存在常数 G_0 与各项互异的数列 $\{x_n\}$,虽 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,但 $|f(x_n)| \leq G_0$.这是因为,

取 $\delta_1 = 1, \exists x_1 \in \mathring{U}(x_0;\delta_1)$,使 $|f(x_1)| \leq G_0$,

取 $\delta_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, |x_1 - x_0|\right\}, \exists x_2 \in \mathring{U}(x_0;\delta_2)$,使 $|f(x_2)| \leq G_0$,

…………

取 $\delta_n = \min\left\{\frac{1}{n}, |x_{n-1} - x_0|\right\}, \exists x_n \in \mathring{U}(x_0;\delta_n)$,使 $|f(x_n)| \leq G_0$,

………… .

意即对 $x \to x_0$ 时的非无穷大量 $f(x)$,存在趋向于 x_0 的各项互不相同的数列 $\{x_n\}$,而 $\{f(x_n)\}$ 是有界的 .

三、范例解析

例 1　试确定 α 的值,使下列函数与 $(x-1)^\alpha$ 当 $x \to 1$ 时为同阶无穷小量:

(1) $x^3 - 3x + 2$;　(2) $\ln x$;　(3) $e^x - e$.

解　(1) 因为 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x-2)$,于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 3x + 2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2} = 3,$$

这样 $\alpha = 2$;

(2) 设 $y = x - 1$,当 $x \to 1$ 时,$y \to 0$,于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}} = 1,$$

这样 $\alpha = 1$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x}-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}e\cdot\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$(令 $y=x-1$)

$$=\lim_{y\to 0}e\cdot\frac{e^{y}-1}{y}\text{(令 }z=e^{y}-1\text{)}$$

$$=e\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}$$

$$=e\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}}$$

$$=e,$$

由此可见 $\alpha=1$. □

说明　解题中应用了复合求极限法

$$\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}=\lim_{u\to e}\ln u=1.$$

例 2　试确定 α的值,使下列函数与 $\frac{1}{x}^{\alpha}$ 当 $x\to\infty$时为同阶无穷小量:

(1) $\frac{x+1}{x^{4}+1}$;　(2) $x+1-\quad x$;　(3) $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

解　(1) 由

$$\lim_{x\to\infty}x^{3}\cdot\frac{x+1}{x^{4}+1}=1,$$

可知 $\alpha=3$.

(2) 因为 $x+1-\quad x=\frac{1}{x+1+\quad x}$, 于是

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}(\quad x+1-\quad x)=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x+1+\quad x}=\frac{1}{2},$$

这样 $\alpha=\frac{1}{2}$.

(3) 由于

$$\lim_{x\to\infty}x^{2}\cdot\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

因此 $\alpha=2$. □

例 3　证明当 $x\to 0$ 时,以下无穷小量

(1) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$,　　(2) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^{2}}}$,

对任何 n 都不与 $x^{n}(n>0)$是同阶无穷小量.

证　(1) " $n\in\mathbf{N}_{+}$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n\ln x}\quad \text{设 } x=\frac{1}{y}$$

$$=-\lim_{y\to+\infty}\frac{y^n}{\ln y}$$

$$=-\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln y}{y^n}}\qquad (\text{由}(5.4))$$

$$=-\infty,$$

于是$\frac{1}{\ln x}$当 $x\to 0^+$ 时与 $x^n(n>0)$不是同阶无穷小量.

(2) " $n\in\mathbf{N}_+$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}\qquad \text{设 } x=\frac{1}{y}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{y^n}{e^{y^2}}\qquad (\text{设 } y^2=y_1)$$

$$=\lim_{y_1\to+\infty}\frac{y_1^{\frac{n}{2}}}{e^{y_1}}\qquad (\text{由}(5.4))$$

$$=0,$$

于是 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 当 $x\to 0$ 时与 $x^n(n>0)$不是同阶无穷小量. □

注 本例说明:并非每个 $x\to 0$ 时的无穷小量都与某个 x^n 是同阶无穷小量.

例 4 若 $x\to x_0$ 时, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$都是无穷小量,且

$$f(x)=o(g(x)),\ g(x)\sim h(x),$$

则 $g(x)\sim[h(x)+f(x)]\quad(x\to x_0)$

证 因为 $f(x)=o(g(x))$, $g(x)\sim h(x)$, $(x\to x_0)$,于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,\ \lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}=1,$$

这样

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)+f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$=1+0$$

$$=1.$$

即

$$g(x)\sim[h(x)+f(x)](x\to x_0).$$ □

注 等价的两个无穷小量中某个量加上比它们高阶的无穷小量,仍不改变其等价性,这性质在无穷小量运算或比较时是有用的.

例 5 证明双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$有两条斜渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$.

证 由双曲线方程可解得 $x>0$ 时的两个分支:

$$y=f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ y=f_2(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

由(5.5)可求得

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}=\frac{b}{a},$$

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=-\frac{b}{a},$$

$$\begin{aligned}b_1&=\lim_{x\to+\infty}(f_1(x)-k_1x)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}(\sqrt{x^2-a^2}-x)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\\&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_2&=\lim_{x\to+\infty}(f_2(x)-k_2x)\\&=-\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-a^2}-x)\\&=0.\end{aligned}$$

于是当 $x\to+\infty$时 $y=f_1(x)$以 $y=\frac{b}{a}x$ 为斜渐近线,$y=f_2(x)$以 $y=-\frac{b}{a}x$ 为斜渐近线.同理,双曲线 $x<0$ 部分的两个分支为

$$y=f_3(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ y=f_4(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

可证当 $x\to-\infty$时 $y=f_3(x)$以 $y=-\frac{b}{a}x$ 为斜渐近线,$y=f_4(x)$以 $y=\frac{b}{a}x$ 为斜渐近线.由此可见双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 以 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 为其斜渐近线. □

四、习题选解(教材上册第 66 页)

7.证明:若 S 是无上界数集,则存在一递增数列$\{x_n\}\subset S$,使得 $x_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$.

证 因为 S 无上界,于是 $\forall M>0,\exists x'\in S$,使得 $x'>M$.

取 $M_1=1,\exists x_1\in S$,使 $x_1>M_1$,

取 $M_2 = x_1 + 2$, v $x_2 \in S$, 使 $x_2 > M_2$,

…………

取 $M_n = x_{n-1} + n$, v $x_n \in S$, 使 $x_n > M_n$,

…………

可见$\{x_n\}$为递增数列, 且 $x_n \to +\infty$.

总练习题提示与解答

(教材上册第 67 页)

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 3^-}(x-[x])$ $(=1)$; (2) $\lim\limits_{x\to 1^+}([x]+1)^{-1}$ $=\dfrac{1}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left((a+x)(b+x) - (a-x)(b-x)\right)$ $(=a+b)$;

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^2-a^2}$ $(=1)$; (5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{x^2-a^2}$ $(=-1)$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x - 1-x}{{}^3\,1+x - {}^3\,1-x}$ $=\dfrac{3}{2}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}$, m, n 为正整数 $=\dfrac{m-n}{2}$.

解 (7) 先设 $m\geq 2$, $n\geq 2$, m, n 为正整数. 作变换 $x=1+y$, 当 $x\to 1$ 时, $y\to 0$, 于是有

$$\lim_{x\to 1}\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{m}{1-(1+y)^m}-\frac{n}{1-(1+y)^n}$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{m}{\mathrm{C}_m^1 y+\mathrm{C}_m^2 y^2+\cdots+y^m}-\frac{n}{\mathrm{C}_n^1 y+\mathrm{C}_n^2 y^2+\cdots+y^n}$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{(m\mathrm{C}_n^1-n\mathrm{C}_m^1)y+(m\mathrm{C}_n^2-n\mathrm{C}_m^2)y^2+\cdots}{(\mathrm{C}_m^1 y+\mathrm{C}_m^2 y^2+\cdots+y^m)(\mathrm{C}_n^1 y+\mathrm{C}_n^2 y^2+\cdots+y^n)}$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{(m\mathrm{C}_n^2-n\mathrm{C}_n^2)y^2+(\cdots)y^3+\cdots}{(\mathrm{C}_m^1 y+\mathrm{C}_m^2 y^2+\cdots+y^m)(\mathrm{C}_n^1 y+\mathrm{C}_n^2 y^2+\cdots+y^n)}$$

$$=-\frac{m\mathrm{C}_n^2-n\mathrm{C}_m^2}{\mathrm{C}_m^1\mathrm{C}_n^1}$$

$$=\frac{m-n}{2}.$$

若 $m \geq 2, n = 1$ 时, 令 $1 - x = y$,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{1}{1 - x} \right) \\
&= -\lim_{y \to 0} \left(\frac{m}{\mathrm{C}_m^1 y + \mathrm{C}_m^2 y^2 + \cdots + y^m} - \frac{1}{y} \right) \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{\mathrm{C}_m^2 y^2 + \cdots + y^m}{(\mathrm{C}_m^1 y + \mathrm{C}_m^2 y^2 + \cdots + y^m) y} \\
&= \frac{\mathrm{C}_m^2}{\mathrm{C}_m^1} \\
&= \frac{m - 1}{2}.
\end{aligned}
$$

同理可证 $m = 1, n \geq 2$ 的情况. 若 $m = n = 1$, 易见极限为零. 于是当 m, n 为正整数时

$$
\lim_{x \to 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right) = \frac{m - n}{2}.
$$

2. 分别求出满足下述条件的常数 a 与 b:

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$;

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) = 0$;

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) = 0$.

解 (1) 因为

$$
\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b = \frac{(1 - a) x^2 - (a + b) x + (1 - b)}{x + 1},
$$

而

$$
\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0,
$$

所以 $(1 - a) = 0, a + b = 0$, 解得

$$
a = 1, b = -1,
$$

把 a, b 代入原式, 有

$$
\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - x + 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x + 1} = 0.
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 (1 - a^2) - (2ab + 1) x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x(1-a^2)-(2ab+1)+\frac{1-b^2}{x}}{-\quad 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+a+\frac{b}{x}},$$

为了使上述极限为零,必须有 $1-a^2=0, 2ab+1=0, -1+a\neq 0$,即 $a=-1, b=\frac{1}{2}$.

再把这组解代入原式,有

$$\lim_{x \to -\infty} \quad x^2-x+1+x-\frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3}{4}}{x^2-x+1-\quad x-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3}{4}\frac{1}{x}}{-\quad 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-1+\frac{1}{2x}}$$

$$=0,$$

于是 $a=-1, b=\frac{1}{2}$为所求常数 .

(3) 当 $x\to+\infty$时,类似于(2)中分析

$$\lim_{x \to +\infty} (\quad x^2-x+1-ax-b)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1-a^2)-(2ab+1)+\frac{1-b^2}{x}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+a+\frac{b}{x}},$$

为了使极限为零,必须有 $1-a^2=0, 2ab+1=0, 1+a\neq 0$,于是应取 $a=1, b=-\frac{1}{2}$,这时

$$\lim_{x \to +\infty} \quad x^2-x+1-x+\frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{4}}{x^2-x+1+\quad x-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{4}\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\quad 1-\frac{1}{2x}}$$

$$=0,$$

于是 $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$为所求常数.

3. **试分别举出符合下列要求的函数** f:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$**不存在**.

4. **试给出函数** f **的例子,使** $f(x)>0$ **恒成立,而在某一点** x_0 **处** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.**这与极限的局部保号性有矛盾吗**?

5. **设**$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{u\to A}g(u)=B$,**在何种条件下能由此推出**

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=B?$$

提示　当 $x\in U^\circ(a)$时 $f(x)\neq A$.

6. **设** $f(x)=x\cos x$.**试作数列**

(1) $\{x_n\}$**使得** $x_n\to\infty(n\to\infty)$, $f(x_n)\to 0(n\to\infty)$;

(2) $\{y_n\}$**使得** $y_n\to\infty(n\to\infty)$, $f(y_n)\to+\infty(n\to\infty)$;

(3) $\{z_n\}$**使得** $z_n\to\infty(n\to\infty)$, $f(z_n)\to-\infty(n\to\infty)$.

7. **证明:若数列**$\{a_n\}$**满足下列条件之一,则**$\{a_n\}$**是无穷大数列**:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=s>1(a_n\neq 0,n=1,2,\cdots)$.

解　(1) **取** $\varepsilon_0>0$,**使得** $r-\varepsilon_0>1$.**由**$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r$,**对** $\varepsilon_0>0$,$\exists N_0$, $n\geq N_0$ **时**,**有**

$$r-\varepsilon_0<\sqrt[n]{|a_n|},$$

即$|a_n|>(r-\varepsilon_0)^n$.**因为** $r-\varepsilon_0>1$,**所以**$\lim\limits_{n\to\infty}(r-\varepsilon_0)^n=+\infty$,**于是有**

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty,$$

即$\{a_n\}$**是无穷大数列**.

(2) **取** $\varepsilon_0>0$,**使得** $s-\varepsilon_0>1$,**因为**$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=s$,**于是**$\exists N_0$,$\forall n>N_0$,**有**

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|>s-\varepsilon_0\quad(k=N_0+1,\cdots,n).$$

把上面 $n-N_0$ **个不等式相乘有**

$$|a_{n+1}|>(s-\varepsilon_0)^{n-N_0}|a_{N_0}|.$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty.$$

8. **利用上题**(1)**的结论求极限**:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}(=+\infty)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}(=0)$.

9. **设** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$,**证明**:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty$;

(2) **若** $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,**则** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty$.

证 (1) **因为** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$,(**不妨设** $\forall n, a_n>0$),**所以** $\forall 2G>0, \exists N$, $\forall n>N, a_n>2G$. **当** $n>2N$ **时**, $n-N>\dfrac{n}{2}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)&\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}\\&>\frac{n-N}{n}2G\\&>\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}2G\\&=G,\end{aligned}$$

于是 $\forall G>0, \exists 2N$, $\forall n>2N$ **时**

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>G,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty.$$

(2) **因为** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$,**所以**

$\forall e^G>0, \exists N$, $\forall n>N$ **时**, $a_n>e^G$,**于是** $\ln a_n>G$,**即**

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=+\infty.$$

由(1)**便有**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=+\infty,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\ln(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n})=+\infty,$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty.$$

10. **利用上题结果求极限**:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}(=+\infty)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n}(=+\infty)$.

11. 设 f 为 $U^{\circ}_{-}(x_0)$内的递增函数,证明:若存在数列$\{x_n\}$　$U^{\circ}_{-}(x_0)$且 $x_n \to x_0\ (n\to\infty)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$,则有

$$f(x_0 - 0) = \sup_{x\in U^{\circ}_{-}(x_0)} f(x) = A.$$

证　设法证明$\sup\limits_{x\in U^{\circ}_{-}(x_0)} f(x) = A$.

(1) $\forall x\in U^{\circ}_{-}(x_0)$, $f(x)\leq A$.

先证$\forall n$, $f(x_n)\leq A$.选定 $x_{n_0}\in U^{\circ}_{-}(x_0)$,因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,对 $x_0 - x_{n_0} > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$, $x_{n_0} < x_n$,由 f 的递增性,有 $f(x_{n_0})\leq f(x_n)$,令 $n\to\infty$有 $f(x_{n_0})\leq A$.由于 n_0的任意性,有$\forall n$, $f(x_n)\leq A$.

$\forall x\in U^{\circ}_{-}(x_0)$,若$\exists i, j$ 使得$x_i\leq x\leq x_j$,由 f的递增性,$f(x_i)\leq f(x)\leq f(x_j)\leq A$.若$\forall j$, $x\leq x_j$,于是 $f(x)\leq f(x_j)\leq A$.

(2) $\forall \varepsilon>0$, $\exists x'\in U^{\circ}_{-}(x_0)$, $A-\varepsilon< f(x')$.

由$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$,$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$, $A - \varepsilon< f(x_n)\leq A$,取 $x' = x_{N+1}$,有 $A - \varepsilon< f(x')$.

由此可得$\sup\limits_{x\in U^{\circ}_{-}(x_0)} f(x) = A$.由函数极限的单调有界定理有 $f(x_0 - 0) = \sup\limits_{x\in U^{\circ}_{-}(x_0)} f(x) = A$.

12. 设函数 f在$(0, +\infty)$上满足方程 $f(2x) = f(x)$,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.证明:$f(x)\equiv A$, $x\in(0, +\infty)$.

证　$\forall x\in(0, +\infty)$, $f(x) = f(2x) = f(2^2 x) = \cdots = f(2^n x)$.因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,由归结原则有$\lim\limits_{n\to\infty} f(2^n x) = A$,于是 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(2^n x) = A$,即 $f(x)\equiv A$, $x\in(0, +\infty)$.

13. 设函数 f在$(0, +\infty)$上满足方程 $f(x^2) = f(x)$,且

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(1),$$

证明:$f(x)\equiv f(1)$, $x\in(0, +\infty)$.

提示　当 $x > 1$, $f(x^{2^n}) = f(x)$;当 $x < 1$, $f(x^{2^n}) = f(x)$.

14. 设函数 f定义在$(a, +\infty)$上,f在每一个有限区间(a, b)内有界,并满足$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = A$.证明:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = A.$$

证　先设 $A = 0$,由$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$,则$\forall \varepsilon> 0$, $\exists X_0$, $\forall x\geq X_0$, $|f(x+1) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.$\forall x\geq X_0$, $x = x_0 + n$,其中 $x_0\in[X_0, X_0 + 1]$, $n\in\mathbf{N}_+$,由

$f(x)$在$[X_0, X_0+1]$上的有界性,$\exists M>0$,$\forall x_0 \in [X_0, X_0+1]$,$|f(x_0)| \leq M$.于是由

$$|f(x_0+k+1)-f(x_0+k)|<\frac{\varepsilon}{2},\ k=0,1,2,\cdots$$

得到

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{f(x_0+n)}{x_0+n}\right| = \left|\frac{f(x_0+n)-f(x_0)}{x_0+n}+\frac{f(x_0)}{x_0+n}\right|$$

$$=\left|\frac{f(x_0+n)-f(x_0+n-1)+f(x_0+n-1)-\cdots+f(x_0+1)-f(x_0)}{x_0+n}+\frac{f(x_0)}{x_0+n}\right|$$

$$\leq \frac{|f(x_0+n)-f(x_0+n-1)|+\cdots+|f(x_0+1)-f(x_0)|}{x_0+n}+\frac{|f(x_0)|}{x_0+n}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{n}{x_0+n}+\frac{M}{x_0+n}.$$

当n充分大($n>N$)时,$\dfrac{M}{x_0+n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$,于是当$x>X_0+N+1$时,$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon$,即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

若$A\neq 0$,作辅助函数$F(x)=f(x)-Ax$.由于

$$\lim_{x\to+\infty}(F(x+1)-F(x))=\lim_{x\to+\infty}[(f(x+1)-f(x))-A]=0,$$

且$|F(x)|\leq|f(x)|+|Ax|$,故F在任何区间(a,b)内有界.于是由上面结论

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0,$$

即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$

第二章测试题

(A)

1. 试按定义验证:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=1.$$

2. 写出函数极限$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$的定义,并按此验证:当$a>1$时,

$$\lim_{x\to-\infty}a^{-x}=+\infty.$$

3．求极限

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right).$$

4．求极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{\sqrt[3]{1-\cos x^3}}.$$

5．举例说明下面关于 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的定义是不正确的:对于任意 $\delta>0$,存在 $\varepsilon>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,便有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

6．证明: $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $U^\circ(0)$ 内无界,但 $x\to 0$ 时不是无穷大量.

7．设对任意正整数 n, A_n 是$[0,1]$中某些数的有限集,且当 $m\neq n$ 时 $A_n\cap A_m=\varnothing$,定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x\in A_n\ (n=1,2,\cdots),\\ 0, & x\notin\bigcup\limits_{k\geq 1}A_k.\end{cases}$$

证明对所有$[0,1]$中的 a, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

(B)

1．按定义验证:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{2}.$$

2．写出函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$ 的定义,并验证

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$$

3．求极限:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+\beta_1)\cdots(x+\beta_n)}-x\right].$$

4．求极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}.$$

5．证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

6. 设 $f(t)$为 $t\to t_0$时的无穷大量, $P(x)$与 $Q(x)$是多项式:

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0,$$

$$Q(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,\quad b_m\neq 0,$$

则当 $t\to t_0$时,

$$P(f(t))+Q(f(t))\sim\begin{cases} a_n(f(t))^n, & n>m,\\ (a_n+b_n)(f(t))^n, & n=m,\\ b_m(f(t))^m, & n<m.\end{cases}$$

7. 设 $f(x)\sim x\ (x\to 0)$, $a>0$.

(1) 证明等式 $a=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2i-1}{n^2}a$;

(2) 若 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{2i-1}{n^2}a\right)$,试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

第四章　函数的连续性

§1　连续性概念

一、内容提要

1° **函数在一点的连续性**　若函数 f 在某个 $U(x_0)$ 内有定义，

f 在点 x_0 连续　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$

$\forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta>0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

若 f 在某个 $U_+(x_0)$ 内有定义，

f 在点 x_0 右连续　$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，或 $f(x_0+0) = f(x_0)$.

若 f 在某个 $U_-(x_0)$ 内有定义，

f 在点 x_0 左连续　$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，或 $f(x_0-0) = f(x_0)$.

f 在点 x_0 连续　f 在点 x_0 左、右连续.

2° **间断点及其分类**　若函数 f 在某个 $U^\circ(x_0)$ 内有定义，若 f 在点 x_0 无定义，或 f 在点 x_0 有定义而不连续，则称点 x_0 为函数 f 的间断点.

第一类间断点
1. 可去间断点：$f(x_0-0) = f(x_0+0) = A$，f 在点 x_0 无定义，或有定义但 $f(x_0)\neq A$.
2. 跳跃间断点：$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$.

第二类间断点 $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 中至少有一个不存在.

历史上相当长一段时间内，人们对连续函数是从几何直观上理解的，即连续函数的图像是一条连绵不断的曲线.

捷克数学家波尔察诺第一次明确地指出连续观念的基础存在于极限概念之中.函数如果对于一个区间内的任一 x 值，和无论是正的或负的充分小的 Δx，差 $f(x+\Delta x) - f(x)$ 的绝对值始终小于任一给定的量时，他定义这个函数在这

个区间内为连续.

魏尔斯特拉斯对 $f(x)$在 x_0为连续的定义:若对一个任意正数 ε,可以求出包含 x_0的一个区间,使得对这个区间中所有值,差 $f(x)-f(x_0)$的绝对值小于 ε.

海涅听了魏尔斯特拉斯的课后,提出可以把定义修改为:若对已给的任一 ε,可以求到一个 η_0,使得对 $\eta<\eta_0$,差 $f(x\pm\eta)-f(x)$的绝对值小于 ε.这与现在分析教程中关于连续性的 ε-δ定义已经很接近.

二、释疑解惑

问题 1 设函数 f在某邻域 $U(x_0)$内有定义,若对一列数 $\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$,存在 $\delta_n>0$,当 $|x-x_0|<\delta_n$时,$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_n$,试问是否能断定 $f(x)$在点 x_0连续?

答 在这种情况下,可以断定 $f(x)$在点 x_0处连续,这是因为:

$\forall\varepsilon>0,\exists N$, $n\geq N$ 时,$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$;

对$\frac{1}{2^N}$,$\exists\delta_N>0$,当$|x-x_0|<\delta_N$,$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2^N}$;

于是

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(=\delta_N)>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

注 上面先由 ε找到 N,再由 N找到δ的方法,其中 N是起了中间桥梁作用,读者应当注意这种分析技巧.条件中$\frac{1}{2^n}$可以用一列ε_n代替,$\varepsilon_n>0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

问题 2 若 $f(x)$在某个邻域 $U(x_0)$内有定义,如何给出 $f(x)$在点 x_0不连续的正面陈述?

答 若 $f(x)$在点 x_0处不连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,或者$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在但不等于 $f(x_0)$.其正面陈述分别为:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在 $\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x''\in U^\circ(x_0;\delta)$,使得

$$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0;\tag{1.1}$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ $\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x'\in U^\circ(x_0;\delta)$,使得

$$|f(x')-f(x_0)|\geq\varepsilon_0.\tag{1.2}$$

例如狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

$\forall x_0 \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$不存在,于是在任意点 x_0 处, $D(x)$不连续.

又如黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\ (p, q\in\mathbf{N}_+,\ p, q\ \text{互质}),\\ 0, & \text{当 } x=0,1\ \text{与}(0,1)\text{中无理数}.\end{cases}$$

在第三章§1习题8中已证得 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$,于是当 x_0 为0,1和(0,1)内无理数时,黎曼函数在这些点处连续;而当 x_0 为(0,1)中有理数时, $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)\neq R(x_0)$,即(0,1)中有理点是黎曼函数的不连续点.这也可直接用(1.2)验证如下:

对 $x_0=\dfrac{p}{q}$, $\exists\ \varepsilon_0=\dfrac{1}{q}$, $\forall\ \delta>0$,取 $\mathring{U}(x_0;\delta)$中无理点 x',

$$|f(x')-f(x_0)|=\left|0-\frac{1}{q}\right|=\varepsilon_0,$$

于是由(1.2), $R(x)$在 $x_0=\dfrac{p}{q}$处不连续.

三、范例解析

例1 用 ε-δ 方法验证下列函数的连续性:

(1) $y=x^2$; (2) $y=\sqrt[3]{x}$.

解 (1) 若 $x_0=0$, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta=\sqrt{\varepsilon}$,当 $|x|<\delta$ 时, $|x^2|<\varepsilon$.若 $x_0\neq 0$,先限定 $|x-x_0|<\dfrac{|x_0|}{2}$,为了使

$$|x^2-x_0^2|=|x-x_0||x+x_0|\le|x-x_0|\frac{3|x_0|}{2}<\varepsilon,$$

只要取 $\delta=\min\left\{\dfrac{|x_0|}{2},\dfrac{2\varepsilon}{3|x_0|}\right\}$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,便有

$$|x^2-x_0^2|<\varepsilon.$$

(2) 若 $x_0=0$, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta=\varepsilon^3$,则当 $|x|<\delta$ 时, $|\sqrt[3]{x}|<\varepsilon$.若 $x_0\neq 0$,先限定 $|x-x_0|<\dfrac{|x_0|}{2}$,这时 x 与 x_0 同号,即 $\sqrt[3]{xx_0}>0$,于是

$$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xx_0}+\sqrt[3]{x_0^2}}\le\frac{|x-x_0|}{\sqrt[3]{x_0^2}}.$$

为了使 $|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|<\varepsilon$,只需取

$$\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\sqrt[3]{x_0^2}\,\varepsilon\right\},$$

当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| < \varepsilon$. □

例 2 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在 $x_0 = 0$ 处连续，但是在 $x_0 \neq 0$ 处不连续 .

证 $x_0 = 0$ 时，因为 $0 \leq |f(x)| \leq |x|^3$，于是 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$，即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续 .

$x_0 > 0$ 时，$\exists\, \varepsilon_0 = \dfrac{x_0^3}{2}$，$\forall\, \delta > 0$，在 $\mathring{U}_+(x_0; \delta)$ 中取 x' 为有理数，取 x'' 为无理数，于是

$$|f(x') - f(x'')| = x'^3 > \frac{1}{2} x_0^3 = \varepsilon_0 .$$

由函数极限柯西准则的否定形式可知 $f(x)$ 在点 x_0 处极限不存在，这样 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续 . $x_0 < 0$ 时可类似地证明 . □

例 3 讨论函数

$$f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$$

的间断点 .

解 可能的间断点为 $x = 0$，$x = \pm 1$.因为

$$\lim_{x \to \pm 1} \frac{1}{\ln|x|} = \infty,$$

所以 $x = \pm 1$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点 .

由于 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(0)$ 内有定义，而

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln|x|} = 0,$$

因此 $x = 0$ 是函数的可去间断点 . □

说明 到本章§3 时可知这函数在其余各点都连续 .

例 4 讨论函数

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

的间断点 .

分析 函数 $\sin \dfrac{\pi}{x}$ 在 $\mathring{U}(0)$ 内有定义，当 $x \to 0$ 时函数无限次改变符号，因而 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 能交替取值 1 或 -1，即 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在，于是 $x_0 = 0$ 为可能的间断点 .

又因为函数 $\operatorname{sgn} u$ 以 $u=0$ 为间断点,所以若 $\sin\frac{\pi}{x}$ 在某点 x_0 附近不断地改变函数值的符号时,则复合函数 $\operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{x}$ 可能具有间断点 x_0,因而可推测到 $x_k=\frac{1}{k}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 也是函数的可能间断点.具体判别时应当验证各点的极限.

解　设 $x_k=\frac{1}{k}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,当 k 为偶数时

$$f(x_k+0)=\lim_{x\to x_k^+}\operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{x}=-1,$$

$$f(x_k-0)=\lim_{x\to x_k^-}\operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{x}=1;$$

当 k 为奇数时

$$f(x_k+0)=\lim_{x\to x_k^+}\operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{x}=1,$$

$$f(x_k-0)=\lim_{x\to x_k^-}\operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{x}=-1;$$

即 $x_k=\frac{1}{k}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为跳跃间断点.

再考虑 $x_0=0$.这时 $\exists\ \varepsilon_0=1$, $\forall\ \delta>0$, $\exists\ n$,满足 $\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\delta$, $\frac{1}{n+\frac{3}{2}}<\delta$,取 $x'=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$, $x''=\frac{1}{n+\frac{3}{2}}$,有

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\operatorname{sgn}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-\operatorname{sgn}\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi\right|=2>\varepsilon_0,$$

由函数极限的柯西准则的否定形式,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在,于是 $x_0=0$ 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点. □

例 5　设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义,且函数 $e^x f(x)$ 与 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内是递增的,试证 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续.

分析　需证 $\forall\ x_0\in(0,1)$, $f(x)$ 在点 x_0 连续,即 $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$.因为 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内的递增性保证了 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内是递减的,所以为了证明 $f(x_0+0)$ 的存在性,很自然地想到利用函数极限的单调有界定理.

证　因为 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内递增,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内递减.$\forall\ x_0\in(0,1)$,首先来证明 $f(x_0+0)=f(x_0)$.当 $x>x_0$ 时,$f(x)\le f(x_0)$,由函数极限的单调

有界定理 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在.又由函数极限保不等式性质,有

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\leq f(x_0).$$

另外,由于 $e^x f(x)$在$(0,1)$内递增,因此当 $x>x_0$时,

$$e^{x_0} f(x_0)\leq e^x f(x),$$

令 $x\to x_0^+$,有

$$e^{x_0} f(x_0)\leq e^{x_0} f(x_0+0),$$

即 $f(x_0)\leq f(x_0+0)$,这样 $f(x_0)=f(x_0+0)$.

同理可证 $f(x_0-0)=f(x_0)$,由 x_0在$(0,1)$中的任意性,可得 $f(x)$在$(0,1)$内连续. □

说明　其中应用了基本初等函数 e^x 的连续性.

四、习题选解(教材上册第 73 页)

7. 设函数 f 只有可去间断点,定义

$$g(x)=\lim_{y\to x} f(y),$$

证明 g 为连续函数.

证　因为 $g(x_0)=\lim\limits_{y\to x_0} f(y)$,于是

$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当 $0<|y-x_0|<\delta$ 时, $|f(y)-g(x_0)|<\varepsilon$. $\forall\ x$, $0<|x-x_0|<\delta$,在上述不等式中令 $y\to x$,由于函数 f 只有可去间断点,因此$\lim\limits_{y\to x}f(y)$存在,即有

$$|g(x)-g(x_0)|\leq\varepsilon.$$

于是$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,$|g(x)-g(x_0)|\leq\varepsilon$,这样 $g(x)$在 $x=x_0$处连续,由 x_0的任意性, $g(x)$为连续函数.

§2　连续函数的性质

一、内容提要

1° 连续函数的局部性质

(1) 局部有界性　若函数 f 在点 x_0 连续,则 f 在某邻域 $U(x_0)$内有界.

(2) 局部保号性　若函数 f 在点 x_0 连续,且 $f(x_0)>0$(或<0),则对任何正数 $r<f(x_0)$(或 $-r>f(x_0)$),存在某 $U(x_0)$,使得对一切 $x\in U(x_0)$,有

$$f(x)>r(\text{或 } f(x)<-r).$$

(3) 四则运算　若函数 f 和 g 在点 x_0 连续,则 $f\pm g, f\cdot g, \frac{f}{g}(g(x_0)\neq 0)$ 也都在点 x_0 连续 .

(4) 复合函数的连续性　若函数 f 在点 x_0 连续, g 在点 u_0 连续, $u_0 = f(x_0)$,则

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0)) \tag{2.1}$$

(5) 公式(2.1)的推广形式　当点 x_0 为内函数 f 的可去间断点时, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$,且外函数 g 在 $u = a$ 处连续,则

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) .$$

(上式对 $x\to +\infty$, $x\to -\infty$, $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$ 同样成立) .

2°　闭区间上连续函数的整体性质

数学分析课程中主要的研究对象是连续函数,很自然地,闭区间上连续函数的整体性质在微积分理论分析中具有相当的重要性 .

(1) 有界性定理和最大、最小值定理:若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则 f 在 $[a, b]$ 上有界,并取到最大、最小值 .闭区间上连续函数的有界性在许多理论证明中经常用到 .最大、最小值定理是微分学中证明达布定理的基本工具 .

(2) 介值定理和根的存在定理:若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,则存在一点 $x_0\in(a, b)$,使得 $f(x_0) = 0$.这就是根的存在定理,介值定理是根的存在定理的推广 .这两个定理是讨论函数方程 $f(x) = 0$ 的根的重要工具,计算数学中的二分法就是根据它们的证明方法而得到的求函数方程 $f(x) = 0$ 的根的有效程序 .

(3) 反函数的连续性定理:若函数 f 在 $[a, b]$ 上严格单调并连续,则反函数 f^{-1} 在其定义域 $[f(a), f(b)]$ 或 $[f(b), f(a)]$ 上连续 .在多元函数微分学中有相应的反函数定理,它是向量值函数微分学的基本定理,并成为流形上微积分学和近代微分几何学的基础 .

(4) 一致连续性定理:若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则 f 在 $[a, b]$ 上一致连续,即 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$,使得对任何 $x', x''\in[a, b]$,只要 $|x' - x''| < \delta$,就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

一致连续性中的 δ 是对整个区间 $[a, b]$ 适用的,因而是区间 $[a, b]$ 上的整体性质,它是数学分析的一个难点,读者应当通过实例体会一致连续性与不一致连续性的差别,并从例题和练习中总结证明一致连续性的方法 .

在定积分理论中闭区间上连续函数必定可积就是用一致连续性来证明的;含参量正常积分中的连续性定理也是用闭长方形区域上连续函数的一致连续性来证明的 .

闭区间上连续函数的整体性质需要通过实数系的完备性理论来证明.

二、释疑解惑

问题1 若函数 f 在开区间 (a,b) 内一致连续,为何由此可推得 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 存在?

答 函数 f 在 (a,b) 内的一致连续性是 f 在 (a,b) 内的整体性质,即

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0, \forall x', x''\in(a,b)$, 当 $|x'-x''|<\delta$ 时,

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

特别当 $x', x''\in U_+^\circ(a;\delta)$ 时, 有 $|x'-x''|<\delta$, 于是亦有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.而这就是函数 f 当 $x\to a^+$ 时存在极限的柯西准则条件,于是 $f(a+0)$ 存在.同理 $f(b-0)$ 也存在.

这样就从函数 f 在 (a,b) 内一致连续性推得了 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 都存在.

若定义 $[a,b]$ 上的函数 $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b-0), & x=b,\end{cases}$$

则因 $\lim\limits_{x\to a+}F(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)=f(a+0)=F(a)$, $\lim\limits_{x\to b-}F(x)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)=f(b-0)=F(b)$,故 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数,即 (a,b) 内的一致连续函数 f 可以延拓成 $[a,b]$ 上的连续函数 F.从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,在 (a,b) 内亦有界,而在 (a,b) 内 $F(x)=f(x)$,所以在 (a,b) 内一致连续的函数必在 (a,b) 内有界.

注 函数极限的柯西准则是函数在某点邻域中满足的局部性质,但一致连续性是区间 I 上函数的整体性质,应当注意两者的区别和联系.

问题2 试总结证明函数为一致连续的常用方法.

答 通常有以下一些方法:

(1) 按一致连续性定义验证;

(2) 若函数 f 在区间上满足李普希茨条件,则 f 必在该区间上一致连续(见本节习题14);

(3) 应用一致连续性定理;

(4) 设区间 I_1 的右端点 $c\in I_1$,区间 I_2 的左端点 $c\in I_2$,若函数 f 在 I_1, I_2 上都一致连续,则 f 在 $I=I_1\cup I_2$ 上一致连续.

(5) 开区间 (a,b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续的充要条件为 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 都存在.例如, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 为 $(0,1)$ 内的一致连续函数,这是因为

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$与$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sin x}{x}=\sin 1$都存在.

问题 3　试给出区间 I 上的函数 $f(x)$不一致连续的正面陈述.

答　函数 f 在区间 I 上不一致连续:$\exists\ \varepsilon_0>0$, $\forall\ \delta>0$, $\exists\ x', x''\in I$,满足 $|x'-x''|<\delta$,但是

$$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0 .$$

三、范例解析

例 1　试证函数 $y=\sin x^2$,在$[0,+\infty)$上是不一致连续的.

分析　需确定 $\varepsilon_0>0$, $\forall\ \delta>0$,可找到 x', x''满足$|x'-x''|<\delta$,但$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$.

由于 $\sin x^2$ 在任意闭区间$[0,a]$ $(a>0)$上一致连续,因此当 δ很小时,必须在 $U(+\infty)$中寻找 x', x'',这是证明中的困难之处.现不妨取 $x'=\quad n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $x''=\quad n\pi$,

$$0<x'-x''=\quad n\pi+\frac{\pi}{2}-\quad n\pi=\frac{\frac{\pi}{2}}{\quad n\pi+\frac{\pi}{2}+\quad n\pi}<\frac{1}{2}\quad\frac{\pi}{n},$$

当 n 充分大时, x', x''能满足$|x'-x''|<\delta$,但$|f(x')-f(x'')|\geq 1$.

证　$\exists\ \varepsilon_0=1$, $\forall\ \delta>0$,取 $x'=\quad n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $x''=\quad n\pi$,当 $n>\dfrac{\pi}{4\delta^2}$时,使 $|x'-x''|<\delta$,但$|\sin x'^2-\sin x''^2|=1\geq\varepsilon_0$,即 $\sin x^2$ 在$[0,+\infty)$上不一致连续. □

例 2　设函数 $f(x)$在(a,b)内连续,且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=0$,证明 $f(x)$在(a,b)内有最大值或最小值.

分析　因为$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=0$,于是可把 $f(x)$延拓成$[a,b]$上的连续函数,然后可以应用连续函数的最大、最小值定理.

证　先把函数 $f(x)$延拓成$[a,b]$上的函数 $F(x)$,设

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b),\\ 0, & x=a,b.\end{cases}$$

易知 $F(x)$为$[a,b]$上的连续函数,这是因为

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=0=F(a),$$
$$\lim_{x\to b^-}F(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=0=F(b).$$

在$[a,b]$上对 $F(x)$应用连续函数的最大、最小值定理,即$\exists\ \xi_1,\xi_2\in[a,b]$,$F(x)$在 ξ_1,ξ_2 分别取得最大值和最小值.若 $\xi_1=a,\xi_2=b$,则 $f(x)$在(a,b)内恒为零,显然 $f(x)$在(a,b)内同样能取得最大值和最小值;若 ξ_1,ξ_2 中有一个数在(a,b)内,则 $f(x)$在(a,b)内取得最大值或最小值. □

例 3 证明:若在有限区间(a,b)内单调有界函数 $f(x)$是连续的,则此函数在(a,b)内是一致连续的.

分析 因为 $f(x)$是(a,b)内的单调有界函数,所以由函数极限的单调有界定理,可得存在 $f(a+0)$,$f(b-0)$.证明本题的合理途径是把 $f(x)$延拓成闭区间$[a,b]$上的连续函数 $F(x)$,然后对 $F(x)$在$[a,b]$上应用一致连续性定理.

证 因为 $f(x)$是(a,b)内的单调有界函数,由函数极限的单调有界定理,$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$都存在,应用范例 1 中的方法,可把 $f(x)$延拓为$[a,b]$上的连续函数 $F(x)$,即

$$F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x), & x=b.\end{cases}$$

由一致连续性定理,可得 $F(x)$在$[a,b]$上一致连续,于是 $f(x)$为(a,b)内的一致连续函数. □

例 4 若函数 f是区间 I 上的一一对应的连续函数,则 f 是 I 上的严格单调函数.

分析 若 f 不是严格单调的,则必有 $x_1<x_2<x_3$,$f(x_1)>f(x_2)$,$f(x_3)>f(x_2)$,(或 $f(x_1)<f(x_2)$,$f(x_3)<f(x_2)$),这时如图 4 - 1 所示,取适当的 μ,作平行于 x 轴的直线 $y=\mu$,与 $y=f(x)$有两个交点$(\xi_1,f(\xi_1))$,$(\xi_2,f(\xi_2))$,这与 f是一一对应相矛盾.

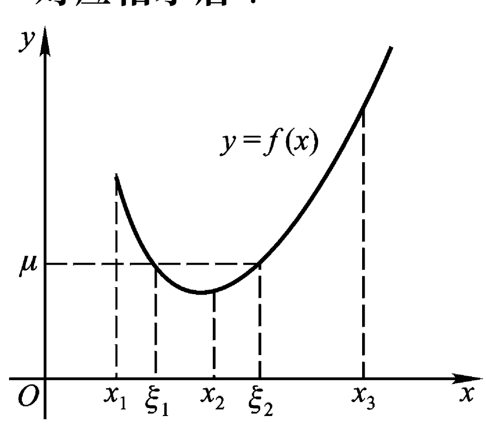


图 4 - 1

证　用反证法,若 f 在 I 上不是严格单调的,则必 $\exists\ x_1, x_2, x_3$,满足 $x_1 < x_2 < x_3$,

$$(f(x_1) - f(x_2))(f(x_2) - f(x_3)) < 0 .$$

不妨设 $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) < f(x_3)$ 取满足下列条件的实数 μ:

$$f(x_2) < \mu < \min\{f(x_1), f(x_3)\} .$$

分别在区间 $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ 上应用连续函数的介值定理, $\exists\ \xi_1, \xi_2$ 满足 $x_1 < \xi_1 < x_2$, $x_2 < \xi_2 < x_3$,使得

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = \mu,$$

这与 f 是一一对应相矛盾 . □

注　我们知道一一对应的函数一般不一定是严格单调的,但是对于连续函数而言,严格单调的充要条件是一一对应的 .

例 5　函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上,试证 $f(x)$ 在 I 上一致连续的充要条件为:对任何数列 $\{x_n'\}, \{x_n''\} \subset I$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$,则

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n'')) = 0 .$$

证　[必要性]　若 $f(x)$ 在 I 上一致连续,则

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall\ x', x'' \in I$, $|x' - x''| < \delta$,则 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.设 I 上两个数列 $\{x_n'\}$, $\{x_n''\}$,满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$,于是对上述 $\delta > 0$, $\exists\ N > 0$, $\forall\ n > N$, $|x_n' - x_n''| < \delta$,由一致连续性条件,有

$$|f(x_n') - f(x_n'')| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n'')) = 0 .$$

[充分性]　设对 I 上任意两个数列 $\{x_n'\}$ 与 $\{x_n''\}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n'')) = 0$ 现证 $f(x)$ 在 I 上一致连续 .

用反证法 若 $f(x)$ 在 I 上不一致连续,则

$\exists\ \varepsilon_0 > 0$, $\forall\ \delta > 0$, $\exists\ x', x''$,满足 $|x' - x''| < \delta$,但有 $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.

取 $\delta_1 = 1$, $\exists\ x_1', x_1'' \in I$, $|x_1' - x_1''| < 1$,有 $|f(x_1') - f(x_1'')| \geq \varepsilon_0$,

取 $\delta_2 = \dfrac{1}{2}$, $\exists\ x_2', x_2'' \in I$, $|x_2' - x_2''| < \dfrac{1}{2}$,有 $|f(x_2') - f(x_2'')| \geq \varepsilon_0$,

…………

取 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $\exists\ x_n', x_n'' \in I$, $|x_n' - x_n''| < \dfrac{1}{n}$,有 $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0$,

…………

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$,但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n'')) \neq 0$,与所设条件矛盾 .所以

$f(x)$在 I 上一致连续． □

注 在充分性证明中由 $f(x)$在 I 上不一致连续的正面陈述，取一列 $\delta_n \to 0$，选出两个数列$\{x_n'\}$，$\{x_n''\}$，这种方法是有用的分析技巧．

四、习题选解（教材上册第 81 页）

6．设 f 在$[a, +\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$存在．证明：$f$ 在$[a, +\infty)$上有界．又问 f 在$[a, +\infty)$上必有最大值或最小值吗？

提示 利用函数极限的局部有界性和连续函数有界性定理可证 f 在$[a, +\infty)$上有界．若$\exists x_0 \in [a, +\infty)$，使得 $f(x_0) = B > A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$，设法证明 $\exists X$，$\forall x > X$，$f(x) < \dfrac{B+A}{2}$，再证$[a, X]$上 f 的最大值必为 f 在$[a, +\infty)$上的最大值．同理可证若$\exists x_0 \in [a, +\infty)$，$f(x_0) < A$ 时，f 必在$[a, +\infty)$上取到最小值．

10．证明：任一实系数奇次方程至少有一个实根．

证 设方程为

$$f(x) = x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n+1} = 0,$$

其中 $a_k(k = 1, 2, \cdots, 2n+1)$为实数．试利用 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$，证明$\exists X > 0$，$f(-X) < 0$，$f(X) > 0$．

16．设函数 f 满足第 6 题的条件．证明 f 在$[a, +\infty)$上一致连续．

证 因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，于是由函数极限的柯西准则，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X$，$\forall x'$，$x'' > X$，$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$．

在$[a, X+1]$上应用一致连续性定理，有

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$，$\forall x'$，$x'' \in [a, X+1]$，$|x' - x''| < \delta_1$ 时，

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$，现证$\forall x'$，$x'' \in [a, +\infty)$，$|x' - x''| < \delta$ 时，有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

分三种情况：

(1) 当 x'，$x'' \in [a, X]$，且$|x' - x''| < \delta$ 时，由(2.2)$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$．

(2) 当 $x' \in [a, X]$，$x'' \in (X, +\infty)$，$|x' - x''| < \delta$ 时，则 $x'' \in [a, X+1]$，由(2.2)，也有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$．

(3) 当 x'，$x'' \in (X, +\infty)$，$|x' - x''| < \delta$ 时，同样有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$．

这样，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta(\varepsilon) > 0$，$\forall x'$，$x'' \in [a, +\infty)$，$|x' - x''| < \delta$ 时，总有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

即 f 在$[a, +\infty)$上一致连续．

§3 初等函数的连续性

一、内容提要

1° **指数函数的连续性** 在初等数学中指数函数 a^x 当 x 为有理数时已有定义,利用确界原理可以将 a^x 的定义域扩充到 x 为任何实数的情况:

$$a^x = \sup_{r<x}\{a^r \mid r\text{ 为有理数}\} \quad (a>1),$$

$$a^x = \inf_{r<x}\{a^r \mid r\text{ 为有理数}\} \quad (0<a<1).$$

这样定义的实数指数函数同样有如下运算法则:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \qquad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}. \tag{3.1}$$

(1) 指数函数 $a^x(a>0, a\neq 1)$在 $\mathbf{R}$ 上连续,且满足

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad (a>1);$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad (0<a<1).$$

(2) 对数函数 $\log_a x$ 在其定义域$(0, +\infty)$内也连续,且

$$\lim_{x\to0^+}\log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\log_a x = +\infty \quad (a>1);$$

$$\lim_{x\to0^+}\log_a x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\log_a x = -\infty \quad (0<a<1).$$

2° **指数函数的连续性在求极限中的应用**

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$,则

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b. \tag{3.2}$$

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$,则

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{v_n} = a^b. \tag{3.3}$$

3° **初等函数的连续性**

一切基本初等函数都是其定义域上的连续函数,任何初等函数都是在其定义区间上的连续函数.

二、释疑解惑

问题 为什么说“初等函数是其定义区间上的连续函数”,而不叙述为“初等函数是其定义域上的连续函数?

答 这是因为初等函数的定义域中可能包含某些“孤立”的点.例如,函数

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$$

是初等函数,其定义域为两点 $x_0 = \pm1$,在这些点的空心邻域中函数没有定义,

这里无法讨论极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. 但在更一般的意义下,用 ε-δ 方式定义的连续性可以容纳孤立点作为连续点(教材下册第 100 页).

三、范例解析

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$($\alpha$ 为实数).

分析 设法利用 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 求上述极限.

若 α 为有理数 $\left(\alpha=\frac{p}{q},\ p,q \text{ 为互质整数},\ q>0\right)$,可以用极限运算法则求极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{p}{q}x\right)^{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{p}{q}x\right)^{\frac{q}{px}}\right]^{\frac{p}{q}}\\ &= \lim_{x\to 0}\sqrt[q]{\underbrace{\left(1+\frac{p}{q}x\right)^{\frac{q}{px}}\cdots\left(1+\frac{p}{q}x\right)^{\frac{q}{px}}}_{(p\text{个})}}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

若 α 为无理数,则无法用上述方法. 但可以用公式(3.2)求极限(即应用指数函数的连续性),这是因为当 $\alpha\neq 0$ 时,

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^{\alpha},$$

其中 $u(x)=(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}$, $v(x)=\alpha$, 而 $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=\alpha$.

解 当 $\alpha\neq 0$ 时,由公式(3.2)有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^{\alpha}\\ &= \left[\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^{\alpha}\\ &= \mathrm{e}^{\alpha}.\end{aligned}$$

当 $\alpha=0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=1=\mathrm{e}^{0}$, 于是 $\forall\,\alpha\in\mathbf{R}$, 有

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\alpha}. \qquad \square$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ ($a>0$).

分析 作变换 $y=a^x-1$, 有 $\dfrac{a^x-1}{x}=\dfrac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}$, 然后可用对数函数连续

性求极限 .

解 设 $a^x-1=y$, $x=\log_a(1+y)$,当 $x\to0$ 时 $y\to0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{y\to0}\frac{y}{\log_a(1+y)}\\&=\lim_{y\to0}\frac{y}{\ln(1+y)}\ln a\\&=\lim_{y\to0}\frac{\ln a}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\\&=\ln a .\end{aligned}$$

最后等式是应用了对数函数的连续性与

$$\lim_{y\to0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}=\ln\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=1 .$$ □

注 特别当 $a=\mathrm{e}$ 时,有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$.这也是一个重要结论 .

例 3 设 $a_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$.试利用指数函数的连续性证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a .$$

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$,由对数函数的连续性,所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a .$$

由第二章总练习题 3(1),得知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln a .$$

再由指数函数的连续性,有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}&=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}\\&=\mathrm{e}^{\ln a}\\&=a .\end{aligned}$$ □

例 4 设 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,试证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0 .$$

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,由对数函数性质,有

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty .$$

与第三章总练习题 9(1)相类似地可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=-\infty .$$

再由指数函数的连续性,有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}$$

$$=0\ . \qquad \square$$

注　例 3、**例** 4 **合起来证得了如下命题**:**若** $a_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,**则**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a\ .$$

例 5　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\ (a>0,b>0)$.

分析　由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}=1,$$

因此可以把 $\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}$ **写为** $1+\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)$,**而**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)=0\ .$$

然后可利用 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ **与归结原则来求出极限** .

解

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\left[1+\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\right]^n$$

$$=\left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}}\right]^{\frac{n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)}{2}}\ .$$

在公式(3.3)**中设**

$$u_n=\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}},$$

$$v_n=\frac{n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)}{2}\ .$$

利用 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ **和归结原则**,**有**

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}}$$

$$=e;$$

再由本节范例 2 **的结论** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ **和归结原则**,**又有**

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)}{2}$$

$$= \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

$$= \ln \sqrt{ab}\ .$$

于是

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \lim_{n \to \infty} u_n^{v_n} = \mathrm{e}^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}\ . \qquad \square$$

总练习题提示与解答

(教材上册第 84 页)

1. **设函数 f 在 (a, b) 内连续, 且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 为有限值. 证明:**

(1) f 在 (a, b) 内有界;

(2) 若存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) \geq \max\{f(a+0), f(b-0)\}$, 则 f 在 (a, b) 内能取到最大值.

证 (1) 为了应用连续函数有界性定理, 先设法把 f 延拓成闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 设

$$F(x) = \begin{cases} f(a+0), & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b), \\ f(b-0), & x = b, \end{cases}$$

可以证明 $F(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数. 这是因为 F 在 (a, b) 内连续, 且

$$F(a) = f(a+0) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} F(x),$$

$$F(b) = f(b-0) = \lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} F(x)\ .$$

在闭区间 $[a, b]$ 上应用连续函数有界性定理, $\exists M > 0$, 使

$$|F(x)| \leq M, \ \forall x \in [a, b]\ .$$

于是在 (a, b) 内因 $f(x) = F(x)$, 故有

$$|f(x)| \leq M, \ \forall x \in (a, b)\ .$$

(2) $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由连续函数最大、最小值定理, $\exists \eta \in [a, b]$, $F(\eta)$ 为 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值. 若 $\eta = a$ 或 b, 则有

$$F(\eta) = f(a+0) \text{ 或 } f(b-0),$$

于是有 $f(\xi) \leq F(\eta)$; 由条件 $f(\xi) \geq \max\{f(a+0), f(b-0)\}$, 又有 $f(\xi) \geq F(\eta)$. 这样 $f(\xi) = F(\eta)$, 即 ξ 为 f 在 (a, b) 内的最大值点. 又若 $\eta \in (a, b)$, 易见 η 为 f 在 (a, b) 内的最大值点.

注 f 的有界性也可利用函数极限的局部有界性证得: $\exists \delta > 0$, f 在 $(a, a+\delta)$ 与 $(b-\delta, b)$ 内有界, 然后在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上对 f 应用有界性定理.

2．设函数 f 在 (a, b) 内连续，且 $f(a+0) = f(b-0) = +\infty$，证明 f 在 (a, b) 内能取到最小值．

证　因为 $f(a+0) = f(b-0) = +\infty$，任取 $x_0 \in (a, b)$ 与 $M > f(x_0)$，于是 $\exists\ \delta > 0$ 不妨设 $\delta < \dfrac{b-a}{2}$，$\forall\ x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b)$，有 $f(x) > M$．又因 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续，由连续函数最大、最小值定理，$\exists\ \xi \in [a+\delta, b-\delta]$，$f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上的最小值 现证 $f(\xi)$ 也是 $f(x)$ 在 (a, b) 内的最小值．首先，不难看出 $x_0 \in [a+\delta, b-\delta]$；又对 $\forall\ x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b)$，有 $f(\xi) \leq f(x_0) < M < f(x)$．这就证得 $f(\xi)$ 为 f 在 (a, b) 内的最小值．

3．设函数 f 在区间 I 上连续，证明：

(1) 若对任何有理数 $r \in I$ 有 $f(r) = 0$，则在 I 上 $f(x) \equiv 0$；

(2) 若对任意两个有理数 r_1, r_2，$r_1 < r_2$，有 $f(r_1) < f(r_2)$，则 f 在 I 上严格递增．

证　(1) $\forall\ x \in I$，由有理数在 $\mathbf{R}$ 中的稠密性，$\exists$ 有理数列 $\{r_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$．又由 f 的连续性和 $\forall\ r \in I$，$f(r) = 0$，就有 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = 0$，即 $f(x) \equiv 0$．

(2) $\forall\ x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$，由有理数在 $\mathbf{R}$ 中的稠密性，$\exists$ 有理数 r_1, r_2，使 $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$．同理 $\exists$ 有理数列 $\{r_n^{(1)}\}$，$\{r_n^{(2)}\}$，使 $x_1 < r_n^{(1)} < r_1 < r_2 < r_n^{(2)} < x_2$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^{(1)} = x_1$，$\lim\limits_{n\to\infty} r_n^{(2)} = x_2$．由条件可得

$$f(r_n^{(1)}) < f(r_1) < f(r_2) < f(r_n^{(2)});$$

令 $n\to\infty$，由 f 的连续性可知

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n^{(1)}) = f(x_1), \qquad \lim_{n\to\infty} f(r_n^{(2)}) = f(x_2);$$

再由函数极限的保不等式性，证得

$$f(x_1) \leq f(r_1) < f(r_2) \leq f(x_2),$$

即 f 在 I 上严格递增．

4．设 a_1, a_2, a_3 为正数，$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$．证明：方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$$

在区间 (λ_1, λ_2) 与 (λ_2, λ_3) 内各有一根．

提示　考虑辅助函数 $f(x) = a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) + a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3) + a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$．

5．设 f 在 $[a, b]$ 上连续，且对任何 $x \in [a, b]$，存在 $y \in [a, b]$，使得

$$|f(y)|\leq\frac{1}{2}|f(x)|.$$

证明:存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=0$.

提示　连续函数$|f(x)|$在$[a,b]$上有最小值 $m=f(\xi)$,若 $m=0$,则已得证;若 $m>0$,由所设条件可得矛盾.

6. 设 f 在$[a,b]$上连续,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$,另有一组正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$满足$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$.证明:存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n).$$

提示　本章§2 习题 19 是本题特例,其中 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}$.

7. 设 f 在$[0,+\infty)$上连续,满足 $0\leq f(x)\leq x$, $x\in[0,+\infty)$.又设 $a_1\geq0$, $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1,2,\cdots$.证明:

(1) $\{a_n\}$为收敛数列;

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$,则有 $f(t)=t$;

(3) 若条件改为 $0\leq f(x)<x$, $x\in(0,+\infty)$,则 $t=0$.

证　(1) 因为 $0\leq a_{n+1}=f(a_n)\leq a_n$,所以$\{a_n\}$是递减有下界数列,由数列极限的单调有界定理,$\{a_n\}$为收敛数列.

(2) 在等式 $a_{n+1}=f(a_n)$中令 $n\to\infty$,若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$,由 f 的连续性有:

$$t=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=f(t).$$

(3) 若 $0\leq f(x)<x$, $x\in(0,+\infty)$,用反证法.假若 $t>0$,则有 $f(t)<t$,与(2)中 $f(t)=t$ 相矛盾,于是 $t=0$.

8. 设 f 在$[0,1]$上连续,$f(0)=f(1)$.证明:对任何正整数 n,存在 $\xi\in[0,1]$,使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi).$$

提示　$n=1$ 时,取 $\xi=0$. $n>1$ 时令 $F(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$,则有 $F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$,然后应用介值定理.

9. 设 f 在 $x=0$ 连续,且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$,有

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

证明:(1) f 在 $\mathbf{R}$ 上连续;(2) $f(x)=f(1)x$.

证　(1) 在 $f(x+y)=f(x)+f(y)$中取 $y=-x$,有

$$f(0)=f(x)+f(-x).$$

在上式中令 $x\to0$,由 f 在 $x=0$ 处连续,得

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}f(-x)=f(0)+f(0),$$

于是有 $f(0)=0$." $x_0\in\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}f(x)&=\lim_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]\\&=\lim_{x\to x_0}f(x-x_0)+f(x_0)\\&=f(0)+f(x_0)\\&=f(x_0),\end{aligned}$$

于是 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续 .

(2) 对正整数 p, $f(p)=f(\overbrace{1+1+\cdots+1}^{p})=pf(1)$.若 p 为负整数,则 $-p$ 为正整数 .因为 $f(p-p)=f(p)+f(-p)=f(0)=0$,于是

$$f(p)=-f(-p)=-(-p)f(1)=pf(1),$$

即对任何整数 p,有 $f(p)=pf(1)$.

再证:" 非零整数 q,有 $f\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{q}f(1)$,这是因为

$$qf\left(\frac{1}{q}\right)=f\left(\underbrace{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q}}_{q}\right)=f(1) .$$

于是对任何有理数 $r=\frac{p}{q}$,(p, q 为互质整数),有

$$f(r)=f\left(\frac{p}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1)=rf(1) .$$

最后证:" $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=xf(1)$.这是因为 " x, v 有理数列 $\{r_n\}$, $\lim_{n\to\infty}r_n=x$,于是 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_nf(1)=xf(1)$.

10. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 f 在 0, 1 两点连续,且对任何 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x^2)=f(x)$.证明 f 为常量函数 .

提示　易见 f 为偶函数;对任何 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)\to f(1)$ $(n\to\infty)$,从而得: $x\neq 0$ 时 $f(x)=f(1)$; $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=f(1)$.

第四章测试题

(A)

1. 讨论函数 $y=\frac{x}{\sin x}$ 的间断点及其类型 .

2. 设(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续,但函数 $g(x)$ 在点 x_0 不连续;(2)函数

$f(x)$, $g(x)$都在点 x_0 不连续.分别讨论 $f(x)+g(x)$或 $f(x)\cdot g(x)$在点 x_0 是否必定不连续?

3．求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n\ (a>0,\ b>0).$$

4．求极限:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)+\log_a(x-h)-2\log_a x}{h^2}\ (x>0).$$

5．设△ABC为平面上一个三角形,作平行于 y 轴的直线与三角形相交,证明其中必有一条直线把三角形分成面积相等的两部分.

6．证明:(1) $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$内不一致连续;

(2) $g(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$内一致连续.

7．设 $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续, $\varphi(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$,证明 $\varphi(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

(B)

1．讨论函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的间断点及其类型.

2．求极限:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3．求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right).$$

4．设 $f(x)$在 I 上连续,证明下述条件互相等价:

(1) 对任何 $x_1, x_2\in I$, $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$;

(2) 对任何 $x_1, x_2\in I$,及任何 $0\leq a\leq 1$;

$$f(ax_1+(1-a)x_2)\leq af(x_1)+(1-a)f(x_2).$$

5．设 f 为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,对所有 x, $f(x)>0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,证明 $f(x)$必能取到最大值.

6．设 f 在$[a,b]$上连续, x_0 为任意数.

(1) 证明在 f 的图形上有一点离$(x_0,0)$最近,即在$[a,b]$内存在某一 η 使

得点$(x_0, 0)$**到点**$(\eta, f(\eta))$**的距离小于或等于**$(x_0, 0)$**到曲线上任一点**$(z, f(z))$**的距离**.

(2) **试证用 R 代替**$[a, b]$**时上述结论也成立**.

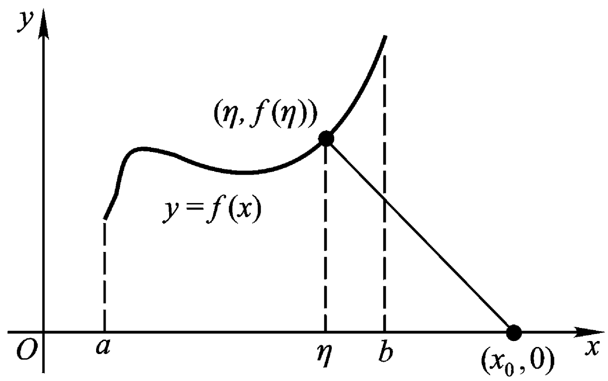


图 4 - 2

7. **设函数** f **为** $[a, b)$ **上的连续函数，且无上界**.**试证：若对任何区间** (α, β)　$[a, b)$，$f(x)$**在**(α, β)**内不能取得最小值，则** f **的值域为区间**$[f(a), +\infty)$.

第五章　导数和微分

§1　导数的概念

一、内容提要

1°　导数的定义

(1) 导数的实际背景是曲线的切线斜率和变速运动的瞬时速度.

(2) 导数的定义是

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

(3) 有限增量公式:设 $f(x)$在点 x_0 可导,则

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x).$$

有限增量公式建立了函数增量与自变量增量之间的联系,是微分学中的重要公式,在后面微分概念的讨论中将起重要的作用.

(4) 可导与连续的关系:若函数 $f(x)$在点 x_0 可导,则函数在点 x_0 连续.但反之不然,例如 $y=|x|$在 $x=0$ 处连续,但在该点不可导.

(5) 左导数和右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$f'(x_0)\text{存在}\quad f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

对函数按定义求导与分段函数求导是求导问题中的要点,读者应当熟练掌握好这种方法.分段函数求导时,应当注意函数在交界点处的函数值.(注意本节范例 1、2、3)

2°　导数的几何意义和费马定理

(1) 导数的几何意义:若函数 $f(x)$在点 x_0 处可导,则 $f'(x_0)$是曲线 $y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线斜率.

切线方程是　$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$,

法线方程是　$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$, $(f'(x_0)\neq 0)$.

(2) 费马定理:设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,且在 x_0 可导,若点 x_0 为 f 的极值点,则必有

$$f'(x_0)=0.$$

费马定理的几何意义:若函数 $f(x)$在极值点 $x=x_0$ 可导,那么在这点的切线平行于 x 轴.

费马曾用解方程 $f'(x_0)=0$(即求函数的稳定点)来讨论函数 $f(x)$的极值点,这是导数理论产生的前奏之一,对后来牛顿和莱布尼茨创立微积分方法都有很大的启示作用.

3° 达布定理　若函数 f 在$[a,b]$上可导,且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$, k 为介于 $f'_+(a)$, $f'_-(b)$之间任一实数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=k$.

达布定理的条件中并不要求导函数 $f'(x)$的连续性,但 $f'(x)$却具有介值性,这是微分学中的深刻的结果,有时称它为导函数介值定理.此定理的直接推广是导函数不能具有第一类间断点.一般称这两个定理为导函数的两大性质定理.

达布定理的证明是利用连续函数的最大、最小值定理,由此可见连续函数的整体性质在微分学中的重要性.

费马在 1638 年讨论了求某类面积的极值的方法:给定一长为 a 的线段,从一端起量出的距离为 x,则以 x 和 $a-x$ 为边的矩形的面积为

$$A=x(a-x).$$

如果量出距离用 $x+E$ 代替 x,则面积将为

$$A=(x+E)(a-x-E).$$

为求最大的面积,令 A 的两个值相等,并令 E 为零,结果得到 $x=\dfrac{a}{2}$.

(把上面过程写为

$$\begin{aligned}\frac{A-A}{E}&=\frac{(x+E)(a-x-E)-x(a-x)}{E}\\&=\frac{E(a-2x)-E^2}{E}\\&=a-2x-E\\&=0,\end{aligned}$$

令 $E=0$,则有 $a-2x=0$,即 $x=\dfrac{a}{2}$.)

假若把 E 换成 Δx，费马这里采用的方法就是相当于解 $A'(x)=0$，得到极值点 $x=\dfrac{a}{2}$．

牛顿在大约 1671 年，称变化的量为流量，称变化率为流数，分别记作 y 和 y 以 $y=x^n$ 为例，用 $x+x0$ 代替 x，用 $y+y0$ 代替 y，应用二项式展开定理，有

$$\begin{aligned} y+y0 &= (x+x0)^n \\ &= x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} x0 + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}(x0)^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n (x0)^n . \end{aligned}$$

两边消去 $y=x^n$ 后，除以 0，然后略去 0，即有

$$y = nx^{n-1} .$$

这种做法有点像现在分析教程中求导公式 $(x^n)'=nx^{n-1}$ 的推导过程，但毕竟不够严密．

二、释疑解惑

问题 1 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，试问 $f'(x_0)$ 与 $(f(x_0))'$ 有何区别？

答 $f'(x_0)$ 与 $(f(x_0))'$ 的含义完全不同．$f'(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数；而 $(f(x_0))'$ 是常数 $f(x_0)$ 的导数，即为零．例如对于 $f(x)=x^2$，有

$$f'(3) = 2x\big|_{x=3} = 6, \quad (f(3))' = (9)' = 0 .$$

问题 2 设有分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1, \\ x+2, & x<1 . \end{cases}$$

下面是求 $f'_+(1)$ 和 $f'_-(1)$ 的一种做法：先求导数

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x>1, \\ 1, & x<1; \end{cases}$$

再将 $x=1$ 代入上述的导数表达式，得到

$$f'_+(1) = 2\cdot 1 = 2, \quad f'_-(1) = 1 .$$

试问这样做是否正确？不对的话，应当如何求？

答 这做法是不对的．分段函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左、右导数应当按定义求导如下：

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} (2+\Delta x) \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(3+\Delta x) - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \left(1 + \frac{2}{\Delta x}\right)$$
$$= -\infty,$$

于是 $f'_+(1) = 2$,但 $f'_-(1)$不存在 .

注 由以上结果得知此函数在 $x = 1$ 处不可导 .

问题 3 试问函数 $f(x)$在 x_0处不可导通常有几种情形?

答 (1) 函数在这点不连续(例如在问题 2 中的例子) .

(2) 函数在这点的左、右导数中至少有一个不存在 .例如

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad f'_-(0) = 0,\ f'_+(0)\text{不存在}$$

(3) 左、右导数都存在但不相等 .例如

$$f(x) = |x|,\ f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1 .$$

三、范例解析

例 1 讨论下列函数的可导性:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x\text{ 为有理数}, \\ -x, & x\text{ 为无理数}; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x\text{ 为有理数}, \\ -x^2, & x\text{ 为无理数} . \end{cases}$$

解 首先讨论 $f(x)$的可导性 .当 $x_0 = 0$ 时,因为

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x\text{ 为有理数}, \\ -1, & \Delta x\text{ 为无理数}, \end{cases}$$

所以$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$不存在,即 $f(x)$在点 0 处不可导 .当 $x_0 \neq 0$ 时,$f(x)$在点 x_0处不连续,于是 $f(x)$在点 x_0处也不可导 .

然后讨论 $g(x)$的可导性 .当 $x_0 = 0$ 时,

$$\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \begin{cases} \Delta x, & \Delta x\text{ 为有理数}, \\ -\Delta x, & \Delta x\text{ 为无理数}, \end{cases}$$

于是有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = 0,$$

即 $g'(0) = 0$.当 $x_0 \neq 0$ 时, $g(x)$在点 x_0不连续,于是 $g(x)$在点 x_0不可导 . □

例 2 设函数 $f(x)$定义在$[-a, a]$($a > 0$)上,且适合$|f(x)| \leq x^2$,证明 $f'(0) = 0$.

证　由 $|f(x)| \leq x^2$，首先可得 $f(0)=0$.又因

$$\left|\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right| \leq \frac{(\Delta x)^2}{|\Delta x|} = |\Delta x|,$$

于是

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left|\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right| = 0,$$

则 $f'(0)=0$ 得证 .　□

例 3　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，$x_0 \in (a,b)$，$f(x_0)=g(x_0)$，且 $f'_-(x_0)=g'_+(x_0)$，又定义

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ g(x), & x > x_0 . \end{cases}$$

证明 $h(x)$ 在点 x_0 可导 .

证　因为 $f(x_0)=g(x_0)$，于是

$$\begin{aligned} h'_+(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{g(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} \\ &= g'_+(x_0); \end{aligned}$$

同理可证

$$h'_-(x_0)=f'_-(x_0) .$$

由　$f'_-(x_0)=g'_+(x_0)$ 可得

$$h'_+(x_0)=h'_-(x_0),$$

所以 $h(x)$ 在点 x_0 可导 .　□

例 4　设函数 $f(x)$ 在点 x 处可导，过曲线上点 $P(x, f(x))$ 处的切线和法线与 x 轴交于点 N 和点 M，点 P 在 x 轴上的投影为点 T（见图 5 - 1） .证明：

$$|NT| = \frac{|f(x)|}{|f'(x)|}, \quad |TM| = |f(x)\cdot f'(x)|,$$

$$|PN| = \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| \quad 1+f'^2(x), \; |PM| = |f(x)| \quad 1+f'^2(x) .$$

证　由导数的几何意义，若过点 P 的切线与 x 轴交角为 α，则

$$\tan\alpha = f'(x) .$$

由 $\dfrac{|PT|}{|NT|} = |\tan\alpha|$，而 $|PT| = |f(x)|$，于是

$$|NT| = \frac{|f(x)|}{|f'(x)|} .$$

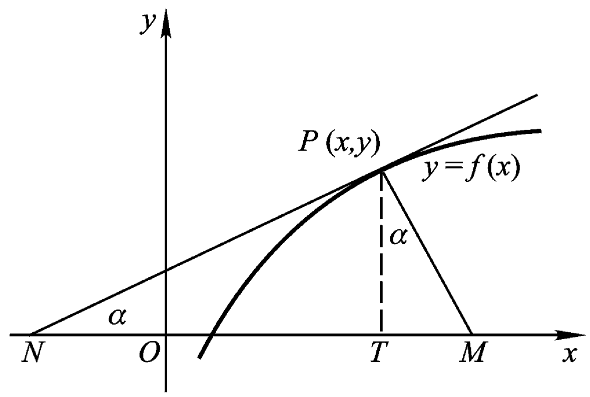


图 5 - 1

由图中△TPM 可见

$$\frac{|TM|}{|PT|}=|\tan\alpha|,$$

即

$$|TM|=|f(x)\cdot f'(x)|.$$

由此得到,

$$\begin{aligned}|PN|&=\sqrt{|NT|^2+|PT|^2}\\&=\sqrt{\left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right|^2+f^2(x)}\\&=\frac{|f(x)|}{|f'(x)|}\sqrt{1+f'^2(x)}.\\|PM|&=\sqrt{|TM|^2+|PT|^2}\\&=\sqrt{f^2(x)f'^2(x)+f^2(x)}\\&=|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}.\end{aligned}$$

□

例 5　设平面上有一抛物镜的轴截线方程为

$$y=x^2.$$

若光线沿平行于 y 轴的方向射向镜面,证明反射光线都通过 y 轴上点 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

证　设点 $P(x_0,x_0^2)$是入射光线与镜面的交点,反射光线与 y 轴交于点 Q.过点 P 的镜面的切线与 y 轴交于点 R,此切线的斜率为$(x^2)'|_{x_0}=2x_0$,**于是直线 PR 的方程为**

$$y-x_0^2=2x_0(x-x_0),$$

由此可得点 R 的 y 坐标为

$$y=-x_0^2.$$

按光线反射时满足入射角等于反射角的规律,在图 5 - 2 中入射角为 α,反

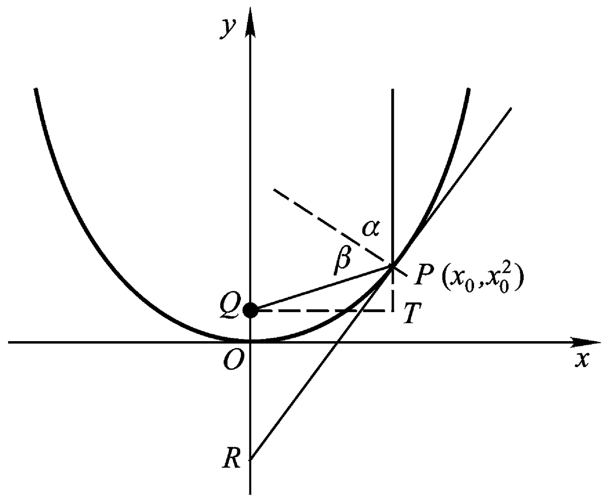


图 5 - 2

射角为 β,即有 α= β .由于△ PQR 的两个底角分别为α, β的余角,因此△ PQR 是等腰三角形 .

设点 Q 的 y 坐标为 q,在直角△ PQT 中

$$|PQ|^2 = |QT|^2 + |PT|^2$$
$$= x_0^2 + (x_0^2 - q)^2$$

由于 $|PQ|^2 = |QR|^2$,因此

$$x_0^2 + (x_0^2 - q)^2 = (q + x_0^2)^2,$$

由此方程可解得对任何 x_0 都有

$$q = \frac{1}{4}.$$ □

例 6 证明:若 $|f(x)|$ 在点 a 处可导, $f(x)$ 在点 a 处连续,则 $f(x)$ 在点 a 处也可导 .

分析 一般情况下,若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, $|f(x)|$ 在点 x_0 处不一定可导 .例如, $f(x) = x$ 在 $x_0 = 0$ 处可导,但 $|f(x)| = |x|$ 在点 0 处不可导 .反之,若 $|f(x)|$ 在点 x_0 处可导,一般也不能推得 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 .例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ -1 & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

$|f(x)| \equiv 1$ 在点 $x_0 = 0$ 处可导,但是 $f(x)$ 在点 $x_0 = 0$ 处不连续,因而不可导 .然而,若 $f(x)$ 在点 a 处连续,则由 $|f(x)|$ 在点 a 处可导就可保证 $f(x)$ 在点 a 处也可导 .

若 $f(a) \neq 0$,由连续函数局部保号性,v $U(a)$,在其中 $f(x)$ 保持定号,因而由 $|f|$ 在点 a 处可导可推得 $f(x)$ 在点 a 处也可导 .

若 $f(a) = 0$,且 $|f|$ 在点 a 处可导,因为点 a 为 $|f|$ 的极值点,所以应用费马

定理可以得到$|f|'(a)=0$,再由此又可证得 $f'(a)=0$.

证　若 $f(a)\neq 0$,由连续函数局部保号性,v 邻域 $U(a)$, $f(x)$在 $U(a)$中保持定号,于是$|f(x)|$在点 a 处可导,即为 $f(x)$在点 a 处可导 .

若 $f(a)=0$,则点 a 是函数$|f(x)|$的极小值点,因$|f(x)|$在点 a 处可导,由费马定理有

$$|f|'(a)=0,$$

即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|f(a+\Delta x)|-|f(a)|}{\Delta x}=0 .$$

因为 $f(a)=0$,所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|f(a+\Delta x)-f(a)|}{\Delta x}=0,$$

于是 $f'(a)=0$. □

四、习题选解(教材上册第 94 页)

8. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}\quad (m\text{ 为正整数}) .$$

试问:(1) m 等于何值时, f 在 $x=0$ 连续;

(2) m 等于何值时, f 在 $x=0$ 可导;

(3) m 等于何值时, f'在 $x=0$ 连续 .

答　(1) 当 $m\geq 1$ 时, $|f(x)|=|x|^m\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|^m$,有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,于是$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,即 f 在 $x=0$ 连续 .

(2) 当 $m\geq 2$ 时,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^m\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^{m-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0 .$$

由复合函数求导可得

$$f'(x)=\begin{cases} mx^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{m-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即 $m\geq 2$ 时可导 .

(3) 同理可证 $m\geq 3$ 时, f'在 $x=0$ 连续 .

注　本题在导函数理论中举某些反例时很有用 .

11．设 $g(0)=g'(0)=0$，

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

求 $f'(0)$．

提示 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x}$，只需证明 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(\Delta x)}{\Delta x}=0$．

12．设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且对任何 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$．若 $f'(0)=1$，证明对任何 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$f'(x)=f(x).$$

提示 在 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 中设 $x_1=x_2=0$，可得 $f(0)=f^2(0)$．分两种情况讨论，若 $f(0)=0$，可证 $f(x)\equiv 0$；若 $f(0)=1$，在 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 中设 $x_1=x$，$x_2=\Delta x$，有 $f(x+\Delta x)=f(x)\cdot f(\Delta x)$，再设法证明

$$f'(x)=f(x).$$

§2 求导法则

一、内容提要

1° 导数四则运算

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$．

(2) $(uv)'=u'v+uv'$，　$(cu)'=c\cdot u'$（c 为常数）．

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$，　$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$．

2° 基本初等函数导数公式

(1) $(c)'=0$　（c 为常数）．

(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$ 为常数）．

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$，$(e^x)'=e^x$．

(4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$．

(5) $(\sin x)'=\cos x$，　$(\cos x)'=-\sin x$，

$(\tan x)'=\sec^2 x$，　$(\cot x)'=-\csc^2 x$，

$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$，　$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$．

(6) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$, $\quad(\arccos x)'=-\dfrac{1}{1-x^2}$,

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

读者应当熟记基本初等函数导数公式,这是求导法则的基础.

3° **反函数和复合函数的导数**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

注　在求导法则中,复合函数的链式求导法则是关键,应当弄清函数的复合关系和中间变量,特别应当注意中间变量中出现函数四则运算的情况.

4° **对数求导法　一般适用于多个函数相乘(除)的求导或者幂指函数 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 的求导.**

若 $y=f(x)$ 可导,由复合函数求导法推知

$$(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)},$$

这是对数求导法的基础.

二、释疑解惑

问题 1　记号 $f'(g(x))$ 与 $(f(g(x)))'$ 有何区别?

答　函数 $f(g(x))$ 是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的. $f'(g(x))$ 是函数 $f(u)$ 关于 u 的导数,其中变量 u 用 $g(x)$ 代入后所得的结果,即

$$f'(g(x))=f'(u)\big|_{u=g(x)}.$$

而 $(f(g(x)))'$ 是函数 $f(g(x))$ 关于变量 x 的导数,由复合函数求导法则

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x),$$

因而两者不能混淆.

问题 2　设 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, $g(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$,若 $f(x)$ 或 $g(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 中至少有一个在点 x_0 可导.上述论断是否正确?

答　不正确.若函数 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 在 x_0 处可导,由导数四则运算法则, $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ 与 $g(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ 在点 x_0 都可导.但反之不必然.例如, $\varphi(x)=|x|$, $\psi(x)=-|x|$ 在 $x=0$ 处都不可导,但 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)=0$,在 $x=0$ 处可导, $g(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)=-|x||x|=-x^2$ 在 $x=0$ 处也可导.

问题 3　设函数 $f(x)$ 在邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内可导, $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ 为导函数在点 x_0 的左、右极限.试问是否成立

$$f'_+(x_0)=f'(x_0+0),\ f'_-(x_0)=f'(x_0-0)?$$

答 **首先得区分** $f'_+(x_0)$**与** $f'(x_0+0)$**的不同含义**.$f'_+(x_0)$**是函数** f **在点** x_0 **的右导数,而** $f'(x_0+0)$ **是导函数** $f'(x)$ **在点** x_0 **处的右极限,即**

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x).$$

以§1 问题 2 中的函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 1,\\ x+2, & x<1\end{cases}$$

为例,它在 $U^\circ(1)$**中的导函数为**

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x>1,\\ 1, & x<1,\end{cases}$$

于是

$$f'(1+0)=\lim_{x\to 1^+}2x=2=f'_+(1),$$

$$f'(1-0)=\lim_{x\to 1^-}1=1.$$

但是 $f'_-(1)$**不存在,于是** $f'_-(x_0)=f'(1-0)$**不成立**.**所以本问题中的论断不一定成立**.

说明 **一般说来,** $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$**也可能不存在**.**例如**

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

这是因为

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=0.$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$**和** $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)$**都不存在**.

也有可能发生下述情况: $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$**都存在,但是** $f(x)$**在点** x_0 **的左、右导数都不存在**.**例如,**

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

$f'(0+0)=f'(0-0)=1$;**但是** $f(x)$**在** $x=0$ **处不连续,显然不可导,而**

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x-1}{\Delta x}=\infty,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x-1}{\Delta x}=\infty .$$

今后在第六章中应用中值定理可得使

$$f'_+(x_0)=f'(x_0+0),\ f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$$

成立的条件.

三、范例解析

例 1 设

$$f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}),$$

求 $f'(x)$.

解 由导数的四则运算法则,可得第一加项的导数:

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right);$$

在第二加项中注意到中间变量 $u=x+\sqrt{x^2+a^2}$ 又是两个函数式的和,于是

$$\left[\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]'=\frac{a^2}{2}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

由此得到

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)+\frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\sqrt{x^2+a^2}.$$ □

例 2 设

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)\quad(a>b\geq 0),$$

求 $f'(x)$.

解 由复合函数求导法,求得

$$y'=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$
= \frac{1}{a^2 - b^2} \frac{a + b}{a + b + (a - b)\tan^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a + b} \cdot \sec^2 \frac{x}{2}
$$

$$
= \frac{1}{(a + b)\cos^2 \frac{x}{2} + (a - b)\sin^2 \frac{x}{2}}
$$

$$
= \frac{1}{a + b\cos x} . \qquad \square
$$

例 3　**设** $y = x^{a^x}$,**求** y'.

解　**利用对数求导法**,**由** $y = x^{a^x}$ **可得**

$$
\ln y = a^x \cdot \ln x .
$$

上述等式两边关于 x **求导**,**有**

$$
\frac{y'}{y} = a^x \cdot \ln a \cdot \ln x + \frac{a^x}{x},
$$

于是有

$$
y' = x^{a^x} \left(a^x \ln a \cdot \ln x + \frac{a^x}{x} \right) . \qquad \square
$$

例 4　**求下列函数的导数**:

$$
y = |(x - 1)^2 (x + 1)^3| .
$$

解　**为了去掉函数中的绝对值号**,**把** y **改写成如下分段函数**:

$$
y = \begin{cases} (x - 1)^2 (x + 1)^3, & x \geq -1, \\ -(x - 1)^2 (x + 1)^3, & x < -1 . \end{cases}
$$

由求导的四则运算法则,**先求出** $x \neq -1$ **处的导数**:

$$
y' = \begin{cases} (x - 1)(x + 1)^2 (5x - 1), & x > -1, \\ -(x - 1)(x + 1)^2 (5x - 1), & x < -1 . \end{cases}
$$

再按定义求 $x_0 = -1$ **处的左、右导数**,

$$
y'_+(-1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(2 - \Delta x)^2 (\Delta x)^3 - 0}{\Delta x} = 0,
$$

同理可得 $y'_-(-1) = 0$,**于是** $y'(-1) = 0$ **这就得到**

$$
y' = \begin{cases} (x - 1)(x + 1)^2 (5x - 1), & x \geq -1, \\ -(x - 1)(x + 1)^2 (5x - 1), & x < -1 . \end{cases} \qquad \square
$$

例 5　**讨论函数**

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}
$$

的导数.

解　当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{2}}=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{2}}.$$

当 $x=0$ 时,

$$f'_{+}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{\dfrac{\Delta x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{\Delta x}}}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{\Delta x}}}$$

$$=0,$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{\Delta x}}}$$

$$=1,$$

于是 f 在 $x=0$ 处不可导. □

例 6　举出符合下述条件的函数:

(1) 定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数,使它仅在点集 $\{n\}$, $n\in\mathbf{N}_{+}$ 中各点处不可导.

(2) f 在 $\mathbf{R}$ 上处处不可导,但 $f\circ f$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导.

解　(1) 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=n,\ n\in\mathbf{N}_{+},\\ 0, & x\notin\mathbf{N}_{+},\ x\geq 0.\end{cases}$$

因为 $f(x)$ 在 $x=n\ (n\in\mathbf{N}_{+})$ 处不连续,于是 $f(x)$ 在 $x=n$ 处不可导;当 $x\notin\mathbf{N}_{+}$ 时, f 在 x 的某个邻域内恒为零,于是函数 f 在 x 处可导.

(2) 狄利克雷函数 $D(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续,于是处处不可导.由于 $u=D(x)$ 的值域包含于 $D(u)$ 的定义域中,因此 $D(u)$ 与 $D(x)$ 可以复合.

当 x 为有理数时, $D(x)=1$,于是 $(D\circ D)(x)=D(1)=1$;当 x 为无理数时, $D(x)=0$,于是 $(D\circ D)(x)=D(0)=1$;由此 $(D\circ D)(x)\equiv 1$,故 $D\circ D$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导, $(D\circ D)'(x)\equiv 0$, $x\in\mathbf{R}$. □

四、习题选解 (教材上册第 102 页)

9. 以 $\operatorname{sh}^{-1}x$, $\operatorname{ch}^{-1}x$, $\operatorname{th}^{-1}x$, $\operatorname{coth}^{-1}x$ 分别表示各双曲函数的反函数.试求下列函数的导数:

(1) $y=\operatorname{sh}^{-1}x$;　　　　(2) $y=\operatorname{ch}^{-1}x$;

(3) $y=\operatorname{th}^{-1}x$;　　(4) $y=\coth^{-1}x$;

(5) $y=\operatorname{th}^{-1}x-\coth^{-1}\frac{1}{x}$;　　(6) $y=\operatorname{sh}^{-1}(\tan x)$.

解　**在求导之前,读者可以验证下列双曲函数的恒等式**:

$$\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y=1, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}=1-\operatorname{th}^2 y, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}=\coth^2 y-1. \tag{2.3}$$

并注意应用反函数求导公式后,应当用 $y_0=\varphi^{-1}(x_0)$**代入**$\frac{1}{\varphi'(y_0)}$**中,化为** x_0 **的函数**.

(1) $x=\operatorname{sh} y$,**由反函数求导公式,有**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\operatorname{sh} y)'}=\frac{1}{\operatorname{ch} y},$$

为了把导数化为 x **的函数,由**(2.1)**有** $\operatorname{ch}^2 y=1+\operatorname{sh}^2 y$,**于是**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\operatorname{ch} y}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(2) $x=\operatorname{ch} y$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\operatorname{ch} y)'}=\frac{1}{\operatorname{sh} y}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}(|x|>1).$$

(3) $x=\operatorname{th} y$,**有**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\operatorname{th} y)'}=\operatorname{ch}^2 y,$$

由公式(2.2),$\operatorname{ch}^2 y=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y}=\frac{1}{1-x^2}$,$(|x|<1)$,**于是**

$$(\operatorname{th}^{-1}x)'=\frac{1}{1-x^2},(|x|<1).$$

(4) $x=\coth y$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\coth y)'}=\frac{1}{-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}}=-\operatorname{sh}^2 y,$$

由公式(2.3),$\operatorname{sh}^2 y=\frac{1}{\coth^2 y-1}=\frac{1}{x^2-1}$,**于是**

$$(\coth^{-1}x)'=\frac{1}{1-x^2}(|x|>1).$$

(5) $y=\operatorname{th}^{-1}x-\coth^{-1}\dfrac{1}{x}$,

$$y'=\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

(6) $y=\operatorname{sh}^{-1}(\tan x)$,

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\sec^2 x=|\sec x|.$$

§3 参变量函数的导数·高阶导数

一、内容提要(教材§3、§4)

1° **设参量方程**

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\alpha\leq t\leq\beta,$$

其中 $\varphi(t)$和 $\psi(t)$可导,且 $\varphi'(t)\neq0$.由它所表示的函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.\tag{3.1}$$

若曲线由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$表示,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\rho'(\theta)\tan\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\tan\theta}.\tag{3.2}$$

2° **光滑曲线的切线方程和法线方程**

设曲线 C: $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$, $\alpha\leq t\leq\beta$,其中 φ,ψ在$[\alpha,\beta]$上都存在连续导函数,且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq0$,则称 C 是光滑曲线.光滑曲线上任何点都存在切线,且切线与 x 轴正向夹角 $\alpha(t)$是 t 的连续函数.

光滑曲线 C 在点$(\varphi(t),\psi(t))$处的切线方程为

$$(Y-\psi(t))\varphi'(t)-(X-\varphi(t))\psi'(t)=0,\tag{3.3}$$

法线方程为

$$(Y-\psi(t))\psi'(t)+(X-\varphi(t))\varphi'(t)=0.\tag{3.4}$$

3° **二阶导数和高阶导数** 若函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$在点 x_0 可导,则称 $f'(x)$在点 x_0 的导数为 $f(x)$在点 x_0 的二阶导数,记作 $f''(x_0)$,即

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0},$$

这时称 $f(x)$在点 x_0 二阶可导.

由此可定义二阶导函数,记作 $f''(x)$.一般地,若 $f^{(n-1)}(x)$为 f的$(n-1)$阶导函数,则 f的 n阶导函数是

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'.$$

4° **基本高阶导数公式**

$$\begin{aligned}
&(1)\ (a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n\ (a>0),\\
&(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x;\\
&(2)\ (\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right);\\
&(3)\ (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right);\\
&(4)\ (x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}\ (m\geq n);\\
&(5)\ (\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};\\
&(6)\ \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

5° **莱布尼茨公式** 若函数 $u(x),v(x)$有 n阶导数,则

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}.\tag{3.6}$$

6° **参变量方程的高阶导数** 设 $\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上二阶可导,则由参变量方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$所确定的函数的二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.\tag{3.7}$$

二、释疑解惑

问题1 参变量方程给出的曲线 C: $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$, $\alpha\leq t\leq\beta$的求导公式为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$按下述方法求二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\psi'(t)]^2}$$

是否正确?为什么?

答 这是错误的.按定义$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$,而上面计算中把$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$误认作$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$,这是初学时易犯的错误.正确的算法应当是

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t}\left(\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}\right)}{\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

问题 2　试总结函数的高阶导数的常用求法.

答　高阶导数在第六章函数的泰勒展开中将起重要作用.下面列举一些常用的计算方法:

(1) **利用基本高阶导数公式表**(3.5).

(2) **应用莱布尼茨公式**(3.6)(**本节习题** 5(4)).

(3) **应用数学归纳法求函数的** n **阶导数**(**本节习题** 5(6)).

(4) **先简化分式,然后利用高阶导数公式**(**本节习题** 5(3),(5)).

(5) **证明需求导数的函数满足一个微分方程,然后利用递推公式求高阶导数**(**本节习题** 9、10).

(6) **利用复数运算和欧拉公式求函数的** n **阶导数**(**见范例** 7).

三、范例解析

例 1　设曲线方程为 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{at}\cos^2 t, \\ y=\mathrm{e}^{at}\sin^2 t, \end{cases}$ **求** $\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}$.

解

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} t}=a\mathrm{e}^{at}\sin^2 t+2\mathrm{e}^{at}\sin t\cos t,$$

$$\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t}=a\mathrm{e}^{at}\cos^2 t-2\mathrm{e}^{at}\sin t\cos t,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}=\frac{\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} t}}{\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t}}=\frac{a\sin^2 t+2\sin t\cos t}{a\cos^2 t-2\sin t\cos t}.$$ □

例 2　设阿基米德螺线的方程为 $r=a\theta$, **试求** $\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}$.

解　由公式(3.2),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}&=\frac{r'(\theta)\tan\theta+r(\theta)}{r'(\theta)-r(\theta)\tan\theta}\\&=\frac{a\tan\theta+a\theta}{a-a\theta\tan\theta}\\&=\frac{\tan\theta+\theta}{1-\theta\tan\theta}.\end{aligned}$$ □

例 3　设函数 $f(t)$ **二次可导**, $f''(t)\neq 0$, **曲线方程为** C: $\begin{cases} x=f'(t), \\ y=tf'(t)-f(t), \end{cases}$

试求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f'(t)+tf''(t)-f'(t)=t\cdot f''(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f''(t),$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{t\cdot f''(t)}{f''(t)}=t.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t)}{f''(t)}=\frac{1}{f''(t)}.$$ □

例 4 证明高阶导数的等式:

(1) $[\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}=\mathrm{e}^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$,

(2) $[\mathrm{e}^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}=\mathrm{e}^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi)$,

其中

$$\sin\varphi=\frac{b}{a^2+b^2},\cos\varphi=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

证 先证明等式(2).**当** $n=1$ **时**,

$$[\mathrm{e}^{ax}\cos(bx+c)]'=a\mathrm{e}^{ax}\cos(bx+c)-b\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+c)$$

$$=\mathrm{e}^{ax}\quad a^2+b^2\quad\frac{a}{a^2+b^2}\cos(bx+c)-\frac{b}{a^2+b^2}\sin(bx+c)$$

$$=\mathrm{e}^{ax}\quad a^2+b^2\quad\cos\varphi\cos(bx+c)-\sin\varphi\sin(bx+c)$$

$$=\mathrm{e}^{ax}\quad a^2+b^2\cos(bx+c+\varphi),$$

其中 $\cos\varphi=\dfrac{a}{a^2+b^2}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{a^2+b^2}$, **于是** $n=1$ **时等式成立**.**应用数学归纳法**,**若** $n=k-1$ **时成立**,**即设**

$$[\mathrm{e}^{ax}\cos(bx+c)]^{(k-1)}=\mathrm{e}^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{k-1}{2}}\cos[bx+c+(k-1)\varphi],$$

则当 $n=k$ **时**,**有**

$$\begin{aligned}[\mathrm{e}^{at}\cos(bx+c)]^{(k)}&=([\mathrm{e}^{at}\cos(bx+c)]^{(k-1)})'\\&=[\mathrm{e}^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{k-1}{2}}\cos(bx+c+(k-1)\varphi)]'\\&=(a^2+b^2)^{\frac{k-1}{2}}[\mathrm{e}^{ax}\cos(bx+c+(k-1)\varphi)]'\end{aligned}$$

$$= e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{k}{2}}\cos(bx+c+k\varphi),$$

于是证得

$$[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi).$$

同理可证等式(1). □

例 5 设 $f(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$,求 $f^{(n)}(x)$.

解 设 $u(x)=x^2+2x+3$, $v(x)=e^{-x}$,注意到 $k\geq 3$ 时 $u^{(k)}(x)=0$,应用莱布尼茨公式,有

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (x^2+2x+3)(e^{-x})^{(n)} + C_n^1(x^2+2x+3)'(e^{-x})^{(n-1)} \\ &\quad + C_n^2(x^2+2x+3)''(e^{-x})^{(n-2)} \\ &= (-1)^n(x^2+2x+3)e^{-x} + (-1)^{n-1}n\cdot(2x+2)e^{-x} \\ &\quad + (-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x} \\ &= (-1)^n e^{-x}[x^2-2(n-1)x+n^2-3n+3]. \end{aligned}$$ □

例 6 设函数 $f(x)$当 $x\leq x_0$ 时有定义,且二次可导.试选择常数 l, m, n 使得函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\leq x_0, \\ l(x-x_0)^2+m(x-x_0)+n, & x>x_0 \end{cases}$$

是二次可导函数.

分析 函数 $f(x)$在区间$(-\infty, x_0]$的端点 x_0 的二阶可导是指点 x_0 处的左二阶导数存在.在本题中,$F(x)$是分段函数,当 $x>x_0$, $x<x_0$ 时 $F(x)$都是二阶可导的,为了使 $F(x)$是二次可导函数,主要任务是确定常数 l, m, n 使得 $F(x)$在点 x_0 二阶导数存在.第一步由连续性条件,确定常数 n;第二步由 $F'(x_0)$存在定出常数 m,最后由 F 在 x_0 二阶可导可以定出常数 l.

解 由题设条件,存在 $f'_-(x_0)$, $f''_-(x_0)$.首先由 $F(x)$在点 x_0 的连续性条件,要求

$$\lim_{x\to x_0^+}[l(x-x_0)^2+m(x-x_0)+n] = f(x_0)$$

可得 $n=f(x_0)$.

为了使 $F(x)$在点 x_0 可导,必须有 $F'_-(x_0)=F'_+(x_0)$,易见 $F'_-(x_0)=f'_-(x_0)$,而

$$\begin{aligned} F'_+(x_0) &= \lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0^+}\frac{l(x-x_0)^2+m(x-x_0)+f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= m, \end{aligned}$$

于是有 $m = f'_-(x_0)$.

由此可得函数 $F(x)$的导函数为

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x), & x < x_0, \\ f'_-(x_0), & x = x_0, \\ 2l(x - x_0) + f'_-(x_0), & x > x_0 . \end{cases}$$

为了使函数 F 在 $x = x_0$ 二阶可导,必须有 $F''_-(x_0) = F''_+(x_0)$,易见 $F''_-(x_0) = f''_-(x_0)$,而

$$\begin{aligned} F''_+(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{F'(x) - F'(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{2l(x - x_0) + f'_-(x_0) - f'_-(x_0)}{x - x_0} \\ &= 2l, \end{aligned}$$

于是有 $l = \dfrac{f''_-(x_0)}{2}$,这样就求得了

$$l = \frac{f''_-(x_0)}{2},\ m = f'_-(x_0),\ n = f(x_0) .$$ □

*例 7　证明高阶导数公式

$$\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x^2 + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n + 1)\operatorname{arccot} x],$$

并由此得到

$$(\arctan x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n - 1)!}{(x^2 + 1)^{\frac{n}{2}}} \sin(n \operatorname{arccot} x) .$$

分析　利用复数形式的恒等式

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x - \mathrm{i}} - \frac{1}{x + \mathrm{i}}\right),$$

由基本高阶导数公式不难得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^{(n)} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x - \mathrm{i}} - \frac{1}{x + \mathrm{i}}\right)^{(n)} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(x - \mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(x + \mathrm{i})^{n+1}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}} \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}}[(x + \mathrm{i})^{n+1} - (x - \mathrm{i})^{n+1}], \end{aligned}$$

为了证明结论,应当借助于欧拉公式

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

这公式的证明将在第十四章幂级数中给出 .

解　由分析可知

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}[(x+\mathrm{i})^{n+1}-(x-\mathrm{i})^{n+1}].$$

因为 $x+\mathrm{i}=\sqrt{x^2+1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$，**设** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\cos\varphi$，$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sin\varphi$，**即** $\cot\varphi=x$，**于是由欧拉公式有**

$$x+\mathrm{i}=\sqrt{1+x^2}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

$$x-\mathrm{i}=\sqrt{1+x^2}(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)=\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi},$$

$$(x+\mathrm{i})^{n+1}=(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}=(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}[\cos(n+1)\varphi+\mathrm{i}\sin(n+1)\varphi],$$

$$(x-\mathrm{i})^{n+1}=(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\varphi}=(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}[\cos(n+1)\varphi-\mathrm{i}\sin(n+1)\varphi],$$

这样，

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}&=\frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}[2\mathrm{i}\sin(n+1)\varphi]\\&=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arccot}x],\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}(\arctan x)^{(n)}&=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n-1)}\\&=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(n\operatorname{arccot}x).\quad\square\end{aligned}$$

四、习题选解

§3 习题(教材上册第 105 页)

4．**证明:曲线**

$$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}\quad(t\neq0)$$

上任一点的法线到原点的距离等于 a.

证 $x'(t)=at\cos t$, $y'(t)=at\sin t$，**由**(3.4)，**曲线的法线方程为**

$$[Y-a(\sin t-t\cos t)]y'(t)+[X-a(\cos t+t\sin t)]x'(t)=0,$$

代入 $x'(t)$, $y'(t)$，**化简可得**

$$\sin t\cdot Y+\cos t\cdot X=a,$$

由解析几何可知,原点到该法线的距离为 a.

§4 习题(教材上册第 109 页)

9．**设** $y=\arctan x$.

(1) **证明它满足方程** $(1+x^2)y''+2xy'=0$;

(2) 求 $y^{(n)}|_{x=0}$. $y^{(2m)}|_{x=0}=0$, $y^{(2m+1)}|_{x=0}=(-1)^m(2m)!$

提示 (1) 由直接求导容易验证 .(2)把(1)中的方程两边求 n 次导数,应用莱布尼茨公式,可得到含 $y^{(n+2)}(x)$, $y^{(n+1)}(x)$, $y^{(n)}(x)$的方程;再将 $x=0$ 代入,得到递推关系 .

10. 设 $y=\arcsin x$.

(1) 证明它满足方程

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0 \quad (n\geq 0);$$

(2) 求 $y^{(n)}|_{x=0}$. $y^{(2m)}|_{x=0}=0$, $y^{(2m+1)}|_{x=0}=[(2m-1)!!]^2$

提示 由 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 可得 $\sqrt{1-x^2}\,y'=1$, 两边求导得 $\sqrt{1-x^2}\,y''-\frac{xy'}{\sqrt{1-x^2}}=0$, 于是 y 满足方程

$$(1-x^2)y''-xy'=0.$$

然后仿照第 9 题的解法 .

11. 证明:函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处 n 阶可导且 $f^{(n)}(0)=0$,其中 n 为任意正整数 .

证 按定义

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \qquad \text{设 } y=\frac{1}{x} \\ &= \lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

于是有

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

同理可求得

$$f''(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{-6}{x^3}+\dfrac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\ .\end{cases}$$

由数学归纳法,设

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_{3n}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $P_{3n}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 是以$\dfrac{1}{x}$为变量的 $3n$ 次多项式 .

按定义

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{P_{3n}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\qquad \text{设 } y=\frac{1}{x}\\&=\lim_{y\to\infty}\frac{yP_{3n}(y)}{e^{y^2}}\\&=0,\end{aligned}$$

于是有

$$y^{(n+1)}(x)=\begin{cases}P_{3(n+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

这样在 $x=0$ 处函数 n 阶可导,且 $f^{(n)}(0)=0$. □

§4 微　分

一、内容提要 (教材 § 5)

1° 函数的微分　函数 $y=f(x)$在点 x_0处的增量如果可以表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)\tag{4.1}$$

(其中 A 与 x_0有关而与 Δx 无关),则称函数 f 在点 x_0可微, $A\Delta x$ 称为函数 f 在点 x_0处的微分,记作 $\mathrm{d}y$,即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x\ .$$

由可微定义容易推知

$$f(x)\text{在 } x_0 \text{ 处可微} \qquad f(x)\text{在 } x_0 \text{ 处可导}.$$

若函数 $y=f(x)$**在区间** I **上每一点都可微,则称** $f(x)$**为** I **上的可微函数,在** I **上任一点的微分为** $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x,\ x\in I$.**上述微分表达式中** $f'(x)$ **与** $\mathrm{d}x$ **是互相独立的,当取定** x **后,**$\mathrm{d}y$ **是** $\mathrm{d}x$ **的函数**.

2° **微分的运算法则**

(1) $\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}u(x)\pm\mathrm{d}v(x)$;

(2) $\mathrm{d}[u(x)v(x)]=v(x)\mathrm{d}u(x)+u(x)\mathrm{d}v(x)$;

(3) $\mathrm{d}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x)-u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}$; (4.2)

(4) $\mathrm{d}(f\ g(x))=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$,**其中** $u=g(x)$.

设 $y=(f\ g)(x)$,**由上式可知** $\mathrm{d}y=(f\ g)'(x)\mathrm{d}x$,**若设** $y=f(u)$,**有** $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$,**即取** u **为中间变量时的** $\mathrm{d}y$ **与** x **为自变量时形式上完全相同,这就是一阶微分形式的不变性**.**一阶微分形式不变性是复合函数求导公式的另一种形式**.

3° **高阶微分** **若函数** $f(x)$**二阶可导,则** f **的二阶微分为** $\mathrm{d}^2y=f''(x)\mathrm{d}x^2$.**若函数** $f(x)$ n **阶可导,则** f **的** n **阶微分为** $\mathrm{d}^ny=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$.

4° **微分在近似计算中的应用**

(1) **函数值的近似计算**

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{4.3}$$

在原点附近有近似公式:

$$\sin x\approx x;\qquad \tan x\approx x;$$
$$\ln(1+x)\approx x;\qquad \mathrm{e}^x\approx 1+x.$$

(2) **误差估计**

设量 y **由函数** $y=f(x)$**经计算得到,**x_0 **是** x **的近似值,若** x_0 **的误差限为** δ_x,**即**

$$|\Delta x|=|x-x_0|\leq\delta_x,$$

$f(x_0)$**是** $f(x)$**的近似值,则可得** y **的相对误差限为**

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{f(x_0)}\right|\leq\left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta_x.$$

莱布尼茨首先用下述方法讨论乘积 xy **的"差",他把** x **和** y **相应变为** $x+\mathrm{d}x$ **和** $y+\mathrm{d}y$,**于是有**

$$(x+\mathrm{d}x)(y+\mathrm{d}y)-xy=x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

注意到相对于 $x\mathrm{d}y$ **和** $y\mathrm{d}x$ **来说** $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **是无限小,于是他得到**

$$d(xy)=x\,dy+y\,dx.$$

虽然他当时没有给出微分概念的严格的定义,但其中已经蕴含着朴素的微分运算的基本思想,而且所用记号与现在很相像.

由于微分"似零非零"的不确定性,因此在微积分发展过程中引起了不少争论,于是数学家们设法寻找微分概念的严格的陈述方式.

柯西利用极限理论建立起分析的基础,先定义导数为差商的极限,然后在导数的基础上建立微分的概念,这基本上与现在数学分析教程中叙述微分的方法很相似.

二、释疑解惑

问题 1　记号 d^2u, du^2, , $d(u^2)$ 这三者有何区别?

答　d^2u **表示函数** u **的二阶微分**;du^2 **表示** u **的一阶微分的平方,即** $(du)^2$;$d(u^2)$ **表示函数** u^2 **的微分 这三者有本质的差别,不能混淆.**

例如 $u(x)=x^2$ **时**,$d^2u=2dx^2$;$du^2=4x^2dx^2$;$d(u^2)=4x^3dx$.

问题 2　什么是"一阶微分形式的不变性"?为什么二阶微分形式不具有不变性?

答　**设** $y=f(u)$ **是变量** u **的可微函数,即有**

$$dy=f'(u)du.$$

若 u **又是** x **的可微函数** $u=\varphi(x)$,**于是** $du=\varphi'(x)dx$.**复合函数** $y=(f\ \varphi)(x)$ **的微分为**

$$\begin{aligned}dy&=f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx\\&=f'(u)du.\end{aligned}$$

可见把 u **看作自变量或看作一可微函数** $\varphi(x)$ **时,一阶微分形式都是** $dy=f'(u)du$,**这称为一阶微分形式不变性 这种不变性是复合函数求导法则的另一种表现形式.**

但是二阶微分形式不具有不变性.原因在于若 $u=\varphi(x)$ **是可微函数,则** $du=\varphi'(x)dx$ **是** x **的函数.若** u **为自变量时,**y **对** u **的二阶微分为**

$$d^2y=f''(u)du^2. \tag{4.4}$$

又若 $u=\varphi(x)$ **为可微函数,则** y **对** x **的二阶微分为**

$$\begin{aligned}d^2y&=d(dy)\\&=d(f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx)\\&=(f'(\varphi(x))\varphi'(x))'dx^2\\&=[f''(\varphi(x))(\varphi'(x))^2+f'(\varphi(x))\varphi''(x)]dx^2\end{aligned}$$

$$= f''(\varphi(x))(\varphi'(x)\mathrm{d}x)^2 + f'(\varphi(x))\varphi''(x)\mathrm{d}x^2$$

$$= f''(u)\mathrm{d}u^2 + f'(u)\mathrm{d}^2 u . \tag{4.5}$$

上述(4.4)、(4.5)**两式中相差一项** $f'(u)\mathrm{d}^2 u$,**这项当** u **为自变量时为零**.**因此当** u **为自变量或可微函数的因变量时**,**二阶微分形式并不相同**,**即不具有形式不变性**.

三、范例解析

例 1 **求** $\mathrm{d}\left(\arcsin\dfrac{1}{|x|}\right)$.

解 **由于函数** $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{|x|}$ **中出现了绝对值号**,**且** $\dfrac{1}{|x|} \leqslant 1$,**因此应当分别在区间** $x \geqslant 1$ **和** $x \leqslant -1$ **上求导**:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}, & x \geqslant 1, \\[2ex] \dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}, & x \leqslant -1, \end{cases}$$

而后再统一表示为

$$f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\ (|x| \geqslant 1) .$$

于是

$$\mathrm{d}\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x . \qquad \square$$

例 2 **证明近似公式**:

$$\sqrt[n]{A^n + x} \approx A + \frac{x}{n \cdot A^{n-1}}\ (A > 0),$$

其中 $|x|$ **远小于** A.**利用这公式计算** $\sqrt[4]{80}$ **的近似值**.

证 **在函数值近似计算公式**(4.3)**中取**

$$f(x) = \sqrt[n]{1+x},\ x_0 = 0,\ \Delta x = y,$$

则有

$$\sqrt[n]{1+y} \approx 1 + \left(\sqrt[n]{1+x}\right)'\Big|_{x=0} \cdot y = 1 + \frac{1}{n}y .$$

由上式便得

$$\sqrt[n]{A^n + x} = A\sqrt[n]{1 + \frac{x}{A^n}}$$

$$\approx A\left(1 + \frac{1}{n}\frac{x}{A^n}\right)$$

$$= A + \frac{x}{nA^{n-1}} .$$

由此可算得近似值(算至 4 位小数):

$$\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4 - 1}$$

$$\approx 3 - \frac{1}{4 \cdot 3^3}$$

$$= 2.990\ 7 .$$

(用十位有效数字的计算器求得的 $\sqrt[4]{80} = 2.990\ 697\ 562$) □

例 3 设 u 为 x 的二阶可微函数, $y = \ln u$, 求 $\mathrm{d}^2 y$.

解一 按求导法则,

$$\mathrm{d}y = (\ln u)' \mathrm{d}x = \frac{u'}{u}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \left(\frac{u'}{u}\right)' \mathrm{d}x^2 = \frac{u''u - u'^2}{u^2}\mathrm{d}x^2 .$$

解二 应用微分运算法则,

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{u},$$

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}\left(\frac{1}{u} \cdot \mathrm{d}u\right) = -\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{1}{u}\mathrm{d}^2 u = \frac{u\mathrm{d}^2 u - \mathrm{d}u^2}{u^2} .$$

由于 $\mathrm{d}^2 u = u''\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}u^2 = (u'\mathrm{d}x)^2$, 因此两种解法的结果是一致的. □

例 4 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且满足

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + B\Delta x^2 + o(\Delta x^2), \tag{4.6}$$

其中 A, B 是与 Δx 无关的常数. 试问 $f(x)$ 在点 x_0 是否二阶可导?

分析 已知函数在点 x_0 成立

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 可导. 如果由此简单地推断等式

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + B\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

成立与 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导是等价的, 这将是错误的. 下面的反例说明尽管 (4.6) 式成立, 但是 $f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数可能不存在.

解 设

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\ .\end{cases}$$

取 $x_0=0$,于是有

$$f(\Delta x)-f(0)=\Delta x^3\sin\frac{1}{\Delta x}=o(\Delta x^2),$$

即(4.6)式成立(此时 $A=B=0$).

然后求出 $f(x)$的一阶导函数为

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\ .\end{cases}$$

由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}-\Delta x\cos\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x},$$

而$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\dfrac{1}{\Delta x}$不存在,因此 $f(x)$在 $x_0=0$ 处二阶导数不存在. □

注　以后在函数的泰勒展开中可知,若 $f(x)$在点 x_0 二阶可导,则必有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+o(\Delta x^2).$$

这说明 $f(x)$在点 x_0 二阶可导是使(4.6)式成立的充分条件,但并非是必要条件.

例 5　设单摆的周期 T 按下式计算:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长(按米计), $g=9.8\ \mathrm{m\ s^2}$ 为重力加速度,为了使周期增大 0.05 s,原摆长 $l=0.2$ m 约需变化多长?

解　由近似公式

$$\Delta T\approx\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{2\sqrt{l}}\bigg|_{l=l_0}\cdot\Delta l=\frac{\pi}{\sqrt{gl_0}}\Delta l,$$

其中 $l_0=0.2(\mathrm{m})$, $g=9.8(\mathrm{m\ s^2})$,则

$$\Delta l\approx\frac{\sqrt{gl_0}}{\pi}\Delta T$$

$$=\frac{\sqrt{9.8\times0.2}\times0.05}{3.1416}$$

$$= 0.0223(\mathrm{m}).$$ □

四、习题选解

§5 习题(教材上册第 116 页)

6. 检验一个半径为 2 m,中心角为 55°的工件面积(图 5 - 3),现可直接测量其中心角或此角所对的弦长,设量角最大误差为 0.5°,量弦长最大误差为3 mm,试问用哪一种方法检验的结果较为精确.

提示　试用微分的近似计算方法求出测角的误差引起弦的误差,然后与量弦的最大误差比较,可知量弦的方法较为精确.

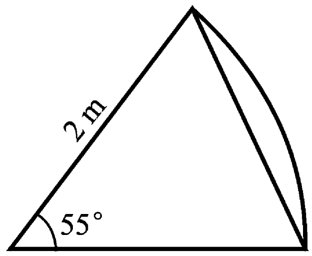


图 5 - 3

总练习题提示与解答

(教材上册第 117 页)

1. 设 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$,证明:

(1) $y' = \dfrac{1}{(cx+d)^2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;

(2) $y^{(n)} = (-1)^{n+1}\dfrac{n!\,c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

提示　(2) 应用数学归纳法.

2. 证明下列函数在 $x = 0$ 处不可导:

(1) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$;　　(2) $f(x) = |\ln|x-1||$.

提示　(1) 按定义求导;　(2) $f'_+(0) \neq f'_-(0)$.

3. (1) 举出一个连续函数,它仅在已知点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不可导;

(2) 举出一个函数,它仅在点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可导.

提示　(1) $f(x) = |x|$ 仅在 $x = 0$ 不可导,$|x - a_i|$ 仅在 $x = a_i$ 不可导.

(2) $\varphi(x)=\begin{cases}x^2 & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$仅在 $x=0$ 可导;再利用 $\varphi(x)$构造仅在点 a_1, a_2,…, a_n可导的函数 .

4. 证明:

(1) 可导的偶函数,其导函数是奇函数;

(2) 可导的奇函数,其导函数为偶函数;

(3) 可导的周期函数,其导函数仍为周期函数 .

5. 对下列命题,若认为是正确的,请给予证明;若认为是错误的,请举一反例予以否定:

(1) 设 $f=\varphi+\psi$,若 f 在点 x_0 可导,则 φ, ψ 在点 x_0 可导(否);

(2) 设 $f=\varphi+\psi$,若 φ 在点 x_0 可导, ψ 在点 x_0 不可导,则 f 在点 x_0 一定不可导(是);

(3) 设 $f=\varphi\cdot\psi$,若 f 在点 x_0 可导,则 φ, ψ 在点 x_0 可导(否);

(4) 设 $f=\varphi\cdot\psi$,若 φ 在点 x_0 可导, ψ 在点 x_0 不可导,则 f 在点 x_0 一定不可导(否, $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)=|x|$, $x_0=0$) .

6. 设 $\varphi(x)$在点 a 连续, $f(x)=|x-a|\varphi(x)$,求 $f'_-(a)$和 $f'_+(a)$.问在什么条件下 $f'(a)$存在 ?

($f'_+(a)=\varphi(a)$, $f'_-(a)=-\varphi(a)$,当 $\varphi(a)=0$ 时, $f'(a)$存在且等于零 .)

7. 设 f 为可导函数,求下列各函数的一阶导数:

(1) $y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$ $\quad(y'=\mathrm{e}^{f(x)}(f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x+f(\mathrm{e}^x)f'(x)))$;

(2) $y=f(f(f(x)))(y'=f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x))$.

8. 设 φ, ψ 为可导函数,求 y':

(1) $y=\sqrt{(\varphi(x))^2+(\psi(x))^2}$

$$\left(y'=\frac{\varphi'(x)\varphi(x)+\psi'(x)\psi(x)}{\sqrt{(\varphi(x))^2+(\psi(x))^2}}\quad(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)\right);$$

(2) $y=\arctan\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$

$$\left(y'=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}\quad(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)\right);$$

(3) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)(\varphi,\psi>0,\varphi\neq 1)$

$$\left(y'=\frac{\psi'(x)\varphi(x)\ln\varphi(x)-\varphi'(x)\psi(x)\ln\psi(x)}{\varphi(x)\psi(x)\ln^2\varphi(x)}\right).$$

9. 设 $f_{ij}(x)(i,j=1,2,\cdots,n)$为可导函数,证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

并利用这个结果求 $F'(x)$:

(1) $F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$; (2) $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$.

解　设

$$D(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

由行列式展开定理,**有**

$$D(x) = \sum_{\tau}(-1)^{\varepsilon(\tau)} f_{1\tau(1)}(x) f_{2\tau(2)}(x)\cdots f_{n\tau(n)}(x),$$

其中 τ **为** $\{1,2,\cdots,n\}$ **的置换**,

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \tau \text{ 为偶置换}, \\ -1, & \text{当 } \tau \text{ 为奇置换}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D'(x) &= \sum_{\tau}(-1)^{\varepsilon(\tau)}\left(f_{1\tau(1)}(x) f_{2\tau(2)}(x)\cdots f_{n\tau(n)}(x)\right)' \\ &= \sum_{\tau}(-1)^{\varepsilon(\tau)}\sum_{k=1}^{n} f_{1\tau(1)}(x)\cdots f'_{k\tau(k)}(x)\cdots f_{n\tau(n)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\tau}(-1)^{\varepsilon(\tau)} f_{1\tau(1)}(x)\cdots f'_{k\tau(k)}(x)\cdots f_{n\tau(n)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(1) $F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=3(x^2+5).$$

(2) 同理可求

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}=6x^2.$$

第五章测试题

(A)

1. 求下列函数 $f(x)$的导数:

(1) $f(x)=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$; (2) $f(x)=\sin\dfrac{x^2}{\sin\dfrac{x^2}{\sin x}}$.

2. 求函数

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的左、右导数, f 在 $x=0$ 处可导吗?

3. 设

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\leq c, \\ ax+b, & x>c. \end{cases}$$

试求 a, b 之值,使得 $f(x)$在 $x=c$ 处可导.

4. 判别下列命题的真伪,并说明理由:

(1) 若 f 在点 x_0 处可导,且在邻域 $U(x_0)$内 $f(x)>0$,则 $f'(x_0)>0$;

(2) 若 f 为$[-a, a]$上的偶函数,且 $f'(0)$存在,则 $f'(0)=0$.

5. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; (2) $f(x)=\dfrac{1}{1-3x}$.

6. 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可微,且 $f(0)=0$,证明存在 $x=0$ 处连续的函数 $g(x)$,使得 $f(x)=xg(x)$.

7. 设 $f(x)=\sin(m\arcsin x)$,证明:

(1) $f(x)$适合方程

$$(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) + m^2 f(x) = 0;$$

(2) 求 $f^{(n)}(0)$.

(**B**)

1．求函数 $f(x)$的导数:

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2 (x + \quad 1 + x^2)}$;

(2) $f(x) = \sin \dfrac{x}{x - \sin \dfrac{x}{x - \sin x}}$.

2．求函数 $f(x) = |\ln x|$在 $x = 1$ 处的左、右导数, f 在 $x = 0$ 处可导吗 ?

3．设 $f(x)$在 $x = 0$ 处连续, 且$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, 求证 $f(x)$在 $x = 0$ 处可导, 又问这时 $f'(0) =$?

4．设

$$f(x) = \begin{array}{ll} x^{2n+1} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 . \end{array}$$

证明: $f^{(k)}(0)(k = 1, 2, \cdots, n)$存在, $f^{(n)}(x)$在 $x = 0$ 处连续, 但 $f^{(n)}(x)$在 $x = 0$ 处不可导 .

5．试求由参变量方程

$$\begin{array}{l} x = 2t + |t|, \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{array}$$

所确定的函数 $y = f(x)$在 $t = 0$ 处的切线斜率 .

6 . 设 $f(x)$在$(a, +\infty)$内可导 .试讨论:

(1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在是否可有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$存在 ?

(2) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$存在是否有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在 ?

7．设 f 是定义在(a, b)内的函数, 在其中某一点 x_0 处可导, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$为任意两个数列, 满足条件:

$$a < x_n < x_0 < y_n < b, \quad n = 1, 2, \cdots$$

且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$, 试证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x_0) .$$

第六章 微分中值定理及其应用

§1 拉格朗日中值定理和函数的单调性

一、内容提要

1° 罗尔(Rolle)中值定理 若函数 f 满足条件:

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导;

(3) $f(a) = f(b)$,

则在(a, b)内至少存在一点 ξ,使得

$$f'(\xi) = 0 .$$

罗尔中值定理是微分学的基本定理,由它可以推出拉格朗日中值定理和柯西中值定理.罗尔中值定理是利用费马定理和闭区间上连续函数最大、最小值定理来证明的.它的另一个重要应用是讨论函数方程的根(见本节范例 8).

2° 拉格朗日(Lagrange)中值定理 若函数 f 满足下列条件:

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导,

则在(a, b)内至少存在一点 ξ,使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

拉格朗日中值定理是讨论泰勒公式及其余项与函数单调、极值的重要工具,而且今后在函数的幂级数展开的收敛性讨论中将起关键的作用,可以说拉格朗日中值定理是泰勒级数的理论基础.

3° 导数极限定理 设函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内连续,在 $U^\circ(x_0)$内可导,且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在,则

(1) f 在点 x_0 处可导;

(2) $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

4° 利用微分中值定理讨论函数的单调性

(1) **函数递增(减)性判别法** 设函数 $f(x)$在区间 I 上可导,则 $f(x)$在 I 上递增(减)的充要条件是

$$f'(x) \geq 0 \quad (\leq 0).$$

(2) **函数严格增(减)性判别法** 若函数 f 在(a, b)内可导,则 f 在(a, b)内严格增(减)的充要条件为:

(i) 对一切 $x \in (a, b)$,有 $f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0)$;

(ii) 在(a, b)内的任何子区间上 $f'(x) \not\equiv 0$.

(3) **判别函数严格增(减)的充分条件**:

设函数 f 在区间 I 上可微,若 $f'(x) > 0 (f'(x) < 0)$,则 f 在 I 上严格增(减) .

二、释疑解惑

问题 1 若 $f(x)$在(a, b)内严格递增,在点 a 处右连续,为何由此能推得 $f(x)$在$[a, b)$上严格递增?

答 只需证明" $x > a$, $f(x) > f(a)$.这时存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$,满足 $a < x_1 < x_2 < x$,由 $f(x)$在(a, b)中的严格递增性有 $f(x_1) < f(x_2) < f(x)$,令 $x_1 \to a^+$,由 $f(x)$在点 a 的右连续性, $f(a) = \lim\limits_{x_1 \to a^+} f(x_1) \leq f(x_2) < f(x)$,于是 $f(a) < f(x)$.

注 上述命题在证明严格不等式时很有用 .

问题 2 试问应用导数极限定理时,应当注意哪些问题?

(1) 在应用导数极限定理时,如果只注意 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$存在的条件,而忽视了 $f(x)$在 $U(x_0)$内连续的条件,则会导致错误的结论 .例如

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

$f(x)$在 $U^{\circ}(0)$中可导,且 $f'(x) = 1$,于是有$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 1$,若认为 $f'(0)$存在,且 $f'(0) = 1$,这就导致错误的结论 .事实上,因为 $f(x)$在点 0 处不连续,当然不可导 .

(2) 下面是单侧导数极限定理,证明方法与导数极限定理相似 .

单侧导数极限定理 设函数 $f(x)$在点 x_0 的右邻域 $U_+(x_0)$(左邻域 $U_-(x_0)$)中连续,在 $U_+^{\circ}(x_0)$($U_-^{\circ}(x_0)$)内可导,且 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$) 存在,则

(i) $f'_+(x_0)$($f'_-(x_0)$)存在;

(ii) $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ ($f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$) .

(3) **若函数** $f(x)$**在** $U(x_0)$**内连续,在** $U^\circ(x_0)$**内可导,** $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$**不存在,一般不能得到** $f'(x_0)$**不存在的结论.例如,函数**

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$f(x)$**在** $U(0)$**中连续,且在** $U^\circ(0)$**内可导,**

$$f'(x)=-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0.$$

显然$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$**不存在,但** $f'(0)=0$ **此例说明:导数极限定理中**$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$**存在是充分条件,但不是必要条件.**

三、范例解析

例 1　设函数 $f(x)$**在**(a,b)**内可导,在**$[a,b]$**上连续,且导函数** $f'(x)$**严格递增,若** $f(a)=f(b)$**,证明:对一切** $x\in(a,b)$**均有**

$$f(x)<f(a)=f(b).$$

证　用反证法,若$\exists$ $x_0\in(a,b)$, $f(x_0)\geq f(a)=f(b)$**,在区间**$[a,x_0]$, $[x_0,b]$**上分别应用拉格朗日中值定理,**$\exists$ ξ_1,ξ_2, $a<\xi_1<x_0$, $x_0<\xi_2<b$**,使得**

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\geq 0,\ f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}\leq 0,$$

这与 $f'(x)$**为严格递增相矛盾.** □

例 2　设函数 $f(x)$**在**$[a,+\infty)$**上连续,在**$(a,+\infty)$**内可导,并且** $f(a)<0$**.试证:若当** $x\in(a,+\infty)$**时,有** $f'(x)>c>0$**,则存在唯一的** $\xi\in(a,+\infty)$**使得** $f(\xi)=0$**.又若把条件** $f'(x)>c$ **减弱为** $f'(x)>0(a<x<+\infty)$**,所述结论是否成立?**

分析　因为 $f(a)<0$**,若可以找到某点** $x>a$**,使得** $f(x)>0$**,则由** $f(x)$**的严格递增性,并应用连续函数的介值定理便可证明存在唯一的** ξ**,使得** $f(\xi)=0$.

证　$\forall$ $x>a$**,在**$[a,x]$**上应用拉格朗日中值定理,**$\exists$ ξ, $a<\xi<x$**,使得**

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a).$$

于是

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)>f(a)+c(x-a).$$

由于 $c>0$**,因此当** x **充分大时总可使得**

$$f(x)>f(a)+c(x-a)>0.$$

不妨设 $x_1 > a$, $f(x_1) > 0$. 因为 $f'(x) > c > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上严格递增; 在 $[a, x_1]$ 上应用连续函数的介值定理, 则 $\exists\ \xi$, $a < \xi < x_1$, 且 ξ 是唯一的.

假若 $f(x)$ 满足 $f'(x) > 0$, 结论可能不成立. 例如, 函数

$$f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{2}, \quad x \in (0, +\infty),$$

满足 $f(0) = -\frac{\pi}{2} < 0$, $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} > 0$, 但因 $f(x)$ 恒小于 0, 故在 $(0, +\infty)$ 中不存在 ξ, 使得 $f(\xi) = 0$. □

例 3 下面是对函数 $f(t)$ 应用中值定理的实例. 因为函数

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \sin \dfrac{1}{t}, & 0 < t \leq x, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

在 $[0, x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 于是存在 ξ, $0 < \xi < x$, 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\sin \frac{1}{x} = f'(\xi) = 2\xi\sin \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi}.$$

在上式中令 $x \to 0^+$, 有 $\xi \to 0^+$, 由

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin \frac{1}{x} = 0, \text{ 与 } \lim_{\xi\to 0^+} 2\xi\sin \frac{1}{\xi} = 0,$$

可知 $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos \frac{1}{\xi} = 0$, 因而 $\lim\limits_{\xi\to 0^+} \cos \frac{1}{\xi} = 0$. 这看起来似乎与 $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos \frac{1}{x}$ 不存在相矛盾, 试分析其原因.

解 首先应当注意: 上面应用拉格朗日中值定理中的 ξ 是个中值点, 是由函数 f 和区间 $[0, x]$ 的端点而定的, 具体说是与 x 有关.

上面的推理过程直到 $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos \frac{1}{\xi} = 0$ 为止都是正确. 当由此得到 $\lim\limits_{\xi\to 0^+} \cos \frac{1}{\xi} = 0$ 时, 必须把 ξ 看作由 x 而确定的中值点才是正确的; 但若把 ξ 作为连续趋于零的变量得到 $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos \frac{1}{x} = 0$, 那是错误的. □

例 4 证明 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 是 x 的严格递增函数, 而 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 是 x 的严格递减函数.

证 设 $f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$, 则有

$$f'(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{1 + \dfrac{1}{x}}$$

$$= \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + x}$$

$$= \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{1}{x+\theta} - \frac{1}{1+x} \quad (0 < \theta < 1),$$

其中最后等式是对函数 $\ln y$ 在区间 $[x, x+1]$ 上应用了拉格朗日中值定理.由此得到

$$f'(x) > \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 0,$$

于是 $f(x)$在 **R** 上严格递增.这样, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{f(x)}$也是 x 的严格递增函数.同理可证 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$是 x 的严格递减函数. □

例 5 设 $F(x)$定义在 $[a, +\infty)$上,而且 n 阶可导.证明:若 $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n-1)}(a) = 0$, $F^{(n)}(x) > 0$, $x \in (a, +\infty)$,则 $F(x) > 0$, $x \in (a, +\infty)$.

分析 当 $n = 1$ 时,需证:若 $F(a) = 0$, $F(x)$在 $[a, +\infty)$上可导, $F'(x) > 0$, $x \in (a, +\infty)$,则 $F(x) > 0$, $x \in (a, +\infty)$,由释疑解惑问题 1 中严格单调性判别法可知上述结论是成立的.对一般的 n,可以从 $F^{(n)}(x) > 0$, $x \in (a, +\infty)$,与 $F^{(n-1)}(a) = 0$,利用拉格朗日中值定理证得 $F^{(n-1)}(x) > 0$, $x \in (a, +\infty)$,以此类推可以证得结论.下面例 6 就是它的应用.

证 $\forall x \in (a, +\infty)$,在 $[a, x]$上对 $F^{(n-1)}(t)$应用拉格朗日中值定理, $\exists \xi_n (a < \xi_n < x)$,使得

$$F^{(n-1)}(x) - F^{(n-1)}(a) = F^{(n)}(\xi_n)(x-a) > 0.$$

因为 $F^{(n-1)}(a) = 0$,所以 $\forall x > a$, $F^{(n-1)}(x) > 0$.继续上述证明步骤 $n-2$ 次,可得 $F'(x) > 0$, $x \in (a, +\infty)$.最后对 $F(x)$在 $[a, x]$上应用拉格朗日中值定理,有

$$F(x) = F(x) - F(a) = F'(\xi_1)(x-a), \quad a < \xi_1 < x,$$

于是证得

$$F(x) > 0, \; x \in (a, +\infty). \qquad □$$

例 6 证明不等式

$$e^{x} > 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad (x > 0).$$

证 证法一 设 $F(x) = e^{x} - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$.

$$F'(x) = e^{x} - 1 - x,$$

$$F''(x) = e^{x} - 1,$$

$$F'''(x) = e^{x} > 0,$$

且

$$F(0)=F'(0)=F''(0)=0,$$

由范例 5 可知 $F(x)>0\quad(x>0)$,即

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}\quad(x>0).$$

证法二　由本节例 5(教材上册第 124 页)可知

$$e^x>1+x\quad(x\neq 0).$$

设 $F(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$, $x>0$.有 $F(0)=0$,

$$F'(x)=e^x-1-x>0,$$

所以 $F(x)$严格递增,于是

$$F(x)>F(0)=0,\ x>0,$$

即

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}\quad(x>0).$$

□

注　应用类似方法可证

$$e^x<1+x+\frac{x^2}{2}\quad(x<0),$$

请读者补写证明.本题是利用函数的单调性证明不等式的典型例子.

例 7　试利用导数极限定理证明:导函数不能具有第一类间断点.

分析　如果导函数具有第一类间断点 x_0,则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$都存在.由于函数 $f(x)$在点 x_0处连续,由单侧导数极限定理,有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=f'_+(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=f'_-(x_0)$,因此不难推出点 x_0为 $f'(x)$的可去间断点和跳跃间断点都是不可能的.

证　首先用反证法证明导函数 $f'(x)$不能有可去间断点.若点 x_0为 $f'(x)$的可去间断点,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在;而 $f(x)$在点 x_0连续,故由导数极限定理,有

$$\lim_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0),$$

这与点 x_0为 $f'(x)$的可去间断点相矛盾.

再用反证法证明 $f'(x)$不能具有跳跃间断点.若 $f'(x)$有跳跃间断点 x_0,则存在左、右邻域 $U_-(x_0)$, $U_+(x_0)$, $f(x)$在这两个邻域上连续,且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$存在,于是 $f(x)$在 $U_-(x_0)$和 $U_+(x_0)$上满足单侧导数极限定理的条件,即有

$$f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0), \quad f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0),$$

由于 $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$,**因此** $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$,**这与** $f(x)$ **在点** x_0 **处可导矛盾.综上证得导函数不能有第一类间断点.** □

*例 8 设 n 为正整数,

$$f(x) = (x-1)^n (x+1)^n.$$

证明方程 $f^{(n)}(x) = 0$ **在** $(-1,1)$ **中恰好有** n **个相异实根.**

分析 罗尔中值定理的重要应用是:当 $f(x)$ 为可导函数时,可以利用方程 $f(x) = 0$ 的根的情况讨论方程 $f'(x) = 0$ 的根的分布.若 ξ_1, ξ_2 是方程 $f(x) = 0$ 的根,即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$,由罗尔定理,$\exists\ \eta, \xi_1 < \eta < \xi_2$, $f'(\eta) = 0$,即在 $f(x) = 0$ 的两个根之间必存在 $f'(x) = 0$ 的一个根.由于方程 $(x-1)^n(x+1)^n = 0$ 有两个 n 重根 ± 1,因此可以逐次应用罗尔定理证得结论.

证 因为 ± 1 为方程 $f(x) = 0$ 的 n 重根,于是该方程有 $2n$ 个实根.现要证明 $f^{(n)}(x) = 0$ 有 n 个相异的实根.

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x-1)^{n-1}(x+1)^n + n(x-1)^n(x+1)^{n-1} \\ &= 2nx(x-1)^{n-1}(x+1)^{n-1}, \end{aligned}$$

方程 $f'(x) = 0$ 以 $x = 0$ 为单根,$x = \pm 1$ 为 $(n-1)$ 重根.因为 $f'(0) = f'(1) = f'(-1) = 0$,由罗尔定理,$\exists\ \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}$, $-1 < \xi_1^{(2)} < 0 < \xi_2^{(2)} < 1$,使得 $f''(\xi_1^{(2)}) = f''(\xi_2^{(2)}) = 0$,于是 $f''(x) = 0$ 有两个单根;又因

$$f''(x) = P_2(x)(x-1)^{n-2}(x+1)^{n-2},$$

其中 $P_2(x)$ 为二次多项式,故方程 $f''(x) = 0$ 还有两个 $n-2$ 重根 ± 1.

由此可推测当导数增高一次,相异单根增加一个,但重根 ± 1 各下降一次.现用归纳法证明相应结论.

若 $f^{(k)}(x) = 0, 1 \leq k < n$ 有 k 个不同单根

$$\xi_1^{(k)} < \xi_2^{(k)} < \cdots < \xi_k^{(k)}, \pm 1 \text{ 为其 } n-k \text{ 重根}.$$

$$f^{(k)}(x) = P_k(x)(x-1)^{n-k}(x+1)^{n-k},$$

由罗尔中值定理,$f^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k+1$ 个单根 $\{\xi_i^{(k+1)}\}_{i=1}^{k+1}$,

$$-1 < \xi_1^{(k+1)} < \xi_1^{(k)} < \xi_2^{(k+1)} < \cdots < \xi_k^{(k)} < \xi_{k+1}^{(k+1)} < 1,$$

$$f^{(k+1)}(x) = P_{k+1}(x)(x-1)^{n-(k+1)}(x+1)^{n-(k+1)},$$

其中 $P_{k+1}(x)$ 为 $k+1$ 次多项式,即 $f^{(k+1)}(x)$ 有两个 $n-(k+1)$ 重根 ± 1.当 $k = n-1$ 时,$f^{(n)}(x) = 0$ 正好有 n 个相异实根. □

四、习题选解(教材上册第 124 页)

8.以 $S(x)$ 记由 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(x, f(x))$ 三点组成的三角形面积,试对 $S(x)$ 应用罗尔中值定理证明拉格朗日中值定理.

证 不妨设 $a<b$,由解析几何可知

$$S(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ x & f(x) & 1 \end{vmatrix},$$

因为 $S(x)$在 (a,b) 内可导,在 $[a,b]$ 上连续, $S(a)=S(b)=0$,于是由罗尔中值定理,$\exists\ \xi\in(a,b)$,使得

$$S'(\xi)=0.$$

由第五章总练习题 9 的行列式求导法则有

$$S'(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ 1 & f'(x) & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(b)-f(a)-(b-a)f'(x)\right],$$

于是

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

10. 设函数 f 在 (a,b) 内可导,且 f'单调. 证明 f'在 (a,b) 内连续.

提示 不妨设 f'为递增函数,$\forall\ x_0\in(a,b)$ 存在 $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$,且 $f'(x_0-0)\leq f'(x_0)\leq f'(x_0+0)$,再证 $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$.(导函数不能有第一类间断点)

14. 证明: $\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 因为当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时 $x\cdot\sin x>0$,于是只需证明 $f(x)=\sin x\cdot\tan x-x^2>0$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 如此计算

$$f'(x)=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x,$$

$$f''(x)=\cos x+\sec x+2\sec x\tan^2 x-2$$

$$=\left(\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sec x}\right)^2+2\tan^2 x\sec x>0,$$

因为 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(x)>0\ \left(x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$,由范例 5 可知 $f(x)>0$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,即

$$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

§2 柯西中值定理和不定式极限

一、内容提要

1° **柯西中值定理** 设函数 f 和 g 满足:

(1) 在 a, b 上都连续;

(2) 在 a, b 内都可导;

(3) $f'(x)$和 $g'(x)$不同时为零;

(4) $g(a) \neq g(b)$,

则存在 $\xi \in a, b$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

2° $\frac{0}{0}$**型不定式** 若函数 f 和 g 满足:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

(2) 在点 x_0 的某空心邻域 $U^{\circ}(x_0)$内两者都可导,且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 存在(A 可为实数,也可为$\pm\infty$或∞),则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

(对 $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to \pm\infty$, $x \to \infty$也可以有同样结论.)

3° $\frac{\infty}{\infty}$**型不定式** 若函数 f 和 g 满足:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = \infty$;

(2) 在点 x_0 的某邻域 $U^{\circ}_{+}(x_0)$内两者都可导,且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 存在(A 可为实数,也可为$\pm\infty$,∞),则

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

(对 $x \to x_0$, $x \to x_0^-$, $x \to \pm\infty$, $x \to \infty$时同样成立结论).

4° **其他类型不定式极限**

$0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0, \infty - \infty$等类型的不定式可以通过四则运算或变换

$$u(x) = \mathrm{e}^{\ln u(x)} \quad u(x) > 0$$

化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的不定式.

二、释疑解惑

问题 1　下面是由拉格朗日中值定理推导出柯西中值定理的一种"证法":

若函数 $f(x)$ **与** $g(x)$ **满足柯西中值定理的条件,则它们自然满足拉格朗日中值定理的条件,于是存在** $\xi\in(a,b)$ **使得**

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\qquad g'(\xi)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}.$$

因为 $g'(\xi)\neq0$, $g(b)-g(a)\neq0$, **所以把上面两式相除即得**

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

试问上述证明对不对?为什么?

答　上面证法是错误的.这是因为拉格朗日中值定理中的中值点 ξ, **对不同的函数** f **和** g **在同一区间** (a,b) **上一般是不相同的.其实,上述推导过程中应当是** $\exists\,\xi_1,\xi_2\in(a,b)$, **使得**

$$f'(\xi_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad g'(\xi_2)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a},$$

当 $\xi_1\neq\xi_2$ **时,就无法通过两式相除而得出柯西中值公式.**

问题 2　试问罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理之间有何联系?在应用时各有什么特点?

答　(1) 逻辑推理关系:罗尔中值定理是借助费马定理经推导而得到的,在此基础上又推得另两个中值定理,即

$$\text{费马定理}\Rightarrow\text{罗尔中值定理}\begin{array}{l}\nearrow\text{拉格朗日中值定理,}\\ \searrow\text{柯西中值定理.}\end{array}$$

由此可见费马定理在微分学中的重要地位.

(2) **由证明方法看:由罗尔中值定理推导拉格朗日中值定理是利用了辅助函数**

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a);$$

由罗尔中值定理推导柯西中值定理是应用了辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

反之,在柯西中值定理中设 $g(x)=x$, **就得到拉格朗日中值定理;进一步更设** $f(a)=f(b)$, **又得到罗尔中值定理.所以,若能首先证明柯西中值定理,则另外两个中值定理都是它的特殊情形.**

(3) **从应用方面看:**

(i) 罗尔中值定理除了在推导另外两个中值定理时所起的关键作用外,在利用方程 $f(x)=0$ 的根的情况讨论方程 $f'(x)=0$ 的根的分布情况时也有重要作用.典型的应用见教材§1 习题 11、12 和本书§1 的范例 8 .

(ii) 拉格朗日中值定理在利用导函数的性质讨论函数的单调性方面具有特殊的作用.函数的单调性是函数在区间上的整体性质,中值定理中的 $f'(\xi)$只是 $f'(x)$在某点 ξ 的局部性质,但因中值点 ξ 的不明确性,故只能假设在整个区间 a, b 内 $f'(x)\geq 0$,并用以推得 $f(x)$在 a, b 上的递增性质.这里存在着整体→局部→整体的辩证关系,也就是应用拉格朗日中值定理的实质所在.

(iii) 柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广,后者是利用导数讨论函数 f 的增量与自变量增量比的性质,而前者是利用导数的比来讨论两个函数 f 与 g 的增量比的性质.

柯西定理的典型应用是讨论$\frac{0}{0}$型不定式极限.在补充了 f, g 在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)=g(x_0)=0$ 之后,利用

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad \xi \text{介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间},$$

使函数值之比可以用导数之比来表示;而不定式极限的基本思想就是利用导数之比的极限来替代函数值之比的极限.本节范例 3、5 就是这种类型的应用.

三、范例解析

例 1 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在 a, b 上连续,且在 a, b 内可导,则在 a, b 内存在点 ξ,使得

$$f(b)-f(a) \quad g'(\xi)= \quad g(b)-g(a) \quad f'(\xi) .$$

分析 本命题比柯西中值定理少了 $f'(x)$和 $g'(x)$不同时为零以及 $g(a)\neq g(b)$两个条件,而结论是以乘积形式出现的,因而应当变换辅助函数为

$$F(x)=f(x) \quad g(b)-g(a) \quad -g(x) \quad f(b)-f(a) \quad ,$$

然后应用罗尔中值定理.

证 作辅助函数

$$F(x)=f(x) \quad g(b)-g(a) \quad -g(x) \quad f(b)-f(a) \quad ,$$

满足:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a)g(b)-f(a)g(a)-g(a)f(b)+g(a)f(a) \\ &= f(a)g(b)-g(a)f(b), \\ F(b) &= f(b)g(b)-f(b)g(a)-g(b)f(b)+g(b)f(a) \\ &= f(a)g(b)-g(a)f(b), \end{aligned}$$

即 $F(a)=F(b)$; $F(x)$在 a, b 上连续,在 a, b 内可导.由罗尔中值定理,

$\exists\ \xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi)\left[g(b)-g(a)\right]-g'(\xi)\left[f(b)-f(a)\right]=0. \qquad \square$$

注 又若 $f'(x)$, $g'(x)$不同时为零, $g(b)-g(a)\neq0$,则 $g'(\xi)\neq0$(不然将导致 $f'(\xi)=0$),于是得出

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

此即为柯西中值定理.这说明以前所设辅助函数不是唯一的.

例 2 设 $f(x)$在 $[a,b]$ $(b>a>0)$ 上连续,在 (a,b) 内可导.证明:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{(b+a)f'(\eta)}{2\eta}.$$

分析 这类命题是要证明存在两个中值点 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{(b+a)f'(\eta)}{2\eta}$.不妨先找出$\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$在柯西中值定理中的差商形式:

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2},$$

然后再证 ξ 的存在性.

证 对 $f(x)$, $g(x)=x^2$,在 $[a,b]$ 上验证满足柯西中值定理的条件: f, g 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导;由于 $0<a<b$,因此 $g(b)\neq g(a)$, $g'(x)=2x\neq0$.于是由柯西中值定理, $\exists\ \eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}.$$

把此式改写为

$$\frac{(b+a)f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

再由拉格朗日中值定理, $\exists\ \xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

于是$\exists\ \xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{(b+a)f'(\eta)}{2\eta}. \qquad \square$$

例 3 设函数 $f(x)$在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

分析 本题可以利用柯西中值定理证明.设两个函数 F, G 为

$$F(x)=f(x)-2f\left(\frac{x+a}{2}\right)+f(a),\ G(x)=\frac{(x-a)^2}{4},$$

有 $F(a)=G(a)=0$; 然后在 $[a,b]$ 上对 F,G 应用柯西中值定理 .本题也可用拉格朗日中值定理证明,下面分别给出两种证法 .

证　证法一 设

$$F(x)=f(x)-2f\left(\frac{x+a}{2}\right)+f(a),\ G(x)=\frac{(x-a)^2}{4},\ x\in[a,b],$$

有

$$F(a)=G(a)=0,\ F(b)=f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a),\ G(b)=\frac{(b-a)^2}{4},$$

$$F'(x)=f'(x)-f'\left(\frac{x+a}{2}\right),\ G'(x)=\frac{x-a}{2},$$

$F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导, $G(b)\neq G(a)$, $F'(x)$, $G'(x)$ 不同时为零,于是可以应用柯西中值定理, $\exists\ \xi_1\in(a,b)$,使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{f'(\xi_1)-f'\left(\frac{\xi_1+a}{2}\right)}{\frac{\xi_1-a}{2}}.$$

再在 $\left[\frac{\xi_1+a}{2},\xi_1\right]\subset[a,b]$ 上对 $f'(x)$ 应用拉格朗日中值定理, $\exists\ \xi\in\left(\frac{\xi_1+a}{2},\xi_1\right)\subset(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi_1)-f'\left(\frac{\xi_1+a}{2}\right)}{\frac{\xi_1-a}{2}}=\frac{f'(\xi_1)-f'\left(\frac{\xi_1+a}{2}\right)}{\xi_1-\frac{\xi_1+a}{2}}=f''(\xi),$$

于是有

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).\qquad\square$$

证法二 作辅助函数

$$F(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f(x),\ x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right],$$

于是

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)-F(a)=f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a).$$

在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 上对 $F(x)$ 应用拉格朗日中值定理, $\exists\ \xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$,使得

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)-F(a)$$

$$= \left[f'\left(\xi_1 + \frac{b-a}{2}\right) - f'(\xi_1)\right]\frac{b-a}{2}.$$

再在 $\left[\xi_1, \xi_1 + \frac{b-a}{2}\right]$ 上对 $f'(x)$ 应用拉格朗日中值定理, v $\xi \in \left(\xi_1, \xi_1 + \frac{b-a}{2}\right) \subset (a, b)$,使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)$$

$$= f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4}. \qquad \square$$

注 所证等式在计算方法课程的差分格式中是一个基本公式.

例 4 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}\ (\varepsilon > 0)$; (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^b}{e^{cx}}\ (c > 0, b > 0)$;

(3) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\varepsilon} \ln x\ (\varepsilon > 0)$.

解 (1) 这是$\frac{\infty}{\infty}$型的不定式,应用洛必达法则,有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon \cdot x^{\varepsilon - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\varepsilon \cdot x^{\varepsilon}} = 0.$$

(2) 这是$\frac{\infty}{\infty}$型的不定式,当 b 为正整数时,多次应用洛必达法则后,有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^{cx}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{bx^{b-1}}{ce^{cx}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{b(b-1)x^{b-2}}{c^2 e^{cx}} = \cdots = \lim_{x \to +\infty} \frac{b!}{c^b e^{cx}} = 0.$$

当 b 为正实数时, $x > 1$ 时有

$$\frac{x^{[b]}}{e^{cx}} \leq \frac{x^b}{e^{cx}} \leq \frac{x^{[b]+1}}{e^{cx}}.$$

上面已证得

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{[b]}}{e^{cx}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{[b]+1}}{e^{cx}} = 0,$$

由函数极限的迫敛性可得

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^{cx}} = 0.$$

(3) $$\lim_{x \to 0^+} x^{\varepsilon} \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\varepsilon}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon \cdot \frac{1}{x^{\varepsilon + 1}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\varepsilon}}{-\varepsilon} = 0. \qquad \square$$

注 由(1)、(2)可知:当 $a > 1$, $p > 0$, $\varepsilon > 0$ 时,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^p x}{x^{\varepsilon}}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\varepsilon}}{a^{x}}=0,$$

记为

$$\ln^p x \ll x^{\varepsilon} \ll a^{x}\quad (x\to+\infty).$$

这些结论在无穷大量的比较时有重要作用.

*例 5　证明不等式

$$\frac{x(1-x)}{\sin\pi x}<\frac{1}{\pi},\quad x\in(0,1).$$

证　$x=\frac{1}{2}$时,不等式是成立的.当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时,设$f(x)=x(1-x)$,$g(x)=\sin\pi x$,在$[0,x]$上应用柯西中值定理,$\exists\ \xi,0<\xi<x<\frac{1}{2}$,使得

$$\frac{x(1-x)}{\sin\pi x}=\frac{x(1-x)-0}{\sin\pi x-0}=\frac{1-2\xi}{\pi\cos\pi\xi},$$

在上式中作变换$1-2\xi=y\ (0<y<1)$,化为

$$\frac{1-2\xi}{\pi\cos\pi\xi}=\frac{y}{\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)}=\frac{y}{\pi\sin\frac{\pi y}{2}}=\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}}\cdot\frac{2}{\pi^2}.$$

利用不等式

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

得到

$$\frac{x(1-x)}{\sin\pi x}=\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}}\frac{2}{\pi^2}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi^2}=\frac{1}{\pi},\quad x\in\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

当$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时,作变换$t=1-x$,$t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,得

$$\frac{x(1-x)}{\sin\pi x}=\frac{t(1-t)}{\sin\pi t}<\frac{1}{\pi}.$$

于是$\forall\ x\in(0,1)$,成立

$$\frac{x(1-x)}{\sin\pi x}<\frac{1}{\pi}.\qquad\square$$

四、习题选解(教材上册第132页)

3.设函数f在点a处具有连续二阶导数.证明:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

提示 用洛必达法则可以证明结论.另一种证法是:设 $F(x)=f(a+x)+f(a-x)$,有

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{F(h)-F(0)}{h^2-0^2},$$

然后利用柯西中值定理求证.

6. 设函数 f 在点 a 的某个邻域内具有二阶导数.证明:对充分小的 h,存在 θ, $0<\theta<1$,使得

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}.$$

解 作辅助函数(不妨设 $h>0$):

$$\left.\begin{aligned}F(x)&=f(a+x)+f(a-x)-2f(a),\\ G(x)&=x^2,\end{aligned}\right\}\quad x\in[0,h].$$

因为 $F(0)=G(0)=0$,由柯西中值定理,有

$$\begin{aligned}&\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\\ =&\frac{F(h)-F(0)}{h^2}\\ =&\frac{F'(\theta_1 h)}{2\theta_1 h}\quad (0<\theta_1<1)\\ =&\frac{f'(a+\theta_1 h)-f'(a-\theta_1 h)}{2\theta_1 h}.\end{aligned}$$

再定义 $F_1(x)=f'(a+\theta_1 x)-f'(a-\theta_1 x)$, $F_1(0)=0$,在 $[0,h]$ 上应用拉格朗日中值定理,又有

$$\begin{aligned}&\frac{f'(a+\theta_1 h)-f'(a-\theta_1 h)}{2\theta_1 h}\\ =&\frac{F_1(h)-F_1(0)}{h}\cdot\frac{1}{2\theta_1}\\ =&\frac{F_1'(\theta_2 h)}{2\theta_1}\quad (0<\theta_2<1)\\ =&\frac{f''(a+\theta_1\theta_2 h)+f''(a-\theta_1\theta_2 h)}{2}.\end{aligned}$$

令 $\theta=\theta_1\theta_2$,即有结论.同理可证 $h<0$ 的情形.

§3 泰勒公式

一、内容提要

1° 带有佩亚诺(Peano)型余项的泰勒(Taylor)公式:

若函数 $f(x)$在点 x_0 存在直到 n 阶导数,则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right). \tag{3.1}$$

2° 带有拉格朗日型余项的泰勒公式

泰勒定理 若函数 f 在 $[a,b]$ 上有 n 阶的连续导函数,在 (a,b) 内存在 $(n+1)$ 阶导函数,则对任意的 $x, x_0\in[a,b]$,必存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{3.2}$$

其中 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$,$0<\theta<1$.称

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3.3}$$

为拉格朗日型余项.

3° 带有拉格朗日型余项的麦克劳林(Maclaurin)公式

在(3.2)中设 $x_0=0$,有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1). \tag{3.4}$$

下面是六个常用的麦克劳林公式:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\\
&\qquad 0<\theta<1,\quad x\in(-\infty,+\infty);\\
&(2)\ \sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\\
&\qquad +(-1)^{m}\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},\\
&\qquad 0<\theta<1,\quad x\in(-\infty,+\infty);\\
&(3)\ \cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots+(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\\
&\qquad +(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2},\\
&\qquad 0<\theta<1,\quad x\in(-\infty,+\infty);\\
&(4)\ \ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}\\
&\qquad +(-1)^{n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\\
&\qquad 0<\theta<1,\quad x>-1;\\
&(5)\ (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}\\
&\qquad +\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\\
&\qquad 0<\theta<1,\quad x>-1;\\
&(6)\ \frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},\\
&\qquad 0<\theta<1,\quad |x|<1.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

泰勒从牛顿二项式展开定理得到启发,形式上得到下列展开式:

$$f(x+h)=f(x)+Ah+Bh^{2}+Ch^{3}+Dh^{4}+\cdots,$$

但是他没有给出这展开式的证明及其成立的条件.拉格朗日直接继承了泰勒的公式,引进了导函数的概念,并证明了公式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^{n}+\cdots.$$

引进导函数的概念并用余项讨论所展开的泰勒多项式的性质,这是拉格朗日在微分学上的重要贡献.

二、释疑解惑

问题 试问泰勒公式的拉格朗日型余项和佩亚诺型余项具有什么不同的特点?

答　从定理的条件看,泰勒公式的佩亚诺型余项成立的条件是 $f(x)$ 在点 x_0 存在直到 n 阶导数;而拉格朗日型余项成立则要求函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内 $f^{(n)}(x)$ 连续,且存在 $n+1$ 阶导函数 $f^{(n+1)}(x)$;后者所需条件比前者强.

从余项形式看,佩亚诺型余项 $o((x-x_0)^n)$ 是以高阶无穷小量的形式给出的,是一种定性的描述;而拉格朗日型余项是用 $n+1$ 阶导数形式给出的,利用这类余项对用泰勒多项式逼近函数时产生的误差可以给出定量的估计.

从证明方法看,佩亚诺型余项是用洛必达法则证明的;而拉格朗日型余项是用柯西中值定理证明的.

从应用方面看,佩亚诺型余项在求极限时用得较多(见教材例 4,本书后面范例 1);而拉格朗日型余项在近似计算估计误差时用得较多.

后面范例 2 说明在适当加强的条件下,可由拉格朗日型余项推得佩亚诺型余项的结论.

三、范例解析

例 1　求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}\ (a>0)$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

解　(1) 利用函数 a^x 带有佩亚诺型余项 $o(x^2)$ 的麦克劳林展开,有

$$a^x=1+\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+o(x^2),$$

$$a^{-x}=1-\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+o(x^2),$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 a\cdot x^2+o(x^2)}{x^2}=\ln^2 a.$$

(2) 当 x 充分大时,利用 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的带有佩亚诺型余项 $o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ 的麦克劳林公式

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right],$$

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right],$$

于是有

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right).$$

这样,就可求得

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{4}+o(1)\right) = -\frac{1}{4}. \qquad \square$$

例 2　若 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域上有 $n+1$ 阶连续导函数,试由泰勒公式的拉格朗日型余项推导佩亚诺型余项公式.

证　因为 $f(x)$具有 $n+1$ 阶连续导函数,由泰勒公式,有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad (0<\theta<1).$$

因为导函数 $f^{(n+1)}(x)$在点 x_0 的某个邻域上连续,所以∃ $M>0$, $\delta>0$,当 $x\in U(x_0,\delta)$时,$|f^{(n+1)}(x)|\leq M$.由此可得

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

于是有

$$\left|\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0| \to 0\quad (x\to x_0),$$

即

$$R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)\quad (x\to x_0).$$

上面推导说明,当导函数 $f^{(n+1)}(x)$在点 x_0 的某个闭邻域内连续时,可以得到 $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$,这与佩亚诺型余项的结论是一致的. $\square$

例 3　设 s 为弧长,d 是对应于它的弦,δ 是对应于半弧的弦(图 6 - 1).试确定用 d 与 δ 表示 s 的近似公式

$$s\approx Ad+B\delta,$$

这里 A, B 是待定常数,使得误差尽可能小.

解　设 r 是圆半径,$2x$ 为对应于弧 s 的圆心角.应用带有拉格朗日型余项的泰勒公式,有

$$d = 2r\sin x$$
$$= 2r\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{\theta'}{120}x^5\right),\ \theta' = \cos\theta_1 x, 0<\theta_1<1;$$

$$\delta = 2r\sin\frac{x}{2}$$
$$= 2r\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{48}x^3+\frac{\theta''}{3\,840}x^5\right),\ \theta'' = \cos\frac{\theta_2 x}{2}, \theta<\theta_2<1;$$

$$Ad + B\delta = 2r\left[\left(A + \frac{1}{2}B\right)x - \left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B\right)x^3 + \left(\frac{\theta'}{120}A + \frac{\theta''}{3\,840}B\right)x^5\right].$$

由 $s = 2rx$,故可利用下列方程组决定待定常数 A, B:

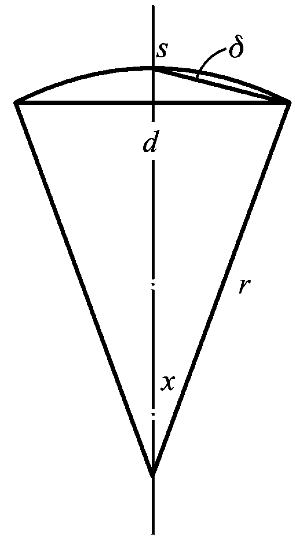


图 6 - 1

$$A + \frac{1}{2}B = 1,$$

$$\frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B = 0,$$

于是有 $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{8}{3}$,即

$$s \approx 2\delta + \frac{2\delta - d}{3}.$$ □

注　一般称上述公式为惠更斯公式 .

例 4　用泰勒公式证明:设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内二阶可导,则存在 $\xi \in (a, b)$,使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

分析　需证等式中出现二阶导数 $f''(\xi)$ 与 $f(x)$ 在 $a, b, \frac{a+b}{2}$ 的函数值,试用展开到二阶导数的泰勒公式是一种可行的途径 .问题在于选取哪些点为展开式中的 x 和 x_0,合理的方法是取 $x_0 = \frac{a+b}{2}$, x 为 a 和 b .

证　把 $f(b)$, $f(a)$ 在点 $x_0 = \frac{a+b}{2}$ 展开到二阶导数项:

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad \frac{a+b}{2} < \xi_1 < b,$$

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2} + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad a < \xi_2 < \frac{a+b}{2}.$$

把上面两式相加,有

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{4}.$$

不妨设 $f''(\xi_1) \leq f''(\xi_2)$,于是有

$$f''(\xi_1) \leq \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \leq f''(\xi_2).$$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对 $f''(x)$ 应用达布定理,$\exists\, \xi \in [\xi_2, \xi_1]$ 使得

$$f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2},$$

这样就证得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$ □

注　在本书前一节的范例3中已应用柯西中值定理和拉格朗日中值定理证明了本题,这里应用泰勒公式和达布定理是另一种证明方法.

例5　设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导,且在 $[0,2]$ 上 $|f(x)|\leq 1$, $|f''(x)|\leq 1$.证明在 $[0,2]$ 上成立

$$|f'(x)|\leq 2.$$

分析　本题是用 $f''(x)$, $f(x)$的上界来估计$|f'(x)|$的上界.可以试用展开到二阶导数的泰勒公式寻找 $f(x)$, $f'(x)$和 $f''(x)$之间的联系.

证　$\forall x\in[0,2]$,把 $f(2)$, $f(0)$在点 x 处展开成带有二阶拉格朗日型余项的泰勒公式,有

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2,\ 0<\xi_1<x,$$

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(2-x)^2,\ x<\xi_2<2,$$

上面两式相减后有

$$2f'(x)=f(2)-f(0)-\frac{f''(\xi_2)}{2}(2-x)^2+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2.$$

再应用$|f(x)|\leq 1$, $|f''(x)|\leq 1$,可得

$$\begin{aligned}2|f'(x)|&\leq 2+\frac{x^2+(2-x)^2}{2}\\&=2+(x-1)^2+1\\&\leq 4,\end{aligned}$$

于是有

$$|f'(x)|\leq 2.\qquad\square$$

说明　本题结论有一个有趣的力学解释:在2秒时间内,如果运动路程和运动加速度都不超过1,则在该时间段内的运动速度决不会超过2.

§4　函数的极值与最大(小)值

一、内容提要

1°　判别极值的必要条件和充分条件

(1) **极值的必要条件(费马定理)**　若函数 f 在点 x_0 可导,且 x_0 为 f 的极值点,则 $f'(x_0)=0$.称 x_0 为 f 的稳定点.

(2) **极值的第一充分条件**　设 f 在点 x_0 连续,在某邻域 $U^\circ(x_0;\delta)$ 内可导.

(i) 若当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时 $f'(x)\leq 0$,当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时 $f'(x)\geq 0$,

则 f 在点 x_0 取得极小值;

(ii) 若当 $x\in \ x_0-\delta, x_0$ 时 $f'(x)\geq 0$,当 $x\in \ x_0, x_0+\delta$ 时 $f'(x)\leq 0$,则 f 在点 x_0 取得极大值 .

(3) 极值的第二充分条件　设 f 在点 x_0 的某邻域 $U\ \ x_0;\delta$ 内一阶可导,在 $x=x_0$ 处二阶可导,$f'(x_0)=0$.

(i) 若 $f''(x_0)<0$,则 f 在点 x_0 取得极大值;

(ii) 若 $f''(x_0)>0$,则 f 在点 x_0 取得极小值 .

(4) 极值的第三充分条件　设 f 在点 x_0 的某邻域 $U\ \ x_0;\delta$ 内存在直到 $n-1$阶导函数,在点 x_0 处 n 阶可导,且 $f^{(k)}(x_0)=0\quad k=1,2,\cdots,n-1$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,则

(i) 当 n 为偶数时,f 在点 x_0 取得极值,且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时取极大值,$f^{(n)}(x_0)>0$时取极小值;

(ii) 当 n 为奇数时,f 在点 x_0 不取极值 .

2° 最大(小)值的求法　设 f 为 a,b 上的连续函数,为了求最大(小)值,只要比较 f 在所有稳定点、不可导点和区间端点处的函数值,由此可求出 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大(小)值 .在求最大(小)值的应用问题中,还可借助实际意义来确认最大(小)值 .

二、释疑解惑

问题 1　若函数 $f(x)$在点 x_0 取极大值,是否可断定在点 x_0 的充分小邻域中,函数在点 x_0左侧上升,右侧下降 ?

答　否 .考察例子

$$f(x)=\begin{cases} 2-\ x^2\ \ 2+\sin\dfrac{1}{x}\ , & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$$

它有极大值 $f(0)=2$.由于

$$f'(x)=\begin{cases} -2x\ \ 2+\sin\dfrac{1}{x}\ \ +\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

当$|x|$充分小且 $x\neq 0$ 时,$f'(x)$的符号决定于 $\cos\dfrac{1}{x}$的符号,而 $\cos\dfrac{1}{x}$在 $x_0=0$ 的充分小邻域内,无限次改变正、负号,因此 $f(x)$不满足在零点左侧上升,右侧下降的条件 .由此可见,极值的第一充分条件并非必要条件 .

问题 2　设 $f(x)$为区间 I 上的连续函数,且在 I 上仅有唯一的极值点 .当

$f(x_0)$为极大(小)值时,为什么 $f(x_0)$必为 f 的最大(小)值?

答 用反证法来说明.设 $f(x)$为区间 I 上的连续函数,只有唯一极小值点 x_0,而无极大值点.倘若 $f(x_0)$不是 f 的最小值,则必定$\exists x_1 \in I$,使 $f(x_1) < f(x_0)$,不妨设 $x_1 < x_0$.

因为 $f(x)$是 $[x_1, x_0]$ 上的连续函数,利用连续函数的最大、最小值定理,存在 $x^* \in [x_1, x_0]$ 为 f 在 $[x_1, x_0]$ 上的最大值点.现证 $x_1 < x^* < x_0$,这是因为

(i) $f(x_1) < f(x_0)$,故 $x^* \neq x_1$;

(ii) 若 $x^* = x_0$,由于 x_0 为 f 在 I 上的极小值点,而点 x_0 又是 f 在 $[x_1, x_0]$ 上的最大值点,因此存在邻域 $U_-(x_0)$,在此邻域内 $f(x)$只能为常数,这与 x_0为 I 上仅有的极小值点相矛盾.

于是 $x^* \in (x_1, x_0)$,从而成为 f 的极大值点,这与 f 在 I 上不存在极大值点的假设又相矛盾.这样点 x_0必为最小值点.

同理可证点 x_0为极大值点而无极小值点的情形.

注 I 为开、闭区间或无穷区间,结论同样成立.上述结论在最大(小)值问题中很有用处.

三、范例解析

例 1 证明

$$e^x < \frac{1}{1-x} \quad (x < 1,\ x \neq 0).$$

分析 需证的不等式等价于

$$e^x(1-x) < 1 \quad (x < 1,\ x \neq 0),$$

于是可以利用验证函数 $f(x) = e^x(1-x)$, $x < 1$ 时的最大值来证明不等式.

证 设函数

$$f(x) = e^x(1-x) \quad (x < 1),$$

$$f'(x) = e^x(1-x) - e^x = -xe^x,$$

$f'(0) = 0$.不难由极值第一充分条件可知 $x = 0$ 是唯一的极(大)值点,因而是最大值点.

由于 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $x > 0$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$在 $x = 0$ 处连续,因此 $f(0)$是严格最大值点,即

$$e^x(1-x) < f(0) = 1, \quad (x < 1,\ x \neq 0).$$

由此可得

$$e^x < \frac{1}{1-x} \quad (x < 1,\ x \neq 0). \qquad \square$$

例 2　设 Ox 轴为镜面,光线由点 $P(a, b)$ 处入射至镜面上点 R,经反射后过点 Q(图 6 - 2) .试用光线沿最省时间的路径传播原理,验证光线反射规律:入射角等于反射角 .

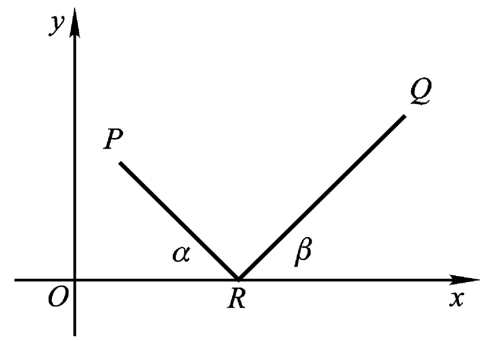


图 6 - 2

解　设光线由点 P 出发在平面镜上点 R 处反射后通过点 Q,上述三点分别有坐标为 $P(a, b)$, $R(x, 0)$, $Q(c, d)$,于是

$$|PR| = \sqrt{b^2 + (x-a)^2},$$

$$|RQ| = \sqrt{d^2 + (c-x)^2},$$

光线走过总的路径为

$$l(x) = |PR| + |RQ|$$

$$= \sqrt{b^2 + (x-a)^2} + \sqrt{d^2 + (c-x)^2}.$$

因为光线是沿最省时间的路线传播,而光速是常数,所以通过求 $l(x)$的极小值,便可确定点 R 的位置 .为此令

$$l'(x) = \frac{x-a}{\sqrt{b^2 + (x-a)^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{d^2 + (c-x)^2}} = 0,$$

由图 6 - 2 可见 $\frac{x-a}{\sqrt{b^2 + (x-a)^2}}$ 是入射角 α 的余弦,而 $\frac{c-x}{\sqrt{d^2 + (c-x)^2}}$ 是反射角 β 的余弦,于是有

$$\alpha = \beta,$$

即入射角等于反射角 . □

说明　由于本例是要证明 $\alpha = \beta$,而不要求具体算出点 R 的坐标 x 和 $l(x)$的最小值,因此当由极值的必要条件 $l'(x) = 0$ 推出了结果 $\alpha = \beta$ 后,解题过程便告结束 .这与通常求极值或最大(小)值的问题稍有不同 .

例 3　置一个质量为 G 的物体在一水平面上,若平面与物体的摩擦系数为 μ,力 F 与水平面的夹角为 θ,且使物体开始移动(图 6 - 3) .试讨论 θ 为多少时,力 F 最小?

解　物体所受的摩擦力为

$$\mu(G - F\sin\theta),$$

于是沿水平方向力的平衡方程为

$$F\cos\theta = \mu(G - F\sin\theta),$$

由此解得

$$F(\theta) = \frac{\mu G}{\cos\theta + \mu\sin\theta}.$$

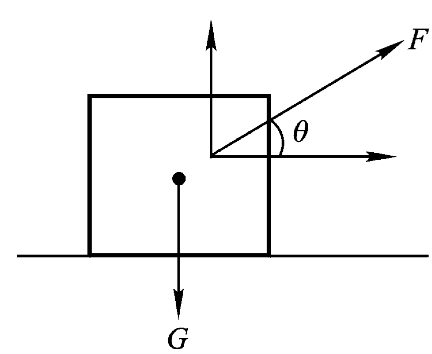


图 6 - 3

因为

$$F'(\theta)=\frac{\mu G(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{(\cos\theta+\mu\sin\theta)^2},\quad 0\leq\theta<\frac{\pi}{2},$$

于是解得唯一的极值点为

$$\theta_0=\arctan\mu.$$

易见 $\theta<\theta_0$ 时 $F'(\theta)<0$, $\theta>\theta_0$ 时 $F'(\theta)>0$,即 θ_0 为极小值点.由于唯一的极值点为最值点,因此当力 F 与水平方向夹角为 $\arctan\mu$ 时,力 F 最小. □

注　力学中称 $\theta_0=\arctan\mu$ 为摩擦角.

例 4　设函数

$$f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)\quad(n\ 为正整数),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续,且 $\varphi(x_0)\neq0$.试问点 x_0 是否为 $f(x)$ 的极值点?当它是极值点时,讨论它是何种极值点?

解　$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n\varphi(x),$$

不妨设 $\varphi(x_0)>0$,由连续函数的局部保号性,在某邻域 $U(x_0)$ 中 $\varphi(x)>0$.

当 n 为奇数时, $f(x)-f(x_0)$ 在无论多小的 $U(x_0)$ 中总会改变符号,于是点 x_0 不是极值点.

当 n 为偶数时, $\forall x\in U^{\circ}(x_0)$ 时, $f(x)-f(x_0)>0$,于是 $f(x)$ 在点 x_0 取到严格极小值.同理可讨论,当 $\varphi(x_0)<0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 取到严格极大值. □

例 5　在顶角为 2α,底圆半径为 R 的直圆锥中,嵌入一个直圆柱,使圆柱的底面在圆锥的底圆内.试求圆柱的底圆半径,使圆柱的表面积为最大.

解　设嵌入圆柱的底半径为 r,高为 H(图 6-4),则有

$$H=(R-r)\cot\alpha,$$

而圆柱表面积为

$$S(r)=2\pi r^2+2\pi r(R-r)\cot\alpha,\quad r\in(0,R).$$

首先由

$$\begin{aligned}S'(r)&=4\pi r+2\pi(R-2r)\cot\alpha\\&=2\pi R\cot\alpha+4\pi r(1-\cot\alpha)\\&=\frac{4\pi(\tan\alpha-1)}{\tan\alpha}\left[r+\frac{R\cot\alpha}{2(1-\cot\alpha)}\right]\\&=0,\end{aligned}$$

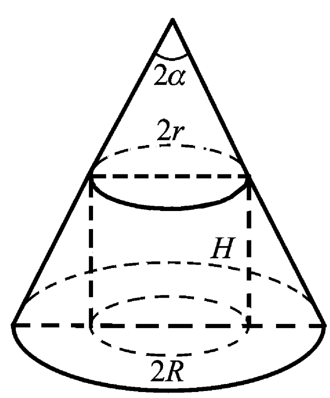


图 6-4

可解得

$$r=r_0=\frac{R\cot\alpha}{2(\cot\alpha-1)}=\frac{R}{2(1-\tan\alpha)}$$

为稳定点.

当 $0<\tan\alpha<\frac{1}{2}$ 时,有 $r_0\in\left(\frac{R}{2},R\right)\subset(0,R)$.此时

$$S'(r)\begin{cases}>0, & r<r_0,\\ <0, & r>r_0,\end{cases}$$

于是 r_0 为唯一的极(大)值点,从而为最大值点 .

又当 $\tan\alpha\geq\frac{1}{2}$ 时,上述 $r_0\geq R$,即 $r_0\notin(0,R)$.而此时对任何 $r\in(0,R)$,恒有 $S'(r)>0$,故 $S(r)$ 在 $(0,R)$ 上递增,没有最大值 .在这种情况下, $S(r)$ 递增地趋于 $H=0$ 的极端状态,即

$$\sup_{r\in(0,R)} S(r)=2\pi R^2 .$$ □

四、习题选解(教材上册第 146 页)

12 .在抛物线 $y^2=2px$ 上哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短(图 6 - 5) .

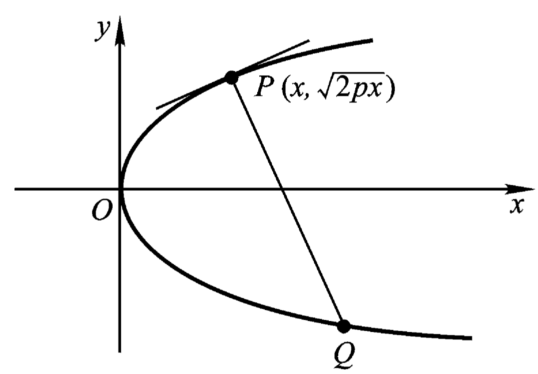


图 6 - 5

解 过抛物线 $y^2=2px$ 上任一固定点 $P(x,\sqrt{2px})$ 的法线方程为

$$Y-\sqrt{2px}=-\sqrt{\frac{2x}{p}}(X-x) .$$

为了求法线与抛物线的另一交点 Q,可以解下列方程组:

$$\begin{cases}Y-\sqrt{2px}=-\sqrt{\frac{2x}{p}}(X-x),\\ Y=-\sqrt{2pX},\end{cases}$$

其解为

$$X=\left(\sqrt{x}+\frac{p}{\sqrt{x}}\right)^2,$$

$$Y=-\sqrt{2p}\left(\sqrt{x}+\frac{p}{\sqrt{x}}\right) .$$

$$l^2(x)=|PQ|^2=\left[\sqrt{2px}+\sqrt{2p}\left(\sqrt{x}+\frac{p}{\sqrt{x}}\right)\right]^2+\left[\left(\sqrt{x}+\frac{p}{\sqrt{x}}\right)^2-x\right]^2$$

$$=8px+12p^2+\frac{6p^3}{x}+\frac{p^4}{x^2}\quad(0<x<+\infty) .$$

由

$$\left(l^2(x)\right)'=8p-\frac{6p^3}{x^2}-\frac{2p^4}{x^3}=0,$$

可解得

$$x = p,$$
$$y = \sqrt{2}\,p,$$

为唯一的极(小)值点,因而是最小值点 .同理可知 $x = p, y = -\sqrt{2}\,p$ 也满足题中的要求 .

§5 函数的凸性与拐点

一、内容提要

1° **凸(凹)函数的定义** 设 f 为定义在区间 I 上的函数,若对任意 x_1, $x_2 \in I$和任意实数 $\lambda, 0 < \lambda < 1$,有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
$$(f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)),$$

则称 f 为 I 上的凸(凹)函数 .

凸函数在最优化理论中有着广泛的应用 .

2° **凸函数的判别法**

(1) **判别法 1** 若函数 f 对于 I 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$ 总有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$$\text{或}\quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

则 f 为 I 上的凸函数 .

(2) **判别法 2** 设 f 为 I 上的可微函数, f'为 I 上的增函数,则 f 为 I 上的凸函数 .

(3) **判别法 3** 设 f 为 I 上的可微函数,对 I 上任意两点 x_1, x_2,有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

则 f 为 I 上的凸函数 .

(4) **判别法 4** 设 f 为 I 上的二阶可导函数,且 $f''(x) \geq 0, x \in I$,则 f 为 I 上的凸函数 .

3° **詹森不等式** 若 f 为 $[a, b]$ 上的凸函数,则对任意 $x_i \in [a, b], \lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) .$$

詹森不等式是凸函数理论中重要的不等式，应用它可以证明著名的霍尔德不等式(见本节习题选解 8(2))，也可以用它来构造其他不等式．

4° 拐点的定义及判别法 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有穿过曲线的切线，且在切点近旁，曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

拐点的必要条件 若 f 在 x_0 二阶可导，且 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$．

拐点的充分条件 设 f 在 x_0 可导，在某邻域 $U^\circ(x_0)$ 内二阶可导．若在 $U^\circ_+(x_0)$ 和 $U^\circ_-(x_0)$ 内 $f''(x)$ 的符号相反，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

二、释疑解惑

问题 1 若 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点，$f'(x_0)$ 可能不存在，但是在拐点的定义中，在 $(x_0, f(x_0))$ 处有穿过曲线的切线，这是否有矛盾？

答 没有矛盾．考察函数

$$y=\sqrt[3]{x},$$

它在 $x=0$ 处不可导，$x\neq 0$ 时

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}.$$

当 $x<0$ 时，$f''(x)>0$，曲线 $y=f(x)$ 是凸的；当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$，曲线是凹的；且过原点有穿过曲线的垂直切线，因而点(0,0)是曲线的拐点．

问题 2 为什么开区间 I 内的凸函数一定处处连续？

答 由教材上册第 152 页例 5 可知：若 f 为开区间内的凸函数，则 f 在 I 内任一点处存在左、右导数．由此可知 f 在 I 内每点处都左、右连续，从而连续．

三、范例解析

例 1 设 a, b, x, y 为正数，试证

$$x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}>(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}.$$

证 因为

$$(\ln x)''=-\frac{1}{x^2}<0,$$

所以 $\ln x$ 是严格凹函数，于是

$$\ln\frac{a+b}{x+y}=\ln\left(\frac{x}{x+y}\cdot\frac{a}{x}+\frac{y}{x+y}\cdot\frac{b}{y}\right)$$

$$> \frac{x}{x+y}\ln\frac{a}{x} + \frac{y}{x+y}\ln\frac{b}{y},$$

即

$$(x+y)\ln\frac{a+b}{x+y} > x\ln\frac{a}{x} + y\ln\frac{b}{y},$$

这样,经左、右移项后便证得

$$x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} > (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}. \qquad \square$$

例 2　设 $f(x)$**是正的二次可微函数,证明** $\ln f(x)$**是凸函数的充要条件是**

$$f(x)\cdot f''(x) - [f'(x)]^2 \geq 0.$$

证　由命题 4°, $\ln f(x)$**是凸函数的充要条件是**

$$[\ln f(x)]'' \geq 0.$$

因为

$$[\ln f(x)]'' = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)},$$

于是 $\ln f(x)$**是凸函数的充要条件为**

$$\frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} \geq 0,$$

即

$$f(x)f''(x) - [f'(x)]^2 \geq 0. \qquad \square$$

例 3　设函数 $f(x)$**是开区间** I **上的凸函数,试用凸函数定义证明:在任何** I **的内闭区间** $[a,b] \subset I$ **上,** $f(x)$**是有界的.**

证 $\forall x \in [a,b]$, $\exists \lambda\ (0 \leq \lambda \leq 1)$, **使得** $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, **由凸函数的定义**

$$f(x) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \leq \max\{f(a), f(b)\} = G,$$

于是函数 $f(x)$**是上有界的.**

再证 $f(x)$**在** $[a,b]$ **上是下有界的.取** $d = \frac{a+b}{2}$, $\forall x \in [a,b]$, **令** x_1 **是** x **在** $[a,b]$ **中关于** d **的对称点,则由** $d = \frac{x+x_1}{2}$, **有**

$$f(d) = f\left(\frac{x+x_1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(x_1)] \leq \frac{f(x)}{2} + \frac{G}{2},$$

于是

$$f(x) \geq 2f(d) - G,$$

即 $f(x)$**是下有界的.** $\square$

例 4　设 f **是开区间** I **上的凸函数,则对任何** $[\alpha,\beta] \subset I$, f **在** $[\alpha,\beta]$ **上满足利普希茨**(Lipschitz)**条件,即存在** $L > 0$, **对任何** $x', x'' \in [\alpha,\beta]$, **成立**

$$|f(x')-f(x'')|\le L|x'-x''|.$$

证 当取定 $[\alpha,\beta]\subset I$ 后,因为 I 是开区间,必能在 I 中选取四点 a,b,c,d,满足

$$a<b<\alpha<\beta<c<d.$$

应用凸函数充要条件,任取 $x',x''\in[\alpha,\beta]$, $x'<x''$,得到

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}\le\frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

现令

$$L=\max\left\{\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|,\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right|\right\},$$

则有

$$\left|\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}\right|\le L,\quad x',x''\in[\alpha,\beta].$$

由于上述常数 L 与 $[\alpha,\beta]$ 中的点 x',x'' 无关,因此 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上满足利普希茨条件:$\exists\, L>0$,使得

$$|f(x'')-f(x')|\le L|x''-x'|,\quad \forall\, x',x''\in[\alpha,\beta].$$ □

注 由本例也可以推知:开区间 I 上的凸函数必在该区间的任一内闭区间上连续,于是 $f(x)$ 是 I 内的连续函数.

*例 5 设 $\varphi(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的函数,证明:如果 $x\varphi(x)$ 和 $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ 这两个函数中有一个是凸函数,则另一个也是凸函数.

证 可以验证:f 为 I 上的凸函数的充要条件是:对于 I 上任意三点 $x_1<x_2<x_3$,有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

上述不等式等价于

$$f(x_1)(x_3-x_2)+f(x_2)(x_1-x_3)+f(x_3)(x_2-x_1)\ge 0.$$

设 $x\varphi(x)$ 是凸函数.当 $0<x_1<x_2<x_3$,有 $\frac{1}{x_3}<\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$,于是由上述充要条件得到

$$\frac{1}{x_3}\varphi\left(\frac{1}{x_3}\right)\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)+\frac{1}{x_2}\varphi\left(\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}\right)+\frac{1}{x_1}\varphi\left(\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)\ge 0.$$

上式又可整理成

$$\frac{1}{x_1x_2x_3}\left[\varphi\left(\frac{1}{x_1}\right)(x_3-x_2)+\varphi\left(\frac{1}{x_2}\right)(x_1-x_3)+\varphi\left(\frac{1}{x_3}\right)(x_2-x_1)\right]\ge 0,$$

即

$$\varphi\left(\frac{1}{x_1}\right)(x_3-x_2)+\varphi\left(\frac{1}{x_2}\right)(x_1-x_3)+\varphi\left(\frac{1}{x_3}\right)(x_2-x_1)\geq 0,$$

这表示 $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ 亦为凸函数.

由相反方向的推理可知:若 $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ 为凸函数,则 $x\varphi(x)$ 也为凸函数. □

四、习题选解(教材上册第 153 页)

7. 证明:(1) f 在区间 I 上为凸函数的充要条件是对 I 上任意三点 $x_1<x_2<x_3$,恒有

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & f(x_1)\\ 1 & x_2 & f(x_2)\\ 1 & x_3 & f(x_3)\end{vmatrix}\geq 0;$$

(2) f 为严格凸函数的充要条件是上述 $\Delta>0$.

提示　先证明 f 在 I 上为凸函数的充要条件是对 I 上任意三点 $x_1<x_2<x_3$ 成立

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

而此条件等价于

$$f(x_1)(x_3-x_2)+f(x_2)(x_1-x_3)+f(x_3)(x_2-x_1)\geq 0.$$

8. 应用詹森不等式证明:

(1) 设 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,有

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

(2) 设 $a_i,b_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,有

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证　(1) 因为 $(\ln x)''=-\frac{1}{x^2}<0$,所以 $\ln x$ 为凹函数,于是

$$\ln\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln a_i=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

即

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

又因 $-\ln x$ 为凸函数，于是

$$\ln \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \frac{1}{n}\ln\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{a_n},$$

即

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}},$$

亦即

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \qquad \square$$

(2) 当 $p>1$ 时，$(x^p)''=p(p-1)x^{p-2}\geq 0$，$x\in(0,+\infty)$，于是 x^p 是凸函数．在詹森不等式中令 $f(x)=x^p$，$\lambda_i=\dfrac{b_i^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，就有

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i^{q-1}}\cdot\frac{b_i^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q}\right)^p \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i\left(\frac{a_i}{b_i^{q-1}}\right)^p \qquad ((q-1)p=q)$$

$$=\frac{1}{\sum_{j=1}^n b_j^q}\sum_{i=1}^n a_i^p,$$

于是

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^p}{\left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^p} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{j=1}^n b_j^q},$$

这样就得到

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^p \leq \left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{p-1}\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)$$

$$=\left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{\frac{p}{q}}\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right). \qquad \left(p-1=\frac{p}{q}\right)$$

再对上面不等式两边开 p 次方，便证得

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad \square$$

§6 函数图像的讨论与方程的近似解

一、内容提要(教材§6、§7)

1° 作函数图像的一般程序是:

(1) 先讨论函数的定义域;

(2) 考察函数的初等特性:如奇偶性、周期性、对称性等;

(3) 求函数的某些特殊点:如与坐标轴的交点、不连续点、不可导点等;

(4) 确定函数的稳定点、单调区间、极值点、凸(凹)性区间及拐点等;

(5) 讨论曲线的渐近线;

(6) 通过列表综合上述结果,并作出函数的图像.

2° 比例法(弦线法) 若函数 $f(x)$ 于 a, b 上连续,在 a, b 内二阶可导,且满足

$$f'(x)\cdot f''(x)\neq 0,\ f(a)f(b)<0,$$

则方程 $f(x)=0$ 在 a, b 内存在唯一的实数根 ξ.

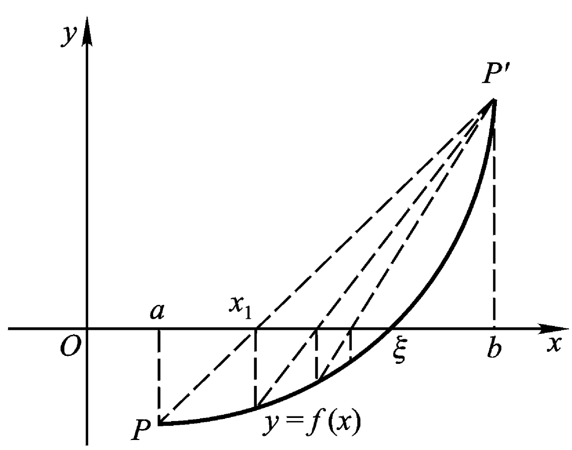


图 6 - 6

图 6 - 6 中讨论 $f'(x)>0,\ f''(x)>0,\ f(a)<0,\ f(b)>0$ 的情况.取点 $P\ \ a, f(a)$ 与点 $P'\ \ b, f(b)$ 的连线与 x 轴交点的坐标

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}\ \ b-a$$

为根 ξ 的第一近似值.

由曲线的凸性可得 $a<x_1<\xi$, $f(x_1)<0$.再在 x_1, b 上应用上述方法,得到 ξ 的第二近似值

$$x_2 = x_1 - \frac{b-x_1)f(x_1)}{f(b)-f(x_1)},$$

一般地由 x_{n-1} 得到 x_n 如下:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1} \quad f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}, \quad n = 2, 3, \cdots . \tag{6.1}$$

于是可以证明

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi,$$

且成立误差估计

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m},$$

其中 $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$.(证明见后面范例 4 .)

3° **牛顿切线法** 设函数 $f(x)$ 在 a, b 上二阶可导,满足 $f'(x) \cdot f''(x) \neq 0$, $f(a) f(b) < 0$.

(1) 初值取法:

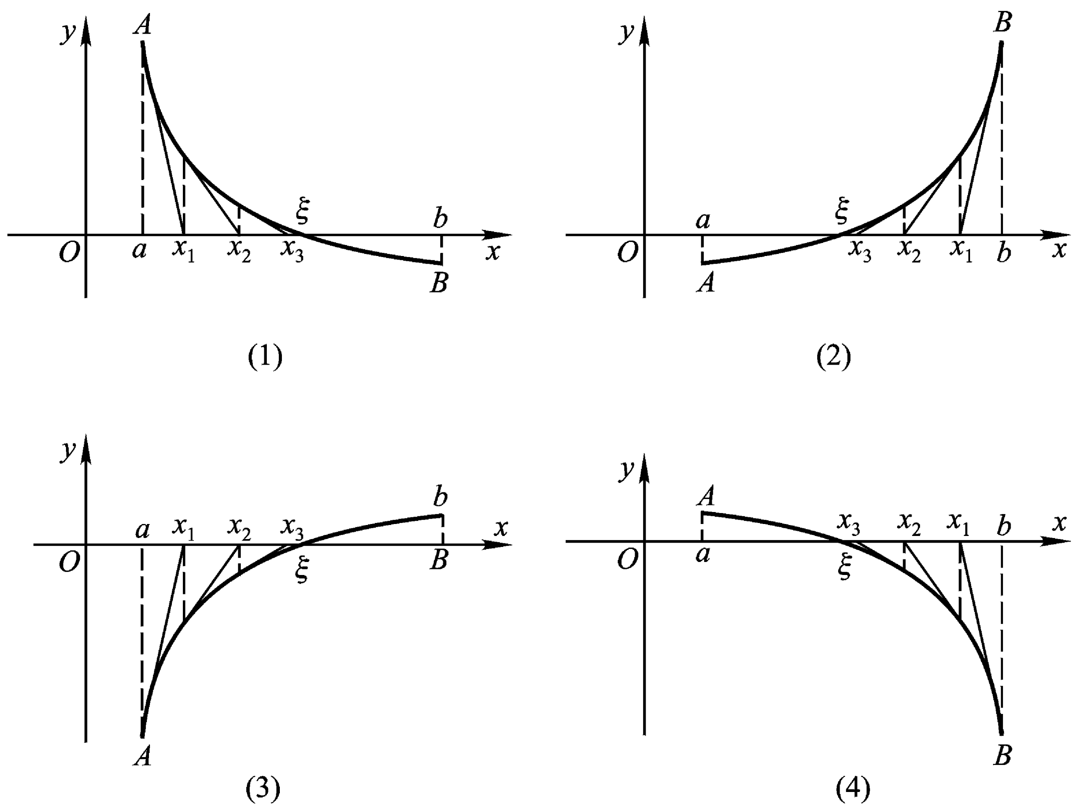


图 6 - 7

(i) 若 $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$,于是 $f(a) > 0$, $f(b) < 0$,取 $x_0 = a$;

(ii) 若 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$,于是 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$,取 $x_0 = b$;

(iii) 若 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$,于是 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$,取 $x_0 = a$;

(iv) 若 $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$,于是 $f(a) > 0$, $f(b) < 0$,取 $x_0 = b$.

上面四种情况对应图 6 - 7(1)～(4) .

即 $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ 时,取 b 为初值, $f'(x) f''(x) < 0$ 时,取 a 为初值 .

(2) **迭代程序**:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{6.2}$$

(3) **误差估计**:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m},$$

其中 $m = \inf\limits_{x\in\ a,b} |f'(x)|$.

二、范例解析

例 1　作函数 $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ **的图形** .

解　定义域为 $-\infty, +\infty$.**因为这是一个周期为** 2π **的周期函数**,**且为奇函数**,**所以只需讨论它在** $0, \pi$ **上的图像** .**由**

$$\begin{aligned} y' &= \cos x + \cos 3x \\ &= \cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x \\ &= 2\cos x \ \ 2\cos^2 x - 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

解得 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$**为稳定点** .**极值和单调区间如表** 6 - 1 **所示** .

表 6 - 1

x	$0, \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}, \pi$
y	↗	极大 $\frac{2}{3}\ 2$	↘	极小 $\frac{2}{3}$	↗	极大 $\frac{2}{3}\ 2$	↘
y'	+	0	-	0	+	0	-

再由

$$y'' = -2\sin x \ \ 5 - 6\sin^2 x \ ,$$

可解得 $x = 0, \arcsin \ \frac{5}{6}, \pi - \arcsin \ \frac{5}{6}, \pi$ **时满足** $y'' = 0$, **于是可得凸性区间和拐点如表** 6 - 2 **所示** .

表 6 - 2

x	$0, \arcsin\dfrac{5}{6}$	$\arcsin\dfrac{5}{6}$	$\arcsin\dfrac{5}{6}$, $\pi - \arcsin\dfrac{5}{6}$	$\pi - \arcsin\dfrac{5}{6}$	$\pi - \arcsin\dfrac{5}{6}, \pi$
y	凹	$\dfrac{4}{27}\ 30$	凸	$\dfrac{4}{27}\ 30$	凹
y''	-	0	+	0	-

其中在 $x = \arcsin\dfrac{5}{6}, \pi - \arcsin\dfrac{5}{6}$处为拐点.根据上述讨论可作出图形,其中 A, B, C 为极值点, D, E 为拐点(图 6 - 8) . □

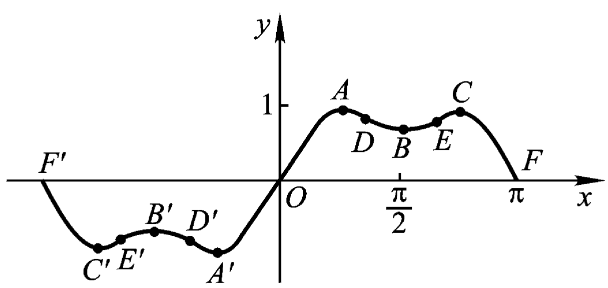


图 6 - 8

例 2 作函数 $y = x + 2\ e^{\frac{1}{x}}$ 的图像 .

解 函数的定义域为非零实数.由

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \frac{x - 2\quad x + 1}{x^2},$$

解得 $x = 2, -1$ 为稳定点.极值和单调区间如表 6 - 3 所示 .

表 6 - 3

x	$-\infty, 1$	-1	$-1, 0\ \cup\ 0, 2$	2	$2, +\infty$
y	↗	极大 $\dfrac{1}{e}$	↘	极小 $4\ e$	↗
y'	+	0	-	0	+

再由

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \frac{5x + 2}{x^4},$$

可解得在 $x=-\frac{2}{5}$处为拐点，$\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)$为凹区间，$\left(-\frac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$为凸区间.因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(y-x)&=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)+2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]\\&=3,\end{aligned}$$

所以 $y=x+3$ 为斜渐近线.又因

$$\lim_{x\to0^+}(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to0^-}(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0,$$

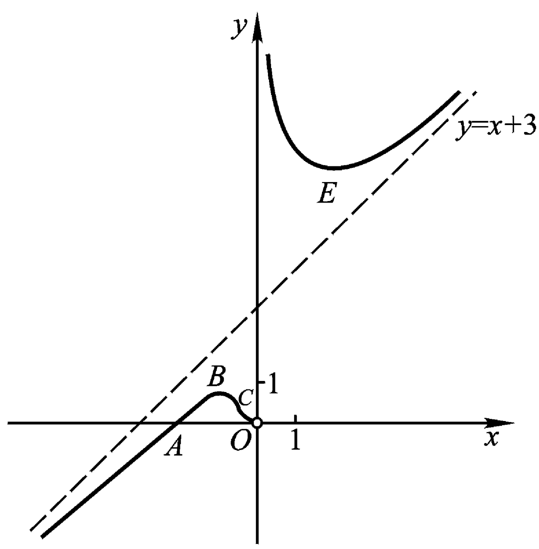


图 6-9

于是 y 轴为曲线的垂直渐近线(单侧).在图 6-9 中，B，E 处取极值，C 为拐点. □

例 3 作出笛卡儿叶形线

$$x^3+y^3-3axy=0\qquad(a>0)$$

的图像.

分析 因为笛卡儿叶形线在今后的例题和习题中还会出现，所以这里用点篇幅讨论它的图形.我们所用的方法是先把它化为参量方程，设 $y=tx$，可得曲线的参量方程为

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3};$$

然后讨论 $x(t)$，$y(t)$随 t 变化的状况.

解 定义域为 $t \neq -1$.因为交换 x, y 的位置原方程不变,所以曲线关于直线 $y = x$ 对称.由

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3a \quad 1 - 2t^3}{1 + t^3 \quad ^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{3at \quad 2 - t^3}{1 + t^3 \quad ^2},$$

可解得 $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$为 $x(t)$的稳定点, $t = 0, \sqrt[3]{2}$为 $y(t)$的稳定点.$x(t), y(t)$的单调区间和极值点如表 6 - 4 所示.

表 6 - 4

t	$-\infty, -1$	$-1, 0$	0	$0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1$	$1, \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}, +\infty$
x	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$	0	$0 \nearrow \sqrt[3]{4}a$	极大 $\sqrt[3]{4}a$	$\sqrt[3]{4}a \searrow \frac{3}{2}a$	$\frac{3}{2}a \searrow \sqrt[3]{2}a$		$\sqrt[3]{2}a \searrow 0$
x'	+	+		+	0	-	-		-
y	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	极小 0	$0 \nearrow \sqrt[3]{2}a$		$\sqrt[3]{2} \nearrow \frac{3}{2}a$	$\frac{3}{2}a \nearrow \sqrt[3]{4}a$	极大 $\sqrt[3]{4}a$	$\sqrt[3]{4}a \searrow 0$
y'	-	-	0	+		+	+	0	-

下面讨论渐近线.因为当 $t \to -1$ 时 $x \to \infty$,所以

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \to -1} t = -1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \quad y + x \quad = \lim_{t \to -1} \frac{3at \quad 1 + t}{1 + t^3} = -a,$$

这样

$$x + y = a$$

为曲线的渐近线.

综合以上讨论,可得曲线图像如图 6 - 10 所示. □

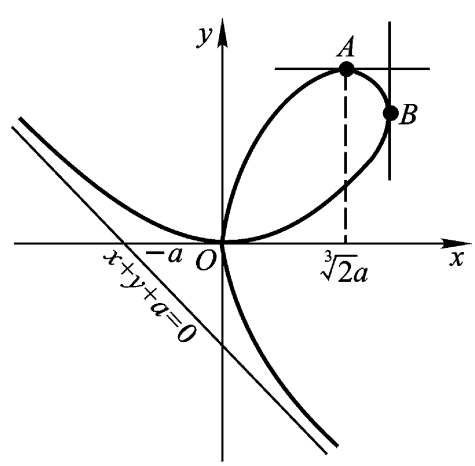


图 6 - 10

注 由上面讨论可见:当参量从 0 上升到 $+\infty$时,曲线上点正好画出第一象限中的叶形线.而当参量从 0 减至 $-\infty$时,曲线位于第二、四象限,并向渐近线无限靠近.

例 4 设函数 $f(x)$在 a, b 上二阶可导, $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0, x \in \quad a, b$,又 $\xi \in \quad a, b$ 是方程 $f(x) = 0$的根.在比例法中取 $x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \quad b - a$,按迭代程序

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

得到严格递增数列$\{x_n\}$.证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

证 由于$\{x_n\}$递增,且 $x_n \leq b$,由数列极限的单调有界定理,存在$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.在迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

中令 $n\to\infty$,利用 $f(x)$的连续性,有

$$\frac{(b - c) f(c)}{f(b) - f(c)} = 0,$$

于是 $f(c) = 0$.因为 $f(x)$在 $[a, b]$ 中存在唯一根 ξ,所以 $c = \xi$,即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi. \qquad \square$$

* **例 5** 设 $f''(x)$在 $[a, b]$ 上有界,证明牛顿切线法的误差估计式为

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m} |x_n - \xi|^2,$$

其中 ξ 为方程 $f(x) = 0$ 的根, M 为 $|f''(x)|$在 $[a, b]$ 上的上界, $m = \inf\limits_{a < x < b} \{|f'(x)|\}$.

证 设 b 为切线法的初值, $x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$,于是

$$\xi - x_1 = \xi - b + \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{6.3}$$

把 $f(\xi)$在点 b 处展开成带有二次拉格朗日型余项的泰勒公式

$$0 = f(\xi) = f(b) + f'(b)(\xi - b) + \frac{1}{2} f''(c_1)(\xi - b)^2, \ \xi < c_1 < b, \tag{6.4}$$

再把(6.4)代入(6.3),可得

$$x_1 - \xi = \frac{f''(c_1)}{2 f'(b)} (\xi - b)^2.$$

类似地,由 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$,有

$$\xi - x_{n+1} = \xi - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

同样地,把 $f(\xi)$在点 x_n处作泰勒展开,可得

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c_n)(\xi - x_n)^2, \quad (\xi < c_n < x_n),$$

两式相消后又得

$$x_{n+1} - \xi = \frac{1}{2}\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} \quad x_n - \xi \ ^2,$$

从而有

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m}|x_n - \xi|^2 .$$

同理可证 a 为切线法初值的情形. □

注　因为上述不等式右边出现平方项,当 $|x_n - \xi| < 1$ 时,x_n 会很快地收敛于根 ξ.

总练习题提示与解答

(教材上册第 158 页)

1. 证明:若 $f(x)$ 在有限开区间 a, b 内可导,且 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$,则至少存在一点 $\xi \in \ a, b$,使 $f'(\xi) = 0$.

提示　(1) 利用条件 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$,把函数 $f(x)$ 延拓成闭区间 a, b 上的连续函数.(2) 也可用反证法:若 a, b 内不存在 ξ,使得 $f'(\xi) = 0$,由导函数的介值定理 $f'(x)$ 在 a, b 内保持同号.

3. 设函数 f 在 a, b 上连续,在 a, b 内可导,且 $a \cdot b > 0$.证明存在 $\xi \in \ a, b$,使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi) .$$

提示　设 $F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $G(x) = \dfrac{1}{x}$,然后在 a, b 上应用柯西中值定理.

4. 设 f 在 a, b 上三阶可导,证明存在 $\xi \in \ a, b$,使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2} \ b - a \quad f'(a) + f'(b) \quad - \frac{1}{12} \ b - a \ ^3 f \ (\xi) .$$

证　证法一　设

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{1}{2} \ x - a \quad f'(a) + f'(x) \quad , \qquad x \in \ a, b \ ,$$

$$G(x) = \ x - a \ ^3,$$

有 $F(a) = 0$, $G(a) = 0$.因为

$$F'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} \ f'(a) + f'(x) \quad - \frac{1}{2} \ x - a \ f''(x),$$

$$F''(x) = - \frac{1}{2} \ x - a \ f \ (x),$$

于是 $F'(a) = 0$, $F''(a) = 0$.

先在 $[a, b]$ 上对 F, G 应用柯西中值定理,$\exists\ \xi_1, a < \xi_1 < b$,使得

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{3(\xi_1 - a)^2}.$$

然后再在 $[a, \xi_1]$ 上应用柯西中值定理,$\exists\ \xi, a < \xi < \xi_1$,使得

$$\frac{F'(\xi_1)}{3(\xi_1 - a)^2} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{3(\xi_1 - a)^2 - 0} = \frac{F''(\xi)}{6(\xi - a)} = -\frac{1}{12} f'''(\xi).$$

于是有

$$\frac{F(b)}{G(b)} = -\frac{1}{12} f'''(\xi),$$

即

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b - a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b - a)^3 f'''(\xi).$$

[证法二] 利用罗尔中值定理来证明.令

$$f(b) - f(a) - \frac{1}{2}(b - a)[f'(a) + f'(b)] + \frac{1}{12}(b - a)^3 L = 0,$$

其中 L 为待定常数.设

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{1}{2}(b - x)[f'(x) + f'(b)] + \frac{1}{12}(b - x)^3 L,$$

有 $\varphi(a) = \varphi(b)$,在 $[a, b]$ 上对 $\varphi(x)$ 应用罗尔中值定理,有 $\varphi'(\xi_1) = 0$, $a < \xi_1 < b$ 然后在 $[\xi_1, b]$ 上对 $\varphi'(x)$ 再一次应用罗尔定理,$\exists\ \xi, \xi_1 < \xi < b$,有 $\varphi''(\xi) = 0$.由此可以解得 $L = f'''(\xi)$.

6. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正数,且

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

证明:(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

证 (1)

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n},$$

当 $x\to 0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}\ln f(x)$ 是 $\frac{0}{0}$ 型极限,利用洛必达法则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1 + a_2^x\ln a_2 + \cdots + a_n^x\ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x} \\ &= \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}\end{aligned}$$

$$= \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\ .$$

由对数函数的连续性,得到

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\ .$$

(2) **记** $A = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ **,有** $0 < \frac{a_k}{A} \leq 1\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ **,于是**

$$f(x) = A \cdot \left(\frac{\left(\frac{a_1}{A}\right)^x + \left(\frac{a_2}{A}\right)^x + \cdots + \left(\frac{a_n}{A}\right)^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad (x > 0)\ .$$

由

$$A\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} < f(x) \leq A\left(\frac{1 + 1 + \cdots + 1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = A,$$

令 $x \to +\infty$**,借助函数极限的迫敛性,证得**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A\ .$$

8 . **设** $h > 0$**,函数** f **在** $U(a; h)$ **内具有** $n + 2$ **阶连续导数,且** $f^{(n+2)}(a) \neq 0$, f **在** $U(a; h)$ **内的泰勒公式为**

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \ 0 < \theta < 1\ .$$

证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \frac{1}{n+2}$.

证 **函数** f **在** $U(a; h)$ **内带有** $n + 2$ **次拉格朗日型余项的泰勒公式为**

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1}$$
$$+ \frac{f^{(n+2)}(a + \theta_1 h)}{(n+2)!}h^{n+2}, \quad (0 < \theta_1 < 1)\ . \qquad (6-1)$$

另一方面,对函数 $f^{(n+1)}(x)$**在** $[a, a + \theta h]$ **上应用拉格朗日中值定理,有**

$$f^{(n+1)}(a + \theta h) - f^{(n+1)}(a) = f^{(n+2)}(a + \theta\theta_2 h)\theta h, \ 0 < \theta_2 < 1,$$

于是有

$$f^{(n+1)}(a + \theta h) = f^{(n+1)}(a) + f^{(n+2)}(a + \theta\theta_2 h)\theta h\ .$$

把上式代入题设中的泰勒公式,得

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1}$$
$$+ \frac{f^{(n+2)}(a + \theta\theta_2 h)}{(n+1)!}\theta h^{n+2}, \qquad (6-2)$$

由式(6 - 1),(6 - 2)相等,有

$$\theta f^{(n+2)}(a+\theta\theta_2 h)=\frac{1}{n+2}f^{(n+2)}(a+\theta_1 h).$$

在上式中令 $h\to 0$,应用条件:$f^{(n+2)}$ 的连续性和 $f^{(n+2)}(a)\neq 0$,即证得

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+2}.$$

9. 设 $k>0$,试问 k 为何值时,方程 $\arctan x-kx=0$ 存在正实根.

解 设

$$f(x)=\arctan x-kx\quad(k>0).$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以 $\exists X>0$,$\forall x>X$,$f(x)<0$. 算出

$$f'(x)=\frac{-k}{1+x^2}\left(x^2+\frac{k-1}{k}\right),$$

当 $0<k<1$ 时,$\exists\delta>0$,当 $x\in U_+(0;\delta)$ 时,$f'(x)>0$,即 $f(x)$ 在 $U_+(0;\delta)$ 中严格递增,于是 $\exists x_1>0$,$f(x_1)>f(0)=0$. 取 $x_2>x_1$,$f(x_2)<0$,在 $[x_1,x_2]$ 上应用连续函数的介值定理,$\exists\xi\in(x_1,x_2)$,$f(\xi)=0$,$\xi>0$. 这样,当 $0<k<1$ 时方程 $\arctan x-kx=0$ 存在正实根.

当 $k\geq 1$ 时,设

$$F(x)=kx-\arctan x,$$

$$F'(x)=k-\frac{1}{1+x^2}>0,\quad F(0)=0,$$

于是有

$$F(x)>0\quad(x>0),$$

即方程 $\arctan x-kx=0$ 无正实根.

综上所述,当 $0<k<1$ 时方程

$$\arctan x-kx=0$$

有正实根.

12. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$. 证明存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 在点 a,b 作泰勒展开到二阶拉格朗日型余项,有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2},$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\quad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b.$$

利用条件 $f'(a)=f'(b)=0$,把上面两式相减,得到

$$|f(b)-f(a)|\le\frac{|b-a|^2}{8}\left(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\right).$$

设 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$,即有

$$|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

13.设函数 f 在 $(0,a)$ 内取得最大值,在 $[0,a]$ 上具有二阶导数,且 $|f''(x)|\le M$.试证

$$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma.$$

提示 设 f 在 $x_0\in(0,a)$ 取得最大值,由费马定理,$f'(x_0)=0$.然后在 $[0,x_0]$,$[x_0,a]$ 上对 $f'(x)$应用拉格朗日中值定理.

14.设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微,且 $0\le f'(x)\le f(x)$,$f(0)=0$.证明:在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv0$.

证 作辅助函数

$$F(x)=e^{-x}f(x),\quad x\in[0,+\infty).$$

由于

$$F'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]\le0,$$

因此 $F(x)$递减,则

$$F(x)=e^{-x}f(x)\le F(0)=0,\quad x>0.$$

这样 $f(x)\le0$;又因假设 $f(x)\ge0$,故证得

$$f(x)\equiv0,\quad x\ge0.$$

15.设 $f(x)$满足 $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$,其中 $g(x)$为任一函数.证明:若 $f(x_0)=f(x_1)=0\ (x_0<x_1)$,则 f 在 $[x_0,x_1]$ 上恒等于 0.

证 由于 $f(x)$是 $[x_0,x_1]$ 上的连续函数,因此 $f(x)$在 $\xi,\eta\in[x_0,x_1]$ 处分别取到最大、最小值.易知 $f(\xi)\ge0$,现证 $f(\xi)=0$.用反证法,若 $f(\xi)>0$,因为 $f(x_0)=f(x_1)=0$,所以 $x_0<\xi<x_1$.由费马定理,$f'(\xi)=0$.用 ξ 代入方程 $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$,可得

$$f''(\xi)=f(\xi)>0,$$

故 ξ 为严格极小值点,这与 ξ 是最大值点相矛盾,于是 $f(\xi)=0$.同理可证 $f(\eta)=0$,由此推知

$$f(x)\equiv0,\quad x\in[x_0,x_1].$$

18.证明:(1) 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上可导,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$都存在,则

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

(2) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上 n 阶可导,若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ 都存在,则

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0 \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

证 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在,由函数极限的柯西准则,$\forall \varepsilon_k>0$ $(\varepsilon_k\to 0)$,$\exists X_k$,当 $x', x''>X_k$ 时

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_k.$$

取正整数 $n_k>X_k$ 且 $n_{k+1}>n_k+1$,有

$$|f(n_k+1)-f(n_k)|<\varepsilon_k.$$

利用拉格朗日中值定理,$\exists \xi_k$, $n_k<\xi_k<n_k+1$,使

$$|f'(\xi_k)|<\varepsilon_k,$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}|f'(\xi_k)|=0.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在,由归结原则可知

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

(2) 把函数 $f(x+j)$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$ 在点 x 处泰勒展开到 n 阶余项,有

$$f(x+j)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}j+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}j^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi_j)}{n!}j^n,$$

$$j=1,2,\cdots,n-1,\quad x<\xi_j<x+j.$$

把 $f'(x), f''(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$ 看作变量解出上述线性方程组,这些导数可以表示为 $f(x+j)-f(x)$, $f^{(n)}(\xi_j)$, $(j=1,2,\cdots,n-1)$ 的线性组合.由题设条件:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ 存在,故有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+j)-f(x)]=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(\xi_j)\text{存在},\quad (j=1,2,\cdots,n-1),$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)$, $(k=1,2,\cdots,n-1)$ 存在.由(1)可知:从 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n-1)}(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ 存在可得

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)=0.$$

由前面所证得到

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0,\quad (k=1,2,\cdots,n-1).$$

19.设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的二阶可导函数.若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$,使 $f''(\xi)=0$.

证 用反证法.若 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f''(x)\neq 0$,由导函数的介值性,$\forall x$, $f''(x)>0$(或 $f''(x)<0$),于是 $f(x)$ 为凸(凹)函数.若 $f'(x)$ 恒为常数,结论显

然成立,不妨设 $f'(x)$不恒为常数,于是$\exists x_0$, $f'(x_0)\neq 0$.由函数的凸性,$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

当 $f'(x_0)>0$ 时,令 $x\to+\infty$;当 $f'(x_0)<0$ 时,令 $x\to-\infty$,都有

$$f(x)\to+\infty\quad(x\to\infty),$$

这与 f 在$(-\infty,+\infty)$上有界相矛盾.当 f 为凹函数时,同理可证 f 是无界的.由此可见,$\exists \xi\in(-\infty,+\infty)$,使得

$$f''(\xi)=0.$$

第六章测试题

(A)

1.设 $\alpha>1$, $x>0$.证明:

$$(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x\quad(x>0).$$

2.设函数 $f(x)$在(a,b)内可导,导函数 $f'(x)$在(a,b)内有界.证明:f是(a,b)内的有界函数.反之,试问从函数 $f(x)$有界是否能得到导函数 $f'(x)$是有界的?

3.证明:函数 $f(x)$为 n 次多项式的充要条件为:

$$f^{(n+1)}(x)\equiv 0,\ x\in\mathbf{R}.$$

4.设 $a^2-3b<0$,证明方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 仅有一实根.

5.设 $f(x)$在$(a,+\infty)$上可导,且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x),$$

试证:存在 $\xi\in(a,+\infty)$,使得

$$f'(\xi)=0.$$

6.设函数 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上可导,且

$$0\leq f(x)<\frac{x}{1+x^2}.$$

证明:存在 $\xi>0$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

7.若函数 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=f'(1)=0$,则存在 $x\in(0,1)$,使得

$$|f''(x)|\geq 2.$$

(B)

1.设函数 f, g 在 $\mathbf{R}$ 上可导,且 $f'(x)>g'(x)$, $f(a)=g(a)$.证明:当

$x > a$时,有 $f(x) > g(x)$;当 $x < a$ 时,有 $f(x) < g(x)$.

2 . **证明不等式**

$$\frac{1-x}{1+x} < \mathrm{e}^{-2x},\ 0 < x < 1 .$$

3 . **设函数** $f(x)$**在** $[a,+\infty)$ **上连续,当** $x > a$ **时,** $f'(x) > k > 0$,**其中** k **为常数,又** $f(a) < 0$.**证明** $f(x)$**在** $\left(a, a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$ **内有唯一的实根** .

4 . **设函数** $f(x)$**在点** x_0 **的某一邻域内存在四阶导数,且** $|f^{(4)}(x)| \leq M$.**证明:对于此邻域内异于** x_0 **的任何** x **都有**

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x) - 2f(x_0) + f(x')}{(x-x_0)^2} \right| \leq \frac{M}{12}(x-x_0)^2,$$

其中 x'**与** x **关于点** x_0 **对称** .

5 . **设函数** $f(x)$**在** $[a,b]$ **上连续,在** (a,b) **内可导,** $f(a) = f(b) = 0$.**试证:对任何** $\alpha\in\mathbf{R}$,**存在** $\xi\in(a,b)$ **使得** $\alpha f(\xi) = f'(\xi)$.

6 . **设定义在** $(0,a)$ **内的函数** $f(x)$**满足条件:**

(1) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$;

(2) $-kx < f(x) < kx\ (k > 0)$.

证明: $\lim\limits_{x\to0^+} x^{f(x)} = 0$.

7 . **设** $f(x)$**在** $[0,1]$ **上二阶可导,且** $f(0) = f(1) = 0$, $\min\limits_{x\in[0,1]} \{f(x)\} = -1$,**试证存在** $\xi\in(0,1)$ **使得**

$$f''(\xi) \geq 8 .$$

第七章　实数的完备性

§1　关于实数集完备性的基本定理

一、内容提要

1°　**区间套定理**　若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套,则存在唯一的实数 ξ,使得 $\xi\in[a_n, b_n]$,$n=1,2,\cdots$,即

$$a_n \leq \xi \leq b_n,\quad n=1,2\cdots.$$

推论　若 ξ 是区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 的公共点,则任给 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,

$$[a_n, b_n]\subset U(\xi;\varepsilon);$$

且同时有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\xi$.

2°　**柯西准则**　数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得对一切 $m, n>N$,有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon.$$

3°　**聚点和聚点定理**

聚点的等价性质　若 S 是数集,则下列条件之间是两两等价的:

(1) ξ 是 S 的聚点;

(2) 若点 ξ 的任何 ε 邻域内都含有 S 中异于 ξ 的点,即

$$U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S\neq\varnothing;$$

(3) 存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\}\subset S$,使

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi.$$

聚点定理　实轴上任一有界无限点集至少有一个聚点.

致密性定理　有界数列必含有收敛子列.

4°　**有限覆盖定理**　设 H 是闭区间 $[a, b]$ 的(无限)开覆盖,则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a, b]$.

5°　**实数完备性基本定理的等价性**

(1) 确界原理;(2) 单调有界定理;(3) 区间套定理;(4) 有限覆盖定理;(5) 聚点定理;(6) 柯西收敛准则,这六个基本定理是相互等价的,其中任何一个都

可以作为实数完备性的定义.

二、释疑解惑

问题 1 设 S 是数集,试给出"η 不是 S 的聚点"的正面陈述?

答 η 不是数集 S 的聚点 $\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon_0>0$,在 $U(\eta;\varepsilon_0)$ 中至多包含 S 中有限多个点.

例如 $S=\left\{(-1)^n+\frac{1}{2^n}\right\}$,试找出 S 的所有聚点.事实上,因为 $\left\{(-1)^{2k}+\frac{1}{2^{2k}}\right\}$ 是各项互异的数列且收敛于 1,而 $\left\{(-1)^{2k+1}+\frac{1}{2^{2k+1}}\right\}$ 也是各项互异的数列且收敛于 -1,所以 ±1 是 S 的聚点.$\forall\,\eta\neq\pm1$,取

$$\varepsilon_0=\frac{1}{2}\min\{|\eta-1|,|\eta+1|\},$$

在 $U(\eta;\varepsilon_0)$ 中至多只有数集 S 中有限多个点,于是 η 不是数集 S 的聚点.这样 ±1 是 S 的所有聚点.

问题 2 设 S 是有界数集,则 $\sup S$($\inf S$)是 S 的聚点,对不对?在什么情况下,$\sup S$($\inf S$)是数集 S 的聚点?

答 一般情况下,当 $\sup S\in S$ 时,它可能不是数集 S 的聚点.例如 $S=\left\{\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}_+\right\}$,$\sup S=1$,但它不是 S 的聚点.

若 $a=\sup S\notin S$,由数列极限理论,存在严格递增数列 $\{x_n\}\subset S$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$;依据聚点的等价定义可知,$\sup S$ 为 S 的聚点.

上述讨论对下确界也适用.

三、范例解析

例 1 设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上,$\forall\,x_0\in[a,b]$,极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 都存在.证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

分析 函数 f 在每点 $x\in[a,b]$ 处由函数极限的局部有界性,$\exists\,U(x;\delta_x)$,在其中 f 有界,于是 $H=\{U(x;\delta_x),x\in[a,b]\}$ 成为 $[a,b]$ 的一个无限开覆盖.然后可用有限覆盖定理来证得结论成立.读者从本例中可以了解如何应用有限覆盖定理.另外,本例也可应用致密性定理,通过反证法来证明.

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每点存在极限,由函数极限的局部有界性,$\forall\,x\in[a,b]$,$\exists\,U(x;\delta_x)$ 与 $M_x>0$,使得 $\forall\,t\in U(x;\delta_x)$,$|f(t)|\leq M_x$.所有这种邻域的集合

$$H=\{U(x;\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$$

成为 $[a,b]$ 的一个开覆盖;由有限覆盖定理,存在 $[a,b]$ 的有限开覆盖

$$瑚 = \{U(x_i;\delta_{x_i}) \mid 1\leq i\leq n\} \subset H.$$

若取 $M=\max\limits_{1\leq i\leq n} M_{x_i}$,则因 瑚 覆盖了 $[a,b]$,对 $[a,b]$ 中每一 x,它必属于 瑚 中某一邻域 $U(x_k;\delta_{x_k})$,于是

$$|f(x)|\leq M_{x_k}\leq M. \qquad \square$$

注 1 上面的证明与闭区间上连续函数的有界性的证明有相似之处(见后面§2).

注 2 有限覆盖定理的作用在于当 $[a,b]$ 能被有限个邻域覆盖时,可以在有限个 $M_{x_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 中求得一个最大的 M.

例 2 设 $\{x_n\}$ 是有界发散数列,则存在 $\{x_n\}$ 的两个子列趋向于不同的极限.

分析 由致密性定理,$\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$,$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi_1$,为了得到另一个收敛子列,必须利用数列 $\{x_n\}$ 本身不收敛于 ξ_1 的条件.

证 因为 $\{x_n\}$ 是有界数列,由致密性定理,存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$,记

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi_1.$$

由于 $\{x_n\}$ 不收敛于 ξ_1,因此在 ξ_1 的某一邻域 $U(\xi_1;\delta)$ 之外必有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.对这无穷多项再次应用致密性定理,在其中又存在另一收敛子列 $\{x_{n'_k}\}\subset\{x_n\}$,记

$$\lim_{k\to\infty} x_{n'_k}=\xi_2.$$

显然 $|\xi_1-\xi_2|\geq\delta$,即 $\xi_1\neq\xi_2$. $\square$

例 3 设 $\{a_n\}$ 为收敛数列,证明 $\{a_n\}$ 的上、下确界中至少有一个属于 $\{a_n\}$.

证 **证法 1** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.若 $\{a_n\}$ 是常数数列,则结论是显然的;若 $\{a_n\}$ 不恒为常数,不妨设 $a_1\neq a$,对 $\varepsilon_0=\dfrac{|a_1-a|}{2}$,$\exists N_0$,当 $n>N_0$ 时,$a_n\in U(a;\varepsilon_0)$,而邻域 $U(a;\varepsilon_0)$ 外必有 $\{a_n\}$ 中的有限项(至少 $a_1\notin U(a;\varepsilon_0)$).在这有限项中必存在 $\{a_n\}$ 的最大项或最小项,于是 $\{a_n\}$ 的上、下确界中至少有一个属于 $\{a_n\}$.

证法 2 因为 $\{a_n\}$ 为收敛数列,所以 $\{a_n\}$ 为非空有界集,由确界原理,存在 $\xi=\sup\{a_n\}$,$\eta=\inf\{a_n\}$.若 $\xi=\eta$,则 $\{a_n\}$ 为常数数列,于是 $\xi,\eta\in\{a_n\}$.若 $\xi\neq\eta$,且 $\xi\notin\{a_n\}$,$\eta\notin\{a_n\}$,则存在两个子列 $\{a_{n'_k}\}$,$\{a_{n''_k}\}$ 使

$$\lim_{k\to\infty} a_{n'_k}=\xi,\quad \lim_{k\to\infty} a_{n''_k}=\eta,$$

即 $\{a_n\}$ 存在两个子列收敛于不同的极限,这与 $\{a_n\}$ 为收敛数列相矛盾.由此可见 $\{a_n\}$ 的上、下确界中至少有一个属于 $\{a_n\}$. □

例 4 试利用区间套定理证明确界原理.

证 设 S 为一非空有上界 M 的数集.因其非空,故有 $a_0 \in S$,不妨设 a_0 不是 S 的上界(否则 a_0 为 S 的最大元,即为 S 的上确界),记 $[a_1, b_1] = [a_0, M]$.将 $[a_1, b_1]$ 二等分,其中必有一子区间,其右端点为 S 的上界,但左端点不是 S 的上界,记之为 $[a_2, b_2]$.再将 $[a_2, b_2]$ 二等分,其中必有一子区间,其右端点是 S 的上界,而左端不是 S 的上界,记之为 $[a_3, b_3]$.依此类推,得到一区间套 $\{[a_n, b_n]\}$,其中 b_n 恒为 S 的上界,a_n 恒非 S 的上界,且

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) = \frac{M - a_0}{2^{n-1}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由区间套定理,$\exists\ \xi \in [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$.现证 ξ 即为 $\sup S$: (1) 因为 $\forall x \in S$, $x \le b_n$,令 $n \to \infty$ 取极限,得 $x \le \xi$,即 ξ 为 S 的上界.(2) $\forall \varepsilon > 0$,因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$,故 $\exists\ a_n > \xi - \varepsilon$;由于 a_n 不是 S 的上界,因此 $\xi - \varepsilon$ 更不是 S 的上界.所以 ξ 是 S 的最小上界,即 $\sup S = \xi$.

同理可证有下界的非空数集必有下确界. □

注 本题证明中的关键是构造合适的区间套,使其公共点 ξ 正好是数集 S 的上确界,为此使 b_n 为 S 的上界,而 a_n 不是 S 的上界.由此读者可体会到构造区间套的思想方法.

例 5 试用有限覆盖定理证明区间套定理.

证 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 为区间套,要证 $\exists\ \xi$,使 $a_n \le \xi \le b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$.用反证法:倘若 $\forall x \in [a_1, b_1]$ 都不是 $\{[a_n, b_n]\}$ 的公共点,于是 $\exists\ n_x$,使得 $x \notin [a_{n_x}, b_{n_x}]$,因而 $\exists\ \varepsilon_x > 0$, $U(x;\varepsilon_x) \cap [a_{n_x}, b_{n_x}] = \varnothing$.设

$$H = \{U(x;\varepsilon_x) \mid x \in [a_1, b_1]\},$$

它是 $[a_1, b_1]$ 的无限开覆盖.由有限覆盖定理,$\exists\ \{U(x_i;\varepsilon_{x_i}) \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \subset H$,就能覆盖 $[a_1, b_1]$.现取 $n > \max\limits_{1 \le i \le n}\{n_{x_i}\}$, $[a_n, b_n] \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} U(x_i, \varepsilon_{x_i}) = \varnothing$,而 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U(x_i, \varepsilon_{x_i}) \supset [a_1, b_1]$,这与 $[a_n, b_n] \subset [a_1, b_1]$ 相矛盾.由此可知,$\exists\ \xi$,使 $a_n \le \xi \le b_n$, $n = 1, 2, \cdots$. □

说明 上面是另一种应用有限覆盖定理的方法,即用反证法构造开覆盖,这种分析技巧值得学习.

四、习题选解(教材上册第 168 页)

8.试用有限覆盖定理证明聚点定理.

提示 用反证法.设 S 是有界无限数集,$S \subset [a,b]$,假若 S 没有聚点,则 $\forall x \in [a,b]$ 都不是 S 的聚点,故 $\exists U(x;\delta_x)$ 使得 $U(x;\delta_x) \cap S$ 为有限集,然后用有限覆盖定理在 $H = \{U(x;\delta_x) \mid x \in [a,b]\}$ 中选出 $[a,b]$ 的有限开覆盖,即可推出与 S 是无限集相矛盾.

9.试用聚点定理证明柯西收敛准则.

提示 设 $\{x_n\}$ 为柯西列,可证 $\{x_n\}$ 为有界数列,由致密性定理,$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$,$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$,然后证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

§2 闭区间上连续函数性质的证明

一、内容提要

1°　有界性定理　分别应用有限覆盖定理和致密性定理两种方法来证明.

2°　最大、小值定理　应用确界原理来证明.

3°　介值性定理　分别应用确界原理和区间套定理两种方法来证明.

4°　一致连续性定理　分别应用有限覆盖定理和致密性定理两种方法来证明.

二、释疑解惑

问题 1 试总结区间套定理的应用.

答 一般根据证明要求构造一个区间套,使得区间套的公共点为命题所需要的点.

(1) 证明柯西准则:对于柯西列 $\{a_n\}$ 构造区间套 $\{[\alpha_n,\beta_n]\}$,使得在每个 $[\alpha_n,\beta_n]$ 外只有数列 $\{a_n\}$ 中有限项,区间套的公共点 ξ 即为 $\{a_n\}$ 的极限.

(2) 证明聚点定理:设 S 为有界无限点集,$S \subset [a,b]$,把区间 $[a,b]$ 二等分,其中必有一子区间内包含数集中无限多个点,继续上述步骤,可得区间套 $\{[a_n,b_n]\}$,其公共点 ξ 即为 S 的聚点.

(3) 证明有限覆盖定理:用反证法.若闭区间不能用有限个开区间覆盖,把这区间二等分,其中必有一子区间不能用有限个开区间覆盖,由此可构造区间套,其公共点 ξ 属于某个开区间,从而导致区间套中某区间可以用一个开区间覆盖的矛盾.

(4) 证明根的存在定理:设 $f(a)<0$,$f(b)>0$,用二等分区间的方法构造区间套 $\{[a_n,b_n]\}$,使得 $f(a_n)<0$,$f(b_n)>0$,即 $f(x)$ 在区间 $[a_n,b_n]$ 的两个端

点上异号,区间套的公共点 ξ 必满足 $f(\xi)=0$.

注　上面(4)中的证明方法是计算方法中用二分法求函数方程 $f(x)=0$ 的根的理论基础 .

问题 2　试总结有限覆盖定理的应用 .

答　根据证明要求构造无限开覆盖,由有限覆盖定理选出有限开覆盖以达到需证的要求 .

(1) 证明有界性定理: 应用连续函数的局部有界性, $\forall x\in[a,b]$ 存在邻域 $U(x;\delta_x)$,使得在此邻域上, $|f(x)|\le M_x$,其中 M_x 是与 x 有关的常数,

$$H=\{U(x;\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$$

为 $[a,b]$ 的无限开覆盖 .由 H 中可选出有限个邻域覆盖 $[a,b]$,然后易证 f 的有界性 .

(2) 证明一致连续性定理: 应用连续性, $\forall\varepsilon>0$, 与 $x\in[a,b]$, $\exists\delta_x>0$, $\forall x'\in U(x;\delta_x)$, $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$.取

$$H=\left\{U\left(x;\frac{\delta_x}{2}\right)\,\middle|\, x\in[a,b]\right\}$$

为 $[a,b]$ 的无限开覆盖,然后利用有限覆盖定理证明一致连续性 .

问题 3　试总结致密性定理的应用 .

答　经常在反证法中对选出的有界子列应用致密性定理 .

(1) 证明有界性定理: 用反证法,若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界,则存在 $\{x_n\}\subset[a,b]$,使得

$$|f(x_n)|>n,$$

利用致密性定理在 $\{x_n\}$ 中选出 $\{x_{n_k}\}$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi\in[a,b]$,由连续性 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\xi)$,与上面不等式矛盾 .

(2) 证明一致连续性定理: 用反证法,若函数 f 在 $[a,b]$ 上不一致连续, $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall n\in\mathbf{N}_+$, $\exists x_n', x_n''$,尽管 $|x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n}$,但

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon_0 .$$

然后由致密性定理在 $\{x_n'\}$, $\{x_n''\}$ 中分别选出子列 $\{x_{n_k}'\}$, $\{x_{n_k}''\}$,它们收敛于同一实数,于是与上面不等式矛盾 .

问题 4　试总结确界定理的应用 .

答　构造合适的点集 E,使得 E 的确界即为需证命题中的数 .

(1) 证明根的存在定理: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)<0$, $f(b)>0$,若定义

$$E=\{x\mid f(x)>0,\ x\in[a,b]\},$$

$\xi = \inf E$，则有 $f(\xi) = 0$.

(2) 证明有界性定理：设

$$E = \{x \mid f(t) \text{在} [a, x] \text{上有界}, x \in [a, b]\},$$

若证得 $\sup E = b$，即得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.(见后面范例 4).

三、范例解析

例 1 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界，则必存在 $[a, b]$ 上某点，使得 $f(x)$ 在该点的任意邻域内无界.

证 用反证法，若 $\forall x \in [a, b]$，存在 $\delta_x > 0$，使得 $f(x)$ 在 $U(x;\delta_x)$ 中有界，则令

$$H = \{U(x;\delta_x) \mid x \in [a, b]\},$$

它成为 $[a, b]$ 的一个无限开覆盖.由有限覆盖定理，存在

$$H^* = \{U(x_i;\delta_{x_i}) \mid 1 \leq i \leq k\} \subset H$$

为 $[a, b]$ 的有限开覆盖.由于 $f(x)$ 在每个 $U(x_i;\delta_{x_i})$ 内有界，因此 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，这与 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的无界性相矛盾. □

例 2 设 f 在 $[a, b]$ 上连续，对任何 $x \in [a, b]$，$f(x) > 0$.试用有限覆盖定理证明：必存在 $c > 0$，使得对任何 $x \in [a, b]$，满足

$$f(x) \geq c.$$

证 $\forall x \in [a, b]$，因为 $f(x) > 0$，由连续函数的局部保号性，于是 $\exists \delta_x > 0$，$\forall x' \in U(x;\delta_x)$，$f(x') > \frac{f(x)}{2}$.现令

$$H = \{U(x;\delta_x) \mid x \in [a, b]\},$$

它是 $[a, b]$ 的一个无限开覆盖，由有限开覆盖定理，存在

$$H^* = \{U(x_i;\delta_{x_i}) \mid 1 \leq i \leq k\} \subset H$$

为 $[a, b]$ 的有限开覆盖.取

$$c = \min_{1 \leq i \leq k} \left\{\frac{f(x_i)}{2}\right\} > 0,$$

$\forall x \in [a, b]$，$\exists$ 某个 $i(1 \leq i \leq k)$，使 $x \in U(x_i;\delta_{x_i})$，于是

$$f(x) > \frac{f(x_i)}{2} \geq c. \qquad \square$$

例 3 设函数 f 对任何 (a, b) 内的 x，存在 $\delta_x > 0$，使得 f 在 $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ 内递增，试证 f 在整个 (a, b) 内亦递增.

证 $\forall a_1, a_2, a < a_1 < a_2 < b$，设法证明 $f(a_1) < f(a_2)$.$\forall x \in [a_1, a_2]$，由所设条件，$\exists \delta_x > 0$，使得 f 在 $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ 内递增，因此

$$H = \{ U \quad x ; \delta_x \quad | x \in \quad a_1 , a_2 \quad \}$$

是 a_1 , a_2 的一个无限开覆盖,由有限覆盖定理,存在

$$H^* = \quad U \quad x_i ; \delta_{x_i} \quad | 1 \leq i \leq k \qquad H$$

为 a_1 , a_2 的有限开覆盖.为叙述方便起见,不妨设由 $U \quad x_1 ; \delta_{x_1} \quad , U \quad x_2 ; \delta_{x_2}$ 就能覆盖 a_1 , a_2 ,且设 $x_1 < x_2$.

若 $a_2 \in U \quad x_1 ; \delta_{x_1}$,则因 $a_1 \in U \quad x_1 ; \delta_{x_1}$, f 在 $U \quad x_1 ; \delta_{x_1}$ 中递增,故 $f(a_1) \leq f(a_2)$;若 $a_2 \notin \quad U \quad x_1 ; \delta_{x_1}$,则 $a_2 \in U \quad x_2 ; \delta_{x_2}$,且因 $V = U \quad x_1 ; \delta_1 \quad \cap U \quad x_2 ; \delta_{x_2} \quad \neq$,故v $a^* \in V$,使 $a_1 < a^* < a_2$.于是又有

$$f(a_1) \leq f(a^*) \leq f(a_2) .$$

对 $k > 2$ 的有限情形可类似地证明.由此可见, $f(x)$在 a, b 上递增. □

例 4 试用确界原理证明:若函数 $f(x)$在闭区间 a, b 上连续,则 f 在 a, b 上有界.

分析 设

$$S = \quad x | f \text{ 在 } \quad a, x \text{ 上有界}, x \in \quad a, b \quad .$$

因为由 f 在点 a 的局部有界性,可知 S 是非空数集,且以 b 为上界,由确界原理,存在 $\sup S$.关键在于证明 $b = \sup S$,并证 $b \in S$,以使 $S = \quad a, b$,即 f 在 a, b 上有界.

证 设

$$S = \quad x | f \text{ 在 } \quad a, x \text{ 上有界}, x \in \quad a, b \quad ,$$

由分析可知, S 为非空有上界数集,于是由确界原理,存在 $\xi = \sup S$.现用反证法证明 $\xi = b$.

若 $\xi < b$,由连续函数的局部有界性v $\delta_0 > 0$, $f(x)$在 $\xi - \delta_0 , \xi + \delta_0$ 内有界,即v $x_0 > \xi$,使 $x_0 \in S$,而这与 $\xi = \sup S$ 相矛盾,所以 $\xi = b$.

再证函数 f 在 a, b 上有界.因为 f 在点 b 连续,于是v $\delta > 0$, f 在 $b - \delta, b$ 上有界;再由 $b = \sup S$,可知 f 在 $a, b - \dfrac{\delta}{2}$ 中有界,于是 f 在 a, b 上有界. □

例 5 设 $f(x)$为定义在有限区间 I 上的函数,对 I 内任何柯西列 x_n , $f(x_n)$ 也是柯西列.试证 f 是 I 上的一致连续函数.

证 用反证法.若 f 在 I 上不一致连续,于是v $\varepsilon_0 > 0$, $x_n' , \quad x_n'' \quad I$, $| x_n' - x_n'' | < \dfrac{1}{n}$,但

$$| f(x_n') - f(x_n'') | \geq \varepsilon_0 .$$

由致密性定理，对有界数列 $\{x_n'\}$，$\exists\{x'_{n_k}\}\subset\{x_n'\}$，$\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k}=\xi$；因为 $\left|x'_{n_k}-x''_{n_k}\right|\to 0\ (k\to\infty)$，于是 $\lim\limits_{k\to\infty} x''_{n_k}=\xi$. 这样，数列

$$x'_{n_1},\ x''_{n_1},\ x'_{n_2},\ x''_{n_2},\ \cdots,\ x'_{n_k},\ x''_{n_k},\ \cdots$$

也收敛于 ξ，因而是柯西列；但因为 $\left|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})\right|\geq\varepsilon_0$，使得

$$f(x'_{n_1}),\ f(x''_{n_1}),\ f(x'_{n_2}),\ f(x''_{n_2}),\ \cdots,\ f(x'_{n_k}),\ f(x''_{n_k}),\ \cdots$$

不是柯西列，这与假设相矛盾. □

注 1 如何应用反证法证明结论是数学分析学习过程中的一个难点，掌握好基本概念的否定说法的正面陈述是其中的关键.

注 2 不难证明本题中的条件不仅是充分的，而且是必要的，于是函数在有限区间上一致连续的充要条件是对 I 上任何柯西列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 也是柯西列.

四、习题选解 (教材上册第 172 页)

3．证明：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

提示 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，然后把 $f(x)$ 延拓成 $[0,+\infty)$ 上的连续函数.

4．试用有限覆盖定理证明根的存在定理.

提示 设 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，满足 $f(a)<0$，$f(b)>0$，要证 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$. 用反证法，若 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)\neq 0$，由连续函数的局部保号性，$\exists\,U(x;\delta_x)$，当 $x'\in U(x;\delta_x)$ 时，$f(x')>0$(或 $f(x')<0$)，于是

$$H=\{U(x;\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$$

为 $[a,b]$ 的无限开覆盖. 然后选出有限开覆盖，可推出 $f(a)$ 与 $f(b)$ 同号，与假设相矛盾.

5．证明：在 (a,b) 上的连续函数 f 为一致连续的充要条件是 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 都存在.

提示 证充分性时，设法把函数 f 延拓为 $[a,b]$ 上的连续函数，然后利用一致连续性定理即可. 证必要性时，可由 f 在 (a,b) 上一致连续的条件，应用函数极限的柯西准则证明 $f(a+0)$，$f(b-0)$ 都存在.

*§3　上极限和下极限

一、内容提要

1°　**数列的聚点**　若在数 a 的任一邻域内含有数列 x_n 的无限多项,则称 a 为 x_n 的一个聚点 .

数列的聚点 a 是在 a 的任一邻域内含有数列的“无限多项”,而数集的聚点 ξ,是在 ξ 的任一邻域内含有数集中“无限多个点”,这是两者的差别;也就是说,若把数列中不同的项看作不同的点时,两者一致 .

数列的聚点为其收敛子列的极限,若需要找出数列的所有聚点只要找出所有收敛子列的极限即可 .

2°　**数列的上极限和下极限**　称有界数列 x_n 的最大聚点 A 和最小聚点 $\underline{A}$ 为 x_n 的上极限和下极限,记作

$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \qquad \underline{A} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \ .$$

3°　**上、下极限的等价定义**

(1) 对有界数列 x_n 的上极限 A,下述条件中的每一个都是与它等价的:

(i) 任给 $\varepsilon > 0$,存在 N,使得当 $n > N$ 时,有 $x_n < A + \varepsilon$;存在子列 x_{n_k} , $x_{n_k} > A - \varepsilon$, $k = 1, 2, \cdots$.

(ii) 对任何 $\alpha > A$, x_n 中大于 α 的项至多有限个;对任何 $\beta < A$, x_n 中大于 β 的项有无限多个 .

(iii)
$$A = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k \ .$$

(2) 对有界数列 x_n 的下极限 $\underline{A}$,下述条件中的每一个都是与它等价的:

(i) 任给 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使得 $n > N$ 时, $x_n > \underline{A} - \varepsilon$;存在子列 x_{n_k} , $x_{n_k} < \underline{A} + \varepsilon$, $k = 1, 2, \cdots$.

(ii) 对任何 $\alpha < \underline{A}$, x_n 中小于 α 的项至多有限个,对任何 $\beta > \underline{A}$, x_n 中小于 β 的项有无限多个 .

(iii)
$$\underline{A} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k \ .$$

4°　**上、下极限的性质**

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = A$.　　(3 .1)

(2) 对任何有界数列有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \ . \qquad (3\ .2)$$

(3) (保不等式性质)设有界数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$满足:存在$N_0>0$,当$n>N_0$时有$x_n\leq y_n$,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n. \tag{3.3}$$

(4) 若$\{x_n\}$,$\{y_n\}$为有界数列,则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n), \tag{3.4}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n. \tag{3.5}$$

二、释疑解惑

问题 有些数学分析教材中用$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n}\{x_k\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n}\{x_k\}\right)$作为上(下)极限的定义,而在我们的教材中是用最大(小)聚点来定义上(下)极限的,试比较这两种定义方式的不同特点?

答 (1) 存在性证明方面:$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n}\{x_k\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n}\{x_k\}\right)$的存在性是用确界原理与单调有界定理来证明的;而最大(小)聚点的存在性是用区间套定理来证明的.

(2) 直观认识方面:前者是用确界的极限来表示的,其描述形式是一种十分抽象的数列极限;而后者具有较强的直观几何意义.

(3) 应用方面:一般说,利用前者在证明与上、下极限有关的不等式时较为方便(见范例3、4);而后者对寻找具体数列的上、下极限较为方便,只要找出所有收敛子列极限中的最大(小)者即可(见范例5,教材习题1).

三、范例解析

例1 设$\{x_n\}$是有界数列.

(1) 是否成立$\sup\{x_n\}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$,$\inf\{x_n\}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$?为什么?

(2) 若$\sup\{x_n\}\notin\{x_n\}$,$\inf\{x_n\}\notin\{x_n\}$,证明:

$$\sup\{x_n\}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n,\quad \inf\{x_n\}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

解 (1) 一般情况下是不对的.例如,$\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$,$\sup\{x_n\}=1$,但$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=0$;$\{x_n\}=\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$,$\inf\{x_n\}=0$,但$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=1$.

(2) 若$\xi=\sup\{x_n\}\notin\{x_n\}$,由数列极限理论可知存在递增子列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$,$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$.由于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$是$\{x_n\}$的最大聚点,因此$\xi\leq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$;又因$x_n\leq\xi$,于是$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\leq\xi$.由此可得$\xi=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

同理可证：若 $\inf\{x_n\} \notin \{x_n\}$，则 $\inf\{x_n\} = \varliminf_{n\to\infty} x_n$． □

注 本例指出了上、下确界与上、下极限的区别与联系．

例 2 用上、下极限理论证明：若 $\{x_n\}$ 是有界发散数列，则存在 $\{x_n\}$ 的两个子列收敛于两个不同的极限．

分析 若 $\{x_n\}$ 是有界发散数列，则由(3.1)可知 $\varlimsup_{n\to\infty} x_n \neq \varliminf_{n\to\infty} x_n$，再对最大(小)聚点选子列即可得证．

证 因为数列发散的充要条件是 $\varlimsup_{n\to\infty} x_n \neq \varliminf_{n\to\infty} x_n$，于是存在 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n'_k}\}$，$\{x_{n''_k}\}$，使

$$\lim_{k\to\infty} x_{n'_k} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n, \quad \lim_{k\to\infty} x_{n''_k} = \varliminf_{n\to\infty} x_n,$$

即存在 $\{x_n\}$ 的两个子列收敛于不同的极限． □

例 3 证明：对任何有界数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n .$$

分析 需证

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) - \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leq \varliminf_{n\to\infty} x_n .$$

由 $-\varlimsup_{n\to\infty} y_n = \varliminf_{n\to\infty}(-y_n)$，即要证

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) + \varliminf_{n\to\infty}(-y_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} x_n,$$

于是由(3.4)就可完成证明．

证 由内容提要 3°(iii)，得

$$\begin{aligned} -\varlimsup_{n\to\infty} y_n &= -\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{y_k\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\{-y_k\} \\ &= \varliminf_{n\to\infty}(-y_n) . \end{aligned}$$

由(3.4)式，有

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) + \varliminf_{n\to\infty}(-y_n) \leq \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n - y_n) = \varliminf_{n\to\infty} x_n,$$

于是

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n . \quad □$$

例 4 设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 为有界数列，且 $x_n > 0$，$y_n > 0$．证明

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leq \varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) .$$

证 若 $\varliminf_{n\to\infty} x_n = 0$，则等式显然成立．若 $\varliminf_{n\to\infty} x_n > 0$，则当 $n > N_0$ 时，有 $x_n > 0$．于是

$$\frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\inf\limits_{k\geq n} x_k} = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\ \frac{1}{x_k} = \varlimsup_{n\to\infty}\ \frac{1}{x_n}\ .$$

由本节教材习题 2(3),可得

$$\varlimsup_{n\to\infty} y_n = \varlimsup_{n\to\infty}\ x_n\cdot y_n\cdot\frac{1}{x_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty}\ x_n y_n\ \cdot\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty}\ x_n y_n\ \cdot\frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n},$$

于是有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n \leq \varlimsup_{n\to\infty}\ x_n y_n\ .\qquad\square$$

* **例 5** 证明数列 x_n 与 $x_n{}^n\ n$ 有相同的聚点 .

分析 应用 ξ 为数列 x_n 的聚点的充要条件为存在子列 x_{n_k} x_n , $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$ 可以得证 .

证 设 ξ 是数列 x_n 的聚点,则v 子列 x_{n_k} x_n ,$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.因为

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}{}^{n_k}\ n_k = \xi,$$

所以 ξ 也是 $x_n{}^n\ n$ 的聚点 .

反之,又若 η 是 $x_n{}^n\ n$ 的聚点,则v 子列 $x_{n_k}{}^{n_k}\ n_k\to\eta$.由于$\frac{1}{{}^{n_k}\ n_k}\to 1$,因此

$$x_{n_k} = \frac{x_{n_k}{}^{n_k}\ n_k}{{}^{n_k}\ n_k}\to\eta,$$

于是 η 也是 x_n 的聚点 . $\square$

四、习题选解(教材上册第 175 页)

3 . 证明:若 a_n 为递增数列,则$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

提示 讨论 a_n 为有界与无界两种情况 .

4 . 证明:若 $a_n > 0$ $n = 1, 2, \cdots$ 且$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 1$,则数列 a_n 收敛 .

提示 若$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则v 子列 a_{n_k} ,$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$,于是有$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{a_{n_k}} = +\infty$,这与$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 1$ 相矛盾,这样应当有$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n > 0$.然后用本节内容提要 3°上、下极限等价定义来证明 .

6 . 证明定理 7 .9 .

证 设 x_n 为有界数列,我们将证 A 为数列 x_n 的上极限的充要条件是

$$A = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} x_k .$$

同理可证 $\underline{A} = \lim_{n\to\infty}\inf x_k$.

必要性 若 A 为 x_n 的上极限,由定理 7 .7 有

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时 $a_n < A + \varepsilon$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 子列 a_{n_k} a_n ,使 $A - \varepsilon < a_{n_k}$.

由(i),当 $n > N$ 时,有

$$\sup_{k\geq n} a_k \leq A + \varepsilon;$$

由(ii),有

$$A - \varepsilon < a_{n_k} \leq \sup_{i\geq n_k} a_i ;$$

再由 $g_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k$ 的递减性,又有

$$A - \varepsilon \leq \lim_{k\to\infty}\sup_{i\geq n_k} a_i = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} a_k \leq A + \varepsilon .$$

令 $\varepsilon\to 0$,即有 $A = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n} a_k$.

充分性 设 $A^* = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{i\geq n} a_i$,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,当 $n > N$ 时,$A^* - \varepsilon < \sup\limits_{i\geq n} a_i < A^* + \varepsilon$,于是

$$a_n \leq \sup_{i\geq n} a_i < A^* + \varepsilon .$$

又由上确界定义,$\forall k > N, \exists n_k$,使得

$$A^* - \varepsilon < a_{n_k} ,$$

由定理 7 .7,可得

$$A = A^* = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} a_k .$$

总练习题提示与解答

(教材上册第 176 页)

1 . 证明: x_n 为有界数列的充要条件是 x_n 的任一子列存在其收敛子列 .

提示 必要性用致密性定理证明;充分性用反证法,若 x_n 无界,必存在子列 x_{n_k} ,$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$.

2 . 设 f 在 a, b 内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = 0$.证明: $f(x)$ 在 a, b 内有最大值或最小值 .

证 先利用条件 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = 0$,把 $f(x)$ 延拓为闭区间 a, b 上

的连续函数 $F(x)$:

$$F(x)=\begin{matrix} f(x), & x\in \quad a,b \quad, \\ 0, & x=a,\ b\ . \end{matrix}$$

由闭区间上连续函数的最大、最小值定理,$F(x)$存在 a,b 上的最大值 M 和最小值 m.若 $M=m=0$,则 $f(x)\equiv 0$,$x\in$ a,b ,即 f 在 a,b 内有最大值和最小值.若 M 和 m 中有一不为零时,例如 $M\neq 0$,则最大值 M 不在 a,b 处取到,即在 a,b 内有最大值,同理若 $m\neq 0$,则 f 在 a,b 内有最小值 .

3 . 设 f 在 a,b 上连续,又有 x_n a,b ,使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.证明:存在 $x_0\in$ a,b ,使得 $f(x_0)=A$.

提示　对 x_n 应用致密性定理 .

4 . 设函数 f 和 g 都在区间 I 上一致连续 .

(1) 若 I 为有限区间,证明 $f\cdot g$ 在 I 上一致连续;

(2) 若 I 为无限区间,举例说明 $f\cdot g$ 在 I 上不一定一致连续 .

提示　若 I 为有限开区间,设法把 f, g 延拓为闭区间上的连续函数,利用 f, g 的有界性,按定义验证 $f\cdot g$ 的一致连续性 .

5 . 设 f 定义在 a,b 上 .证明:若对 a,b 内任一收敛点列 x_n ,极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在,则 f 在 a,b 内一致连续 .

证　用反证法 .若 f 在 a,b 上不一致连续,则v $\varepsilon_0>0$," $\delta>0$,v x', x'' $\in$ a,b ,尽管$|x'-x''|<\delta$,但

$$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0\ .$$

取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$,可得 x_n', $x_n''\in$ a,b ,$|x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n}$,但$|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon_0$.在 a,b 上对 x_n' 应用致密性定理,v 子列 x_{n_k}' x_n' ,$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}'=\xi\in$ a,b ,于是也有$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}''=\xi$.构造数列

$$z_n = x_{n_1}',\ x_{n_1}'',\ x_{n_2}',\ x_{n_2}'',\ \cdots,\ x_{n_k}',\ x_{n_k}'',\ \cdots ,$$

易见 z_n 收敛,而$\left|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')\right|\geq\varepsilon_0$,即 $f(z_n)$ 不收敛,与假设矛盾,因而 f 在 a,b 上一致连续 .

6 . 设函数 f 在 $a,+\infty$ 上连续,且有斜渐近线,即有数 b 与 c,使得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-bx-c =0,$$

证明 f 在 $a,+\infty$ 上一致连续 .

证　由条件

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-bx-c =0 \qquad b\neq 0 ,$$

" $\varepsilon>0$,v $M>a$,当 $x>M$ 时,有

$$|f(x)-bx-c|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

故当 $x', x''>M$ 时,又有

$$\begin{aligned}
&|f(x')-f(x'')|\\
=&|f(x')-bx'-c-[f(x'')-bx''-c]+b(x'-x'')|\\
\leq&|f(x')-bx'-c|+|f(x'')-bx''-c|+b|x'-x''|\\
<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+b|x'-x''|,
\end{aligned}$$

于是当 $|x'-x''|<\dfrac{\varepsilon}{3b}$ 时,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

又因为 $f(x)$ 在 $[a,M+1]$ 上一致连续,故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$,当 $x', x''\in[a,M+1]$,且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时,$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.取

$$\delta=\min\left\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{3b},1\right\},$$

可以验证 $\forall x', x''\in[a,+\infty)$,$|x'-x''|<\delta$ 时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{7-1}$$

这是因为,若 $x', x''\in[M,+\infty)$ 或 $x', x''\in[a,M]$ 时易见结论成立;若 $x'\in[a,M]$,$x''\in[M,+\infty)$ 时,因为 $|x'-x''|<1$,所以 $x''\in[a,M+1]$,因而式(7-1)也成立.于是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

第七章测试题

(A)

1. 试证明:数列 $x_n=\dfrac{1}{2}+(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}$ 只有 0 和 1 两个聚点.

2. 试证:x_0 为数列 $\{x_n\}$ 的聚点的充要条件为存在子列 $\{x_{n_k}\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0.$$

3. 试证:若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,$\{y_n\}$ 有界,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

4. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数,$f(a)<0$,$f(b)>0$,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$,且当 $\xi<x<b$ 时,$f(x)>0$.

5. 设函数 $f:[a,b]\to[a,b]$,存在 $k(0<k<1)$,对任何 $x,y\in[a,b]$,都有

$$|f(x)-f(y)|<k|x-y|,$$

证明:存在唯一的 $x_0\in[a,b]$,使得 $x_0=f(x_0)$.

6. 试用数列的柯西准则证明区间套定理.

(**B**)

1. 求下列数列的上、下极限:

(1) $\arctan n^{(-1)^n}$; (2) $n\sin\frac{n\pi}{2}-1$.

2. 设 $f(x)$是 $[a,b]$ 上的连续函数,有非空零点集合

$$E=\{x\mid f(x)=0,\ x\in[a,b]\}.$$

试证 E 的上、下确界都属于 E.

3. 证明:若 $x_n>0$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,则对任何有界数列 $\{y_n\}$,有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

4. 证明:若 $x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

5. 试用有限覆盖定理证明柯西准则.

6. 设有界数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

若记 a,b 分别为 $\{x_n\}$ 的下极限与上极限,则 $[a,b]$ 中任何数都是 $\{x_n\}$ 的聚点.

第八章　不 定 积 分

§1　基本积分公式与换元积分法

一、内容提要(教材§1 与§2 相关内容)

1°　若在区间 I 上有 $F'(x)=f(x)$,则称 F 为 f 在 I 上的一个原函数.

2°　f 在 I 上的任意两个原函数之间,只能相差一个常数.

3°　f 在 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的不定积分,记作$\int f(x)\mathrm{d}x$.若 F 是 f 的一个原函数,由 2°知道

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\tag{1.1}$$

其中 C 为任意常数(称为积分常数).

4°　到第九章§5(定理 9.10)可以证明:若 f 在区间 I 上连续,则 f 在 I 上必定存在原函数,这是关于原函数存在性的理论问题;在本章里我们要学习的是怎样求出原函数(或不定积分),这是原函数的计算问题.

5°　由于求原函数的问题就是求导数的逆运算问题,因此由基本导数公式可反推得基本积分公式:

(1)$\int 0\mathrm{d}x=C$;

(2)$\int 1\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x+C$;

(3)$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad \alpha\neq-1,\ x>0$;

(4)$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C\quad x\neq0$;

(5)$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$;

(6)$\int a^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C\quad 0<a\neq1$;

(7)$\int \cos ax\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\sin ax+C\quad a\neq0$;

(8) $\int \sin ax\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax + C \quad (a \neq 0)$;

(9) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$;

(10) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$;

(11) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$;

(12) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$;

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$;

(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1$.

需要牢牢记住这组公式,其意义如同前面必须熟记基本导数公式一般.现在还得注意,不要把积分公式与导数公式互相混淆.

6° **与导数线性运算法则相对应的是不定积分的线性运算法则:**

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int f_2(x)\mathrm{d}x. \quad (1.2)$$

7° **与复合函数求导法则相对应的是不定积分的换元积分法则:**

第一换元积分法 **设** $f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x \in I$. **若** $g(u)$ **存在原函数** $G(u)$, **则有**

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int g(u)\mathrm{d}u \\ &= G(u) + C = G(\varphi(x)) + C. \quad (1.3)\end{aligned}$$

第二换元积分法 **又若** $\varphi'(x) \neq 0$, **则以上命题可逆,即当** $f(x)$ **存在原函数** $F(x)$ **时**, $g(u)$ **也存在原函数,且有**

$$\begin{aligned}\int g(u)\mathrm{d}u &= \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \\ &= F(x) + C = F(\varphi^{-1}(u)) + C, \quad (1.4)\end{aligned}$$

其中 φ^{-1} **是** φ **的反函数.**

二、释疑解惑

问题 1 原函数与不定积分这两个概念有何不同?有何联系?

答 **两者是个体与整体的关系,如果** $F(x)$ **是** $f(x)$ **在区间** I **上的一个原函数,那么** $f(x)$ **在** I **上的不定积分就是所有原函数的集合,即**

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F(x) + C \mid C\text{为任意实数}\}.$$

这种关系反映在几何意义上(见教材第 179 页中图 8 - 1)就是某一条积分曲线 $y=F(x)$与所有积分曲线族 $y=F(x)+C$的关系.

正因为不定积分是所有原函数的集合,所以有关不定积分的各种等式(如前面的(1.2),(1.3),(1.4)),都应理解为两个集合的相等.

问题 2　为什么原函数的定义中规定自变量的变化范围必须是一个区间,而不是一般的数集?或几个区间的并集?

答　首先,原函数概念是与导函数密切相关的,而在一般的数集上往往无法进行求导数.再有,原函数的一个最根本的性质是:"$f(x)$在一个区间上的任意两个原函数之间只相差一个常数."而这个性质来源于微分中值定理的一个推论:"若在一个区间上 $F'(x)\equiv 0$,则在这个区间上 $F(x)\equiv C$."所以在原函数的定义中作出了"在一个区间上"的规定,而且在此基础上定义的不定积分才是明确无误的,即 $f(x)$在一个区间 I 上的所有原函数只能是 $F(x)+C$($F(x)$是 $f(x)$在 I 上的任一原函数).

问题 3　怎样从"方程求解"的数学角度上去认识不定积分与原函数?

答　类似于和式方程 $x+b=a$ 的解是 $x=b-a$,乘式方程 $ay=b$ 的解是 $y=\frac{b}{a}$,并由此引入了减法与除法这两种逆运算;相应地,不定积分作为求导运算的逆运算,$y=\int f(x)\mathrm{d}x$ 就是微分方程

$$y'=f(x) \tag{1.5}$$

的解.只是方程(1.5)的解(即(1.1))并非唯一(其内含有任意常数 C),只有当给出了定解条件 $y\Big|_{x=x_0}=y_0$ 时,才能确定 C 的特定值

$$C_0=y_0-F(x_0).$$

此时方程(1.5)满足上述定解条件的解则为

$$y=F(x)+C_0.$$

在几何上它就是 f 的积分曲线族中经过定点 (x_0,y_0) 的那一条积分曲线.

随着学习内容的逐步深入,所要求解的微分方程将变得越来越复杂,并成为一门独立的课程"微分方程",但其求解过程的基本手段总是要用到这里的不定积分计算.

问题 4　为什么用$\int f(x)\mathrm{d}x$ 这样一个奇怪的记号来表示不定积分?它有什么含义吗?

答　从数学发展历史上看,形成定积分概念(下一章)远早于不定积分概念.$f(x)$在$[a,b]$上的定积分记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,它是微分量 $f(x)\mathrm{d}x$ 的无限累加,积

分号“$\int$”是个被拉长了的字母 S(Sum,求和).后来知道定积分的计算要依赖于不定积分;更重要地,每个连续函数的原函数必定存在,而且可以用某种特殊形式的定积分来表示.正是由于这两者之间千丝万缕的联系,后人就把全体原函数的集合取名为“不定积分”,并采用记号“$\int f(x)\mathrm{d}x$”来表示.又因

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x),\quad \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x,$$

所以微分号“d”与积分号“$\int$”正好相消,犹如正、负相消,乘、除相消一般.需要注意的是:

$$\int \mathrm{d}f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C,$$

不要漏写了任意常数 C.由此可见,不定积分记号的设计既有特定含义,使用起来也十分方便.

问题 5　换元积分法在使用时有哪些注意点?

答　(1) 第一换元积分法俗称“凑微分法”,能否熟练使用这种积分方法,是与使用者对各种微分形式是否熟记于心是大有关系的.例如以下这些最基本的结果是经常会遇到的:

$$\int \mathrm{e}^{\varphi(x)}\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\varphi(x)}\mathrm{d}\varphi(x) = \mathrm{e}^{\varphi(x)} + C,$$

$$\int \varphi'(x)\cos\varphi(x)\mathrm{d}x = \int \cos\varphi(x)\mathrm{d}\varphi(x) = \sin\varphi(x) + C,$$

$$\int \varphi'(x)\sin\varphi(x)\mathrm{d}x = \int \sin\varphi(x)\mathrm{d}\varphi(x) = -\cos\varphi(x) + C,$$

$$\int \varphi(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int \varphi(x)\mathrm{d}\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi^2(x) + C,$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\varphi^2(x)}\mathrm{d}\varphi(x) = -\frac{1}{\varphi(x)} + C,$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\varphi(x)}\mathrm{d}\varphi(x) = \ln|\varphi(x)| + C,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

(2) 在使用第二换元积分法时,若变量替换为 $x=\varphi(t)$,一般用条件 $\varphi'(t)\neq 0$ 来保证逆变换 $t=\varphi^{-1}(x)$的存在.所以通常需要指出 $\varphi(t)$的定义范围,例如教材第 185 页上例 7 中的$|t|<\frac{\pi}{2}$,例 8 中的 $0<t<\frac{\pi}{2}$等等.

(3) 在解题结束时必须检查一下你的结果,看看在运算过程中是否增加(或忽略)了对积分变量的限制(这个注意点不只是适用于换元积分法),并作出相应

的调整 .例如,求

$$J=\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}.$$

解法一 **由于**

$$\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\csc^2 x-\csc x\cot x,$$

因此 $$J=\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x-\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x=-\cot x+\csc x+C.$$

解法二 **由于**

$$\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2},$$

因此 $$J=\int \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\frac{x}{2}+C.$$

读者不难发现,在解法一中由于被积函数的分子、分母同乘以 $1-\cos x$**,因此增加了限制条件** $x\neq 2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ **.在解法二中没有这一限制,所以解法二的结果是一个完全的结果 .若要从解法一的结果中消去多余的限制,只需作如下调整**:

$$\begin{aligned}-\cot x+\csc x+C&=\frac{1-\cos x}{\sin x}+C\\&=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}+C\\&=\frac{\sin x}{1+\cos x}+C,\end{aligned}$$

这个结果与 $\tan\frac{x}{2}+C$ **是恒等的** .

三、范例解析

例 1 **求下列不定积分**:

(1) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^4+x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int (1+\sqrt{x})^5\mathrm{d}x$.

解 (1) **由于**

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^4+x^2}=1+\frac{1}{x^2(x^2+1)}=1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1},$$

因此得到

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+x^2+1}{x^4+x^2}\mathrm{d}x&=\int \mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\\&=x-\frac{1}{x}-\arctan x+C.\end{aligned}$$

(2) **解法一　由于**

$$(1+\sqrt{x})^5 = 1+5x^{\frac{1}{2}}+10x+10x^{\frac{3}{2}}+5x^2+x^{\frac{5}{2}},$$

因此有

$$\int (1+\sqrt{x})^5 \mathrm{d}x = x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+5x^2+4x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{3}x^3+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$$

解法二　利用换元积分法，**令** $1+\sqrt{x}=t$，**则** $x=(t-1)^2$，$\mathrm{d}x=2(t-1)\mathrm{d}t$，**于是有**

$$\begin{aligned}\int (1+\sqrt{x})^5 \mathrm{d}x &= 2\int t^5(t-1)\mathrm{d}t = 2\int (t^6-t^5)\mathrm{d}t \\ &= 2\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}\right)+C \\ &= \frac{2}{7}(1+\sqrt{x})^7-\frac{1}{3}(1+\sqrt{x})^6+C.\end{aligned}$$ □

说明　第(2)题解法二的优点在于当被积函数这个二项式的指数较大时(如求 $\int (1+\sqrt{x})^{100}\mathrm{d}x$)，**处理起来不会增加任何困难；但若仍用解法一去计算，那将是十分繁琐的；更何况当不定积分变为** $\int (1+\sqrt{x})^{\alpha}\mathrm{d}x$，$\alpha$ **为任意实数时，只能用解法二来计算．**

注意　第(2)题的两种解法所得结果在形式上虽不相同，但它们之间至多相差一个常数，可被容纳在积分常数 C **之内．**

例 2　用第一换元积分法求下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \sin nx\cos mx\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{x^5}{(x^3-2)^2}\mathrm{d}x$．

解　(1) $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+C.$

(2)
$$\begin{aligned}\int \sin nx\cos mx\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int [\sin(n+m)x+\sin(n-m)x]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{n+m}\cos(n+m)x-\frac{1}{n-m}\cos(n-m)x\right]+C.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x \\ &= 2\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x}) \\ &= (\arctan\sqrt{x})^2+C.\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^3-2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3(x^3-2)'}{3(x^3-2)^2}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{(x^3-2)+2}{3(x^3-2)^2}\mathrm{d}(x^3-2)$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{t+2}{t^2}\mathrm{d}t \quad \text{令 } t = x^3 - 2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int \frac{2}{t^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln|t| - \frac{2}{t}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln\left|x^3 - 2\right| - \frac{2}{x^3-2}\right) + C. \qquad \square$$

注 由第(2)题看到,三角函数的积化和、差公式在不定积分计算中起着关键性的作用.

例 3 用第二换元积分法求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\ (a\neq b)$.

解 (1) 令 $x = a\sin t, |t| < \frac{\pi}{2}, \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$,设 $a > 0$,于是

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{a^3\sin^2 t\cos t}{a\cos t}\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}(t - \sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C.$$

(2) **解法一** 令 $x = \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}, \mathrm{d}x = \sec^2 t\mathrm{d}t$,于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}\mathrm{d}t = \int \csc t\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{\csc^2 t - \csc t\cot t}{\csc t - \cot t}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(\csc t - \cot t)}{\csc t - \cot t}$$

$$= \ln\left|\csc t - \cot t\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{x}\right|+C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C.$$

解法二　利用已知的不定积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C,$$

借助第一换元积分法,可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\int\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.$$

(3) **由于**

$$\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x}{b-a}=1,$$

因此若令 $x-a=(b-a)\sin^2 t$, $b-x=(b-a)\cos^2 t$,**则有**

$$x=a+(b-a)\sin^2 t,\ \mathrm{d}x=2(b-a)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t.$$

于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int\frac{2(b-a)\sin t\cos t}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t}}\mathrm{d}t=\int 2\,\mathrm{d}t$$

$$=2t+C=2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C. \qquad \square$$

说明　在使用第二换元积分公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

时,为保证 $t=\varphi^{-1}(x)$ **和** $(\varphi^{-1}(x))'=\frac{1}{\varphi'(t)}$ **的存在,要求** $\varphi'(t)\neq 0$. **为此应指出** t **的合适范围,这正如本例**(1)**与**(2)**的解法一中所指出的** $|t|<\frac{\pi}{2}$.

例 4　试用多种解法求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}}$.

解法一　令 $x=2\sin t$, $|t|<\frac{\pi}{2}$,**于是**

$$t=\arcsin\frac{x}{2},\ \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t.$$

因而

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos t}{4\sin t\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \csc t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C.$$

解法二 **令** $x = \frac{1}{t}, |t| > \frac{1}{2}$,**于是**

$$t = \frac{1}{x},\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$$

因而

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}} = -\int \frac{t}{t^2\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2t)}{\sqrt{(2t)^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|2t+\sqrt{4t^2-1}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C.$$

注 **这里借助教材上册第** 185 **页上的例** 8,**得到如上结果**.

解法三 **令** $x^2 = \frac{1}{t}, t > \frac{1}{4}$,**于是**$\frac{2}{x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{t}\mathrm{d}t$.**因而**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^2-t}} = -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{8}\right)}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|t-\frac{1}{8}+\sqrt{t^2-\frac{t}{4}}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^2}\right| + C.$$

解法四 **令** $\sqrt{4-x^2} = t,\ t\in(0,2)$,**于是** $\mathrm{d}x = \frac{-t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}}$.**因而**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{4-t^2} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C.$$

解法五 先把该不定积分变形为:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x(2-x)\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}},$$

然后令 $\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=t,\ t>0$,并由此解出

$$x=\frac{2(t^2-1)}{t^2+1},\quad 2-x=\frac{4}{t^2+1},\quad \mathrm{d}x=\frac{8t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t.$$

因而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{(t^2+1)\cdot(t^2+1)\cdot 8t}{2(t^2-1)\cdot 4\cdot t(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\right|+C. \qquad \square$$

说明 本例使用了五种不同的换元法进行计算,其结果在形式上虽不相同,但均可相互转化.选择何种换元方法,应根据被积函数的特征,灵活应对.

四、习题选解

§2 习题(教材上册第 188 页)

1.提示:

(12) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$,并调整结果:

把 $\tan x-\sec x+C$ 化为 $-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+C$;

(13) $\displaystyle\int\csc x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\csc^2 x+\csc x\cot x}{\csc x+\cot x}\mathrm{d}x$,或 $\displaystyle\int\frac{\csc^2 x-\csc x\cot x}{\csc x-\cot x}\mathrm{d}x$;

(15) $\displaystyle\int\frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$;

(18) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^8-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x^4)^2-2}\mathrm{d}(x^4)$;

(21) $\displaystyle\int\cos^5 x\,\mathrm{d}x=\int\cos^4 x\,\mathrm{d}(\sin x)$;

(22) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}=\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}\mathrm{d}x$,或 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}(2x)}{\sin 2x}$;

(23) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{x}+e^{-x}}=\int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$;

(26) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}\ (a>0)$，令 $x=a\tan t$ 化为

$$\int \sec t\,\mathrm{d}t=\int \frac{\sec^{2}t+\sec t\tan t}{\sec t+\tan t}\mathrm{d}t,\text{或}\int \frac{\cos t}{1-\sin^{2}t}\mathrm{d}t;$$

(28) $\int \frac{x^{5}}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x$，令 $x=\sin t$ 化为 $\int \sin^{5}t\,\mathrm{d}t$（类似(21)）;

(29) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$，令 $\sqrt[6]{x}=t$ 化为

$$\int \frac{6t^{8}}{1-t^{2}}\mathrm{d}t=-6\int \left(t^{6}+t^{4}+t^{2}+1+\frac{1}{t^{2}-1}\right)\mathrm{d}t;$$

(30) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$，令 $\sqrt{x+1}=t$ 化为

$$2\int \frac{t^{2}-t}{t+1}\mathrm{d}t=2\int \frac{t(t+1)-2(t+1)+2}{t+1}\mathrm{d}t.$$

§2 分部积分法与有理函数的积分

一、内容提要（教材§2与§3相关内容）

1° 若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导，$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在，则有分部积分公式

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{或}\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u. \tag{2.1}$$

此公式是由乘积求导公式 $(uv)'=u'v+uv'$ 直接得来的．

2° 分部积分法的应用大致上可以归纳为"降幂"、"升幂"、"循环"、"递推"四种形式，具体内容见后面范例1至范例4．

3° 两个多项式的商

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{\alpha_0x^{n}+\alpha_1x^{n-1}+\cdots+\alpha_n}{\beta_0x^{m}+\beta_1x^{m-1}+\cdots+\beta_m} \tag{2.2}$$

称为有理分式或有理函数．当 $m>n$ 时，$R(x)$ 为真分式；当 $m\leq n$ 时，$R(x)$ 为假分式．通过多项式的除法，总能把假分式化为一个多项式与一个真分式的和．所以，讨论有理分式的不定积分时，只需假设该有理分式为真分式即可．

4° 有理真分式的不定积分，关键在于能正确地把该真分式表示成若干个

简单分式之和(又称此为“部分分式分解”);而每个简单分式的不定积分都可依照固定的方法把它们一一计算出来.具体过程见教材上册第 191—第 194 页上的例 1 和例 2,以及后面的范例 5.

二、释疑解惑

问题 1 试举例说明在使用分部积分公式(2.1)计算不定积分时合理选择因子 $u(x)$与 $v'(x)$的重要性.

答 就以教材上册第 187 页上的例 13 为例,如果改设

$$u=x^3,\ v'=\ln x,$$

于是 $u'=3x^2$, $v=x\ln x-x$.由分部积分公式(2.1)得

$$\begin{aligned}\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x&=\int x^3\,\mathrm{d}(x\ln x-x)\\&=x^4(\ln x-1)-3\int x^3(\ln x-1)\,\mathrm{d}x\\&=x^4(\ln x-1)+\frac{3}{4}x^4-3\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

经移项、整理后又得

$$4\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x=x^4\ln x-\frac{1}{4}x^4+C_1,$$

$$\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{16}(4\ln x-1)+C.$$

显然,这比原来的解法要复杂一些,更何况这里默认了$\int\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$.事实上,如果也按上面的做法来计算$\int\ln x\,\mathrm{d}x$(设 $u=1$, $v'=\ln x$),那是无法完成的.

问题 2 试问以下计算过程为何不能达到目的?此过程如下:

欲求$\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$,为此设 $u=\mathrm{e}^{-x}$, $v'=\cos x$,于是 $u'=-\mathrm{e}^{-x}$, $v=\sin x$,因而有

$$\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}\sin x+\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x,\tag{2.3}$$

这样,问题转而求$\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.又设 $u=\sin x$, $v'=\mathrm{e}^{-x}$,于是 $u'=\cos x$, $v=-\mathrm{e}^{-x}$,因而又有

$$\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\sin x+\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x.\tag{2.4}$$

把它代入(2.3)式,结果得到 $0=0$,未能完成任务.

答　事实上,上面的计算过程用了两次分部积分法,得到了(2.3)与(2.4)两个中间结果,单纯就这两个独立的计算过程来说,都没有错.然而联系起来看,后一过程正好是前一过程的逆行或还原——好像某人欲从 A 地走去 B 地,结果因中途迷路,蒙头转向地又退回到了 A 地.那么,在以上计算过程中究竟在何处迷失了方向呢?经分析不难发现:在作第二次分部积分时,所设的 u 和 v'不当.如果坚持按第一次的设置法,令 $u=e^{-x}$, $v'=\sin x$,则 $u'=-e^{-x}$, $v=-\cos x$,因而有

$$\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx. \qquad (2.5)$$

再把(2.5)式代入(2.3)式,便得

$$\int e^{-x}\cos x\,dx=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx,$$

经移项、整理后,即得到

$$\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C. \qquad (2.6)$$

问题 3　下列有理分式的分解式是否恰当?

(1) $\dfrac{x^2-1}{x(x+1)^3}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{(x+1)^2}+\dfrac{Ex^2+Fx+G}{(x+1)^3}$;

(2) $\dfrac{(x-1)(x^3+2)}{x^2(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$;

(3) $\dfrac{x+1}{4x(x^2-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2-1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2-1)^2}$.

答　都不恰当.理由与正确分解式如下:

(1) 最末两项分子只需为一待定常数,即

$$\frac{x^2-1}{x(x+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}.$$

(2) 原分式尚未化为真分式,正确表示应该为

$$\frac{(x-1)(x^3+2)}{x^2(x^2-x+1)}=1-\frac{x^2-2x+2}{x^2(x^2-x+1)},$$

而

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2(x^2-x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

(3) 分母中的因子 $(x^2-1)^2$ 尚可作一次式分解,即

$$\frac{x+1}{4x(x^2-1)^2}=\frac{1}{4x(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}.$$

三、范例解析

例 1　求下列不定积分(降幂法):

(1) $\int (2x-1)\cos 3x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int x^2 e^{3x}\,\mathrm{d}x$.

解　(1) **令** $u=2x-1$, $v'=\cos 3x$, **于是** $u'=2$, $v=\frac{1}{3}\sin 3x$, **因而**

$$\int (2x-1)\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x-1)\sin 3x-\frac{2}{3}\int \sin 3x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}(2x-1)\sin 3x+\frac{2}{9}\cos 3x+C.$$

(2)
$$\int x^2 e^{3x}\,\mathrm{d}x=\int x^2\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)$$
$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)$$
$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{9}\int e^{3x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{27}e^{3x}(9x^2-6x+2)$$
□

注　**适合应用"降幂法"的不定积分有如下一些类型**:

$$\int P_n(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x,\int P_n\sin bx\,\mathrm{d}x,\int P_n(x)\cos bx\,\mathrm{d}x,$$

其中 $P_n(x)$**为某一** n **次多项式**. **对这些不定积分,只须令** $u=P_n(x)$, $v'=e^{ax}$(**或** $\sin bx$, $\cos bx$), **每用一次分部积分,便能使多项式因子降幂一次;重复使用** n **次,可使多项式因子降幂成一常数,而剩下的是求** e^{ax}(**或** $\sin bx$, $\cos bx$)**的不定积分**.

例 2　**求下列不定积分(升幂法)**:

(1) $\int (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int (x^2-1)\arctan x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int x^2\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

解　(1) **令** $u=\ln x$, $v'=2x-1$, **于是** $u'=\frac{1}{x}$, $v=x^2-x$, **因而**

$$\int (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x=(x^2-x)\ln x-\int \frac{x^2-x}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=(x^2-x)\ln x-\frac{1}{2}x^2+x+C.$$

(2) **令** $u=\arctan x$, $v'=x^2-1$, **于是** $u'=\frac{1}{1+x^2}$, $v=\frac{x^3}{3}-x$, **因而**

$$\int (x^2-1)\arctan x\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\arctan x-\int \frac{x^3-3x}{3(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^3-3x\right)\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{4x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^3-3x\right)\arctan x-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}-2\ln\left(1+x^2\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(x^3-3x\right)\arctan x-\frac{x^2}{2}+2\ln\left(1+x^2\right)\right]+C.$$

(3) $\int x^2\arcsin x\,dx=\int\arcsin x\,d\left(\frac{x^3}{3}\right)$

$$=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

而 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x^2\,d\left(-\sqrt{1-x^2}\right)$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}+2\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}\,d\left(1-x^2\right)$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+C_1,$$

从而求得

$$\int x^2\arcsin x\,dx=\frac{x^3}{3}\arcsin x+\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{9}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+C.\qquad\square$$

注 **适合应用“升幂法”的不定积分有如下一些类型**:

$$\int P_n(x)\left[\ln x\right]^m dx,\ \int P_n(x)\left[\arctan x\right]^m dx\quad(m\ \text{为正整数}$$

$$\text{及某些}\int P_n(x)\arcsin x\,dx\ \text{或}\int P_n(x)\arccos x\,dx).$$

在使用分部积分法求上述各类不定积分时,只须令 $u=(\ln x)^m$ **或** $(\arctan x)^m$, $v'=P_n(x)$, **使得每用一次分部积分,多项式因子升幂一次,同时使** $(\ln x)^m$ **或** $(\arctan x)^m$ **降幂.重复这个过程** m **次,最后化为求一多项式或一有理分式的不定积分.**

例 3 **求下列不定积分(循环法)**:

(1) $\int e^{-x}\cos x\,dx$;　　(2) $\int\sec^3 x\,dx$;

(3) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx\ (a>0)$.

解 (1) **由前面问题 2 已知**

$$\int e^{-x}\cos x\,dx=e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\sin x - \mathrm{e}^{-x}\cos x - \int \mathrm{e}^{-x}\cos x \mathrm{d}x,$$

并由此求得结果(2.6) .更一般地,按此法可得

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx \mathrm{d}x = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax} + C,$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx \mathrm{d}x = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax} + C,$$

(参见教材上册第 188 页例 15) .

(2) $\int \sec^3 x \mathrm{d}x = \int \sec x \mathrm{d}(\tan x)$

$$= \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x \mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x + \int \sec x \mathrm{d}x - \int \sec^3 x \mathrm{d}x,$$

于是得到

$$\int \sec^3 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\sec x\tan x + \int \sec x \mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C .$$

(3) $\int \sqrt{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \int \sqrt{x^2 + a^2} \mathrm{d}x,$$

同理得到

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|\right) + C .$$

说明　若令 $x = a\tan t$,则 $\int \sqrt{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = a^2\int \sec^3 t \mathrm{d}t$,即化为题(2)的情形 . □

注　适合应用“循环法”的不定积分有如下一些类型:

$$\int P_n(\sin bx)\mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x, \quad \int P_n(\cos bx)\mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x,$$

或某些类似于本例(2)、(3)那样的不定积分 .这些不定积分经若干次分部积分后,出现形如

$$I = \cdots = F(x) + \lambda I, \quad \lambda \neq 1$$

的“循环”(或“重现”)形式,由此即可求得

$$I=\frac{1}{1-\lambda}F(x)+C.$$

例 4　求下列不定积分(递推法):

(1) $I_n=\int x^n\cos x\mathrm{d}x$;　　(2) $I(n,m)=\int x^n(\ln x)^m\mathrm{d}x$,

其中 n,m **为正整数,并分别用以计算**

$$\int x^3\cos x\mathrm{d}x \quad \text{和} \quad \int x^2(\ln x)^2\mathrm{d}x.$$

解　(1) **用"降幂法"计算得**

$$\begin{aligned}I_n&=\int x^n\mathrm{d}(\sin x)=x^n\sin x-n\int x^{n-1}\sin x\mathrm{d}x\\&=x^n\sin x+n\int x^{n-1}\mathrm{d}(\cos x)\\&=x^n\sin x+nx^{n-1}\cos x-n(n-1)\int x^{n-1}\cos x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这就得到递推公式:

$$I_n=x^n\sin x+nx^{n-1}\cos x-n(n-1)I_{n-2}$$

$$(\text{初值}: I_1=x\sin x+\cos x+C_1,\ I_0=\sin x+C_0).$$

利用此递推公式,易得

$$\begin{aligned}\int x^3\cos x\mathrm{d}x&=I_3=x^3\sin x+3x^2\cos x-6I_1\\&=x^3\sin x+3x^2\cos x-6(x\sin x+\cos x+C_1)\\&=(x^3-6x)\sin x+(3x^2-6)\cos x+C.\end{aligned}$$

(2) **用"升幂法"计算得**

$$\begin{aligned}I(n,m)&=\int x^n(\ln x)^m\mathrm{d}x=\int(\ln x)^m\mathrm{d}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\&=\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}(\ln x)^m-m\int(\ln x)^{m-1}x^n\mathrm{d}x\right],\end{aligned}$$

则有递推公式:

$$I(n,m)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^m-\frac{m}{n+1}I(n,m-1)$$

$$\left(\text{初值}: I(n,0)=\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C_0\right).$$

利用此递推公式,易得

$$\begin{aligned}\int x^2(\ln x)^2\mathrm{d}x&=I(2,2)=\frac{1}{3}x^3(\ln x)^2-\frac{2}{3}I(2,1)\\&=\frac{1}{3}x^3(\ln x)^2-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}I(2,0)\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3 + C$$

$$= \frac{x^3}{27}[9(\ln x)^2 - 6\ln x + 2] + C. \qquad \square$$

说明　在计算有理函数的不定积分时,有一个重要的递推公式:

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

$$\text{初值}\ I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C_1, \qquad (2.7)$$

它也是通过分部积分而获得的(见教材上册第 193 **页)**.

例 5　计算不定积分

$$I = \int \frac{3x^2 - 9}{(x^2 - x - 2)(x^2 - 2x + 5)^2}\mathrm{d}x.$$

解　对被积函数 $R(x)$**作部分分式分解:**

$$R(x) = \frac{3x^2 - 9}{(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)^2}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+5} + \frac{Ex+F}{(x^2-2x+5)^2},$$

使得

$$3x^2 - 9 \equiv A(x-2)(x^2-2x+5)^2 + B(x+1)(x^2-2x+5)^2$$
$$+ (Cx+D)(x^2-2x+5)(x^2-x-2)$$
$$+ (Ex+F)(x^2-x-2).$$

令 $x = -1$:　$-3\times 64A = -6$　　$A = \frac{1}{32}$;

令 $x = 2$:　$3\times 25B = 3$　　$B = \frac{1}{25}$;

x^5 **项的系数**:　$A + B + C = 0$　　$C = -(A+B) = -\frac{57}{800}$;

令 $x = 1 + 2\mathrm{i}$:　$(E + F + 2E\mathrm{i})(-6 + 2\mathrm{i}) = -18 + 12\mathrm{i}$,

$-10E - 6F = -18$,　　$E = -\frac{9}{20}$,

$-10E + 2F = 12$,　　$F = \frac{15}{4}$;

令 $x = 0$(**常数项**):　$-50A + 25B - 10D - 2F = -9$,

$$D = \frac{1}{10}(9 - 50A + 25B - 2F) = \frac{3}{32}.$$

从而有

$$I=\int\ \frac{1}{32(x+1)}+\frac{1}{25(x-2)}-\frac{57x-75}{800(x^2-2x+5)}-\frac{9x-75}{20(x^2-2x+5)^2}\ \mathrm{d}x\ . \tag{2.8}$$

易见

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{32(x+1)}=\frac{1}{32}\ln|x+1|+C_1\ ;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{25(x-2)}=\frac{1}{25}\ln|x-2|+C_2\ ;$$

$$\begin{aligned}\int\frac{57x-75}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x&=\int\frac{57(x-1)-18}{(x-1)^2+4}\mathrm{d}x\\&=\frac{57}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-2x+5)}{x^2-2x+5}-18\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2+4}\\&=\frac{57}{2}\ln|x^2-2x+5|-9\arctan\frac{x-1}{2}+C_3\ ;\end{aligned}$$

再应用递推公式(2.7),**得**

$$\begin{aligned}\int\frac{9x-75}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x&=\frac{9}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)^2}-66\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{[(x-1)^2+4]^2}\\&=-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^2-2x+5}\\&\quad-\frac{33}{4}\ \frac{x-1}{x^2-2x+5}+\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2+4}\\&=\frac{15-33x}{4(x^2-2x+5)}-\frac{33}{8}\arctan\frac{x-1}{2}+C_4\ .\end{aligned}$$

把这些结果代入(2.8),**整理后得到**

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{32}\ln|x+1|+\frac{1}{25}\ln|x-2|\\&\quad-\frac{1}{800}\ \frac{57}{2}\ln|x^2-2x+5|-9\arctan\frac{x-1}{2}\\&\quad-\frac{1}{20}\ \frac{15-33x}{4(x^2-2x+5)}-\frac{33}{8}\arctan\frac{x-1}{2}\ +C\\&=\frac{1}{32}\ln|x+1|+\frac{1}{25}\ln|x-2|-\frac{57}{1\,600}\ln|x^2-2x+5|\\&\quad+\frac{87}{400}\arctan\frac{x-1}{2}+\frac{33x-15}{80(x^2-2x+5)}+C\ .\end{aligned}$$ □

说明 (1) **通过学习有理函数的不定积分计算法,知道任何有理函数都能求出它的原函数,只是当被积函数不太简单时,计算过程较为繁琐** .

(2) **在懂得计算原理的基础上,我们就能较容易地学会使用计算机数学软件,这在今后工作中显得更为重要 .例如,在** MATLAB **指令窗内键入** .

```
syms x
int((3*x^2-9)/(x^2-x-2)/(x^2-2*x+5)^2)
```

其中第一行指令是设定符号运算变量 x;第二行指令是计算不定积分(int),在其后括号内的是用 x 表示的被积函数表达式(这里就是例 5 中的不定积分).按下“Enter”键后,该软件通过符号运算,一瞬间就会输出答案:

```
ans=
 1/32*log(x+1)+1/25*log(x-2)-57/1600*log(x^2-2*x+5)
 +87/400*atan(1/2*x-1/2)-3/320*(-44*x+20)/(x^2-2*x+5)
```

其中“log”即为自然对数“ln”,“atan”即为反正切函数“arctan”.对照前面例 5 的最终答案,两者完全相同.

四、习题选解

§2 习题(教材上册第 189 页)

4. 证明:

(1) 若 $I_n=\int\tan^n x\,\mathrm{d}x,\ n=2,3,\cdots$,则

$$I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}.$$

提示 $\int\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int\tan^{n-2}x(\sec^2x-1)\,\mathrm{d}x$.

(2) 若 $I(m,n)=\int\cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x$,则当 $m+n\neq0$ 时,

$$\begin{aligned}I(m,n)&=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)\\&=-\frac{\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2),\\&\qquad n,m=2,3,\cdots.\end{aligned}$$

提示 $$\begin{aligned}I(m,n)&=\int\cos^{m-1}x\sin^n x\,\mathrm{d}(\sin x)\\&=\cdots=\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x-nI(m,n)\\&\quad+(m-1)[I(m-2,n)-I(m,n)].\end{aligned}$$

§3 习题(教材第 198 页)

1. 提示:

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$;

$$(4)\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int\left(\frac{\frac{2}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+2x+1}-\frac{\frac{2}{4}x-\frac{1}{2}}{x^2-2x+1}\right)\mathrm{d}x;$$

$$(5)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{2x+2}{(x^2+1)^2}\right)\mathrm{d}x;$$

$$(6)\int \frac{x-2}{(2x^2+2x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{4}(4x+2)-\frac{5}{2}}{(2x^2+2x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(2x^2+2x+1)'}{(2x^2+2x+1)^2}\mathrm{d}x-\frac{5}{8}\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)'}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2}\mathrm{d}x,$$

本题可以不必作一般部分分式分解 .

§3 三角函数有理式与简单无理式的积分

一、内容提要

1° 三角函数有理式 $R(\sin x,\cos x)$,是指由 $\sin x$、$\cos x$ 及常数经过有限次四则运算所得到的函数 .

2° 三角函数有理式的不定积分$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 通过换元积分法总能化为有理函数的积分 .最一般的变换是令 $t=\tan\frac{x}{2}$,此时有

$$x=2\arctan t,\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

于是有

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t .\tag{3.1}$$

3° 在某些特定场合,选择更合适的变量替换,可使运算过程变得简单一些 .例如

(1) 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$,可令 $t=\cos x$;

(2) 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$,可令 $t=\sin x$;

(3) 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$,可令 $t=\tan x$.

以$\int\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$ 为例,被积函数满足上述(2),当令 $t=\sin x$ 时,$\mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$,于是

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}\mathrm{d}t = \int (t^{-4} - 2t^{-2} + 1)\mathrm{d}t,$$

计算起来十分简单.但若按一般变换 $t = \tan\frac{x}{2}$,将使

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{(1-t^2)^5}{t^4(1+t^2)^2}\mathrm{d}t,$$

计算起来就会十分困难.

4° 简单无理式的不定积分,这里主要讨论如下两类:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x.$$

前者当 $ad - bc \neq 0$ 时,只需令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$,就可化为有理函数的不定积分.后者按教材上册第 196 页指出的方法可以化为三角有理式的不定积分.

5° 对于形如$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 的不定积分,还可采用下述欧拉变换,直接把它化为有理函数的积分:

$$令 \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a}x, & 若\ a > 0, \\ tx \pm \sqrt{c}, & 若\ c > 0, \\ t(x-\alpha), & 若\ ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta). \end{cases}$$

二、释疑解惑

问题 1 试对内容提要 3°中的结论(1)、(2)、(3)给予解释.

答 这要借助代数学中的知识——设 $R(u, v)$是关于 u 和 v 的有理式(整式或分式).当它变更一个自变量的符号时,如果它的值不改变,例如

$$R(-u, v) = R(u, v),$$

则这个有理式可以化成只含 u 的偶次幂的形式:

$$R(u, v) = R_1(u^2, v);$$

如果满足

$$R(-u, v) = -R(u, v),$$

则可化成如下形式:

$$R(u, v) = R_2(u^2, v)u.$$

事实上,后一结论可由前一结论推出:设

$$R^*(u,v)=\frac{R(u,v)}{u},$$

则满足

$$R^*(-u,v)=\frac{R(-u,v)}{-u}=\frac{R(u,v)}{u}=R^*(u,v),$$

据前一结论,必有 $R^*(u,v)=R_2(u^2,v)$,亦即

$$R(u,v)=R^*(u,v)u=R_2(u^2,v)u.$$

把它用到三角有理式的不定积分中去,就有:

(1) 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$,则

$$\begin{aligned}\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x&=\int R_0(\sin^2 x,\cos x)\sin x\mathrm{d}x\\&=-\int R_0(1-\cos^2 x,\cos x)\mathrm{d}(\cos x)\\(\text{令 } t=\cos x)\quad&=-\int R_0(1-t^2,t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

就变为有理式的积分.

(2) 同理,若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$,则

$$\begin{aligned}\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x&=\int R_0(\sin x,\cos^2 x)\cos x\mathrm{d}x\\&=\int R_0(\sin x,1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)\\(\text{令 } t=\sin x)\quad&=\int R_0(t,1-t^2)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

亦变为有理式的积分.

(3) 若 $R(-u,-v)=R(u,v)$,则以$\frac{u}{v}v$ 替代 u,即有

$$R(u,v)=R\left(\frac{u}{v}v,v\right)=R_1\left(\frac{u}{v},v\right),$$

而 R_1 满足

$$R_1\left(\frac{u}{v},-v\right)=R_1\left(\frac{-u}{-v},-v\right)=R(-u,-v)=R_1\left(\frac{u}{v},v\right),$$

依据前述代数结论,必可化为

$$R_1\left(\frac{u}{v},v\right)=R_2\left(\frac{u}{v},v^2\right),$$

所以有

$$\begin{aligned}R(\sin x,\cos x)&=R_1(\tan x,\cos x)=R_2(\tan x,\cos^2 x)\\&=R_2\left(\tan x,\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)=R^*(\tan x).\end{aligned}$$

故当满足 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ 时,只需令 $t = \tan x$ $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$,就得到

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R^*(\tan x)\mathrm{d}x = \int R^*(t)\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

这也就达到了目的——化为有理式的积分 .

问题 2 试对内容提要 5°中的欧拉变换给出解释 .

答 (1) 当 $a > 0$ 时,令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a}x, \tag{3.2}$$

两边平方后得到

$$ax^2 + bx + c = t^2 + 2\sqrt{a}tx + ax^2,$$

并可由此解出

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}, \qquad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \frac{\sqrt{a}(t^2 - c)}{b - 2\sqrt{a}t},$$

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}\right)'\mathrm{d}t .$$

这就得到

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}, t + \frac{\sqrt{a}(t^2 - c)}{b - 2\sqrt{a}t}\right)\left(\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}\right)'\mathrm{d}t,$$

显然这已化为有理式的不定积分 .

注 上述情形下的欧拉变换,成功的原因在于(3.2)式两边平方后消去了 ax^2 这个二次项,从而由剩下的一次方程可以解出 x 作为 t 的有理函数 .其余两种欧拉变换的特点也在于此 .

(2) 当 $c > 0$ 时,令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c},$$

两边平方,并消去 c 和约去 x 后,得到

$$ax + b = t^2x + 2\sqrt{c}t .$$

由此解出

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \qquad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{a}c}{a - t^2},$$

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}\right)'\mathrm{d}t,$$

就有

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{a}c}{a - t^2}\right)\cdot\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}\right)'\mathrm{d}t .$$

(3) 又若 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$,则令

$$ax^2+bx+c=\quad a(x-\alpha)(x-\beta)=t(x-\alpha),$$

两边平方,并约去 $x-\alpha$ 后,得到

$$a(x-\beta)=t^2(x-\alpha).$$

由此解出

$$x=\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a},\qquad ax^2+bx+c=\frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a},$$

$$\mathrm{d}x=\quad\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}\quad'\mathrm{d}t,$$

就有

$$\int R(x,\quad ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=\int R\quad\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a},\frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}\quad\cdot\quad\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}\quad'\mathrm{d}t.$$

注意 我们在前面介绍了许多种计算三角有理式和简单无理根式的积分方法,应该指出的是,每一种方法都不是万能的,使用起来有时简便,有时繁复.所以读者在学习过程中要学会挑选合适的积分方法去完成不定积分计算.

三、范例解析

例 1 求下列三角函数有理式的不定积分

(1) $\int\frac{\cos^5x}{\sin^4x}\mathrm{d}x$; (2) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^4x+\cos^4x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 由内容提要 3°末的分析,这里取变换 $t=\sin x$ 较为方便,且有

$$\int\frac{\cos^5x}{\sin^4x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^4x}{\sin^4x}\mathrm{d}(\sin x)=\int\frac{(1-t^2)^2}{t^4}\mathrm{d}t$$

$$=\int(t^{-4}-2t^{-2}+1)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{3}t^{-3}+2t^{-1}+t+C$$

$$=-\frac{1}{3\sin^3x}+\frac{2}{\sin x}+\sin x+C.$$

(2) 由内容提要 3°(3),应取 $t=\tan x$,则有

$$\int\frac{\cos 2x}{\sin^4x+\cos^4x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin^4x+\cos^4x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1-\tan^2x}{\tan^4x+1}\mathrm{d}(\tan x)$$

$$=\int\frac{1-t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{\frac{1}{t^2}-1}{\frac{1}{t^2}+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int \frac{\left(\frac{1}{t}+t\right)'}{\left(\frac{1}{t}+t\right)^2-2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{令 } u=\frac{1}{t}+t$$

$$=-\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{u+\sqrt{2}}-\frac{1}{u-\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u+\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sec^2 x+\sqrt{2}\tan x}{\sec^2 x-\sqrt{2}\tan x}+C.$$

(3) **本题除一般解法(化为有理式的积分)外,还有一种较巧妙的解法.由于分母**$(2\sin x+3\cos x)$**与分母的导数** $2\cos x-3\sin x$ **以及分子**$(3\sin x+2\cos x)$**同为** $\cos x$ **与** $\sin x$ **的线性组合,因此设想:若能求得** a、b,**使得**

$$3\sin x+2\cos x=a(2\cos x-3\sin x)+b(2\sin x+3\cos x),$$

则立即就可求得该不定积分.其实,把上式改写为

$$3\sin x+2\cos x=(-3a+2b)\sin x+(2a+3b)\cos x,$$

立即知道可由方程组

$$-3a+2b=3,\quad 2a+3b=2$$

解出 $a=-\frac{5}{13}$, $b=\frac{12}{13}$.**于是就可求得**

$$\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=\frac{12}{13}\int\mathrm{d}x-\frac{5}{13}\int\frac{\mathrm{d}(2\sin x+3\cos x)}{2\sin x+3\cos x}$$

$$=\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|+C.$$ □

说明　以上第(2)**题还可通过三角函数变形得到更方便的解法**:

$$\int\frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos 2x}{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{(\sin 2x)'}{2-\sin^2 2x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{2-t^{2}}\quad(令\ t=\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t+\sqrt{2}}-\frac{1}{t-\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin 2x+\sqrt{2}}{\sin 2x-\sqrt{2}}\right|+C.$$

例 2　求下列不定积分:

(1) $I_1=\int\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\mathrm{d}x$;

(2) $I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ ($a\neq b$, n **为正整数**).

解　(1) **将被积函数的分母有理化**, **使所求不定积分变为**

$$I_1=\int\frac{1}{x}(\sqrt{x^{2}-1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+1)\mathrm{d}x.$$

分别求出:

$$\int\frac{\sqrt{x^{2}-1}}{x}\mathrm{d}x=\int\tan^{2}t\mathrm{d}t\quad(x=\sec t)$$

$$=\int(\sec^{2}t-1)\mathrm{d}t$$

$$=\tan t-t+C_1$$

$$=\sqrt{x^{2}-1}-\arccos\frac{1}{x}+C_1;$$

$$\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{2t^{2}}{t^{2}-1}\mathrm{d}t\quad(\sqrt{x+1}=t)$$

$$=\int\left(2+\frac{2}{t^{2}-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C_2;$$

$$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{2t^{2}}{t^{2}+1}\mathrm{d}t\quad(\sqrt{x-1}=t)$$

$$=\int\left(2-\frac{2}{t^{2}+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C_3;$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C_4 .$$

从而求得

$$I_1 = \sqrt{x^2 - 1} + 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1} - \arccos\frac{1}{x}$$

$$- 2\arctan\sqrt{x-1} + 2\ln|\sqrt{x+1} - 1| + C .$$

(2) **把所求不定积分变形为**

$$I_2 = \int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}\mathrm{d}x .$$

令 $t = \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$,**解出**

$$x = \frac{at^n - b}{t^n - 1}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{n(b-a)t^{n-1}}{(t^n - 1)^2}\mathrm{d}t,$$

$$x - a = \frac{a-b}{t^n - 1}, \qquad x - b = \frac{(a-b)t^n}{t^n - 1},$$

于是求得

$$I_2 = \int \frac{(t^n - 1)^2}{(a-b)^2 t^n}\cdot t\cdot\frac{n(b-a)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{n}{b-a}\int \mathrm{d}t = \frac{nt}{b-a} + C$$

$$= \frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C .$$ □

例 3　应用欧拉变换计算下列不定积分:

(1) $I_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\mathrm{d}x$;　　(2) $I_2 = \int \frac{1}{x - \sqrt{x^2+2x-8}}\mathrm{d}x$.

解　(1) **由于无理根式中的二次三项式的系数** $a = 1 > 0$, $c = 5 > 0$,**故可作欧拉变换**

$$\sqrt{x^2+2x+5} = x \pm t \quad \text{或} \quad \sqrt{x^2+2x+5} = tx \pm \sqrt{5} .$$

现取 $\sqrt{x^2+2x+5} = x - t$,**两边平方后整理得**

$$x = \frac{t^2 - 5}{2(t+1)}, \quad \mathrm{d}x = \frac{t^2 + 2t + 5}{2(t+1)^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{x^2+2x+5} = \frac{t^2-5}{2(t+1)} - t = \frac{-(t^2+2t+5)}{2(t+1)} .$$

于是有

$$I_1 = \int \frac{(t^2-5)^2}{4(t+1)^2}\cdot\frac{-2(t+1)}{t^2+2t+5}\cdot\frac{t^2+2t+5}{2(t+1)^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\int \frac{(t^2-5)^2}{4(t+1)^3}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{(t+1)^4-4(t+1)^3-4(t+1)^2+16(t+1)+16}{(t+1)^3}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{4}\int \left[(t+1)-4-\frac{4}{t+1}+\frac{16}{(t+1)^2}+\frac{16}{(t+1)^3}\right]\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}-3t-4\ln|t+1|-\frac{16}{t+1}-\frac{8}{(t+1)^2}\right]+C$$

$$= \left[-\frac{t^2}{8}+\frac{3t}{4}+\ln|t+1|+\frac{4}{t+1}+\frac{2}{(t+1)^2}+C\right]_{t=x-\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

(2) 由于 x^2+2x-8 中的系数 $a=1>0$, 且

$$x^2+2x-8=(x+4)(x-2),$$

因此可作欧拉变换

$$\sqrt{x^2+2x-8}=x\pm t \quad 或 \quad \sqrt{(x+4)(x-2)}=t(x+4)\,(或\ t(x-2)).$$

现取 $\sqrt{(x+4)(x-2)}=t(x+4)$,两边平方后整理得

$$x=\frac{4t^2+2}{1-t^2}, \quad \mathrm{d}x=\frac{12t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{x^2+2x-8}=t\left(\frac{4t^2+2}{1-t^2}+4\right)=\frac{6t}{1-t^2},$$

$$x-\sqrt{x^2+2x-8}=\frac{2(1-2t)}{1+t}.$$

于是有

$$I_2=\int \frac{1+t}{2(1-2t)}\cdot\frac{12t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{6t}{(1-2t)(t+1)(t-1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{9}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}-8\int\frac{\mathrm{d}t}{2t-1}-3\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2}$$

$$=\left[\frac{9}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|-4\ln|2t-1|+\frac{3}{t-1}+C\right]_{t=\sqrt{\frac{x^2+2x-8}{x+4}}}. \quad \square$$

说明 (1) 本例第(1)题如采用欧拉变换

$$\sqrt{x^2+2x+5}=tx+\sqrt{5},$$

则化为如下有理式的不定积分

$$I_1=-8\int\frac{(\sqrt{5}t-1)^2}{(t^2-1)^3}\mathrm{d}t.$$

(2) 如果把本例中的不定积分按教材第 196 页所介绍的方法化为三角有理

式的积分来计算,则分别有

$$I_1=\int\frac{x^2}{(x+1)^2+2^2}\mathrm{d}x\quad(\text{令}\ x+1=2\tan t)$$

$$=\int\frac{(2\tan t-1)^2\cdot 2\sec^2 t}{2\sec t}\mathrm{d}t$$

$$=4\int\sec^3 t\mathrm{d}t-3\int\sec t\mathrm{d}t-4\sec t.$$

$$I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\quad(x+1)^2-3^2}\quad(\text{令}\ x+1=3\sec t)$$

$$=\int\frac{3\sec t\cdot\tan t}{3\sec t-1-3\tan t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{3\tan t}{3-\cos t-3\sin t}\mathrm{d}t.$$

(3) 在本例第(2)题所采用的欧拉变换

$$(x+4)(x-2)=t(x+4)$$

也可改写成 $\frac{x-2}{x+4}=t$.一般地,若 $b^2-4ac>0$,则欧拉变换

$$ax^2+bx+c=\quad a(x-\alpha)(x-\beta)=t(x-\beta)$$

相当于把不定积分变形为

$$\int R(x,\quad ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=\int R(x,\quad a(x-\alpha)(x-\beta))\mathrm{d}x$$

$$=\int R\quad x,(x-\beta)\quad\frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}\quad\mathrm{d}x,$$

再令 $t=\quad\frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}$,经此换元后变为有理函数的积分.因此,在这种情形下,不定积分

$$\int R(x,\quad ax^2+bx+c)\mathrm{d}x\quad\text{与}\quad\int R\quad x,\quad\frac{ax+b}{cx+d}\quad\mathrm{d}x$$

同属一种类型.

四、习题选解

§3 相关习题(教材上册第 199 页)

2．求下列不定积分:

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{5-3\cos x}=\frac{1}{2}\arctan\ 2\tan\frac{x}{2}\ +C$;

(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x}=\frac{6}{6}\arctan\ \frac{6}{2}\tan x\ +C$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x} = \frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x| + \frac{x}{2} + C$;

(4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} - \frac{2x+3}{4}\sqrt{1+x-x^2} + C$;

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}} = \ln\left| x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right| + C$;

(6) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$.

提示 (1) **令** $t=\tan\frac{x}{2}$,**化为**$\int\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2}$;

(2) **令** $t=\tan x$,**化为**$\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2}$;

(3) **令** $t=\tan x$,**化为**$\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)}$;

(4) **令** $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t$,**化为**$\frac{1}{4}\int(1+2\sqrt{5}\sin t+5\sin^2 t)\mathrm{d}t$;

(5) **化为**$\int\frac{\mathrm{d}(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2-1}}$;

(6) **令** $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$,**化为**$\int\frac{-4t^2}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t$.

总练习题提示与解答

(教材上册第 199 页)

求下列不定积分:

(1) $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{13}x^{\frac{13}{12}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$;

(2) $\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ $(=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C)$;

(4) $\int e^{\sin x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$ $(=2e^{\sin x}(\sin x-1)+C)$;

(5) $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ $(=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C)$;

(6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \arccos\frac{1}{x} + C$;

(7) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x\,(=\ln|\cos x+\sin x|+C)$;

(8) $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}\mathrm{d}x = \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + C$;

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$;

(10) $\int \sin^4 x\mathrm{d}x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$;

(11) $\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \frac{1}{x-2} + C$;

(12) $\int \arctan(1+\ \ x)\mathrm{d}x\,(= x\arctan(1+\ \ x) - \ \ x + \ln|2+x+2\ \ x|$

$+C)$;

(13) $\int \frac{x^7}{x^4+2}\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\ln(x^4+2) + C$;

(14) $\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}\mathrm{d}x = x - \frac{2}{3}\arctan\frac{2\tan x+1}{3} + C$;

(15) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x = \frac{1}{99}(1-x)^{-99} - \frac{1}{49}(1-x)^{-98} + \frac{1}{97}(1-x)^{-97} + C$;

(16) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\arcsin x - \ln\left|\frac{1+\ \ 1-x^2}{x}\right| + C$;

(17) $\int x\ln\ \frac{1+x}{1-x}\ \mathrm{d}x = \frac{x^2-1}{2}\ln\ \frac{1+x}{1-x}\ + x + C$;

(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\ \ \sin x\cos^7 x} = 2\ \ \ \tan x\ \ 1+\frac{1}{5}\tan^2 x\ + C$;

(19) $\int \mathrm{e}^x\ {\frac{1-x}{1+x^2}}^{2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} + C$;

(20) $I_n = \int \frac{v^n}{u}\mathrm{d}x$,**其中** $u = a_1 + b_1 x$, $v = a_2 + b_2 x$,**求递推形式解** .

$$I_n = \frac{2}{(2n+1)b_1}[v^n\ \ u + n(a_2 b_1 - a_1 b_2) I_{n-1}]$$

提示　(6) **令** $x=\sec t$ **或** $x=\frac{1}{t}$,**作换元积分** .

(7) **先化为** $\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$.

(8) **可化为** $\int\ \ \frac{1}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^3}\ \ \mathrm{d}x$.

(11) **可化为** $\int\ \ -\frac{2}{3(x+1)}+\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{(x-2)^2}\ \ \mathrm{d}x$.

(12) 令 $1+ \quad x = t$.

(13) 不必作部分分式分解 .

(14) 令 $\tan x = t$,化为$\int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t+t^2} \right) \mathrm{d}t$.

(18) 令 $t = \tan x$,化为$\int \frac{1+t^2}{t} \mathrm{d}t$.

(19) 化为$\int \mathrm{e}^x \cdot \frac{(1+x^2) - 2x}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x$.

(20) $I_n = \frac{2}{b_1} \int v^n \mathrm{d}(\quad u) = \frac{2}{b_1} v^n \quad u - \frac{2nb_2}{b_1} \int v^{n-1} \quad u \mathrm{d}x$,

其中 $\int v^{n-1} \quad u \mathrm{d}x = \int \frac{v^{n-1}}{u} (a_1 + b_1 x) \mathrm{d}x = a_1 I_{n-1} + \frac{b_1}{b_2} \int \frac{v^{n-1}(v - a_2)}{u} \mathrm{d}x$

$$= a_1 I_{n-1} + \frac{b_1}{b_2} \int \frac{v^{n-1}(v - a_2)}{u} \mathrm{d}x$$

$$= a_1 I_{n-1} + \frac{b_1}{b_2} I_n - \frac{a_2 b_1}{b_2} I_{n-1} .$$

第八章测试题

(A)

1. 求一曲线,使在其上每一点(x, y)处的切线斜率为$\frac{\ln x}{x}$,且通过点$(1,2)$.

2. 求下列不定积分:

(1)$\int \mathrm{e}^{2x^2 + \ln x} \mathrm{d}x$;

(2)$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2 (x^2+1)}$;

(3)$\int \frac{x}{4x+2} \mathrm{d}x$;

(4)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \quad 1 - x^2}$;

(5)$\int \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) \mathrm{d}x$;

(6)$\int \frac{x(\arccos x)^2}{1 - x^2} \mathrm{d}x$.

(B)

1. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$,求 $f(x)$.

2. 分析如下推演过程错在何处:

用分部积分法来计算$\int \tan x \mathrm{d}x$,有

$$\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = - \int \sec x \mathrm{d}(\cos x)$$

$$= -1 + \int \tan x \mathrm{d}x.$$

两边消去$\int \tan x \mathrm{d}x$ **后,得出了** $-1 = 0$.

3. **求下列不定积分**:

(1) $\int \frac{x^2}{x^6 + 4} \mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x^2 + x + 1)}$;

(3) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1 - 3x}} \mathrm{d}x$;

(4) $\int \sin(\ln x) \mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{3 - \sin x}{3 + \cos x} \mathrm{d}x$;

(6) $\int \sec^4 x \mathrm{d}x$.

4. **建立** $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^n \sqrt{x^2 + 1}}$ **的递推计算公式**.

第九章　定　积　分

§1　定积分概念与牛顿-莱布尼茨公式

一、内容提要(教材§1,§2)

1°　定积分概念是从一系列诸如求面积、体积等几何问题和变力做功等力学问题中提炼出来的,这些问题最后都归为用和式

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1.1}$$

作为所求量的近似值,并以 σ的极限

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\|T\|\to 0)}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = J \tag{1.2}$$

作为所求量的精确值.

2°　对于一般的函数 $f(x)$, $x\in[a,b]$,如果极限(1.2)存在,且与分割 T 的选择与$\{\xi_i\}_1^n$ 的取值无关,则称 f 在$[a,b]$上可积,且称此极限 J 为 f 在$[a,b]$上的定积分,记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = J, \tag{1.3}$$

有关定积分的详细定义见教材上册第201页.

类似于以前常用"$f\in C[a,b]$"表示 f 为$[a,b]$上的一个连续函数,今后用"$f\in R[a,b]$"表示 f 为$[a,b]$上的一个黎曼可积函数,而其中 $R[a,b]$显然表示$[a,b]$上的一切可积函数的集合.

3°　牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \tag{1.4}$$

是计算定积分的最有效的工具.在定理9.1中给出公式成立的条件是: f 在$[a,b]$上连续,且存在原函数 F,即 $F'(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$.还可注意到,在定理证明了公式(1.4)的同时,也证明了 $f\in R[a,b]$.

二、释疑解惑

问题1　"可积"与"连续"有何关系?

答 “f 在 $[a,b]$ 上可积”,是函数的又一分析性质,稍后(§3)就会知道:连续必定可积,而可积不一定连续.所以,“可积”弱于“连续”,或者说“连续”强于“可积”.

问题 2 试对可积定义中的极限(1.2)与一般的函数极限作一比较,并指出与可积定义有关的注意点.

答 对极限式(1.2)的认识有以下几个要点:

(1) 极限号下方的“$\|T\|\to 0$”一般不能用“$n\to\infty$”去替代,因为 $n\to\infty$ 时不能保证 $\|T\|\to 0$,而 $\|T\|\to 0$ 时必定同时有 $n\to\infty$.

(2) 与函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 相比较,后者对于极限变量 x 的每一值,$f(x)$ 是唯一确定的;而在(1.2)式所示的极限式中,对于 $\|T\|$ 的每一值,积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的值却不唯一确定(包括 T 的不确定性和点集 $\{\xi_i\}_1^n$ 的不确定性).这使得积分和的极限要比普通的函数极限复杂得多,于是在本质上决定了可积性理论的复杂性.

(3) 极限(1.2)的存在,必须与分割 T 的形式无关,与点集 $\{\xi_i\}_1^n$ 的选择也无关;唯一重要的是分割的细度 $\|T\|$,当 $\|T\|$ 足够小时,总能使积分和与某一确定的数 J 无限接近.

(4) 根据(3),如果能构造出两个不同方式的积分和,使它们的极限不相同,那么就可断言该函数在所论区间上是不可积的.例如狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为}[0,1]\text{中的有理数},\\ 0, & x \text{ 为}[0,1]\text{中的无理数},\end{cases}$$

它在 $[0,1]$ 上必定不可积.这是因为对任何分割 T,在 T 所属的每个小区间中都有有理数与无理数(据实数的稠密性),当取 $\{\xi_i\}_1^n$ 全为有理数时,得

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1,$$

当取 $\{\xi_i\}_1^n$ 全为无理数时,得

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i=0,$$

所以这两种积分和的极限不相等,$D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

一般地,函数 f 在 $[a,b]$ 上不可积是指:$\exists\,\varepsilon_0>0$,$\forall\,\delta>0$,$\exists\,T'$,T'' 以及 $\{\xi_i'\}_1^n$,$\{\xi_j''\}_1^m$,虽然 $\|T'\|<\delta$,$\|T''\|<\delta$,但

$$\left|\sum_i f(\xi_i')\Delta x_i' - \sum_j f(\xi_j'')\Delta x_j''\right|\geq\varepsilon_0 .$$

(5) 反之,如果已知 $f\in R[a,b]$,那么对于每个特殊分割 T,以及点集 $\{\xi_i\}_1^n$ 的每种特殊选择,所得的那个积分和当 $\|T\|\to 0$ 时必以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为极限.

(6) 定积分作为积分和的极限,它的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a, b]$ 有关,而与积分变量所用的文字无关,即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \cdots . \tag{1.5}$$

问题 3　使用牛顿 - 莱布尼茨公式(1.4)时有哪些需要注意的地方?

答　(1) 注意公式(1.4)成立的条件.特别当函数 f 在 $[a, b]$ 上只是存在原函数 F 时,尚不能保证 f 在 $[a, b]$ 上可积,更谈不上(1.4)式成立.例如函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \end{cases}$$

它存在导函数

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2x\sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\cos \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0; \end{cases}$$

但因 $f(x)$ 在原点近旁无界,故 f 在包含原点的任一闭区间上不可积(稍后立即知道"有界"是可积的必要条件).

如果 f 在 $[a, b]$ 上连续,其原函数 F 可以通过计算 f 的不定积分而求得,此时牛顿 - 莱布尼茨公式(1.4)便可使用.

(2) 然而定理 9.1 的条件毕竟是使公式(1.4)成立的一组充分条件,也就是说这组条件还可适当减弱.这主要体现在如下两方面——

(i) 对 F 的要求可改为:在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内除有限个点外有 $F'(x) = f(x)$.这时只要把这有限个点添作分割 T 的分点,就不会影响定理 9.1 的证明.

(ii) 对 f 的要求也可改为在 $[a, b]$ 上可积(不一定连续),此时定理 9.1 证明中的(2)式依然成立,但由 $f \in R[a, b]$,据前面问题 2(5)所言,(2)式右边这个特殊的积分和当 $\|T\| \to 0$ 时的极限就是 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,而此式左边恒为一常数 $F(b) - F(a)$,故二者相等.

(3) 至以后 §5 证得"连续函数必有原函数"之后,定理 9.1 的条件中对 $F(x)$ 的假设便是多余的了(见教材第 221 页).

下面举例说明上述(2)的正确应用.设

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0), \\ \mathrm{e}^x, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

此函数本身在 $x = 0$ 处虽不连续,但它在 $[-1, 1]$ 上却是可积的(至 §3 就能知道).为了用牛顿 - 莱布尼茨公式计算 $J = \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$,现取

$$F_1(x)=\begin{cases}-x, & x\in[-1,0)\\ e^x, & x\in[0,1];\end{cases}\qquad F_2(x)=\begin{cases}-x+1, & x\in[-1,0)\\ e^x, & x\in[0,1].\end{cases}$$

易见在$[-1,1]$上除 $x=0$ 一点外,处处有

$$F'_1(x)=f(x)=F'_2(x);$$

而且

$$F_1(1)-F_1(-1)=e-1,\quad F_2(1)-F_2(-1)=e-2.$$

试问:J的值应该等于 e - 1,还是 e - 2 ? 或者这两个结果都不是 ?

考察上面(2)中对 $F(x)$的要求,应在$[-1,1]$上连续;对照 $F_1(x)$与 $F_2(x)$,其中 $F_2(x)$能满足要求,而 $F_1(x)$在点 $x=0$ 间断.所以正确答案应是 $J=e-2$.

三、范例解析

例 1 证明:若 $f\in R[a,b]$,且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$,则存在$[\alpha,\beta]\quad[a,b]$,使

$$f(x)>0,\quad x\in[\alpha,\beta].$$

证 采用反证法,倘若在任何$[\alpha,\beta]\quad[a,b]$上都使 $f(x)\leq 0$,则导致任一积分和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\leq 0$,于是当$\|T\|\to 0$ 时的极限亦为非正,即

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq 0,$$

这与已知条件相矛盾. □

例 2 通过对积分和求极限来验证:

$$\int_\alpha^\beta a^x\mathrm{d}x=\frac{a^\beta-a^\alpha}{\ln a},\quad 0<a\neq 1.\tag{1.6}$$

解 首先,本题的解法与牛顿 - 莱布尼茨公式无关.按题意,需假设(1.6)式左边的定积分存在,然后根据前面问题 2 的(5),可以通过对某一特殊积分和求极限而得到该定积分的值.

为简单起见,取 T 为等分分割:

$$T=\alpha,\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n},\cdots,\alpha+\frac{(n-1)(\beta-\alpha)}{n},\beta,$$

$$\Delta x_i=\|T\|=\frac{\beta-\alpha}{n},\ i=1,2,\cdots,n;$$

并取 $\xi_i=\alpha+\frac{i(\beta-\alpha)}{n}$, $i=1,2,\cdots,n$ 则有

$$\int_\alpha^\beta a^x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n a^{\alpha+\frac{i(\beta-\alpha)}{n}}\cdot\frac{\beta-\alpha}{n}$$

$$= a^{\alpha}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a^{\frac{\beta-\alpha}{n}i}\cdot\frac{\beta-\alpha}{n}$$

$$= a^{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{\beta-\alpha}{n}}(1-a^{\beta-\alpha})}{1-a^{\frac{\beta-\alpha}{n}}}\cdot\frac{\beta-\alpha}{n}$$

$$= a^{\alpha}(1-a^{\beta-\alpha})\lim_{n\to\infty} a^{\frac{\beta-\alpha}{n}}\cdot\frac{\frac{\beta-\alpha}{n}}{1-a^{\frac{\beta-\alpha}{n}}}$$

$$= (a^{\alpha}-a^{\beta})\cdot 1\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-a^{t}}$$

$$= (a^{\alpha}-a^{\beta})\lim_{t\to 0}\frac{1}{-a^{t}\ln a}$$

$$= \frac{a^{\beta}-a^{\alpha}}{\ln a}.$$

例 3 设 $f\in R[a,b]$, g 与 f 仅在有限个点处取值不同.试由可积定义证明 $g\in R[a,b]$,且有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 不失一般性,设 g 与 f 只在一点处取值不同,而且为 $g(b)\neq f(b)$.

记 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=J$.因 $f\in R[a,b]$,故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$,当 $\|T\|<\delta_1$ 时,对一切 $\{\xi_i\}_1^n$ 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

于是又有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i-J\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \\ &\quad+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-J\right| \\ &< \sum_{i=1}^{n}|g(\xi_i)-f(\xi_i)|\cdot\|T\|+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

由于当 $1\leq i\leq n-1$ 时, $|g(\xi_i)-f(\xi_i)|=0$,而当 $i=n$ 时无论 $\xi_n=b$ 或 $\xi_n\neq b$,都有

$$|g(\xi_n)-f(\xi_n)|\leq|g(b)-f(b)|,$$

因此只要

$$\|T\|<\delta=\min\left\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{2|g(b)-f(b)|}\right\},$$

就能保证

$$\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

这即为 $g\in R[a, b]$，且

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x . \qquad \square$$

本例说明：一个可积函数，当它的有限个函数值发生改变时，既不会影响它的可积性，也不会影响它的定积分之值. 这个重要性质在以后常会用到.

例 4 通过化为定积分后求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)} = J . \tag{1.7}$$

解 这类问题的解题思想，是要把所求极限化为某个函数 $f(x)$ 在某一区间 $[a, b]$ 上的积分和的极限，然后利用牛顿 - 莱布尼茨公式计算 $J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

由于 (1.7) 式中的根式不是一个和式，而是一个连乘积，因此可望通过求对数后化为累加形式. 为此记

$$J_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$$

$$= \sqrt[n]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)} ,$$

$$I_n = \ln J_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) .$$

不难看出，I_n 是函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上对应于 n 等分分割，并取

$$\xi_i = \frac{i}{n}\in\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

的一个积分和.

由于 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且存在原函数

$$F(x) = (1+x)[\ln(1+x) - 1] ,$$

故由定理 9.1 知道 $f(x)\in R[0, 1]$，且有

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$$

$$= (1+x)[\ln(1+x) - 1]\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1 .$$

于是就可求得

$$J = \lim_{n\to\infty} J_n = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} I_n}$$

$$= \mathrm{e}^{I} = \mathrm{e}^{\ln\frac{4}{\mathrm{e}}} = \frac{4}{\mathrm{e}} . \qquad \square$$

注　上面 I_n **也可看作** $\ln x$ **在**$[1,2]$**上的一个积分和,或者是** $\ln(x-1)$**在**$[2,3]$**上的一个积分和,……亦即**

$$I=\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x=\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x=\cdots .$$

例 5　试求由曲线 $y=x|1-x|$ **以及直线** $x=2$ **和** x **轴所围曲边梯形**(**图** 9 - 1)**的面积** S .

解　由于

$$x|1-x|=\begin{cases} x(1-x), & x\in[0,1], \\ x(x-1), & x\in(1,2], \end{cases}$$

因此依据定积分的几何意义,可求得

$$\begin{aligned} S&=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)\mathrm{d}x \\ &=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 \\ &=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1 . \end{aligned}$$

□

* **例 6　设** $f(x)$**在**$[0,1]$**上可积,且为凸函数 .试证:**

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geq f\left(\frac{1}{2}\right) . \tag{1.8}$$

证　凸函数的特征是: $\forall\lambda(0<\lambda<1)$,**恒有**

$$\lambda f(x')+(1-\lambda)f(x'')\geq f(\lambda x'+(1-\lambda)x'');$$

特别当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$**时,满足**

$$\frac{1}{2}[f(x')+f(x'')]\geq f\left(\frac{x'+x''}{2}\right). \tag{1.9}$$

要想证明不等式(1.8),可以先把左边的定积分表示成某一积分和的极限,以便能用(1.9)把积分和中各项与 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 相联系.为方便起见,我们将[0,1]等分为 $2n$ 个小区间,并取 ξ_i 为第 i 个小区间的中点($i=1,2,\cdots,2n$),则有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n} f(\xi_i)\frac{1}{2n}.$$

由于

$$\frac{1}{2}(\xi_i+\xi_{2n-i+1})=\frac{1}{2},\ i=1,2,\cdots,n,$$

因此由(1.9)得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n} f(\xi_i)&=[f(\xi_1)+f(\xi_{2n})]+\cdots+[f(\xi_n)+f(\xi_{n+1})]\\&\geq 2\left[f\left(\frac{\xi_1+\xi_{2n}}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{\xi_n+\xi_{n+1}}{2}\right)\right]\\&=2nf\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

于是就证得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n} f(\xi_i)\frac{1}{2n}\geq f\left(\frac{1}{2}\right),$$

即不等式(1.8)成立. □

注　把本例中的区间[0,1]改为一般的$[a,b]$时,在同样的条件下,类似地可证得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

请读者自行写出推导过程.

四、习题选解

§1 习题(教材上册第 204 页)

1. 按定积分定义证明:$\int_a^b k\mathrm{d}x=k(b-a)$.

提示　$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$.

2. 通过对积分区间作等分分割,并取适当的点集$\{\xi_i\}_1^n$,把定积分看作是对应的积分和的极限,来计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x\left(=\frac{1}{4}\right)$;　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x(=\mathrm{e}-1)$;

(3) $\int_a^b e^x \mathrm{d}x \left(= e^b - e^a\right)$;

(4) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}(0 < a < b) \left(= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$.

提示 (1) **利用** $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

(2)、(3)**参见范例** 4 .

(4) **取** $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$,**于是有**

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}x_i}.$$

§2 习题(教材上册第 206 页)

2. **利用定积分求极限**:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}(1 + 2^3 + \cdots + n^3) \left(= \frac{1}{4}\right)$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2}\right) \left(= \frac{1}{2}\right)$;

(3) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{2n^2}\right) \left(= \frac{\pi}{4}\right)$;

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right) \left(= \frac{2}{\pi}\right)$.

提示 (1) **化为** $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$; (2) **化为** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$;

(3) **化为** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; (4) **化为** $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$.

3. **证明**:**若** $f \in R[a, b]$, $F \in C[a, b]$,**除有限个点处有** $F'(x) = f(x)$,**则有**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

提示 **对** $[a, b]$ **作分割** T,**使不满足** $F'(x) = f(x)$ **的点恒为** T **中的一部分分点.此时在每个小区间** $[x_{i-1}, x_i]$ **上** F **满足微分中值定理条件,故有** $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$,**使**

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(\eta_i)\Delta x_i,\ i = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

§2 可积条件

一、内容提要(教材§3, §6)

1° 教材§3 的主题是给出可积的必要条件、充要条件和充分条件(即可积函数类);而§6 是对可积充要条件给出详细证明.图 9 - 2 所示是这些可积条件的总览.通过这部分内容(尤其是可积充要条件)的学习,可增加对函数可积这个分析性质的本质的理解,并为进一步讨论定积分的性质(教材§4)作好了准备.

可积的充分条件(可积函数类)

1) f 在$[a,b]$上连续;

2) f 在$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点;

3) f 在$[a,b]$上单调;

4) f 为其他某些特殊函数(见例题).

$J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在

(即 f 在$[a,b]$上可积)

f 在$[a,b]$上有界

(可积的必要条件)

定义

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$\|T\|<\delta$时,

$\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon,\forall\{\xi_i\}$.

可积第一充要条件

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\left(\lim_{\|T\|\to0}\sum m_i\Delta x_i=\lim_{\|T\|\to0}\sum M_i\Delta x_i\right)$$

可积第二充要条件

$\forall\varepsilon>0,\exists T$,使得

$$\sum_{(T)}M_i\Delta x_i-\sum_{(T)}m_i\Delta x_i=\sum_{(T)}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

－－－－－－－－(或者)－－－－－－－－

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,只要$\|T\|<\delta$,总有

$$\sum_{(T)}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

可积第三充要条件

$\forall\sigma,\eta>0,\exists T$,在 T 中使得 $\omega_i'\geqslant\sigma$ 的那些小区间的长度之和满足

$$\sum\Delta x_i'<\eta.$$

图 9 - 2

2° 可积的一个最基本的必要条件是:被积函数在积分区间上有界.反之不一定成立,最简单的反例首推狄利克雷函数,它在[0,1]上有界,但不可积.正因为如此,以后在考察任何可积性问题时,首先应该确认被积函数是否有界.

3° 建立可积充要条件的基本构想来自不等式

$$s(T) \leq \sum_{(T)} f(\xi_i)\Delta x_i \leq S(T) \tag{2.1}$$

其中

$$s(T) = \sum_{(T)} m_i \Delta x_i, \quad S(T) = \sum_{(T)} M_i \Delta x_i,$$

分别是 f 相对于分割 T 的下和与上和,这里的 m_i 与 M_i $(i = 1,2,\cdots,n)$是 f 在 T 中每一小区间 Δ_i 上的下确界与上确界.显然,$s(T)$与 $S(T)$是由分割 T 所完全确定的,它与积分和中的点集$\{\xi_i\}_1^n$没有关系.而且不难知道,当分割 T 逐步增加分点而加密时,下和 $s(T)$递增,上和 $S(T)$递减(如图 9 - 3 所示,当在小区间$[x_{i-1}, x_i]$内增加了一个分点 x'时,阴影部分面积所表示的下和一般将会增加;上和亦同此理) 所以,随着 T 的无限加密,必将存在

$$\sup_{(T)} = s(T) = s, \quad \inf_{(T)} S(T) = S,$$

分别称为 f 在$[a,b]$上的下积分与上积分,又记作

$$s = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x, \quad S = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x .$$

这样,由(2.1)式便可推想:$f \in R[a,b]$在本质上等同于$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$.而这就是可积第一充要条件的由来,只是在严格证明这个推想时,需要对下和与上和的性质作出系统的讨论(见教材第 231 页,§6).

4° 可积第二充要条件只是可积第一充要条件的换一种写法,在后面应用得最多的是第二充要条件.而可积第三充要条件,理解起来更加抽象一些,如果

使用得法,会显得特别有效.例如教材第 235 页上的例 1(证明黎曼函数可积)和例 2(证明复合可积性质)就是如此.

5° 可积充分条件给出了三类可积函数(教材第 209 页上的定理 9.4～9.6),它们的证明都要用到可积第二充要条件(充分性).其中,定理 9.4 证明连续函数必定可积时,特别还要借助 f 在 $[a, b]$ 上的一致连续性.可以毫不夸张地说,“闭区间上的连续函数必定一致连续”这个著名性质,在数学分析中最主要的功用就是用来证明这里的定理 9.4 所以读者在学习这个定理的证明过程时,一定要弄清一致连续在其中所起的不可或缺的作用.

二、释疑解惑

问题 1 可积第二充要条件的如下两种叙述方式为什么是相互等价的?

叙述 A $\forall \varepsilon > 0, \exists T$,使得

$$\sum_{(T)} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon;$$

叙述 B $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,对于 $\|T\| < \delta$ 的一切 T,都有

$$\sum_{(T)} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

答 显然,叙述 B 蕴含了叙述 A.反之,当叙述 A 成立时,关于由 ε 所对应的 T,有

$$s(T) \leq s \leq S \leq S(T)$$

$$0 \leq S - s \leq S(T) - s(T) = \sum_{(T)} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性得到 $s = S$,再依据达布定理(教材第 233 页上性质 6),又知

$$\lim_{\|T\| \to 0} [S(T) - s(T)] = S - s = 0.$$

把它用“$\varepsilon - \delta$”陈述方式来表达,就是叙述 B 所以,叙述 A 与叙述 B 是互相等价的,以后在使用可积第二充要条件去证明别的可积性问题时,可以根据需要选择其中合适的一种叙述方式,使得推理过程尽可能简单、清楚.

问题 2 黎曼函数在可积性问题上有哪些主要功用.

答 (1) 黎曼函数在 $[0,1]$ 上可积,说明可积函数也可以有无限多个不连续点(这里是 $(0,1)$ 内的所有有理数点).这样,人们势必又会提出进一步的问题:一个有界函数在 $[a, b]$ 上所具有的间断点究竟多到何种程度时,才会导致它在 $[a, b]$ 上不可积呢?这个问题要到后继课程《实变函数论》中引入“测度”概念后才能得到彻底解决.如果用可积第三充要条件来解释,那就是:如果 f 在 $[a, b]$ 上的所有间断点不可能含于一系列总长度为任意小的开区间内,那么 f 在 $[a, b]$ 上必定是不可积的.读者可对照狄利克雷函数与黎曼函数来加以体会.

(2) 黎曼函数不属于定理 9.4～9.6(教材第 209 页)所给出的三类可积函数,这也说明了这三个定理的条件都是可积的充分条件.

(3) 在教材第 211 页例 3 和第 235 页例 1 中,分别用可积第二充要条件和第三充要条件证明了黎曼函数的可积性.读者不妨对这两个证明做个详细比较,借此增加对两个可积充要条件的认识和理解.

问题 3　两个可积函数的复合函数是否可积?

答　在教材第 235 页例 2 中指出,当外函数 f 连续,内函数 φ 可积时,复合函数 $f\circ\varphi$ 必定可积.虽然这个命题所给出的条件是一个充分条件,但是其中关于外函数为连续的条件却是十分重要的.也就是说,如果把外函数与内函数都改为"可积",此时复合函数将不能保证是可积的.最典型的反例是:内函数 $u=\varphi(x)$ 为黎曼函数,外函数为

$$f(u)=\begin{cases}1, & 0<u\leq 1,\\ 0, & u=0,\end{cases}$$

这两个函数都是可积函数.可是复合函数 $f(\varphi(x))$ 恰好就是狄利克雷函数,它在 $[0,1]$ 上不可积.

三、范例解析

例 1　设 $f\in R[a,b]$, $g(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$.试用两种方法证明 $g\in R[a,b]$.

证　[证法一]因 $f\in R[a,b]$,故 $\exists\ M_1>0$,使

$$|f(x)|\leq M_1,\quad x\in[a,b];$$

于是有

$$|g(x)|\leq \mathrm{e}^{M_1}=M,\quad x\in[a,b].$$

因此由微分中值定理推知

$$\begin{aligned}\omega_i^g&=\sup_{x',x''\in\Delta_i}\left|\mathrm{e}^{f(x')}-\mathrm{e}^{f(x'')}\right|\\&=\sup_{x',x''\in\Delta_i}\mathrm{e}^{\eta_i}|f(x')-f(x'')|\\&\leq M\sup_{x',x''\in\Delta_i}|f(x')-f(x'')|\\&=M\omega_i^f\ (\text{其中 }\eta_i\text{ 在 }f(x')\text{ 与 }f(x'')\text{ 之间}).\end{aligned}\tag{2.2}$$

根据可积第二充要条件(必要性),$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 某分割 T,可使

$$\sum_{(T)}\omega_i^f\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{M};$$

对于同一分割 T,据(2.2)式便有

$$\begin{aligned}\sum_{(T)}\omega_i^g\Delta x_i&\leq M\sum\omega_i^f\Delta x_i\\&<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

再由可积第二充要条件(充分性),证得 $g(x)=e^{f(x)}\in R[a,b]$. □

[证法二] 利用复合函数可积性质(教材第235页例2),已知 $h(u)=e^{u}$ 为连续函数,$u=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为可积函数,则

$$g(x)=h(f(x))=e^{f(x)}\in R[a,b].$$ □

例2 证明:若 $f\in R[a,b]$,$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,则 $f\in R[\alpha,\beta]$.

证 $\forall\varepsilon>0$,因 $f\in R[a,b]$,故 $\exists$ 分割 T,使

$$\sum_{(T)}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

把 α,β 两点加入 T 而成 T',则由 T' 是 T 的加密,知道

$$\sum_{(T')}\omega_{i'}\Delta x_{i'}\leq\sum_{(T)}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

与此同时,T' 在 $[\alpha,\beta]$ 上的那部分分点构成对 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割 T'',并有

$$\sum_{(T'')}\omega_{i''}\Delta x_{i''}\leq\sum_{(T')}\omega_{i'}\Delta x_{i'}<\varepsilon.$$

这就证得 $f\in R[\alpha,\beta]$. □

例3 设 $h(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一个阶梯函数,意即有一 $[a,b]$ 上的分割 T,使 $h(x)$ 在 T 所属的每个小区间 (x_{i-1},x_i) 上都是常数($h(x_i)$ 的值可以是任意的,它对 $h(x)$ 的积分无影响),$i=1,2,\cdots,n$.证明:

(1) 若 $f\in R[a,b]$,则任给 $\varepsilon>0$,存在阶梯函数 $h_1(x)\leq f(x)$ ($h_2(x)\geq f(x)$),$x\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b h_1(x)\,dx<\varepsilon$$

$$\left(\int_a^b h_2(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx<\varepsilon\right). \tag{2.3}$$

(2) 若对任给的 $\varepsilon>0$,存在阶梯函数

$$h_1(x)\leq f(x),\ h_2(x)\geq f(x),\ x\in[a,b],$$

使得

$$\int_a^b h_2(x)\,dx-\int_a^b h_1(x)\,dx<\varepsilon,$$

则 $f\in R[a,b]$.

证 (1) 由 $f\in R[a,b]$,$\exists\ T$,使得

$$\sum_{(T)}\omega_i^f\Delta x_i=S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

由于 $s(T)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq S(T)$,因此

$$\int_a^b f(x)\,dx-s(T)<\varepsilon,\quad S(T)-\int_a^b f(x)\,dx<\varepsilon. \tag{2.4}$$

所以只要取阶梯函数 h_1 和 h_2 为

$$h_1(x)=m_i,\quad h_2(x)=M_i,\quad x\in(x_{i-1},x_i),$$
$$i=1,2,\cdots,n,$$

就有

$$\int_a^b h_1(x)\mathrm{d}x=s(T),\quad \int_a^b h_2(x)\mathrm{d}x=S(T).$$

把它代入(2.4)式,就证得(2.3)式成立. □

(2) 满足题设条件的阶梯函数 h_1 和 h_2 存在,根据阶梯函数的定义,分别存在分割 T_1 和 T_2,使

$$S(T_2)-s(T_1)\leq\int_a^b h_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b h_1(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

令 $T=T_1+T_2$,把 T 看作既是 T_1 的加密,又是 T_2 的加密,于是有

$$\begin{aligned}\sum_{(T)}\omega_i^f\Delta x_i&=S(T)-s(T)\\&\leq S(T_2)-s(T_1)<\varepsilon,\end{aligned}$$

这就证得 $f\in R[a,b]$. □

说明 由以上(1)的结论,立即得到

$$\int_a^b h_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b h_1(x)\mathrm{d}x<2\varepsilon,$$

再与(2)相联系,便有如下命题—— $f\in R[a,b]$ 的充要条件是:存在两个阶梯函数 h_1 和 h_2,满足

$$h_1(x)\leq f(x)\leq h_2(x),\quad x\in[a,b],$$
$$\int_a^b h_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b h_1(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

由以上(1)与(2)的证明看到,这个命题其实就是可积第二充要条件的另外一种表达方式.

例 4 证明:若 $f\in R[a,b]$,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在一个连续函数 $g(x)\leq f(x)$, $x\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

证 根据例 3(1),取一阶梯函数 h,满足

$$h(x)\leq f(x),\ x\in[a,b],$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b h(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 f 在$[a,b]$上可积,从而有界,设

$$|f(x)|\leq M,\quad x\in[a,b].$$

若 $h(x)$在(x_{i-1},x_i)上为常数 m_i, $i=1,2,\cdots,n$,取

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2nM},$$

则可构造一个连续函数 $g(x)$(如图 9 - 4 所示):在 $x_{i-1}+\frac{\delta}{2}, x_i-\frac{\delta}{2}$ 上 $g(x) = h(x) = m_i$;在 $x_i-\frac{\delta}{2}, x_i$ 和 $x_i, x_i+\frac{\delta}{2}$ 上,$g(x)$为满足 $g(x_i) = -M$ 的线性函数 .于是有

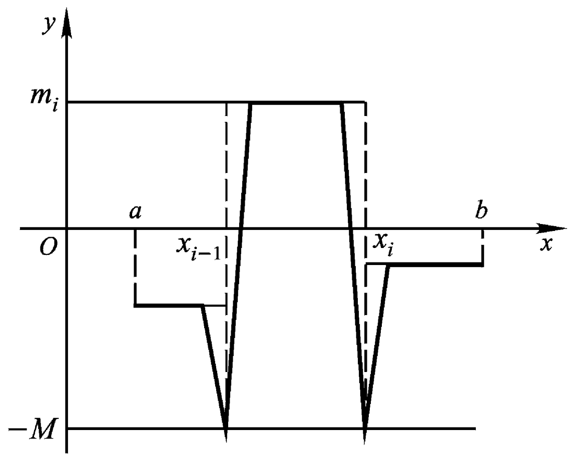


图 9 - 4

$$g(x) \leq h(x) \leq f(x),\ x \in [a, b],$$

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq n\delta M < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b h(x)\mathrm{d}x$$

$$+\int_a^b h(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x < \varepsilon .$$ □

请读者自行证明:当 $f \in R[a, b]$时,存在连续函数 $g(x) \geq f(x)$,满足

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon .$$

例 5 本题的最终目的是要证明:若 f 在$[a, b]$上可积,则 f 在$[a, b]$上必定存在无限多个连续点,而且它们在$[a, b]$上处处稠密 .这可以用区间套方法按以下顺序逐一证明:

(1) 若分割 T 能使 $S(T) - s(T) < b - a$,则在 T 中存在某个小区间 Δ_i,使在其上有 $\omega^f(\Delta_i) < 1$;

(2) 存在区间 $I_1 = [a_1, b_1]$ (a, b),使得

$$\omega^f(I_1) = \sup_{x \in I_1} f(x) - \inf_{x \in I_1} f(x) < 1;$$

(3) 存在区间 $I_2 = [a_2, b_2]$ (a_1, b_1),使得

$$\omega^f(I_2)=\sup_{x\in I_2}f(x)-\inf_{x\in I_2}f(x)<\frac{1}{2};$$

(4) 继续以上方法,求出一区间序列$\{I_n\}=\{[a_n,b_n]\}$,使得

$$[a_n,b_n]\quad(a_{n-1},b_{n-1}),$$

$$\omega^f(I_n)=\sup_{x\in I_n}f(x)-\inf_{x\in I_n}f(x)<\frac{1}{n},$$

可证$\{I_n\}$是一个区间套,其公共点 $x_0\in I_n$, $n=1,2,\cdots$是 f 的一个连续点;

(5) 按上面方法求得的 f 的连续点在$[a,b]$上处处稠密 .

* 证 (1) 倘若在所有小区间上都有

$$\omega^f(\Delta_i)\geq 1,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则将出现矛盾:

$$S(T)-s(T)=\sum_{(T)}\omega^f(\Delta_i)\Delta x_i$$
$$\geq\sum_{(T)}\Delta x_i=b-a.$$

(2) 由(1),v $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ $[a,b]$,在其上有 $\omega^f(\Delta_i)<1$ 现按如下规定来得到 I_1:

若 $1<i<n$,则取$[a_1,b_1]=[x_{i-1},x_i]$ (a,b);

若 $i=1$,则取$[a_1,b_1]=[a_1,x_1]$,其中 a_1为满足 $a<a_1<x_1$的任意数,则有$[a_1,b_1]$ (a,b);

若 $i=n$,则取$[a_1,b_1]=[x_{n-1},b_1]$,其中 b_1为满足 $x_{n-1}<b_1<b$的任意数,同样有$[a_1,b_1]$ (a,b).

由此得到的 $I_1=[a_1,b_1]$ Δ_i,必定有

$$\omega^f(I_1)\leq\omega^f(\Delta_i)<1.$$

(3) 用 I_1 代替(1)中的$[a,b]$,根据例 2,知道 $f\in R[a_1,b_1]$.同理可证:v $[a_1,b_1]$上的分割 T_1使得

$$S(T_1)-s(T_1)<\frac{1}{2}(b_1-a_1);$$

且有 T_1中的某个小区间 Δ_i',使

$$\omega^f(\Delta_i')<\frac{1}{2}.$$

类似于(2),v $I_2=[a_2,b_2]$ (a_1,b_1),满足

$$\omega^f(I_2)\leq\omega^f(\Delta_i')<\frac{1}{2}.$$

(4) 因以上分割 T_n可以做得无限细密,故当$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|=0$时,由 $b_{n+1}-a_{n+1}\leq\|T_n\|$,可知

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0;$$

又因 $I_{n+1} \subset I_n$,所以$\{I_n\}$为一区间套.

根据区间套定理,$\exists\ x_0 \in I_n$, $n = 1,2,\cdots$;且对$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}_+$,当 $n\geq N$ 时,有$\frac{1}{n} < \varepsilon$,以及

$$[a_n, b_n] \subset U(x_0;\varepsilon).$$

由$\{I_n\}$的构造特征:$[a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$, $n = 1,2,\cdots$,保证 $x_0 \in (a_n, b_n)$, $n = 1,2,\cdots$ 现取

$$\delta = \min\{x_0 - a_N, b_N - x_0\} > 0,$$

当 $x', x''\in U(x_0;\delta) \subset U(x_0;\varepsilon)$时,必有

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega^f(I_N) = \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

所以 f 在 x_0 连续.

(5) $\forall[\alpha, \beta] \subset [a, b]$,以$[\alpha, \beta]$代替$[a, b]$,由于 $f\in R[\alpha, \beta]$,因此由以上(1)～(4)可证得 f 在(α, β)内至少有一个连续点 所以 f 的连续点在$[a, b]$中处处稠密. □

说明 1.本例所证得的命题是十分重要的,它进一步指明了可积与连续之间的内在联系.

2.如果一个函数 f,它在$[a, b]$上的连续点不是处处稠密的,那么就可断言 $f\notin R[a, b]$ 例如函数

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \text{ 为 } \left(0,\frac{2}{\pi}\right] \text{ 中有理数}, \\ 0, & x = 0 \text{ 和 } \left(0,\frac{2}{\pi}\right] \text{ 中无理数}. \end{cases}$$

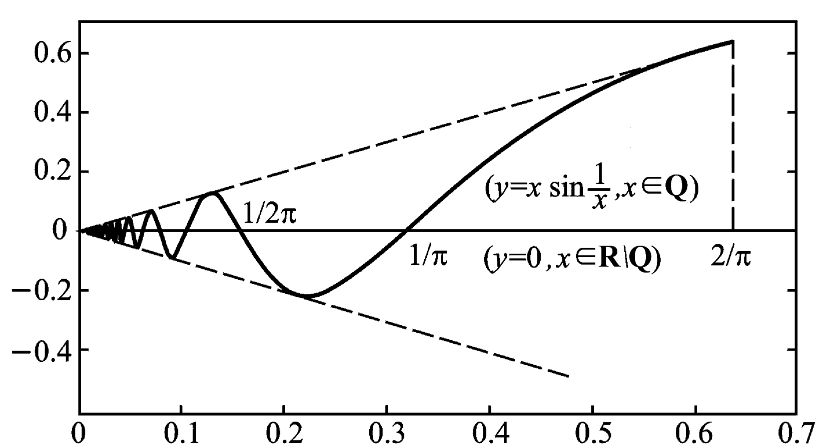


图 9 - 5

如图 9 - 5 所示,它在 $0,\frac{2}{\pi}$ 中的连续点为

$$x=0,\quad \frac{1}{k\pi},\quad k=1,2,\cdots .$$

这些连续点虽有无限多个,但它们并不处处稠密,所以 f 在 $0,\frac{2}{\pi}$ 上是不可积的 .

四、习题选解

§3 习题(教材上册第 212 页)

1. 证明:若 T' 是 T 增加若干个分点后所得的分割,则 $\sum_{(T')}\omega_{i'}\Delta x_{i'}\le\sum_{(T)}\omega_i\Delta x_i$.

提示　利用本节内容提要 3°中对下和与上和性质(图 9 - 3)的讨论 .

2. 证明:若 $f\in R[a,b]$, $[\alpha,\beta]$　$[a,b]$,则 $f\in R[\alpha,\beta]$.

(证明见前面范例 2 .)

3. 设 f、g 均在$[a,b]$上有界,仅在有限个点处 $f(x)\neq g(x)$.证明:若 f 在$[a,b]$上可积,则 g 在$[a,b]$上也可积,且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

提示　在本章§1 的范例 3 中曾用可积定义证明过此题;现在要求用可积的充要条件来证明 .为此仍可设 f 与 g 仅在一点 c 处的值不同 .

由条件," $\varepsilon>0$,v T,使得

$$\sum_{(T)}\omega_i^f\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2} .$$

设点 c 落在 T 中的第 k 个小区间中,于是有

$$\begin{aligned}\sum_{(T)}\omega_i^g\Delta x_i&=\sum_{\substack{(T)\\ i\neq k}}\omega_i^f\Delta x_i+\omega_k^g\Delta x_k\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\omega_k^g\Delta x_k .\end{aligned}$$

所以,若能进一步证得 $\omega_k^g\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}$,则 g 在$[a,b]$上可积就得到证明 .

在证得 $g\in R[a,b]$的基础上,再证

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

就非常方便了 .

4. 设 f 在$[a,b]$上有界,$\{a_n\}$　$[a,b]$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.证明:若 f 在$[a,b]$上只有 $a_n(n=1,2,\cdots)$为其间断点,则 $f\in R[a,b]$.

提示　不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c=a$." $\varepsilon>0$,取足够小的 $\delta>0$,使

$$\omega_0 \delta < \frac{\varepsilon}{2},$$

其中 ω_0 是 f 在 $[a, a+\delta]$ 上的振幅($\delta=$?).

在 $[a+\delta, b]$ 上 f 必定可积(为什么?),故 $\exists$ $[a+\delta, b]$ 上的分割 T',使得

$$\sum_{(T')} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

把 $[a, a+\delta]$ 与 T' 合起来得到 $[a, b]$ 上的分割 T,可证

$$\sum_{(T)} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

5. 证明:若 f 在区间 Δ 上有界,则

$$\sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{x\in\Delta} f(x) = \sup_{x', x''\in\Delta} |f(x') - f(x'')|.$$

提示　这完全是一个确界问题,但这个等式在可积问题中经常会用到.

设 $m = \inf\limits_{x\in\Delta} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in\Delta} f(x)$. 要证明

$$\sup_{x', x''\in\Delta} |f(x') - f(x'')| = M - m,$$

依上确界定义,需分别证明:

1) $\forall x', x''\in\Delta$,必有 $f(x') - f(x'') \leq M - m$;

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x', x''\in\Delta$,使 $f(x') - f(x'') > M - m - \varepsilon$.

§6 习题(教材上册第 236 页)

1. 证明性质 2 关于下和的不等式(3).

提示　模仿关于上和的不等式(2)的证明.

2. 证明性质 6 关于下和的极限式 $\lim\limits_{\|T\|\to 0} s(T) = s$.

提示　模仿关于上和的极限式 $\lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T) = S$ 的证明.

3. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

试求 f 在 $[0,1]$ 上的下积分和上积分;并由此判断 f 在 $[0,1]$ 上是否可积.

提示　$s = 0$, $S = \frac{1}{2}$.

4. 设 $f\in R[a, b]$, $f(x)\geq 0$, $x\in[a, b]$. 试问 $\sqrt{f}$ 在 $[a, b]$ 上是否可积?为什么?

提示　利用复合函数可积性质(教材第 235 页例 2).

5. 证明:定理 9.14 中的可积第二充要条件等价于“任给 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,对一切满足 $\|T\| < \delta$ 的 T,都有 $\sum\limits_{(T)} \omega_i \Delta x_i = S(T) - s(T) < \varepsilon$”.

(参见前面释疑解惑的问题 1)

6. 据理回答:

(1) 何种函数具有“任意下和等于任意上和”的性质?

(2) 何种连续函数具有“所有下和(或上和)都相等”的性质?

(3) 对于可积函数,若“所有下和(或上和)都相等”,是否仍有(2)的结论?

提示 (1),(2) 都为常数函数;(3)与(2)不同,例如黎曼函数.

7. (题略,见前面三、例 5.)

§3 定积分的性质

一、内容提要 (教材 § 4)

以下 1°～6°是定积分的基本性质;7°与 8°是积分第一中值定理.

1° $f\in R[a,b]$ $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2° f、$g\in R[a,b]$ $(f\pm g)\in R[a,b]$,且

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

3° f、$g\in R[a,b]$ $(f\cdot g)\in R[a,b]$.

4° $f\in R[a,b]$ " $c\in(a,b)$, $f\in R[a,c]$, $f\in R[c,b]$,且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x . \tag{3.1}$$

5° $f\in R[a,b]$, $f(x)\geq 0$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$;

[推论]若 f、$g\in R[a,b]$, $f(x)\leq g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x . \tag{3.2}$$

6° $f\in R[a,b]$ $|f|\in R[a,b]$,且有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x . \tag{3.3}$$

7° 若 f 在$[a,b]$上连续,则v $\xi\in[a,b]$,使得有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) . \tag{3.4}$$

8° 若 f、g 都在$[a,b]$上连续,且 $g(x)$在$[a,b]$上保持同号,则v $\eta\in[a,b]$,使得有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

二、释疑解惑

问题 1　定积分的基本运算性质 2° 与 3° 有哪些有用的推论？有没有相除后的可积性质？

答　(1) 在 $f, g, h = f + g$(或 $f - g$)三个函数中，只要有任意两个在 $[a, b]$ 上可积，则另外一个在 $[a, b]$ 上亦必可积. 例如，由 f 与 $(f + g) \in R[a, b]$，则因 $g = (f + g) - f$，据性质 2° 可知 $g \in R[a, b]$.

(2) 在 $f, g, h = f + g$(或 $f - g$)三个函数中，当已知有一个函数在 $[a, b]$ 上可积，一个函数在 $[a, b]$ 上不可积时，另外一个函数在 $[a, b]$ 上必定不可积(否则，将与(1)相矛盾).

(3) 若 f、$g \in R[a, b]$，$|f(x)| \geq m > 0$，$x \in [a, b]$，则 $\dfrac{g}{f} \in R[a, b]$. 事实上，由条件可证 $\dfrac{1}{f} \in R[a, b]$(见本节习题第 7 题)，再由性质 3°，便知 $\dfrac{g}{f} = g \cdot \dfrac{1}{f} \in R[a, b]$.

(4) 若 $f \in R[a, b]$，$|f(x)| \geq m > 0$，$x \in [a, b]$，而 $g \notin R[a, b]$，则 $(f \cdot g) \notin R[a, b]$(否则，将与(3)相矛盾).

问题 2　积分区间可加性(性质 4°)能否对任意大小顺序的 a, b, c 都有(3.1)式成立？

答　若设 $f \in R[a, c]$，$a < b \leq c$，且规定了 $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 之后，就能使(3.1)式依然成立. 这是因为由性质 4° 直接可得

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x);$$

再由 $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$，代入上式并经移项后，即得(3.1)式　甚至是

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

经此推论后的(3.1)式使用起来将更为方便.

问题 3　试举出绝对可积时不一定可积的反例.

答　最简单的反例是

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的有理数}, \\ -1, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的无理数}. \end{cases}$$

类似于狄利克雷函数, $f(x)$在$[0,1]$上不可积;但是$|f(x)|\equiv1$, $x\in[0,1]$,显然它在$[0,1]$上可积.所以,“绝对可积”不一定“可积”.

问题 4 试对积分第一中值定理(性质 7°)和推广的积分第一中值定理(性质 8°)作出更详细的讨论:

答 (1) 当把性质 7°中的条件(f在$[a,b]$上连续)减弱为f在$[a,b]$上可积时,该命题推广为:

$$f\in R[a,b],\quad m=\inf_{x\in[a,b]}f(x),\quad M=\sup_{x\in[a,b]}f(x).\qquad \exists\,\mu(m\le\mu\le M),\text{使得}\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\mu(b-a).$$

事实上,由$m\le f(x)\le M$, $x\in[a,b]$,利用性质 5°的推论,得到

$$m(b-a)=\int_a^b m\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b M\,\mathrm{d}x=M(b-a),$$

并有

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M.$$

令$\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,则$m\le\mu\le M$,且使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\mu(b-a).$$

性质 7°中的$f(\xi)$与这里的μ,都可看作函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的积分平均值.

关于性质 8°也有类似的推广(见本节习题第 9 题).

(2) 可以进一步证明积分第一中值公式(3.4)与(3.5)中的中值点ξ、$\eta\in(a,b)$.(证明参见本节习题第 8 题.)

(3) 再来讨论积分中值定理与微分中值定理的联系.设f在$[a,b]$上连续,且存在原函数F,即$F'(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$.一方面对F在$[a,b]$上施行微分中值定理,必定存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a);$$

另一方面,借助牛顿-莱布尼茨公式,又有

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

把两者联系起来,便知$\exists\,\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),$$

这就是积分第一中值公式(3.4).所以,关于f在$[a,b]$上的积分第一中值定理,也就是f的原函数F在$[a,b]$上的微分中值定理(拉格朗日定理).至于F的存

在性,到下一节就会知道这是一个可以证明的基本结论.

(4) 把性质 8°(推广的积分第一中值定理)的中值公式(3.5)改写为

$$f(\eta)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

则 $f(\eta)$可被看作 $f(x)$在区间$[a,b]$上的一个积分加权平均,其中 $g(x)$, $x\in[a,b]$即为加之于 $f(x)$的权值.

三、范例解析

例 1 试求 $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$.

解 利用积分区间可加性,有

$$I=-\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}\ln x\mathrm{d}x$$

再由$\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$,可得

$$\begin{aligned}I&=(x-x\ln x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_{1}^{e}\\&=1-\frac{1}{e}\quad 1-\ln\frac{1}{e}\quad+[e(\ln e-1)-(0-1)]\\&=1-\frac{2}{e}+1=2-\frac{2}{e}.\end{aligned}$$

□

例 2 利用积分中值定理证明:

$$\frac{1}{200}<\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x<\frac{1}{100}.\tag{3.6}$$

分析 如果由积分中值公式(3.4)来估计定积分的值,只能得出

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a),\tag{3.7}$$

其中 M 与 m 分别是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值,显然这是一个很粗略的估计 如果改由中值公式(3.5)来估计,设 $g(x)\geq0$, $x\in[a,b]$,则有

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\tag{3.8}$$

一般说来,估计式(3.8)比(3.7)较为精细.

证 这里使用估计式(3.8),取

$$f(x)=\frac{1}{x+100},\quad g(x)=e^{-x},$$

则有

$$\frac{1}{200}\int_0^{100} e^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{100}\int_0^{100} e^{-x}\mathrm{d}x .$$

算出

$$\frac{1}{100}\int_0^{100} e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{100}(1-e^{-100}) < \frac{1}{100},$$

$$\frac{1}{200}\int_0^{100} e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{200}(1-e^{-100}) < \frac{1}{200},$$

由此看到,(3.6)的右部不等式得证;而左部不等式尚差稍许.为此可用以下方法来弥补:

$$\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x > \int_0^{50} \frac{e^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{150}\int_0^{50} e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{150}(1-e^{-50}) > \frac{1}{150}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{200},$$

这就证得(3.6)的左部不等式也成立. □

说明 如果改取 $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x+100}$,是否同样能证得结论成立?读者不妨自己去试一试.此外,在上面证明左部不等式时,还用到了定积分性质之4°和5°,请读者自行指出它们用在何处?

例3 证明:若 $f\in R[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$,则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow f(x)$ 在其连续点处恒为零.

证 ( )用反证法.倘若 $\exists x_0\in[a,b]$ 为 f 的一个连续点,使 $f(x_0)>0$,则可证得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0,$$

导致与条件 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 相矛盾(证明见教材第217页中的例2).所以 $f(x)$ 在其连续点处的值恒为零.

( )根据本章§2中范例5所证得的结论(可积函数存在处处稠密的连续点),而在此假设非负函数 f 在连续点处的值恒为零,故对 $[a,b]$ 上的任何分割 T, f 在 T 所属的每个小区间上的下确界 $m_i\equiv 0$, $i=1,2,\cdots,n$,这导致 $s(T)=0$.又因 f 在 $[a,b]$ 上可积,所以证得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0} s(T) = 0 .$$ □

例4 利用施瓦茨(Schwarz)积分不等式证明:

$$\left[\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right]^2 + \left[\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant 1, \tag{3.9}$$

其中 f 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$，实数 $k\neq 0$.

证 已知施瓦茨积分不等式为

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b(f(x))^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b(g(x))^2\mathrm{d}x,$$

其中 f、$g\in R[a,b]$（见教材第 237 页第 6 题）.由此得到

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2&=\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(x)}\cos kx\mathrm{d}x\right)^2\\&\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f(x)\sin^2 kx\mathrm{d}x .$$

两式相加后立即证得

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1 .\qquad\square$$

说明 若把本例中的 f 改为非负可积函数，则由证明过程看到，只要指出 $\sqrt{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上亦为可积函数（为什么?），就仍可利用施瓦茨不等式证明 (3.9) 式成立 .

* **例 5** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为非负、严格递增的连续函数，且记

$$F_n(x)=(f(x))^n,\ n=1,2,\cdots .$$

由积分第一中值定理，$\exists\ \theta_n\in[0,1]$，使

$$F_n(\theta_n)=\int_0^1 F_n(x)\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots .$$

试证：$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=1$.

证 由条件，对每一 n，$F_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上也都是非负、严格递增的连续函数，$\forall\varepsilon>0\ \left(\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$，因为

$$0<\frac{f(1-2\varepsilon)}{f(1-\varepsilon)}<1\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(1-2\varepsilon)}{f(1-\varepsilon)}\right)^n=0,$$

所以 $\exists\ N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$\left(\frac{f(1-2\varepsilon)}{f(1-\varepsilon)}\right)^n=\frac{F_n(1-2\varepsilon)}{F_n(1-\varepsilon)}<\varepsilon .$$

从而又有

$$F_n(1-2\varepsilon)<\varepsilon F_n(1-\varepsilon)<\int_{1-\varepsilon}^1 F_n(x)\mathrm{d}x$$

$$< \int_0^1 F_n(x)\,\mathrm{d}x = F_n(\theta_n).$$

再由 $F_n(x)$**为严格递增,得知** $n > N$ **时满足**

$$1 - 2\varepsilon < \theta_n \leq 1,$$

这就证得 $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 1$, □

说明　若把 $f(x)$**为严格递增改为严格递减,试问是否有** $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$ **(如何证明)?又若把区间** $[0,1]$ **改为** $[a, b]$**,情形又如何?**

例 6　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos^n x\,\mathrm{d}x = 0$.

分析　设 $f(x) = \mathrm{e}^x \cos^n x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$**.由**

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \cos^{n-1} x(\cos x - n\sin x) = 0,$$

解出 $x_1 = \dfrac{\pi}{2},\ x_n = \arctan\dfrac{1}{n}$**.不难知道**

$$\max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f(x_n) = \mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n,$$

且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{2n}} = 1.$$

如图 9-6 **所示,为** $f(x)$**相对于** $n = 1,3,5,\cdots$**的一族图像.如果把积分区间分拆成两部分:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

当 δ **足够小时,上式右边第一个积分依赖** δ **而为任意小;第二个积分依赖** $f(x)$ **在** $\left[\delta, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **上的递减性(对充分大的** n**,使** $x_n = \arctan\dfrac{1}{n} < \delta$**),且由** $f(\delta)\to 0\ (n\to\infty)$ **而为任意小.**

证　$\forall\, \varepsilon > 0$,**取** $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$**.因** $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan\dfrac{1}{n} = 0$,**故** $\exists\, N_1 > 0$,**当** $n > N_1$ **时,** $0 < \arctan\dfrac{1}{n} < \delta$**.这时,在** $[0, \delta]$ **上有**

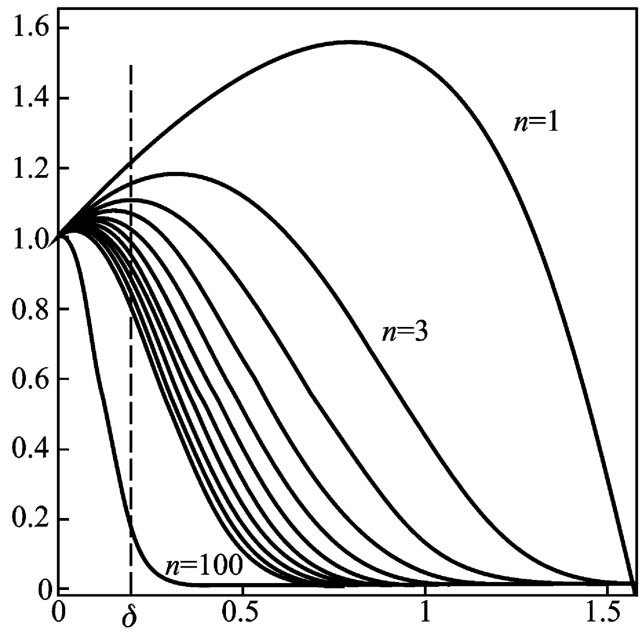


图 9 - 6

$$f(x)=\mathrm{e}^{x}\cos^{n}x\leq \mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^{2}+1}}\right)^{n}=M_{n}.$$

又因$\lim\limits_{n\to\infty}M_n=1$,故$\exists N_2>0$,当 $n>N_2$ 时,有 $0<M_n<2$.于是当 $n>\max\{N_1,N_2\}$时,得到

$$0<\int_0^{\delta}f(x)\mathrm{d}x\leq\int_0^{\delta}M_n\mathrm{d}x=M_n\cdot\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再有,当 $n>N_1$ 时 $f(x)$在 $\left[\delta,\frac{\pi}{2}\right]$ 上递减,因而要使

$$0<\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x\leq \mathrm{e}^{\delta}\cos^{n}\delta\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{4}}\cos^{n}\frac{\varepsilon}{4}\cdot(2\pi-\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2},$$

只要 $n>N_3=\ln\left(\frac{2\varepsilon}{2\pi-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{4}}\right)\Big/\ln\cos\frac{\varepsilon}{4}$即可 .

所以当 $n>N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$时,就有

$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

即证得$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{x}\cos^{n}x\mathrm{d}x=0$ 成立 . □

***例 7**　设 f 在$[a,b]$上连续,且 $f(x)\geq0$.试证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b(f(x))^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{x\in[a,b]}f(x).\tag{3.10}$$

证 设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)>0$(若 $M=0$,则 $f(x)\equiv 0$,(3.10)式显然成立).$\forall\varepsilon>0(\varepsilon<M)$,$\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,使得

$$0<M-\varepsilon\leq f(x)\leq M,\ x\in[\alpha,\beta],$$

于是有

$$(M-\varepsilon)^n\leq(f(x))^n\leq M^n,\ x\in[\alpha,\beta].$$

又因 $f(x)\geq 0$,所以

$$\begin{aligned}M^n(b-a)&=\int_a^b M^n\,\mathrm{d}x\geq\int_a^b(f(x))^n\,\mathrm{d}x\geq\int_\alpha^\beta(f(x))^n\,\mathrm{d}x\\&\geq\int_\alpha^\beta(M-\varepsilon)^n\,\mathrm{d}x=(M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha);\end{aligned}$$

由此得到

$$M(b-a)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_a^b(f(x))^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\geq(M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}M(b-a)^{\frac{1}{n}}=M$,$\lim\limits_{n\to\infty}(M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}=M-\varepsilon$,因此

$$M-\varepsilon\leq\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b(f(x))^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\leq M.$$

由 ε 的任意性,便证得(3.10)式成立. □

说明 设 $m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$.由

$$m^n\leq(f(x))^n\leq(m+\varepsilon)^n,\ x\in[\alpha,\beta]\subset[a,b],$$

是否又可类似地推出

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b(f(x))^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=m\ ?$$

由极限的唯一性,这个结果显然是错误的,请你指出推导过程在何处无法通过.

例 8 证明:若 $f\in R[a,b]$,则有

$$\begin{aligned}&\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0,\\&\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}\tag{3.11}$$

证 这里只证(3.11)的前一等式.在证明之前,先对此极限式作一几何解释:如图 9-7 所示,当振动频率 p 无限增大时,$y=f(x)\sin px$ 的图形位于 x 轴上方部分的正面积与位于 x 轴下方部分的负面积将趋于正、负相抵消而为零.

首先,由 f 可积,$\forall\varepsilon>0$,$\exists T[a,b]$,使得

$$\sum_{i=1}^n\omega_i^f\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

记 T 所属小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$,$m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$,$i=1,2,\cdots,n$.由于

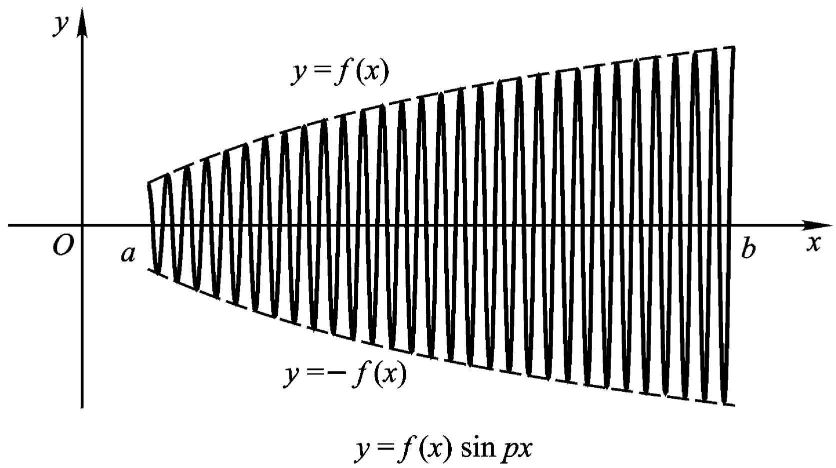


图 9 - 7

$$\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin px\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - m_i]\sin px\,\mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{i=1}^n m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin px\,\mathrm{d}x,$$

$$|f(x) - m_i| \leq \omega_i^f,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin px\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{p}(\cos px_{i-1} - \cos px_i)\right| \leq \frac{2}{|p|},$$

因此得到

$$\left|\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i^f \Delta x_i + \frac{2}{|p|}\sum_{i=1}^n |m_i|.$$

又因为当分割 T 随 ε 而确定后, $\sum_{i=1}^n |m_i|$ 为一非负常数, 故当 $|p| > P = \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n |m_i|$ 时,

$$\frac{2}{|p|}\sum_{i=1}^n |m_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是便证得当 $|p| > P$ 时, 有

$$\left|\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即(3.11)的第一式成立. □

说明　本例结论(3.11)又叫做勒贝格(Lebesgue)引理, 在以后证明傅里叶(Fourier)级数收敛定理时, 这是一个不可缺少的预备知识.

四、习题选解

§4 习题(教材上册第 219 页)

1. 证明:若 f、$g\in R[a,b]$,则

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x .$$

提示 由定积分基本性质 3°, $f\cdot g\in R[a,b]$,记 $I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.按定义,

$$I=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i .$$

问题归为证明: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $\|T\|<\delta$ 时,有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i-I\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\cdot|g(\eta_i)-g(\xi_i)|\Delta x_i$$
$$+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon .$$

2. 不求出定积分的值,比较下列各对定积分的大小:

(1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$; (>)

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.(>)

提示 利用定积分不等式性(基本性质 5°的推论),以及教材第 217 页例 2(后注) .

3. 证明下列不等式:

(1) $\dfrac{\pi}{2}<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}$;　　(2) $1<\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x<\mathrm{e}$;

(3) $1<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}$;　　(4) $3\sqrt{\mathrm{e}}<\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{4\mathrm{e}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x<6$.

提示 (1)、(2)被积函数单调递增;

(3) 被积函数单调递减;

(4) 可证 $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\leq\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\leq\dfrac{2}{\mathrm{e}}$, $x\in[\mathrm{e},4\mathrm{e}]$.

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)\not\equiv 0$,证明 $\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x>0$.

提示 利用教材第 217 页例 2(后注) .

5．设 f、$g\in R[a,b]$，证明：

$$M(x)=\max_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\},\quad m(x)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$$

在$[a,b]$上也都可积．

提示　由于

$$M(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$m(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|],$$

再利用积分性质之 2°与 6°．

7．设 $f\in R[a,b]$，且在$[a,b]$上满足$|f(x)|\geq m>0$，证明$\frac{1}{f}\in R[a,b]$．

提示　注意到$|f(x)|\geq m>0 \quad \frac{1}{|f(x)|}\leq\frac{1}{m}$，且

$$\sum_{(T)}\omega_i^{\frac{1}{f}}\Delta x_i=\sum_{(T)}\left(\frac{1}{m_i^f}-\frac{1}{M_i^f}\right)\Delta x_i=\sum_{(T)}\frac{M_i^f-m_i^f}{m_i^fM_i^f}\Delta x_i$$

$$\leq\frac{1}{m^2}\sum_{(T)}\omega_i^f\Delta x_i<\varepsilon.$$

8．进一步证明积分第一中值定理(包括定理 9.7 和定理 9.8)中的中值点$\xi\in(a,b)$．

提示　采用反证法．对于(3.4)式而言，倘若 $\xi=b$(或 a)，且使

$$f(x)\neq f(b)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ x\in[a,b).$$

由 f 连续，则恒有(据介值性)

$$f(x)>f(b)(\text{或}<f(b)),\ x\in[a,b),$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f(b)\mathrm{d}x=f(b)(b-a).$$

导致矛盾．

类似地可证(3.5)式中的 $\eta\in(a,b)$．

说明　本题题意是说(3.4)与(3.5)式中的中值点必定能在(a,b)内寻得；但这并不排除中值点同时能在端点 a 或 b 处取得，因为中值点可以是不唯一的．

9．证明：若 f、$g\in R[a,b]$，且 $g(x)$在$[a,b]$上不变号，M、m 分别为 $f(x)$在$[a,b]$上的上、下确界，则必存在某个实数 $\mu(m\leq\mu\leq M)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

提示　证明类似于“释疑解惑”问题 4 对性质 7°的讨论(把教材第 218 页中定理 9.8 的证明作相应的改变)．

10. 证明:若 f 在 $[a, b]$ 上连续,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = 0$,则在 (a, b) 内至少存在两点 x_1, x_2,使 $f(x_1) = f(x_2) = 0$.又若 $\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x = 0$,这时 f 在 (a, b) 内是否至少有三个零点?

提示 (1) 若 $f(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$,必使 $f(x)$ 在 (a, b) 上恒正或恒负,从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0(\text{或} < 0),$$

与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ 矛盾.所以 $\exists x_1 \in (a, b)$,使得 $f(x_1) = 0$.

(2) 倘若 f 不再有第二个零点.此时只须考察

$$f(x) \begin{cases} > 0, & a < x < x_1 \\ < 0, & x_1 < x < b \end{cases}$$

的情形(其余情形或者与此类同,或者很易与条件相矛盾).此时令

$$g(x) = (x - x_1)f(x), x \in (a, b),$$

不难知道 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x < 0$.这又与

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x - x_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$$

相矛盾.所以又有 $x_2 \in (a, b)(x_2 \neq x_1)$,使 $f(x_2) = 0$.

(3) 类似地,只须考察情形

$$f(x) \begin{cases} > 0, & a < x < x_1, \\ < 0, & x_1 < x < x_2, \\ > 0, & x_2 < x < b. \end{cases}$$

再令 $h(x) = (x - x_1)(x - x_2)f(x)$,同样将引出矛盾,故又有 $x_3 \in (a, b)$,使 $f(x_3) = 0$.

11. 设 f 在 $[a, b]$ 上二阶可导,且 $f''(x) > 0$.证明:

(1) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

(2) 又若 $f(x) \leq 0$, $x \in [a, b]$,则又有

$$f(x) \geq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, x \in [a, b].$$

提示 (1) 由 f 为凸函数,取 $x_0 = \frac{a+b}{2}$,有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), x \in [a, b].$$

对上式左、右两边各自在$[a,b]$上求定积分,便可证得结论成立.

(2) $\forall x,t\in[a,b]$,又有

$$f(x)\geq f(t)+f'(t)(x-t).$$

在$[a,b]$上以t为积分变量求定积分,即可证得结论成立.

说明 本题(2)的证明要用到定积分的分部积分公式,故应将它移至下一节.

12. 证明:

(1) $\ln(1+n)<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}<1+\ln n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln n}=1$.

提示 (1) 由

$$\frac{1}{k+1}=\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{k}=\frac{1}{k}$$

出发.

(2) 利用(1) 这个结论说明$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$与$\ln n$当$n\to\infty$时为等价无穷大量.

§4 微积分学基本定理·定积分计算(续)

一、内容提要(教材§5)

1° 若$f\in R[a,b]$,则$\forall x\in[a,b]$, $f\in R[a,x]$由此定义了变动上限积分函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b];$$

同理又有变动下限积分函数

$$\Psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b].$$

它们统称为变限积分(函数).更一般地还有变限积分复合函数:

$$\int_a^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t,\quad\int_{u(x)}^b f(t)\mathrm{d}t,\quad\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t.$$

2° 变限积分有如下重要性质:

(1) 若f在$[a,b]$上可积,则Φ与Ψ在$[a,b]$上连续;

(2) 若f在$[a,b]$上连续,则Φ与Ψ在$[a,b]$上可导,且有

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x), \tag{4.1}$$

$$\Psi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=-f(x); \tag{4.2}$$

(3) **若** f **在** $[A,B]$ **上连续**, $u(x)$、$v(x)$ **在** $[a,b]$ **上可导**, **且** $u([a,b])$、$v([a,b])$ $[A,B]$, **则有**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x), \tag{4.3}$$

其中, **性质**(2) **因其重要性而被称为微积分学基本定理**. **该定理解决了**"**连续函数必有原函数**"**这一重要命题**, **并指出** Φ **即为** f **的一个原函数**. **在此基础上**, **易知**

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C;$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a),$$

其中 F **为** f **在** $[a,b]$ **上的任一原函数**(**它与** Φ **只相差某一常数**). **后者即为牛顿** - **莱布尼茨公式**, **与教材** §2 **中的定理** 9.1 **相对照**, **命题条件只需假设** f **在** $[a,b]$ **上连续就可以了**.

3° **积分第二中值定理**, **设** $f\in R[a,b]$.

(1) **若** g **在** $[a,b]$ **上单调减**, **且** $g(x)\geq 0$, **则** v $\xi\in[a,b]$, **使得**

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x; \tag{4.4}$$

(2) **若** g **在** $[a,b]$ **上单调增**, **且** $g(x)\geq 0$, **则** v $\xi\in[a,b]$, **使得**

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x; \tag{4.5}$$

(3) **若** g **在** $[a,b]$ **上单调**, **则** v $\xi\in[a,b]$, **使得**

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

4° **定积分的换元积分法**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t, \tag{4.7}$$

其中 f **在** $[a,b]$ **上连续**, φ **在** $[\alpha,\beta]$ **上连续可微**, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $a\leq\varphi(t)\leq b$, $t\in[\alpha,\beta]$. (**若** $f\in R[a,b]$, **但** φ **是单调的**, **则**(4.7) **式仍然成立**. **参见本节习题第** 14 **题**.)

5° **定积分的分部积分法**

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x \tag{4.8}$$

其中 $u(x)$, $v(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续可微**.

6° 用定积分换元积分法与分部积分法推得的某些特殊结论:

(1) f 为以 p 为周期的连续周期函数,则有

$$\int_a^{a+p} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^p f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f \text{为偶函数}, \\ 0, & f \text{为奇函数}; \end{cases}$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x;$$

(4) $$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x;$$

(5) 沃利斯(Wallis)公式:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2m+1};$$

(6) 泰勒公式的积分型余项:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

二、释疑解惑

问题 1　可积与存在原函数之间有没有蕴含关系?

答　没有.现讨论如下:

(1) 利用导函数必定具有介值性,可以举出反例用以说明:一个在 $[a,b]$ 上可积的函数(存在第一类间断点)而不存在原函数,例如黎曼函数.

(2) 利用可积函数必须有界,可以构造出一个函数 f,它在 $[a,b]$ 上存在原函数 F,但 $f=F'$ 在 $[a,b]$ 上无界,从而不可积.例如

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0\left(= \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2}\right), & x=0, \end{cases}$$

f 在任何包含原点的闭区间上,就是这样一个反例.

(3) 若 $g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在某区间 $[a,b]$ 上处处可导,试问是否必有

$$g'(x) = f(x),\ x\in[a,b]? \tag{4.9}$$

事实上,这个问题是上面问题(1)的延伸.仍以可积的黎曼函数 f 作为例子,由

于它在[0,1]上非负,且在所有连续点处的值恒为零,故由教材上册第 211 页例 3 知道:" $x\in[0,1]$, $f\in R[0,x]$,且

$$g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}x\equiv 0,\ x\in[0,1].$$

于是 $g'(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$,说明(4.9)式不一定成立.

问题 2 定积分的换元积分法与分部积分法在形式上和不定积分的相应算法颇为相似,试问它们之间有何区别?

答 区别主要表现为以下两方面:

(1) 不定积分所求的是被积函数的原函数,因此由换元积分法求得了用新变量表示的原函数后,必须作变量还原;而定积分的计算结果是一个确定的数,如果(4.7)式(或(4.8)式)一边的定积分计算出来了,那么另一边的定积分之值也就求得了 所以,定积分在其计算过程中,可以把容易求值的项及时计算出来;而且在使用牛顿 - 莱布尼茨公式时,可以直接在新的积分区间上进行求差计算,而不必还原到原来的积分区间上去计算.

(2) 定积分的换元积分法必须与积分区间紧密关联,不仅在换元之后积分限应作相应的改变,而且还要考察所采用的变换在规定的积分区间上是否可行.相对而言,在不定积分计算中所作的变换往往是在“可行”的区间上自然地进行的,不去一一严加深究;至于结果是否合理、正确,还可通过求导来检验(定积分则无法这样做).

问题 3 对下列定积分所做的变量置换或分部积分为什么是错的?应怎样订正?

(1) $I=\int_0^a a^2-x^2\,\mathrm{d}x$.令 $x=a\sin t$,则

$$I=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\ t+\frac{1}{2}\sin 2t\ \Big|_\pi^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{4}a^2.$$

(2) $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.令 $t=\tan\frac{x}{2}$,则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},\quad x=0,2\pi\text{ 时 } t=0;$$

求得 $I=\int_0^0\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=0$.

(3) $I=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.令 $x=\frac{1}{t}$,则

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{t^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{-\mathrm{d}t}{1+t^2}=-I \qquad I=0 .$$

(4) $I=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\tan x}{\ln\cos x}\mathrm{d}x$.令

$$u=\frac{1}{\ln\cos x},\mathrm{d}v=\tan x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\ln\cos x),$$

$$I=-1-\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\tan x}{(\ln\cos x)^2}(-\ln\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=-1+I \qquad 0=-1(\text{谬误}) .$$

答 (1) **由于在** $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ **上** $\sqrt{a^2\cos^2 t}=-a\cos t$(**不妨设** $a>0$),**因此应订正为**

$$I=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(-a^2\cos^2 t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}a^2 .$$

(2) **这里所作的变换** $t=\tan\frac{x}{2}$**即为** $x=2\arctan t$,**它只适合** $x\in(-\pi,\pi)$.**所以要先把原来的定积分化为**$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$,**其中**$[a,b]\subset(-\pi,\pi)$,**例如**$[a,b]=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,**才能顺利求得正确结果**(**详细过程见后面例** 1) .

(3) **显然**,**变换** $x=\frac{1}{t}$**不能定义于**$[-1,1]$.**事实上**,**这个定积分可以简单地求出**:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2} .$$

(4) **这里错在把定积分的分部积分法与不定积分的分部积分法相混淆** .**若仍按如上所设**,**应该得到**

$$I=-1\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}+\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\tan x}{\ln\cos x}\mathrm{d}x=0+I,$$

由此只能说明该计算无效,**而非谬误** .**正确的做法应该是**:

$$I=-\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\mathrm{d}(\ln\cos x)}{\ln\cos x}$$

$$=-\ln|\ln\cos x|\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$=\ln\left|\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right|-\ln\left|\ln\frac{1}{2}\right|$$

$$= -\ln 2 .$$

问题 4 设 f 在 (A, B) 上连续, $[a, b]\subset(A, B)$. 可以证明:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x = f(b)-f(a) . \tag{4.10}$$

试分析下面的"证法":

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\\ &= f(x)\Big|_a^b = f(b)-f(a),\end{aligned}$$

指出它错在何处?

答 以上推理过程的前面三步都是没有根据的:

(1) 极限号"$\lim\limits_{h\to 0}$"与积分号"$\int_a^b$"是不可以随意交换次序的;

(2) 条件中未假设 f 可导,故第二个等式也是不一定能成立的;

(3) 即使存在 $f'(x)$,也不表示 f' 必定连续或可积,故 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$ 是否存在还是个问题. 只有当进一步假设了 $f'\in R[a, b]$,而后才有意义.

(4.10)式的正确证明要用到变限积分的性质,详细过程见后面范例 6.

三、范例解析

例 1 求 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.

解 由上面对问题 3(2)的提示,设法把积分区间移到 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上去. 为此设 $f(x)=\frac{1}{2+\sin x}$,利用 f 的周期性质(以 2π 为周期),首先有

$$I=\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x .$$

又因经换元 $t=\pi-x$ 可使

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{0} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x,$$

经换元 $t=-\pi-x$ 可使

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi/2}^{0} f(x)\mathrm{d}x,$$

所以有

$$I=\int_{-\pi}^{-\pi/2}+\int_{-\pi/2}^{0}+\int_{0}^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x .$$

再令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$,便求得

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-1}^{1}\frac{2\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=2\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\
&=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}\\
&=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
&=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}} .
\end{aligned}$$ □

例 2 求 $I=\displaystyle\int_0^2\frac{x}{e^x+e^{2-x}}\mathrm{d}x$.

解 在无法直接求出原函数,也无法直接使用换元积分法与分部积分法的情形下,常采用分段积分,而后消去难以积出的部分.为此设

$$I=\int_0^1\frac{x}{e^x+e^{2-x}}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{x}{e^x+e^{2-x}}\mathrm{d}x=I_1+I_2 .$$

由于

$$\begin{aligned}
I_2&=\int_1^2\frac{x-2}{e^x+e^{2-x}}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{2}{e^x+e^{2-x}}\mathrm{d}x\\
&=\int_1^0\frac{t}{e^{2-t}+e^t}\mathrm{d}t+\int_1^2\frac{2}{e^x+e^{2-x}}\mathrm{d}x\\
&=-I_1+\int_1^2\frac{2}{e^x+e^{2-x}}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

因此消去 I_1 后得到

$$\begin{aligned}
I&=2\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{2-x}}=2\int_1^2\frac{e^x}{e^{2x}+e^2}\mathrm{d}x\\
&=2\int_e^{e^2}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+e^2}=\frac{2}{e}\arctan\frac{t}{e}\Bigg|_e^{e^2}\\
&=\frac{2}{e}\left(\arctan e-\frac{\pi}{4}\right) .
\end{aligned}$$ □

例 3 证明:

(1) $\displaystyle\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^n\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^{n+1}}{2^n(n+1)}$, $n\in\mathbf{N}$;

(2) 若 f 在[0,1]上连续,且满足

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 1,\quad \int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

则有

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \geq 2^n (n+1).$$

证 (1) **利用换元积分法,可得**

$$\int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right|^n \mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x \right)^n \mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^n \mathrm{d}x$$

$$= -\int_{\frac{b-a}{2}}^0 t^n \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{b-a}{2}} t^n \mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^{\frac{b-a}{2}} t^n \mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^n (n+1)}.$$ □

(2) **首先,由条件可知**

$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^n f(x)\,\mathrm{d}x = 1;$$

又由积分第一中值定理,$\exists\, \xi \in [0,1]$,**使得**

$$1 = \left| \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^n f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right|^n |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$= |f(\xi)| \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right|^n \mathrm{d}x;$$

再由上面(1),**又得**

$$1 \leq |f(\xi)| \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right|^n \mathrm{d}x = \frac{|f(\xi)|}{2^n (n+1)};$$

这就证得

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \geq |f(\xi)| \geq 2^n (n+1).$$ □

例 4 **设** f **在**$[a, b]$**上有连续的二阶导函数** f'',**且** $f(a) = f(b) = 0$.**证明**:

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{12}(b-a)^3 \cdot \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$.

证 (1) **利用分部积分法,可得**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x-a)$$

$$= (x-a) f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)(x-a)\,\mathrm{d}x$$

$$= 0 - \int_a^b f'(x)(x-a)\,\mathrm{d}(x-b)$$

$$= -(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b + \int_a^b [f'(x)(x-a)]'(x-b)\,\mathrm{d}x$$

$$= 0 + \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (x-b)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}f(x)$$

$$= \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

移项后即得结论成立. □

(2) 一种证法是直接利用(1)的结论:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |(x-a)(x-b)f''(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x \cdot \max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|,$$

其中的

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_a^b (b-x)\,\mathrm{d}(x-a)^2$$

$$= \frac{1}{4}(b-x)(x-a)^2\Big|_a^b + \frac{1}{4}\int_a^b (x-a)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{12}(x-a)^3\Big|_a^b = \frac{1}{12}(b-a)^3.$$ □

例 5 利用积分第二中值定理证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t\sin t\,\mathrm{d}t = 0$;

(2) $\exists\ \theta\in[-1,1]$, 使$\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\theta}{a}$ $(0<a<b)$.

证 (1) 由积分第二中值公式(4.5), $\exists\ \xi_x\in[0,x]$, 使得

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x t\sin t\,\mathrm{d}t\right| = \frac{x}{x}\left|\int_{\xi_x}^x \sin t\,\mathrm{d}t\right|$$

$$= \frac{1}{x}|\cos\xi_x - \cos x|$$

$$\leq \frac{2}{x} \to 0 \quad (x\to+\infty).$$ □

(2) 作变换 $t=x^2$, 化为适宜用积分第二中值定理的形式:

$$I = \int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

由积分第二中值公式(4.4), $\exists\ \xi\in[a^2,b^2]$, 使有

$$I=\frac{1}{2a}\int_{a^2}^{\xi}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2a}(\cos a^2-\cos\xi).$$

取 $\theta=\frac{1}{2}(\cos a^2-\cos\xi)$,显然 $|\theta|\leq1$,从而证得

$$I=\frac{\theta}{a}.\qquad\square$$

例 6 设 f 在 (A,B) 内连续,$[a,b]\quad(A,B)$.证明:

$$\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

证 由于 f 在 (A,B) 内连续,因此 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 (A,B) 内处处可导,且 $F'(x)=f(x)$.据此便有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a),$$

$$\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x=F(b+h)-F(a+h).$$

于是就可证得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[F(b+h)-F(a+h)-F(b)+F(a)]\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(b+h)-F(b)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}\\&=F'(b)-F'(a)=f(b)-f(a).\end{aligned}\qquad\square$$

例 7 设 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'\in R[a,b]$,$f(a)=0$.证明:

(1) $|f(x)|\leq\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$;

(2) $2\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x\leq(b-a)^2\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$.

证 (1) 由 f'可积,据牛顿 - 莱布尼茨公式便有

$$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b];$$

$$|f(x)|=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leq\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t,\ x\in[a,b].\qquad\square$$

(2) 类似地,再由施瓦茨不等式又得

$$\begin{aligned}[f(x)]^2&=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\ ^2\leq(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t\\&\leq(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (x-a)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b [f'(t)]^2 \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 \mathrm{d}x . \qquad \square$$

例 8　设 f 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数 .证明:当且仅当积分

$$\varphi(y) = \int_0^{2\pi} f(x+y)\mathrm{d}x$$

与 y 无关时,f 为周期函数(周期为 2π) .

证　首先有

$$\varphi(y) = \int_0^{2\pi} f(x+y)\mathrm{d}x = \int_y^{2\pi+y} f(t)\mathrm{d}t .$$

如果 $\varphi(y)$与 y 无关,则必使

$$\varphi'(y) = f(2\pi+y) - f(y) = 0, y \in (-\infty,+\infty),$$

由此知道 f 为一以 2π 为周期的周期函数 .

反之,如果 f 为一周期函数(周期为 2π),则满足

$$f(2\pi+y) = f(y), y \in (-\infty,+\infty) .$$

由此又可反推知 $\varphi'(y) = 0$,说明 $\varphi(y)$与 y 无关 . $\square$

例 9　设 f 为$[0,+\infty)$上的任一凸函数 .证明:

$$H(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

在$(0,+\infty)$上也是一个凸函数 .

证　由凸函数定义,$\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty)$,$\forall \lambda \in (0,1)$,满足

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2);$$

且由凸函数性质,f 在$(0,+\infty)$上连续,故 $f \in R[0,x]$.下面借助换元积分法来证明 H 亦为凸函数:$\forall x_1, x_2 \in (0,+\infty)$,$\forall \lambda \in (0,1)$,有

$$H(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \frac{1}{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}\int_0^{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 f((\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_0^1 [\lambda f(x_1 x) + (1-\lambda) f(x_2 x)]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\lambda}{x_1}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1-\lambda}{x_2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \lambda H(x_1) + (1-\lambda) H(x_2) . \qquad \square$$

*** 例 10　证明:若在$[a,b]$上 g 为连续函数,f 为非负、递减(增)的连续可微函数,则存在 $\xi \in [a,b]$,使得**

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x \quad .$$

证　这是一个加强条件的积分第二中值定理,可望有一个不难的证明.由条件,设

$$f'(x)\le 0,\quad G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b],$$

$$m=\min_{a\le x\le b} G(x),\quad M=\max_{a\le x\le b} G(x) .$$

由于

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}G(x)$$

$$= f(b)G(b)-\int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x,$$

$$mf(b)\le f(b)G(b)\le Mf(b),$$

$$M[f(b)-f(a)]\le\int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x\le m[f(b)-f(a)],$$

因此有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le Mf(b)-M[f(b)-f(a)]=Mf(a),$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\ge mf(b)-m[f(b)-f(a)]=mf(a) .$$

若 $f(a)=0$,**则** $f(x)\equiv 0$,**结论显然成立(ξ可任意选取);若** $f(a)>0$,**则有**

$$m\le\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le M .$$

借助 G **的介值性**,v $\xi\in[a,b]$,**使**

$$G(\xi)=\int_a^{\xi} g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

结论得证.

对于 $f'(x)\ge 0$ **的情形,同理可证另一等式成立.** □

注　教材第 230 **页第** 15 **题是强条件的积分第二中值定理的另一类似命题.它的证明也要用到** $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

四、习题选解

§5 习题(教材上册第 229 页)

1. **设** f **为连续函数**, u、v **均为可导函数,且可实行复合** $f\circ u$ **与** $f\circ v$.**证明:**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

提示　先化为复合形式

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^v f(t)\mathrm{d}t - \int_a^u f(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $u = u(x)$, $v = v(x)$;**而后按复合求导法则导出结论**.

2. **设** f **在** $[a, b]$ **上连续**, $F(x) = \int_a^x f(t)(x - t)\mathrm{d}t$. **证明** $F''(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$.

提示　$F(x) = x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x tf(t)\mathrm{d}t$.

6. **设** f **为** $(-\infty, +\infty)$ **上以** p **为周期的连续周期函数**. **证明对任何实数** a, **恒有**

$$\int_a^{a+p} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^p f(x)\mathrm{d}x.$$

提示　$\int_a^{a+p} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^p f(x)\mathrm{d}x + \int_p^{a+p} f(x)\mathrm{d}x$, **然后证明**

$$\int_p^{a+p} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

8. **设** $J(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$ (m, n **为正整数**). **证明**:

$$J(m, n) = \frac{n-1}{m+n}J(m, n-2) = \frac{m-1}{m+n}J(m-2, n);$$

并求 $J(2m, 2n)$.

提示　通过分部积分可得

$$J(m, n) = \frac{n-1}{m+1}J(m, n-2) - \frac{n-1}{m+1}J(m, n).$$

又由 $J(m, n) = J(n, m)$ **可得另一结论**.

通过递推计算,特别有

$$J(2m, 2n) = \frac{(2n-1)!!}{2^n(m+n)\cdots(m+1)}J(2m, 0)$$

$$= \frac{(2n-1)!!(2m-1)!!}{2^{n+m}(m+n)!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

10. **设** f **为连续可微函数,试求**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x (x - t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

并用此结果求$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$.

提示 $\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f'(t)\,dt = f(x)-f(a)$，并有

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\sin t\,dt = 1-\cos x.$$

11．设 $y=f(x)$ 为 $[a,b]$ 上严格增的连续曲线(如图 9-8)．试证存在 $\xi\in(a,b)$，使图中两阴影部分面积相等．

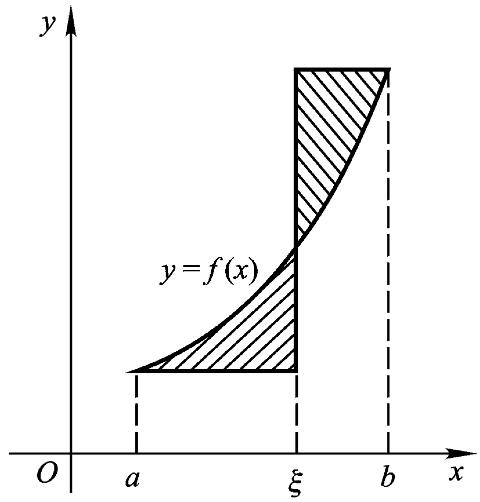


图 9-8

提示 所求之点 ξ 满足

$$\int_a^\xi [f(x)-f(a)]\,dx = \int_\xi^b [f(b)-f(x)]\,dx.$$

引入辅助函数，并利用介值性．

12．设 f 为 $[0,2\pi]$ 上的单调递减函数．证明：对任何正整数 n 恒有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \geq 0.$$

提示 应用积分第二中值公式(4.6)．

13．证明：当 $x>0$ 时有不等式

$$\left|\int_x^{x+c} \sin t^2\,dt\right| < \frac{1}{x} \quad (c>0).$$

提示 应用积分第二中值公式(4.4)．

14．证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调且连续可微，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

* **证** 设 $a<b$，$\alpha<\beta$(即 φ 为增函数)．对任何分割

$$T_t: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta,$$

通过令 $x_i = \varphi(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ **得到对**$[a, b]$**的一个分割**

$$T_x: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

由于 φ **在**$[\alpha, \beta]$**上一致连续,故当**$\| T_t \| \to 0$ **时必有**$\| T_x \| \to 0$.

$\forall \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$,**作积分和**

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i;$$

令 $\xi_i = \varphi(\tau_i) \in [x_{i-1}, x_i]$,**并记**

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

由于$\exists \tau_i^* \in (t_{i-1}, t_i)$,**使**

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i^*)\Delta t_i, \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

因此有

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i^*)\Delta t_i.$$

于是,由假设 $f \in R[a, b]$,**可知**

$$\begin{aligned}
\lim_{\| T_t \| \to 0} \sigma^* &= \lim_{\| T_t \| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i^*)\Delta t_i \\
&= \lim_{\| T_x \| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
&= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

另一方面,当设$|f(x)| \leqslant M$, $x \in [a, b]$**时,由** φ'**在**$[\alpha, \beta]$**上一致连续,** $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,**使**$\| T_t \| < \delta$**时恒有**

$$|\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\tau_i^*)| < \frac{\varepsilon}{M(\beta - \alpha)}, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是又有

$$\begin{aligned}
|\sigma - \sigma^*| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\varphi(\tau_i))| \cdot |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\tau_i^*)| \Delta t_i \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{M(\beta - \alpha)} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \varepsilon.
\end{aligned}$$

由此可见,

$$\lim_{\| T_t \| \to 0} \sigma = \lim_{\| T_t \| \to 0} \sigma^* = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

*15. **证明:若在$[a,b]$上 f 为连续函数,g 为连续可微的单调函数,则存在$\xi\in[a,b]$,使得**

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(**提示　与定理 9.11 及其推论相比较,这里的条件要强得多,因此可望有一个比较简单的,不同于定理 9.11 的证明**.)

证　令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$.**则有**

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x)\\&=g(x)F(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x\\&=g(b)F(b)-F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x\\&=g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\cdot[g(b)-g(a)]\\&=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

总练习题提示与解答

(**教材上册第 237 页**)

1. **证明:若 φ 在$[0,a]$上连续,f 二阶可导,且 $f''(x)\geq0$,则有**

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t\geq f\left(\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

提示　记 $c=\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)\mathrm{d}t$,**由 f 为凸函数,从而有**

$$f(x)\geq f(c)+f'(c)(x-c).$$

说明　本题指出了在所给条件下,先复合而后积分平均与先取积分平均而后复合两者之间的大小关系.**当** $f''(x)\leq0$ **时,不等式反向**.

2. **证明下列命题**:

(1) **若 f 在$[a,b]$上连续、递增,则**

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, & x\in(a,b],\\ f(a), & x=a\end{cases}$$

在$[a,b]$上亦递增.

(2) 若 f 在$[0,+\infty)$上连续,且 $f(x)>0$,则

$$\varphi(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\Big/\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\quad(x>0)$$

在$(0,+\infty)$上为严格递增函数.若要 φ 在$[0,+\infty)$上亦为严格递增,试问应补充定义 $\varphi(0)=$?

提示 (1) 通过验证在$(a,b]$上 $F'(x)\geq 0$,且 F 在点 a 右连续.

(2) 通过验证在$(0,+\infty)$上 $\varphi'(x)>0$;应补充定义 $\varphi(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)$的值.

3. 设 f 在$[0,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A.$$

提示 先证在所设条件下 f 在$[0,+\infty)$上必定有界,令$|f(x)|\leq M$.再令

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_x^x f(t)\mathrm{d}t,$$

并分别证明

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leq\frac{M}{x}\to 0\quad(x\to+\infty);$$

$$\frac{1}{x}\int_x^x f(t)\mathrm{d}t=\left(1-\frac{1}{x}\right)f(\xi)\to A(x\to+\infty),$$

其中 $x\leq\xi\leq x$.

说明 本题的意义是,在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 存在的条件下,$f(x)$在$[0,+\infty)$上的积分平均值即等于 A.然而此命题不可逆(反例可由下面第 4 题容易得出).

4. 设 f 是定义在$(-\infty,+\infty)$上的一个连续周期函数,周期为 p.证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t.$$

提示 $\forall x>0$, $\exists x_0\in(0,p]$, $n\in\mathbf{N}$,使 $x=x_0+np$;并随之有

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x_0+np}\int_0^{np}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x_0+np}\int_{np}^{x_0+np}f(t)\mathrm{d}t.$$

然后分别证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x_0+np}\int_0^{np}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x_0+np}\int_{np}^{x_0+np}f(t)\mathrm{d}t=0.$$

5. 证明:连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数;连续的偶函数的原函数

中只有一个是奇函数.

提示　设

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

则 f 的一切原函数为 $G(x)=F(x)+C$, C 为任意常数.

当 f 为奇函数时,验证 $G(-x)=G(x)$;

当 f 为偶函数时,验证只有当 $C=0$ 时满足 $G(-x)=-G(x)$.

6. 证明施瓦茨(Schwarz)不等式:若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

提示　该不等式有多种证法,其中最简捷的一种是利用二次三项式

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+t^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b[f(x)+tg(x)]^2\mathrm{d}x\geq 0$$

的判别式(≤ 0)来证明.

7. 利用施瓦茨不等式证明:

(1) 若 $f\in R[a,b]$,则

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 若 $f\in R[a,b]$,且 $f(x)\geq m>0$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq(b-a)^2;$$

(3) 若 f、$g\in R[a,b]$,则有闵可夫斯基(Minkowski)不等式:

$$\left(\int_a^b(f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

提示　(1) 令 $g(x)\equiv 1$.

(2) 令 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

(3) 这可以从

$$\int_a^b(f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

出发,对右边第二项使用施瓦茨不等式.

8. 证明:若 f 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,则

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\geq\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x.$$

提示　把前面第 1 题中的区间 $[0,a]$ 改为 $[a,b]$ 时,其结论相应地改为

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}t\geq f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

而当其中 $f''(x)\leq 0$(f**为凹**)**时,则上述不等式反向**.

9. **设** f **为** $(0,+\infty)$ **上的一个连续、递减函数**, $f(x)>0$;**又设**

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 $\{a_n\}$ **为收敛数列**.

证 当 $x\in[k,k+1]$ **时**, $f(k+1)\leq f(x)\leq f(k)$, **于是有**

$$f(k+1)\leq\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\leq f(k),\ k=1,2,\cdots,n-1.$$

把这 $n-1$ **个不等式相加,得到**

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)\leq\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\leq\sum_{k=1}^{n} f(k)-f(n).$$

由此推知

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\geq f(n)>0,$$

说明 $\{a_n\}$ **有下界**.

又由

$$\begin{aligned}a_n-a_{n+1}&=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n+1} f(k)+\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x-f(n+1)\\&=\int_n^{n+1}(f(x)-f(n+1))\mathrm{d}x\geq 0,\end{aligned}$$

说明 $\{a_n\}$ **为递减数列 所以** $\{a_n\}$ **收敛**.

*10. **证明:若** $f\in R[a,b]$, **且处处有** $f(x)>0$, **则** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$. (**提示:由可积的第一充要条件进行反证;也可利用§6 习题第 7 题的结论**.)

证 **由§6 习题第 7 题,知道** f **存在处处稠密的连续点,现任取其一为** $x_0\in(a,b)$. **因为** $f(x_0)>0$, **由保号性**, $\exists\ \delta>0$, **使**

$$f(x)\geq\frac{f(x_0)}{2}>0,\ x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b].$$

这就证得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x\geq\frac{1}{2}f(x_0)\cdot 2\delta=\delta f(x_0)>0.$$

第九章测试题

(A)

1．求$\int_{-4}^{4}|x^2-2x-3|\,\mathrm{d}x$．

2．通过化为定积分计算

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}.$$

3．证明:若 f 在$[0,1]$上为一递减函数,则对任给的 $a\in(0,1)$,恒有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4．证明:若 f 在$[a,b]$上连续,$f(x)\neq0$,则必有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\neq0.$$

5．设 f 在$[-\pi,\pi]$上为一递减函数.试证

$$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2n+1)x\,\mathrm{d}x\leq0\ (n\in\mathbf{N}).$$

6．设 f 在$(-\infty,+\infty)$上可导,$f(x)>0$,且满足

$$(x^2+1)f(x)=4\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+3.$$

试求 $f(x)$的表达式.

7．设 f 在$[0,1]$上连续可微,且满足

$$f(0)=0,\quad 0<f'(x)\leq1.$$

试证

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geq\int_0^1(f(x))^3\,\mathrm{d}x.$$

(B)

1．设$|y|\leq1$,求$\int_{-1}^{1}|x-y|\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$．

2．证明:对任何正数 p,q,恒有

$$J=\lim_{n\to\infty}\frac{[1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p]^{q+1}}{[2^q+4^q+\cdots+(2n)^q]^{p+1}}=2^{p-q}\cdot\frac{\left(\int_0^2 x^p\,\mathrm{d}x\right)^{q+1}}{\left(\int_0^2 x^q\,\mathrm{d}x\right)^{p+1}};$$

并求其值.

3. **证明**:

$$0 < \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d} x < \frac{\pi^3}{144} .$$

4. **证明**:**若** f **在** $[a, b]$ **上可积**, $f(x) \neq 0$,**则必有**

$$\int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d} x > 0 .$$

5. **设** f **在** $[-\pi, \pi]$ **上为一可微的凸函数.试证**

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2n+1) x \mathrm{d} x \leq 0 \quad (n \in \mathbf{N}) .$$

6. **设** f **在** $[a, b]$ **上有界.证明**:**若对任给的** $\eta > 0$, f **在** $[a, b-\eta]$ **上可积**,**则** f **在** $[a, b]$ **上亦必可积**.

7. **设** f **在** $[0, 1]$ **上存在连续的导数**,**且满足** $\left| \int_0^1 f(x) \mathrm{d} x \right| < \int_0^1 | f(x) | \mathrm{d} x$.

试证

(1) $| f(x) | \leq \int_0^1 | f'(x) | \mathrm{d} x, \ x \in [0, 1]$;

(2) $\int_0^1 | f(x) | \mathrm{d} x \leq \int_0^1 | f'(x) | \mathrm{d} x$.

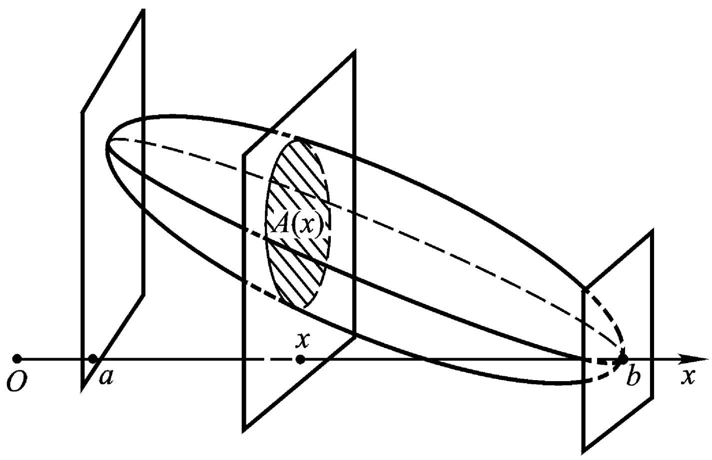
第十章　定积分的应用

§1　平面图形的面积与立体的体积

一、内容提要(教材§1,§2)

1° 当围成平面图形的曲线分别用直角坐标方程($y=f(x)$或$x=g(y)$)、极坐标方程($r=r(\theta)$)和参数方程($x=x(t),y=y(t)$)表示时,各种形状的平面图形及其面积计算公式示于下面图10-1至图10-6(图中阴影部分的面积A):

2° **已知平行截面面积** $A(x)$**的立体体积示于图** 10-7 .**由曲边梯形**$(0\leq y\leq f(x), a\leq x\leq b)$**分别绕** x **轴与** y **轴旋转所得立体的体积示于图** 10-8 **与图** 10-9 .



$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

图 10-7

二、释疑解惑

以下诸问题指出了在使用面积、体积公式时经常出现的错误,并给出了某些补充知识.

问题 1 图 10-1 中阴影部分的面积 $A=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$,不要误写为 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.因为后者的几何意义是:由 $[a,b]$ 上的曲线 $y=f(x)$ 所形成的位于 x 轴上方的正面积与位于 x 轴下方的负面积的代数和的绝对值;而前者的意义是:在 $[a,b]$ 上由 $y=|f(x)|$ 所形成的曲边梯形的面积,不会发生正、负面积相抵消的情形.

问题 2 图 10-5 中阴影部分的面积应该是

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_2^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_1^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\,\mathrm{d}\theta;\end{aligned}$$

不要误作 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2(\theta)-r_1(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$.

问题 3 对于图 10-6 所示由参变量方程表示的封闭曲线

$$l:\ x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$$

所围的平面图形,依照图 10-2 指出的结论不难证明:当 t 由 α 递增至 β 时,如果 l 上的动点是按顺时针方向(或右旋方向)运动的,则

$$A=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t;$$

反之,如果 l 上的动点是按逆时针方向(或左旋方向)运动的,则

$$A=-\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

所以,$A=\left|\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t\right|$ 对以上每一种情形都是正确的.当然,这里默认了 l 为一光滑(或按段光滑)曲线;此外,也可把面积公式写作

$$A=\left|\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

又因 $\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$ 与 $\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$ 总是反号的,故又有

$$A=\frac{1}{2}\left|\int_\alpha^\beta [x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]\,\mathrm{d}t\right|.$$

只是要注意,不可把面积 A 误写作:

$$\int_\alpha^\beta |xy'|\,\mathrm{d}t,\ \int_\alpha^\beta |yx'|\,\mathrm{d}t\ 或\ \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |xy'\pm yx'|\,\mathrm{d}t.$$

问题 4 图 10 - 9 所示的旋转体的体积公式,其来源可参见§2 习题第 5 题.

三、范例解析

例 1 求由曲线 $y=\frac{4}{x}$与 $y=(x-3)^2$所围平面图形的面积(图 10 - 10 中的 A),并求此图形绕 x 轴旋转的旋转体体积.

分析 求双曲线 $xy=4$ 与抛物线 $y=(x-3)^2$ 的交点:

$$x(x-3)^2 = x^3-6x^2+9x=4,$$

即

$$(x-1)^2(x-4)=0 \qquad x_{1,2}=1,\ x_3=4.$$

由此知道二曲线在 $x=1$ 处相切,在 $x=4$ 处相交.

解 根据以上分析所得结果,按平面图形的面积公式与旋转体的体积公式,可分别求得:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 \left[\frac{4}{x}-(x-3)^2\right] dx \\ &= \left[4\ln x-\frac{1}{3}(x-3)^3\right]\Big|_1^4 \\ &= 8\ln 2-3; \\ V &= \pi\int_1^4 \left[\left(\frac{4}{x}\right)^2-(x-3)^4\right] dx \\ &= \pi\left[-\frac{16}{x}-\frac{1}{5}(x-3)^5\right]\Big|_1^4 = \frac{27}{5}\pi. \end{aligned}$$

□

例 2 如图 10 - 11 所示,由点 $M(2a,0)$向椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 作两条切线 MP 和 MQ(P,Q为切点).试求椭圆与切线所围阴影区域的面积 A,并求该区域绕 y

解　本题的关键是求切线 MP 和 MQ 的方程,通常有两种解法.

[解法一]　求切线的斜率.设 MP 的方程为 $y = k(x - 2a)$,当它与椭圆相切时,方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = k(x - 2a) \end{cases}$$

对 x 只有唯一解.为此消去 y,得到关于 x 的二次方程:

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 - 4a^3k^2x + 4a^4k^2 - a^2b^2 = 0.$$

使其判别式为零,即

$$16a^6k^4 - 4(b^2 + a^2k^2)(4a^4k^2 - a^2b^2) = 0,$$

由此解出 $k^2 = \dfrac{b^2}{3a^2}$, $k = \pm\dfrac{b}{\sqrt{3}a}$.这就是 MP 和 MQ 的斜率.

[解法二]　求切点坐标.为此对椭圆方程 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 两边分别对 x 求导数(把 y 看作 x 的复合函数),得

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0,$$

并由此解出 $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$,这是椭圆上任一点(x, y)处的切线斜率.于是,过点(x, y)的切线方程为

$$b^2x(X - x) + a^2y(Y - y) = 0.$$

使它通过定点 $M(2a, 0)$,即以 $X = 2a, Y = 0$ 代入,得到

$$b^2x(2a - x) - a^2y^2 = 0,$$

并有

$$2ab^2x = b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

这就求得切点 $P\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$, $Q\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$.

由于 MP 的方程为 $x=2a-\frac{\sqrt{3}a}{b}y$,借助对称性,可分别计算 A 和 V 如下:

$$A=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\left(2a-\frac{\sqrt{3}a}{b}y-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=2\left[2ay-\frac{\sqrt{3}a}{2b}y^2-\frac{a}{2b}\left(y\sqrt{b^2-y^2}+b^2\arcsin\frac{y}{b}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}$$

$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)ab;$$

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\left[\left(2a-\frac{\sqrt{3}a}{b}y\right)^2-\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)\right]\mathrm{d}y$$

$$=2\pi a^2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\left(3-\frac{4\sqrt{3}}{b}y+\frac{4}{b^2}y^2\right)\mathrm{d}y=\sqrt{3}\pi a^2 b.\qquad\square$$

说明 根据图形特征,上面在计算 A 与 V 时选择以 y 作为积分变量,这是很合理的.

例 3 如图 10 - 12 所示,为阿基米德螺线 $r=a\theta(a>0,\theta\geq 0)$,图中 $S_0,S_1,S_2,\cdots$分别表示螺线每相邻两卷之间的面积.证明 $S_1,S_2,\cdots$成等差数列.

$$3\quad a^2\pi^3(3k^2+3k+1),$$

$$k=0,1,2,\cdots.$$

注意到

$$S_0=A_0,S_1=A_1-A_0,S_2=A_2-A_1,\cdots,$$

证 根据极坐标形式下的面积计算公式,先求出:

$$A_k=\frac{1}{2}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}(a\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{}$$

故得

$$\begin{aligned}S_k &= A_k - A_{k-1}\\ &= \frac{4}{3}a^2\pi^3[(3k^2+3k+1)-(3k^2-3k+1)]\\ &= 8a^2\pi^3 k,\quad k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

由此可见 $S_1, S_2, \cdots$成等差数列,公差为 $8a^2\pi^3$. □

注意 不要把 A_k 误认为 S_k.因为 A_k 表示矢径从 $\theta=2k\pi$ 至 $\theta=2k\pi+2\pi$ 所扫过的面积,它不仅扫过了 S_k,同时还扫过了 $S_0, S_1, \cdots, S_{k-1}$.

例 4 试求由参数方程

$$x=2t-t^2,\quad y=2t^2-t^3$$

表示的曲线所围成图形的面积.

分析 由

$$x=t(2-t),\quad y=t^2(2-t),$$

看出 $x(0)=x(2)=0, y(0)=y(2)=0$.说明参数由 $t=0$ 递增至 $t=2$ 时,曲线上的动点从坐标原点出发又回到坐标原点(该曲线的图像示于图 10-13).

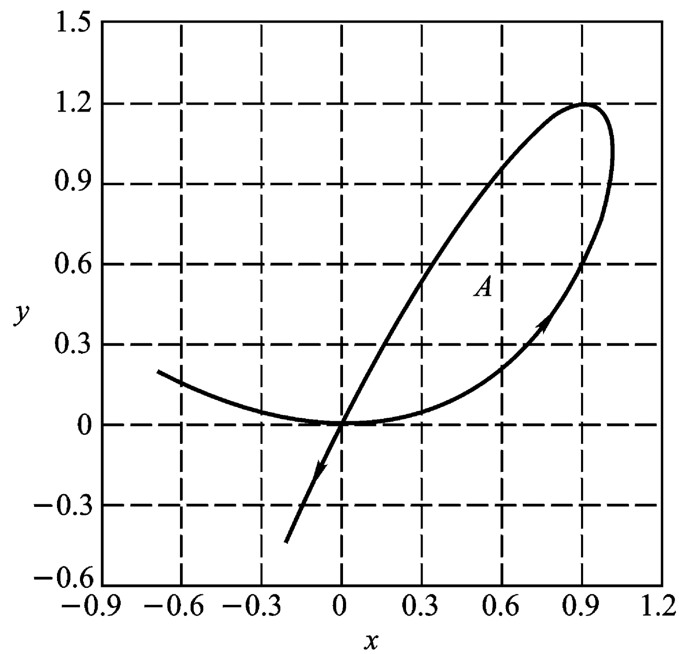


图 10-13

解 根据以上分析和前面在图 10-6 中给出的计算公式,便可求得该曲线所围成平面图形的面积:

$$\begin{aligned}A &= \left|\int_0^2 (2t^2-t^3)(2t-t^2)'\,dt\right|\\ &= \left|2\int_0^2 (2t^2-t^3)(1-t)\,dt\right|\end{aligned}$$

$$=2\left|\int_0^2 (t^4-3t^3+2t^2)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$=2\left|-\frac{4}{15}\right|=\frac{8}{15}.\qquad\square$$

说明　与前面问题3中所指出的结论相对照,这里的

$$\int_0^2 y(t)x'(t)\mathrm{d}t=-\frac{8}{15}$$

为一负值,表示 t 在 $[0,2]$ 这一变化过程中,曲线上的动点 $(x(t),y(t))$ 是按逆时针方向运动的.

例5　求由双曲抛物面 $z=x^2-y^2$、平面 $x=1$ 与 $z=0$ 所围立体的体积.

分析　该立体如图10-14(a)所示.由于它不是一个旋转体,因此只能通过先求出截面面积函数,而后再求定积分的方法来计算立体体积.从我们对双曲抛物面的认识可以知道,垂直于 z 轴的截面形状是一族双曲线弓形(示于图10-14(b)),垂直于 x 轴的截面形状是一族抛物线弓形(示于图10-14(c)).若能求得截面面积函数 $A(z)$ 或 $A(x)$,便有

$$V=\int_0^1 A(z)\mathrm{d}z=\int_0^1 A(x)\mathrm{d}x.$$

解　下面给出两种解法,以便于进行比较.

[解法一]　在计算 $A(z)$ 时,应把 z 看作在 $[0,1]$ 上的任一固定实数.此时,水平截线是一族双曲线 $x^2-y^2=z$(每个 z 的值对应一条双曲线),或写作

$$y=\pm\ x^2-z,\ x\in[\ z,1].$$

于是所求双曲线弓形的面积为

$$A(z)=2\int_{z}^{1}\ x^2-z\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[x\ x^2-z-z\ln(x+\ x^2-z)\right]_{x=\ z}^{x=1}$$

$$=\ 1-z-z\ln(1+\ 1-z)+z\ln\ z,$$

由此便有

$$V=\int_0^1\sqrt{1-z}\,\mathrm{d}z-\int_0^1 z\ln(1+\sqrt{1-z})\,\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\int_0^1 z\ln z\,\mathrm{d}z .$$

现分别计算右边三个积分如下:

$$\int_0^1\sqrt{1-z}\,\mathrm{d}z=\frac{2}{3}(1-z)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^0=\frac{2}{3};$$

$$\int_0^1 z\ln(1+\sqrt{1-z})\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2\ln(1+\sqrt{1-z})\Big|_0^1+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{z^2}{\sqrt{1-z}+1-z}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-t^2)^2}{1+t}\mathrm{d}t\ (t=\sqrt{1-z})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t-t^2+t^3)\,\mathrm{d}t=\frac{5}{24};$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 z\ln z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\left(z^2\ln z-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{1}{4}\left(z^2\ln z-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_u^1$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{1}{4}\left(-u^2\ln u-\frac{1}{2}+\frac{u^2}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{8}.$$

所以 $V=\frac{2}{3}-\frac{5}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{3}$. □

[解法二]　类似地,在计算 $A(x)$**时应把** x **看作在**$[0,1]$**上取定的任一实数.此时,垂直于** x **轴的截线是一族抛物线** $z=x^2-y^2$ **(每个** x **的值对应一条抛物线).因此所求抛物线弓形的面积为**

$$A(x)=2\int_0^x(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{4}{3}x^3 .$$

由此便有

$$V=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3} .$$ □

说明　比较解法一与解法二,显然后者要简单得多.由此可见,在利用截面面积求体积的问题中,选择合适的截面是十分重要的.请读者再考察一下,本题若取垂直于 y **轴的截面,则截面的形状是怎样的?计算** $A(y)$**以及计算** V **的过程是否简便?**

四、习题选解

§1 习题(教材第 242 页)

8. **求由曲线** $x=t-t^3$, $y=1-t^4$ **所围图形的面积.** $A=\frac{16}{35}$

提示 该曲线如图 10 - 15 所示 .由

$$x = t(1 - t)(1 + t),$$
$$y = (1 - t)(1 + t)(1 + t^2),$$

易知 $x(-1) = x(1), y(-1) = y(1)$.

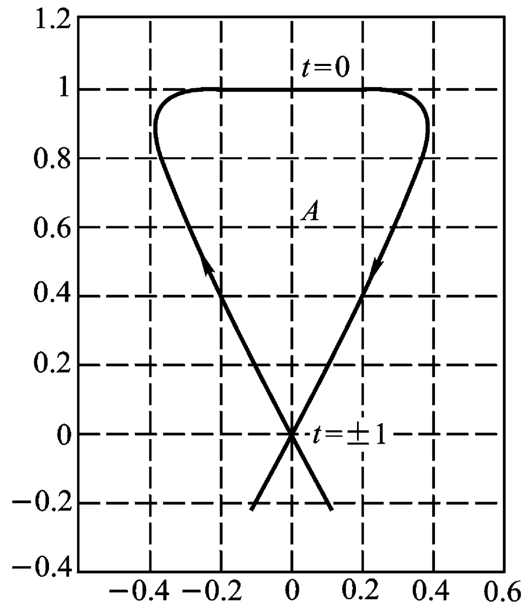


图 10 - 15

9. **求二曲线** $r = \sin\theta$ **与** $r = \sqrt{3}\cos\theta$ **所围公共部分的面积** . $A = \frac{5\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

提示 $A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2\theta d\theta$.

10. **求两椭圆**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

所围公共部分的面积 . $A = 4ab\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 < b < a$

提示 $A = 8\int_0^c \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - x\right) dx, \quad c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

§2 **习题(教材第** 246 **页)**

1. **如图** 10 - 16 **所示,直椭圆柱体被通过底面短轴的斜平面所截,试求截得的楔形体的体积** . $V = \frac{400}{3}$

提示 **垂直于** x **轴的矩形截面面积函数为**

$$A(x) = \frac{2}{5}x\sqrt{100 - x^2}, x \in [0, 10] .$$

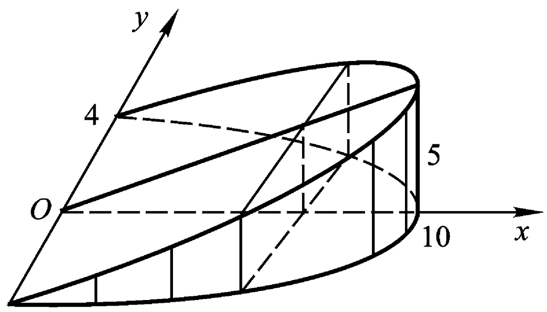


图 10 - 16

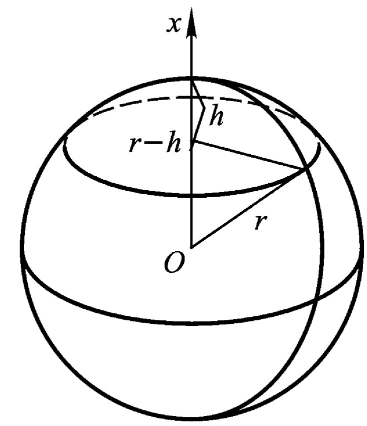


图 10 - 17

3. **已知球半径为 r,验证高为 h 的球缺体积**(图 10 - 17)

$$V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)\quad(h\leq r).$$

提示 $A(x)=\pi(r^2-x^2),\ x\in[r-h,r]$.

4. **求曲线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\ (a>0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所得立体的体积**. $V=\dfrac{32}{105}\pi a^3$

提示 $V=\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x=\pi a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t\,(a\cos^3 t)'\,\mathrm{d}t$.

5. **导出曲边梯形 $0\leq y\leq f(x),\ a\leq x\leq b$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积公式为**

$$V=2\pi\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

提示 **对**$[a,b]$**作分割 T,在 T 所属每个小区间**$[x_{i-1},x_i]$**上的狭条小曲边梯形绕 y 轴旋转所得立体的体积**

$$\Delta V_i\approx 2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i,\ \xi_i\in[x_{i-1},x_i].$$

于是有

$$V=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n \Delta V_i=2\pi\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

§2 平面曲线的弧长与旋转曲面的面积

一、内容提要(教材 § 3, § 4)

1° **光滑曲线段**

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

的弧长计算公式为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

2° 若曲线由直角坐标方程

$$y=f(x),\quad x\in[a,b]$$

表示,且 f 在 $[a,b]$ 上连续可微时,则其弧长计算公式为

$$s=\int_{a}^{b}\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

3° 若曲线由极坐标方程

$$r=r(\theta),\quad \theta\in[\alpha,\beta]$$

表示,且 $r'(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续,则其弧长计算公式为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta. \tag{2.3}$$

4° $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ 称为弧微分.当曲线方程分别由以上 1°、2°、3°三种情形给出时,相应的弧微分分别为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

5° 曲率是用来描述曲线上各点处的弯曲程度的.按定义,曲线 C 在点 P 的曲率为

$$K=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|_P=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|_P.$$

其中 $\alpha(t)$ 表示曲线

$$C:\ x=x(t),\ y=y(t)$$

在点 $P(x(t),y(t))$ 处切线的倾角;$\Delta\alpha=\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)$ 表示动点由点 P 沿曲线位移至点 $Q(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t))$ 时切线倾角的增量;Δs 表示曲线段 PQ 的弧长.由于

$$\alpha(t)=\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}\ \text{或}\ \operatorname{arccot}\frac{x'(t)}{y'(t)},$$

因此当 $x(t)$、$y(t)$ 二阶可导时,可得

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\frac{\alpha'(t)}{s'(t)}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}.$$

于是,曲率计算公式为

$$K=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}. \tag{2.4}$$

而当 C 由 $y=f(x)$ 表示时,又有

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.\tag{2.5}$$

6° 设曲线 C 在其上一点 P 处的曲率 $K\neq 0$.在 P 处的曲线凹侧法线上取点 G,使 $|PG|=\frac{1}{K}=\rho$,并以 G 为圆心、ρ 为半径作圆.此圆及其半径和圆心分别称为曲线 C 在点 P 处的曲率圆、曲率半径和曲率中心(参见图 10 - 18).

由于圆的曲率各点相同,且等于其半径的倒数,因此曲线 C 在点 P 处与其曲率圆不仅有公共的切线,而且有相同的凹向与相同的曲率.这意味着两者在点 P 有相同的一阶导数和二阶导数,故曲率圆又称为密切圆.

7° 若点 P 的坐标为 $(x(t),y(t))$ 或 $(x,f(x))$,则可求得曲率中心 $G(X,Y)$ 的坐标为

$$\begin{aligned}X&=x(t)-\frac{y'(t)[x'^2(t)+y'^2(t)]}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)},\\ Y&=y(t)+\frac{x'(t)[x'^2(t)+y'^2(t)]}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)};\end{aligned}\tag{2.6}$$

或

$$\begin{aligned}X&=x-\frac{f'(x)[1+f'^2(x)]}{f''(x)},\\ Y&=f(x)+\frac{1+f'^2(x)}{f''(x)}.\end{aligned}\qquad 2.7$$

(注:此二公式的来源见后面“释疑解惑”中问题 1)

当点 P 沿曲线 C 变动时,式(2.6)或(2.7)即为曲率中心 G 的轨迹曲线(L)的方程,我们称 L 为 C 的渐屈线,相应地称 C 为 L 的渐伸线(如此命名的理由,见后面“释疑解惑”中问题 2).

8° 平面光滑曲线 C 若以参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

给出,且 $y(t)\geq 0$,则 C 绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.\tag{2.8}$$

9° 若光滑曲线 C 以直角坐标方程

$$y=f(x),\quad x\in[a,b]$$

给出,且设 $f(x)\geq 0$,则 C 绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.\tag{2.9}$$

二、释疑解惑

问题 1 试给出公式(2.6)与(2.7)的来源.

答　由曲率中心定义, $P(x,y)$与 $G(X,Y)$应满足:

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=\rho^2=\frac{1}{K^2},$$

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\frac{x-X}{y-Y}.$$

以 $x-X=-\dfrac{y'(t)}{x'(t)}(y-Y)$代入另一式,消去 $x-X$ 后得到

$$\left(1+\frac{y'^2(t)}{x'^2(t)}\right)(y-Y)^2=\frac{1}{K^2}.$$

将曲率公式(2.4)代入上面的 K,又得

$$(y-Y)^2=\left(\frac{x'(t)\left(x'^2(t)+y'^2(t)\right)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}\right)^2.$$

由于 G在 C 的凹侧法线上,因此 $y-Y$ 恒与$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$异号.而

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{x'^3(t)},$$

故有

$$y-Y=-\frac{x'(t)\left(x'^2(t)+y'^2(t)\right)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)},$$

$$x-X=\frac{y'(t)\left(x'^2(t)+y'^2(t)\right)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}.$$

经整理后即得公式(2.6).

以 $x=t$, $y=f(t)$代入(2.6)式,立即得到(2.7)式.

问题 2　设曲线 L 是曲线 C 的渐屈线,试说明曲线 C必是曲线 L 的渐伸线的理由.

答　为此需要证明如下命题——设曲线 C为 $y=y(x)$,其渐屈线方程为

$$L:\ \begin{cases} X=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\[2mm] Y=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}. \end{cases}$$

则必有:

(1) 若 $P\in C$,与之对应的 $G\in L$,则 C在点 P 处的法线即为 L 在点 G 处的切线;

(2) 如图 10 - 18 所示,若在 C 上任取两点 $P_1(x=x_1)$, $P_2(x=x_2)$,它们对应的曲率中心与曲率半径分别为 G_1, $G_2\in L$ 和

$$\rho_1=|P_1G_1|,\quad \rho_2=|P_2G_2|,$$

则$|\rho_2 - \rho_1|$必定等于 L 上曲线段G_1G_2的长度.

首先需假设 L 为光滑曲线,这只要设$y'''(x)$连续就足够了.

先对 L 的方程求导:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{y''(y''+3y'^2y'') - y'y'''(1+y'^2)}{y''^2}$$

$$= \frac{y'''(1+y'^2) - 3y'y''^2}{y''^2}\cdot y', \qquad (2.10)$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = y' + \frac{2y'y''^2 - (1+y'^2)y'''}{y''^2}$$

$$= \frac{3y'y''^2 - (1+y'^2)y'''}{y''^2}.$$

由此得到 L 在点 G 处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\Big/\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{y'},$$

这恰好就是 C 在点 P 处的法线斜率.又因 G 在该法线上,故结论(1)得证.

再由(2.10)又有

$$\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{1}{y''^4}\left[3y'y''^2 - y'''(1+y'^2)\right]^2(1+y'^2),$$

而

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right) \qquad (\text{设 } y''>0)$$

$$= \frac{1}{y''^2}\left(3y'y''^2 - y'''(1+y'^2)\right)\sqrt{1+y'^2},$$

从而G_1G_2的弧长为

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right| = |\rho_2 - \rho_1|,$$

故结论(2)得证.

问题 3　何谓椭圆积分?

答　以下三类积分:

$$E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

$$K(k,h,\varphi) = \int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+h\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

其中 $0<k<1$,称为椭圆积分,它们来源于椭圆等曲线的弧长计算.例如椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

当 $a>b$ 时,取其参数方程为

$$x=a\sin\theta,\quad y=b\cos\theta,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

记 $k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$,则有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=a\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

$$s=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=4aE\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\frac{\pi}{2}\right).$$

类似地,当 $a<b$ 时, $s=4bE\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b},\frac{\pi}{2}\right)$.

又如正弦曲线 $y=\sin x$, $x\in[0,\pi]$,它的长为

$$s=\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sqrt{2-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_0^\pi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}E\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\pi\right).$$

由于椭圆积分的被积函数无法求出原函数,因此不能运用牛顿 - 莱布尼茨公式来计算它的值,故只能通过查表或借助数学软件求其近似值.例如椭圆($a=2$, $b=1$)周长为

$$s\approx 9.688\ 448\ 224;$$

正弦曲线一拱的弧长为 $s\approx 3.820\ 197\ 780$.

注　上面的近似值是用数学软件 MATLAB 求得的,数值计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的指令是

vpa(int('f(x)', a, b), n)

其中 n 是所取有效数字位数.你只要在 MATLAB 指令窗里按如上指令键入 $f(x)$ 的具体表达式和 a, b, n 这三个具体的数字,“enter”即可.当然,你也可以使用别的数学软件来计算,例如 Maple, Mathematica 等.

三、范例解析

例 1　如图 10 - 19 所示,悬链线 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 在 $x\in[0,u]$ 上的一段弧长和曲边梯形面积分别记为 $s(u)$ 和 $A(u)$;该曲边梯形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积和侧面积分别记为 $V(u)$ 和 $S(u)$;该旋转体在 $x=u$ 处的端面积记为 $F(u)$.试证:

(1) $s(u)=A(u)$, $S(u)=2V(u)$, $\forall u>0$;

(2) $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{S(u)}{F(u)}=1$.

证 (1) **由于**

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=y,$$

因此有

$$s(u)=\int_0^u\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^u y\,dx=A(u);$$

$$S(u)=2\pi\int_0^u y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_0^u y^2\,dx=2V(u) .$$

(2) **又因**

$$\begin{aligned}S(u)&=2\pi\int_0^u\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^u(e^{2x}+e^{-2x}+2)\,dx\\&=\frac{\pi}{4}(e^{2u}-e^{-2u}+4u),\end{aligned}$$

$$F(u)=\pi y^2(u)=\frac{\pi}{4}(e^u+e^{-u})^2,$$

所以

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{S(u)}{F(u)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{2u}-e^{-2u}+4u}{e^{2u}+e^{-2u}+2}=1 .$$ □

例 2 **图** 10 - 20 **所示为曳物线的生成原理——在平面上有一细杆** PQ, **长为** a .**起始位置** P **在点**$(0, a)$, Q **在坐标原点**.**然后一端** Q **沿** x **轴正向移动**,**另一端** P **被自由**(**即不受阻力**)**地牵曳着而生成一条曲线**,**称为曳物线** .

(1) **验证曳物线的方程为**

$$x+\sqrt{a^2-y^2}=\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y};$$

(2) **计算曳物线上两点**(x_1, y_1)**与**(x_2, y_2)**间的弧长**;

(3) **试求当端点** Q **运动到**$(x, 0)$**时**,**端点** P **沿曳物线走过的路程** $s(x)$, **并求** $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-s(x)]$.

分析　当细杆自由地被牵曳着运动时,在任一位置 PQ 恒为曳物线的切线 .设 $P(x, y)$, PQ 所在的切线为

$$Y - y = y'(X - x) .$$

当 $Y = 0$ 时, $X = x - \frac{y}{y'}$, 故点 Q 的坐标为 $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$.由 $|PQ| = a$, 得到曳物线所满足的方程为

$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2 = a^2 .$$

解　(1) 根据以上分析, 由 $y' < 0$(曳物线为递减函数), 解出

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} .$$

这就得到

$$x = -\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = a\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} + C,$$

以 $x = 0$ 时 $y = a$ 的初值条件代入, 得 $C = 0$.于是解得曳物线方程为

$$x = a\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} .$$

(2) 根据弧长公式, 曳物线上点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 之间弧段长度为

$$s = \left|\int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy\right| .$$

由于

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{-\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right)^2 = \left(\frac{a}{y}\right)^2,$$

因此易得

$$s = \left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{a}{y} dy\right| = a\left|\ln \frac{y_2}{y_1}\right| .$$

(3) 设端点 Q 到达 $(x, 0)$ 时, 端点 P 在位置 (x_0, y_0) .写出在该点的切线:

$$X - x_0 = (Y - y_0)\frac{dx}{dy}\bigg|_{(x_0, y_0)}$$

$$= (Y - y_0)\left(-\frac{\sqrt{a^2 - y_0^2}}{y_0}\right) .$$

用 $Y = 0$, $X = x$ 代入, 得到

$$x - x_0 = \sqrt{a^2 - y_0^2},$$

$$x = a\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y_0^2}}{y_0} .$$

由于动点 P 由点 $(0, a)$ 沿曳物线运动到点 (x_0, y_0) 时, 走过的路程为 $s(x) =$

$a\ln\frac{a}{y_0}$，因此有

$$x - s(x) = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y_0^2}}{a}.$$

又因当 $x\to+\infty$时，$x_0\to+\infty$，随之又使 $y_0\to 0^+$，于是求得

$$\lim_{x\to+\infty}[x-s(x)] = \lim_{y_0\to 0^+} a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y_0^2}}{a}$$

$$= a\ln 2.$$

这说明当走过的路程无限增大时，细杆两端走过路程的差趋近于 a 的 $\ln 2$ 倍．

□

例 3 试求椭圆 $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ 的渐屈线和在点 $P\left(t=\frac{\pi}{6}\right)$ 处的曲率圆．

解 先计算

$$x' = -a\sin t,\quad y' = b\cos t,$$

$$x'' = -a\cos t,\quad y'' = -b\sin t,$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t,$$

$$x'y'' - x''y' = ab(\sin^2 t + \cos^2 t) = ab.$$

把它们代入渐屈线方程(2.6)，得到

$$X = a\cos t - \frac{b\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab} = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$Y = b\sin t + \frac{-a\sin t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab} = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

前面图 10 - 15 所示者即为椭圆及其渐屈线的图形．

当 $t=\frac{\pi}{6}$时，椭圆上的点为 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}b\right)$；与之对应的曲率中心(以 $t=\frac{\pi}{6}$代入渐屈线方程)为 $G\left(\frac{3\sqrt{3}(a^2-b^2)}{8a}, \frac{b^2-a^2}{8b}\right)$；所求曲率圆即为以 G 为圆心，$|PG| = \frac{(a^2+3b^2)^{3/2}}{8ab}$为半径的圆

$$\left(x-\frac{3\sqrt{3}(a^2-b^2)}{8a}\right)^2 + \left(y-\frac{b^2-a^2}{8b}\right)^2 = \frac{(a^2+3b^2)^3}{64a^2b^2}.$$ □

* **例 4** 证明：曲率中心是曲线的法线与其相邻法线的交点的极限位置(当后者无限靠近前者时)．

证 设曲线 $C: y = f(x)$，满足 $f''(x)\neq 0$．在 C 上已知点 P 与一个相近点 P' 处作出 C 的法线，二法线的交点是 G'．若 P'沿 C 无限靠近 P，则 G'在固定点 P

的法线上移动(图 10 - 21) .写出在点 $P(x, y)$与点 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$处的法线方程分别为

$$(X-x)+f'(x)(Y-y)=0, \qquad (2.11)$$

$$(X-x-\Delta x)+f'(x+\Delta x)(Y-y-\Delta y)=0. \qquad (2.12)$$

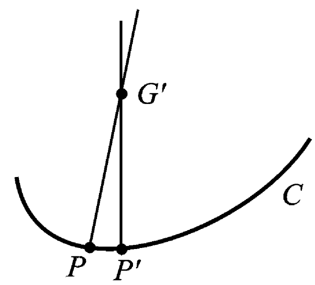


图 10 - 21

两式相减,得出

$$\Delta x+f'(x)(Y-y)-f'(x+\Delta x)(Y-y-\Delta y)=0,$$

或

$$1-(Y-y)\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{\Delta x}f'(x+\Delta x)=0.$$

由于 $f''(x)$存在时,有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f'(x+\Delta x)=f'(x)$,并有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x), \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}=f''(x),$$

因此对上式取 $\Delta x\to 0$ 的极限,便得

$$1-(Y-y)f''(x)+f'^2(x)=0,$$

即

$$Y=f(x)+\frac{1+f'^2(x)}{f''(x)}.$$

把它代入(2.11)式,又得

$$X=x-\frac{f'(x)[1+f'^2(x)]}{f''(x)}.$$

可见法线(2.11)与(2.12)的交点(X, Y)的极限位置(仍记为(X, Y))即为由(2.7)式指出的曲率中心 . □

说明 本题虽与定积分没有直接联系,但它对于认识曲率中心的几何特征是很有帮助的 .

例 5 试求星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t(a>0)$绕直线 $y=x$ 旋转所成旋转曲面的面积 .

分析 如图 10 - 22 所示,曲线上任一点(x, y)至旋转轴 $y=x$ 的距离为

$$h=\frac{|y-x|}{2},$$

这就是曲面上任一点的旋转半径 .

解　根据以上分析,并利用对称性,可得

$$S = 4\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{|y(t) - x(t)|}{\sqrt{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4\pi a}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin^3 t - \cos^3 t)\sqrt{9a^2 \sin^2 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}}\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3 t - \cos^3 t\right)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin^3 t - \cos^3 t)(-\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{5}(\sin^5 t + \cos^5 t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5}(\sin^5 t + \cos^5 t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{1}{5}\right] = \frac{3}{5}(4\sqrt{2} - 1)\pi a^2 .$$ □

四、习题选解

§3 习题(教材上册第 252 页)

1. **求下列曲线的弧长:**

提示　(2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.**可有多种解法,例如:**

(i) $s = \int_0^1 \sqrt{\frac{2x - 2\sqrt{x} + 1}{x}}\,\mathrm{d}x$　(**令** $x = t^2$)

$$= 2\int_0^1 \sqrt{2t^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1 + \sqrt{2})\ ;$$

(ii) **先化为参数方程**

$$x = t^2,\quad y = (1 - t)^2,\quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$s = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (-2(1 - t))^2}\,\mathrm{d}t;$$

或是 $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,**则有**

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\sqrt{1 - 2\cos^2 t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\ (\text{令 } u = \sin^2 t)$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1 - 2u + 2u^2}\,\mathrm{d}u .$$

3. **求** a、b **的值,使椭圆** $x = a\cos t, y = b\sin t$ **的周长等于正弦曲线** $y = \sin x$ **在** $0 \leq x \leq 2\pi$ **上的一段弧长** .($a = 1, b = \sqrt{2}$; **或** $a = \sqrt{2}, b = 1$)

提示　使得满足

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x .$$

* 6. 证明抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在顶点处的曲率为最大 .

提示　求出抛物线的顶点为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$,曲率为

$$K=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}} .$$

* 7. 求曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上曲率最大的点 .$\left(x=-\dfrac{1}{2}\ln 2,\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

提示　$K=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^{2x})^{3/2}}$,通过求 $K'(x)=0$ 的解,找出 K 的最大值点 .

§4 习题(教材上册第 255 页)

1. 求下列平面曲线绕指定轴旋转所得旋转曲面的面积:

提示　(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴 .先化为参数方程 $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\leq t\leq 2\pi$,而后有

$$\begin{aligned}
S&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t\\
&=4\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&=4\pi a\int_0^1\sqrt{b^2+(a^2-b^2)u^2}\,\mathrm{d}u\\
&=\begin{cases}4\pi a^2, & a=b,\\[4pt] 2\pi\left(a^2+\dfrac{ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right), & a>b,\\[4pt] 2\pi\left(a^2+\dfrac{ab^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right), & a<b .\end{cases}
\end{aligned}$$

(4) $x^2+(y-a)^2=r^2\ (r<a)$ 绕 x 轴 .

$$\begin{aligned}
S&=2\pi\int_{-r}^{r}\left(a+\sqrt{r^2-x^2}\right)\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}x+\\
&\quad 2\pi\int_{-r}^{r}\left(a-\sqrt{r^2-x^2}\right)\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}x\\
&=8\pi a\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}x\\
&(=4\pi^2 ar) .
\end{aligned}$$

2. 极坐标曲线(光滑)

$$r = r(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta\ ([\alpha, \beta] \subset [0, \pi],\ r(\theta) \ge 0)$$

绕极轴旋转，试求所得旋转曲面的面积计算公式．$\left(S = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta\right)$

提示　任意曲线段 AB 绕轴 l 旋转所得旋转曲面的面积，一般可表示为

$$S = 2\pi\int_{(A)}^{(B)} z\,ds,$$

其中 ds 是弧微分，z 是 AB 上任一点绕 l 旋转的旋转半径．

§3　定积分在物理中的某些应用

一、内容提要 (教材 §5)

1° 微元法　物理中的定积分问题往往采用"微元法"来处理．其基本思想是：设某物理量 $\Phi = \Phi(x)$ 是分布(定义)在区间 $[a, x]$ $(a \le x \le b)$ 上的，当 $x = b$ 时，$\Phi(b)$ 适为最终所求量．若在微小区间 $[x, x + \Delta x]$ 上，Φ 的微小增量 $\Delta\Phi$ 用 Φ 的微分来近似，即

$$\Delta\Phi \approx d\Phi = f(x)\Delta x,$$

则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$(设 f 为连续函数)，而 $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$．

这样，问题就归为如何正确给出 Φ 的微分表达式 $f(x)dx$．为此必须注意以下两点：

(1) 所求量 Φ 关于分布区间必须是代数可加的；

(2) 需要保证 $\Delta\Phi - f(x)\Delta x = o(\Delta x)$，故选择 Φ 的微分形式需特别谨慎．

2° 液体静压力

如图 10 - 23 所示 曲边梯形

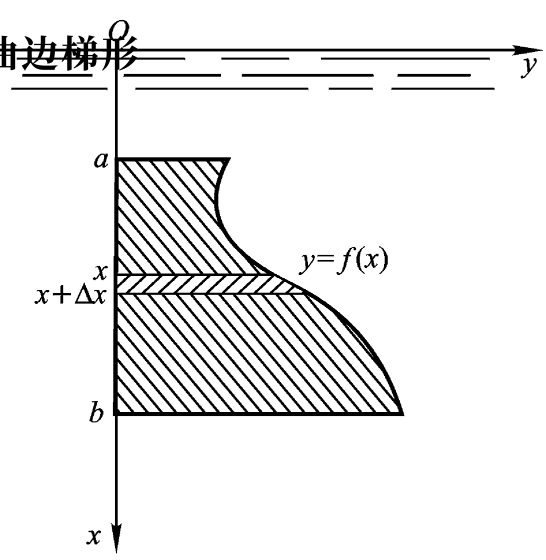


图 10 - 23

$$0 \le y \le f(x), a \le x \le b$$

直立地浸没在比重为 ν 的液体中.整个曲边梯形所受的静压力(每侧)为

$$F = \int_a^b \nu x f(x) \mathrm{d} x . \tag{3.1}$$

3° 引力 为方便起见,以图 10-24 所示的万有引力问题为例.图中圆弧的半径为 r,质量为 M(均匀密度);质点 O 的质量为 m,位于圆心正上方相距圆弧所在平面为 h 的地方.欲求圆弧对质点的万有引力.

取坐标轴 Oz 如图所示,圆弧在平面 $z = h$ 上.在圆弧上取中心角为 $\mathrm{d}\varphi$ 的弧微元 $\mathrm{d}s$ 对质点 m 的引力作为引力微元,即把 $\mathrm{d}s$ 近似看作质点,其质量为

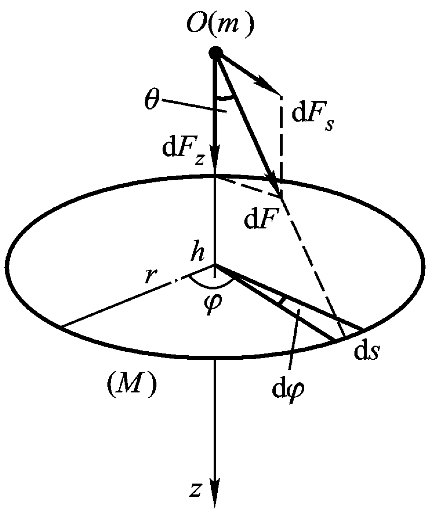


图 10-24

$$\mathrm{d} M = \frac{M}{2\pi r} \cdot r \mathrm{d}\varphi = \frac{M}{2\pi} \mathrm{d}\varphi,$$

则引力微元为

$$\mathrm{d} F = \frac{km \mathrm{d} M}{h^2 + r^2} = \frac{kmM}{2\pi(h^2 + r^2)} \mathrm{d}\varphi .$$

再将 $\mathrm{d}F$ 分解为水平分力 $\mathrm{d}F_s$ 和竖直分力 $\mathrm{d}F_z$,其中 $\mathrm{d}F_s$ 将因圆弧的对称性而被对称点上的反向力所抵消,$\mathrm{d}F_z$ 的合力才是所求的结果.由于

$$\mathrm{d} F_z = \mathrm{d} F \cos \theta = \frac{kmMh}{2\pi(h^2 + r^2)^{3/2}} \mathrm{d}\varphi,$$

因此求得

$$F_z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d} F_z = \frac{kmMh}{(h^2 + r^2)^{3/2}} . \tag{3.2}$$

必须注意:通常不能把二物体之间的引力直接看作质量集中在各自的质心后,二质点之间的引力(这由(3.2)所示结果便可知道);另外,在求合力时,必须是同一方向上的力才能实行代数相加(上面对求得的 $\mathrm{d}F$ 不可直接进行积分).

4° 变力做功 直线方向上在变力 $F(x)$ 作用下,由 $x = a$ 运动到 $x = b$ 所做的功为

$$W = \int_a^b F(x) \mathrm{d} x . \tag{3.3}$$

这是引入定积分概念时的一个基本背景问题;定积分应用中的其他做功问题,都要先给出功的微元表达式 $\mathrm{d}W = F(x)\mathrm{d}x$,而后计算定积分(3.3).

5° 静矩与质心(注:第三版教材已把这段内容合并到后面多元函数积分学部分,这里为照顾使用类似于第二版教材的读者,仍予保留.)

(1) 光滑曲线段 $y = y(x)$, $x \in [a, b]$,其线密度为常数 μ.它的质量和它关于

二坐标轴的静矩分别为

$$
\begin{aligned}
m &= \int_a^b \mu\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,\\
M_x &= \int_a^b \mu y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x, \qquad (3.4)\\
M_y &= \int_a^b \mu x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x;
\end{aligned}
$$

它的质心 $C(x_C, y_C)$为

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}, \qquad (3.5)$$

$$y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}. \qquad (3.6)$$

(2) 平面图形设为 $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$($y_1$ 与 y_2 为连续函数), 其面密度为常数 μ.它的质量和它关于二坐标轴的静矩分别为

$$
\begin{aligned}
m &= \int_a^b \mu(y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x,\\
M_x &= \int_a^b \frac{\mu}{2}(y_2^2 - y_1^2)\,\mathrm{d}x, \qquad 3.7\\
M_y &= \int_a^b \mu x(y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x;
\end{aligned}
$$

它的质心 $C(x_C, y_C)$为

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x(y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x}, \qquad (3.8)$$

$$y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,\mathrm{d}x}{2\int_a^b (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x}. \qquad (3.9)$$

类似地可讨论空间立体的质量、静矩和质心 .

二、释疑解惑

问题 1　关于微元法的几点补充说明 .

答　在前面曾对微元法指出了两个注意点, 其中之一是要求所求量是代数可加的, 这是因为定积分概念本身就是一个和式(积分和)的极限 .反映在引力问题中, 当需要求合力时, 必须把不同方向上的力分别分解到某个相同方向上去,

才可对这些同一方向上的分力实施代数相加 .

另一个注意点是要求选择合适的近似表达式 $f(x)\Delta x$,使得所求量 Φ 的增量 $\Delta\Phi$ 与该式之差是 Δx 的高阶无穷小量,亦即有

$$\mathrm{d}\Phi = f(x)\Delta x . \qquad 3.10$$

在用微元法归结为定积分时,想要每次都去证明(3.10)式成立,那是十分困难的 .在前面导出平面图形面积、立体体积与曲线弧长的计算公式时,实际上就是在验证此式成立 .如果把弧长增量的近似式改取为 $\Delta s \approx \Delta x$,将导致 $s = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$ 的明显错误,其原因就在于

$$\Delta s - \Delta x \neq o(\Delta x) .$$

在数学发展历史上,曾经对曲面面积的一般定义产生过一种误解,以为可以用曲面的一系列内接三角形面积之和的极限去定义曲面的面积,后来发现这种定义是不确切的(正确的做法是用曲面的一系列外切多边形面积之和的极限来定义曲面面积) .产生这种错误的原因,同样是因为忽略了(3.10)式的重要性 .好在物理问题可以通过实验等别的途径来检验正确与否,所以在处理物理问题时,更多地采用了微元法 .

问题 2 试述古尔金(Guldin)定理及其应用 .

答 若把曲线段质心坐标公式(3.6)改写成

$$2\pi y_C \cdot \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

就可发现此式左边即为 $2\pi y_C$ 与该曲线段弧长 s 的乘积,而其中 $2\pi y_C$ 表示曲线段的质心 C 绕 x 轴一周的周长;右边则为该曲线段绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积 S(这里设 $y(x)\geq 0$) .把此式重写成

$$2\pi y_C \cdot s = S . \qquad 3.11$$

类似地,可把平面图形质心坐标公式(3.9)也可改写成

$$2\pi y_C \cdot A = V, \qquad 3.12$$

其中 $2\pi y_C$ 为平面图形质心 C 绕 x 轴一周的周长,而 A 为该平面图形的面积,V 为该平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积(这里 $y_1(x)\geq 0$) .

(3.11)与(3.12)两式所揭示的规律称为古尔金定理 .在这两式中,分别出现 y_C、s、S 和 y_C、A、V 各三个量,只要知道其中任意两个量,便立刻可求得第三个量,这使不少问题的求解得以简化 .例如在图 10 - 25 中,(a)是要计算圆环面的面积和圆环体的体积;(b)是要求出半圆弧的重心坐标 .利用古尔金定理,由于(a)中圆弧和圆形图形的质心都在点$(x_C, y_C) = (0, R)$,而 $s = 2\pi r$, $A = \pi r^2$,故由公式(3.11)可得

$$S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 rR ;$$

由公式(3.12)可得

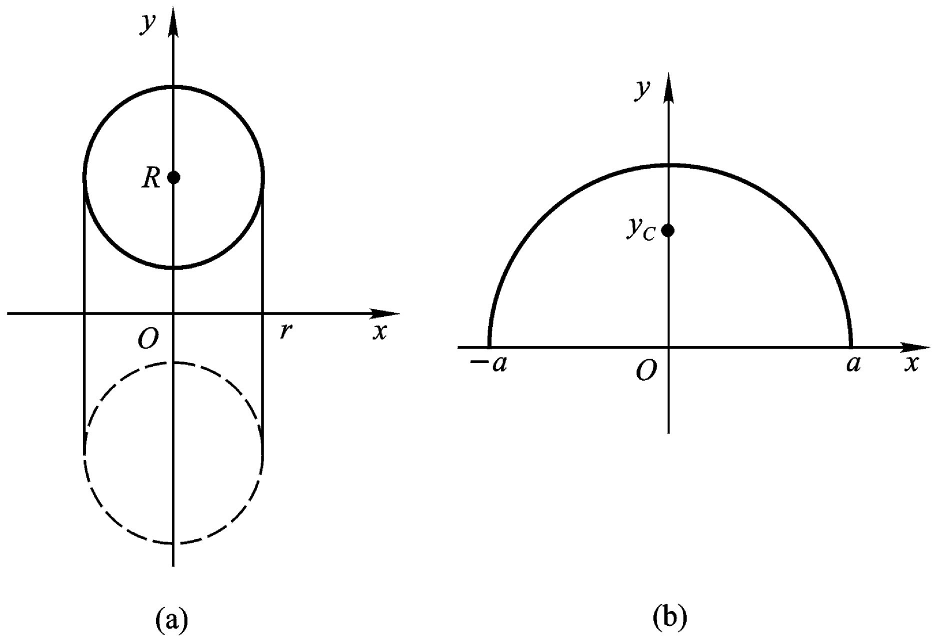


图 10 - 25

$$V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R .$$

对于图 10 - 25(b)中的半圆弧, $s=\pi a$, 它绕 x 轴旋转所得球面面积 $S = 4\pi a^2$, 故由公式(3.11)又可求得

$$y_C = \frac{S}{2\pi s} = \frac{2a}{\pi} .$$

于是半圆弧的质心在点 $\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$.

三、范例解析

例 1 洒水车上的水箱是一个横放着的长为 4 m 的椭圆柱体, 其椭圆端面的横向长半轴为 $b = 1$ m, 纵向短半轴为 $a = \frac{3}{4}$ m. 试计算当水箱装有深度为 $\frac{3}{2}a = \frac{9}{8}$ m 的水时每个端面所受的静压力.

解 如图 10 - 26 所示, 当纵向坐标为 $x \in \left[-\frac{a}{2}, a\right]$ 时, 水深为 $x + \frac{a}{2}$, 故所求静压力为

$$\begin{aligned} F &= 2\nu \int_{-\frac{a}{2}}^{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \\ &= \frac{2\nu b}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) \sqrt{a^2 - x^2}\, dx . \end{aligned}$$

现分别计算:

$$I_1 = \frac{2\nu b}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2\nu b}{3a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{a}{2}}^{a}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\nu a^2 b;$$

$$I_2 = \nu b\int_{-\frac{a}{2}}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\nu b}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]\Big|_{-\frac{a}{2}}^{a}$$

$$= \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\nu a^2 b.$$

从而求得

$$F = I_1 + I_2 = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\nu a^2 b.$$

最后以 $a = \frac{3}{4}, b = 1, \nu = 9.8$ 代入上式,得到

$$F = 9.353\,3\times 10^3\ (\mathrm{N})$$ □

问题:本题所求的静压力是否等于装满水时整个端面上的静压力减去 $x \in \left[-a, -\frac{a}{2}\right]$ 那一弓形部分上的静压力之差?请说明理由.

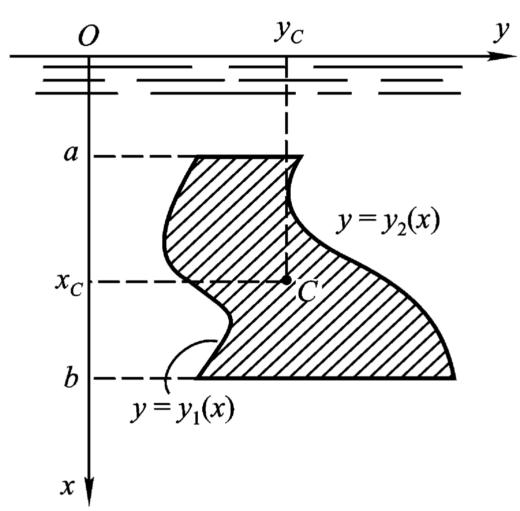


图 10 - 27

例 2 将一薄板垂直插入比重为 ν 的液体中,证明此薄板每面所受的静压力等于液体在该薄板质心处的压强与薄板面积的乘积.

证 设薄板垂直置于液体中的情形如图 10 - 27 所示, y 轴位于液体表面. 这时薄板每面所受压力为

$$F = \nu\int_a^b x(y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x.$$

根据静矩与质心公式(3.7)与(3.8),上述压力 F 的表达式恰好是薄板关于 y 轴的静矩 M_y(设薄板的面密度为 ν);对于该薄板的质心 $C(x_C, y_C)$ 而言,就有

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{F}{\nu A}$$

(A 为薄板面积),或

$$F = \nu x_C A = p_C A, \tag{3.13}$$

其中 $p_C = \nu x_C$ 即为液体在质心所在深度处的压强. □

说明 (1) 关系式(3.13)表明垂直放置的平板每面所受的液体压力,相当于把平板水平放置在深度为 x_C(原直立平板质心的深度)时所受到的压力(平板上方液柱的重量).

(2) 利用(3.13)式,如果 A 与 x_C 已知,则容易求得 F.例如,一块半径为 r 的圆形薄板垂直置于水中,圆心与水面相距为 $h(h \geq r)$,此时因 $A = \pi r^2$, $x_C = h$,故薄板每面受到的水压力为 $F = x_C A = \pi r^2 h$.

(3) 关系式(3.13)与古尔金公式(3.12)在形式上甚为相似.特别当取(3.13)式中的 $\nu = 2\pi$ 时,由此式所求得的 F 的值,恰为平板绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

例 3 如图 10-28(b)所示,有一半径为 R、质量为 M 的实心球体和另一相距球面为 a、质量为 m 的质点.试求球体对质点的引力.

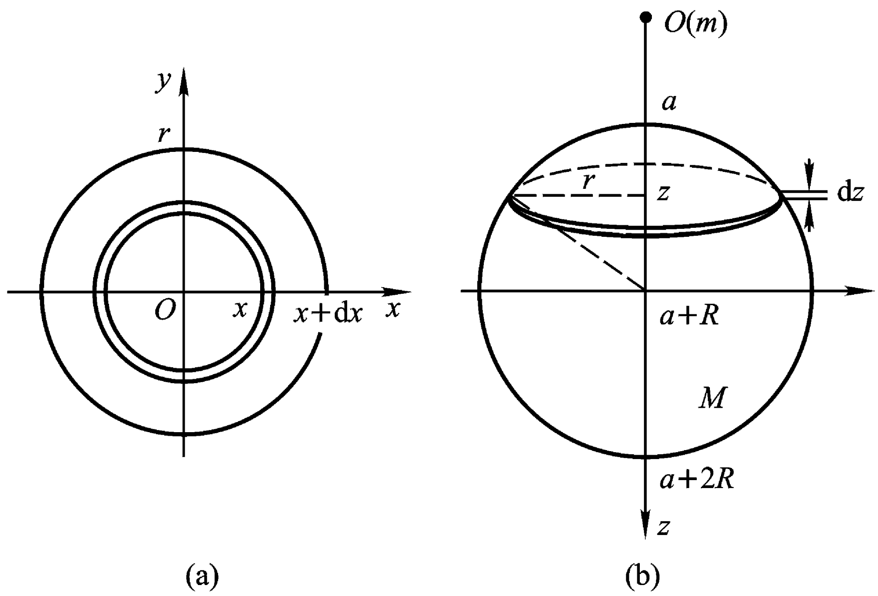


图 10-28

分析 取坐标轴 Oz 如图,使质点位于 O,球心位于 Oz 上坐标为 $a+R$ 的点处.根据微元法思想,整个球体对质点的引力可以看作球体一系列水平薄板(厚为 $\mathrm{d}z$)对质点引力的合力;而每一圆形水平薄片对质点的引力又可以看作圆盘一系列同心狭环(见图中(a))对质点引力的合力;而每一圆环当为很细时(即其中 $\mathrm{d}x$ 很小时),它对质点的引力已在内容提要 3°中举例给出.

解 现把该时的结论式(3.2)改写为

$$F_{z0}=\frac{kmM_0h_0}{(h_0^2+r_0^2)^{3/2}}. \tag{3.14}$$

设在球中任意截下的圆盘示于图 10-25(a)中,其半径与质量分别为

$$r=\sqrt{\mathrm{R}^2-(a+\mathrm{R}-z)^2},$$

$$M_1=\mathrm{d}M=\frac{3M}{4\pi\mathrm{R}^3}\pi r^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{3M}{4\mathrm{R}^3}[\mathrm{R}^2-(a+\mathrm{R}-z)^2]\mathrm{d}z.$$

在该圆盘中任意取一半径为 x 的狭圆环,其质量为

$$\mathrm{d}M_1=\frac{M_1}{\pi r^2}2\pi x\mathrm{d}x=\frac{2M_1}{r^2}x\mathrm{d}x.$$

现以 x 与 $\mathrm{d}M_1$ 分别替代(3.14)式中的 r_0 与 M_0,便得狭圆环对质点的引力为

$$\mathrm{d}F_{z1}=\frac{2kmM_1h_0}{r^2}\cdot\frac{x}{(h_0^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

于是圆盘对质点的引力为

$$F_{z1}=\frac{2kmM_1h_0}{r^2}\int_0^r\frac{x}{(h_0^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2kmM_1h_0}{r^2}\left(\frac{1}{h_0}-\frac{1}{\sqrt{h_0^2+r^2}}\right).$$

再以 z 与 $\mathrm{d}M$ 分别替代 F_{z1} 中的 h_0 与 M_1,并以 $r^2=\mathrm{R}^2-(a+\mathrm{R}-z)^2$ 代入,便得

$$\mathrm{d}F_z=\frac{3kmM}{2\mathrm{R}^3}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+\mathrm{R}^2-(a+\mathrm{R}-z)^2}}\right)\mathrm{d}z,$$

$$F_z=\frac{3kmM}{2\mathrm{R}^3}\int_a^{a+2\mathrm{R}}\left(1-\frac{z}{\sqrt{2(a+\mathrm{R})z-(a^2+2a\mathrm{R})}}\right)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{3kmM}{2\mathrm{R}^3}\left\{z-\frac{1}{2(a+\mathrm{R})^2}\left(\frac{1}{3}\left[2(a+\mathrm{R})z-(a^2+2a\mathrm{R})\right]^{\frac{3}{2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+a(a+2\mathrm{R})\sqrt{2(a+\mathrm{R})z-(a^2+2a\mathrm{R})}\right)\right\}\Bigg|_a^{a+2\mathrm{R}}$$

$$= \frac{3kmM}{R^2}\left[1 - \frac{2R^2 + 6aR + 3a^2}{3(a+R)^2}\right]$$

$$= \frac{kmM}{(a+R)^2}. \qquad \square$$

说明 对于均匀质量的实心球体,它与球外一质点之间的引力,恰好等于把实心球体的质量集中于球心后,二质点之间的引力(在一般情形下这个结论不成立).在后面第十一章引入反常积分概念的例 1 中(教材第 264 页),地球对火箭的引力 $F = \frac{mgR^2}{x^2}$,就是根据以上结论得来的.

例 4 古埃及大金字塔为一正四棱锥,设高为 125 m,塔基为 230 m×230 m 的正方形,传说历时 20 年才建成.若建造金字塔所用石块的密度为 3 210 kg/m^3,试求建成这座金字塔所作的功,并由此大致估算需要多少工匠直接投入建塔工程.

解 这里只考虑堆砌石块所作的功.如图 10 - 29 所示,堆砌成高为 x、厚为 $\mathrm{d}x$ 的一层塔体需作功

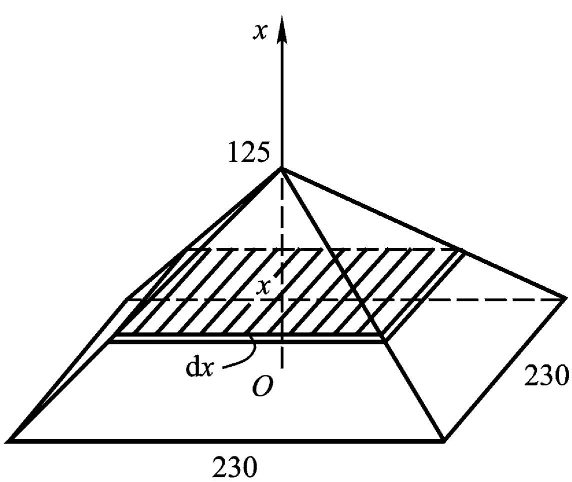


图 10 - 29

$$\mathrm{d}W = 3\,210gx\left[\frac{230}{125}(125 - x)\right]^2 \mathrm{d}x.$$

于是所作总功为

$$W = 3\,210g\left(\frac{230}{125}\right)^2\int_0^{125} x(125 - x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\,210g\left(\frac{230}{125}\right)^2\frac{(125)^4}{12}$$

$$\approx 2.166\,8\times 10^{12}\ (\mathrm{J}).$$

粗略假设每个工匠每天工作 10 小时,每年工作 300 天,共工作 20 年.以一个普通工匠每小时可把 250 kg 石块抬高 1 m 来计算,一个工匠 20 年内所作的

功约为

$$10\times300\times20\times250\times9.8\times1=1.47\times10^{8}\,(\mathrm{J}).$$

所以需要工匠人数约为

$$\frac{2.17}{1.47}\times10^{4}\approx15\ 000(\text{人}).\qquad\square$$

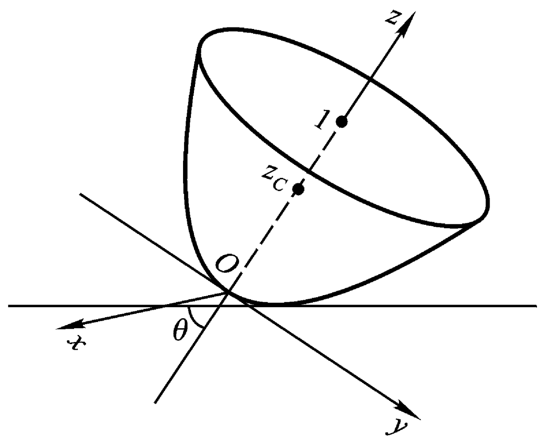


图 10 - 30

* **例 5　把密度均匀的抛物体 $x^2+y^2\leq z\leq1$ 放在水平桌面上自由摆动(图 10 - 30).证明:当抛物体稳定时,它的中轴线(z 轴)与桌面所成的角度为**

$$\theta=\arctan\ \frac{3}{2}.$$

分析　先求出抛物体在所示坐标系中的质心 $C(0,0,z_C)$,然后由质心处于最低位置(使抛物体平衡)而求出 θ.

证　在坐标系 $O-xyz$ 中,此旋转抛物体的质心为 $C(0,0,z_C)$,而 z_C 的计算公式应是

$$z_C=\frac{M_{xy}}{M},$$

其中 M 是抛物体的质量,M_{xy} 是抛物体关于 xy 平面的静矩.由于该抛物体是由 yz 平面上的曲边梯形 $0\leq y\leq\ z,0\leq z\leq1$ 绕 z 轴旋转而得,故其质量为

$$M=\mu V=\mu\pi\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}z=\mu\pi\int_0^1 z\,\mathrm{d}z=\frac{\mu\pi}{2};$$

而它关于 xy 平面的静矩为

$$M_{xy}=\mu\pi\int_0^1 y^2z\,\mathrm{d}z=\mu\pi\int_0^1 z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\mu\pi}{3}.$$

由此求得

$$z_C=\frac{\mu\pi}{3}\Big/\frac{\mu\pi}{2}=\frac{2}{3}.$$

由旋转曲面关于中轴的对称性,可把旋转曲面与水平桌面相切的问题简化为抛物线与水平直线相切的问题.为此求曲线 $z=y^2$ 在其上任一点 $(y_0,z_0)=(y_0,y_0^2)$ 的切线:

$$z-z_0=2y_0(y-y_0),$$

亦即

$$2y_0y-z-y_0^2=0.$$

定点 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 相距此切线的距离为

$$d=\frac{2+3y_0^2}{3\sqrt{4y_0^2+1}}.$$

现在要来求出切点 (y_0,z_0),使 d 达到最小.这只要先计算 d^2 对 y_0 的导数,并使之等于 0,即

$$\left[\frac{(2+3y_0^2)^2}{\sqrt{4y_0^2+1}}\right]'=\frac{4y_0(2+3y_0^2)(6y_0^2-1)}{(4y_0^2+1)^2}=0,$$

不难知道 $y_0=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 即为所求,并求得切点为 $(y_0,y_0^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{6}\right)$.

过此切点的切线其斜率为 $k=2y_0=\frac{2}{\sqrt{6}}=\tan\beta$,这里 β 是切线与 y 轴的交角,而我们所求的 θ 是切线(即桌面)与 z 轴的交角,故 $\theta=90°-\beta$,即

$$\theta=\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}=\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}.\qquad\square$$

说明 (1) 当抛物体处于平衡状态时,其质心在桌面上的投影即为抛物体的支撑点(即抛物面与桌面的切点),根据这个事实同样可求得该切点.

(2) 该旋转抛物体的质心与其轴截面(为一曲边梯形)的质心,两者不同(后者的质心为 $z_C=\frac{3}{5}$),希望读者千万当心.

四、习题选解

§5 习题(教材第 255 页)

1. 有一等腰梯形闸门,它的上、下两条底边各长为 10 米和 6 米,高为 20 米.计算当水面与上底边相齐时闸门一侧所受的静压力.($F=14.37\times10^6$ (N))

提示 如图 10 - 31 所示,$\mathrm{d}F=2\nu xy\,\mathrm{d}x$.

2. 边长为 a 和 b 的矩形薄板,与液面成 $\alpha(0°<\alpha<90°)$ 角斜沉于液体中.设 $a>b$,长边平行于液面,上沿位于深 h 处(图 10 - 32),液体的比重为 ν.试求薄板每侧所受的静压力.$\left(F=\nu ab\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right)\right)$

提示　$\mathrm{d}F = \dfrac{\gamma a x}{\sin\alpha}\mathrm{d}x,\ x\in[h, h+b\sin\alpha]$.

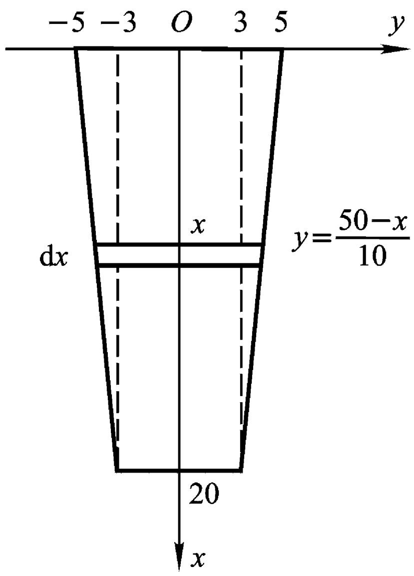


图 10 - 31

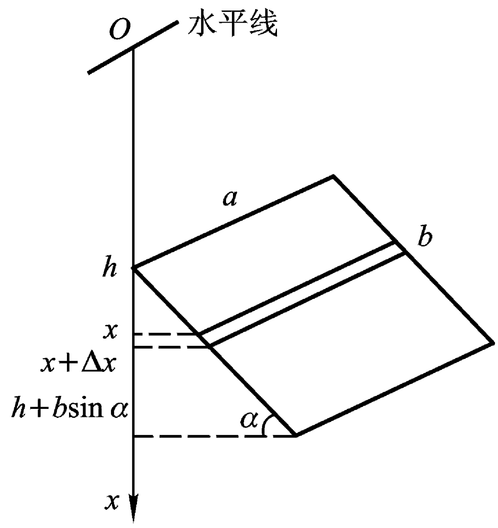


图 10 - 32

3. **直径为 6 米的一球浸入水中,其球心在水平面下 10 米处,试求球面上所受浮力** .($F = -1.11\times10^{6}$ (N))

提示　**如图 10 - 33 所示的坐标系下,球面上任一水平狭带所受水压力在 x 方向的分力为**

$$\mathrm{d}F_x = \gamma(10+x)\cdot 2\pi y\cdot \mathrm{d}s\cdot\left(-\frac{x}{3}\right)$$

$$= -2\pi\gamma(10x+x^2)\mathrm{d}x,\quad x\in[-3,3] .$$

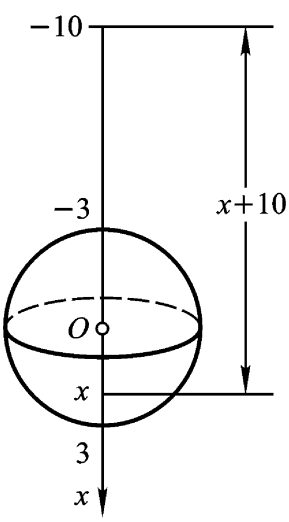


图 10 - 33

说明　**求得的合力为负值,表示合力与 x 轴所取方向相反,即为球面受到一个向上的浮力** .

4. **设在坐标轴的原点有一质量为 m 的质点,在区间 $[a, a+l]$ $(a>0)$ 上有一质量为 M 的均匀细杆 .试求质点与细杆之间的万有引力** . $F = \dfrac{kmM}{a(a+l)}$

提示　**如图 10 - 34 所示,取 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上一小段细杆看作一质点,它与质点 m 之间的引力为**

$$\mathrm{d}F = \frac{kmM}{l}\cdot\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x,\quad x\in[a, a+l] .$$

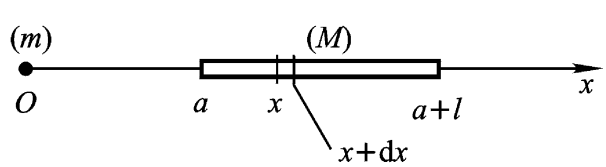


图 10 - 34

5．设有两条各长为 l 的均匀细杆在同一直线上，中间离开距离 c，每根细杆的质量为 M．试求它们之间的万有引力．$F=\dfrac{kM^2}{l^2}\ln\dfrac{(c+l)^2}{c(c+2l)}$

提示　如图 10 - 35 所示，把 $[x, x+dx]$ 上的一小段细杆看作一质点，此质点与另一细杆之间的引力（只要用 $dM=\dfrac{M}{l}dx$ 与 $x+c$ 分别替代上题结果中的 m 与 a）为

$$dF=\frac{kM^2}{l}\cdot\frac{1}{(c+x)(c+x+l)}dx,\ x\in[0, l].$$

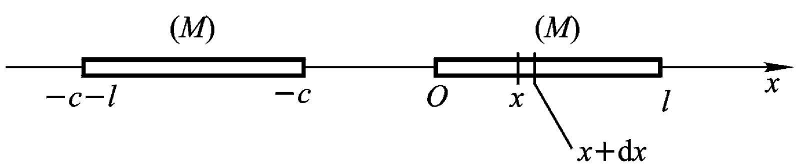


图 10 - 35

6．设有半径为 r 的半圆形导线，均匀带电，电荷密度为 δ，在圆心处有一单位正电荷．试求它们之间作用力的大小．$F_x=0,\ F_y=\dfrac{2k\delta}{r}$

提示　如图 10 - 36 所示，$dF=\dfrac{k\delta r}{r^2}d\theta,\ dF_y=dF\sin\theta,\ 0\leq\theta\leq\pi$．

7．一个半球形容器（直径为 20 米）内盛满了水．试问把水抽尽需作多少功？（$W=77\times10^6$ J）

提示　如图 10 - 37 所示，把每一水平薄层的水抽至容器外，需作的功为

$$dW=g\pi xy^2dx,\quad x\in[0,10].$$

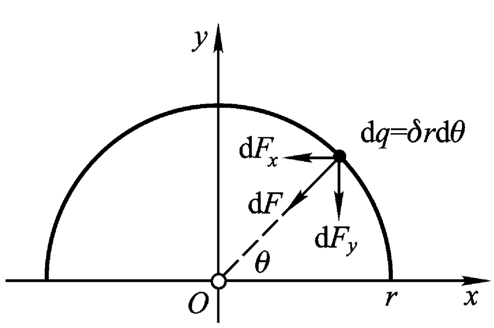


图 10 - 36

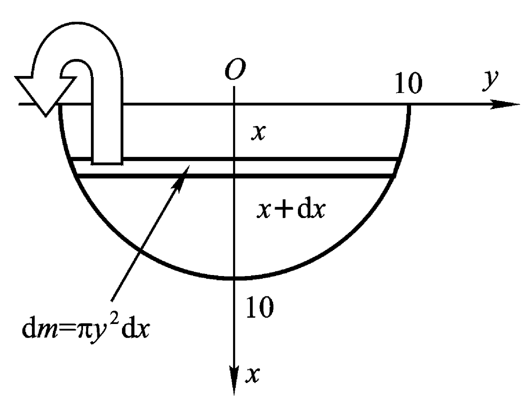


图 10 - 37

10．半径为 r 的球体沉入水中，其密度与水相同．试问将球体从水中捞出需作多少功？　$W=\dfrac{4}{3}\pi r^4g$

提示　如图 10 - 38 所示,在给出的坐标系中,当把 $dm=\pi y^2 dx$ 提升至水面以上相应位置时,由于球体比重与水相同,它处于悬浮状态,因此需要作功的位移量为 $r-x$.故

$$dW=g\,dm(r-x)=g\pi(r^2-x^2)(r-x)dx,\quad x\in[-r,r].$$

同样因为球体密度与水相同,故可把问题等同地看作将球形罐中的水从顶部全部抽出需作的功.

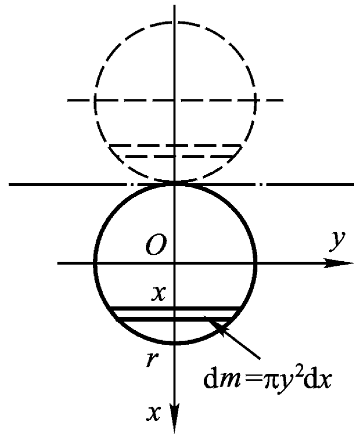


图 10 - 38

第十章测试题

(A)

1 试求由 $r=3\cos\theta$ 与 $r=1+\cos\theta$ 所围图形的公共部分的面积 A(见图 10 - 39).

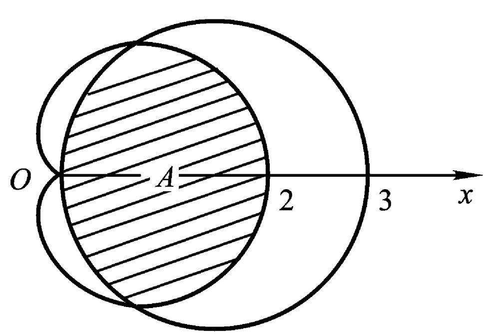


图 10 - 39

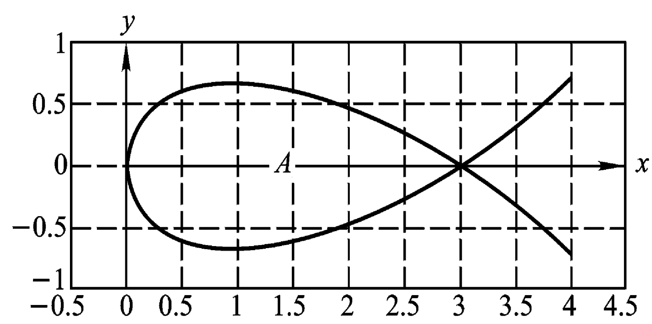


图 10 - 40

2. 已知抛物叶形线的方程为 $y^2=\frac{1}{9}x(3-x)^2$,其图形示于图 10 - 40 .试求:

(1) 被此叶形线围住部分 A 的面积(仍记为 A);

(2) A 的边界的周长 s;

(3) A 绕 x 轴旋转所得旋转体的表面积 S .

3. 如图 10 - 41 所示的量杯,其表面是由抛物线 $y = \quad 2px$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面,杯内盛有高为 h 的液体 .试问再注入体积为 V 的液体后,液面将升高多少 ?

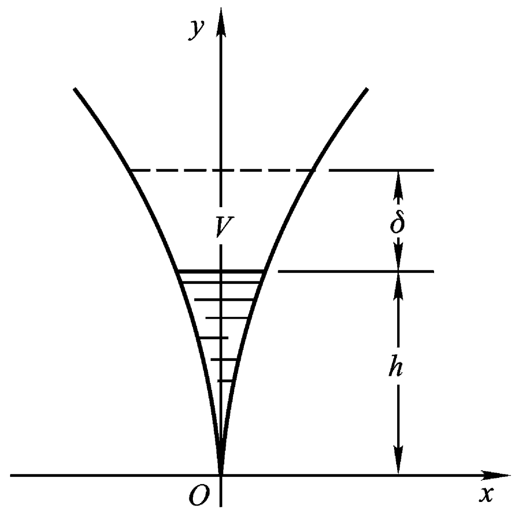


图 10 - 41

4. 设有两个质点,质量为 m_1 与 m_2 , m_1 位于坐标轴 Ox 的原点, m_2 位于坐标轴上点 $A(x = a)$.试求质点 m_2 沿坐标轴自点 A 移至点 $B(x = b)$时,克服二质点间引力所作的功(设 $0 < a < b$) .

5. 对于§3 范例 1 中的水箱,当它装满水时,计算每一椭圆形端面上所受到水的静压力 .

(**B**)

1. 试求边界曲线为

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t + m(a\cos t)^2$$
$$(a > 0,\ m \geq 0)$$

的平面图形的面积 A(曲线形状见图 10 - 42) .

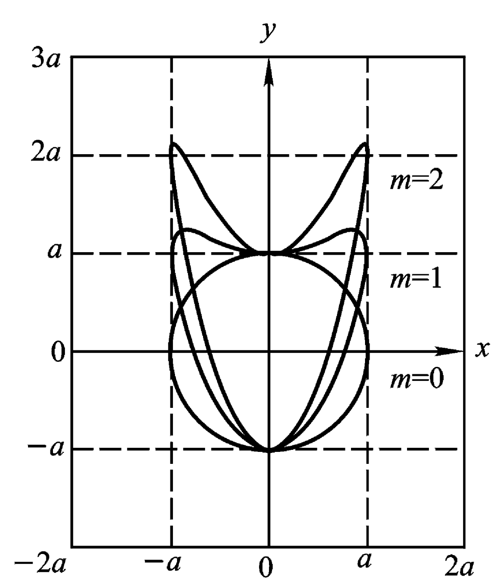


图 10 - 42

2. 极坐标曲线

$$r = a(1 - \theta^2)(a > 0,\ -\infty < \theta < +\infty)$$

如图 10 - 43(a)所示 .试求该曲线所围最小一叶的面积 A(图中(b)为其放大图)、周长 s 和它绕极轴旋转所得旋转曲面的面积 S .

3. 将椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 x 轴旋转得一旋转曲面,该曲面围成一旋转体 .将此旋转体沿 x

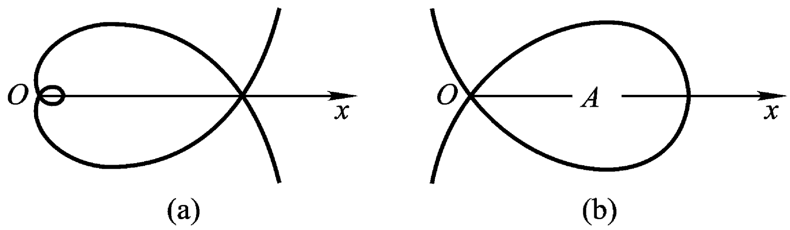


图 10 - 43

轴方向穿心打一个孔(见图 10 - 44),使剩下的环形体的体积等于原椭球体积的一半.试求钻孔的半径 r.

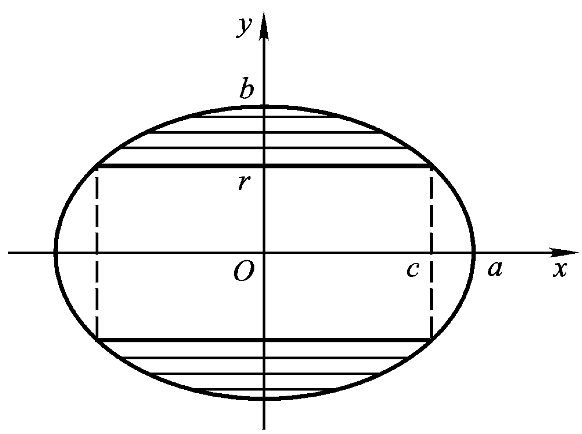


图 10 - 44

4. 已知油在输油管内流动时,在油管中心处的流速最大,越靠近管壁流速越小.由实验确定,流速 v 和考察点偏离管心的距离 x 之间,有关系:

$$v = k(r^2 - x^2),$$

其中 k 为比例常数(与油的温度、粘滞度、油压等因素有关), r 为油管半径.试求油流过油管的流量(流量 = 流速×截面积).

5. 把质量为 m 的物体从地球(其半径为 R)表面发射到高度为 h 的位置,需要花费多大的功?需要有多大的初始速度?

* 6. 有一以 $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(2,1)$ 为顶点的折线段,已知其任一点处的线密度等于该点到原点距离的平方.试分别求线段 OA、AB 和整条折线段 OAB 的质心坐标.

第十一章　反常积分

§1　反常积分概念及其性质

一、内容提要(教材§1与§2、§3相关内容)

1°　反常积分在有些书里又称为非正常积分或广义积分.反常积分概念有着很丰富的实际意义(例如教材上册第264页在引入概念时所举的两个实际例子);它在应用数学领域中起着特别重要的作用,例如今后在微分方程、控制论等课程中将会用到的积分变换(拉普拉斯变换与傅里叶变换),概率统计课程中有关分布函数与概率密度函数等基本概念,都是与反常积分有关的.

2°　无穷限反常积分中最基本的一类是

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(u)\mathrm{d}u, \tag{1.1}$$

其中 $f\in R[a,u]$, $\forall u\in[a,+\infty)$.当上述定义式中的极限存在时,则称左边的反常积分收敛(此时该反常积分才有意义);否则,当右边的极限不存在时,则称左边的反常积分发散.其余无穷限反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为收敛或发散均可类似地定义.

3°　无界函数反常积分的定义是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

其中 f 定义于 $(a,b]$,它在点 a 的任一右邻域内无界,但在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积.类似地,当(1.2)式右边的极限存在时,左边的反常积分才有意义,并称为是收敛的;否则该反常积分没有意义,并称为是发散的.另外,当 f 的无界性发生在点 b 的左邻域内时,亦可类似地定义.

4°　由反常积分定义可直接得知如下一些重要结论:

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}$ $\begin{cases} p>1 \text{ 时收敛}, \\ p\leq 1 \text{ 时发散}; \end{cases}$

(2) $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ $\begin{cases} p>1 \text{ 时收敛}, \\ p\leq 1 \text{ 时发散}; \end{cases}$

(3) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ $0<p<1$ 时收敛，$p\geq 1$ 时发散.

5° 无穷限反常积分(简称无穷积分)的主要性质如下:

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，即为变动上限积分函数 $\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 当 $u\to+\infty$ 时存在极限.由函数极限的柯西准则，推知该无穷积分收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon>0$, $\exists G>a$, 只要 u_1、$u_2>G$，便有

$$\left|\int_a^{u_2} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{u_1} f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon. \tag{1.3}$$

(2) 线性性质: 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则有

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

显然，此性质可推广为任何有限个无穷积分的情形.

(3) 区间可加性: 对任何 $b>a$，恒有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.5}$$

此式左、右两边的无穷积分同时收敛(发散).

(4) 把(1.5)式改写为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x+\int_u^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

并令 $u\to+\infty$，由无穷积分收敛定义的(1.1)，此式左边的无穷积分收敛，等同于

$$\lim_{u\to+\infty}\int_u^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

亦即 $\forall \varepsilon>0$, $\exists G>a$, 当 $u>G$ 时，总有

$$\left|\int_u^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon. \tag{1.6}$$

由(1.3)与(1.6)，便可对 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的几何意义作出清楚的描述——(1.3)表示只要 $[a,+\infty)$ 中的内闭区间 $[u_1,u_2]$ 离点 a 足够远，则在其上的定积分之绝对值就能任意小(习惯上说 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的充分远处的任一"片段"都能任意小).而(1.6)式也可理解为当 u 充分大时，"余部" $\left|\int_u^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|$ 总能任意地小.

(5) 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛，并有

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

此性质就是说:“绝对收敛者必收敛”.收敛而不绝对收敛的无穷积分,称之为条件收敛.(注意:不要把这个性质与定积分中的性质‘可积必绝对可积’相混淆,这是两个完全不同的问题.)

6° 无界函数反常积分(简称瑕积分)的主要性质如下:

(1) 瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(a 为瑕点)收敛的充要条件是:$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,只要 u_1、$u_2 \in (a, a+\delta)$,总有

$$\left|\int_{u_1}^b f(x)\mathrm{d}x - \int_{u_2}^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

(2) 线性性质:若 $\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$(瑕点同为 a 或 b)都收敛,则有

$$\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 区间可加性:对任何 $c\in(a,b)$,恒有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.7}$$

此式左、右两边的瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$(瑕点为 a)同时收敛(发散),而 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 为定积分.

(4) 把(1.7)式改写为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^u f(x)\mathrm{d}x + \int_u^b f(x)\mathrm{d}x,$$

并令 $u\to a^+$,由瑕积分收敛定义的(1.2),此式左边的瑕积分收敛,等同于

$$\lim_{u\to a^+}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(5) 若 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 必定也收敛(瑕点均为 a 或 b).亦即“绝对收敛者必收敛”.收敛而不绝对收敛的瑕积分,同样称为条件收敛.

二、释疑解惑

问题 1 试问 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 有无联系?

答 首先,$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 肯定不是 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分条件,例如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$,但 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ 为发散.那么,$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 是否是 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要条件呢?也不是!

一个在多种场合可用来澄清概念的反例,是由

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[n-1, n-\dfrac{1}{n2^n}\right),\\ n, & x\in\left[n-\dfrac{1}{n2^n}, n\right),\end{cases}\quad n=1,2,\cdots$$

所对应的$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$($f$ 的图像示于图 11 - 1).

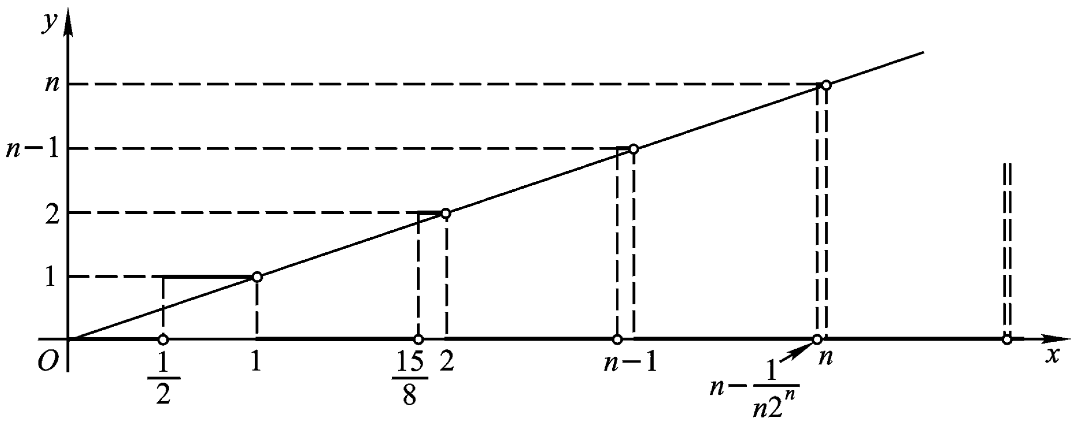


图 11 - 1

不仅 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在,而且 $f(x)$在$[0,+\infty)$上甚至是无界的;然而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n2^n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1(\text{收敛}).\end{aligned}$$

注　这里需要指出上式第一个等号成立的理由:当 $f(x)\geq 0$, $x\in[a,+\infty)$时,变限积分 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 关于 u 是单调递增的,故有

$$\lim_{u\to+\infty}F(u)=\lim_{n\to+\infty}F(n).$$

后面的范例 2 与范例 3 是这里问题 1 的继续和补充.

问题 2　试对绝对收敛与条件收敛的本质区别加以说明.

答　首先,反常积分的绝对收敛与条件收敛是在反常积分收敛的前提下互相对立的两个概念,相互之间没有蕴含关系(特别是,说:"绝对收敛者必定条件收敛"那是绝对错误的).

再有,从收敛的充要条件(1.3)中去看,绝对收敛表示当 G 足够大时,在 $x=G$右边的任意一个曲边梯形 $0\leq y\leq|f(x)|$, $u_1\leq x\leq u_2$ 的面积总能小于予先给出的任意小的正数 ε,即

$$\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon\quad(G\leq u_1<u_2);\tag{1.8}$$

而条件收敛的反常积分虽然(1.3)式同样成立,但(1.8)式不能成立,这说明

$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right|$ 之所以能任意地小,主要依赖 $f(x)$ 的正、负值互相抵消所起的作用,例如后面将会知道的一些条件收敛的无穷积分:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\,(0 < p \leq 1),\ \int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x,\ \int_0^{+\infty} x\sin x^4 \mathrm{d}x,$$

从其被积函数的直观图形(图 11 - 2)上就能理解这个特征.

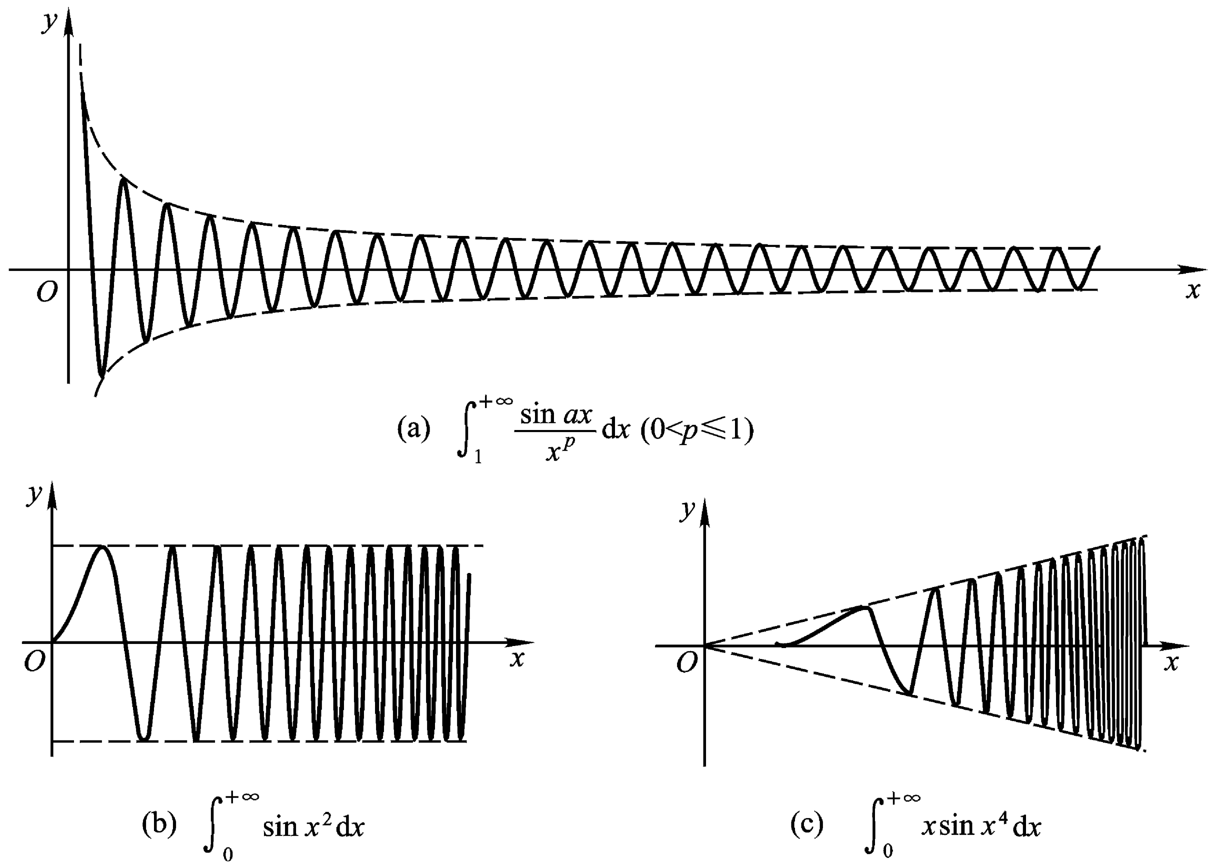


图 11 - 2

后面的范例 6 对于进一步理解条件收敛的本质也是很有帮助的.

三、范例解析

例 1 证明:若 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = f(x),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = -f(x).$$

证 $\forall a$,由条件 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = J_1$, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = J_2$ 都存在;再由 f 连续,便可证得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J_1 + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{a} f(t)\mathrm{d}t+J_2 = -f(x).$$ □

例 2 设$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.证明:

(1) 若极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$;

(2) 若 f 在$[a,+\infty)$上为单调,则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证 (1) 设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.若 $A\neq 0$(设 $A>0$),则由极限保号性,$\exists\ G>a$,当 $x\geq G$ 时满足

$$f(x)\geq\frac{A}{2}>0.$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^G f(x)\mathrm{d}x+\int_G^u f(x)\mathrm{d}x\\&\geq\int_a^G f(x)\mathrm{d}x+\frac{A}{2}(u-G),\end{aligned}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x=+\infty.$$

而这与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛相矛盾,故 $A=0$.

(2) 若 f 在$[a,+\infty)$上单调而无界(设为递增而无上界),则$\forall\ A>0$,$\exists\ G>a$,当 $x\geq G$ 时,使 $f(x)\geq A$.类似于(1)的证明,推知$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=+\infty$,矛盾.所以 f 在$[a,+\infty)$上单调而有界,则存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.依据已证得的命题(1),$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. □

***例 3** 证明:若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,且 f 在$[a,+\infty)$上一致连续,则必有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证 由 f 在$[a,+\infty)$上一致连续,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$(设 $\delta\leq\varepsilon$),当 $x',x''\in[a,+\infty)$且$|x'-x''|<\delta$时,总有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

又因$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,故对上述 δ,$\exists\ G>a$,当 $x_1,x_2>G$ 时,有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\delta^2}{2}.$$

现对任何 $x>G$,取 $x_1,x_2>G$,且使 $x_1<x<x_2$,$x_2-x_1=\delta$.此时由

$$|f(x)\delta|=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}t-\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\le\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-f(t)|\,\mathrm{d}t+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\delta+\frac{\delta^2}{2}\le\varepsilon\delta,$$

便得 $|f(x)|<\varepsilon,\ x>G$. 这就证得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. □

说明 我们由例 2 与例 3(结合前面讨论过的问题 1)知道,在 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 为收敛的前提下,再添加上一些合适的条件,便能保证有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 这种合适的附加条件,除了以上二例所示的之外,还有教材 §1 习题第 6 题(第 270 页)指出的"$\int_a^{+\infty}f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛".

例 4 说出以下命题成立的理由:

"若 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x=A$($n$ 为正整数)."并举例说明此命题一般不可逆.

解 设 $F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$, 由条件

$$\lim_{u\to+\infty}F(u)=A.$$

根据函数极限的归结原则(教材第 52 页),对一切满足 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$ 的数列 $\{u_n\}$,恒有

$$\lim_{n\to\infty}F(u_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^{u_n}f(x)\,\mathrm{d}x=A,$$

特别取 $u_n=n$ 时,亦有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x=A$.

反之不真,例如

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in\left[n-1,n-\dfrac{1}{2}\right),\\ 1, & x\in\left[n-\dfrac{1}{2},n\right),\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

显然, $I(n)=\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x=0$; 然而却因

$$I\left(n+\frac{1}{2}\right)=I(n)+\int_n^{n+\frac{1}{2}}(-1)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2},$$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty}I\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\ne\lim\limits_{n\to\infty}I(n)$, 从而 $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在.

如果在 $[a,+\infty)$ 上 $f(x)$ 不变号,则 $F(u)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是单调的(当 $f(x)\ge0$ 时 $F(u)$ 递增,当 $f(x)\le0$ 时 $F(u)$ 递减). 对于单调函数而言,只要有一个数列 $u_n\to+\infty(n\to\infty)$, 使得 $F(u_n)\to A(n\to\infty)$, 便能保证 $\lim\limits_{u\to+\infty}F(u)=A$. 所以,

在 $f(x)$不变号的前提下,本例所讨论的命题可逆 . □

例 5 试求下列反常积分的值:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$; (2) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 应用不定积分递推公式(教材第 193 页上的公式(7)):

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}J_{n-1},$$

得到

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}\text{①}$$

$$=\frac{2n-3}{2(n-1)}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n-1}},\ n=2,3,\cdots .$$

由于 $I_1=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$,因此求得

$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{1}{2}I_1=\frac{(2n-3)!!\pi}{(2n-2)!!2},\ n=2,3,\cdots .$$ □

(2) 利用例 4,并通过分段积分来计算:

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{(2n+2)\pi}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x-\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_{(2k+1)\pi}^{2k\pi}+\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-2k\pi}+2\mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}+\mathrm{e}^{-(2k+2)\pi}\right]=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2(\mathrm{e}^{\pi}-1)} .$$ □

---

① 本式中的 $\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}\bigg|_0^{+\infty}$,意即 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}\bigg|_0^{u}$(以后同此).

(3) 此为瑕积分,瑕点为 0 .令 $x=2t$,化为

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x = \lim_{u\to 0^+}\int_u^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x \\
&= 2\lim_{u\to 0^+}\int_{\frac{u}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t\mathrm{d}t \\
&= 2\lim_{u\to 0^+}\int_{\frac{u}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t)\mathrm{d}t \\
&= 2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\mathrm{d}t+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2+2I .
\end{aligned}
$$

由此求得 $I=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$. □

例 6 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为条件收敛 .证明:

(1) $\int_a^{+\infty}[|f(x)|+f(x)]\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}[|f(x)|-f(x)]\mathrm{d}x$ 都为发散;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_a^x[|f(t)|+f(t)]\mathrm{d}t}{\int_a^x[|f(t)|-f(t)]\mathrm{d}t}=1$.

证 (1) 用反证法 .倘有其一 例如 $\int_a^{+\infty}[|f(x)|-f(x)]\mathrm{d}x$ 收敛,则由收敛的线性性质推得

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}[|f(x)|-f(x)+f(x)]\mathrm{d}x$$

亦收敛 .而这与 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为条件收敛的假设相矛盾,所以这两个无穷积分都是发散的,且

$$\int_a^{+\infty}[|f(x)|+f(x)]\mathrm{d}x=+\infty=\int_a^{+\infty}[|f(x)|-f(x)]\mathrm{d}x,$$

意即它们都是正无穷大量 .

(2) 这里是要证明(1)中两个正无穷大量是等价无穷大量 .为此考察

$$\frac{\int_a^x[|f(t)|+f(t)]\mathrm{d}t}{\int_a^x[|f(t)|-f(t)]\mathrm{d}t}-1=\frac{2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^x[|f(x)|-f(t)]\mathrm{d}t}, \tag{1.9}$$

由假设与(1)的结论,已知

$$\lim_{x\to+\infty} 2\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

为一常数,而

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x [|f(t)| - f(t)]\,\mathrm{d}t = +\infty,$$

所以(1.9)式左边当 $x\to+\infty$时的极限为 0,故结论得证 . □

注　本例(1)中的两个无穷积分,其被积函数$|f(x)| + f(x)$与$|f(x)| - f(x)$的特征分别是保留了 $f(x)$的正值与负值(相差 2 倍) .正如前面讨论问题 2 时所言,条件收敛的反常积分靠的是正、负相消才能收敛,如果失去了“相消”作用(如当前情形),就立刻变成发散,这就是条件收敛的本质所在 .

四、习题选解

§1　习题(教材上册第 269 页)

4. 举例说明:$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛且 f 在$[a, +\infty)$上连续时,不一定有 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

提示　例如可把图 11 - 1 所示的 $f(x)$设法改造成连续函数 .

6. 证明:若 f 在$[a, +\infty)$上可导,且$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛,则 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

提示　由$\int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty} f(u) - f(a)$存在,利用上题推出 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

§3　习题(教材上册第 279 页)

1. 写出性质 3 的证明 .

提示　由瑕积分$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$($a$为瑕点)收敛的柯西准则(必要性),$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $a<x_1<x_2<a+\delta<b$时,有

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

利用定积分性质,又有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

4. 计算下列瑕积分的值(其中 n 为正整数):

(1)$\int_0^1 (\ln x)^n\,\mathrm{d}x\ (=(-1)^n n!)$;

(2)$\int_0^1 \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x\ = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

提示 (1) 先导出递推关系:

$$I_n=\int_0^1(\ln x)^n\,\mathrm{d}x=-nI_{n-1};$$

(2) 令 $t=\sqrt{1-x}$,先化为

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=2\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t.$$

再导出递推关系

$$I_n=\frac{2\cdot 2n}{2n+1}I_{n-1}.$$

5. 利用 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$,证明 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

提示

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin x)+\ln(\cos x)]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2,\end{aligned}$$

再令 $2x=\theta+\frac{\pi}{2}$,即可证得结论.

另外,在前面范例 5(3)也已求得此反常积分的值.

6. 利用上题结果,证明:

(1) $\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$;

(2) $\int_0^{\pi}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi\ln 2$.

提示 (1) 类似于定积分,此处也有

$$J=\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

令 $t=\theta-\frac{\pi}{2}$,经变换后得到

$$J=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,\mathrm{d}t.$$

(2)

$$J=\int_0^{\pi}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\theta[\ln(1-\cos\theta)]'\,\mathrm{d}\theta,$$

经分部积分后将得

$$\begin{aligned}J&=\pi\ln 2-\int_0^{\pi}\ln(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\pi\ln 2-\int_0^{\pi}\ln\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$= \cdots = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\mathrm{d}t.$$

§2 反常积分收敛判别

一、内容提要 (教材 § 2、§ 3 相关内容)

以下 1°至 6°是关于无穷积分收敛(或绝对收敛)的判别命题.

1° (比较法则) 若 $\forall u > a$, f、$g \in R[a, u]$, 且

$$|f(x)| \leq g(x), x \in [a, +\infty),$$

则当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 必收敛; 当 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 必发散.

2° 若 $\forall u > a$, f、$g \in R[a, u]$, $g(x) > 0$, 且

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = c,$$

则有:

(1) 当 $0 < c < +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛态;

(2) 当 $c = 0$ 时, 由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可保证 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 也收敛;

(3) 当 $c = +\infty$ 时, 由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散必导致 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 也发散.

3° 若 $\forall u > a$, $f \in R[a, u]$, 则有:

(1) 当 $|f(x)| \leq \frac{1}{x^p}$, 且 $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $|f(x)| \geq \frac{1}{x^p}$, 且 $p \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

4° 若 $\forall u > a$, $f \in R[a, u]$, 且

$$\lim_{x \to +\infty} x^p |f(x)| = \lambda,$$

则有:

(1) 当 $0 \leq \lambda < +\infty$, $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $0 < \lambda \leq +\infty$, $p \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

5°(狄利克雷判别法) 若 $F(u) = \int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, $g(x)$ 当 x

$\to +\infty$时单调趋于 0,则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

由狄利克雷判别法容易得知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^p}\mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_1^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^p}\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

当 $0<p\leq 1$ 时收敛(且为条件收敛);此外,如

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x,\quad \int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x,\quad \int_0^{+\infty}x\sin x^4\mathrm{d}x$$

等无穷积分,因能变换成形如(2.1)中的积分(令 $t=x^2$),所以也是条件收敛的.再如

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^p}\mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

当 $0<p\leq 1$ 时,则因$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$发散,$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛,使得无穷积分(2.2)是发散的.

6°(阿贝尔判别法) 若$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,$g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界,则$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

以下 7°至 12°是关于瑕积分收敛(或绝对收敛)的判别命题.

7°(比较法则) 若 f 与 g 的瑕点同为 a,都在任何$[u,b]$ $(a,b]$上可积,且满足

$$|f(x)|\leq g(x),\ x\in(a,b],$$

则当$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛时,$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$必收敛;当$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$发散时,$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$必发散.

8° 若 $\forall[u,b]$ $(a,b]$, f、$g\in R[u,b]$,瑕点同为 a, $g(x)>0$,且

$$\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{g(x)}=c,$$

则有:

(1) 当 $0<c<+\infty$时,$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同敛态;

(2) 当 $c=0$ 时,由$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛可保证$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$也收敛;

(3) 当 $c=+\infty$时,由$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散必导致$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$也发散.

9° 若 $\forall[u,b]$ $(a,b]$, $f\in R[u,b]$,瑕点为 a,则有:

(1) 当$|f(x)|\leq\frac{1}{(x-a)^p}$,且 $0<p<1$ 时,$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$收敛;

(2) 当 $|f(x)|\geq\frac{1}{(x-a)^p}$，且 $p\geq1$ 时，$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散 .

10° 若 " $[u,b]$ $(a,b]$，$f\in R[u,b]$，瑕点为 a，且

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p|f(x)|=\lambda,$$

则有：

(1) 当 $0\leq\lambda<+\infty$，$0<p<1$ 时，$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 当 $0<\lambda\leq+\infty$，$p\geq1$ 时，$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散 .

* 11°(狄利克雷判别法) 若 $F(u)=\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$ 在 $(a,b]$ 上有界，$g(x)$ 当 $x\to a^+$ 时单调趋于 0，则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 .

* 12°(阿贝尔判别法) 若以 a 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调有界，则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 .

二、释疑解惑

问题 1 试对无穷积分收敛判别的一般步骤作一小结 .

答 首先使用 1°～4°来判别无穷积分是否为绝对收敛，当判得 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 自然也收敛；当判得 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散时，要想知道 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是否条件收敛，这就得依赖别的方法(例如狄利克雷判别法、阿贝尔判别法，或者直接使用收敛定义或收敛的柯西准则) .

关于瑕积分收敛判别的一般步骤也可类似地进行 .

问题 2 狄利克雷判别法与阿贝尔判别法是否专门是用来判别条件收敛的？

答 否 .例如教材上册第 274 页例 3 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛时，解(ii)虽然是对情形 $0<p\leq1$ 的，但同样适用于 $p>1$ 时为收敛的讨论 .再如命题：

$$“\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\text{ 收敛 }\quad\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x\text{ 收敛}”$$

容易用阿贝尔判别法进行证明，但它与绝对收敛还是条件收敛毫无关系 .(另见范例 4)

问题 3 在确定反常积分类型时有哪些值得注意的地方？

答 (1) 有时，无穷积分与瑕积分存在于同一个反常积分中，例如

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{x-1}\mathrm{d}x,$$

这个形式上的无穷积分,其实还含有瑕点 $x=1$ 与 $x=0$(当 $\alpha<0$ 时).这时需要先把它分拆成几个单纯形式的反常积分:

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^\alpha}{x-1}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^\alpha}{x-1}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{x^\alpha}{x-1}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{x^\alpha}{x-1}\mathrm{d}x,$$

当且仅当这四个反常积分都收敛时,原来的反常积分才是收敛的.显然,其中的瑕积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^\alpha}{x-1}\mathrm{d}x\quad 与\quad\int_1^2\frac{x^\alpha}{x-1}\mathrm{d}x$$

都是发散的,故原来的反常积分亦为发散.

(2) 不要把瑕积分混淆为定积分,例如 $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$.其实它是一个以 $x=0$ 为瑕点的瑕积分,必须先化为

$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x}{x^3}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3},$$

而后讨论等号右边的两个瑕积分,当且仅当它们都收敛时,等号左边的瑕积分才是收敛的.显然,这里两个瑕积分(等号右边)都是发散的,故原来的瑕积分亦为发散.需要注意的是,不要误将这个瑕积分当作是定积分,并利用奇函数在$[-1,1]$上的积分值为 0,轻率地得出“$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=0$”这样一个错误的结论.

问题 4　两个发散的无穷积分的代数和是否必为发散?

答　不一定.如果 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=+\infty$,则有

$$\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=+\infty(发散);$$

至于 $\int_a^{+\infty}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ 是否收敛,则无肯定结论.具体例子可参见后面范例3(1).

三、范例解析

例 1　证明:若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=A$ 存在,则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 必定绝对收敛.又若把 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 改设为条件收敛,试举出反例说明 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛.

证　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=A$,可知当 x 充分大时有

$$|g(x)|\leq M=\max\{|A+1|,|A-1|\}(x>G),$$

从而又有

$$|f(x)g(x)|\leq M|f(x)|,\ x>G.$$

再由 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,根据比较法则便证得 $\int_a^{+\infty}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.

例如对于条件收敛的 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 和

$$g(x)=1+\frac{\sin x}{x}\to 1\ (x\to+\infty),$$

得到

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin^2 x}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,而

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right)\mathrm{d}x$$

显然是发散的,所以 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 也是发散的无穷积分. □

例 2 证明:当 $x\to+\infty$ 时, $\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ 和 $\left(x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)^{-1}$ 是等价无穷小量.

证 显然, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)^{-1}=0$; 又因

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=0,$$

所以 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ 收敛,由收敛定义又知(参见§1 的(1.6)式)

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=0.$$

这说明当 $x\to+\infty$ 时,它们都是无穷小量;下面再来证明它们是等价无穷小量.

借助§1 例 1 和洛必达法则,可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t}{\left(x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)^{-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(1+x^{-2})}=1,$$

故结论成立. □

例 3 讨论下列反常积分的敛散性:

(1) $\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+m}-\frac{m}{x+1}\right)\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x\cos^m x}$; (4) $\int_0^1\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) 注意这里的 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2+m}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{m}{x+1}\mathrm{d}x\ (m\neq 0)$ 都是发散的无穷积分,两者之差没有收敛或发散的肯定结论.为此,需要先把被积函数合成为一个分式:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+m}-\frac{m}{x+1}=\frac{(1-m)x^2+x-m^2}{(x^2+m)(x+1)}.$$

对于充分大的 x, $f(x)$ 保持与 $(1-m)$ 相同的正、负号,因此 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛与绝对收敛是同一回事.

当 $m=1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 f(x)=1$, 故 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 为收敛.

当 $m\neq 1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}x|f(x)|=|1-m|\neq 0$, 故 $\int_1^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同为发散. □

(2) 这里的 $g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^m}>0$, $x\in(0,+\infty)$, 且当 $m>2$ 时 $x=0$ 为其瑕点.故设

$$J=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=J_1+J_2.$$

对于 J_1, 当 $m\leq 2$ 时为定积分(只要补充定义 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, g 在 $[0,1]$ 上连续); 当 $2<m<3$ 时,由于 $m-2<1$, 且

$$\lim_{x\to 0^+}x^{m-2}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1,$$

故此时 J_1 收敛; 又当 $m\geq 3$ 时,由于

$$\lim_{x\to 0^+}xg(x)=\begin{cases}1, & m=3,\\ +\infty, & m>3,\end{cases}$$

故 J_1 发散.总之,仅当 $m<3$ 时, J_1 收敛.

对于 J_2, 当 $m>1$ 时,由于

$$\frac{\sin^2 x}{x^m}\leq\frac{1}{x^m},$$

因此 J_2 收敛; 而当 $0<m\leq 1$ 时,由于

$$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^m}\mathrm{d}x,$$

以及 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^m}$ 发散, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^m}\mathrm{d}x$ 收敛,可知此时 J_2 发散; 又当 $m\leq 0$ 时,由于

$$\frac{\sin^2 x}{x^m}\geq\sin^2 x,\quad \int_1^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}x\ \text{发散},$$

从而 J_2 亦发散.总之,仅当 $m>1$ 时, J_2 收敛.

综合对 J_1 与 J_2 的讨论,当且仅当 $1 < m < 3$ 时 J 为收敛 . □

(3) 设 $h(x) = \dfrac{1}{\sin^n x\cos^m x}$,显见 $x = 0$ 与 $\dfrac{\pi}{2}$ 都是 h 的瑕点 .为此记

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)\mathrm{d}x = I_1 + I_2 .$$

对于 I_1,当取 $p \geq n$ 时,有

$$\lim_{x\to 0^+} x^p h(x) = \lambda < +\infty (\lambda = 0 \text{ 或 } 1) .$$

故当 $n < 1$ 时(可使上述 p 满足 $n \leq p < 1$), I_1 收敛;而当 $n \geq 1$ 时,则因 $h(x) \geq \dfrac{1}{x^n}$, I_1 发散 .

对于 I_2,若令 $t = \dfrac{\pi}{2} - x$,则

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin^m t\cos^n t} .$$

类似于对 I_1 的讨论, I_2 当 $m < 1$ 时收敛, $m \geq 1$ 时发散 .

综合 I_1 与 I_2 的结果,当且仅当 n 与 m 都小于 1 时,所考察的瑕积分收敛(且因 $h(x) > 0$,自然也为绝对收敛) . □

(4) 事实上,经变换 $x = \dfrac{1}{t}$,就能把此瑕积分化为无穷积分:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t,$$

而后者是条件收敛的 . □

例 4 证明:若 $\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 亦必收敛 .

分析 由于条件中没有指出 $f(x)$ 是否保持定号,也没有说 $\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 是绝对收敛,因此不能用比较法则错误地做成:

$$|f(x)| \leq |xf(x)|, x \in [1, +\infty),$$

且 $\int_1^{+\infty} |xf(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,故 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛 .

正确的做法应该借助狄利克雷判别法或阿贝尔判别法来证明 .

证 由于

$$f(x) = \frac{1}{x}\cdot xf(x), x \in [1, +\infty),$$

而 $\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $\dfrac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调有界,故由阿贝尔判别法证得 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 . □

* **例 5** 证明关于瑕积分的狄利克雷判别法(见内容提要中的 11°).

证 类似于例 3 的(4),也可以把瑕积分中的问题经变换后化为无穷积分中的已经解决了的问题.为此令 $x=a+\frac{1}{t}$,得到

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}g\left(a+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

记 $F(t)=f\left(a+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}$,由条件知道它在任意区间 $\left[\frac{1}{b-a},u\right]$ 上可积,且

$$\left|\int_{\frac{1}{b-a}}^{u} F(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{a+\frac{1}{u}}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq M.$$

再有 $g\left(a+\frac{1}{t}\right)$ 在 $\left[\frac{1}{b-a},+\infty\right)$ 上单调,且

$$\lim_{t\to+\infty} g\left(a+\frac{1}{t}\right) = \lim_{x\to a^+} g(x)=0.$$

应用无穷积分的狄利克雷判别法(内容提要之 5°),推知(2.3)式右边的无穷积分收敛,从而此式左边的瑕积分也收敛. □

四、习题选解

§2 习题(教材上册第 275 页)

1. 证明定理 11.2 及其推论 1.

提示 由$\int_a^{+\infty} g(x)$收敛,$g(x)\geq 0$,可知

$$G(u)=\int_a^u g(x)\mathrm{d}x,\ u\in[a,+\infty)$$

为递增函数且有上界.于是$\int_a^u |f(x)|\mathrm{d}x$ 同样递增且有上界.

当 $g(x)>0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=c$ 时,分别有:

(1) 若 $0<c<+\infty$,则 x 充分大时有

$$0<\frac{c}{2}<\frac{|f(x)|}{g(x)}<\frac{3}{2}c.$$

(2) 若 $c=0$,则 x 充分大时有

$$0\leq\frac{|f(x)|}{g(x)}<\varepsilon.$$

(3) 若 $c=+\infty$,则 x 充分大时有

$$\frac{|f(x)|}{g(x)}>M.$$

3. 设 f、g、h 在$[a,+\infty)$上连续,且成立 $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$.证明:

(1) 若$\int_a^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$都收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$也收敛;

(2) 又若$\int_a^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = A$,则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = A$.

提示 由$0 \leq g(x) - f(x) \leq g(x) - h(x)$出发,用比较法则证明(1);用收敛定义证明(2).

4. 讨论下列无穷积分的收敛性:

(5)$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$($n > 1$时收敛,$n \leq 1$时发散);

(6)$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$($m$、$n \geq 0$) $n - m \begin{cases} > 1 \text{ 时收敛} \\ \leq 1 \text{ 时发散} \end{cases}$.

提示 (5) $n = 1 + \delta > 1$时,有

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1+\frac{\delta}{2}} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^{1+\delta}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{\delta}{2}}} = 0;$$

$n \leq 1$时,$\lim_{x\to+\infty} x^n \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^n} = +\infty$.

(6) $\lim_{x\to+\infty} x^{n-m} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} = 1$.

5. 讨论下列无穷积分为绝对收敛还是条件收敛:

(3)$\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x}{100+x}\,\mathrm{d}x$(条件收敛); (4)$\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\,\mathrm{d}x$(条件收敛).

提示 (3) 满足狄利克雷判别法条件;又有

$$\left|\frac{x\cos x}{100+x}\right| \geq \frac{x\cos^2 x}{2x} = \frac{1+\cos 2x}{4x}.$$

(4) 满足狄利克雷判别法条件;又有

$$\left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\right| \geq \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}(1 - \cos 2x),$$

其中$\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x} > \frac{1}{2\ln x} > \frac{1}{2x}$,$\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\,\mathrm{d}x$发散,而$\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)\cos 2x}{2\ln x}\,\mathrm{d}x$收敛.

8. 证明:若f是$[a, +\infty)$上的单调函数,且$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,则$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$,且

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right), x \to +\infty.$$

提示 前者可参见本章§1例2(2);后者可利用柯西准则," $\varepsilon > 0$, v $x_0 \geq a$,当$\frac{x}{2} > x_0$时

$$\frac{1}{2}xf(x)=\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(x)\mathrm{d}t\leq\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

(这里假设 f 为单调减函数,且 $f(x)\geq 0$.)

9. 证明:若 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

提示　证明见本章§1 例 3 .

10. 利用狄利克雷判别法证明阿贝尔判别法 .

提示　已知 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 单调有界,欲证 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 .

由条件,可设 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=A$,并令

$$h(x)=g(x)-A,$$

当 $x\to+\infty$ 时 $h(x)$ 单调趋于 0 .再由 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,可知 $F(u)=\int_a^{u}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界 .故由狄利克雷判别法,推知

$$\int_a^{+\infty}f(x)h(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x)[g(x)-A]\mathrm{d}x$$

收敛 .

§3　习题(教材上册第 279 页)

2. 写出定理 11.6 及其推论 1 的证明 .

提示　由条件 $|f(x)|\leq g(x)$,可知

$$F(u)=\int_u^{b}|f(x)|\mathrm{d}x\quad 与\quad G(u)=\int_u^{b}g(x)\mathrm{d}x$$

在 $(a,b]$ 上都是单调函数;且因 $\lim\limits_{u\to a^+}G(u)$ 存在,可知 $G(u)$ 有界;再由 $F(u)\leq G(u)$,又知 $F(u)$ 也有界,故 $\lim\limits_{u\to a^+}F(u)$ 也存在 .

推论 1 的证明类似于定理 11.2 的推论 1(参见前面§2 习题第 1 题) .

总练习题提示与解答

(教材上册第 280 页)

2. 证明下列不等式:

(1) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}<\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}$;

(2) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)<\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<1+\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

提示　(1) 利用 $0<x<1$ 时有

$$\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2) 利用

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx > \int_0^1 e^{-x^2} dx > \int_0^1 xe^{-x^2} dx,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} < 1 + \int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx .$$

3. 计算下列反常积分的值:

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx (=0)$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan\theta) d\theta (=0)$.

提示 (3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = I_1 + I_2$.经变换 $x = \frac{1}{t}$,可得 $I_2 = -I_1$.

(4) 经变换 $x = \tan\theta$,化为(3) .

4. 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\lambda} dx (b \neq 0)$, λ 取何值时为绝对收敛或条件收敛 .

提示 不妨设 $b > 0$.令 $bx = t$,则

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\lambda} dx = b^{\lambda-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\lambda} dt$$

$$= b^{\lambda-1} \left(\int_0^1 \frac{\sin t}{t^\lambda} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\lambda} dt \right)$$

$$= b^{\lambda-1} (J_1 + J_2),$$

其中 J_2 当 $\lambda > 0$ 时收敛, $\lambda > 1$ 时绝对收敛, $\lambda \leq 0$ 时发散 .关于 J_1 的讨论如下:

$\lambda \leq 1$ 时为定积分; $1 < \lambda < 2$ 时绝对收敛; $\lambda \geq 2$ 时发散 .

综上, J 在 $1 < \lambda < 2$ 时为绝对收敛; $0 < \lambda \leq 1$ 时为条件收敛 .

5. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $0 < a < b$.试证:

(1) 若 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$,则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - k] \ln \frac{b}{a};$$

(2) 若 $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛,则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} .$$

证 $\forall \varepsilon > 0$, $A > 0 (0 < \varepsilon < A)$,有

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = a\int_\varepsilon^A \frac{f(ax)}{ax} dx - b\int_\varepsilon^A \frac{f(bx)}{bx} dx$$

$$= \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\varepsilon}^{bA} \frac{f(t)}{t} dt$$

$$= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t - \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$$

$$= f(\xi)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{t} - f(\eta)\int_{aA}^{bA} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= f(\xi)\ln \frac{b\varepsilon}{a\varepsilon} - f(\eta)\ln \frac{bA}{aA}$$

$$= [f(\xi) - f(\eta)]\ln \frac{b}{a},$$

其中 $a\varepsilon \leq \xi \leq b\varepsilon$, $aA \leq \eta \leq bA$.由于

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi) = f(0), \quad \lim_{A\to +\infty} f(\eta) = k,$$

因此有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ A\to +\infty}} \int_\varepsilon^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \mathrm{d}x$$

$$= [f(0) - k]\ln \frac{b}{a} .$$

(2) 由$\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$收敛,据柯西准则,当 $A\to +\infty$时,有

$$\lim_{A\to +\infty} \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t = 0 .$$

把(1)的推导过程改为

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} - \lim_{A\to +\infty} \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\xi)\ln \frac{b}{a}$$

$$= f(0)\ln \frac{b}{a} .$$

6. 证明下述命题:

(1) 设 f 为 $[a, +\infty)$ 上的非负连续函数,若$\int_a^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛 .

(2) 设 f 为$[a, +\infty)$上的连续可微函数,且当 $x\to +\infty$时, $f(x)$递减地趋于0,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件为$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛 .

证 (1) 不妨设 $a\geq 1$,则 $0\leq f(x)\leq xf(x)$, $x\in[a, +\infty)$.由比较法则,结论得证 .

(2) 先证必要性 .对充分大的 A,有

$$\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\mathrm{d}x \geq \int_{\frac{A}{2}}^{A} f(A)\mathrm{d}x = \frac{A}{2} f(A) .$$

因$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,所以$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\mathrm{d}x=0$,从而

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{2}f(A)=0\ (\text{即}\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0).$$

由分部积分,得

$$\int_{A_1}^{A_2} xf'(x)\mathrm{d}x=A_2f(A_2)-A_1f(A_1)-\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

" $\varepsilon>0$, v $A\geq a$, 当 $A_1, A_2>A$ 时,有

$$|A_1f(A_1)|<\frac{\varepsilon}{3},\ |A_2f(A_2)|<\frac{\varepsilon}{3},\ \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而证得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} xf'(x)\mathrm{d}x\right|\leq|A_2f(A_2)|+|A_1f(A_1)|+\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

即$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$收敛.

再证充分性.由于

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x,$$

因此问题归为证明$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)$存在.

由于 $f(x)$递减地趋于$0(x\to+\infty)$,因此 $f(x)\geq0$." $\varepsilon>0$,因$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$收敛,故存在 $A\geq a$,当 $x>A$ 时,将有

$$\varepsilon>\left|\int_x^{+\infty} tf'(t)\mathrm{d}t\right|\geq\left|x\int_x^{+\infty} f'(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$=\left|x(\lim_{t\to+\infty}f(t)-f(x))\right|=xf(x).$$

由此可见,$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$,问题得证.

第十一章测试题

(A)

1. 判别下列反常积分的敛散性:

(1)$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(\ln\ln x)^n x\ln x}$;　　(2)$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

2. 讨论$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^n}\mathrm{d}x$的收敛性.

3. 证明:

$$\int_0^{+\infty} f\ \frac{x}{a}+\frac{a}{x}\ \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln a\int_0^{+\infty} f\ \frac{x}{a}+\frac{a}{x}\ \frac{1}{x}\mathrm{d}x(a>0).$$

4. 设 f 在任何 $[0, u]$ 上可积.证明:若

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = A(n\text{ 为正整数}),$$

则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = A$.

5. 设 f, g 在 $[a, +\infty)$ 上连续可微,且 g 在 $[a, +\infty)$ 上有界, $f'(x)\geq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.试证反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(B)

1. 判别下列反常积分的敛散性:

(1) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$; (2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\ln x}{x^4 - x^3 + 1}\mathrm{d}x$.

2. 讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

3. 证明不等式

$$\frac{2}{x+y} < \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+x)(t+y)} < \frac{1}{\sqrt{xy}},$$

并随之有: $\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\ln x - \ln y} < \frac{x+y}{2}$ $(0 < y < x)$.

4. 设 f 在 $[1, +\infty)$ 上连续, $f(x) > 0$,且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x} = -\lambda.$$

证明:若 $\lambda > 1$,则 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

5. 设 f 在 $[a, b)$ 上连续, b 为瑕点.证明:若 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 必绝对收敛.

测试题提示与解答

第一章测试题

(A)

2. (1) $\forall x\in S,\ x\geq \xi$.

(2) $\exists\ \alpha_0>\xi,\ \forall x\in S,\ x\geq \alpha_0$.

3. $\forall M,\ \exists\ 2k_0\pi+\dfrac{\pi}{2},\ f\left(2k_0\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=2k_0\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$，于是 $f(x)$ 无上界，同理可验证 $f(x)$ 无下界.

5. $x>0$ 时，设 $\arctan x=\alpha,\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\dfrac{\pi}{2}-\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ \cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha=x$，于是 $\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，这样

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}\ (x>0).$$

同理可证

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=-\frac{\pi}{2}\ (x<0).$$

6. (1) $x=-\dfrac{b}{2a}$;　　(2) $x=\dfrac{b-a}{2}$.

7. 由(1)可得 $\sup A\leq\inf B$. 为了证 $\sup A=\inf B$，用反证法. 若 $\sup A<\inf B$，设 $\inf B-\sup A=\varepsilon_0$，$\exists\ x\in A,\ y\in B$，使得 $y-x\geq\varepsilon_0$.

(B)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}<2$.

2. $\sup E=\sqrt{7},\ \inf E=-\sqrt{7}$.

3. 参见本章§2 范例 5.

4. (1) $F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\mathrm{e}^{-x}, & x<0;\end{cases}$　(2) $F(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\ln(-x), & x<0.\end{cases}$

5. $\exists\ x_1,x_2\in D,\ x_1<x_2,\ f(x_1)<f(x_2)$;　(不是递减函数)

$\exists\ x_3,x_4\in D,\ x_3<x_4,\ f(x_3)>f(x_4)$.　(不是递增函数)

6．设 $\alpha=\arctan x$，$\beta=\arctan y$，于是

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{x+y}{1-xy}.$$

(1) 若 $xy<1$，$x\geq 0$，$y\geq 0$，有 $\dfrac{x+y}{1-xy}>0$．$0\leq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，

$$0\leq\beta<\frac{\pi}{2}\text{，有 }0\leq\alpha+\beta<\pi\text{，因为 }\tan(\alpha+\beta)>0\text{，}$$

于是 $0\leq\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$，这样 $\arctan x+\arctan y=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$．

同理讨论下列情况：(2) $xy<1$，$x\leq 0$，$y\leq 0$；(3) $xy<1$，$x\geq 0$，$y\leq 0$；(4) $xy<1$，$x\leq 0$，$y\geq 0$．

7．(1) 若 A，B 中有一集合无上界，不妨设 A 无上界，则 S 也是无上界数集，于是 $\sup A=+\infty$，$\sup S=+\infty$，结论成立．若 A，B 都是有上界数集，且 $\sup B\leq\sup A$，现设法证明 $\sup S=\sup A$：

(i) $\forall x\in S$，无论 $x\in A$ 或 $x\in B$，有 $x\leq\sup A$；

(ii) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in A$，$x_0>\sup A-\varepsilon$，于是 $x_0\in S$，

$$x_0>\sup A.$$

同理可证(2)．

第二章测试题

(A)

2．0．

3．提示　设 $S_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$，则有 $a_i=S_i-S_{i-1}$，

$$\begin{aligned}&a_1+2a_2+\cdots+na_n\\=&S_1+2(S_2-S_1)+\cdots+n(S_n-S_{n-1})\\=&nS_n-(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}),\end{aligned}$$

然后可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)=0$．

4．提示　用数字归纳法证：$\forall n$，$1<a_{n+1}<a_n$，应用单调有界定理，可证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$．

5．(1) 错误使用四则运算法则．

(2) 利用极限保不等式性证明．

6．由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，$k>N_1$ 时，$|a_k-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，因为 $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$，于是

$$\left|\frac{1}{2^n}(a_0+C_n^1a_1+\cdots+C_n^na_n)-A\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2^n}[(a_0-A)+C_n^1(a_1-A)+\cdots+C_n^n(a_n-A)\right|$$

$$\leq\frac{1}{2^n}(|a_0-A|+C_n^1|a_1-A|+\cdots+C_n^{N_1}|a_{N_1}-A|)+$$

$$\frac{C_n^{N_1+1}+\cdots+C_n^n}{2^n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\quad(\text{当 } n>N_2).$$

这样 $\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\{N_1,N_2\}$, $\forall n>N$ **时**

$$\left|\frac{1}{2^n}(a_0+C_n^1a_1+\cdots+C_n^na_n)-A\right|<\varepsilon.$$

7. **设** $a=\inf\frac{x_n}{n}$,**由确界定义**, $\forall\varepsilon>0,\exists n_0$,

$$\frac{x_{n_0}}{n_0}<a+\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\forall n,\exists k\in\mathbf{N}_+$, $n=kn_0+m_0$, $0\leq m_0<n_0$,

$$\frac{x_n}{n}=\frac{x_{kn_0+m_0}}{kn_0+m_0}\leq\frac{kx_{n_0}+x_{m_0}}{kn_0+m_0}$$

$$\leq\frac{kn_0}{kn_0+m_0}\cdot\frac{x_{n_0}}{n_0}+\frac{x_{m_0}}{kn_0+m_0}$$

$$\leq a+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{x_{m_0}}{kn_0+m_0},$$

$\exists N$, $\forall n>N$ **时**, $\frac{x_{m_0}}{kn_0+m_0}<\frac{\varepsilon}{2}$,**于是**

$$a\leq\frac{x_n}{n}\leq a+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=a+\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=a.$$

(B)

1. **提示** (1) $x_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)\to\frac{4}{3}.$$

(2) $1^3+2^3+\cdots+i^3=\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)^2$.

2. **提示** 证明$\{y_n\}$递增且 $y_n \leq 1$,于是可得

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1 - \sqrt{1 - x}.$$

3. **提示** 构造在 $c = \dfrac{a+b}{2}$附近摆动的数列.

4. **提示** 取定 x_1, $\forall M > 0$, $M > x_1$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$ $\exists N$, $\forall n > N$ 时 $x_n > M$, 于是 $\inf\{x_n\} = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$.

5. **提示** 设 $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, α_n, β_n为无穷小数列,于是

$$\begin{aligned}
&a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \\
&= (a+\alpha_1)(b+\beta_n) + (a+\alpha_2)(b+\beta_{n-1}) + \cdots + (a+\alpha_n)(b+\beta_1) \\
&= nab + b(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + a(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) \\
&\quad + (\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1).
\end{aligned}$$

6. **提示**

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} - a \\
&= \frac{\lambda_1(a_1 - a) + \lambda_2(a_2 - a) + \cdots + \lambda_n(a_n - a)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}.
\end{aligned}$$

7. 可证$\{x_n\}$为递减数列,不然的话,$\exists n_0$,使得 $x_{n_0} > x_{n_0+1}$. 由 $2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}$,有 $x_{n+1} - x_n > x_n - x_{n-1}$,于是

$$\begin{aligned}
&x_{n_0+1} - x_{n_0} \geq x_{n_0} - x_{n_0-1}, \\
&x_{n_0+2} - x_{n_0+1} \geq x_{n_0+1} - x_{n_0} \geq x_{n_0} - x_{n_0-1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x_{n_0+k} - x_{n_0+k-1} \geq \cdots \geq x_{n_0} - x_{n_0-1}.
\end{aligned}$$

把以上诸式相加,有

$$x_{n_0+k} \geq k(x_{n_0} - x_{n_0-1}) + x_{n_0}.$$

因为 $x_{n_0} - x_{n_0-1} > 0$,当 $k \to \infty$时,x_{n_0+k}可大于任何正数 $M > 0$,与$\{x_n\}$为有界数列矛盾. 由单调有界定理,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,于是

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0.$$

第二章测试题

(A)

1．提示

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-1\right|=|x|\frac{|1-x|}{|2x^2-x-1|},$$

若取 $0<|x|<\frac{1}{4}$，可以估计$\frac{|1-x|}{|2x^2-x-1|}\leqslant 2$．

2．提示　$\forall G>0, \exists M>0$，当 $x<-M$ 时，$f(x)>G$．

3．1．

4．$\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$．

5．提示　以$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$为例说明符合题中的说法，但$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在．

6．$\forall M>0, \exists x'=\dfrac{1}{n_0\pi+\frac{\pi}{2}}$，使得$\left|\frac{1}{x'}\sin\frac{1}{x'}\right|>M$．

$\exists\ 1>0, \forall \delta>0, \exists x'=\frac{1}{2n_0\pi}\in U^{\circ}(0;\delta), \left|\frac{1}{x'}\sin\frac{1}{x'}\right|=0\leqslant 1$．

7．$\forall a\in(0,1)$，可以仿照对黎曼函数 $R(x)$，$\lim\limits_{x\to a}R(x)=0$ 的证明，$\forall \varepsilon>0$，说明使得 $f(x)\geqslant\varepsilon$ 的 x 值至多只有有限个，记为 $x_1, x_2, \cdots, x_n(\neq a)$，$0<a<1$，取

$$\delta=\min\{|x_1-a|, |x_2-a|, \cdots, |x_n-a|, a, 1-a\},$$

于是当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)|<\varepsilon$．

(B)

1．提示

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-1}{2x^2-x-1}\right|,$$

取 $|x|>4$ 时，可得

$$\left|\frac{x-1}{2x^2-x-1}\right|\leqslant\frac{|x|+1}{2|x|^2-|x|-1}\leqslant\frac{2|x|}{|x|^2}=\frac{2}{|x|}.$$

2．提示　$\forall G>0, \exists \delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时，$\ln x<-G$．

3．$\dfrac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n}$．

4．$\frac{4}{3}$．

5．提示　(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(\frac{1}{x}\right)=A$，$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $-\delta<x<0$ 时，

$$\left| f\left(\frac{1}{x}\right) - A \right| < \varepsilon,\text{设 } y = \frac{1}{x}\text{于是当 } y < -\frac{1}{\delta}\text{时}, | f(y) - A| < \varepsilon.$$

6. **提示** 若 $n > m$ 时,证明:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{P(f(t)) + Q(f(t))}{a_n(f(t))^n} = 1.$$

7. (1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} i - n}{n^2} = \frac{n(n+1) - n}{n^2} = 1.$

(2)

$$|x_n - a| = \left| \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}a \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right) - \frac{2i-1}{n^2}a \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}a \left| \frac{f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)}{\frac{2i-1}{n^2}a} - 1 \right|.$$

因为 $f(x) \sim x\ (x \to 0)$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N, 1 \leq i \leq N,$

$$\left| \frac{f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)}{\frac{2i-1}{n^2}a} - 1 \right| < \varepsilon,$$

于是

$$|x_n - a| \leq \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}a = \varepsilon \cdot a.$$

第四章测试题

(A)

1. $x = 0$ 为可去间断点; $x = k\pi\ (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$为第二类间断点.

2. (1) 可用反证法证明 $f(x) + g(x)$在点 x_0 不连续.但 $f(x) \cdot y(x)$可能在点 x_0处连续,例 $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

(2) 都无法断定 $f(x) + g(x)$和 $f(x) \cdot g(x)$的不连续性,例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

3. **提示** $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{a}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{a}\right)^{\frac{a}{\sqrt[n]{b} - 1}}\right]^{\frac{n \cdot (\sqrt[n]{b} - 1)}{a}}$

$$= b^{\frac{1}{a}}.$$

4. **提示** $\lim\limits_{h\to 0}\log_a\left(\dfrac{x^2-h^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{h^2}} = \lim\limits_{h\to 0}\log_a\left[\left(1-\dfrac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right]^{-\frac{1}{x^2}}$

$$= -\frac{1}{x^2}\log_a e.$$

5. **提示** **若** $x\in[a,b]$**时，过**$(x,0)$**作平行于** y **轴的直线与**$\triangle ABC$**相交，**$\triangle ABC$**中位于此直线左面那部分面积记为** $F(x)$**，于是有** $F(a)=0$，$F(b)=S$，S **为**$\triangle ABC$**的面积．设法证明** $F(x)$**是** x **的连续函数，利用介值定理可以证明本题．**

6. **提示** (1) **利用不一致连续的正面陈述来证明；**(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cos\dfrac{1}{x}=0$.

7. **提示** **由** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$**，可得** $f(x)-\varphi(x)$**在**$[a,+\infty)$**上一致连续．(教材上册第四章，§2 习题** 16)

(B)

1. $x=0$ **为第二类间断点；**$x=\pm\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$**为跳跃间断点．**

2. **提示**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{a(a^x-1)+b(b^x-1)+c(c^x-1)}{a+b+c}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=e^{\frac{\ln a^a b^b c^c}{a+b+c}}.$$

3. **提示** $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n=e^2.$

4. **提示** (1)→(2)．**先设** $a=\dfrac{k}{2^m}$，$1\leq k<2^m$，**用数学归纳法证明**

$$f\left(\frac{kx_1}{2^m}+\frac{(2^m-k)x_2}{2^m}\right)\leq\frac{kf(x_1)+(2^m-k)f(x_2)}{2^m}.$$

对任意 $0<a<1$，**可以取** $a_i=\dfrac{k_i}{2^{m_i}}$，$\lim\limits_{i\to\infty}a_i=a$，**然后用连续性得证．**

5. **提示** **由题设** $f(0)>0$，**取** $\varepsilon<f(0)$，**由** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\exists X>0$，**当**$|x|>X$**时，**$f(x)<\varepsilon$．**然后在**$[-X,X]$**上应用连续函数最大、最小值定理．**

6. **提示** (1) **讨论** $F(x)=\sqrt{f^2(x)+(x-x_0)^2}$ **在**$[a,b]$**上的最小值．**(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$.

7. **提示** 设法证 $f(x)$在$[a,b)$上递增,不然的话,∨ $a\leq x_1<x_2<x_3$, $f(x_1)>f(x_2)$, $f(x_2)<f(x_3)$.在(x_1,x_3)上函数 f 可以取到最小值,与所设矛盾 .

第五章测试题

(A)

2. $f'_+(0)=0$, $f'_-(0)=1$.

3. $a=\cos c$, $b=\sin c-c\cos c$.

4. (1) 否; (2) 是 .

6. **提示** 当 $x\neq0$,设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$,有

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ f'(0), & x=0 .\end{cases}$$

7. **解** (1) $f(x)=\sin(m\arcsin x)$,

$$f'(x)=\cos(m\arcsin x)\frac{m}{1-x^2},$$

$$f''(x)=-\sin(m\arcsin x)\frac{m^2}{1-x^2}+m\cos(m\arcsin x)\cdot\frac{x}{(\quad 1-x^2)^3} .$$

$$(1-x^2)f''(x)=-m^2\sin(m\arcsin x)+m\cos(m\arcsin x)\frac{x}{1-x^2},$$

$$-xf'(x)=-\frac{\cos(m\arcsin x)mx}{1-x^2},$$

$$m^2f(x)=m^2\sin(m\arcsin x) .$$

上面三式相加,有

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+m^2f(x)=0 .$$

(2) 把上面方程两边求 n 阶导数,应用莱布尼茨公式后有

$$f^{(n+2)}(x)(1-x^2)+nf^{(n+1)}(x)(-2x)+\frac{n(n-1)}{2}f^{(n)}(x)(-2)-$$
$$f^{(n+1)}(x)\cdot x-nf^{(n)}(x)+m^2f^{(n)}(x)=0,$$

化简后得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(1+2n)xf^{(n+1)}(x)+(m^2-n^2)f^{(n)}(x)=0 .$$

用 $x=0$ 代入上面方程有

$$f^{(n+2)}(0)=(n^2-m^2)f^{(n)}(0) .$$

因 $f''(0)=0$,由上式有 $f^{(2k)}(0)=0$.因 $f'(0)=m$,由上式有

$$f^{(3)}(0)=(1^2-m^2)m,\ f^{(5)}(0)=(3^2-m^2)(1^2-m^2)m,\cdots,$$

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\cdots(m^2-(2k-1)^2).$$

(B)

2. $f'_+(1)=1,\quad f'_-(1)=-1$.

3. **提示　先证** $f(0)=0$.

5. **提示　由定义出发可求得** $t=0$ **处切线斜率为零**.

6. (1) **否,考虑函数** $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$.

(2) **否,考虑函数** $f(x)=\cos(\ln x)$.

7. **提示　利用不等式估计**:

$$\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-f'(x_0)\right|$$
$$=\left|\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n}\left(\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)\right)+\frac{x_0-x_n}{y_n-x_n}\left(\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}-f'(x_0)\right)\right|$$
$$\leq\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n}\left|\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)\right|+\frac{x_0-x_n}{y_n-x_n}\left|\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}-f'(x_0)\right|.$$

第六章测试题

(A)

2. **提示　固定** $x_0=\dfrac{a+b}{2}$, " $x\in(a,b),x\neq x_0$,**对** $f(x)-f(x_0)$**应用拉格朗日中值定理**.**反之不然,考虑** $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x},x\in(0,1)$.

3. **提示　应用泰勒公式**.

4. **提示　利用条件** $a^2-3b<0$,**讨论** $f'(x)$**的符号**.

5. **提示**　[**证法一**]**作代换** $x=a+\tan t,t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,**然后应用罗尔中值定理**.[**证法二**]**用反证法,利用导数极限定理,有** $f'(x)>0$ **或** $f'(x)<0,x\in(a,+\infty)$.

6. **提示　作辅助函数** $F(x)=\dfrac{x}{1+x^2}-f(x)$**然后应用第 5 题的结论**.

7. **解**　" $x\in(0,1)$,**把** $f(x)$**在** $0,1$ **两点处分别泰勒展开到二阶余项,有**

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2,$$
$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}x^2,\qquad 0<\xi_1<x<\xi_2<1,$$

上面两式相减后有

$$1=\frac{f''(\xi_1)}{2\,!}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2\,!}(x-1)^2 .$$

用反证法,**若** $\forall x\in(0,1),|f''(x)|<2$,**则**

$$1=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2\,!}(x-1)^2\right|<x^2+(1-x)^2$$

$$=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

$$\leqslant 2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=1,$$

产生矛盾,**于是** $\exists\ \xi\in(0,1),|f''(\xi)|\geqslant 2$.

(B)

1. **提示**　**设** $F(x)=f(x)-g(x)$,**在** $[a,x]$ **或** $[x,a]$ **上对** $F(x)$ **应用拉格朗日中值定理** .

2. **提示**　**设法证明** $\ln\frac{1-x}{1+x}<-2x$,**不妨把** $\ln(1-x),\ln(1+x)$ **泰勒展开到二阶余项** .

3. **提示**　**在** $\left[a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right]$ **上应用拉格朗日中值定理** .

4. **提示**　**把** $f(x)$ **和** $f(x')$ **展开成带有四阶余项的泰勒公式** .

5. **提示**　**作辅助函数** $F(x)=f(x)e^{-\alpha x}$,**然后在** $[a,b]$ **上应用罗尔中值定理** .

6. **提示**　$x^{f(x)}=e^{f(x)\ln x},|f(x)\ln x|<kx|\ln x|$.

7. **解**　**设** $f(x)$ **在** η **处取到** $f(x)$ **的最小值** -1,**即** $0<\eta<1,f(\eta)=-1$,**由费马定理**,$f'(\eta)=0$ **把** $f(0),f(1)$ **在点** η **处泰勒展开到二阶余项**,**有**

$$0=f(0)=f(\eta)+f'(\eta)(-\eta)+\frac{f''(\eta-\theta_1\eta)}{2\,!}\eta^2,$$

$$0=f(1)=f(\eta)+f'(\eta)(1-\eta)+\frac{f''(\eta+\theta_2(1-\eta))}{2\,!}(1-\eta)^2,\qquad 0<\theta_1,\theta_2<1,$$

于是有

$$1=\frac{f''(\eta-\theta_1\eta)}{2\,!}\eta^2,\quad 1=\frac{f''(\eta+\theta_2(1-\eta))}{2\,!}(1-\eta)^2 .$$

若 $\eta\leqslant\frac{1}{2}$,**取** $\xi=\eta-\theta_1\eta,\ f''(\xi)=\frac{2}{\eta^2}\geqslant 8$;

若 $\eta>\frac{1}{2},1-\eta<\frac{1}{2}$,**取** $\xi=\eta+\theta_2(1-\eta),\ f''(\xi)=\frac{2}{(1-\eta)^2}\geqslant 8$.

第七章测试题

(A)

3．证　由命题 4′公式(3.4)，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leq\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n\ .$$

由上极限性质，$\exists$ 子列$\{y_{n_k}\}$　$\{y_n\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$，因为

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}+y_{n_k})=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}+\lim_{k\to\infty}y_{n_k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$是$\{x_n+y_n\}$的聚点．

因为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$是$\{x_n+y_n\}$的最大聚点，所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n),$$

于是有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n\ .$$

4．提示　设 $E=\{x\mid x\in(a,b],\ \forall\ y\in(x,b],\ f(y)>0\}$，验证 $\xi=\inf\ E$．

5．提示　若$\{[a_n,b_n]\}$为区间套，试证$\{a_n\}$为柯西列，即有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$．

6．提示　任取 $x_1\in[a,b]$，定义 $x_2=f(x_1),\cdots,x_{n+1}=f(x_n)\,(n=2,3,\cdots)$，于是$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leq k|x_n-x_{n-1}|\leq k^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leq\cdots\leq k^{n-1}|x_2-x_1|$，设法证$\{x_n\}$是柯西列．

(B)

2．提示　用反证法，若 $\xi=\sup\ E\notin E$，则 $f(\xi)\neq0$，再利用连续函数的局部保号性推出矛盾．

3．提示　先证当 $y_n>0$ 时$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$，对一般的 y_n，$\exists\ a$，使得 $y_n-a>0$．

4．提示　设$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a$，由上极限性质，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，$k\geq N$ 时，$\dfrac{x_{k+1}}{x_k}<a+\varepsilon$，$(k=N,\ N+1,\cdots,n-1)$，把这 $n-N$ 个不等式相乘后可得

$$\frac{x_{N+1}}{x_N}\cdot\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}<(a+\varepsilon)^{n-N},$$

再设法证$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ {}^{n}\,a_n\leq a+\varepsilon$．

5．提示　若$\{x_n\}$满足柯西准则，于是$\{x_n\}$为有界数列，设$\{x_n\}$　$[a,b]$．用反证法，倘若$\forall\ x\in[a,b]$，x 都不是$\{x_n\}$的极限，则$\exists\ \varepsilon_0>0$，$\forall\ N$，$\exists\ n>N$，使得$|x_n-x|\geq\varepsilon_0$．由柯西准则条件可推得在 $U\ \ x;\dfrac{\varepsilon_0}{2}$ 内仅含有$\{x_n\}$的有限项，再利

用有限覆盖定理推出矛盾.

6. **提示** 不妨设 $a\neq b$, $\forall \xi\in(a,b)$, $\exists \varepsilon_0>0$, 使得 $U(a;\varepsilon_0)$, $U(\xi;\varepsilon_0)$, $U(b;\varepsilon_0)$互不相交.因为$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 对 $\varepsilon_0>0$, $\exists N$, $n>N$ 时

$$|x_{n+1}-x_n|<2\varepsilon_0 .$$

由上、下极限性质$\exists n_1, n_2$, $N<n_1<n_2$, $x_{n_1}\in U(a;\varepsilon_0)$, $x_{n_2}\in U(b;\varepsilon_0)$, 于是可在满足 $n_1<n<n_2$ 的 n 中选择 n_1', 使得 $x_{n'_1}\in U(\xi;\varepsilon_0)$.

第八章测试题

(A)

1. $y=\frac{1}{2}(\ln x)^2+2$.

2. (1) $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$;

(2) $\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{2(x+1)}+C$;

(3) $\frac{1}{6}(x-1)\sqrt{4x+2}$;

(4) $-\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}+C$;

(5) $e^x\ln x+C$;

(6) $2\sqrt{1-x^2}-2x\arccos x-\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2+C$.

提示 (2) $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}\right]$.

(3) 化为$\frac{1}{4}\int\frac{(4x+2)-2}{4x+2}dx$.

(5) 分拆成两个不定积分,对其中一个作分部积分,便可消去另一个.

(6) 化为 $-\int(\arccos x)^2 d(\sqrt{1-x^2})$.

(B)

1. $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + C$.

2. 推演至 $\int \tan x\mathrm{d}x = \cdots = -1 + \int \tan x\mathrm{d}x$ 并无错误;但因 $\int \tan x\mathrm{d}x$ 不是一个确定的函数,而是带有任意常数 C 的一族函数,故等式前后这两个 $\int \tan x\mathrm{d}x$ 若分别记为

$$\int \tan x\mathrm{d}x(\text{前者}) = F(x) + C_1,$$

$$\int \tan x\mathrm{d}x(\text{后者}) = F(x) + C_2,$$

则所得结果只是表示 $C_1 = -1 + C_2$,不会产生矛盾.

3. (1) $\frac{1}{6}\arctan \frac{x^3}{2} + C$;

(2) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{3}\arctan \frac{2x+1}{3} + C$;

(3) $\frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + C$;

(4) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$;

(5) $\frac{3}{2}\arctan \frac{1}{2}\tan \frac{x}{2} + \ln(3 + \cos x) + C$;

(6) $\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$.

提示 (2) $\frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}$.

(5) 化为 $\int \frac{3}{3+\cos x}\mathrm{d}x - \int \frac{\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x$,分别计算两个不定积分较为方便.

4. 解:

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^n \quad x^2+1} = \int \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{d}(\quad x^2+1)$$

$$= \frac{x^2+1}{x^{n+1}} + (n+1)\int \frac{1}{x^{n+2}} \cdot \frac{x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2+1}{x^{n+1}} + (n+1)(I_n + I_{n+2}),$$

由此解出递推公式:

$$I_{n+2} = -\frac{1}{n+1}\quad\frac{x^2+1}{x^{n+1}} + nI_n \quad, n \in \mathbf{N}.$$

初值为

$$I_0=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}=\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C,$$

$$I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C.$$

第九章测试题

(**A**)

1．解 $\int_{-4}^{4}|x^2-2x-3|\mathrm{d}x=\int_{-4}^{4}|(x-3)(x+1)|\mathrm{d}x$

$$=\int_{-4}^{-1}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x$$

$$=27+\left(11-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{64}{3}-19\right)=40.$$

2．解 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2\right]\frac{2}{n}}{\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{4}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right]\frac{2}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{n}\right)^2\frac{2}{n}\bigg/\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2\frac{2}{n}$$

$$=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\bigg/\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=1.$$

3．提示 把所证的不等式变形为

$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

再利用 f 为递减函数．

4．提示 由条件知道 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为正或恒为负(否则，由连续函数具有介值性，f 必有零点，与 $f(x)\neq 0$ 矛盾)．设 $f(x)>0$，则容易证得(依定积分定义，或者类似于教材第 217 页中例 2 的证明) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$．

5．提示 由积分第二中值定理，$\exists\ \xi\in[-\pi,\pi]$，使

$$I_n=f(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi}\sin(2n+1)x\mathrm{d}x+f(\pi)\int_{\xi}^{\pi}\sin(2n+1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f(-\pi)}{2n+1}\cos(2n+1)x\Big|_{\xi}^{-\pi}+\frac{f(\pi)}{2n+1}\cos(2n+1)x\Big|_{\pi}^{\xi}$$

$$=\frac{-1}{2n+1}(f(-\pi)-f(\pi))[1+\cos(2n+1)\xi].$$

6．解 对等式两边求导数，得到

$$2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=4xf(x),$$

经整理又得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x}{x^2+1}.$$

对此式两边求变限积分

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t,$$

得出

$$\ln\frac{f(x)}{f(0)}=\ln(x^2+1).$$

以 $x=0$ **代入条件式**,**得到** $f(0)=3$.**于是求得**

$$f(x)=f(0)(x^2+1)=3(x^2+1).$$

7. **提示　作辅助函数**

$$F(t)=\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^t (f(x))^3\mathrm{d}x,\ t\in[0,1],$$

由于 $F(0)=0$,**因此只需证明** $F(t)$**递增**.

(B)

1. **提示** $\displaystyle\int_{-1}^1 |x-y|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_{-1}^y (y-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_y^1 (x-y)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$=\cdots=2\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y-(y+2)\mathrm{e}^{-1}.$$

2. **证　类似于上面**(A)**卷第** 2 **题**,**有**

$$J=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{3}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{2n-1}{n}\right)^p\right)\left(\frac{2}{n}\right)^{q+1}}{\left(\left(\frac{2}{n}\right)^q+\left(\frac{4}{n}\right)^q+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^q\right)\left(\frac{2}{n}\right)^{p+1}}\cdot 2^{p-q}$$

$$=2^{p-q}\cdot\frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\left(\frac{2i-1}{n}\right)^p\frac{2}{n}\right)^{q+1}}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\left(\frac{2i}{n}\right)^q\frac{2}{n}\right)^{p+1}}$$

$$=2^{p-q}\cdot\frac{\left(\int_0^2 x^p\mathrm{d}x\right)^{q+1}}{\left(\int_0^2 x^q\mathrm{d}x\right)^{p+1}}=2^{p-q}\cdot\frac{(q+1)^{p+1}}{(p+1)^{q+1}}.$$

3. **提示　利用不等式** $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,**可分别证得**:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{144}.$$

说明　若记

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

则 f **在** $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ **上连续.上面的** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ **应理解为** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

4. **提示　利用本章总练习题第 10 题.**

5. **提示　由条件可知** $f'(x)$ **在** $[-\pi,\pi]$ **上必为一递增函数,借助分部积分法,并利用(A)卷第 5 题.**

6. **证　设** $|f(x)|\leqslant M$, $x\in[a,b]$. $\forall\varepsilon>0$, **取** $\eta=\dfrac{\varepsilon}{4M}$, **则** f **在** $[b-\eta,b]$ **上的振幅** $\omega\leqslant 2M$, **且有**

$$\omega\eta\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $f\in R[a,b-\eta]$, **据可积充要条件**, $\exists T_1[a,b-\eta]$, **使得**

$$\sum_{(T_1)}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

把 T_1 **与** $[b-\eta,b]$ **合并而成** $T[a,b]$, **则因**

$$\sum_{(T)}\omega_i\Delta x_i=\sum_{(T_1)}\omega_i\Delta x_i+\omega\eta<\varepsilon,$$

可知 $f\in R[a,b]$.

7. **证　由** $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|<\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$ **可知** $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上变号,故** $\exists c\in(0,1)$, **使** $f(c)=0$. **于是有**

$$|f(x)|=|f(x)-f(c)|=\left|\int_c^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x;$$

并得

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

第十章测试题

(A)

1．**提示**　圆 $r=3\cos\theta$ 与心形线 $r=1+\cos\theta$ 的交点在 $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$ 处．所求面积为 $A=\frac{5\pi}{4}$．

2．**解**　(1) $A=\frac{2}{3}\int_0^3\left(3x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{8\sqrt{3}}{5}$．

(2) $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$，

$$s=\int_0^3\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=4\sqrt{3}\ .$$

(3) $S=2\pi\int_0^3\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^3(3+2x-x^2)\,\mathrm{d}x=3\pi\ .$$

3．**提示**　升高的高度 $\delta=\sqrt[5]{h^5+\frac{20p^2V}{\pi}}-h$，可由 $V=\int_h^{h+\delta}\pi x^2\,\mathrm{d}y$ 求得，其中 $x=\frac{y^2}{2p}$．

4．$W=km_1m_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$．

5．**提示**　$F=2\nu\cdot\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}(x+a)\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi\nu a^2b$．以 $a=\frac{3}{4}$，$b=1$，$\nu=9.8$ 代入，得到

$$F=17.32\times10^3\ (\mathrm{N})\ .$$

(注意利用奇、偶函数的积分性质，化简计算)．

(B)

1．**提示**　由 $x(0)=x(2\pi)$，$y(0)=y(2\pi)$，可求得

$$A=\left|\int_0^{2\pi}y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t\right|=\cdots=\pi a^2\ .$$

此结果说明所求面积与 m 无关，即图 10 - 42 中 $m>0$ 时的各种图形面积都与 $m=0$ 时的圆面积相同．另外，本题也可用公式

$$A=\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\right|$$

来计算．

2. 解　取 θ 在 $[-1,1]$ 上的值,以绘出曲线所围成的最小一叶 .其面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^1(1-\theta^2)^2\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\int_0^1(1-2\theta^2+\theta^4)\mathrm{d}\theta=\frac{8a^2}{15}.$$

此叶曲线的周长为

$$s=\int_{-1}^{1}\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=a\int_{-1}^{1}(1+\theta^2)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}a.$$

此叶曲线绕极轴旋转所得旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_0^1 y\mathrm{d}s=2\pi\int_0^1 r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi a^2\int_0^1(1-\theta^4)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi a^2\left[1-\cos 1-\int_0^1\theta^4\sin\theta\mathrm{d}\theta\right],$$

其中

$$\int_0^1\theta^4\sin\theta\mathrm{d}\theta=\left[-\theta^4\cos\theta+4\theta^3\sin\theta+12\theta^2\cos\theta-24\theta\sin\theta-24\cos\theta\right]\Big|_0^1$$

$$=24-13\cos 1-20\sin 1,$$

这就得到

$$S=2\pi a^2(12\cos 1+20\sin 1-23)$$

$$\approx 1.967a^2.$$

3. 解　易知旋转椭球体的体积为 $V_0=\frac{4\pi}{3}ab^2$.由图 10 - 44 及椭圆方程,可求得

$$c=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2}.$$

于是环形体的体积为

$$V_1=\pi\int_{-c}^{c}y^2\mathrm{d}x-2\pi r^2c$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^c(a^2-x^2)\mathrm{d}x-2\pi r^2c$$

$$=2\pi c\left[b^2-r^2-\frac{b^2c^2}{3a^2}\right]$$

$$=2\pi c\left[\frac{b^2c^2}{a^2}-\frac{b^2c^2}{3a^2}\right]$$

$$=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{b^2c^3}{a^2}.$$

利用 $V_1=\frac{1}{2}V_0$,**得到** $c^3=\frac{1}{2}a^3$,**并有**

$$r^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-c^2)$$

$$=b^2\left(1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right),$$

$$r=b\sqrt{1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$$

$$\approx 0.608b.$$

4. **解** $\mathrm{d}Q=v\mathrm{d}A$,**取** $\mathrm{d}A=2\pi x\mathrm{d}x$,**得到**

$$Q=2k\pi\int_0^r x(r^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}k\pi r^4.$$

5. **提示** **根据**§5 **范例** 3 **的结论**,**在距地心** $x(\geq R)$**处物体所受地球引力为**

$$F=\frac{kmM}{x^2}.$$

由于在地面上$(x=R)F=mg$,**代入上式后求得** $kM=g\mathrm{R}^2$,**因此又有**

$$F=\frac{mg\mathrm{R}^2}{x^2}.$$

于是可得所求的功为

$$W=\int_R^{R+h}F\mathrm{d}x=\frac{mgRh}{R+h};$$

再由机械能守恒定律又可求得初速度为

$$v_0=\sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}.$$

说明 **特别当质量** m **无限远离地球时**,**即** $h\to+\infty$**时**,v_0 **的极限为**

$$v=\lim_{h\to+\infty}\sqrt{\frac{2g\mathrm{R}h}{\mathrm{R}+h}}=\sqrt{2g\mathrm{R}}.$$

再以 $g=9.81(\mathrm{m/s^2})$, $\mathrm{R}=6.371\times10^6(\mathrm{m})$**代入**,**便得第二宇宙速度**

$$v=\sqrt{2\times9.81\times6.371\times10^6}\approx11.2(\mathrm{km/s}).$$

*6. **解** (1) **对于线段** OA,**有**

$$M_1=\int_0^1 y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3},\ M_{x1}=\int_0^1 y^3\mathrm{d}y=\frac{1}{4},$$

$$M_{y1}=0,\ y_{C1}=\frac{M_{x1}}{M_1}=\frac{3}{4},\ x_{C1}=0,$$

质心为$(x_{C1},y_{C1})=\left(0,\frac{3}{4}\right)$.

(2) 对于线段 AB,有

$$M_2=\int_0^2(x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{14}{3},\quad M_{x2}=\int_0^2 1\cdot(x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{14}{3},$$

$$M_{y2}=\int_0^2 x(x^2+1)\mathrm{d}x=6,\quad x_{C2}=\frac{M_{y2}}{M_2}=\frac{9}{7},\quad y_{C2}=1,$$

质心为$(x_{C2},y_{C2})=\left(\frac{9}{7},1\right)$.

(3) 对于折线段 OAB,有

$$M=M_1+M_2=5,\quad M_x=M_{x1}+M_{x2}=\frac{59}{12},$$

$$M_y=M_{y1}+M_{y2}=6,\quad x_C=\frac{M_y}{M}=\frac{6}{5},\quad y_C=\frac{M_x}{M}=\frac{59}{60},$$

质心为$(x_C,y_C)=\left(\frac{6}{5},\frac{59}{60}\right)$.

第十一章测试题

(A)

1. 提示 (1) 从定义出发,可验证得结论:当 $n>1$ 时收敛,$n\leq 1$ 时发散.

(2) 发散.先用比较法则验证$\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$为发散.

2. 解 考察

$$I(n)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^n}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^n}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^n}\mathrm{d}x,$$

由于

$$\lim_{x\to 0^+}x^{n-1}\cdot\frac{\arctan x}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x}{x}=1,$$

因此当 $n-1<1$,即 $n<2$ 时,$\int_0^1\frac{\arctan x}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛;而当 $n\geq 2$ 时,它为发散.又因

$$\lim_{x\to+\infty}x^n\cdot\frac{\arctan x}{x^n}=\frac{\pi}{2},$$

故当 $n>1$ 时,$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛;而当 $n\leq 1$ 时,它为发散.

综上,当且仅当 $1<n<2$ 时,$I(n)$收敛.

3. 证 作变换$\frac{x}{a}=\frac{a}{y}$后,化为

$$I=\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln y}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{+\infty}^{0} f\left(\frac{a}{y}+\frac{y}{a}\right)\frac{\ln a^2-\ln y}{\frac{a^2}{y}}\cdot\left(-\frac{a^2}{y^2}\right)dy$$

$$=2\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{y}{a}+\frac{a}{y}\right)\frac{1}{y}dy-I,$$

因此
$$I=\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx.$$

4. **证** $\forall\varepsilon>0$，由条件，$\exists N\in\mathbf{N}_+$ 和 $X>a$，使得

$$当\ n>N\ 时，\left|\int_a^n f(x)dx-A\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

$$当\ x>X\ 时，|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨设 $N\geq X$，则当 $N<n<u\leq n+1$ 时，有

$$\left|\int_a^u f(x)dx-A\right|\leq\left|\int_a^u f(x)dx-\int_a^n f(x)dx\right|+\left|\int_a^n f(x)dx-A\right|$$

$$\leq\int_n^u|f(x)|dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}(u-n)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

这就证得$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx=A$.

5. **证** 因 $f'(x)\geq0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上递增，$f(x)\leq0$；且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>a$，当 $x_2>x_1>X$ 时，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|=f(x_2)-f(x_1)<\frac{\varepsilon}{2M},$$

其中 M 是满足 $|g(x)|\leq M$，$x\in[a,+\infty)$ 的正数 .于是对任何 $A_2>A_1>X$，有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g'(x)dx\right|=\left|f(A_2)g(A_2)-f(A_1)g(A_1)-\int_{A_1}^{A_2} f'(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq M[f(A_2)-f(A_1)]+M\int_{A_1}^{A_2} f'(x)dx$$

$$=2M[f(A_2)-f(A_1)]$$

$$<2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

这说明$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ 满足收敛的柯西准则条件，故它是收敛的 .

(B)

1. **提示** (1) 收敛 .注意 0 与 π 都是瑕点 .设

$$I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{\sin x}=I_1+I_2,$$

可证 $I_1 = I_2$，且 I_1 收敛.

(2) 收敛. 由于 $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x = 0$，因此该反常积分只是无穷积分($x = 0$ 不是瑕点).

2. 解　把此反常积分记为

$$
\begin{aligned}
I(n) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x \\
&= I_1(n) + I_2(n).
\end{aligned}
$$

由于

$$
\lim_{x\to0^+} x^{n-1}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n} = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,
$$

故当 $n-1<1$，即 $n<2$ 时，$I_1(n)$ 收敛；$n\geqslant2$ 时它为发散. 又由

$$
\lim_{x\to+\infty} x^{n-\delta}\frac{\ln(1+x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\delta} = 0\ (\delta>0),
$$

可见当 $n = 1+2\delta>1$ 时($n-\delta>n-2\delta=1$)，$I_2(n)$ 收敛；而当 $n\leqslant1$ 时，则因

$$
\frac{\ln(1+x)}{x^n} \geqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \geqslant \frac{1}{x}\quad (x\geqslant \mathrm{e}-1),
$$

可见 $I_2(n)$ 发散.

综上，当且仅当 $1<n<2$ 时，$I(n)$ 收敛.

3. 提示　由　$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}$ 与 $2xy\leqslant x^2+y^2$，可得

$$
(t+\sqrt{xy})^2 \leqslant (t+x)(t+y) \leqslant \left(t+\frac{x+y}{2}\right)^2.
$$

由此可证得第一个不等式. 再由

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+x)(t+y)} &= \frac{1}{x-y}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t+y}-\frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x-y}\ln\frac{t+y}{t+x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{x-y}\left(0-\ln\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{\ln x-\ln y}{x-y},
\end{aligned}
$$

又可证得第二个不等式.

4. 证　由极限定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>1$，当 $x>X$ 时，

$$
\frac{\ln f(x)}{\ln x} < \varepsilon-\lambda,
$$

并由此得到

$$
f(x) < \frac{1}{x^{\lambda-\varepsilon}}.
$$

设 $\lambda = 1+\delta(\delta>0)$，特别当取 $\varepsilon = \frac{\delta}{2}>0$ 时，相应地存在 $X_0>1$，当 $x>X_0$ 时，有

$$f(x) < \frac{1}{x^{1+\delta/2}} .$$

而$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\delta/2}}$收敛,故当 $\lambda > 1$ 时$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛 .

5. 提示　由于$\int_a^u |f(x)|\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[a, b)$上是单调递增的,因此只要能证明它有上界,则当 $u \to b^-$ 时的极限存在,即$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛 .