8.3. G6: Krunoslav Ivanović - Inverzija

Link na hintove. Link na rješenja.

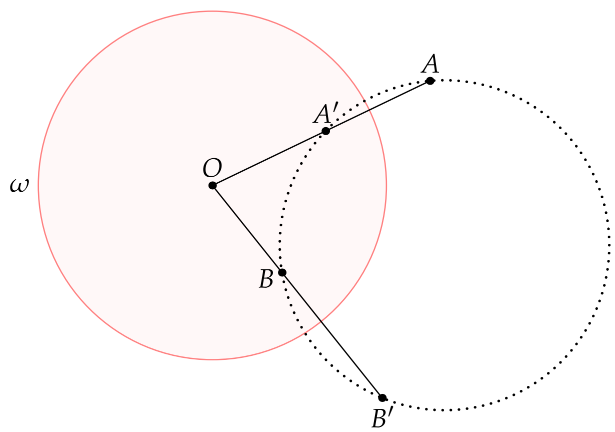
Inverzija je transformacija ravnine koja često olakšava razne zadatke. Danas ćemo vidjeti što inverzija zapravo jest i proći kroz neke najstandardnije primjene na zadacima. Iako je korisna, inverzija nije magična metoda koja će riješiti svaki zadatak pa je ne trebate kao takvu shvaćati.

Definicija

Naravno, prije svega, trebamo definirati što inverzija jest.

Definicija 8.3.1: Inverzija

Neka je ω kružnica sa središtem u O i polumjerom r. Inverzija s obzirom na kružnicu ω je transformacija ravnine koja svaku točku ravnine A šalje u točku A' na polupravcu OA takvu da vrijedi $OA \cdot OA' = r^2$. Posebno, točku O šalje u točku u beskonačnosti[a], a točku u beskonačnosti u točku O.



[a] ne morate se previše s ovim zamarat na ovoj razini, najčešće vas ni ne brine gdje ide točka O

Ono što se odmah da uočiti jest da vrijedi

$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB',$$

odnosno, zbog obrata potencije točke, imamo da su točke A, A', B i B' na istoj kružnici. Upravo iz toga slijedi većina svojstava koje ćemo kasnije dokazivati.
Naravno, nas neće zanimati samo gdje se šalje neka određena točka, nego ćemo gledati malo šire, odnosno, gdje se šalju različiti objekti pod inverzijom.

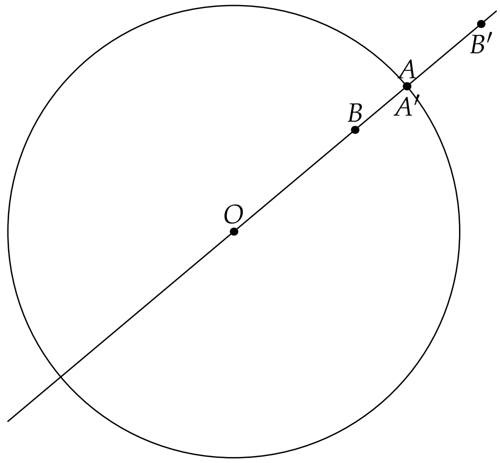
Osnovna svojstva

Prva stvar koju je bitno uočiti je da je inverzija involucija, odnosno, inverz inverza je originalna točka, ili, ako želimo to „matematički” zapisati, $(A')' = A$. Ova činjenica nam omogućuje da skratimo posao, jer ako se objekt klase p invertira u objekt klase q, tada vrijedi i obratno. Sada slijedi nekoliko dosadnih i neispirativnih dokaza koje navodim u svrhu potpunosti, no, prava intuicija slijedi na kraju poglavlja.
Također, drugo osnovno svojstvo slijedi iz tetivnosti koju smo uočili u uvodu, odnosno, imamo da je

$$\angle OAB = \angle OB'A'.$$

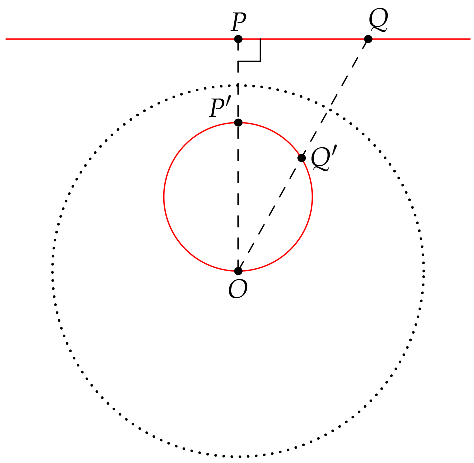
Pravac kroz središte inverzije

Neka je p bilo koji pravac koji sadrži točku O, i neka je A bilo koja točka na tom pravcu. Iz same definicije vidimo da je točka A' na polupravcu OA takva da je $OA \cdot OA' = r^2$. Kako je polupravac OA zapravo dio pravca p, a točka A' je iz definicije na polupravcu OA, imamo da je točka A' također na p, odnosno, pravac p se slika u samog sebe.



Pravac koji ne prolazi kroz središte inverzije

Ako imamo pravac koji ne prolazi kroz O, ipak moramo razmisliti da bi zaključili što se događa.

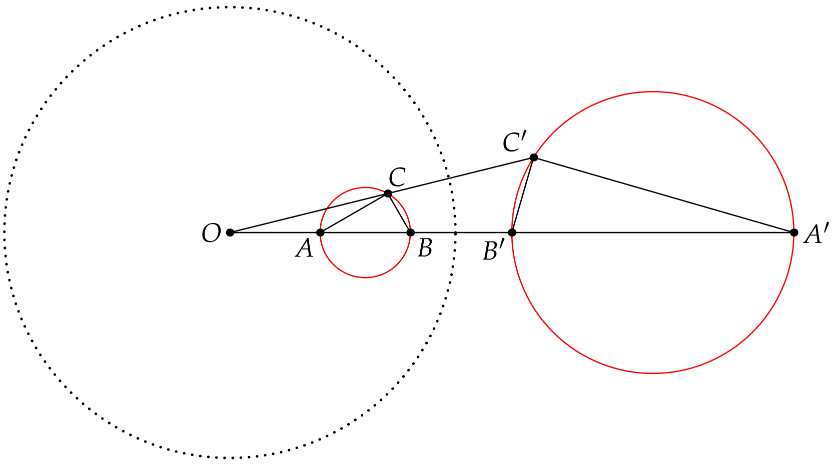


Ako je P nožište visine iz O na naš pravac ℓ, za bilo koju točku Q na pravcu ℓ vrijedi $\angle OPQ = 90°$. No, zbog gore opisane tetivnosti, imamo da je onda i $\angle OQ'P' = 90°$, dakle, točka Q' se nalazi na kružnici promjera OP'. Dakle, slika pravca ℓ koji ne prolazi kroz središte inverzije je kružnica koja prolazi kroz središte inverzije.

Naravno, zbog involutivnosti, vidimo da je slika kružnice koja prolazi kroz središte inverzije pravac koji ne prolazi kroz središte inverzije.

Kružnica koja ne prolazi kroz središte inverzije

Ostaje još slučaj kružnice koja ne prolazi kroz središte inverzije i riješili smo cijelu priču o pravcima i kružnicama.



Neka je Γ kružnica koja ne prolazi kroz O, središte inverzije. Neka su A i B na Γ takve da su O,A i B kolinearne te je AB promjer kružnice Γ. Uočimo da iz svojstava inverzije za proizvoljnu točku $C \in \Gamma$ imamo

$$\angle B'C'A' = \angle OC'A' - \angle OC'B' = \angle OAC - \angle OBC = \angle ACB = 90^\circ,$$

dakle, C' je na kružnici s promjerom $A'B'$.

> **Oprez**
>
> Iako se na prvu može tako učiniti, središte kružnice se **ne slika (!!!)** u središte kružnice, no, središta se nalaze na istome pravcu kao i središte inverzije.

Dakle, kružnica koja ne prolazi kroz središte inverzije O se slika u kružnicu koja ne prolazi kroz središte inverzije O.

Rezime

Upravo smo dokazali sljedeće:

> **Oprez**
>
> Da rezimiramo, pod inverzijom sa središtem O imamo:
>
> - pravac koji prolazi kroz O ostaje fiksan;
> - kružnica oko koje invertiramo ostaje fiksna;
> - pravac koji ne prolazi kroz O prelazi u kružnicu koja prolazi kroz O;
> - kružnica koja prolazi kroz O prelazi u pravac koji ne prolazi kroz O;
> - kružnica koja ne prolazi kroz O prelazi u kružnicu koja ne prolazi kroz O.

Šira slika

Iako ne pretjerano komplicirano, pamtiti sve gornje relacije može biti dosta nezgrapno, a i zapravo dosta nemotivirano. U tu svrhu, pokazat ću interpretaciju koja se može jako lagano zapamtiti, no nju ne možemo direktno koristiti za dokaze.
Ono što smo dokazali jest da se kružnice i pravci slikaju u druge kružnice i pravce. Također, pokazali smo da ako je točka A na nekom objektu (kružnici ili pravcu) p, tada je A' na objektu p'. Prisjetimo se da smo rekli da se točka O slika u točku u beskonačnosti[1] P_∞ te obrnuto. Također, uočimo da pravce

[1] točku u beskonačnosti shvaćamo kao točku beskonačno udaljenu od ishodišta, koja se nalazi na svakome pravcu (jako teško za vizualizirati!)

možemo interpretirati kao beskonačno velike kružnice, odnosno, pravac OA shavaćamo kao kružnicu kroz O, A i P_∞.
Sada, uz ovu interpretaciju, direktno imamo sve gore dokazane tvrdnje. Neka je ℓ pravac koji prolazi kroz O i neka je A bilo koja točka na njemu. Tada znamo da je ℓ jedinstveno određen s točkama O, A i P_∞ pa je ℓ' jedinstveno određen točkama O', A' i P'_∞. Kako je A' na OA i $O' \equiv P_\infty$, $P'_\infty \equiv O$, imamo da je $\ell' \equiv \ell$.
Neka je ℓ pravac koji ne prolazi kroz točku O i neka su A i B bilo koje dvije točke na njemu. Tada je ℓ jedinstveno određen s A, B i P_∞, odnosno, ℓ' je jedinstveno određen s A', B' i $P'_\infty \equiv O$, odnosno, ℓ' je cline koji prolazi kroz A', B' i O, odnosno, kružnica kroz te tri točke.
Naposljetku, interpretacija za kružnicu koja ne prolazi kroz središte ostaje ista.
Iako je dosta teško konceptualizirati i zamisliti tu točku u beskonačnosti, vidimo da kroz tu malo težu interpretaciju zapravo dobijemo širu i kompletniju sliku. Dapače, vidimo da za određivanje slike pravca ili kružnice samo trebamo naći tri[2] točke na tom objektu i pogledati gdje se slikaju. Naposljetku, to je pristup koji koristimo u zadacima.

Duljine

Ponekad će nas zanimati duljine između invertiranih točaka. Na prvu vidimo da taj izraz neće biti pretjerano elegantan kao što je na primjer pri homotetiji, no nije ni toliko odvratan da ne znamo rukovati s njime. Naime, ako se vratimo na početnu skicu, lagano vidimo da su trokuti $\triangle OAB$ i $\triangle OB'A'$ slični, to jest, imamo

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} \implies A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB.$$

Naravno, kako je $(A')' \equiv A$, direktno dobivamo

$$AB = \frac{r^2}{OA' \cdot OB'} \cdot A'B'.$$

Iako ih nećemo morati uvijek koristiti, ovi identiti su često korisni kada trebamo raditi s nekim duljinama. Naravno, iza ovog ne stoji neka preduboka teorija nego jednostavna potencija točke i sličnost.

Generalna strategija

Naravno, sada smo dokazali dosta stvari i vidjeli šta inverzija generalno jest, no još uvijek ostaje otvoreno pitanje što se tu zapravo događa, odnosno, kako će nam sve ovo pomoći da riješimo neki zadatak. Najgeneralnije, „algoritam za invertiranje” je sljedeći:

1. Odaberemo središte i radijus.
2. Idemo redom po točkama i gledamo možemo li direktno odrediti njihovu sliku (iz potencije točke, nekih udaljenosti, . . .).
3. Idemo redom po pravcima i kružnicama i gledamo možemo li odrediti njihove slike (iz onih svojstava transformacije koje smo dokazali).
4. Opet prolazimo kroz točke na skici i gledamo možemo li identificirati inverze sada kada znamo inverze objekata na kojima se te točke potencijalno nalaze.
5. Gledamo dodatna svojstva inverzije (ona tetivnost, kutevi, duljine, . . .) i gledamo možemo li tako nekako jedinstveno odrediti točku.
6. Pokušamo interpretirat tvrdnju originalnog zadatka na novoj skici i pratimo je li nam nešto potencijalno nedostaje, odnsono, jesmo li iskoristili sva svojstva originalnog zadatka i jesmo li pronašli sve inverze koji nas zanimaju.

[2] za pravce, dvije točke i P_∞

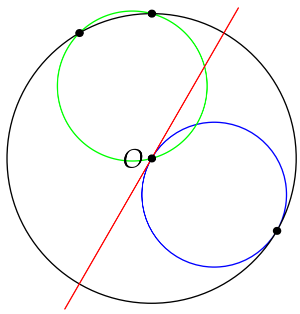
7. Za one točke/objekte u kojima gornji algoritam ne prolazi, pratimo koja parcijalna svojstva imamo iz gore navedenih koraka.

8. Rješavamo invertirani zadatak.

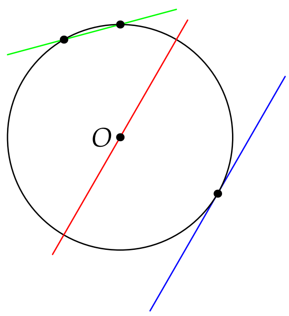
Naravno, gornji algoritam samo treba shvatiti kao neku širu sliku procesa kroz koji ćemo prolaziti u primjerima, a ne kao neki rigorozni skup pravila koji će prolazit u svakom zadatku.

Primjeri

Primjer 8.3.1. Odredite što se događa pri inverziji oko kružnice sa središtem u O na sljedećoj skici.



Rješenje 8.3.1. Situacija je sljedeća:



Plava kružnica prolazi kroz središte pa znamo da se slika u neki pravac. Također, istaknuta točka na plavoj kružnici se nalazi i na kružnici oko koje invertiramo pa će pravac prolaziti kroz tu točku. Naposljetku, kako je plava kružnica tangencijalna na kružnicu oko koje invertiramo, znamo da će nakon inverzije, ta objekta i dalje imati samo jedno sjecište, dakle, taj pravac mora biti tangentan na našu kružnicu.

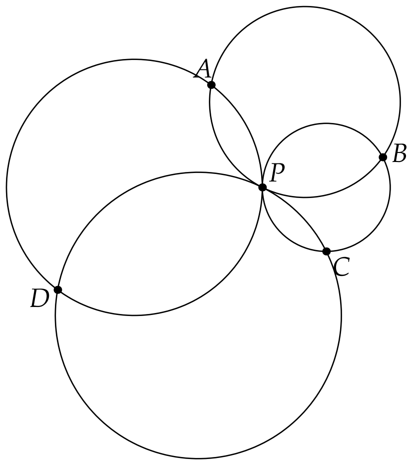
Crveni pravac prolazi kroz ishodište pa on ostaje fiksiran.

Zelena kružnica prolazi kroz dvije istaknute točke na kružnici oko koje invertiramo. Kako prolazi kroz središte inverzije, slika se u pravac, a kako su te dvije točke fiksne, to je upravo pravac kroz te dvije točke. □

Primjer 8.3.2 (IMO shortlist 2003./G4). Neka su Γ_1, Γ_2, Γ_3 i Γ_4 disjunktne kružnice takve da se Γ_1 i Γ_3 te Γ_2 i Γ_4 diraju izvana u istoj točki P. Pretpostavimo da se Γ_1 i Γ_2, Γ_2 i Γ_3, Γ_3 i Γ_4 te Γ_4 i Γ_1 sijeku u točkama A, B, C i D, tim redom, te su sve te točke različite od P. Dokažite da vrijedi

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

Rješenje 8.3.2. Za početak, nacrtajmo skicu.



Kao što na prvu vidimo, skica je dosta nezgrapna. Naime, imamo četiri kružnice, povezane u parovima vanjskom tangentnosti u točki P. Da bi tu tangentnost uspješno iskoristili, morali bi dodati još dosta točaka što bi još dodatno zakompliciralo skicu i zadatak. Umjesto toga, prepoznamo da kroz točku prolaze čak četiri kružnice, odnosno, sve kružnice zadatka. Invertirajmo oko kružnice radijusa 1, sa središtem u P.
Idemo redom:

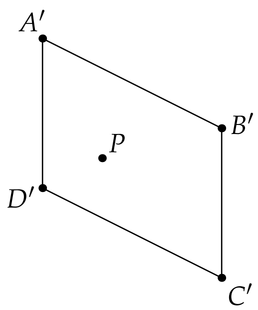
1. kružnice Γ_1 i Γ_3 diraju se izvana u točki P koja je središte inverzije, dakle, šalju se u paralelne pravce;

2. kružnice Γ_2 i Γ_4 se istom argumentacijom također šalju u paralelne pravce;

3. točka A je definirana kao presjek Γ_1 i Γ_2, dakle, točka A' je presjek pravaca koje dobijemo nakon inverzije kružnica Γ_1 i Γ_2;

4. analogne identifikacije vrijede i za ostale točke.

Naravno, iz prva dva uvjeta je jasno da pravci koje su inverzne slike kružnica čine paralelogram, odnosno, točke A', B', C' i D' su vrhovi paralelograma.



Ako iskoristimo formulu za duljine, znamo da je

$$A'B' = \frac{r^2}{PA \cdot PB} \cdot AB \overset{r=1}{\Longrightarrow} AB = A'B' \cdot PA \cdot PB.$$

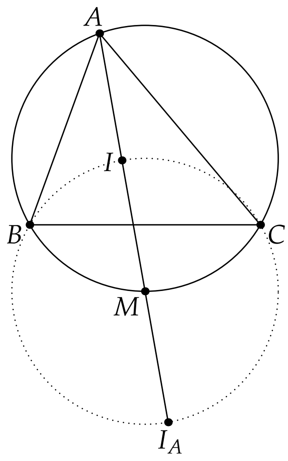
Kombinirajući sva četiri identiteta, dobivamo

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{A'B' \cdot PA \cdot PB \cdot B'C' \cdot PB \cdot PC}{A'D' \cdot PA \cdot PD \cdot D'C' \cdot PD \cdot PC} = \frac{PB^2}{PD^2}$$

jer je riječ o paralelogramu. □

„Trozubac” inverzija

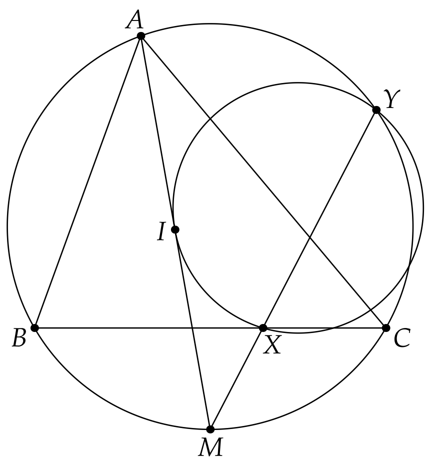
Druga poznata i jako česta inverzija je u biti varijanta $\sqrt{bc}$ inverzije, samo bez preslikavanja. Prvo pogledajmo sljedeću skicu.



Poznata „lema o trozubcu” govori da su točke B, I, C i I_A konciklične, pri čemu je središte kružnice na kojoj se te točke nalaze upravo polovište luka. Sada vidimo da inverzija sa središtem u M, radijusa MB fiksira točke B, I, C i I_A, te kružnicu (ABC) šalje u pravac BC i obrnuto. Dakle, u konfiguracijama koje se vrte oko točke M, isplati se probati invertirati oko nje.

Primjer 8.3.3. Dan je trokut $\triangle ABC$, I centar upisane kružnice, a M polovište luka BC koji ne sadrži A. Neka je X bilo koja točka na $\overline{BC}$ i Y drugi presjek pravca MX s kružnicom (ABC). Dokažite da je MI tangenta na kružnicu (IXY).

Rješenje 8.3.3. Opet, nacrtajmo skicu.



Promotrimo što se događa prilikom inverzije sa središtem u M, radijusa MB. Vrijedi sljedeće:

1. točke B, I i C ostanu fiksne;
2. kružnica (ABC) slika se u pravac BC i obrnuto;
3. točka X slika se u presjek pravca MX i kružnice (ABC), što je točka Y, i obrnuto.

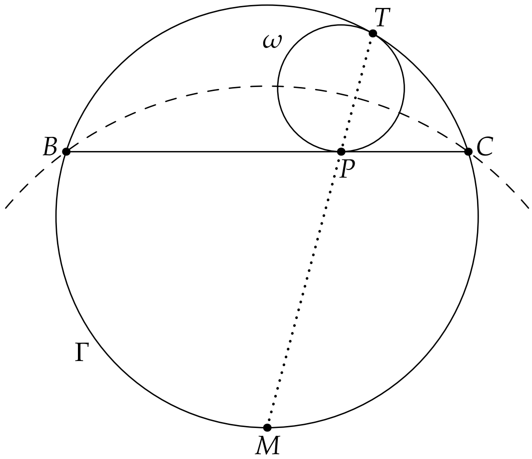
S obzirom da su X i Y inverzi s obzirom na opisanu inverziju, imamo da je

$$MX \cdot MY = MB^2 = MI^2$$

što uz obrat potencije točke direktno daje da je MI tangenta na danu kružnicu. □

Primjer 8.3.4 (Ćevidova lemma). Neka su Γ i ω kružnice takve da ω dira Γ iznutra u točki T. Neka je P točka na ω različita od T i neka tangenta u P na kružnicu ω siječe kružnicu Γ u točkama B i C. Ako je M polovište luka BC kružnice Γ koji ne sadržu točku T, pokaži da su M, P i T kolinearne.

Rješenje 8.3.4. Krećemo od skice.



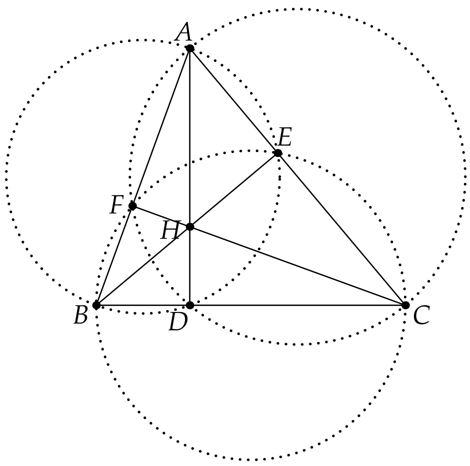
Opet, primjenjujemo inverziju sa središtem u M i radijusom MB. Vrijedi sljedeće:

1. točke B i C ostaju fiksne;
2. kružnica (MBC) šalje se u pravac BC i obrnuto;
3. kružnica ω je tangentna na pravac BC i (MBC) pa će slika kružnice ω biti tangentna na (MBC) i BC, odnosno, ω ostaje fiksirana;
4. kako ω ostaje fiksirana, točka P je diralište ω i BC pa je P' diralište ω i (MBC), odnosno, $P' \equiv T$.

Kako su P i T međusobni inverzi pri inverziji sa središtem u M, te tri točke su kolinearne. □

Inverzije s ortocentrom

Promatramo sljedeću konfiguraciju.



Uočavamo dvije ključne jednakosti, prva je da je

$$AF \cdot AB = AH \cdot AD = AE \cdot AC,$$

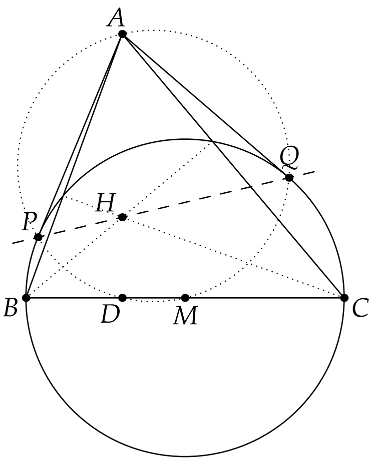
odnosno, čini nam se da bi inverzija sa središtem u A i radijusom $\sqrt{AB \cdot AF}$ mogla imati potencijala (s i bez preslikavanja preko simetrale kuta). Druga jednakost koja je korisna jest

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF,$$

što daje inspiraciju za inverziju sa središtem u H, radijusa $\sqrt{HA \cdot HD}$, pri čemu ćemo to komponirati sa preslikavanjem preko točke H (kako bi mijenjali točke A i D i ostale parove). Prelazimo na primjere.

Primjer 8.3.5. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$ i P i Q na kružnici s promjerom $\overline{BC}$ takve da su AP i AQ tangente na tu kružnicu. Dokaži da su H, P i Q kolinearne.

Rješenje 8.3.5. Prvo nacrtamo skicu.



Promatramo inverziju sa središtem u A, radijusa $\sqrt{AH \cdot AD}$. Ta inverzija fiksira točke P i Q te točku H šalje u točku D. Dakle, željeli bi da je četverokut $APDQ$ tetivan. No, kako je M središte kružnice s promjerom $\overline{BC}$ i $\angle MDA = 90°$, imamo da sve te točke leže na kružnici s promjerom $\overline{AM}$. □

$\sqrt{bc}$ inverzija

U prethodnom primjeru, vidjeli smo inverziju pri kojoj smo „fiksirali" trokut $\triangle ABC$. Iako smo tu imali jednakokračan trokut, skoro pa istu stvar možemo napraviti i u generalnom slučaju. Naime, promotrimo inverziju sa središtem u A, radijusa $\sqrt{AB \cdot AC}$ komponiranu zajedno s preslikavanjem preko simetrale kuta.
S takvom transformacijom, točke B i C se mijenjaju, odnosno, kružnica (ABC) prelazi u pravac BC i obrnuto. Ova inverzija se u načelu koristi u naprednijim zadacima, no kao što vidite, konceptualno nije ništa komplicirano.

Primjer 8.3.6 (Simedijana). Dan je trokut $\triangle ABC$. Tangente na opisanu kružnicu u točkama B i C sijeku se u točki T. Dokažite da je pravac AT preslika težišnice iz vrha A preko simetrale kuta pri vrhu A.

Rješenje 8.3.6. Naravno, napravit ćemo $\sqrt{bc}$ inverziju. Vrijedi sljedeće:

1. točka B i točka C se slikaju jedna u drugu;
2. pravac TB slika se u kružnicu $AT'C$ koja je tangentna na pravac BC u točki C;
3. pravac TC slika se u kružnicu $AT'B$ koja je tangentna na pravac BC u točki B.

Dakle, točka T' je presjek dvaju kružnica koje su tangentne na pravac BC u točkama B i C te prolaze kroz A. Naravno, sada vidimo da je AT' radikalna os tih dvaju kružnica pa ona raspolavlja zajedničku tangentu, odnosno, pravac AT' prolazi kroz polovište dužine $\overline{BC}$. No to upravo znači da je AT' težišnica iz vrha A u trokutu $\triangle ABC$ pa iz definicije $\sqrt{bc}$ inverzije dobivamo tvrdnju zadatka. □

Primjer 8.3.7. Neka kružnica ω dira stranice AB i AC te opisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$ u R. Neka pripisana kružnica nasuprot A dira stranicu BC u D. Dokaži da je AR refleksija AD preko simetrale kuta.

Rješenje 8.3.7. Opet, koristimo $\sqrt{bc}$ inverziju iz vrha A. Znamo da je slika kružnice ω neka kružnica koja dira pravce AB, AC i BC. Naravno, postoje četiri takve kružnice, upisana i tri pripisane, no, zbog definicija unutar zadatka (ω je unutar opisane kružnice, dira iznutra), jedini kandidat je pripisana kružnica nasuprot vrha A. Znamo da se dirалište šalje u dirалište, pa se točka R šalje u točku D što nam direktno daje tvrdnju. $\square$

Kružnica ω iz prethodnog zadatka zove se A-*mixtillinearna* kružnica i za nju vrijede razna svojstva, od kojih se neka dokazuju inverzijom.

Lakši zadaci

1. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ sa središtem opisane kružnice O. Invertirajmo oko A, s radijusom 1. U kakvom su odnosu točke O', A, B' i C'?

2. Dan je pravokutan trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C i točke X i Y na unutrašnjosti stranica $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$, redom. Konstruiramo četiri kružnice koje prolaze kroz C, sa središtima u A, B, X i Y. Dokažite da su četiri točke sjecišta tih kružnica (osim C) konciklične.

3. Dane su kružnice k_1, k_2, k_3 i k_4 koje se međusobno diraju[3] u točkama A, B, C i D. Dokažite da je četverokut $ABCD$ tetivan.

4. Za dvije kružnice k_1 i k_2 sa središtima u O_1 i O_2 koje se sijeku u X i Y kažemo da su ortogonalne ako je $\angle O_1XO_2 = 90°$. Dokažite da k_2 ostaje fiksna pri inverziji oko k_1.

5. Neka su A, B i C tri kolinearne točke i neka je P bilo koja točka u ravnini koja nije na tome istome pravcu. Dokažite da su središta opisanih kružnica trokutima $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ i $\triangle PCA$ te točka P na istoj kružnici.

6. Dan je četverokut $ABCD$ čije su dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ okomite te se sijeku u E. Dokažite da preslike točke E preko stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ leže na jednoj kružnici.

7. U trokutu $\triangle ABC$ s opisanom kružnicom Ω, simetrala kuta pri vrhu A siječe $\overline{BC}$ u D i Ω u točkama A i E. Kružnica s promjerom $\overline{DE}$ siječe Ω u točkama E i F. Dokažite da je $\overline{AF}$ simedijana trokuta $\triangle ABC$.

8. Dan je trokut $\triangle ABC$ takav da je $AB = AC$. Neka su D i E točke na kraćim lukovima AB i AC, redom. Pravci AD i BC se sijeku u F, a pravac AE siječe kružnicu opisanu trokutu $\triangle FDE$ u točkama E i G. Dokažite da je pravac AC tangentan na kružnicu opisanu trokutu $\triangle ECG$.

Teži zadaci

Ako je netko već upoznat s inverzijom i vjeruje da su prethodni zadaci prelagani, može rješavati ove. Naravno, ovi zadaci se neće nužno raspasti ako uočite inverziju, nego je inverzija samo jedan od koraka u rješenju.

9. Neka je Ω kružnica opisana trokutu $\triangle ABC$. Kružnica ω dira stranice AC i BC te dira kružnicu Ω iznutra u točki P. Pravac paralelan s AB koji siječe unutrašnjost trokutta $\triangle ABC$ tangentan je na ω u točki Q. Dokažite da je $\angle ACP = \angle QCB$.

10. Neka su ω_1 i ω_2 dvije kružnice sa središtima u O i P i neka se sijeku u točkama X i Y tako da je $\angle OXP = \angle OYP = 90°$. Promjer $\overline{AB}$ kružnice ω_1 je odabran tako da B leži unutar ω_2. Dvije kružnice tangentne na ω_2, koje prolaze kroz O i A diraju ω_2 u točkama F i G. Dokažite da je četverokut $FGOB$ tetivan.

[3] k_i dira k_{i-1} i k_{i+1}, gdje indekse gledamo mod 4

11. Dane su dvije kružnice ω_1 i ω_2. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih trokuta $\triangle ABC$ takvih da je ω_1 opisana kružnica $\triangle ABC$, a ω_2 A-pripisana kružnica trokuta $\triangle ABC$. Neka ω_2 dira BC, CA i AB u točkama D, E i F, redom. Ako je $\mathcal{S}$ neprazan, dokažite da je težište trokuta $\triangle DEF$ fiksna točka.

12. Dan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$, pri čemu je $AB \neq AC$. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$ i neka je M polovište stranice $\overline{BC}$. Dane su točke D i E na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ takve da je $AE = AD$ i točke D, H i E su kolinearne. Dokažite da je pravac HM okomit na zajedničku tetivu kružnica opisanih trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$.

13. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem vrijedi $AB > AC$. Neka je Γ opisana kružnica tog trokuta, H njegov ortocentar, a F nožište visine iz A na BC. Neka je M polovište od $\overline{BC}$. Neka je Q točka na Γ takva da je $\angle HQA = 90°$ i neka je K točka na Γ tako da je $\angle HKQ = 90°$. Pretpostavimo da su točke A, B, C, K i Q sve različite i leže na Γ ovim redom. Dokažite da su opisane kružnice trokuta $\triangle KQH$ i $\triangle FKM$ tangencijalne.