组 合 数 学

1　初等计数方法

加法原理与乘法原理

定理1.1 (**加法原理**).　设S是一个有限集, 如果将S表示为互不相交的子集的并,

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k,$$

则有$|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_k|$.

定理1.2 (**乘法原理**).　完成一件工作需要n个步骤, 假设第一步恰有a_1种不同的方法, 对每个$k = 2, \cdots, n$, 不论前$k-1$步的结果如何, 完成第k步恰有a_k种方法, 则完成整件工作有$a_1a_2\cdots a_n$种不同的方法.

加法原理事实上就是对有限集合分类计算, 再求其总和. 而乘法原理需要注意, 第k步的结果可以依赖于前$k-1$步的结果, 只需其方法数不依赖于前$k-1$步的结果.

例1.3.　一个n元集合的所有子集共有2^n个.

排列与组合

定理1.4 (**排列数**).　从一个n元集合中选取k个元素并排成一列的方法数是

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

定理1.5 (**组合数**).　一个n元集合的k元子集的个数是

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

例1.6.　有5张卡片分别写有数字$0, 1, 2, 3, 4$, 用这5张卡片组成一个五位偶数, 共有几种方法?

例1.7.　方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$的正整数解$(x_1, x_2, \cdots, x_k)$的个数等于$\binom{n-1}{k-1}$; 非负整数解的个数等于$\binom{n+k-1}{k-1}$.

映射

在两个集合之间建立一个映射$f: S \to T$, 从其中一个集合的信息而获知另一个集合的信息, 这在数学中是极其普遍的. 在计数问题中, 我们常用到如下的性质: 假设S, T均为有限集合.

(1) 若f是满射, 则$|S| \geq |T|$.

(2) 若f是单射, 则$|S| \leq |T|$.

(3) 若f是双射, 则$|S| = |T|$.

(4) $|S| = \sum_{t \in T} |f^{-1}(t)|$.

(5) 若f是k对1映射, 即对每个$t \in T$, 都有$|f^{-1}(t)| = k$, 则$|S| = k|T|$.

例1.8 (**重复元素的排列**). 设$x_1, x_2, \cdots, x_k$是不同的字母, 分别有$n_1, n_2, \cdots, n_k$个, 将这所有$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$个字母排成一列的方法数是

$$\binom{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_k}{n_1,n_2,\cdots,n_k}$称为多重组合数, $k = 2$时即为通常的组合数.

定理1.9 (**多项式定理**). 有如下的多项式恒等式,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k},$$

其中求和符号取遍方程$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$的所有非负整数解. 当$k = 2$ 时, 称为二项式定理,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

折线问题

这里一条长度为k的折线, 是指一个整点序列

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_k, y_k),$$

满足对$1 \leq i \leq k$, 都有$(x_i, y_i) - (x_{i-1}, y_{i-1}) = (1, 1)$或$(1, -1)$, 其中$(x_0, y_0)$ 称为这条折线的起点, (x_k, y_k)称为这条这些的终点. 显然$x_k - x_0 = k$, $|y_k - y_0| \leq k$, 并且$y_k - y_0 \equiv k \pmod 2$.

定理1.10. 设$k \geq 1$. 给定起点(x_0, y_0)和终点(x_k, y_k), 满足$x_k - x_0 = k$, $|y_k - y_0| \leq k$, 并且$y_k - y_0 \equiv k \pmod 2$. 以$(x_0, y_0)$和$(x_k, y_k)$分别为起点和终点的长度为$k$的折线个数等于

$$\binom{k}{\frac{1}{2}(k + y_k - y_0)}.$$

如果还要求这条折线经过直线$y=t$上某个点, 这里t不在y_0, y_k之间(包含y_0和y_k), 则这样的折线个数等于

$$\binom{k}{\frac{1}{2}(k+y_k+y_0)-t}.$$

练习

练习: 5位男士和7位女士坐成一排, 使得任意两个男士都不相邻, 共有多少种入座方法?

练习: 方程$x_1+x_2+x_3+x_4=20$的满足$x_1\geq 3$, $x_2\geq -2$, $x_3\geq 0$, $x_4\geq 1$的整数解有多少个?

练习: 设X是一个n元集合, Y是X的k元子集. 有多少个X的有序子集对(A,B), 满足$Y=A\cap B$?

练习: 一只蚂蚁从直角坐标平面上原点出发, 每一步向右或向上移动单位距离. 经过10步后到达了$(4,6)$, 问蚂蚁共有几种移动方式? 如果要求蚂蚁在移动过程中所到达的点始终满足$y\leq x+3$, 那么蚂蚁共有几种移动方式?

练习: 设$n\geq 4$. 将一个给定的凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$用$n-3$条对角线剖分成$n-2$个三角形, 要求其中恰有两个三角形有两条边是原n边形的边. 求这样的剖分方法个数.

2 组合恒等式

在计数问题中, 常遇到带有组合数的求和式子, 这时需要用到组合恒等式来化简. 证明组合恒等式的主要方法有: 利用代数恒等变形, 利用多项式比较系数, 利用组合模型解释等式两边的组合意义, 将组合恒等式改为多项式恒等式, 数学归纳法等等.

对于非负整数$n \geq k \geq 0$, 组合数是有意义的, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. 为在使用及书写中方便, 约定当$k < 0$, 或者$k > n$时, $\binom{n}{k} = 0$.

例2.1 (组合数的基本性质). (1) 对称性: 设$n \geq k \geq 0$, 则

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(2) 单调性: 设$1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, 则

$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}.$$

(3) 设$n \geq 0$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

(4) Pascal恒等式: 设$n \geq k \geq 1$, 则

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

(5) 设$n, k \geq 1$, 则

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

(6) 设$n, k, j \geq 0$, 则

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}.$$

例2.2 (Vandermonde恒等式). 设$m, n, k \geq 0$, 则

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}.$$

例2.3. 设$n \geq 0$, 则

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

例2.4 (朱世杰恒等式). 设$m, n \geq 0$, 则

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

例2.5. 设$n \geq 1$, 则

$$\sum_{2\nmid k}\binom{n}{k}=\sum_{2|k}\binom{n}{k}=2^{n-1}.$$

例2.6. 设$n \geq 0$, 计算

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k}.$$

例2.7 (**李善兰恒等式**). 设$n,k,l \geq 0$, 则

$$\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{j}\binom{n+k+l-j}{k+l}=\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}.$$

证明: 反复利用Vandermonde恒等式做代数变形,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{j}\binom{n+k+l-j}{k+l}\\
=&\sum_{j=0}^{l}\binom{k}{j}\binom{l}{l-j}\sum_{t=0}^{l}\binom{l-j}{t}\binom{n+k}{k+l-t}\\
=&\sum_{t=0}^{l}\binom{n+k}{k+l-t}\sum_{j=0}^{l}\binom{k}{j}\binom{l}{l-j}\binom{l-j}{t}\\
=&\sum_{t=0}^{l}\binom{n+k}{k+l-t}\sum_{j=0}^{l}\binom{k}{j}\binom{l}{t}\binom{l-t}{l-j-t}\\
=&\sum_{t=0}^{l}\binom{n+k}{k+l-t}\binom{l}{t}\binom{k+l-t}{l-t}\\
=&\sum_{t=0}^{l}\binom{n+k}{k}\binom{n}{l-t}\binom{l}{t}\\
=&\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}.
\end{aligned}$$

□

例2.8. 设$n > 0$. 证明:

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{[\frac{1}{2}(n-k)]}=\binom{2n+1}{n}.$$

练习

练习: 设$n \geq m > 0$. 证明:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}=0.$$

练习: 设$n \geq m \geq 0$. 证明:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{n-m} \binom{n}{k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

练习: 设$n \geq 0$. 证明:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} 2^{-k} = 2^n.$$

3 递推方法与生成函数

在计数问题中, 我们往往计算一类带有参数n的对象, 此时计数结果就是关于n的一个函数, 或数列$\{a_n\}$. 如果利用组合方法能够用已求出的$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 来计算a_{n+1}, 这时我们得到了a_{n+1}的递推表示. 利用递推方法, 结合生成函数来研究计数问题, 是一个重要的工具.

齐次常系数线性递推数列

一个数列$\{a_n\}$, 如果对$n \geq k+1$, 都有

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

这里$c_1, c_2, \cdots, c_k$是常数, 且$c_k \neq 0$, 则称这个数列为k阶齐次常系数线性递推数列. $x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_k$称为这个数列的特征多项式.

定理3.1. 设$\{a_n\}$是一个k阶齐次常系数线性递推数列, 特征多项式为

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_k.$$

(1) 若特征多项式有k个不同的复根$t_1, t_2, \cdots, t_k$, 则$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n = \alpha_1 t_1^n + \alpha_2 t_2^n + \cdots + \alpha_k t_k^n,$$

其中$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$是常数.

(2) 更一般地, 如果特征多项式有重根, 设它的不同根为$t_1, t_2, \cdots, t_m$, 重数分别是$n_1, n_2, \cdots, n_m$, 那么$\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = P_1(n) t_1^n + P_2(n) t_2^n + \cdots + P_n(n) t_m^n,$$

其中$P_i(x)$是一个次数小于n_i的多项式.

如果数列$\{a_n\}$的递推关系形如

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n),$$

则称为k阶非齐次常系数递推数列. 对于这样的数列, 它的通项公式等于满足上述递推关系的一个特解加上齐次递推数列的通解. 求出一个特解并无一般的方法, 当$f(n)$是n的多项式时, 通常可以求得一个特解也是n的多项式.

递推方法应用举例

例3.2. 将一个$2 \times n$的矩形方格纸用1×2的小矩形无重叠地覆盖, 共有多少种方法?

例3.3. 在平面上画n条直线, 没有两条直线平行, 也没有三条直线交于一点, 问这些直线一共将平面分成多少个区域?

例3.4. 序列$a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$中, 每个$a_i \in \{1, 2, 3\}$, 并且$1, 2, 3$ 均出现奇数次. 求这样的序列的个数.

生成函数

研究一个数列$\{a_n\}$, 或一个非负整数集合A, 可以构造一个与之相关的函数(多项式, 级数等), 利用代数和分析的工具来研究组合问题, 这样的函数称之为生成函数. 如何构造生成函数与研究的数列$\{a_n\}$或集合A的性质以及研究的问题都相关. 一般而言有如下几种常见的生成函数.

(1) 对于数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$, 用它作为系数构造幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

这个幂级数称为$\{a_n\}$的普通生成函数.

(2) 对于数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$, 下面的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$$

称为$\{a_n\}$的指数型生成函数.

(3) 对于数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$, 下面的级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

称为$\{a_n\}$的Dirichlet级数.

(4) 研究一个非负整数集合A上的堆垒性质, 常构造下面的生成函数

$$f(x)=\sum_{a\in A}x^a.$$

(5) 研究一个非负整数集合A上的有限子集的元素和, 常构造下面的生成函数

$$f(x)=\prod_{a\in A}(1+x^a).$$

例3.5. 用生成函数证明二阶常系数齐次线性递推数列的通项公式.

例3.6. 设用足够多的1元, 2元和5元的纸币支付n元有a_n种方法, 那么

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)},\quad |x|<1.$$

例3.7. 求$\{1,2,\cdots,2000\}$的所有子集中, 元素和被5整除的子集个数(空集的元素和认为是零).

例3.8. 设$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$和$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$是两个不同的正整数集合, $n\geq 2$. 若$\binom{n}{2}$个数$a_i+a_j(1\leq i<j\leq n)$和$\binom{n}{2}$个数$b_i+b_j(1\leq i<j\leq n)$整体相同, 则n是2的方幂.

证明: 设$f(x)=x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_n}$, 于是

$$\frac{1}{2}(f(x)^2-f(x^2))=\sum_{1\le i<j\le n}x^{a_i+a_j}.$$

再设$g(x)=x^{b_1}+x^{b_2}+\cdots+x^{b_n}$, 则由条件得

$$f(x)^2-f(x^2)=g(x)^2-g(x^2).$$

由于$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$与$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$是不同的正整数集合, 故$f(x)-g(x)$ 是非零多项式, 且$f(1)-g(1)=n-n=0$, 故$f(x)-g(x)=(x-1)^k h(x)$, 其中$k>0$, $h(1)\neq 0$. 代入等式

$$(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))=f(x^2)-g(x^2),$$

并约去$(x-1)^k$, 即得

$$h(x)(f(x)+g(x))=(x+1)^k h(x^2).$$

令$x=1$, 则$2nh(1)=2^k h(1)$, 从而$n=2^{k-1}$, 是2的方幂.

注: 对任意2的方幂n, 都可以构造出两个不同的n元集合满足要求. □

练习

练习: 求长度为n的且不包含连续0的0,1序列的个数.

练习: 用X,Y,Z,U构成长度为n且含有偶数个U的字符串, 求这样的字符串的个数.

练习: 用映射的方法解例3.4. 一个长为$2n+1$的$1,2,3$序列等价于$\{1,2,\cdots,2n+1\}$的分拆(A_1,A_2,A_3), 其中A_i表示数i出现的位置. 设S是A_1,A_2,A_3都是奇数元集合的分拆构成的集合, T是剩余分拆. 在T中除去三种分拆后, 构造一个到S的3对1映射.

练习: 用映射的方法解例3.7. 记S_i是$\{1,2,\cdots,2000\}$的元素和模5余i的所有子集构成的集合, $0\le i\le 4$. 在S_0中除去2^{400}个集合后与S_1,S_2,S_3,S_4之间构造双射.

4 容斥原理

我们知道简单的容斥原理, 设$A, B \subset X$是两个有限集合, 那么

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

如果$A, B, C \subset X$是三个有限集合, 那么

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

容斥原理的一般形式如下.

定理4.1 (**容斥原理**). 设$A_1, A_2, \cdots, A_n \subset X$是$n$个有限集合. 则

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{r=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} (-1)^{r-1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}|.$$

定理4.2 (**Bonferroni不等式**). 设$A_1, A_2, \cdots, A_n \subset X$是$n$个有限集合, $1 \leq k \leq n$.

若k是奇数, 则

$$|\cup_{i=1}^n A_i| \leq \sum_{r=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} (-1)^{r-1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}|.$$

若k是偶数, 则

$$|\cup_{i=1}^n A_i| \geq \sum_{r=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} (-1)^{r-1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}|.$$

证明: 对于$\cup_{i=1}^n A_i$中一个元素x, 它在$\cup_{i=1}^n A_i$中被计算1次. 设它属于$A_1, A_2, \cdots, A_n$中的m个集合. 那么它在

$$\sum_{r=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} (-1)^{r-1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}|$$

中被计算了$\sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \binom{m}{r}$次. 如果$m \leq k$, 那么

$$\sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \binom{m}{r} = \sum_{r=1}^m (-1)^{r-1} \binom{m}{r} = 1.$$

下面假设$m > k$, 利用Pascal恒等式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \binom{m}{r} &= \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \left(\binom{m-1}{r-1} + \binom{m-1}{r} \right) \\ &= \binom{m-1}{0} + (-1)^{k-1} \binom{m-1}{k} \begin{cases} \leq 1, & 2 \mid k, \\ \geq 1, & 2 \nmid k. \end{cases}\end{aligned}$$

□

例4.3. 计算$1, 2, \cdots, n$的无不动点的排列个数.

例4.4. 设$n \geq m$, $|X| = n$, $|Y| = m$. 计算所有X到Y的满射个数.

例4.5. 设正整数n的标准分解为$p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. 在不超过$n$的正整数中, 与$n$互素的数的个数为

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

φ称为欧拉函数, 是一个重要的数论函数.

练习

练习: 小于或等于1000的正整数中, 有多少个数不以2,3,4,5,6,7,8,9,10中的任何一个为因子?

练习: 从$(0,0)$到$(5,5)$的格路径中, 不经过$(2,2)$和$(3,3)$的格路径有多少条?

5　一些特殊计数问题

Catalan数

数$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$称为第$n$个Catalan数, $n \geq 0$. 已发现许多组合计数问题都以Catalan数为结果.

例5.1. $x_1, x_2, \cdots, x_{2n} \in \{-1, 1\}$, 其中恰有$n$个1和$n$个$-1$, 且满足对$1 \leq k \leq 2n$, 有

$$x_1 + \cdots + x_k \geq 0.$$

满足上述条件的序列$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$称为长度为$2n$的Catalan序列.

一个长度为$2n$的Catalan序列可以对应于一条从$(0,0)$出发到$(2n, 0)$的折线, 且不到x轴下方. 利用折线计数法, 长度为$2n$的Catalan序列个数等于

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

设$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$是长度为$2n$的Catalan序列, 若对所有$1 \leq k < 2n$, 都有

$$x_1 + \cdots + x_k > 0,$$

则称$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$是长度为$2n$的本原Catalan序列.

一个长度为$2n$的本原Catalan序列一定满足$x_1 = 1$, $x_{2n} = -1$, 且$x_2, x_3, \cdots, x_{2n-1}$构成长度为$2n-2$的Catalan序列, 反之任取一个长度为$2n-2$的Catalan序列, 前面添上1, 后面添上$-1$后则是一个长度为$2n$的本原Catalan序列. 因此长度为$2n$的本原Catalan序列的个数等于$C_{n-1}$.

对于一个长度为$2n$的Catalan序列$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$, 可以确定一个最小的正整数$k \leq n$, 满足

$$x_1 + \cdots + x_{2k} = 0.$$

$(x_1, \cdots, x_{2k})$是一个长度为$2k$的本原Catalan序列, 其后$2n-2k$项也是一个Catalan序列. 对k分类计数, 我们得到Catalan数的递推公式,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad n \geq 1.$$

利用上面的递推关系, 可以解出Catalan数的生成函数. 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 4,$$

故$f(x)$在$|x|<\frac{1}{4}$时收敛. 由递推关系, 可得

$$f(x)^2=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}C_kC_{n-k}\right)x^n=\sum_{n\geq 0}C_{n+1}x^n=\frac{1}{x}(f(x)-1).$$

解得

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{x},\quad |x|<\frac{1}{4}.$$

例5.2. 将一个凸$n+2$边形用$n-1$条不相交的对角线剖分成n个三角形的方法数等于C_n.

例5.3. 设$\star$是非结合的二元运算, 对$n+1$个变量添加n个括号构成合理的运算顺序,

$$x_1\star x_2\star x_3\star\cdots\star x_{n+1}$$

添加括号的方法数等于C_n.

例5.4. 具有$n+1$个端点($2n+1$个顶点)的二叉树的个数等于C_n. (注: 端点是指最下面的度为1的顶点)

Stirling数

记$[n]=\{1,2,\cdots,n\}$. 一个$[n]$上的排列π有几种表示方法. 直接写成一个序列

$$\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n).$$

一个排列π也可以看做$[n]$到自身的一个双射$\pi:[n]\to[n]$, 如果看作双射, 在映射的复合下, 所有的排列构成一个群, 记为$\mathfrak{S}_n$, 称为n阶对称群. 为表示映射关系, 可将π记成

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n)\end{pmatrix}.$$

这样的好处在于可以打乱第一行数的书写顺序, 只需保持映射关系, 从而有利于给出复合映射.

每一个排列π也可以写成一些不相交的圈的乘积. 这是因为对任意$x\in[n]$, 存在一个正整数k, 使得$\pi^{(k)}(x)=x$, 对$0<j<k$, $\pi^{(j)}(x)\neq x$, 这样$x,\pi(x),\cdots,\pi^{k-1}(x)$ 就构成一个圈, 记为$(x,\pi(x),\cdots,\pi^{k-1}(x))$, 这个圈的长度为$k$. 很明显, π 的两个圈要么完全相同, 要么没有公共元素. 设$C_1,C_2,\cdots,C_l$是π的所有互不相交的圈, 我们可将π表示为$\pi=C_1C_2\cdots C_l$.

例如[7]上的一个排列π, 若写成序列形式是$3,4,5,2,1,7,6$, 则写成映射形式是

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&5&2&1&7&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&4&2&5&6&7\\3&5&2&4&1&7&6\end{pmatrix},$$

写成圈乘积的形式是

$$\pi = (1,3,5)(2,4)(6,7).$$

写成圈乘积的形式并非唯一的, 因为将一个圈中的数作轮换排列后仍表示同一个圈, 不同圈交换次序其乘积仍表示同一个排列, 而这两点就是所有可能的差异. 例如上面的π还可以写成

$$\pi = (4,2)(3,5,1)(7,6),$$

对$\pi \in S_n$, 设π的圈乘积表示中有c_i个长度为i的圈, $i = 1, 2, \cdots, n$, 这里c_i 是非负整数. 数组$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$称为$\pi$的圈型, 为突出$\pi$, 也可写为$c(\pi)$, $|c| = \sum_{i=1}^n c_i$称为π的圈数. 例如对上面的π,

$$c(\pi) = (0,2,1,0,0,0,0).$$

命题5.5. 在S_n中具有给定圈型$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$的排列的个数是

$$\frac{n!}{c_1!1^{c_1}c_2!2^{c_2}\cdots c_n!n^{c_n}}.$$

记S_n中圈数为k的排列个数为$c(n,k)$, $1 \le k \le n$, 并规定对$n > 0$, $c(n,0) = 0$, 对$k > n$, $c(n,k) = 0$, 以及$c(0,0) = 1$. $c(n,k)$称为无符号的第一类Stirling数.

命题5.6. $c(n,k)$满足如下递推关系: 对任意正整数n, k, 有

$$c(n,k) = (n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1).$$

定理5.7. 对任意正整数n, 有

$$(x)^n := x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^k.$$

记$s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k)$, 称为带符号的第一类Stirling数. 由定理5.7立即可知,

$$(x)_n := x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

将一个n元集合X划分成若干个不计次序的非空子集, 称为X的无序划分, 若将X划分成k个不计次序的非空子集, 则称为X的无序k-划分, 记$S(n,k)$为一个n 元集合的无序k- 划分的个数, 称为第二类Stirling 数.

规定$S(0,0) = 1$, 对$n > 0$, $S(0,n) = S(n,0) = 0$.

命题5.8. $S(n,k)$满足如下的递推关系: 对任意正整数n, k, 有

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

命题5.9. 第二类Stirling数满足如下的递推关系: 对任意$m \geq 1$, $n+1 \geq m$, 有

$$S(n+1,m)=\sum_{k=m-1}^{n}\binom{n}{k}S(k,m-1).$$

证明: 如果$m=1$, 则两边都等于1. 下面假设$m \geq 2$. 对$[n+1]$的一个无序m-划分$X_1, X_2, \cdots, X_m$, 可规定$n+1 \in X_m$, 设$X_1 \cup \cdots \cup X_{m-1}=K$, 则$K \subset [n]$. 设$|K|=k$, 则$m-1 \leq k \leq n$, 去掉$X_m$后, $X_1, \cdots, X_{m-1}$是K的一个无序$(m-1)$-划分. 这样选取X_m(等价地选取K)有$\binom{n}{k}$种方法, 再对K作无序$(m-1)$-划分有$S(k,m-1)$种方法, 对k求和, 即得

$$S(n+1,m)=\sum_{k=m-1}^{n}\binom{n}{k}S(k,m-1).$$

定理5.10. 对任意正整数n, 有

$$\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(x)_k=x^n.$$

证明: 第一种证明是对n归纳, 并利用$S(n,k)$的递推关系. 显然$n=1$时,

$$S(1,1)(x)_1=x.$$

假设结论在n时成立, 考虑$n+1$的情形. 我们有

$$\begin{aligned}
x^{n+1}=x^n\cdot x&=\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(x)_k\cdot x\\
&=\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(x)_k(x-k+k)=\sum_{k=1}^{n}(S(n,k)(x)_{k+1}+kS(n,k)(x)_k)\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}(S(n,k-1)+kS(n,k))(x)_k=\sum_{k=1}^{n+1}S(n+1,k)(x)_k.
\end{aligned}$$

第二种证明是考虑组合意义. 由于要证明两个多项式相等, 只需证明这两个多项式在无穷多个点上取值相同. 我们对正整数x, 证明等式两边相同. x^n是一个n元集合N到一个x元集合X的映射个数. 按照映射的像的个数分类, 如果像是k个元素, 我们需要将N划分成k个非空子集, 有$S(n,k)$ 种方法, 再将这k个子集对应到X中k个不同的元素, 有$(x)_k$种方法, 因此像是k个元素的映射有$S(n,k)(x)_k$个. 对k求和, 即得

$$\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(x)_k=x^n.$$

□

当$x = k$时, $(x)_k = k!$, 因此$k!S(n,k)$计算了从n元集到k元集的满射的个数, 由例4.4, 可知

$$k!S(n,k) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.$$

所以又有$S(n,k)$的如下表达式.

命题5.11. 对任意正整数n,k, 有

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.$$

考虑由$x, x^2, \cdots, x^n$在实系数多项式中张成的n维空间V, $(x)_1, (x)_2, \cdots, (x)_n$也是$V$的基, 这两个基之间的过渡矩阵恰是由第一类和第二类Stirling数构成的矩阵.

命题5.12. 矩阵$(s(i,j))_{1\le i,j\le n}$和$(S(i,j))_{1\le i,j\le n}$互为逆矩阵, 对任意正整数$i, j \le n$, 有

$$\sum_{k=1}^{n} s(i,k)S(k,j) = \sum_{k=1}^{n} S(i,k)s(k,j) = \delta_{i,j}.$$

Bell数

对正整数n, 记B_n为一个n元集合的无序划分的个数, 称为第n个Bell数. 规定$B_0 = 1$. 易知, B_n为一个n元集合上不同等价关系的个数. 对划分的集合个数分类计数可知, 对任意$n \ge 0$,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k).$$

命题5.13. Bell数B_n满足递推关系: 对$n \ge 0$, 有

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

证明: 第一种证明是利用$S(n,k)$的递推关系. 由于$S(n+1,0) = 0$, 故

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} S(n+1,k) = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} S(n+1,k) \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=k-1}^{n}\binom{n}{i}S(i,k-1) = 1 + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=2}^{i+1}S(i,k-1) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}B_i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i.
\end{aligned}$$

第二种证明是用组合意义来解释两边. 对$[n+1]$的任意一个无序划分, 设含有$n+1$的集合含有$k+1$个元素, $0 \le k \le n$, 去掉这个集合后得到$[n]$中的一个$(n-k)$元

子集的无序划分. 从而$[n]$中选一个$(n-k)$元子集有$\binom{n}{n-k}$种方法, 对这个子集作无序划分有B_{n-k}种方法, 对k求和即得

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}B_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

定理5.14. $S(n,k)$的指数型生成函数为

$$\sum_{n\geq 0}\frac{S(n,k)}{n!}x^n=\frac{(e^x-1)^k}{k!}.$$

证明: 在这里的计算中, 0^0应理解为1. $k=0$时结论显然. 下面假设$k\geq 1$. 利用命题5.11, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{S(n,k)}{n!}x^n&=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}j^n(-1)^{k-j}\\&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1}{k!}\binom{k}{j}\sum_{n\geq 0}j^n\frac{x^n}{n!}\\&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1}{k!}\binom{k}{j}e^{jx}\\&=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(e^x)^j(-1)^{k-j}=\frac{1}{k!}(e^x-1)^k.\end{aligned}$$

定理5.15. B_n的指数型生成函数为

$$\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}x^n=e^{e^x-1}.$$

证明: 由B_n和$S(n,k)$的关系, 以及$S(n,k)$的指数型生成函数, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}x^n&=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}S(n,k)\right)\frac{x^n}{n!}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{S(n,k)}{n!}x^n\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(e^x-1)^k}{k!}=e^{e^x-1}.\end{aligned}$$

练习

练习: 一个$2\times n$的矩阵, 恰含有数$1,2,\cdots,2n$, 且每行从左至右递增, 每列从上至下递增. 证明: 这样的矩阵个数等于C_n.

练习: 试给出例5.3和例5.4之间的双射.

练习: 证明关于第二类Stirling数的如下数值:
(1) $S(n,2)=2^{n-1}-1$;
(2) $S(n,n-1)=\binom{n}{2}$;
(3) $S(n,n-2)=\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}$.

练习: 设n,k,r是正整数, $n\geq k+r$. 对$[n]$作无序$(k+r)$-划分, 要求$1,2,\cdots,k$没有两个数在同一个集合中. 证明: 这样的无序$(k+r)$-划分的个数为

$$\sum_{i=r}^{n-k}\binom{n-k}{i}S(i,r)k^{n-k-i}.$$

6 Pólya计数定理

例6.1. 在圆周上等距离地分布着n个点, 将每个点染为m种颜色之一. 对于两种着色方式, 若将圆周适当旋转后这两种着色相同, 则称这两种着色方式是等价的. 这在所有着色方式上定义了一个等价关系. 在这个等价关系下, 共有多少个等价类?

将圆周上的点按顺时针方向依次记为$A_1, A_2, \cdots, A_n$, $X = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$. 不妨设$m$种颜色构成的集合就是$[m]$. 那么给$X$中的点着色等价于一个映射$f : X \to [m]$, 也等价于一个数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 其中$a_i = f(A_i)$, 即$A_i$的颜色. 所有的着色方式即为集合$F(X, [m]) = \{f|\, f : X \to [m]\}$. 由乘法原理, $|F(X, [m])| = m^n$.

考察一种着色$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$所在等价类的元素个数, 这由$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的最小周期决定. 若正整数d满足$a_{i+d} = a_i$, 对所有i成立, 则称d是$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的, 这里的下标在模n的意义下考虑. 若d是周期, 那么将这个着色顺时针旋转$\frac{2\pi d}{n}$后与原着色相同. 显然$d = n$是一个周期(很多时候当最小周期是n时, 称这种着色方式是非周期的), 而最小周期d一定是n 的约数. 构造一个最小周期为d的着色, 只需给出$A_1, A_2, \cdots, A_d$上的一个着色, 使得这d个点的着色是非周期的(即没有比d更小的周期), 再将这d的点的着色复制$\frac{n}{d}$段即可.

如果最小周期为d的着色方式有x_d个, 则着色的等价类个数等于

$$\sum_{d|n} \frac{x_d}{d}.$$

注意x_d与n无关, 只与d有关, 它等于d项m染色的非周期序列个数.

而对任意正整数n, 都有

$$\sum_{d|n} x_d = m^n,$$

因为左边计算了所有n项的m染色序列. 由Möbius反演公式, 对任意正整数k, 有

$$x_k = \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) m^d.$$

关于Möbius反演公式, 见下一节. 我们可得等价类的个数为

$$\sum_{d|n} \frac{x_d}{d} = \sum_{d|n} \sum_{e|d} \frac{\mu(\frac{d}{e}) m^e}{d} = \sum_{uv|n} \frac{\mu(u) m^v}{uv}.$$

例如$n = 10$时, 有$d = 1, 2, 5, 10$. 从

$$\begin{cases} x_1 = m, \\ x_1 + x_2 = m^2, \\ x_1 + x_5 = m^5, \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_{10} = m^{10}. \end{cases}$$

可计算出

$$x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_5}{5}+\frac{x_{10}}{10}=\frac{1}{10}(m^{10}+m^5+4m^2+4m).$$

如果还允许圆周关于某条直径对称, 又该如何计算等价类的个数? 这样的计数问题, 可一般化为如下问题: 对一个有限集合X进行着色, 所用颜色也是一个有限集Y, 在所有着色方式的集合$F(X,Y)$上有一个群G的作用, 计算这个作用下的轨道个数. 解决这个问题的工具是Burnside引理.

Burnside引理

设G是一个群, X是一个集合, 所谓G在X上的一个*左作用*是指一个映射$G\times X\to X$, 用$g\cdot x$来表示(g,x)的像, 满足下述性质:

(i) 对任意$x\in X$, $1\cdot x=x$;

(ii) 对任意$g_1,g_2\in G$, $x\in X$, 有$g_2\cdot(g_1\cdot x)=(g_2g_1)\cdot x$.

对每个$g\in G$, $x\mapsto g\cdot x$都是X上的双射, 记为$\phi(g)\in S_X$, 而$\phi(g^{-1})$是$\phi(g)$的逆映射. 作用的两个性质可以写为$\phi(1)=\mathrm{id}_X$, $\phi(g_2)\phi(g_1)=\phi(g_2g_1)$. 因此$G$ 在X上的作用等同于G到S_X的群同态: $\phi: G\to S_X$.

例6.2. *设X是一个集合, $G\leq S_X$, 则G自然地作用在X上, $g\cdot x=g(x)$.*

当群G作用在集合X上时, X可划分为不相交的轨道的并. 对$x\in X$, x所在轨道是

$$O_x=\{g\cdot x|\, g\in G\}.$$

可以证明: 对于$x,y\in G$, 要么$O_x=O_y$(这当且仅当存在$g\in G$将x变为y), 否则O_x与O_y不相交. 如果在X上定义等价关系: $x\sim y$当且仅当存在$g\in G$, 使得$g\cdot x=y$, 那么这个等价关系的每个等价类就是一个轨道.

我们特别感兴趣G是有限群X是有限集时轨道个数的确定. 对每个$x\in X$, x的*稳定化子*$\mathrm{Stab}(x)$是固定x不变的g, 即

$$\mathrm{Stab}(x)=\{g\in G|\, g\cdot x=x\},$$

容易验证:

(1) $\mathrm{Stab}(x)$是G的子群;

(2) 对同一轨道中的两个元素x,y, $\mathrm{Stab}(x)$和$\mathrm{Stab}(y)$共轭, 故$|\mathrm{Stab}(x)|=|\mathrm{Stab}(y)|$;

(3) $|O_x|=\frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x)|}$.

对每个$g\in G$, 用$\mathrm{Fix}(g)$表示g的不动点集, 即

$$\mathrm{Fix}(g)=\{x\in X|\, g\cdot x=x\}.$$

定理6.3 (Burnside**引理**). *设有限群G作用在有限集X上, 则轨道个数*

$$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)|.$$

证明: 用两种方式来下面集合的元素个数,

$$S = \{(g, x) \in G \times X |\, g \cdot x = x\}.$$

一方面, 对每个固定的g, 满足$g \cdot x = x$的x有$|\operatorname{Fix}(g)|$个, 故

$$|S| = \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|.$$

另一方面, 对每个固定的$x \in G$, 满足$g \cdot x = x$的g有$|\operatorname{Stab}(x)|$个, 故

$$|S| = \sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}(x)|.$$

由此得

$$\sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)| = \sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}(x)|.$$

如果O是一个轨道, 则$|O| = \frac{|G|}{|\operatorname{Stab}(x)|}$, 对$x \in O$成立, 故

$$\sum_{x \in O} \frac{|\operatorname{Stab}(x)|}{|G|} = 1.$$

因此有

$$|X/G| = \sum_{x \in X} \frac{|\operatorname{Stab}(x)|}{|G|} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|.$$

□

计数问题上的应用

考虑有限集合X上的m着色, 给定置换群$G \leq S_X$, 对于两种着色$f : X \to [m]$和$g : X \to [m]$, 如果存在$\sigma \in G$, 使得$g = f\sigma$, 则认为f和g是等价的, 这在所有着色$F(X, [m])$上定义了等价关系. 我们来求等价类的个数.

G在$F(X, [m])$上的作用是$\sigma \cdot f = f\sigma^{-1}$(验证群左作用的条件). 根据Burnside引理, $F(X, [m])/G$的等价类个数为$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |\operatorname{Fix}(\sigma)|$. 设$\sigma$的圈型为$c(\sigma) = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$, $|c(\sigma)| = c_1 + \cdots + c_n$是圈的个数. 被$\sigma$固定的着色$f$所需满足的充分必要条件是在$\sigma$的每个圈上着色相同. 故被$\sigma$固定的着色个数为$m^{|c(\sigma)|}$. 由此我们得到下面的定理.

定理6.4 (Pólya**计数定理**). 设X是有限集, $G \leq S_X$是X上的置换群, 对于X上的所有m着色$F(X, [m])$, 引入等价关系

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \exists \sigma \in G,\, g = f\sigma.$$

则$F(X, [m])$在此等价关系下的等价类个数等于

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} m^{|c(\sigma)|},$$

这里$|c(\sigma)|$表示σ在X上写成不相交的圈乘积形式的圈的个数.

应用Pólya计数定理时, 最重要的是确定置换群$G \le S_X$中每个元素的圈个数.

我们将Pólya计数定理应用于例6.1上. 将圆周上n个点等同于$[n]$, 旋转产生的作用是n阶循环群$G = \langle \sigma \rangle \le S_n$, 其中$\sigma = (1, 2, \cdots, n)$. G中所有元素为$\{\sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^n\}$, 任意正整数$k$, σ^k是(k, n)个长度为$\frac{n}{(k,n)}$的圈相乘. 故由Pólya计数定理,

$$|F([n],[m])/G| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m^{(k,n)} = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)m^d.$$

例6.5. *在圆周上等距离地分布着n个点, 将每个点染为m种颜色之一. 对于两种着色方式, 若将圆周适当旋转或对称后这两种着色相同, 则称这两种着色方式是等价的. 这在所有着色方式上定义了一个等价关系. 在这个等价关系下, 共有多少个等价类?*

仍将圆周上的点等同于$[n]$. 由于还考虑圆周的对称, 此时作用在$[n]$上的置换群G是二面体群$D_{2n} \le S_n$. D_{2n}中元素包含n个旋转$\sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^n$, 以及$n$个对称(正$n$边形有$n$条对称轴)$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$.

若$n = 2k-1$是奇数, 则每个γ_i都是k个圈的乘积, 其中$k-1$个长度为2的圈, 1个长度为1的圈. 此时

$$|F([n],[m])/G| = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)m^d + n\cdot m^{\frac{n+1}{2}}\right).$$

若$n = 2k$是偶数, 则有k个γ_i是k个圈的乘积, 有k个γ_i是$k+1$个圈的乘积. 此时

$$|F([n],[m])/G| = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)m^d + \frac{1}{2}nm^{\frac{n}{2}}(m+1)\right).$$

当$n = 6$, $m = 2$时, 如果只考虑旋转, 有14个等价类. 如果考虑旋转和对称, 则有13个等价类. 其中着色

$$(1,1,2,1,2,2), \quad (1,1,2,2,1,2)$$

在旋转下是不等价的, 在旋转和对称下是等价的.

例6.6. *将一个立方体的六个面用m种颜色染色, 如果立方体经过旋转后两种着色方式相同, 则这两种着色方式是等价的. 计算等价类的个数.*

设这个立方体为$ABCD - A_1B_1C_1D_1$. 立方体的旋转群是24阶群G: 顶点A可以旋转到8个顶点中的任何一个, 转到一个顶点后还可以绕这个顶点和对顶点的轴旋转, 有3个位置. 我们要求出G作用在六个面上时, 每个旋转的圈分解形式.

(i) 恒等变换: 6个1圈(1个).

(ii) 绕对面中心的轴旋转: 2个1圈1个4圈(6个), 或2个1圈2个2圈(3个).

(iii) 绕对顶点的轴旋转: 2个3圈(8个).

(iv) 绕过不共面的两条平行棱中点的轴旋转180°: 3个2圈(6个).

由此可知, 等价类个数为

$$\frac{1}{24}(m^6+3m^4+12m^3+8m^2).$$

例6.7. 利用Pólya计数定理, 可以给出下式的另一个证明: 对任意正整数n,

$$(x)^n=\sum_{k=1}^{n}c(n,k)x^k.$$

我们在x是正整数时, 证明上述等式即可. 考虑在n元集合$[n]$上的x染色, 在置换群$G=S_n$下的着色等价类个数, 此时由于可做任意的排列, 因此一个等价类仅与每种颜色的元素个数有关, 即等价类的个数等于方程$n_1+n_2+\cdots+n_x=n$的非负整数解的个数, 为

$$\binom{x+n-1}{x-1}=\binom{x+n-1}{n}=\frac{(x)^n}{n!}.$$

另一方面, 利用Pólya计数定理, 着色等价类个数等于

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}x^{|c(\sigma)|}=\sum_{k=1}^{n}c(n,k)x^k.$$

从而有

$$(x)^n=\sum_{k=1}^{n}c(n,k)x^k.$$

练习

练习: 用m种颜色将一个立方体的8个顶点染色, 若两种着色方式在立方体适当旋转后相同, 则这两种着色方式等价. 计算着色等价类的个数.

练习: 设X是n元集, Y是m元集, G是X上的一个置换群, 诱导了作用$G\curvearrowright F(X,Y)$. 证明:

(1) 一个轨道中的映射要么全是单射, 要么全非单射.

(2) 包含单射的轨道个数为

$$\frac{1}{|G|}m(m-1)\cdots(m-n+1).$$

7 偏序集与Möbius反演公式

Möbius反演公式

定义Möbius函数如下: 对正整数n,

$$\mu(n)=\begin{cases}0, & n\text{有平方因子},\\ (-1)^k, & n\text{是}k\text{个不同素数的乘积}.\end{cases}$$

由定义, $\mu(1)=1$.

定理7.1 (Möbius**反演公式**). 设$\{a_n\}_{n\geq 1},\{b_n\}_{n\geq 1}$是两个复数序列, 满足对任意正整数$n$, 都有

$$a_n=\sum_{d|n}b_d,$$

那么, 对任意正整数n, 都有

$$b_n=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)a_d.$$

一个朴素的证明, 只需直接带入验证. 由于

$$\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)a_d=\sum_{d|n}\left(\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sum_{e|d}b_e\right)=\sum_{e|n}\left(\sum_{e|d,d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\right)b_e.$$

$\frac{n}{d}$取遍$\frac{n}{e}$的所有正约数. 利用μ的积性可证明的引理.

引理7.2. 设m是正整数, 则

$$\sum_{d|m}\mu(d)=\begin{cases}1, & m=1\\ 0, & m>1.\end{cases}$$

由此即得当$e=n$时, b_n的系数为1; 当$e<n$时, b_e的系数为0. Möbius反演公式成立.

另一个视角, 我们将一个复数序列$\{a_n\}_{n\geq 1}$等同于一个函数$f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{C}$, 称之为算数函数. 全体算数函数的集合记为$\mathcal{A}$. 在$\mathcal{A}$上定义加法, 即为通常函数的加法. 在$\mathcal{A}$上定义卷积: 对$f,g\in\mathcal{A}$, $f*g$也是一个算数函数, 对任意正整数n,

$$(f*g)(n)=\sum_{d|n}f\left(\frac{n}{d}\right)g(d).$$

由定义不难验证, 卷积是交换的和结合的, 加法和卷积还满足分配律. 因此$(\mathcal{A},+,*)$构成一个交换环, 也不难证明这是一个整环, 而事实上还是唯一分解环, 这是一个比较困难的结果. 其中恒为零的函数0是加法的单位元. 乘法单位元是下面的函数I,

$$I(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n>1.\end{cases}$$

容易验证对任意$f \in \mathcal{A}$, $f * I = I * f = f$.

如果$f * g = I$, 则称f, g互为逆元. 一个算数函数f存在乘法逆元当且仅当$f(1) \neq 0$. 恒为1的函数记为$\mathbf{1}$, 引理7.2表明

$$\mathbf{1} * \mu = I,$$

即$\mathbf{1}$和μ互为逆元.

设$f, g \in \mathcal{A}$, 若$f = \mathbf{1} * g$, 即对任意正整数n,

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

则两边卷积μ, 可得

$$\mu * f = \mu * \mathbf{1} * g = I * g = g,$$

即对任意正整数n,

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

采用这种观点, 我们可将Möbius反演公式推广到偏序集上, 整除关系只是某种偏序关系.

偏序集

设X是一个集合, 如果在X上定义了一个二元关系$P \subset X \times X$, 用$x \leq_P y$表示$(x, y) \in P$, 在不引起混淆下, 直接用$x \leq y$表示$(x, y) \in P$. 若R满足以下条件:

(i) 对任意$x \in X$, $x \leq x$; (自反性)

(ii) 对$x, y \in X$, 若$x \leq y$, $y \leq x$, 则$x = y$; (反对称性)

(iii) 对$x, y, z \in X$, 若$x \leq y$, $y \leq z$, 则$x \leq z$. (传递性)

则称(X, P)是一个偏序集, 或P是X上的一个偏序关系. 此时我们用$x < y$表示$x \leq y$, 且$x \neq y$; 又用$x \geq y$表示$y \leq x$, $x > y$表示$y < x$.

偏序集的例子有很多, 我们略举一二.

(a) 实数集合$\mathbb{R}$, $x \leq_P y$就是原本实数上的小于或等于, 则$(\mathbb{R}, P)$是一个偏序集.

(b) 正整数集合$\mathbb{N}^*$, 若$x \leq_P y$表示$x \mid y$, 则$(\mathbb{N}^*, P)$是一个偏序集.

(c) 设X是一个集合, 2^X表示X的所有子集构成的集合, 对$A, B \in 2^X$, 若$A \leq_P B$表示$A \subseteq B$, 则$(2^X, \leq_P)$是一个偏序集.

(d) 设$X = \{a, b, c\}$, $P = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (c, b)\}$, 则$(X, P)$是一个偏序集.

(e) 设(X, P)是一个偏序集, $Y \subset X$, 若在Y上定义二元关系Q, 对$y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \leq_Q y_2$当且仅当$y_1 \leq_P y_2$, 则(Y, Q)也是一个偏序集, 称为(X, P)在Y上的**诱导偏序集**. 若Y上的偏序关系Q满足: 若$y_1 \leq_Q y_2$, 则$y_1 \leq_P y_2$, 则称(Y, Q)是(X, P)的子偏序集. 注意, X在Y上的诱导偏序集一定是X的子偏序集, 但是子偏序集不一定是诱导偏序集.

在偏序集X中, 若一个元素x满足: 若$x \leq y$, 则$x = y$, 则称x是**极大元**; 若x满足对任意$y \in X$, 都有$x \geq y$, 则称x是**最大元**. 在一个偏序集中, 最大元未必存在, 若存在则

唯一; 极大元也未必存在, 但是极大元存在时不一定唯一. 类似也有极小元和最小元的概念.

在偏序集X中, 若$x > y$, 并且不存在元素z, 满足$x > z > y$, 则称x是y的上邻, y是x的下邻. 当X是有限集时, 称为有限偏序集. 对于有限偏序集, 常用一个图示来直观地显示其中的偏序关系, 用平面上的点来表示X中的元素, 若x是y的上邻, 则用一条x指向y的边连接x, y两点, 并且通常把x画在比y高的地方, 这样得到一个有向图, 其中包含了这个偏序集X的所有信息, 称为X的Hasse图.

设(X, P)和(Y, Q)是两个偏序集, 若映射$f : X \to Y$满足: 对任意$x_1 \leq_P x_2$, 都有$f(x_1) \leq_Q f(x_2)$, 则称f是偏序集同态. 若f还是一个双射, 并且f^{-1}也是一个偏序集同态, 则称f是(X, P) 和(Y, Q)之间的一个同构. 显然, f是同构当且仅当f是双射, 并且$x_1 \leq_P x_2$当且仅当$f(x_1) \leq_Q f(x_2)$.

例7.3. *试列举出所有互不同构的三元偏序集.*

若偏序集X中任意两个元素x, y, $x \leq y$或$y \leq x$至少有一个成立, 则称X是全序集. 对于偏序集X的子集Y, 若X在Y上的诱导偏序集是全序集, 则称Y是X中的一个链, $|Y|$称为这条链的长度. X中的最长的链的长度称为X的深度. 若Y中任意两个不同元素y_1, y_2, $y_1 < y_2$和$y_2 < y_1$ 都不成立, 则称Y是X中的一个反链. X的最大反链的元素个数称为X的宽度

定理7.4. *设X是一个偏序集. 若X的深度为$d < +\infty$, 则X可划分为d个反链.*

定理7.5 (Dilworth). *设X是一个有限偏序集. 若X的宽度为w, 则X可划分为w个链.*

定理7.6 (Sperner). *设X是一个n元集合, 则偏序集2^X的宽度为$\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$.*

证明: 取X的所有$[\frac{n}{2}]$元子集, 构成X的反链, 其大小为$\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$. 下面证明没有更大的反链.

设$A_1, A_2, \cdots, A_m$是X的一个反链.

对每个A_i, 记$S(A_i)$是X的元素排列时, A_i中元素排在最前$|A_i|$个位置的所有排列构成的集合. 由于A_i与A_j不包含, 故$S(A_i)$与$S(A_j)$不相交. 因此

$$\sum_{i=1}^{m} |S(A_i)| \leq n!.$$

另一方面, $|S(A_i)| = |A_i|!(n - |A_i|)! \geq [\frac{n}{2}]!(n - [\frac{n}{2}])!$, 故

$$m \cdot \left([\frac{n}{2}]!(n - [\frac{n}{2}])!\right) \leq n!,$$

从而$m \leq \binom{n}{[\frac{n}{2}]}$. □

上面的简短证明是Lubell在1966年给出的.

偏序集上的Möbius函数

在本节中, 我们均假设偏序集X满足如下性质: 对任意$x \le y$, 满足$x \le z \le y$的z是有限的, 这样的偏序集称为局部有限的. 对$x \le y$, 定义区间$[x, y] = \{z \in X | \, x \le z \le y\}$. 考虑$X$上的二元函数$f : X \times X \to \mathbb{C}$, 满足若$x \not\le y$, 则$f(x, y) = 0$. f可看作定义在每个区间$[x, y]$上的函数, 所有这样的函数记为集合$\mathcal{F}(X)$. 在$\mathcal{F}(X)$上有通常的函数加法, 还有一个卷积运算: 对$f, g \in \mathcal{F}(X)$, 以及$x \le y$,

$$(f * g)(x, y) = \sum_{z \in [x,y]} f(x, z)g(z, y).$$

卷积满足结合律, $f * (g * h) = (f * g) * h$, 但一般不满足交换律, 卷积和加法还满足分配律, 因此$(\mathcal{F}(X), +, *)$构成一个环.

函数$\delta \in \mathcal{F}(X)$定义如下:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

易知对任意$f \in \mathcal{F}(X)$, 有$\delta * f = f * \delta = f$, 故$\delta$是$\mathcal{F}(X)$中的乘法单位元.

对$f \in \mathcal{F}(X)$, 若对任意$x \in X$, $f(x, x) \ne 0$, 则存在$g \in \mathcal{F}(X)$, 使得$g * f = \delta$, g称为f的左逆元. 事实上, 由$g * f = \delta$, 可唯一地确定g为如下的函数: 对$[x, y]$的深度归纳地定义$g(x, y)$, 若$[x, y]$的深度为1, 即$x = y$, 令$g(x, x) = \frac{1}{f(x,x)}$. 若深度$< k$时都已定义了$g(x, y)$, 则对深度为$k$的$[x, y]$, 定义

$$g(x, y) = -\frac{1}{f(y, y)} \sum_{x \le z < y} g(x, z)f(z, y).$$

同样地, f的右逆元也存在, 即存在$g' \in \mathcal{F}(X)$, 使得$f * g' = \delta$, 并且此时左右逆元相等, $g = g'$.

函数$\zeta \in \mathcal{F}(X)$定义如下:

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & x \le y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

定义偏序集上的Möbius函数μ为ζ函数的乘法逆元. 于是, 由$\mu * \zeta = \zeta * \mu = \delta$, 可知$f = \zeta * g \Rightarrow g = \mu * f$, 类似地, $f = g * \zeta \Rightarrow g = f * \mu$.

定理7.7 (偏序集上的Möbius反演公式). *设X是一个局部有限偏序集, 且有最小元素, f, g是X上的两个函数. 若对任意$x \in X$, 都有*

$$f(x) = \sum_{u \le x} g(u),$$

则对任意$x \in X$, 都有

$$g(x) = \sum_{u \le x} f(u)\mu(u, x).$$

证明: 用0表示X中的最小元素. 令$F,G\in\mathcal{F}(X)$定义如下: 对任意$x\le y$, 若$x=0$, 则$F(x,y)=f(y)$, $G(x,y)=g(y)$, 否则$F(x,y)=G(x,y)=0$. 容易验证$F=G*\zeta$. 故$G=F*\mu$, 从而

$$g(x)=G(0,x)=(F*\mu)(0,x)=\sum_{u\le x}F(0,u)\mu(u,x)=\sum_{u\le x}f(u)\mu(u,x).$$

$\square$

例7.8. 考虑正整数集合$\mathbb{N}^*$上的整除偏序关系, 则偏序集上的Möbius函数

$$\mu(x,y)=\mu\left(\frac{y}{x}\right),$$

其中右边是通常的Möbius函数. 并且偏序集上的Möbius反演公式与通常的Möbius反演公式相同.

例7.9. 设S是一个有限集合, 考虑$X=2^S$和包含关系. 在这个偏序集上, 对$A,B\in 2^S$, $A\subseteq B$,

$$\mu(A,B)=(-1)^{|B|-|A|}.$$

可以直接验证上面定义的μ与ζ互为逆元. 此时的Möbius反演公式是如下形式:

设$f:2^S\to\mathbb{C}$, $g:2^S\to\mathbb{C}$, 满足对任意$A\in 2^S$, 有

$$f(A)=\sum_{B\subseteq A}g(B),$$

则对任意$A\in 2^S$, 有

$$g(A)=\sum_{B\subseteq A}(-1)^{|A|-|B|}f(B).$$

例7.10. 计算有限域上给定次数的不可约多项式的个数.

设$F=\mathbb{F}_q$是有限域, F上n次首一多项式有a_n个, 易知$a_n=q^n$, 故$\{a_n\}_{n\ge 0}$的普通生成函数为$\frac{1}{1-qx}$. 设F上n次不可约首一多项式有N_n个. 每个首一多项式唯一地分解为不可约首一多项式的乘积, 故

$$\frac{1}{1-qx}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^n}\right)^{N_n},\quad |x|<\frac{1}{q}.$$

两边取对数, 则有

$$\ln(\frac{1}{1-qx})=\sum_{n=1}^{\infty}N_n\ln(\frac{1}{1-x^n}),\quad |x|<\frac{1}{q}.$$

再展开成幂级数,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(qx)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(N_n\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^{jn}}{j}\right),\quad |x|<\frac{1}{q}.$$

比较两边x^n的系数, 则有

$$\frac{q^n}{n}=\sum_{d|n}\frac{N_d}{\frac{n}{d}}=\sum_{d|n}\frac{dN_d}{n}.$$

再利用Möbius反演公式, 即得

$$N_n=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d.$$

注: 由上述结果, 立即可推出在有限域上存在任意次数的不可约多项式. 事实上, 所有一次多项式都是不可约的. 对$n\geq 2$, 设n的标准分解为$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 只需考虑$\frac{n}{d}$是$p_1\cdots p_k$的约数, 否则$\mu(\frac{n}{d})=0$. 故

$$nN_n=q^n-\sum_{i=1}^{k}q^{\frac{n}{p_i}}+\sum_{i<j}q^{\frac{n}{p_ip_j}}-\cdots+(-1)^kq^{\frac{n}{p_1\cdots p_k}}.$$

设$q=p^l$, p是素数, 分析上式中p的幂次可知, $v_p(nN_n)=\frac{ln}{p_1\cdots p_k}$, 因此$N_n\neq 0$.

练习

练习: 设X是一个局部有限偏序集, $f,g\in\mathcal{F}(X)$, $f*g=\delta$. 设$x,y\in X$, 且$x\leq y$. 将$[x,y]$中所有元素按任意方式列出: $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 定义n阶方阵A,B如下, A,B 的第i行和第j列处的数分别为$f(x_i,x_j)$和$g(x_i,x_j)$, $1\leq i,j\leq n$. 证明: A,B互为逆矩阵.

练习: 设$A=(\alpha_{ij})$和$B=(\beta_{ij})$都是n阶下三角形矩阵. 证明以下两个结论等价:

(I) A和B互为逆矩阵.

(II) 对任意两组复数$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$, 若对每个$1\leq k\leq n$, 都有

$$b_k=\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}a_i,$$

则对每个$1\leq k\leq n$, 都有

$$a_k=\sum_{i=1}^{k}\beta_{ki}b_i.$$

练习: 设$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_0,b_1,b_2,\cdots,b_n$是任意两组复数. 已知对每个$0\leq k\leq n$, 都有

$$b_k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_i.$$

证明: 对每个$0\leq k\leq n$, 都有

$$a_i=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}b_i.$$

这称为二项式反演公式.

练习: 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$和$b_1, b_2, \cdots, b_n$是任意两组复数. 已知对每个$1 \le k \le n$, 都有

$$b_k = \sum_{i=1}^{k} s(k,i) a_i.$$

证明: 对每个$1 \le k \le n$, 都有

$$a_k = \sum_{i=1}^{k} S(k,i) b_i.$$

这称为Stirling反演公式.

练习: 设X是一个有限偏序集. 证明: 可将X中元素排成一列, 使得对任意$x, y \in X$, 若$x < y$, 则x排在y的左边.

8 鸽笼原理及其应用

定理8.1 (**鸽笼原理**). n只鸽子飞进m个笼子中, 必有一个笼子中有不少于$\lceil \frac{n}{m} \rceil$只鸽子.

鸽笼原理是组合数学中证明存在性问题的一个基本定理, 又称为抽屉原理, 本质是平均值原理和整数的离散性.

定理8.2 (**平均值原理**). 设$x_1, x_2, \cdots, x_m$和x都是实数, 且$x_1 + x_2 + \cdots + x_m \geq x$, 则存在某个$x_i \geq \frac{x}{m}$.

鸽笼原理叙述极其简单, 应用十分广泛, 在有些问题中, 运用鸽笼原理的方法可谓非常巧妙.

例8.3. 设k是一个正整数, 不被2整除也不被5整除, 则k有一个倍数形如$11\cdots 11$.

例8.4. 设n是正整数, 在$1, 2, \cdots, 2n$中任取$n+1$个数, 则其中必有一个数是另一个数的倍数.

例8.5 (Erdős-Szekeres). 设m, n是正整数, $x_1, x_2, \cdots, x_{mn+1}$是$mn+1$项实数序列. 一定存在$m+1$项递增子列或$n+1$项递减子列.

证明: 对每个x_i, 记l_i是以x_i为首项的最长递增子列的长度, k_i是以x_i为首项的最长递减子列的长度. 假设命题不成立, 那么$1 \leq l_i \leq m$, $1 \leq k_i \leq n$. 从而数对(l_i, k_i)的取值只有mn种. 由鸽笼原理可知, 存在$1 \leq i < j \leq mn+1$, 使得$(l_i, k_i) = (l_j, k_j)$.

若$x_i \leq x_j$, 则必然$l_i > l_j$, 因为以x_j为首项的最长递增子列前面添上x_i后是以x_i为首项的递增子列. 类似地, 若$x_i \geq x_j$, 则$k_i > k_j$. 故$(l_i, k_i) = (l_j, k_j)$不可能成立. □

例8.6 (**有理数逼近无理数**). 设α是无理数, 则存在无穷多个有理数$\frac{q}{p}$, 满足

$$\left| \alpha - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p^2}.$$

证明: 对任意正整数n, 考虑$n+1$各数$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \cdots, \{(n+1)\alpha\}$, 将$[0,1)$分成$n$个区间, $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 由鸽笼原理, 存在$1 \leq i < j \leq n+1$, 以及$1 \leq k \leq n$, 使得

$$\{i\alpha\}, \{j\alpha\} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right).$$

于是存在整数q, 使得$|(j-i)\alpha - q| < \frac{1}{n}$. 令$p = j - i$, 则$0 < p \leq n$, 并且

$$\left| \alpha - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{np} \leq \frac{1}{p^2}.$$

由n的任意性, 可知上式对无穷多个不同的有理数$\frac{q}{p}$成立. □

例8.7 (Kronecker). 设α是无理数, 则序列$\{n\alpha\}$, $n = 1, 2, \cdots$, 在$(0,1)$中稠密, 即对任意$(0,1)$中的区间(a,b), 都存在正整数n, 使得$\{n\alpha\} \in (a,b)$.

证明: 选取N, 使得$\frac{1}{N} < b-a$. 将$[0,1)$分成N个区间$[\frac{k-1}{N},\frac{k}{N})$, $1 \le k \le N$, 由鸽笼原理, 存在$1 \le i < j \le N+1$, 以及$1 \le k \le N$, 使得$\{i\alpha\},\{j\alpha\} \in [\frac{k-1}{N},\frac{k}{N})$. 令$j-i=p$, 于是$p\alpha = q+\varepsilon$, 这里$q$是整数, $0 < |\varepsilon| < \frac{1}{N} < b-a$(由于$\alpha$是无理数, $\varepsilon \neq 0$). 可适当选取正整数m, 使得$mp\alpha = mq+m\varepsilon$的小数部分在$(a,b)$中. 从而$n=mp$满足要求. $\square$

练习

练习: 设X是一个$mn+1$个元素的偏序集. 证明: X的宽度不小于$m+1$或X的深度不小于$n+1$.

练习: 设集合A由2012个不超过10^6的正整数组成. 证明: 存在A的两个不相交的非空子集, 它们中的元素和相等.

练习: 设集合A由15个不超过100的正整数组成. 证明: 存在整数n, 使得方程

$$x+y=n, \quad x \le y, \quad x,y \in A,$$

至少有两组解(x,y).

练习: 直角坐标平面上任给n^2+1个互不相同的点. 证明: 可以取其中$n+1$个点, 记为$A_i(x_i,y_i)$, $i=1,2,\cdots,n+1$, 使得数列$x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$和$y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}$都是单调的(可以一个单调增另一个单调减).

9 图的基本概念

基本定义

图是叙述组合结构的常用工具.

定义9.1. 一个图由以下一些数据构成: 顶点集合V, 边集合E, 以及每一条边$e \in E$对应两个顶点$x, y \in V$, x, y之间无次序. 记$G = (V, E)$.

例9.2. 图G的顶点集$V = \{x, y, z\}$, 边集$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, 每条边所对应的顶点由下表给出,

e_1	x, x
e_2	y, z
e_3	x, y
e_4	x, z
e_5	x, y

如果一条边所对应的两个顶点相同, 则称这条边为环边, 在例9.2中, e_1就是环边. 一个图如果有两条边对应的顶点相同, 则称这个图有重边, 在例9.2中, e_3和e_5对应的顶点相同, 因此上图是有重边的. 一个不含重边的图称为简单图. 在今后所说的图, 除非特别申明, 都指不含环边的图, 且V和E都是有限集合, 可以有重边.

一个图可以直观而形象地用一个图形表示, 在纸上标记若干个点对应V中元素, 一条边$e \in E$若对应两个顶点x, y, 则在x, y之间连一条线来表示这条边. 这种表示也是图的名词的由来, 而图的定义只是一组抽象的数据, 在研究图的问题时, 用图形来表示图是相当有用的.

设$G = (V, E)$是一个图, 对$x \in V$, $e \in E$, 若e所对应的两个顶点有x, 则记$x \in e$. 顶点x的度, 记为$\deg(x)$(或$\deg_G(x)$, 如果需要特别强调图G), 定义如下:

$$\deg(x) = \#\{e \in E |\, x \in e\}.$$

定理9.3 (**边数与度的关系**). 设$G = (V, E)$是一个图, 则

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2|E|.$$

推论9.4. 一个图中, 度为奇数的顶点个数是偶数.

在图G中, 如果一条边e对应的两个顶点为x, y, 可用$e = xy$来表示. 需要注意的是, 在有重边的图中, 可能有两条不同的边$e_1 \neq e_2$, 都写成$e_1 = xy$, $e_2 = xy$. 对于两个顶点$x \neq y$, 若存在一条边e, 使得$e = xy$, 则称x, y相邻. 对于两条边$e_1 \neq e_2$, 若存在顶点x, 使得$x \in e_1$, $x \in e_2$, 则称e_1与e_2相邻. 与x相邻的所有顶点称为x的邻域, 记为$N(x)$, 即

$$N(x) = \{y \in V |\, y\text{与}x\text{相邻}\}.$$

在简单图中, $|N(x)| = \deg(x)$, 但在含有重边的图中, 可能$\deg(x) > |N(x)|$.

途径和路

定义9.5. 设$G=(V,E)$是一个图, G的一个途径(walk)是指如下一个序列:

$$x_0, e_1, x_1, e_2, \cdots, x_{k-1}, e_k, x_k,$$

其中$x_0, x_1, \cdots, x_k$是顶点, $e_1, e_2, \cdots, e_k$是边, 且$e_i = x_{i-1}x_i$, $i = 1, 2, \cdots, k$. x_0称为起点, x_k称为终点. 如果一个途径中的$e_1, e_2, \cdots, e_k$互不相同, 则称其为一个迹(trail). 如果一个途径(或迹)中, $x_0 = x_k$, 则称为闭途径(或闭迹). 如果一条迹中$x_0, x_1, \cdots, x_k$互不相同, 则称为一条路(path). 如果一条闭迹中, $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$互不相同, 则称为一个圈(cycle). 一个途径, 迹, 闭途径, 闭迹, 路, 圈的长度都指其中所含边的个数.

命题9.6. 设$G=(V,E)$是一个图, 若对每个$x \in V$, $\deg(x) \geq 2$, 则G中有圈.

定理9.7. 设$G=(V,E)$是一个图, 若$|E| \geq |V|$, 则G中有圈.

定义9.8. 设$G=(V,E)$是一个图, $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$, 满足对任意$e \in E_1$, e对应的两个顶点均在V_1中, 则称图$G_1 = (V_1, E_1)$是G的子图. 如果$G_1 = (V_1, E_1)$是$G=(V,E)$的子图, 且$V_1 = V$, 则称G_1是G的生成子图.

定义9.9. 设$G=(V,E)$是一个图, $U \subseteq V$, 令$E|_U = \{e \in E | \, e = xy, x, y \in U\}$, 则图$(U, E|_U)$是$G$的子图, 称为$G$在$U$上的诱导子图, 记为$G|_U$.

定义9.10. 设$G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 是n个图, 这n个图的不交并$\sqcup_{i=1}^n G_i$是这样一个图, 它的顶点集是n个顶点集的不交并$\sqcup_{i=1}^n V_i$, 边集是n个边集的不交并$\sqcup_{i=1}^n E_i$, 并且每条边保持原有对应的两个顶点.

设$G=(V,E)$是一个图, 对$x, y \in V$, $x \neq y$, 若存在以x为起点, y为终点的途径, 则称x与y连通, 另外规定x与自身连通, 则易知, 连通关系是一个等价关系. 如果任意两个顶点都连通, 则称G是连通图. 设V按连通关系分成若干个等价类$V_1, V_2, \cdots, V_n$, 则$G|_{V_i}$称为G的一个连通分支, G可看作是这些连通分支的不交并, 每个连通分支都是连通图.

定理9.11. 设$G=(V,E)$是一个图, 若G是连通图, 则$|E| \geq |V| - 1$.

若$|V| = n$, 我们称G是一个n阶图. 上面的定理即说, 一个n阶连通图至少有$n-1$条边.

图的同态与同构

定义9.12. 设$G_i = (V_i, E_i)$是两个图, $i = 1, 2$. G_1到G_2的同态由以下数据给出: 顶点集上的映射$\varphi : V_1 \to V_2$, 边集上的映射$\varphi : E_1 \to E_2$, 满足对任意$e \in E_1$, 若$e = xy$, 则$\varphi(e) = \varphi(x)\varphi(y)$. 此时我们记$\varphi : G_1 \to G_2$. 若同态$\varphi : G_1 \to G_2$在顶点集和边集上都是双射, 则称$\varphi$是$G_1$到$G_2$的同构. 一个图到自身的同构称为自同构. 易知两个同态的复合仍是图的同态, 因此图的自同构在复合下构成一个群, 称为图的自同构群, 记为$\mathrm{Aut}(G)$..

例9.13. 设$G=(V,E)$, $V=\{x,y,z\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, 其中

$$e_1=xy,\ e_2=xy,\ e_3=yz,\ e_4=yz.$$

则$\mathrm{Aut}(G)$是一个8阶群, 在顶点集上不变时, 边的对应有4种; 当x,z互换时, 边的对应也有4种. 进一步的分析可知, $\mathrm{Aut}(G)$同构于二面体群D_8.

一些例子

例9.14. n阶完全图K_n, 具有n个顶点$\binom{n}{2}$条边的简单图, 对于任意两个顶点x,y, $x\neq y$, 恰有一条边对应于x,y. K_n的自同构群是顶点集上的对称群S_n.

例9.15. 若n阶图恰为一个长度为n的圈, 记为C_n. C_n的自同构群是二面体群D_{2n}.

例9.16. B_n是一个2阶图, 有n条边, 称为香蕉图. B_n的自同构群是$\mathbf{Z}_2\oplus S_n$.

例9.17. 若将顶点集合V划分为m个子集$V_1,V_2,\cdots,V_m$, 边集定义如下: 对于任意两个顶点x,y, 若x,y不在同一个V_i中, 则恰有一条边对应于x,y, 否则没有边对应于x,y, 这样的图称为m部完全图, 记为$K(V_1,V_2,\cdots,V_m)$, 或$K(|V_1|,|V_2|,\cdots,|V_m|)$, 或$K_{|V_1|,|V_2|,\cdots,|V_m|}$. 完全二部图$K_{1,n}$称为星图.

定义9.18. 一个图$G=(V,E)$称为m部图, 如果可将顶点集划分为m个子集(允许有空集), 使得任意一条边对应的两个顶点不在同一个子集中.

定理9.19. 一个图是二部图的充要条件是不存在长度为奇数的圈(奇圈).

证明: 显然, 若$G=(V,E)$是二部图, V划分为V_1,V_2, 则任意一条闭途径经过的顶点交替在V_1,V_2中, 长度一定为偶数.

下面假设G不含奇圈, 可不妨设G是连通的, 否则在每个连通分支上证明是二部图即可. 我们首先说明G也不含长度为奇数的闭途径. 若G有长度为奇数的闭途径, 取其中长度最小的一条$x_0,e_1,\cdots,x_{k-1},e_k,x_k$, 由于这不是一个圈, 因此存在$0<i<k$, 使得$x_0=x_i=x_k$, 从而$x_0,e_1,\cdots,e_i,x_i$和$x_i,e_{i+1},\cdots,e_k,x_k$都是闭途径, 其中有一条长度为奇数, 这与一开始所选长度最小的闭途径矛盾.

现取定一个顶点x放入V_1, 对任意$y\neq x$, 由于x到y的任意一条途径长度都具有相同奇偶性(否则就会产生长度为奇数的闭途径), 若x到y的途径长度为奇数, 就将y放入V_2中, 否则将y放入V_1中. 这样的划分符合要求, 显然与x相邻的顶点都在V_2中, 对于任意两个相邻的不同于x的顶点y,z, x到y,z的途径长度具有不同的奇偶性, 因此y,z不在同一个子集中. $\square$

距离, 半径和直径

设$G=(V,E)$是一个图. 定义$d:V\times V\to\mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{+\infty\}$. 对$x,y\in V$, 若$x,y$不连通, 则$d(x,y)=+\infty$; 若$x=y$, 则$d(x,y)=0$; 若$x\neq y$且$x,y$连通, 则$d(x,y)$为从$x$到$y$的最短途径的长度. $d(x,y)$称为x,y之间的距离.

设G是连通图, 则d是定义在V上的度量, d满足度量的对称性, 正定性和三角不等式, $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$. G的直径是为

$$\operatorname{diam}(G)=\max_{x,y\in V} d(x,y).$$

对每个$x\in V$, 记$r(x)=\max_{y\in V} d(x,y)$, 称为$x$点的半径, G的半径为

$$r(G)=\min_{x\in V} r(x).$$

命题9.20. 对任意一个图G, 有

$$r(G)\leq \operatorname{diam}(G)\leq 2r(G).$$

收缩, 删除

对一个图$G=(V,E)$, 常有以下三种操作.

例9.21. 取V的子集$U\subset V$, 将其收缩为一个点, 得到一个图$H=(V',E')$. 其严格的定义如下: H的顶点集$V'=(V\backslash U)\cup\{u\}$, 其中$u$是新加入的顶点, 与$U$对应. H的边集E'构成如下, 对$e\in V$, 设$e=xy$, 若$x,y\in V\backslash U$, 则将e加入E'中, 并仍对应于x,y. 若x,y中一个在$V\backslash U$中, 一个在U中, 不妨设$x\in U$, $y\in V\backslash U$, 则将e加入E'中, 并让其对应于u,y. 若$x,y\in U$, 则这条边不加入E'中. 这个操作称为收缩U.

例9.22. 取V的子集$U\subset V$, 将其删除, 得到一个图$H=(V',E')$. 其严格的定义如下: $V'=V\backslash U$, $H=G|_{V'}$. 这个操作称为删除U.

例9.23. 取E的子集$E_1\subset E$, 将其删除, 得到一个图$H=(V,E\backslash E_1)$, H是G的生成子图, 这个操作称为删除E_1.

练习

练习: 设$G=(V,E)$是一个图, $x,y\in V$, $x\neq y$. 证明: 若存在以x为起点, y为终点的途径, 则存在以x为起点, y为终点的路.

练习: 设$G=(V,E)$是一个n阶图, 有k个连通分支. 证明: $|E|\geq n-k$.

练习: 设图G有m条边, 证明: 存在G的子图, 至少含有$\frac{m}{2}$条边, 且是二部图.

练习: 设G是一个简单图. 若每个顶点的度都不小于3, 则G必有偶圈.

10 树

树的定义和基本性质

定义10.1. 一个图称为是树, 如果它是连通的且不含圈(注意不含圈的图一定是简单图). 如果一个图不含圈, 则称其为森林, 显然森林的每个连通分支是树.

定理10.2. 设$G=(V,E)$是一个n阶简单图, 则以下结论等价:
(1) G是树.
(2) G是连通的, 且$|E|=n-1$.
(3) $|E|=n-1$且G不含圈.
(4) 对任意$x,y\in V$, $x\neq y$, 有唯一的从x到y的路.
(5) G是连通的, 任意删去一条边后G就不连通.
(6) G不含圈, 任意添上一条边后G就含圈.

定义10.3. 设G是一个图, T是G的生成子图, 若T是树, 则称T是G的生成树.

命题10.4. 任何一个连通图都有生成树.

一个图中, 度为1的顶点称为叶子, 度为0的顶点称为孤立点.

命题10.5. 设T是一个树, 阶数不小于2, 则T至少有两个叶子. 若T恰有两个叶子, 则这两个叶子之间的路恰经过T的所有边. 删去T的一个叶子后, 仍是树.

标记树的计数

一个n阶树T, 若将其顶点集与$[n]$建立一一对应, 即在n个顶点上标上数$1,2,\cdots,n$, 则称为标记树. 两个n阶标记树T_1,T_2认为是相同的, 当且仅当对T_1中的任意一条边e_1, 若其两个端点的标数为i,j, 则在T_2中也有一条边e_2, 其两个端点的标数为i,j.

例10.6. 3阶标记树共有3个, T_1,T_2,T_3. 其中T_1的边为$12,23$, T_2的边为$23,31$, T_3的边为$31,12$.

定理10.7 (Cayley**定理**). n阶标记树一共有n^{n-2}个.

$n=1,2$时, Cayley定理的结论是显然的. 以下考虑$n\geq 3$. 我们给出所有n阶标记树到$n-2$元数组$[n]^{n-2}$的一一对应, 从而得到Cayley定理的证明. 对每个n阶标记树$T=(V,E)$, 如下定义一个$n-2$元数组$(i_1,i_2,\cdots,i_{n-2})$, 称为T的Prüfer码: 记$T_1=T$, 取T_1的标数最小的叶子v, 记i_1为v在T_1中的邻点上的标号, 在T_1中删去v, 得到树T_2, 保留顶点上的标数. 继续这样的过程, 假设得到了树T_k, $k\leq n-2$, 取T_k上标数最小的叶子u, 记i_k为u在T_k中的邻点上的标号, 在T_k中删去u, 得到树T_{k+1}. 这样一直做到T_{n-1}, 并得到数组$(i_1,i_2,\cdots,i_{n-2})$.

例10.8. 7阶标记树$T=([7],E)$的6条边为$15,16,67,34,23,13$, 那么T的Prüfer码为

$$(3,3,1,5,1,6)$$

定理10.9. 对每个$n-2$元数组$(i_1, i_2, \cdots, i_{n-2}) \in [n]^{n-2}$, 恰有一个$n$阶标记树, 它的Prüfer码为$(i_1, i_2, \cdots, i_{n-2})$.

证明: 先观察由T得到Prüfer码的过程中的若干性质.

(i) 最后T_{n-1}是两个顶点的树, 其中有一个顶点的标数为n.

(ii) 对每个$1 \le k \le n$, 数k在T的Prüfer码中出现$d_k - 1$次, 其中d_k是标记k的顶点在T中的度.

(iii) 设$1 \le k \le n-1$, 若k在Prüfer码中出现, 最后一次出现在$i_m = k$, 则T_{m+1}中, 标数为k的顶点是叶子.

有了上面的性质, 我们对每个数组$(i_1, i_2, \cdots, i_{n-2}) \in [n]^{n-2}$来还原$T$, 并且可知这样的$T$是唯一的. 令$N_1$为$[n]$中为未在$i_1, i_2, \cdots, i_{n-2}$中出现的数, 这些数是$T_1$中的叶子, 令$j_1 = \min N_1$, j_1是第一个删去的点. 再令N_2为$[n]\backslash\{j_1\}$中并且未在$i_2, \cdots, i_{n-2}$中出现的数, 这些数是T_2中的叶子, 令$j_2 = \min N_2$, j_2是第二个删去的点. 这样依次下去, 得到数$j_1, j_2, \cdots, j_{n-2}$, 由构造方法可知, 它们互不相同, j_{n-2}是T_{n-2}中删去的数, 最后剩下的两个数记为j_{n-1}和$i_{n-1} = n$, 是T_{n-1}中的两个顶点.

在顶点集$[n]$上连$n-1$条边$i_1j_1, i_2j_2, \cdots, i_{n-1}j_{n-1}$, 得到图$T$. 倒退地依次考虑

$$T_{n-1}, T_{n-2}, \cdots, T_2, T_1,$$

可知T_{k-1}是在T_k的基础上再引入一个顶点i_{k-1}和一条边$i_{k-1}j_{k-1}$. 故每个T_k都是连通的, 特别$T = T_1$是连通的, T是一个n阶标记树, 且由构造可知T的Prüfer码恰为$(i_1, i_2, \cdots, i_{n-1})$. □

推论10.10 (Moon). 设$d_1, d_2, \cdots, d_n$是正整数, 满足$\sum_{k=1}^n d_k = 2n-2$. 则n阶标记树中, 标$1, 2, \cdots, n$的顶点的度恰为$d_1, d_2, \cdots, d_n$的标记树的个数为

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \cdots, d_n-1}.$$

推论10.11 (Menon). 对任意满足$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n-2$的正整数$d_1, d_2, \cdots, d_n$, 都存在一个$n$阶树, 其顶点的度恰为$d_1, d_2, \cdots, d_n$.

带根树与搜索法

设$T = (V, E)$是一个树, 若指定一个顶点$x \in V$为T的根, 则称为带根树. 对于带根树T, 设x是根, 则顶点v到x的距离称为v的深度.

下面我们讨论如何有效地在一个连通图中搜索生成树. 利用破圈法得到一个连通图的生成树, 在理论上是正确的, 但是在实际的算法中, 计算复杂度是很高的. 在一个连通图中搜索生成树常用的有效的算法有*广度优先搜索法*(Breadth first search), 简称BFS, 和*深度优先搜索法*(Depth first search), 简称DFS.

例10.12 (BFS). 设$G = (V, E)$是一个连通的简单图, BFS算法如下:

(1) 任取一个顶点x, 赋值为0, 令变量$k = 0$.

(2) 将所有赋值为k的顶点列出$x_1, \cdots, x_m$, 依次对$i = 1, 2, \cdots, m$, 找出与x_i相邻且未复值的所有点, 将这些点赋值为$k+1$, 并标记出它们与x_i之间的边. 如果没有顶点赋值为$k+1$, 则进行(3), 否则将k的值增加1, 再重复(2).

(3) 结束, 设所有标记的边为$E' \subset E$, 则(V, E')是一个生成树.

在BFS算法中, 若以第一个取的顶点x为根, 那么每个顶点上的赋值恰是在这个带根树上的深度.

例10.13 (DFS). 设$G = (V, E)$是一个连通的简单图, DFS算法如下:

(1) 任取一个顶点x, 作上标记, 令变量$k = x$.

(2) 若k有未标记的邻点, 任取这样一个邻点v作上标记, 并记录有序数组(k, v), k变为v, 重复(2); 若k没有未赋值的邻点, 且$k \neq x$, 取记录过的一个有序数组(y, k), k变为y, 重复(2); 若k没有未赋值的邻点, 且$k = x$, 进行(3).

(3) 结束, 所有记录的有序数组(u, v)改成无向边uv, 构成的边集E', 则(V, E')是G的生成树.

生成树的个数

设G是一个连通图, G的生成树的个数记为$\kappa(G)$, 这是G的一个重要不变量, 在现代数学研究中, 与图论, 代数组合, 代数几何, 代数数论都有关系. 若G不连通, 则令$\kappa(G) = 0$.

例10.14. 设$G = K_n$, 则$\kappa(G) = n^{n-2}$, 这就是Cayley定理. 并且由此可知, 计算一个n阶连通图G的生成树个数不会有一个n的多项式时间内的算法.

一般而言, 计算$\kappa(G)$是困难的, 特别对于有重边的图. 我们有下面的递推公式.

定理10.15. 设G是一个连通图, u, v是两个相邻的顶点, 它们之间有m条边$e_1, \cdots, e_m$, 用$G - \{e_1, \cdots, e_m\}$表示删去边$e_1, \cdots, e_m$后的图, $G/\{u, v\}$表示收缩$\{u, v\}$后的图, 则有

$$\kappa(G) = \kappa(G - \{e_1, \cdots, e_m\}) + m \cdot \kappa(G/\{u, v\}).$$

证明: 若G的生成树T不含u, v之间的边, 那么T就是$G - \{e_1, \cdots, e_m\}$的生成树, 这样的T有$\kappa(G - \{e_1, \cdots, e_m\})$个. 若$T$含$u, v$之间的边, 那么$T/\{u, v\}$恰是$G/\{u, v\}$的生成树, 且每个$G/\{u, v\}$的生成树$T'$, 恰有$m$个$G$中的生成树$T$, 使得$T/\{u, v\} = T'$. 两种情形总计即为$\kappa(G)$. □

练习

练习: 设一个8阶标记树的Prüfer码为$(3, 5, 2, 2, 7, 5)$, 求这个8阶标记树.

练习: 设正整数$n \geq 3$, $d \leq n-1$. 求所有标记树中, 标1的顶点的度恰为d的标记树个数.

练习: 证明: 在树中, 距离最大的两个顶点一定是两个叶子.

练习: 设T是树, 半径为r, 直径为d. 证明: $r = \lceil \frac{d}{2} \rceil$.

练习: 设T是树, v是T的一个顶点, 度为d. 证明: 从T中删去v后得到的图恰有d个连通分支.

练习: 设T是树. 证明: T至少有$\Delta(T)$个叶子, 这里$\Delta(G)$表示图G中顶点度的最大值.

练习: 计算$\kappa(C_n)$, $n \geq 3$.

练习: 计算$K_{3,3}$的生成树的个数.

11 Euler图与Hamilton图

Euler图

定义11.1. 一个遍历所有边的迹称为Euler迹. 若一个连通图包含一个闭的Euler迹, 这称之为Euler图.

定理11.2. 一个连通图是欧拉图的充分必要条件是每个顶点的度均为偶数.

证明: 必要性显然. 对图的边数归纳证明充分性. 边数为2时, 只能是两个顶点的香蕉图B_2, 是Euler图. 下面假设边数较小时结论成立, 由于每个顶点度至少为2, 因此存在一个圈

$$C: \quad x_0, e_1, x_1, \cdots, x_{k-1}, e_k, x_0.$$

在图中删去边$e_1, e_2, \cdots, e_k$, 得到的图分成若干个连通分支$G_1 \sqcup G_2 \sqcup \cdots \sqcup G_m$, 设$G_i$中含有点$x_{t_i}$, 且不妨设$t_1 < t_2 < \cdots < t_m$. 每个连通分支$G_i$仍满足每个顶点的度为偶数, 由归纳假设, 每个连通分支都是Euler图, 存在一个以x_{t_i}为起点和终点的Euler迹C_i. 这样我们在G中也可走出一个闭的Euler迹, 从x_0开始沿着C走, 到x_{t_1}处则走C_1, 再回到C中, 继续走到x_{t_2}, 再走C_2, 每到一个x_{t_i}处就走完C_i再回到C上继续走, 这样便得到G中的一个闭Euler迹 □

推论11.3. 一个连通图有一个Euler迹的充分必要条件是至多两个顶点的度为奇数.

Hamilton图

定义11.4. 一个遍历所有顶点的路称为Hamilton路. 一个遍历所有顶点的圈称为Hamilton圈. 含有Hamilton圈的图称为Hamilton图.

至今还未找到很好的充分必要条件来判定一个图是否为Hamilton图. 以下介绍两个可以判定Hamilton图的充分条件.

定理11.5 (Ore). 设G是一个n阶简单图, $n \geq 3$. 若对任意两个不相邻的顶点u, v, 都有

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

则G是Hamilton图.

证明: 假设u, v是G的两个不相邻的顶点, 且$\deg(u) + \deg(v) \geq n$, 在G中添上一条边$e = uv$, 得到新的一个图G', 则G可作为G'的生成子图. 我们证明若G'是Hamilton图, 则G也是Hamilton图.

设$x_1, e_1, x_2, \cdots, e_{n-1}, x_n, e_n, x_1$是$G'$中的Hamilton圈. 若其中不含边$e = uv$, 则这个圈也是$G$中的Hamilton圈. 若其中含有边$e = uv$, 不妨设$x_1 = u$, $x_2 = v$, $e_1 = e$. 设x_1于$x_3, \cdots, x_n$中k个点相邻, x_2与$x_3, \cdots, x_n$中l个点相邻, 于是

$$k + l = \deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n.$$

因此存在$3 \le i < n$, 使得u, x_i相邻, 而v, x_{i+1}相邻. 否则对$x_3, \cdots, x_n$中每个与u相邻的顶点, 它的下一个顶点不与v相邻, 这样$x_3, \cdots, x_n$中至少有$k-1$个顶点不与v相邻, 从而至多有$n-2-(k-1) = n-1-k$个顶点与v相邻, 这样$l \le n-1-k$, 这与$k+l \ge n$矛盾.

记$e' = ux_i$, $e'' = vx_{i+1}$, 此时我们可以看到G中有Hamilton圈

$$x_1, e', x_i, e_{i-1}, x_{i-1}, \cdots, x_2, e'', x_{i+1}, e_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n, e_n, x_1.$$

由于G中任意两个不相邻顶点u, v都满足$\deg(u) + \deg(v) \ge n$, 逐个添上这些边后得到一个完全图K_n. 由上面的结论可知, 每添一条这样的边, 不改变图的Hamilton性质, 由于K_n是Hamilton图, 因此原来的图G也是Hamilton图. □

推论11.6 (Dirac). *设G是一个n阶简单图, $n \ge 3$. 若对每个顶点u, 都有$\deg(u) \ge \frac{n}{2}$, 则G是Hamilton图.*

练习

练习: 证明: 完全二部图$K_{m,n}$是Hamilton图的充要条件是$m = n \ge 2$.

练习: 在一个$m \times n$的棋盘的某个方格中放有一枚棋子, $m, n \ge 2$. 每一步可以将其移动到水平或垂直的相邻方格中. 可以适当经过mn步移动后恰经过所有方格各一次并回到出发方格中的充分必要条件是$2 \mid mn$.

12 匹配与覆盖

相异代表系

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是集合X的子集, 能否找到n个互不相同的元素$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得$a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$? 这个问题有很多实际的应用. 例如, 每一学期数学科学学院开设若干门课程, 它们构成集合X. 每位教师填自己愿意上的课的列表, 教师i给出的课程构成集合A_i. 能否给每位教师分配一门他愿意上的课? 给每个集合A_i指定一个代表a_i, 使得这些代表互不相同, 这样的一组代表$a_1, a_2, \cdots, a_n$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$的相异代表系. 下面的Hall定理给出了相异代表系是否存在的充分必要条件.

定理12.1 (Hall**定理**). 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是集合X的子集, 则存在相异代表系当且仅当Hall条件满足: 对任意非空子集$I \subset [n]$, 有

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |I|.$$

证明: 显然Hall条件是相异代表系存在的必要条件. 下面证明Hall条件的充分性. 这里给出一个证明是对n归纳, 另一个证明采用图论的术语更为方便, 将在匹配中给出.

$n = 1$时, 结论显然. 假设结论对$\leq n$都成立, 考虑$n+1$的情况. 分两种情形讨论.

情形一: 对$[n+1]$的每个非空真子集I, 都有$|\cup_{i\in I} A_i| > |I|$. 任取$x_{n+1} \in A_{n+1}$, 并令$B_i = A_i \backslash \{x_{n+1}\}$, $1 \leq i \leq n$. 则$B_1, \cdots, B_n$仍满足Hall条件, 因为对任意非空子集$I \subset [n]$,

$$\left|\bigcup_{i\in I} B_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \backslash \{x_{n+1}\}\right| \geq \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| - 1 \geq |I|.$$

由归纳假设, 对$B_1, \cdots, B_n$存在相异代表系$x_1, \cdots, x_n$, 则$x_1, \cdots, x_n$均不同于x_{n+1}, 故$x_1, \cdots, x_{n+1}$就构成了$A_1, \cdots, A_{n+1}$的相异代表系.

情形二: 存在$[n+1]$的非空真子集I, 满足$|\cup_{i\in I} A_i| = |I|$.

不妨设$I = [k]$, $1 \leq k \leq n$. 由归纳假设, 对$A_1, \cdots, A_k$存在相异代表系$x_1, \cdots, x_k$, 并且此时$\cup_{i\in I} A_i = \{x_1, \cdots, x_k\}$, 记为$A$. 令$B_i = A_i \backslash A$, $i = k+1, \cdots, n+1$. 对任意非空子集$J \subset \{k+1, \cdots, n+1\}$, 由于

$$\bigcup_{j\in J} B_j = \left(\bigcup_{j\in J} A_i\right) \backslash \{x_1, \cdots, x_k\} = \left(\bigcup_{i\in I\cup J} A_i\right) \backslash \{x_1, \cdots, x_k\},$$

故$|\cup_{j\in J} B_j| \geq |I \cup J| - k = |J|$. 因此$B_{k+1}, \cdots, B_{n+1}$也满足Hall条件, 由归纳假设, 存在相异代表系$x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}$, 这样$x_1, \cdots, x_{n+1}$就构成了$A_1, \cdots, A_{n+1}$的相异代表系.

□

Hall定理是匹配理论的基础, 在组合学中有许多应用. 下面举两个著名的例子.

定理12.2 (Konig-Egerváry). 设A是一个0–1矩阵. 互不同行也不同列的1个数最大值称为A的项秩. 一行或一列都称为一条线, 选取最少的线, 使得每个1都在选取的某条线上(称这组线覆盖了所有的1), 这样一组线个数的最小值称为A的线秩. A的项秩等于线秩.

证明: 设$A = (a_{ij})$是$m \times n$的0–1矩阵, 项秩为s, 线秩为t. 因为存在s个互不同行也不同列的1, 至少需要s条线才能覆盖这些1, 故$t \geq s$.

下面证明$s \geq t$. 设t条线覆盖了所有的1, 其中有a条水平线, b条垂直线. 交换行和交换列的操作不会改变项秩和线秩, 故不妨假设前a行和前b列覆盖了所有的1. 对$i \in [a]$, 记

$$S_i = \{j \,|\, b < j \leq n,\, a_{ij} = 1\}.$$

我们说明$S_1, S_2, \cdots, S_a$符合Hall条件, 否则便存在一个非空子集$I \subset [a]$, 使得

$$\left|\bigcup_{i \in I} S_i\right| < |I|.$$

设$I = \{i_1, \cdots, i_k\}$, $\cup_{i \in I} S_i = \{j_1, \cdots, j_l\}$, $k > l$. 将第$i_1, \cdots, i_k$行换成第$j_1, \cdots, j_l$列后, 仍然覆盖了所有的1, 这与t的最小性矛盾. 根据Hall定理, 存在$j_i \in S_i$, $i \in [a]$, 是$S_1, S_2, \cdots, S_a$的相异代表系, 从而$a_{i,j_i} = 1$, $i \in [a]$, 这a个1在前a行和后$n - b$列构成的子矩阵中, 互不同行也不同列. 类似地, 可在前b列和后$m - a$行构成的子矩阵中找到b个互不同行也不同列的1, 和前面的a个1构成了$a + b = t$个互不同行也不同列的1, 因此$s \geq t$. 这就证明了$s = t$. □

定理12.3 (Konig). 设A是一个n阶方阵, 所有元素均为非负整数, 且每行每列的和均为m. 则A可以写成m个置换矩阵之和.

证明: 对m归纳证明, $m = 1$时, 由于每行每列中恰有一个1, 故A是置换矩阵. 下面假设$m > 1$. 只需在A中找到n个正的元素, 互不同行也不同列在这n个位置上取1得到置换矩阵B, 则$A - B$的每个元素仍为非负整数, 并且每行每列的和变为$m - 1$. 设第i行中正的元素所在的列指标构成集合S_i, $i = 1, 2, \cdots, n$. 我们说明$S_1, S_2, \cdots, S_n$符合Hall条件. 事实上, 任取其中k行, 若其中的正数分布在l列中, $l < k$, 这k行中正数总和为km, 由平均值原理, 在这l列中必有某一列的数之和不小于$\frac{km}{l}$, 大于m, 与条件不符. 因此$l \geq k$. 根据Hall定理, $S_1, S_2, \cdots, S_n$存在相异代表系, 从而在A中每行可取一个正数, 这n个正数恰分布在n列中. □

图的匹配与覆盖

设$G = (V, E)$是一个图, $M \subset E$是一些边, 若M中任意两条边都不相邻, 则称M是一个匹配. G的最大匹配所含边数称为G的匹配数, 记为$\alpha'(G)$. 设$E_1 \subset E$是一些边, $V_1 \subset V$是一些顶点, 若对每个$v \in V_1$, 都存在$e \in E_1$, 使得$v \in e$, 则称E_1覆盖了V_1; 若对每个$e \in E_1$, 都存在$v \in V_1$, 使得$v \in e$, 则称V_1覆盖了E_1. 若V_1覆盖了所有边, 则称V_1是G的点覆盖, $|V_1|$的最小值称为G的点覆盖数, 记为$\beta(G)$. 若E_1覆盖了所有顶点,

则称E_1是G的边覆盖, $|E_1|$的最小值称为G的边覆盖数, 记为$\beta'(G)$. 设$U\subset V$是一些顶点, 若U中任意两点在G中都不相邻, 则称U是G的独立集. 最大的独立记的元素个数称为G的独立数, 记为$\alpha(G)$. 设M是G的一个匹配, 若M是一个边覆盖, 则称M是G的完美匹配.

易知, G存在完美匹配的必要(显然不充分)条件是G是偶数阶图. G存在边覆盖的充要条件是G不含孤立顶点.

下面的定理是Hall定理用二部图语言描述的等价形式.

定理12.4 (Hall). 设$G=(V,E)$是一个二部图, 顶点集划分为$V=V_1\cup V_2$. 存在一个匹配M覆盖V_1的充分必要条件是: 对任意$X\subseteq V_1$, 都有

$$|N(X)|\geq |X|.$$

这里$N(x)=\cup_{x\in X}N(x)$, 称为X的领域.

证明: 这里给出另一个证明, 仍称定理中的条件为Hall条件. 我们证明, 若G满足Hall条件, 且$|E|>|V_1|$, 则可在e中删去一条边, 使得剩下的图G'仍满足Hall条件. 重复这一过程, 最终得到$M\subset E$, $|M|=|V_1|$, 且二部图$(V_1\cup V_2, M)$仍满足Hall条件, 此时M就是一个覆盖V_1的匹配.

由于$|E|>|V_1|$, 存在$x\in V_1$, 使得$\deg(x)\geq 2$, 设e_1,e_2是x处的两条边, $e_1=xy$, $e_2=xz$. 若它们是重边, 即$y=z$, 显然删去其中一条后不会破坏Hall条件. 假设$y\neq z$, 我们说明e_1,e_2中可以删去一条边, 使得Hall条件仍成立. 反证法, 假设删去e_1,e_2中任意一条, 都会破坏Hall条件, 则存在$U_1\subset V_1$, $U_2\subset V_1$, 使得$x\in U_1$, $x\in U_2$, 且$|N(U_1)|=|U_1|$, $|N(U_2)|=|U_2|$, 并且y仅与U_1中x相邻, z仅与U_2中x相邻.

注意到

$$\begin{aligned}|N(U_1\cup U_2)| &\leq |N(U_1)|+|N(U_2)|-|N(U_1\cap U_2)|\\ &\leq |U_1|+|U_2|-|U_1\cap U_2|=|U_1\cup U_2|,\end{aligned}$$

因此等号成立, 从而$|N(U_1\cap U_2)|=|U_1\cap U_2|$. 设$A=U_1\cap U_2$, 则$x\in A$. 由于$y,z\in N(A)$, 因此$|A|\geq 2$. 但是$y,z$均仅与$A$中$x$相邻, 故$|N(A\backslash\{x\})|\leq |A|-2$, 这与$G$满足Hall条件矛盾. 这便证明了可以删去$e_1$或$e_2$使得Hall条件仍成立. □

关于$\alpha(G),\alpha'(G),\beta(G),\beta'(G)$有以下一些关系.

定理12.5. 设$G=(V,E)$是一个图. 则

$$\alpha(G)+\beta(G)=|V|.$$

若G没有孤立顶点, 则

$$\alpha'(G)+\beta'(G)=|V|.$$

证明: 设$|V|=n$, $\alpha(G)=\alpha$, $\alpha'(G)=\alpha'$, $\beta(G)=\beta$, $\beta'(G)=\beta'$.

取α个顶点的独立集, 则其余$n-\alpha$个顶点必定是点覆盖, 从而$\beta\leq n-\alpha$, 即$\alpha+\beta\leq n$.

取β个顶点的点覆盖, 则其余$n-\beta$个顶点之间必定没有边, 是一个独立集, 从而$\alpha \geq n-\beta$, 即$\alpha+\beta \geq n$. 故$\alpha+\beta=n$.

取α'条边的匹配, 不与这α'条边相邻的$n-2\alpha'$个顶点, 每个顶点处取一条边, 这总共$n-\alpha'$条边构成一个边覆盖, 因此$\beta' \leq n-\alpha'$, 即$\alpha'+\beta' \leq n$.

取β'条边的边覆盖, 用β'条边构成生成子图G', 设G'有k个连通分支, 由β'的最小性, G'不含圈, 从而G'是森林, 因此$\beta'=n-k$. 由于每个连通分支至少含两个顶点, 因此可在每个连通分支上取一条边, 这样可取出$k=n-\beta'$条边构成匹配, 故$\alpha' \geq k=n-\beta'$, 即$\alpha'+\beta' \geq n$. 故$\alpha'+\beta'=n$. □

下面是Konig-Egerváry定理在二部图形式下的等价形式.

定理12.6 (Konig-Egerváry). *设G是二部图, 则G的匹配数等于点覆盖数, 即*

$$\alpha'(G)=\beta(G).$$

推论12.7. *设G是二部图, 若G没有孤立顶点, 则G的独立数等于边覆盖数, 即*

$$\alpha(G)=\beta'(G).$$

练习

练习: 设m,n是正整数, $G=K_{m,n}$是完全二部图. 计算$\alpha(G),\alpha'(G),\beta(G),\beta'(G)$.

练习: 设M是图G的一个极大匹配, 即不存在另一个匹配M', 使得$M \subset M'$. 证明:

$$|M| \geq \frac{1}{2}\alpha'(G).$$

练习: 若图G的每个顶点的度都相等, 等于k, 则称G是一个k-正则图. 设G是一个简单二部图, 且G是一个k-正则图, $k \geq 1$. 证明: G有完美匹配.

练习: 设$G=(V,E)$是简单图, 证明: $\alpha(G) \leq |V|-\frac{|E|}{\Delta(G)}$. 进一步若$G$是$k$-正则图, $k \geq 1$, 证明: $\alpha(G) \leq \frac{|V|}{2}$.

练习: 设G是一个简单二部图, 顶点集合V划分为$V_1 \cup V_2$. 若对每个$x \in V_1$, $\deg(x)=s$, 对每个$y \in V_2$, $\deg(y)=t$, 则称G是一个*半正则图*. 假设$s>t$, 证明: $\alpha'(G)=|V_1|$.

练习: 设X是一个n元集合, $0 \leq k < n$. 记$U=\binom{X}{k}$, 是X的所有k元子集构成的集合, $V=\binom{X}{k+1}$. 对$A \in U$, $B \in V$, 若$A \subset B$, 则定义边$AB \in E$, 由此定义了一个二部图$G=(U \cup V, E)$. 证明: 若$k<\frac{n}{2}$, 则G有覆盖U的匹配, 若$k \geq \frac{n}{2}$, 则G有覆盖V的匹配. 由此证明偏序集2^X可以划分为$\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$条链, 并得到Sperner定理的另一个证明.

练习: 设A是n阶方阵, 其中元素均为非负实数, 且每行每列的和均为1, 这样的矩阵称为*双随机矩阵*. 证明: A可以表示为置换矩阵的凸组合, 即存在置换矩阵$P_1,P_2,\cdots,P_k$, 以及非负实数$c_1,c_2,\cdots,c_k$, 满足$c_1+c_2+\cdots+c_k=1$, 且

$$A=c_1P_1+c_2P_2+\cdots+c_kP_k.$$

13 图的着色

设$G=(V,E)$是一个图, 对顶点集V的一个k-着色是指用k种颜色来将顶点染色, 或等价于一个映射$f:V\to[k]$. 一个对顶点的着色称为*正常着色*, 若对任意一条边$e\in E$, e的两个端点颜色不同. 存在一个正常着色所需的最少颜色数称为G的*点色数*, 简称色数, 记为$\chi(G)$. 如果G有重边, 保留重边中的一条边, 而将其余的边删除, 得到一个无重边的图, 称为G的约化图. 显然在G上正常着色与在G的约化图上正常着色是等价的, 因此研究图的着色问题只需在简单图上考虑.

例13.1. 设$G=(V,E)$是一个图. $\chi(G)=1$当且仅当G是零图, 即$E=\varnothing$. $\chi(G)\le 2$当且仅当G是二部图.

例13.2. $\chi(K_n)=n$.

设$G=(V,E)$是一个简单图, 若$U\subset V$中任意两个顶点都相邻, 则称U是一个*团*. G的最大团所含的顶点数称为G的*团数*, 记为$\omega(G)$. 定义G的补图为简单图$\overline{G}=(V,\overline{E})$, 其中$\overline{E}$由如下边构成, 对任意两个顶点$u,v\in V$, 若$u,v$在$G$中不相邻, 则$uv\in\overline{E}$. 易知$\omega(G)=\alpha(\overline{G})$.

一般而言, 计算$\chi(G)$是十分困难的, 我们有如下的简单估计.

定理13.3. 设$G=(V,E)$是一个图, 则

$$\chi(G)\ge\max\left\{\frac{|V|}{\alpha(G)},\omega(G)\right\}.$$

定理13.4. 设$G=(V,E)$是一个图, 则

$$\chi(G)\le\Delta(G)+1.$$

证明: 这里给出的算法称为*贪心着色法*. 将V的顶点任意作一排列$v_1,v_2,\cdots,v_n$, 将颜色集认为是正整数集. 依次对$v_1,v_2,\cdots,v_n$染色, 当对v_i染色时, 考虑v_i与$v_1,\cdots,v_{i-1}$中哪些顶点相邻, 取于这些顶点不同的最小正整数, 染在v_i上. 这样得到的染色一定是正常着色. 由于每个v_i至多与之前$\Delta(G)$个顶点相邻, 因此v_i上的染色不超过$\Delta(G)+1$, 故$\chi(G)\le\Delta(G)+1$.

当$G=K_n$或奇圈C_n时, 有$\chi(G)=\Delta(G)+1$. Brooks证明了, 除了这两种情形, 等号都不会成立.

定理13.5 (Brooks). 设G是一个连通图, 不是完全图也不是奇圈, 则$\chi(G)\le\Delta(G)$.

着色多项式

设$G=(V,E)$是一个图, k是任意正整数, 定义$\chi_G(k)$为用k种颜色对顶点作正常染色的方法数. 显然当$k<\chi(G)$时, $\chi_G(k)=0$.

例13.6. 设k是正整数. (1) 若$G = K_n$, 则$\chi_G(k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$.

(2) 若$G = P_n$, 长为n的路, 则$\chi_G(k) = k(k-1)^n$.

(3) 若G是n阶零图, 则$\chi_G(k) = k^n$.

我们有如下的递推关系.

定理13.7. 设$G = (V, E)$是一个简单图, $e = uv \in E$是一条边, k是正整数, 则

$$\chi_G(k) = \chi_{G-uv}(k) - \chi_{G/\{u,v\}}(k).$$

证明: 考虑$G - uv$上的k-正常着色, 分为两类. 一类是u, v染不同颜色, 这也是G上的k-正常着色, 共有$\chi_G(k)$种. 另一类是u, v染相同颜色, 此时将u, v收缩后, 收缩成一个点染与u, v相同的颜色, 其余点保持原有染色, 这给出了$G/\{u, v\}$上的k-正常着色, 并且是一一对应, 因此这类染色方法有$\chi_{G/\{u,v\}}(k)$种. 合计就得

$$\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G/\{u,v\}}(k).$$

□

定理13.8. 设G是一个n阶图. 则存在一个整系数首一n次多项式$P(x)$, 使得对任意正整数k, 有

$$\chi_G(k) = P(k).$$

这个多项式称为G的着色多项式, 记为$\chi_G(x)$.

推论13.9. 设G是一个简单图, uv是G的一条边, 则

$$\chi_{G-uv}(x) = \chi_G(x) + \chi_{G/\{u,v\}}(x).$$

练习

练习: 设G是图. 证明着色多项式$\chi_G(x)$含有因子x.

练习: 计算$K_{3,3}$的着色多项式.

练习: 设$G_1 = (V_1, E_1)$和$G_2 = (V_2, E_2)$是两个图, $u \in V_1$, $v \in V_2$, 定义$G_1 \vee_{u\sim v} G_2$如下: 顶点集为$V_1 \sqcup V_2/(u \sim v)$, 将$V_1$和$V_2$中的$u$和$v$等同为一个顶点, 边集$E = E_1 \cup E_2$. $G_1 \vee_{u\sim v} G_2$称为将G_1, G_2中的v, u粘合得到的图, 当u, v明确时(或对结论不影响时), 也简记为$G_1 \vee G_2$.

证明:

$$\chi(G_1 \vee G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}.$$

练习: 设G是一个图. 证明: 可将顶点适当地排成一列, 对此排序用贪心着色法所用颜色个数恰为G的色数.

练习: 设G是一个n阶简单图, 其顶点的度为$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. 证明:

$$\chi(G) \leq \max_{1\leq i\leq n} \Big(\min\{d_i + 1, i\} \Big).$$