



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

## Trabájo Práctico 3

### PageRank

13 de diciembre de 2013

Métodos Numéricos

Integrante	LU	Correo electrónico
Escalante, José	822/06	joe.escalante@gmail.com
Osinski, Andrés	405/07	andres.osinski@gmail.com
Raskovsky, Iván Alejandro	57/07	iraskovsky@dc.uba.ar

Instancia	Docente	Nota
Primera entrega		
Segunda entrega		



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.fcen.uba.ar>

# Índice

<b>1. Abstract</b>	<b>2</b>
<b>2. Introducción Teórica</b>	<b>3</b>
2.1. PageRank . . . . .	3
2.2. Matriz de transiciones . . . . .	3
2.3. Teleporteo . . . . .	3
2.4. Resolución de PageRank . . . . .	4
2.5. Cálculo alternativo de $x^{(k+1)} = P_2 x^{(k)}$ . . . . .	4
2.6. QR y Reflecciones de Householder . . . . .	5
<b>3. Desarrollo</b>	<b>7</b>
3.1. Detalles de Implementación . . . . .	7
3.1.1. Enfoque Inicial - Etapa Python . . . . .	7
3.1.2. Implementación - Etapa C++ . . . . .	7
<b>4. Resultados</b>	<b>8</b>
4.1. Convergencia del Método de la Potencia . . . . .	8
4.2. Extrapolación Cuadrática . . . . .	9
<b>5. Discusión y Conclusiones</b>	<b>11</b>
5.1. Convergencia del Método de la Potencia . . . . .	11
5.2. Beneficios de la Extrapolación Cuadrática . . . . .	11
5.3. Trabajo futuro . . . . .	11
<b>A. Referencias</b>	<b>13</b>

## 1. Abstract

En este trabajo nos concentraremos en analizar la teoría detrás del algoritmo PageRank, famoso por su utilización por Google en su motor de búsquedas, y un conjunto de optimizaciones propuestas por *Kamvar* y *HaveliWala*.

Dado a conocer a través de un paper en 1998, el algoritmo Page Rank, se convirtió en una de las claves del éxito del motor de búsqueda Google. Su implementación se basa en la creación de un ranking en el cual se pondera con un cierto criterio cada una de las páginas según un modelo de *navegante aleatório*.

Al final presentaremos resultados de experimentaciones que nos parecieron pertinentes, mostrando que efectivamente la variación del método iterativo sí optimiza considerablemente la convergencia de PageRank.

### Palabras clave:

- PageRank
- Metodo de Potencia
- Extrapolación Cuadrática
- QR

## 2. Introducción Teórica

### 2.1. PageRank

PageRank es un algoritmo que modela un proceso aleatorio de navegación a través de distintas páginas Web, cuyo objetivo es generar un ranking de importancia de páginas, que en la práctica se utiliza para refinar los resultados de búsquedas de texto en las mismas para refinar los resultados por relevancia.

El problema se define como encontrar el autovector asociado al autovalor 1 de la matriz de transiciones correspondientes a un grafo de páginas Web interconectadas. Dado que esta matriz se puede ajustar para que sea estocástica, el autovector corresponde a la proporción de tiempo que pasa un navegante aleatorio en una página, que en la realidad resulta un buen indicador de importancia.

La manera en cómo se modela el problema del ranking es usando una matriz de adyacencias. Sea  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  donde  $n$  es la cantidad de sitios indexados, luego el elemento  $w_{ij}$  es igual 1 si existe un link de la página  $i$  a la página  $j$  y 0 en caso contrario. A su vez los links autoreferenciados se ignoran por lo que en diagonal tenemos todos valores nulos.

Ahora con  $W$  podemos extraer la cantidad de links salientes de cada página, simplemente sumando los elementos de la fila correspondiente. Llamamos  $n_j$  al grado de la página  $j$  donde  $n_j = \sum_{i=1}^n w_{ij}$ .

### 2.2. Matriz de transiciones

Con la matriz de adyacencias originales, ahora queremos tomar sus datos y generar con ellos una matriz estocástica que defina la probabilidad de clickear en un link al azar en una página y transicionar hacia otra.

Para ello, consideramos  $P$  la matriz que se obtiene a partir de tomar la matriz de adyacencias y normalizando sus filas para que tengan norma 2 igual a 1. Es decir, si una página tiene 2 links salientes, la probabilidad de clickear en uno de ellos es  $\frac{1}{2}$ , con tres links es  $\frac{1}{3}$ , y así sucesivamente.

El problema que hay con esto es que no todas las páginas necesariamente tienen links salientes, por lo que se asume que si un navegante llega a una página sin *outlinks*, elige una página al azar sobre el universo de todas las páginas.

Para modelar esto, sea  $\vec{d}$  un vector con longitud  $n$ , la posición  $d_i$  toma los valores

$$d_i = \begin{cases} 0 & \text{si el sitio tiene links salientes} \\ 1 & \text{si el sitio no tiene links salientes} \end{cases}$$

Luego, sea  $\vec{v}$  un vector con longitud  $v$  con  $v_i = [\frac{1}{n}]$ , definimos la matriz  $D$  como

$$D = \vec{d}^t * \vec{v}$$

Luego definimos  $P' = P + D$ , que es estocástica.

### 2.3. Teleporteo

Además del manejo de navegación aleatoria, *PageRank* considera una probabilidad de que en cualquier momento el navegador elija saltar a una nueva página al azar, sin considerar los links

de la página actual. Esto se llama *teleporteo*, y se modela como un factor  $c$  que multiplica a  $P'$  y una matriz  $E \in R^{n \times n}$ , con una probabilidad uniforme de  $\frac{1}{n}$ .

Luego la expresión que resuelve el problema de *PageRank* de la matriz de transiciones con teleporteo, dado el vector de probabilidades  $\vec{x}$ , es

$$Ax = (cP' + (1 - c)E)^t \vec{x}$$

## 2.4. Resolución de PageRank

La resolución de *PageRank*, en su forma más básica, consiste en obtener el autovector asociado al autovalor 1. La forma más simple de hacerlo es por medio del método de potencias que funciona computando  $A\vec{x}$  iterativamente hasta cumplir con un criterio de detención.

Este método presenta un problema práctico, en que la matriz de transiciones suele ser muy esparsa, pero si se considera la información agregada por las matrices  $E$  y  $D$ , la misma resulta densa. A continuación veremos que esto se puede resolver.

## 2.5. Cálculo alternativo de $x^{(k+1)} = P_2 x^{(k)}$

Veamos primero cómo utilizando el algoritmo de Kamvar podemos optimizar el espacio requerido en memoria para el almacenamiento de la matriz  $P_2$  y el tiempo de ejecución requerido para hacer la multiplicación entre matrices y vectores.

Queremos ver que el algoritmo propuesto por [?, Algoritmo 1] es equivalente a la operación  $\vec{y} = A\vec{x}$ , para  $A = (cP + (1 - c)E)^t$ , donde  $P$  es la matriz de transiciones de links, no ajustada por las páginas sin outlinks, y  $E$  es la matriz uniforme de teletransportación con valor  $\frac{1}{n}$  en cada celda.

Para ello, expandimos las ecuaciones de ambos y veremos que las mismas producen el mismo cálculo.

Primero, la ecuación  $A\vec{x}$  se desarrolla como

$$(c(P + D) + (1 - c)E)^t \vec{x}$$

Y la matrix de [?, Algoritmo 1] como

$$cP^t \vec{x} + (\|\vec{x}\|_1 - \|\vec{y}\|_1) \vec{v}$$

donde  $\vec{y}$  es el vector resultante de  $cP^t \vec{x}$  y  $\vec{v}$  es el vector de probabilidad uniforme de valor  $\frac{1}{n}$  en cada elemento. Luego planteamos la equivalencia

$$\begin{aligned} c(P + D)^t + (1 - c)E^t \vec{x} &= cP^t \vec{x} + (\|\vec{x}\|_1 - \|\vec{y}\|_1) \vec{v} \\ cP^t \vec{x} + cD^t \vec{x} + (1 - c)E^t \vec{x} &= cP^t \vec{x} + (\|\vec{x}\|_1 - \|\vec{y}\|_1) \vec{v} \\ cD^t \vec{x} + (1 - c)E^t \vec{x} &= (\|\vec{x}\|_1 - \|\vec{y}\|_1) \vec{v} \end{aligned}$$

Veamos por qué el término del lado izquierdo es equivalente al derecho.

La norma 1 del vector es la suma de los valores absolutos de sus elementos. Observemos que, para las columnas de  $P$ , las mismas o bien tienen norma 1 que vale 1, o cero. Es decir, las columnas no-cero de  $P$  contribuyen a la norma 1 de  $\vec{y}$ .

Observemos también que en la multiplicación  $(1-c)E\vec{x}$ , la norma 1 de este producto es  $(1-c)$ , pues la norma 1 de cada columna de  $E$  es 1 y  $\|\vec{x}\| = 1$ .

Por ultimo, también vemos que para aquellas columnas de ceros en  $P^t$ , las columnas no-cero de  $D$  preservan la norma de las mismas.

Dados los hechos anteriores, podemos observar que  $\|\vec{x}\|_1 - \|\vec{y}\|_1$  se puede interpretar como la norma que se “pierde” cuando  $\vec{x}$  es multiplicada por  $cP^t$ . Esta “pérdida de norma” se debe justamente a que falta sumar los productos de  $\vec{x}$  por  $E$  y  $D$  de la ecuación, pues  $A$  preserva la norma 1.

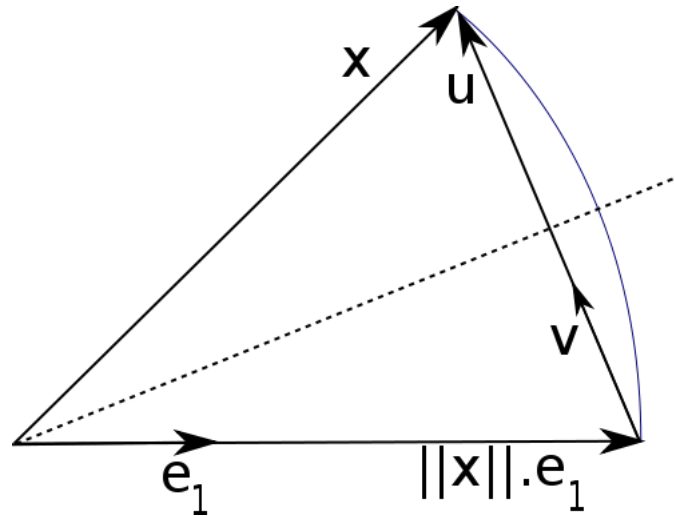
Ahora, como en  $E^t$  y  $D^t$ , las filas que componen cada matriz son iguales entre sí (en  $E^t$  todos elementos valen  $\frac{1}{n}$ , y en  $D^t$  como fue descrito en la sección anterior), cuando se realiza  $E\vec{x}$  o  $D^t\vec{x}$ , el resultado produce un vector de valores idénticos en cada posición. Estos mismos valores son la diferencia que captura  $(\|\vec{x}\|_1 - \|\vec{y}\|_1)\vec{v}$ . Luego agregar esto a  $\vec{y}$  resulta equivalente a haber realizado las sumas de vectores resultantes correspondientes, con la diferencia de que no hizo falta materializar dichas matrices.

Con ello concluimos que los dos términos del algoritmo de Kamvar son equivalentes a la matriz  $A$  de transiciones. ■

## 2.6. QR y Reflecciones de Householder

Existen variadas formas de descomponer una matriz. En este trabajo en particular usaremos la descomposición  $QR$ , la cual consiste en descomponer una matriz  $A$  en una matriz ortogonal  $Q$  y una triangular superior  $R$  de manera que  $A = QR$ . Al tener descompuesta  $A$  en esa forma y teniendo un sistema  $Ax = b$ , la obtención del vector solución se realiza resolviendo el sistema  $Rx = Q^tb$ .

A su vez existen distintos procedimientos para poder hallar la descomposición  $QR$  de una matriz. Uno de ellos es las *reflecciones de Householder*, procedimiento por el cual en cada iteración se obtienen ceros por debajo de la diagonal, llevando la matriz  $A$  a ser la matriz  $R$  diagonal superior.



El objetivo es hallar una transformación lineal que cambie el vector  $x$  en un vector de la misma longitud que sea colineal con  $e_1$ . Householder refleja a través de la línea punteada (elegida para dividir el ángulo entre  $x$  y  $e_1$ ). El máximo ángulo con esta transformación es a lo sumo de  $45^\circ$ .

Veamos un paso del procedimiento para poder ilustrar mejor: Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $x_1$  el vector correspondiente a la primer columna de  $A$  y  $e_1$  el vector canónico, definimos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \|x_1\| \\ u &= x_1 - \alpha_1 e_1 \\ v &= \frac{u}{\|u\|} \\ Q_1 &= I - 2vv^T\end{aligned}$$

Luego  $Q_1$  es la matriz que al multiplicarla a izquierda por  $A$  coloca ceros por debajo de la diagonal.

$$Q_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Repitiendo estos pasos:  $Q_{n-1} \dots Q_2 Q_1 A = R$ . Luego el producto de las  $Q$ 's forma una matriz ortogonal, lo cual hace fácil y rápido hallar el vector solución del sistema.

$$\begin{aligned}Q^T &= Q_{n-1} \dots Q_2 Q_1 \\ Ax = b &\iff Q^T Ax = Q^T b \iff Rx = Q^T b\end{aligned}$$

## 3. Desarrollo

### 3.1. Detalles de Implementación

#### 3.1.1. Enfoque Inicial - Etapa Python

En principio para evitarnos detalles de manejo de memoria y contar con una mayor de expresividad de lenguaje, implementamos el trabajo en Python.

Usando librerías como Numpy y Scipy, pudimos hacer uso de matrices esparsas y operarlas cómodamente de manera eficiente; dado que las distintas clases de matrices esparsas disponibles exponen la misma interfaz, pudimos probar entre varias hasta encontrar una que funcione para nuestro caso de uso.

Tan sólo unas horas de trabajo y terminamos una implementación que devolvía resultados que parecían correctos. Inclusive con datasets enormes, como los que se pueden encontrar en la página de Stanford, el programa en Python tardaba pocos segundos por iteración y en cuestión de minutos armaba el ranking.

Las únicas diferencias sustanciales de tiempo aparecían en la lectura del archivo de entrada y armado de la matriz inicial, donde el overhead en Python dominaba y no había ningún conjunto de subrutinas optimizadas para esa tarea.

#### 3.1.2. Implementación - Etapa C++

Una vez habiendo comprobado que la idea de cómo implementar este trabajo funcionaba, es que usamos el código de Python a manera de pseudocódigo para el de C++.

En C++ para armar las matrices esparsas usamos STL y la estructura de datos *std::map*, que expone una interfaz de contenedor genérico que preserva orden, internamente implementado como un Red-Black tree.

A diferencia de la implementación en Python donde hacemos uso indiscriminado de la riqueza de las librerías, nos vimos forzados a acomodar las operaciones de manera tal que tengamos que implementar solamente las operaciones exclusivamente necesarias.

La reclamación de recursos de memoria es uno de los mayores problemas de usar lenguajes con manejo de memoria manual. Esto en la práctica no resultó ser un problema, dado que tomamos ventaja de las facilidades de manejo de memoria provistas por la nueva versión de C++: los *unique\_ptr* y los *shared\_ptr*, que permiten reclamar objetos que se van fuera de *scope*, y en el caso de los *unique\_ptr*, también garantizan que un objeto tenga una sola variable como “dueño” a la vez, permitiendo razonar más fácilmente sobre la misma.

Un problema que sí hubo, fue que nuestro primer intento de implementación intentaba simplificar las operaciones matriciales haciendo uso de la sobrecarga de operadores en C++. El problema con esto es que los operadores retornan objetos por copia, por lo que cada operación numérica hecha con estos implicaría una copia masiva de datos (en teoría C++ soporta una clase de optimización llamada *elisión de copia* para evitar retornar objetos por copia, pero su utilización es muy acotada y es difícil contar con la misma siempre).

Para resolver esto, implementamos las operaciones con variantes que pasan objetos por referencia, y en muchos casos, para ahorrar memoria, hicimos operaciones que modifican la matriz original. En la práctica esto fue necesario, dado que varias matrices esparsas llegaban a consumir múltiples gigabytes de memoria.



## 4. Resultados

En esta sección compararemos el Método de la Potencia, su convergencia y como influye realizar la Extrapolación Cuadrática en diferentes iteraciones.

También estudiaremos cómo afecta el parámetro de teletransportación a los resultados.

Para los siguientes análisis decidimos utilizar un criterio de parada relativo. Tomamos la diferencia relativa del resultado normalizado de la norma 2 entre iteraciones.

### 4.1. Convergencia del Método de la Potencia

Nos interesa estudiar el comportamiento de la convergencia del Método de la Potencia para utilizarla como referencia o caso base para luego incorporar la Extrapolación Cuadrática.

En el Cuadro 1 vemos instancias de prueba que utilizamos para realizar las pruebas. Todos estos datasets provienen de sitios web reales ajustándose al análisis deseado. Los consideramos representativos y suficientemente grandes para nuestro análisis.

Nombre	# nodos	# links	Descripción
Cit-HepTh	9912293	352807	provisto por la cátedra
web-Stanford	281903	2312497	grafo del sitio de Stanford
web-BerkStan	685230	7600595	grafo de los sitios de Berkeley y Stanford

Cuadro 1: Datasets.

Podemos observar que hay una gran variación entre la cantidad de nodos y links entre los datasets. *Cit-HepTh* contiene muchos más nodos que links y *web-BerkStan* contiene la mayor cantidad de links, con una cantidad de nodos menor.

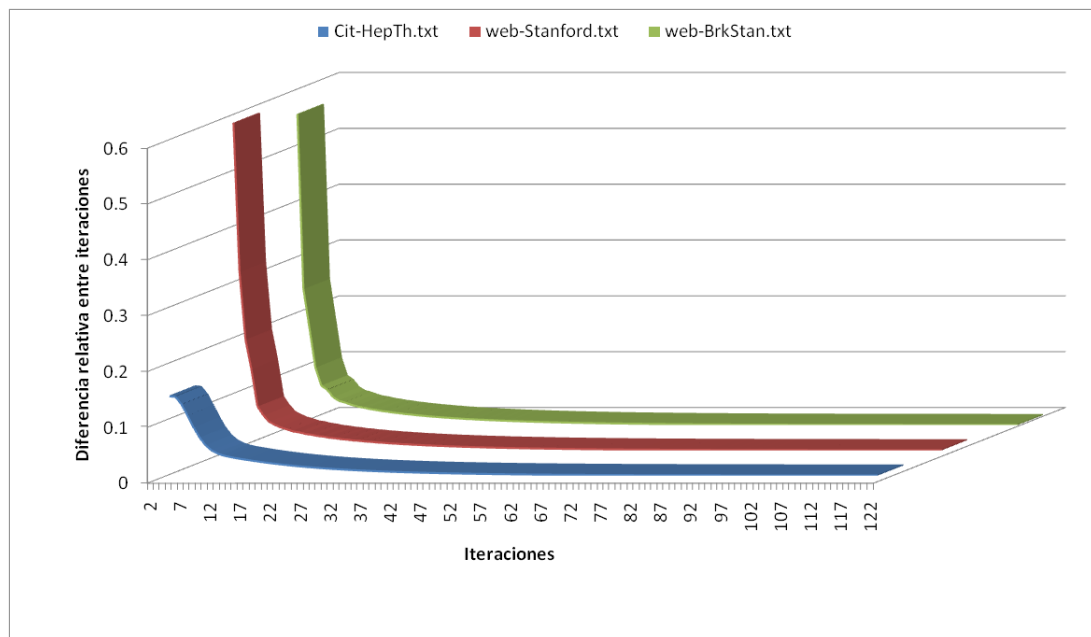


Figura 1: Método de Potencia por instancias de pruebas.

En la Figura 1 mostramos la cantidad de iteraciones del Método de la Potencia necesarias para lograr la convergencia deseada en el resultado. Para esta prueba utilizamos  $c = 0,95$ . Graficamos desde la segunda iteración debido a que la diferencia relativa de la primer iteración es muy grande, dejando el resto del gráfico plano.

Podemos observar que la cantidad de iteraciones necesarias para los tres datasets es similar. Esto nos lleva a que la convergencia en los resultados es estable y parece no verse afectados por el tamaño de la matriz, es decir, la cantidad de nodos. Tampoco parece tener efecto la cantidad de links, ya que todos los datasets parecen comportarse de igual forma. El tiempo de ejecución por dataset también es similar.

Para las siguientes pruebas decidimos utilizar *web-BerkStan* ya que es el de mayor relación nodos / links, un grafo más fuertemente conexo, con mayores relaciones entre páginas.

## 4.2. Extrapolación Cuadrática

En la Figura 2 mostramos el efecto de incorporar Extrapolaciones Cuadráticas intercaladas a las iteraciones del Método de la Potencia. Graficamos la diferencia norma 1 del resultado en cada iteración y el resultado finalmente obtenido. Comparamos:

- Sin Extrapolación Cuadrática
- Una Extrapolación Cuadrática en la 5ta iteración
- Una Extrapolación Cuadrática cada 10 iteraciones
- Una Extrapolación Cuadrática cada 5 iteraciones
- Una Extrapolación Cuadrática cada 4 iteraciones

Realizamos estas pruebas para  $c = ,90$ ,  $c = ,95$  y  $c = ,99$ . Los resultados se encuentran en las Figuras 2(a), 2(c) y 2(e). Por cada variante incluimos también un detalle de la aplicación de las primeras iteraciones con Extrapolaciones Cuadráticas en las Figuras 2(b), 2(d) y 2(f).

Se puede ver claramente un acercamiento más veloz al resultado en las iteraciones donde se realizaron Extrapolaciones Cuadráticas. Se observa también que al menos en el inicio (las primeras iteraciones) realizar una Extrapolación Cuadrática cada 10 iteraciones es la variante que más rápidamente converge.

Inclimos en el Cuadro 2 la cantidad de iteraciones necesarias para cada combinación de  $c$  y frecuencia de iteración de Extrapolación Cuadrática. Los datos son los mismos que los utilizados para la Figura 2. Se puede apreciar que el beneficio obtenido realizando Extrapolaciones Cuadráticas es significativo y se encuentra en el rango de una reducción en la cantidad de iteraciones del 27 % al 44 % para nuestro dataset y los  $c$  analizados contra no utilizar ninguna iteración con Extrapolación Cuadrática. Incluso una sola iteración con Extrapolación Cuadrática produce beneficios.

Por otro lado, podemos apreciar que la convergencia del Método de la Potencia depende del  $c$  elegido. A mayor  $c$  (menor grado de teletransportación) el algoritmo requiere muchas más iteraciones para encontrar el resultado deseado.

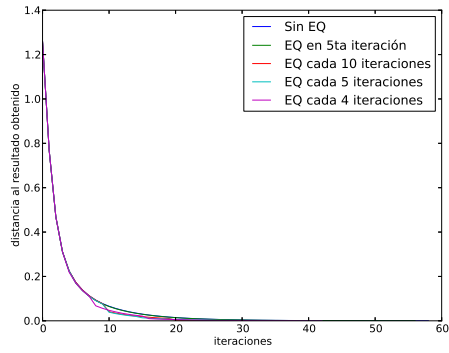
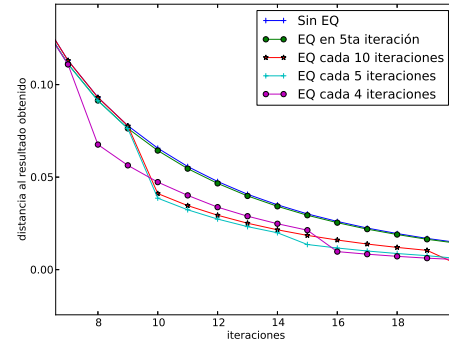
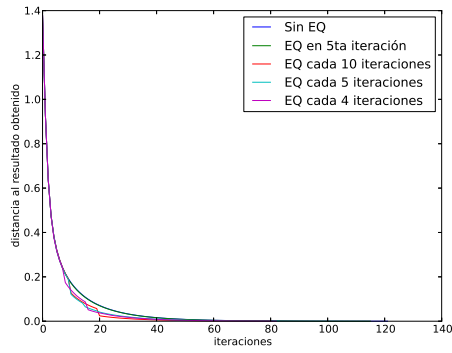
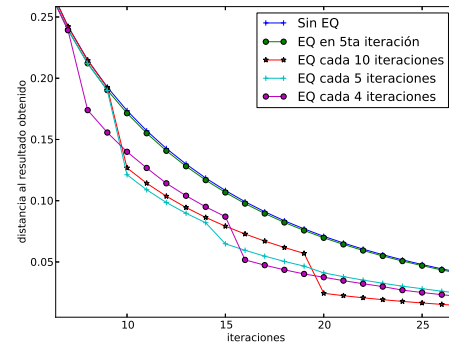
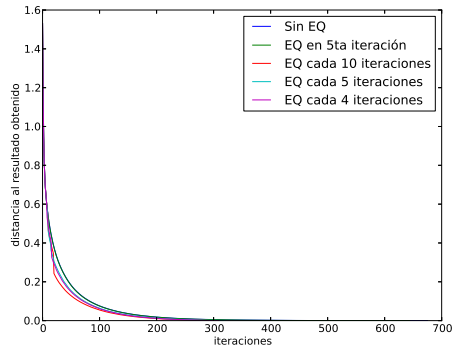
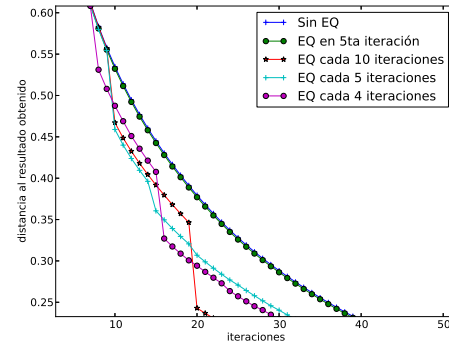
(a)  $c = 0,90$ (b)  $c = 0,90$  detalle(c)  $c = 0,95$ (d)  $c = 0,95$  detalle(e)  $c = 0,99$ (f)  $c = 0,99$  detalle

Figura 2: Mejoras aplicando Extrapolación Cuadrática en diferentes frecuencias.

	$c = 0,90$	$c = 0,95$	$c = 0,99$
Sin EQ	59	122	676
EQ en la 5ta iteración	57	116	645
EQ cada 10 iteraciones	39	81	302
EQ cada 5 iteraciones	43	84	321
EQ cada 4 iteraciones	43	83	310

Cuadro 2: Cantidad de iteraciones por variante.

## 5. Discusión y Conclusiones

### 5.1. Convergencia del Método de la Potencia

Como podemos ver en la Sección 4.1 la convergencia del Método de la Potencia no depende de los nodos ni de los links (tamaño) del grafo a analizar. En cambio como podemos ver en el Cuadro 2 sí depende del factor de teletransportación  $c$  elegido. A mayor  $c$  mayor son las iteraciones necesarias para la convergencia.

### 5.2. Beneficios de la Extrapolación Cuadrática

Se puede ver claramente en el Cuadro 2 los beneficios de realizar Extrapolaciones Cuadráticas. El beneficio se encuentra en el rango del 27 % al 44 %.

Es muy interesante el comportamiento de la cantidad de iteraciones necesarias en base a la frecuencia de realizar iteraciones con Extrapolación Cuadrática. El beneficio de incorporar estas iteraciones es claro, pero una frecuencia muy alta perjudica su beneficio. Para todos los  $c$  realizar una Extrapolación Cuadrática cada 4 o 5 iteraciones se comporta peor que realizar una cada 10 iteraciones.

La Extrapolación Cuadrática para el Método de la Potencia es una aproximación de una iteración imaginando esta como una combinación lineal de los primeros tres autovectores. El paper de KamvarREFFF muestra empíricamente sin ningún sustento teórico que esta aproximación es mejor que realizar la siguiente iteración del Método de la Potencia.

En nuestro caso, al aplicar esta aproximación muy seguido, sin dejar que el Método de la Potencia mejore por sí sólo, el resultado nos produce menor beneficio. Nuestra hipótesis es que se debe a que al utilizar sólo tres autovectores para la aproximación se pierde la influencia de los siguientes autovectores que parece no ser menor. Por esto, necesita de varias iteraciones del Método de la Potencia para que la aproximación vuelva a traer grandes beneficios.

Por último no calculamos el tiempo que influye realizar una iteración con Extrapolación Cuadrática, pero en KamvarREFFF se postula que es despreciable en comparación con el beneficio otorgado.

### 5.3. Trabajo futuro

Proponemos el siguiente trabajo futuro basado en los resultados, conclusiones y experiencias obtenidas a lo largo del desarrollo de este trabajo:

- Medir el tiempo necesario para agregar una Extrapolación Cuadrática. No creemos que el beneficio práctico temporal sea muy diferente que el beneficio de convergencia en cantidad de iteraciones, como esta postulado en KamvarREFFF. No obstante se podría validar experimentalmente.
- Analizar detalladamente la frecuencia óptima para realizar iteraciones con Extrapolaciones Cuadráticas. En nuestro caso encontramos que realizar una iteración con Extrapolación Cuadrática cada 10 iteraciones es mejor que cada 4 o 5 iteraciones, pero es probable que sea otra la frecuencia óptima. También puede darse el caso donde dejar “descansar” al algoritmo durante varias iteraciones sin realizar Extrapolación Cuadrática y luego realizarla nuevamente frecuentemente mejore a los resultados.

- Analizar el comportamiento con otras instancias de prueba y comparar entre sí. La instancia que utilizamos para las pruebas es real, pero acotada. Los resultados pueden llegar a variar según diferentes datasets, dependiendo cuán importantes son los autovectores siguientes al tercero (según nuestra hipótesis).
- Calcular más autovalores y sus autovectores asociados para ver si la hipótesis previa donde postulamos que estos tienen mucha influencia en cada iteración tiene fundamento o carece de él.

## A. Referencias

Wikipedia Burden