MÉTODOS COMPUTACIONAIS

DR. MARCOS NAPOLEÃO RABELO
DR. WANDERLEI M. PEREIRA JUNIOR

Solução de equações unidimensionais:
Método de Newton-Raphson

Grupo de Pesquisa e Estudos em Engenharia (GPEE)

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O método de Newton-Raphson (ou Método de Newton) é um modelo de método computacional baseado em informações da derivada da função à qual deseja-se determinar a solução.

Primeiro precisamos discutir a importância de empregar informações da derivada, logo falaremos a sua interpretação geométrica.

A primeira derivada pode ser interpretada como uma medida de coeficiente de variação angular de uma reta tangente que passa por um determinado ponto P de uma função f. Para que se tenha validade a seguinte definição é necessário que f seja contínua em P.

Para que f seja contínua em P devem ser válidas as seguintes afirmações:

- Existe $f(\text{a})$;
- Existe $\lim_{x \to a} f(x)$;
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Imaginemos que uma função $f(x)$ pode ser escrita como uma série de Taylor no ponto x_1, ou seja, possui o seguinte formato da eq. 1:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n \quad (1)$$

$$a_n = {f^{(n)}(a)}/{n!} \quad (2)$$

O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Portanto, se $f(x)$ no ponto x_1 pode ser escrito no formato de uma série polinomial de Taylor conforme equação 3. Neste caso a série foi expandida até o termo de ordem 2:

$$f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)\frac{(x-x_1)^1}{1!} + f''(a)\frac{(x-x_1)^2}{2!} \quad 3$$

Admitindo que o termo de f''...é muito pequeno e que a $f(x)$ possui dentro de um intervalo $[x_1,\ x_2]$ uma raiz, ou seja, $f(x) = 0$. Logo podemos reescrever a eq. 3:

$$0 \approx f(x_1) + f'(x_1).(x - x_1) \quad 4$$

$$\frac{-f(x_1)}{f'(x_1)} \approx x - x_1 \quad 5$$

$$x \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad 6$$

A eq. 6 pode ser reescrita como um processo recursivo, chamado aqui de Newton-Raphson.

$$x^{t+1} = x^t - \frac{f(x^t)}{f'(x^t)} \qquad 7$$

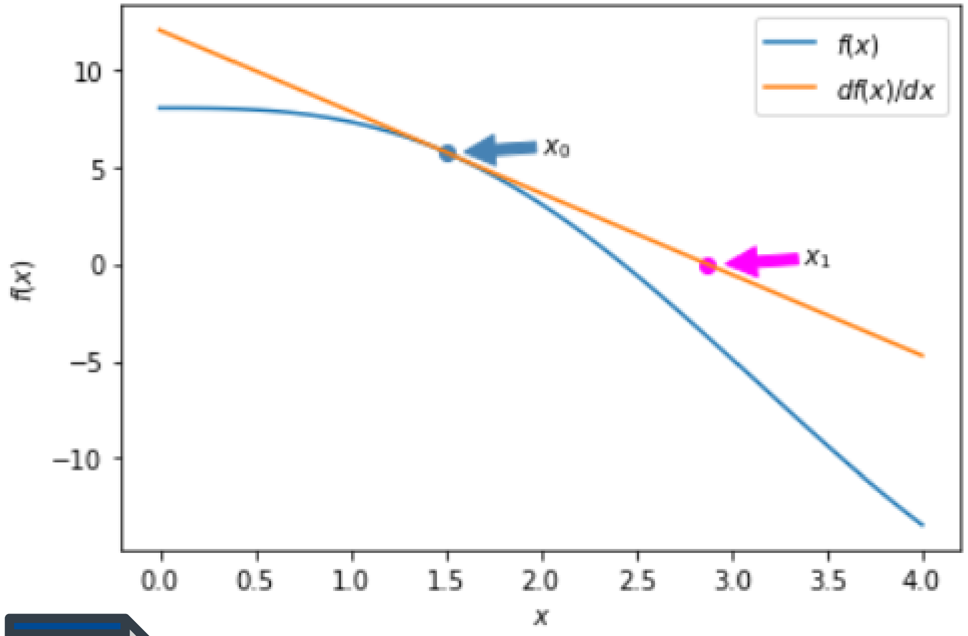
O erro de cada iteração para esse método é dado pela avaliação do novo ponto médio conforme eq's 8 e 9 [1]:

$$erro = |x^{t+1} - x^t| \qquad 8$$

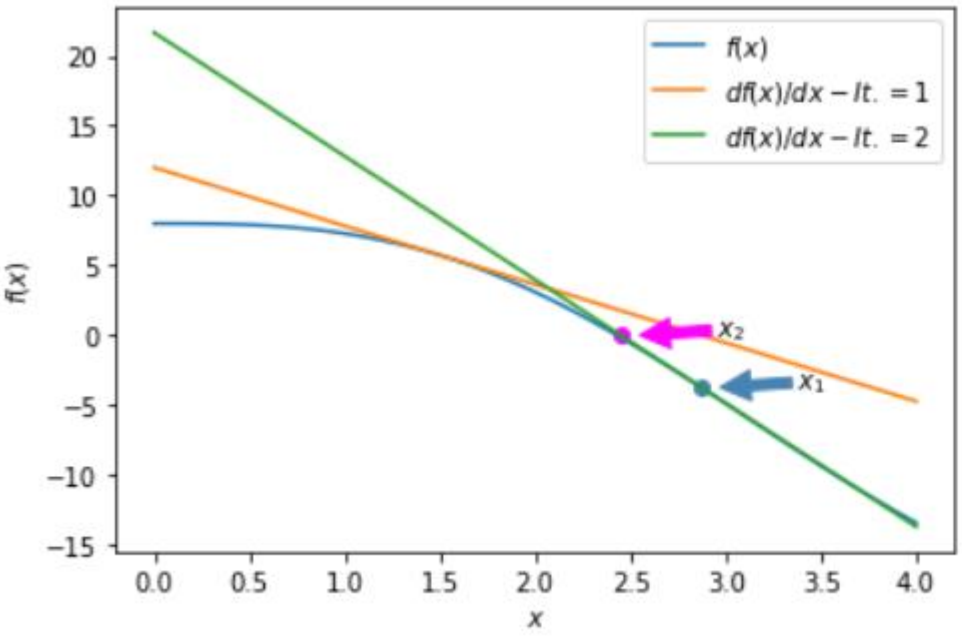
$$erro = 0 \qquad \text{Para a condição que } f(x^{t+1}) = 0 \qquad 9$$

O movimento gráfico do método de Newton-Raphson (NR) pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 – Movimento gráfico do método de NR para função $f(x) = 8 - 4{,}50.(x - \text{sen}x)$ no intervalo 0 e 4 [2].



Iteração t = 1



Iteração t = 2

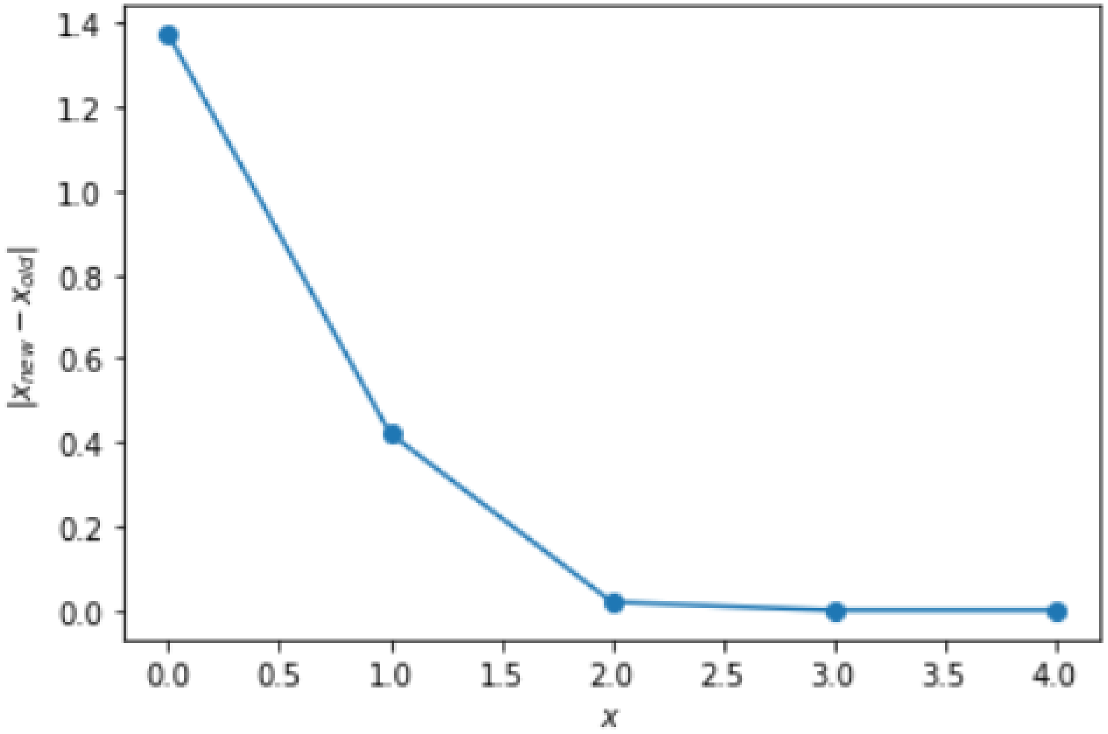
Algoritmo

```
ERRO = 100, TOL = 1E-2, X = X_INI
while ERRO > TOL:
      Avalie f(x) e f'(x)
      X = eq. 7
      ERRO = eq's 8 e 9
RAIZ = X
```

Iteração	$f(x)$	$f'(x)$	x	$erro$

Figura 2 – Resultados do método de NR.

	f(x)	diff(f(x))	x	erro
0	5.738727e+00	-4.181683	2.872349	1.372349e+00
1	-3.728559e+00	-8.837875	2.450465	4.218840e-01
2	-1.587621e-01	-7.967374	2.430538	1.992653e-02
3	-5.740125e-04	-7.909534	2.430466	7.257222e-05
4	-7.734007e-09	-7.909321	2.430466	9.778347e-10



Iterações

Convergência

REFERÊNCIAS

[1] Burden RL, Faires JD. Numerical analysis. 9. ed., International ed. Belmont, Calif.: Brooks/Cole; 2011.

[2] Gilat A, Suramanian V. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. 2008.