

MÉTODOS COMPUTACIONAIS

DR. MARCOS NAPOLEÃO RABELO

DR. WANDERLEI M. PEREIRA JUNIOR

**Solução de equações unidimensionais:
Método da Bisseção**

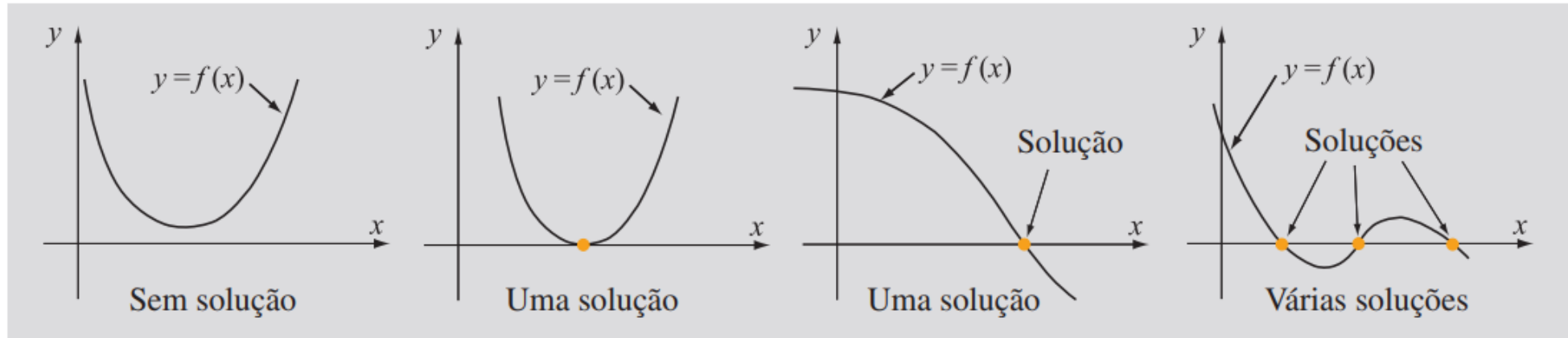
Grupo de Pesquisa e Estudos em Engenharia (GPÉE)



MÉTODO DA BISSEÇÃO

O método da bisseção faz parte dos métodos numéricos para determinar-se **solução de equações**. Basicamente aqui estamos falando de determinar o **zero de uma função** (também chamado de raiz - Figura 1).

Figura 1 – Ilustração de equações com nenhuma, uma ou várias soluções [1].



Quando a equação é simples, é comum o emprego de técnicas ou fórmulas pré-estabelecidas que permitem a solução da equação de forma rápida. São exemplos:

- Fórmula de Bhaskara;
- Método de Briot-Ruffini.

Para equações que possuem “**grau de complexidade**” elevado essa determinação pode ser feita de **maneira numérica por meio de aproximações**. Dentro desse apanhado de técnicas de aproximação de raízes surgem os **modelos numéricos de redução sucessiva de intervalo** (também chamado de métodos de confinamento), são exemplos de métodos com essa característica:

- Método da bisseção;
- Método da seção áurea.

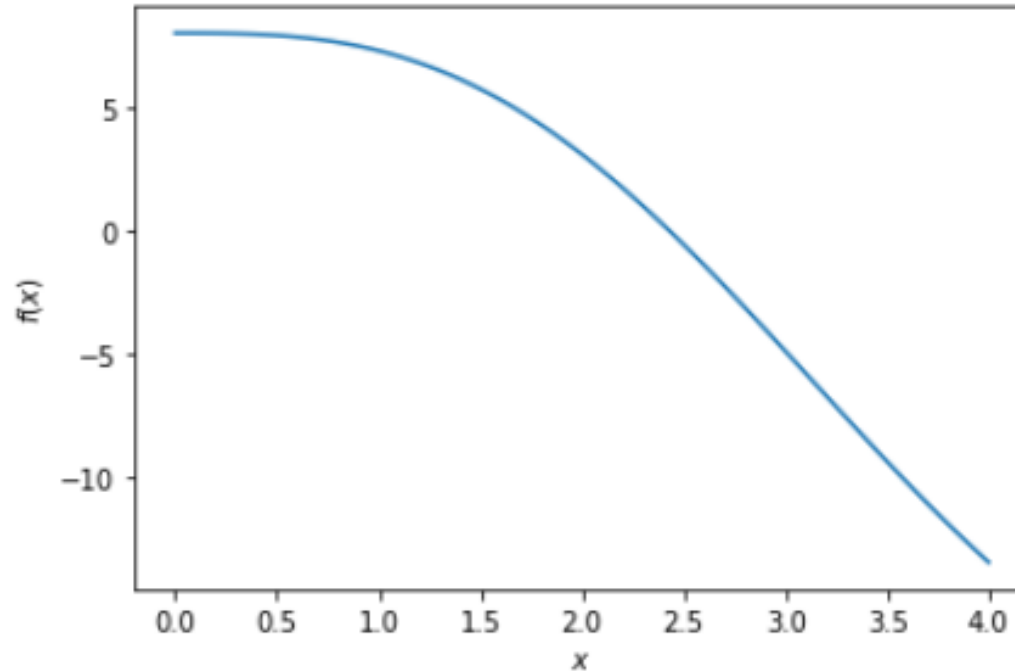
O MÉTODO DA BISSEÇÃO

O método da bisseção consiste em determinar o valor da solução de uma função dentro de um intervalo pré-estabelecido. Portanto o método explora esse intervalo dada uma função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Porém para obter-se uma raiz dentro desse intervalo deve-se respeitar a condição de existência dada pelo [Teorema de Bolzano](#):

Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$, tal que, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então a função $f(x)$ possui pelo menos uma raiz no intervalo $[a, b]$.

Na **Figura 2** é possível verificar que para a equação citada anteriormente no intervalo $[0, 4]$. o valor do $f(0) \cdot f(4)$ é de aproximadamente $-107,24$. Para o intervalo $[0, 1]$ por exemplo o valor do Teorema de Bolzano é de $58,29$.

Figura 2 – Gráfico da função $f(x) = 8 - 4,50 \cdot (x - \text{sen}x)$ no intervalo 0 e 4 [1].



Sabendo que **existe** uma **raiz da função no intervalo** é possível a determinação utilizando o algoritmo da bisseção que toma como **princípio reduções sucessivas do intervalo**, no caso o intervalo é **reduzido pela metade do seu valor original**. As reduções sucessivas do intervalo seguem o seguinte critério:

$$x^{t+1} = \frac{a^t + b^t}{2} \quad 1$$

$$f(x^{t+1}) \cdot f(a^t) < 0 \quad \text{Novo intervalo: } [a^t, x^{t+1}] \quad 2$$

$$f(x^{t+1}) \cdot f(a^t) > 0 \quad \text{Novo intervalo: } [x^{t+1}, b^t] \quad 3$$

$$x^1 = \frac{2 + 3}{2} = 2,5$$

$$f(x^1) \cdot f(2) = -1,72$$

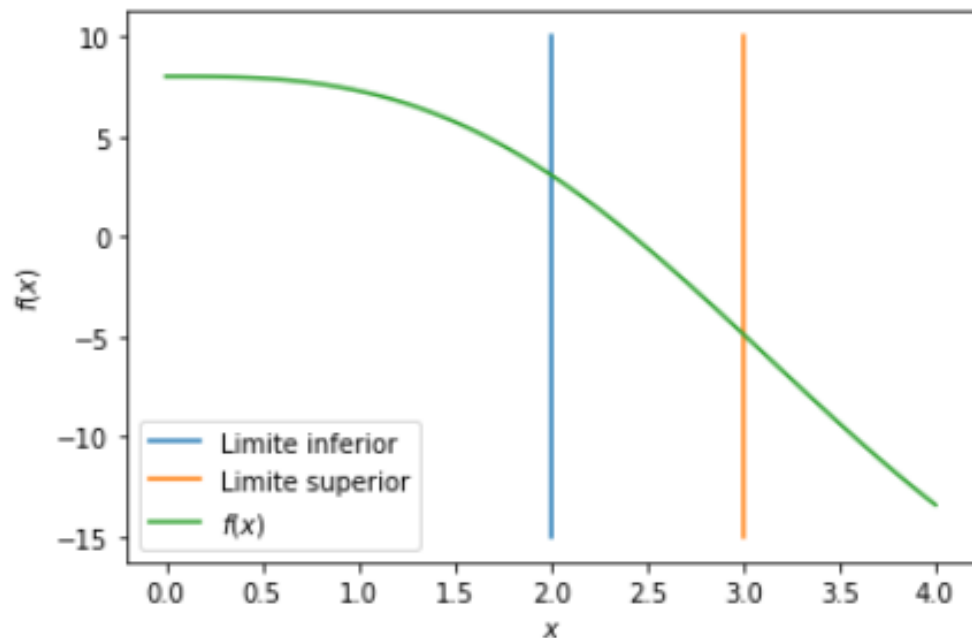
Novo intervalo: $[2, 2,5]$

O erro de cada iteração para esse método é dado pela avaliação do novo ponto médio conforme eq's 4 e 5 [2]:

$$erro = \frac{b - a}{2} \quad \text{Para todas as condições} \quad 4$$

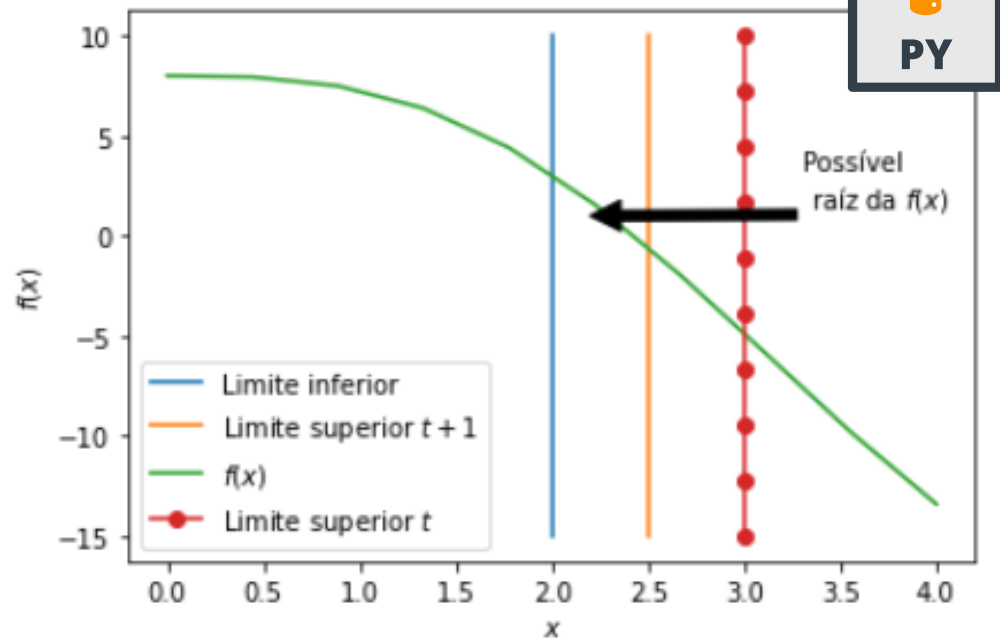
$$erro = 0 \quad \text{Para a condição que } f(x^{t+1}) = 0 \quad 5$$

Figura 3 – interpretação gráfica da função e do intervalo $[2, 3]$.



Estado inicial

Percorrendo algumas iterações São obtidos os valores das reduções de intervalo:



Após $t = 1$ iterações

Algoritmo

```
1      ERRO = 100, TOL = 1E-2, [A, B]
2      while ERRO > TOL:
3          X = eq. 1
4          Avalie f(a) e f(x)
5          if FA . FX < 0:
6              A = A e B = X
7          else:
8              A = X e B = B
9          ERRO = eq's 4 e 5
10     RAIZ = X
```

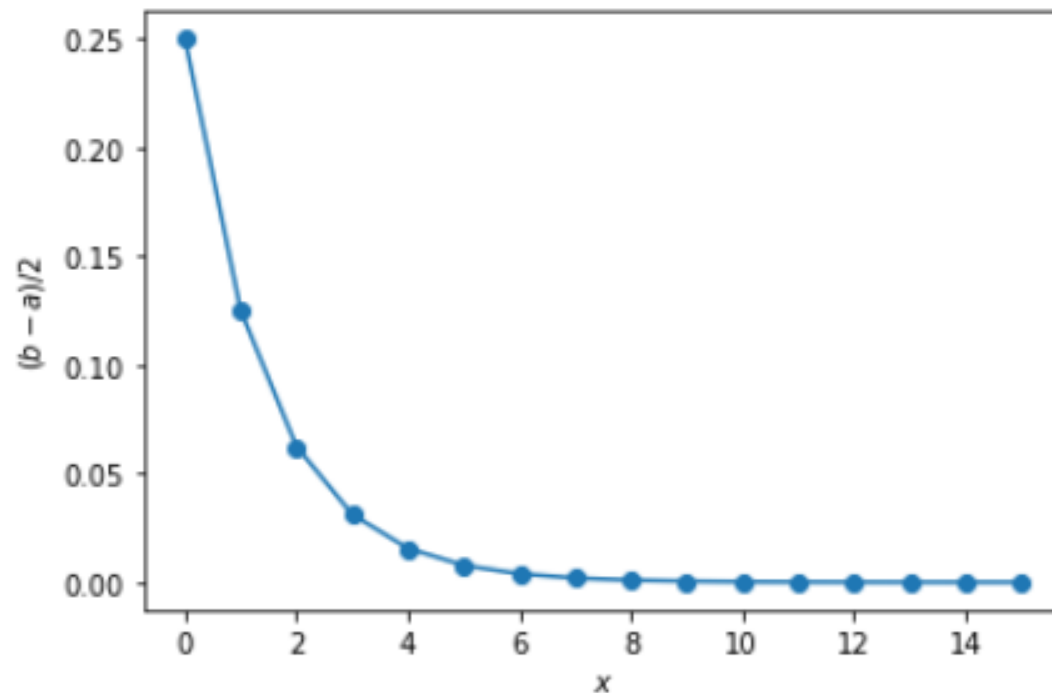
Iteração	a	b	x	$f(a)$	$f(x)$	$f(a) \cdot f(x)$	$erro$



Figura 4 – Resultados do método da bisseção.

	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	f(a).f(x)	erro
0	2.000000	3.000000	2.500000	3.091838	-4.864960	-5.568754e-01	-1.721769e+00	0.250000
1	2.000000	2.500000	2.250000	3.091838	-0.556875	1.376329e+00	4.255388e+00	0.125000
2	2.250000	2.500000	2.375000	1.376329	-0.556875	4.340826e-01	5.974407e-01	0.062500
3	2.375000	2.500000	2.437500	0.434083	-0.556875	-5.570867e-02	-2.418217e-02	0.031250
4	2.375000	2.437500	2.406250	0.434083	-0.055709	1.906609e-01	8.276258e-02	0.015625
5	2.406250	2.437500	2.421875	0.190661	-0.055709	6.783819e-02	1.293409e-02	0.007812
6	2.421875	2.437500	2.429688	0.067838	-0.055709	6.154474e-03	4.175084e-04	0.003906
7	2.429688	2.437500	2.433594	0.006154	-0.055709	-2.475477e-02	-1.523526e-04	0.001953
8	2.429688	2.433594	2.431641	0.006154	-0.024755	-9.294555e-03	-5.720309e-05	0.000977
9	2.429688	2.431641	2.430664	0.006154	-0.009295	-1.568640e-03	-9.654156e-06	0.000488
10	2.429688	2.430664	2.430176	0.006154	-0.001569	2.293267e-03	1.411385e-05	0.000244
11	2.430176	2.430664	2.430420	0.002293	-0.001569	3.624008e-04	8.310818e-07	0.000122
12	2.430420	2.430664	2.430542	0.000362	-0.001569	-6.030979e-04	-2.185632e-07	0.000061
13	2.430420	2.430542	2.430481	0.000362	-0.000603	-1.203431e-04	-4.361243e-08	0.000031
14	2.430420	2.430481	2.430450	0.000362	-0.000120	1.210302e-04	4.386145e-08	0.000015
15	2.430450	2.430481	2.430466	0.000121	-0.000120	3.439087e-07	4.162334e-11	0.000008

Iterações



Convergência

REFERÊNCIAS

- [1] Gilat A, Suramanian V. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. 2008.
- [2] Burden RL, Faires JD. Numerical analysis. 9. ed., International ed. Belmont, Calif.: Brooks/Cole; 2011.