Teorija Igara

1. UVOD

Definicija 1.1:
Za neku poziciju kazemo da je pobjednička, ako neovisno o potezima drugog igrača, igrač koji je na potezu može osigurati pobjedu.
Analogno kažemo da je pozicija gubitnička ako neovisno o potezima igrača koji je na potezu, on gubi(uz optimalnu igru drugog igrača).

Primjer 1.
Zamislimo igru s hrpom od n kamenčića, u kojoj svaki od dva igrač na svom potezu može uzeti 1, 2 ili 3 kamenčića. Pobjednik je onaj koji uzme posljednji kamenčić. U ovisnosti o n odredi koji igrač pobjeđuje.

Neka je $P(x)$ funkcija takva da je
$P(x) = 1$ ako pobjeđuje igrač koji je na potezu za danu igru s x kamenčića
$P(x) = 0$ ako gubi igrač koji je na potezu za danu igru s x kamenčića
Za $n < 4$ ođito pobjeđuje prvi igrač.
Dakle imamo $P(1) = 1, P(2) = 1, P(3) = 1$ Što se događa s $n = 4$?
Neovisno o tome koliko kamenčića uzme prvi igrač, drugi igrač može uzeti preostale kamenčiće. Dakle $P(4) = 0$.

Tvrdnja: za $x \geq 4$ vrijedi $P(x) = 1$ ako i samo ako je jedno od $P(x-1)$, $P(x-2)$, $P(x-3)$ jednako 0. □

Dokaz: Nakon igračevog poteza na hrpi će ostati $x-1$, $x-2$ ili $x-3$ kamenčića. Dakle ako je $P(x-1) = P(x-2) = P(x-3) = 1$, sve pozicije nakon poteza prvog igrača su pobjedničke za drugog igrača.
Ako recimo $P(x-1) = 0$, tada prvi igrač može uzeti jedan kamenčić, jer je P(x-1) gubitnička pozicija za drugog igrača. □

iz ovog slijedi kako $P(4) = 0$, nakon toga $P(5) = P(6) = P(7)$ te $P(8) = 0$, tj. $P(x) = 0$ za $4|x$ te $P(x) = 1$ inače, tj. drugi igrač pobjeđuje ako je $4|n$ te prvi u suprotnom.

Primjer 2.
Jozo i Bozo igraju igru te naizmjenično svaki od njih radi jedan potez. Na potezu igrač briše n s ploče i umjesto njega piše $n + d$ za neki $d \mid n$, $d \neq n$. Jozo igra prvi. Igrač koji prvi napiše broj veći ili jednak $7 \cdot 6 \cdot 2025 + 31415926535$ pobjeđuje. Koji igrač ima pobjedničku strategiju? Prvi broj na ploči je 2.

Tvrdnja: Jozo pobjeđuje za bilo koji broj veći ili jednak 6. □

Uočimo kako Jozo na početku mora napisati broj 3, nakon čega Bozo mora napisati broj 4.
Sada Jozo ima dvije opcije:

1. Napisati broj 6
2. Napisati broj 5, nakon čega Bozo mora napisati broj 6.

Neka je n neki fiksan broj, $n \geq 6$. Neka igrač pobjeđuje ako napiše broj veći ili jednaki n. Neka je $P(x) = 1$ ako igrač na potezu pobjeđuje ako je trenutačno napisan broj x, te 0 inače. Ako je $P(6) = 0$ tada on može odabrati opciju 1. Ako je $P(6) = 1$ tada on može odabrati opciju 2.

2. Zadaci

1. Dana je šahovska ploča sa standarnim rasporedom figura. Razmatramo varijantu šaha u kojoj svaki igrač na potezu odigra dva uzastopna poteza. Dokaži da bijeli ne može izgubiti ako igra optimalno.
2. Na stolu je dano x kamenčića, $x \geq 2$. Dva igrača naizmjence odigravaju poteze. U svakom potezu igrač treba uzeti najmanje jedan kamenčić, ali ne više od polovine preostalih kamenčića. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na stolu ostane samo jedan kamenčić. U ovisnosti o x odredi koji igrač pobjeđuje ako oba igraju optimalno.
3. Alisa i Bob igraju sljedeću igru: Na ploči je isprva zapisan broj 2. Svaki igrač na svom potezu zamijeni trenutačni broj n s brojem $n + p$ gdje je p prost djelitelj broja n. Pobjeđuje igrač koji prvi napiše broj veći od $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2025 + 1$.

3. (Vrlo) Težak Zadatak

4. Ana i Bob igraju sljedeću igru: Na ploči je isprva zapisan broj 2. Igrači se naizmjenično izmjenjuju u potezima, pri čemu Anna igra prva. Na svom potezu igrač može: udvostručiti trenutačni broj na ploči, ili kvadrirati ga. Pobjednik je onaj igrač koji prvi napiše broj veći od 2023^{10}.Odredi koji igrač ima pobjedničku strategiju uz optimalnu igru.