AYRIK MATEMATİK VE MANTIK

-1-

BİL 1005

DEÜ, Fen Fakültesi,
Bilgisayar Bilimleri Bölümü

Kaynaklar

1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Kenneth H. Rosen, ISBN 0072424346

(Ayrık Matematik ve Uygulamaları, Kenneth H. Rosen, Palme Yayıncılık.)

2. *Discrete Mathematics With Combinatorics*, Anderson James A., 2004, Prentice Hall.

3. *Bilişim Matematiği Uygulamalı Ayrık Matematik*, Toros Rifat Çölkesen

Değerlendirme

Notlandırma	
Vize	%40
Final	%60

Ayrık Matematik Nedir?

- Ayrık Matematik, matematiğin ayrık nesneleri öğrenmeye adanmış kısmıdır. Ayrık matematik kullanarak çözülen problem türleri aşağıdakileri kapsar:
  - Bir bilgisayar sistemi üzerinde, geçerli bir şifre seçmek için kaç yol vardır?
  - Piyangoda kazanma olasılığı nedir?
  - Bir ağda iki bilgisayar arasında bağlantı var mıdır?
  - Bir ulaşım sistemi üzerinde iki şehir arasındaki en kısa yol nedir?

Önermeler

Bir önerme ya **doğru** ya da **yanlış** olan, fakat hem doğru hem de yanlış olamayan bir açıklayıcı cümledir.

Aşağıdaki tüm açıklayıcı cümleler birer önermedir.

- Ankara Türkiye Cumhuriyyeti'nin başkentidir.
- Paris, İngiltere'nin başkentidir.
- 1 +1 = 2
- 2 + 2= 3

Önerme değil:

- Saat kaç?
- Bunu dikkatle okuyunuz
- x + 1 = 2
- x + y = z

Önerme Değişkenleri

- Önermeleri değişkenlerle ifade ederiz.
- Küçük harfler kullanırız ve genelde ***p*** ile başlar
  - (***p*, *q*, *r*, *s*, …**)
- Bir önerme değişkeni iki değerden birine sahip olabilir:
  - Doğru (D) **True (T),** Yanlış (Y) **False (F)**

Değil

- p bir önerme olsun. p'nin değil'i $\bar{p}$ ($\sim p$, - p) olarak gösterilen cümle aşağıdaki şekildedir.
- " p " nin doğru olmadığı durum'
- $\sim p$önermesi "değil p" olarak okunur.

p	$\sim p$
D	**Y**
Y	**D**

Örnek

- p : “Hasan’ın bilgisayarında Linux bulunmaktadır”
- $\sim p$: “Hasan’ın bilgisayarında Linux bulunmamaktadır”

$p \wedge q$

- p ve q iki önerme olsun. p ve q'nun $p \wedge q$ şeklinde gösterilen birleştirme operatörü "p ve q" önermesi olarak tanımlanır. $p \wedge q$ birleştirme sonucu p ve q'nun her ikisi de doğru olduğunda doğru diğer durumlarda yanlıştır.

p	q	$p \wedge q$
Y	Y	Y
Y	D	Y
D	Y	Y
D	D	D

Örnek

- ***p*** : “Hande’nin bilgisayarındaki sabit diskte 16 GB’dan daha fazla boş yer vardır.”
- ***q*** : “Hande’nin bilgisayarındaki işlemci 1GHz’den daha hızlı çalışmaktadır.”

Hande’nin bilgisayarındaki sabit diskte 16 GB’dan daha fazla boş yer vardır ve Hande’nin bilgisayarındaki işlemci 1GHz’den daha hızlı çalışmaktadır.

$p \vee q$

- p ve q iki adet önerme olsun. p ve q'nun $p \vee q$ şeklinde gösterilen ayırma operatörü "p ve ya q" önermesi olarak tanımlanır. $p \vee q$ ayırma sonucu p ve q'nun her ikisi de yanlış olduğunda yanlış diğer durumlarda doğrudur.

p	q	$p \vee q$
Y	**Y**	**Y**
Y	**D**	**D**
D	**Y**	**D**
D	**D**	**D**

Örnek

- ***p*** : “Hande’nin bilgisayarındaki sabit diskte 16 GB’dan daha fazla boş yer vardır.”
- ***q*** : “Hande’nin bilgisayarındaki işlemci 1GHz’den daha hızlı çalışmaktadır.”

Hande’nin bilgisayarındaki sabit diskte 16 GB’dan daha fazla boş yer vardır ve ya Hande’nin bilgisayarındaki işlemci 1GHz’den daha hızlı çalışmaktadır.

Özel Veya

- p ve q iki adet önerme olsun. p ve q'nun $p \oplus q$ şeklinde gösterilen özel veya operatörünün sonucu p ve q'nun yalnzca birinin doğru olduğu durumda doğru, diğer durumlarda yanlış olan bir önermedir.

p	q	$p \oplus q$
Y	**Y**	**Y**
Y	**D**	**D**
D	**Y**	**D**
D	**D**	**Y**

$$\boldsymbol{p \oplus q \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)}$$

Şartlı İfadeler

- p ve q birer önerme olsun.
  - $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ şartlı ifadesi *"eğer p ise, bu durumda q"* olarak tanımlanmıştır.
  - $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ şartlı ifadesi p doğru, q yanlış olduğunda yanlış, diğer durumların hepsinde doğrudur.
  - $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ şartlı ifadesinde p'ye hipotez (veya öncül), q'ya sonuç (veya hüküm) denir.

$p \to q$

p	q	$p \to q$
Y	Y	D
Y	D	D
D	Y	Y
D	D	D

$$p \to q \equiv \overline{p} \vee q$$

Örnek

- ***p*** : “Meryem Ayrık Matematiği öğrenir”
- ***q*** : “Meryem iyi bir iş bulacak”

p→q : “Eğer Meryem Ayrık Matematiği öğrenirse iyi bir iş bulacak.”

Koşullu Önermeler

- $p \rightarrow q$ şartlı ifadesinden başlayarak yeni şartlı ifadeler oluşturabiliriz.
  - $q \rightarrow p$ önermesi $p \rightarrow q$ ***karşıtı*** olarak adlandırılır.
  - $\sim q \rightarrow \sim p$ önermesi $p \rightarrow q$'nun ***karşıt tersi*** olarak adlandırılır.
  - $\sim p \rightarrow \sim q$ önermesi $p \rightarrow q$'nun ***tersi*** olarak adlandırılır.

Çift (Karşılıklı) Şartlı İfadeler

- p ve q iki önerme olsun. $p \leftrightarrow q$ "*p*, sadece ve sadece *q ise*" olarak tanımlanmıştır.
- $p \leftrightarrow q$ çift şartlı ifadesi p ve q aynı doğruluk değerini aldıklarında doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

p	q	$p \leftrightarrow q$
Y	**Y**	**D**
Y	**D**	**Y**
D	**Y**	**Y**
D	**D**	**D**

Soru 1

- Aşağıdaki bileşik önermeler için doğruluk tabloları oluşturunuz.
  - $\overline{p} \vee q$
  - $\overline{p} \wedge \overline{q}$
  - $\overline{p} \leftrightarrow \overline{q}$
  - $(p \vee \overline{q}) \rightarrow (p \wedge q)$

Mantık ve Bit İşlemleri

- Bilgisayarlar bilgileri bitler kullanarak gösterirler. Bir bit sadece 0 ve 1 değerleri alabilen bir semboldür. Bit kelimesi ingilizcede binary digit teriminden gelmektedir, çünkü sayıların ikili gösteriminde basamak değerlerinde sıfırlar ve birler kullanılmaktadır.

Mantık ve Bit İşlemleri

- Bilgisayar bit işlemleri mantıksal bağlayıcılara karşılık gelmektedir. $\wedge$, $\vee$ ve $\oplus$ işlemlerinde doğru yerine bir, ve yanlış yerine sıfır kullandığımız zaman aşağıdaki doğruluk tablosunda karşılığı bulunan bit işlemleri elde edilir.

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

Soru 2

- 01 1011 0110 ve 11 0001 1101 bit dizgilerinde bit üzerinde VEYA, bit üzerinde VE, ve bit üzerinde DIŞLAYICI VEYA (XOR) işlemleri uygulayınız.

```
01 1011 0110
11 0001 1101
------------
11 1011 1111    bitwise OR

01 0001 0100    bitwise AND

10 1010 1011    bitwise XOR
```

Soru 3

p : Şu anda sıcaklık donma derecesinin altındadır
q : kar yağmaktadır

Şu anda sıcaklık donma derecesinin altındadır ve kar yağmaktadır.

Şu anda sıcaklık donma derecesinin altındadır fakat kar yağmamaktadır

Şu anda sıcaklık donma derecesinin altında değildir ve kar yağmamaktadır

Eğer şu anda sıcaklık donma derecesinin altında ise aynı zamanda kar yağmaktadır

Şu anda sıcaklığın donma derecesinin altında olması kar yağması için gerekli ve yeterli bir durumdur.

Soru 3

p : Şu anda sıcaklık donma derecesinin altındadır
q : kar yağmaktadır

Şu anda sıcaklık donma derecesinin altındadır ve kar yağmaktadır. $p \wedge q$

Şu anda sıcaklık donma derecesinin altındadır ve kar yağmamaktadır $p \wedge \overline{q}$

Şu anda sıcaklık donma derecesinin altında değildir ve kar yağmamaktadır $\overline{p} \wedge \overline{q}$

Eğer şu anda sıcaklık donma derecesinin altında ise aynı zamanda kar yağmaktadır $p \longrightarrow q$

Şu anda sıcaklığın donma derecesinin altında olması kar yağması için gerekli ve yeterli bir durumdur. $p \longleftrightarrow q$

Totoloji, Çelişki, Mantıksal Olarak Eşdeğer

- **Tautology (Totoloji):** Kendisini oluşturan önermelerin doğruluk değerleri ne olursa olsun her zaman doğru olan bir bileşik önermeye her zaman doğru (totoloji) denir.

- **Contradiction (Çelişki):** Sonucu her zaman yanlış olan bileşik önermeye çelişki denir.

- **Mantıksal Olarak Eşdeğer:** olası her durumda aynı doğruluk değerlerine sahip bileşik önermeler mantıksal olarak eşdeğer adlandırılır.

Örnek

- $p \vee \overline{p}$'nin totoloji olduğunu gösteriniz.

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**

- $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$'nin totoloji olduğunu gösteriniz.

Örnek

- $p \vee \overline{p}$'nin totoloji olduğunu gösteriniz.

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
T	F	T
F	T	T

- $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$'nin totoloji olduğunu gösteriniz.

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$
F	F	F	T	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	F	T

Örnek

- $p \wedge \overline{p}$'nin çelişki olduğunu gösteriniz.

$\boldsymbol{p}$	$\overline{\boldsymbol{p}}$	$p \wedge \overline{p}$
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**

- $(p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)'$nin çelişki olduğunu gösteriniz.

Örnek

- $p \wedge \overline{p}$'nin çelişki olduğunu gösteriniz.

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**

- $(p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$'nin çelişki olduğunu gösteriniz.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$(p \vee q)$	$(\overline{q} \vee p)$	$(\overline{p} \vee \overline{q})$	$(\overline{p} \vee q)$	**İfade**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**

Örnek

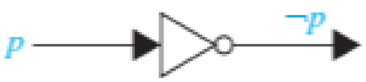
- $(\bar{p} \vee \bar{q})$ ve $(\overline{p \wedge q})$ 'nun mantıksal eşdeğer olduğunu gösteriniz.

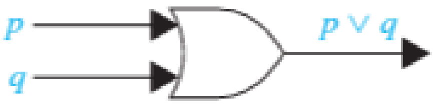
p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$(\bar{p} \vee \bar{q})$	$p \wedge q$	$(\overline{p \wedge q})$
F	F	T	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F

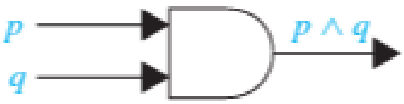
Mantıksal Devreler

- Bir mantıksal devre her biri bir bit (sadece 0 (kapalı) yada 1 (açık)) olan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ şeklinde girdi sinyalleri alır ve her biri birer bit olacak şekilde $s_1, s_2, \ldots, s_n$ şeklinde çıktı sinyalleri üretir.

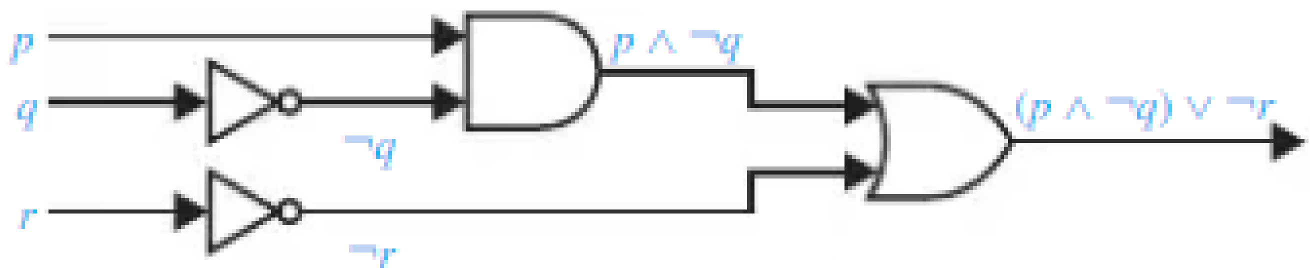
Temel Mantık Kapıları



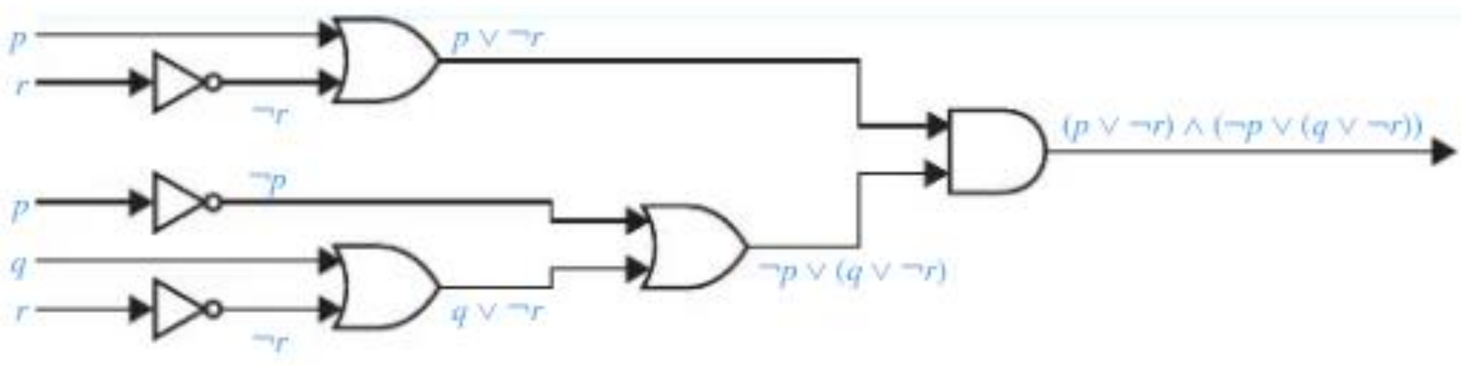




Örnek



p
q
r
$p \wedge \neg q$
$\neg q$
$\neg r$
$(p \wedge \neg q) \vee \neg r$



p
r
$p \vee \neg r$
$\neg r$
p
$\neg p$
q
r
$q \vee \neg r$
$\neg r$
$\neg p \vee (q \vee \neg r)$
$(p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee (q \vee \neg r))$

Eşdeğerlilikler

Sıra	Teorem	Özellik
1.	$a)\ p \wedge D \equiv p$ $b)\ p \vee Y \equiv p$	Özdeşlik Kanunları
2.	$a)\ p \vee D \equiv D$ $b)\ p \wedge Y \equiv Y$	Baskınlık Kanunları
3.	$a)\ p \vee p \equiv p$ $b)\ p \wedge p \equiv p$	Değişmezlik Kanunları
4.	$a)\ \bar{\bar{p}} \equiv p$	Çift Değilleme
5.	$a)\ p \vee q \equiv q \vee p$ $b)\ p \wedge q \equiv q \wedge p$	Sıra Değişme Kanunları
6.	$a)\ (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $b)\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Birleşme Kanunları

Eşdeğerlilikler

Sıra	Teorem	Özellik
7.	a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Dağılma Kanunları
8.	a) $(\overline{p \wedge q}) \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$ b) $(\overline{p \vee q}) \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$	De Morgan Kanunları
9.	a) $p \vee \bar{p} \equiv D$ b) $p \wedge \bar{p} \equiv Y$	Değilleme Kanunları
10.	a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Yutma Kanunları

Soru 4

$\neg(p \rightarrow q)$ ifadesini sadeleştiriniz

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q)$$

$$\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \qquad \text{by the second De Morgan law}$$

$$\equiv p \wedge \neg q \qquad \text{by the double negation law}$$

Soru 5

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ ifadesini sadeleştiriniz

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{by the second De Morgan law} \\
&\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q] && \text{by the first De Morgan law} \\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{by the double negation law} \\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{by the second distributive law} \\
&\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{because } \neg p \wedge p \equiv \mathbf{F} \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F} && \text{by the commutative law for disjunction} \\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{by the identity law for } \mathbf{F}
\end{aligned}
$$

SON