

Se  $F$  è una funzione pseudocasuale, allora  $\Pi^F$  è un cifrario sicuro contro attacchi CPA.

**In breve:** si crea un distinguitore  $D$  che usi l'attaccante  $A$  e si mostra così che la probabilità di vittoria in  $\text{PrivK}$  e in  $D$  coincidono: la probabilità di  $\text{PrivK}$  in caso di generatore realmente casuale è ricavabile espandendo  $\text{PrivK}$  con l'evento *Repeat*, si ricava quella in caso di FP.

Si considera prima di tutto lo schema  $\hat{\Pi}$  del tutto simile a  $\Pi^F$  ma in cui  $\hat{Gen}$  sceglie una funzione casuale  $f_n$  tra tutte quelle da  $\{0,1\}^n$  a  $\{0,1\}^n$  ed  $\hat{Enc}$  usa  $f_n$  al posto di  $F_k$  per cifrare. È possibile costruire un distinguitore  $D$  che utilizzi l'avversario  $A$  di  $\text{PrivK}_{A,\hat{\Pi}}^{CPA}$  generando un  $r$  ogni volta che  $A$  ha intenzione di effettuare una chiamata all'oracolo, ritornandogli poi il risultato di  $O(r)$ . A questo punto possono succedere due cose:

- Dopo una chiamata all'oracolo,  $A$  ottiene un risultato che contiene lo stesso valore random  $r$  utilizzato per cifrare  $m_b$ , questo porta  $A$  ad una vittoria certa.  $A$  può effettuare al massimo un numero polinomiale  $q(n)$  di richieste all'oracolo, ognuna delle quali ritorna un valore random lungo  $n$  scelto uniformemente, portando ad una probabilità che due  $r$  coincidano di:  $\frac{q(n)}{2^n}$ .
- Dopo una chiamata all'oracolo, il valore  $r$  ritornato non è mai stato ritornato prima, questo lascia ad  $A$  la stessa probabilità di tirare a caso tra  $m_0$  ed  $m_1$ :  $\frac{1}{2}$ .

Definiamo l'evento **Repeat** = "r appartenente al challenge-chipertext passato ad  $A$  viene ritornato anche da (almeno) una chiamata all'oracolo". Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} Pr(\text{PrivK}_{A,\hat{\Pi}}^{CPA}(n) = 1) &= \\ Pr(\text{PrivK}_{A,\hat{\Pi}}^{CPA}(n) = 1 \wedge \mathbf{Repeat}) + Pr(\text{PrivK}_{A,\hat{\Pi}}^{CPA}(n) = 1 \wedge \neg \mathbf{Repeat}) &\leq \\ Pr(\mathbf{Repeat}) + Pr(\text{PrivK}_{A,\hat{\Pi}}^{CPA}(n) = 1 \wedge \neg \mathbf{Repeat}) &\leq \\ \frac{q(n)}{2^n} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sappiamo ora che:  $Pr(\text{PrivK}_{A,\hat{\Pi}}^{CPA}(n) = 1) \leq \frac{1}{2} + \frac{q(n)}{2^n}$

Mentre per un cifrario che utilizza  $F_k$  sappiamo che:  $Pr(\text{PrivK}_{A,\Pi^F}^{CPA}(n) = 1) \leq \frac{1}{2} + \epsilon(n)$  dove  $\epsilon(n)$  non sappiamo se sia trascurabile o meno.

Per come è costruito il distinguitore  $D$  è chiaro che:

$$\begin{aligned} Pr(\text{PrivK}_{A,\hat{\Pi}}^{CPA}(n) = 1) &= Pr(D^{f_n}(1^n) = 1) \\ Pr(\text{PrivK}_{A,\Pi^F}^{CPA}(n) = 1) &= Pr(D^{F_k}(1^n) = 1) \end{aligned}$$

Avendo assunto essere  $F$  una funzione pseudocasuale, allora vale che:

$$|Pr(D^{f_n}(1^n) = 1) - Pr(D^{F_k}(1^n) = 1)| \leq \text{negl}(n)$$

Sostituendo con i valori che abbiamo noti:

$$\begin{aligned} \text{negl}(n) &\geq \\ |Pr(D^{f_n}(1^n) = 1) - Pr(D^{F_k}(1^n) = 1)| &= \\ |Pr(\text{PrivK}_{A,\hat{\Pi}}^{CPA}(n) = 1) - Pr(\text{PrivK}_{A,\Pi^F}^{CPA}(n) = 1)| &\geq \\ \frac{1}{2} + \epsilon(n) - \frac{1}{2} - \frac{q(n)}{2^n} &= \\ \epsilon(n) - \frac{q(n)}{2^n} \end{aligned}$$

Quindi:  $\epsilon(n) \leq \text{negl}(n) + \frac{q(n)}{2^n}$  è trascurabile.