Inferência Bayesiana

Inferência bayesiana

Introdução

- A inferência bayesiana, como alternativas aos conceitos centrais de inferência estatística convencional, pela abordagem bayesiana, tem-se como objetivo o estudo:

$$p(\theta|x)$$

1. Estimação de parâmetros
2. Teste de hipóteses
3. Previsão

Inferência bayesiana

Análise Bayesiana de Decisão

- Os 4 elementos básicos presentes em toda Análise Bayesiana de Decisão são:
    1. **Decisões** – Uma lista (exaustiva e exclusiva) de possíveis decisões (ações) alternativas: $\delta_1, \ldots, \delta_m$.
    2. **Eventos** – Uma lista (exaustiva e exclusiva) de eventos incertos (ou hipóteses alternativas) $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Trata-se do conjunto dos possíveis "estados da natureza". As incertezas associadas aos eventos ou hipóteses são representadas por uma distribuição de probabilidade $p(\theta)$.
    3. **Perdas** – A cada combinação de δ_i e θ_i está associado uma potencial consequência (c_{ij}) usualmente determinada por uma função $c_{ij} = L(\delta_i, \theta_i)$. Quando se trata de consequências desfavoráveis, elas são denominadas perdas e quando representam ganhos, são denominadas utilidades.
    4. **Probabilidades dos Eventos** – A coleta de dados, seja por experimentos controlados ou por estudos observacionais, poderá reduzir a incerteza associada aos eventos θ_j. Essa informação obtida a partir dos dados será simbolizada pela letra x. A descrição completa e atualizada das incertezas sobre os θ_i's estão contida nas probabilidades posteriores $p(\theta_j|x)$

Peixe-galo

Decisão (δ)	**Estados da Natureza (θ)** < 20	$20 \vdash 25$	$25 \vdash 30$	$30 \vdash 35$	$35 \vdash 40$	≥ 40	**Perda Esperada**
A	1	0	2	4	6	8	2.334
B	3	2	1	0	2	4	0.934
C	4	3	2	1	0	2	1.854
$P(\theta\|x)$	0.005	0.125	0.607	0.234	0.024	0.004	

Inferência bayesiana

MÉTODOS EXATOS
CURSOS AVANÇADOS PARA ANÁLISE DE DADOS

Exemplo 6.1 – Peixe Galo

Peixe-galo

Decisão (δ)	**Estados da Natureza (θ)**						**Perda Esperada**
	< 20	$20 \vdash 25$	$25 \vdash 30$	$30 \vdash 35$	$35 \vdash 40$	≥ 40	
A	1	0	2	4	6	8	2.334
B	3	2	1	0	2	4	0.934
C	4	3	2	1	0	2	1.854
$P(\theta\|x)$	0.005	0.125	0.607	0.234	0.024	0.004	

- **Decisões:**

  $\delta_1 \equiv$ rede A $\quad \delta_2 \equiv$ rede B $\quad \delta_3 \equiv$ rede C

- **Eventos:**

  $\theta_1 \equiv LT50 \in [0,20), \dots, \theta_6 \equiv LT50 \in [40,100)$

- **Perdas:**

  $B(\delta_2) \rightarrow \theta_5 \equiv LT50 \in [35,40) \Rightarrow c_{2,5} = 2$

- **Probabilidades dos Eventos:**

  $p(\theta_1|x) = 0.005, \dots, p(\theta_6|x) = 0.004$

Inferência bayesiana

Perda

- O estimador de Bayes do parâmetro θ, simbolizado por $\delta_B(x)$, é o valor que minimiza a perda esperada com relação à distribuição posterior, em que a função de verossimilhança é a função que determina o cálculo de perda.
- Essa definição indica que o estimador de Bayes dependerá das incertezas (resumidas na posterior) e da função de perda que quantifica as consequências. Sendo as funções mais utilizadas:

a. **Perda quadrática:**

$$L(\theta, \delta(x)) = [\theta - \delta(x)]^2$$

b. **Perda absoluta:**

$$L(\theta, \delta(x)) = |\theta - \delta(x)|$$

c. **Perda 0-1:**

$$L(\theta, \delta(x)) = \begin{cases} 0, & se\ \theta = \delta(x) \\ 1, & caso\ contrário \end{cases}$$

Inferência bayesiana

Exemplo 6.2 – Análise da eficiência do RU 486 como "contraceptivo do dia seguinte"

- $\boldsymbol{\theta}$: probabilidade de que ocorra uma gravidez no grupo de mulheres tratadas com RU 486.
- $\boldsymbol{p(\theta|x) \sim Beta(\alpha = 1, \beta = 5)}$
- $Beta(\alpha, \beta)$: Média: $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \rightarrow \alpha > 0 \; e \; \beta > 0$; Variância: $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
- Variância ($p(\theta|x)$): $V_\delta(x) = E^{p(\theta|X)}[\theta - \delta(x))^2] = V(\theta|x) + [E^p[\theta|x] - \delta(x)]^2$
- **Objetivo**: Obter uma estimativa para θ e seu desvio padrão posterior como uma medida de precisão.

a. Perda quadrática:

$$\delta_B(x) = E^p[\theta|x] = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6} \cong 0.167$$

$$\sqrt{V_{\delta_B}(x)} = \sqrt{\frac{1*5}{(1+5)^2*(1+5+1)} + (0.167 - 0.167)} \cong 0.141$$

b. Perda absoluta:

$$\delta_B(x) \Rightarrow qbeta(0.5, 1, 5) = 0.129$$

$$\sqrt{V_{\delta_B}(x)} = \sqrt{\frac{1*5}{(1+5)^2*(1+5+1)} + (0.167 - 0.129)} \cong 0.413$$

Inferência bayesiana

Intervalo de Credibilidade

- O intervalo de credibilidade de $95(IC_{r95\%})$ para θ é o intervalo delimitado pelos percentis $2.5\%(\theta_{[2.5\%]})$ e $(\theta_{[97.5\%]})$ da distribuição posterior $p(\theta|x)$ para θ.

$\boldsymbol{IC_{r95\%}\ para\ Beta(\alpha = 1, \beta = 5)}$

$$E^p[\theta|x] = 0.167$$

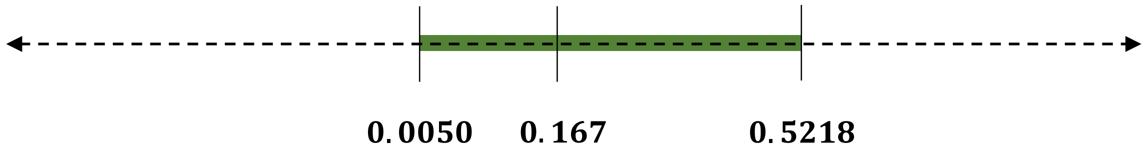
- $\boldsymbol{2.5\%\left(\theta_{[2.5\%]}\right)}$:

$$qbeta(0.025, 1, 5) = \mathbf{0.0050}$$

- $\boldsymbol{97.5\%\left(\theta_{[97.5\%]}\right)}$:

$$qbeta(0.975, 1, 5) = \mathbf{0.5218}$$

$\boldsymbol{IC_{r95\%}\ para\ B(\alpha = 1, \beta = 5)}$



Testes de hipóteses

- A alternativa bayesiana aos testes de hipóteses convencionais, parte de uma tabela decisória estruturada especificamente para esse fim:

	Realidade (desconhecida)	
Decisão	$\boldsymbol{H_0}$ **é verdadeira**	$\boldsymbol{H_1}$ **é verdadeira**
δ_0	0	w_1
δ_1	w_0	0

$p_0(x) = P(H_0|x) = P(\theta \in \theta_0|x)$ — Probabilidade posterior de que H_0 é verdadeiro; e

$p_1(x) = P(H_1|x) = P(\theta \in \theta_1|x)$ — Probabilidade posterior de que H_1 é verdadeiro

- A decisão de Bayes será δ_1 (rejeição de H_0) somente se a perda esperada para a decisão δ_1 for menor que para δ_0:

$$w_0 p_0(x) < w_1 p_1(x)$$

Rejeitar a hipótese nula H_0 sempre que sua probabilidade posterior for **inferior** a $\frac{w_1}{w_0+w_1}$. Caso contrário, preferir H_0 a H_1.

Teste de hipótese unilateral

$\boldsymbol{H_0: \theta \leq \theta_0 \; versus \; H_1: \theta > \theta_0}$

- A taxa de crescimento populacional (r) é um dos parâmetros de interesse no estudo relacionado à dinâmica populacional da baleia jubarte.
- Queremos testar a hipótese de que a taxa anual de crescimento populacional de jubartes no Banco de Abrolhos é maior que 7% (r > 0.07).
- Em uma amostra de 2000 valores de r que foram geradas da distribuição posterior (por simulação computacional), verifica-se que 627 são menores ou iguais a 0.07.
- Em biologia de conservação é recomendado que se adote o "princípio da precaução" na escolha de estratégias de gestão. Assim, a ideia é que adotar equivocadamente a concepção que a taxa de crescimento é maior que 0.07(sobrestimativa) é um erro comparativamente mais grave que a subestimativa da taxa de crescimento. O que justifica estabelecer como penalidades $w_0 = 2$ e $w_1 = 1$. Ou seja, decidir por um crescimento acima de 7% quando, de fato, isso não acontece.

$H_0: r \leq 0.07 \qquad H_1: r > 0.07$

$$P(r \leq 0.07|x) < \frac{1}{2+1} = 0.33$$

$$\frac{627}{2000} = 0.3135$$

Rejeitar a hipótese nula H_0 sempre que sua probabilidade posterior for **inferior** a $\frac{w_1}{w_0+w_1}$. Caso contrário, preferir H_0 a H_1.

Há evidências suficientemente fortes para rejeitar $\boldsymbol{H_0}$ e dizer que a taxa anual de crescimento populacional de jubartes no Banco de Abrolhos tende ser maior que 7%.

Teste de hipótese bilateral

$\boldsymbol{H_0: \theta = \theta_0 \; versus \; H_1: \theta \neq \theta_0}$

- Teste A/B
- Deseja-se saber se há diferença entre os testes, ou seja, $\theta = 0.5$.
- Após cuidadosa avaliação relativas dos dois possíveis erros de decisão, especialistas concluem que $w_0 = 4 \; e \; w_1 = 1$.
- Definir um intervalo de amplitude $2h$ em torno de θ_0 que seja aceitável como indicativo de equivalência entre os tratamentos. Por exemplo: $\mathrm{h} = 0.1 \; \rightarrow 0.40 \leq \theta \leq 0.60$.
- $p_0^{0.1} = 0.0672$

Solução:

$H_0: \theta = 0.5$ $\qquad$ $H_1: \theta \neq 0.5$

$$\frac{1}{4+1} = 0.2$$

Rejeitar a hipótese nula H_0 sempre que sua probabilidade posterior for **inferior** a $\frac{w_1}{w_0+w_1}$. Caso contrário, preferir H_0 a H_1.

A conclusão é pela rejeição de $\boldsymbol{H_0}$ pois a probabilidade é menor que o limite de decisão.

Fator de Bayes

- O Fator de Bayes é definido como sendo a razão entre as chances posteriores e as chances a priori:

$$FB_{1,0} = \frac{o(1,0|x)}{o(1,0)} \quad \begin{cases} o(1,0|x) = \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)} \\ o(1,0) = \dfrac{p_1}{p_0} \end{cases}$$

Chance posterior contra $\boldsymbol{H_0}$. Uma chance muito maior que 1 é indicativo de que as evidências favorecem H_1.

Chance a priori contra $\boldsymbol{H_0}$. Uma chance muito maior que 1 é indicativo de que as evidências favorecem H_1.

Critérios para a interpretação do Fator de Bayes.

$\boldsymbol{FB_{1,0}}$	Evidências contra $\boldsymbol{H_0}$
$1.0 \vdash 3.2$	fraca (*)
$3.2 \vdash 10.0$	substancial (**)
$10.0 \vdash 100.0$	forte (***)
$100.0 \vdash \infty$	decisiva (****)

Rejeitar a hipótese nula H_0 sempre que o Fator de Bayes satisfazer à desigualdade $FB_{(1,0)} > \frac{w_0}{w_1} * \frac{1}{o(1,0)}$. Caso contrário, preferir H_0 a H_1.

Fator de Bayes

$\boldsymbol{H_0: \theta \leq \theta_0 \; versus \; H_1: \theta > \theta_0}$

- A taxa de crescimento populacional (r) é um dos parâmetros de interesse no estudo relacionado à dinâmica populacional da baleia jubarte.
- Queremos testar a hipótese de que a taxa anual de crescimento populacional de jubartes no Banco de Abrolhos é maior que 7% (r > 0.07).
- Em uma amostra de 2000 valores de r que foram geradas da distribuição posterior (por simulação computacional), verifica-se que 627 são menores ou iguais a 0.07.
- Em biologia de conservação é recomendado que se adote o "princípio da precaução" na escolha de estratégias de gestão. Assim, a ideia é que adotar equivocadamente a concepção que a taxa de crescimento é maior que 0.07(sobrestimativa) é um erro comparativamente mais grave que a subestimativa da taxa de crescimento. O que justifica estabelecer como penalidades $w_0 = 2$ e $w_1 = 1$. Ou seja, decidir por um crescimento acima de 7% quando, de fato, isso não acontece.

$H_0: r \leq 0.07 \qquad H_1: r > 0.07$

$$p_0(x) = \frac{627}{2000} = 0.3135$$

$$p_1(x) = 0.68$$

$$p_0 = 0.52$$

$$p_1 = 0.48$$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{FB_{1,0} = \dfrac{o(1,0|x)}{o(1,0)}} \\ \boldsymbol{o(1,0) = \dfrac{p_1}{p_0}} \\ \boldsymbol{o(1,0|x) = \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}} \\ \boldsymbol{FB_{(1,0)} > \dfrac{w_0}{w_1} * \dfrac{1}{o(1,0)}} \end{array}\right\}$$

$$o(1,0) = \frac{0.48}{0.52} = 0.92$$

$$o(1,0|x) = \frac{0.68}{0.31} = 2.19$$

$$FB_{(1,0)} = \frac{2.19}{0.92} = 2.37$$

$$\frac{w_0}{w_1} * \frac{1}{o(1,0)} = \frac{2}{1} * \frac{1}{0.92} = 2.16$$

Como $FB_{(1,0)}$ é maior que o limite de decisão, então deve-se rejeitar H_0.

Mas como $FB_{(1,0)} < 3.2$, então a rejeição de H_0 pode ser equivocada, pois a evidência contra H_0 é fraca.

Considerações Finais

Qualidade de ajuste

1. Estudo da construção de modelos probabilísticos completos.
2. Avaliar a validade do modelo comparando dados preditos com os dados observados.
3. Uma vez satisfeito com o modelo, passamos a utilizar a distribuição posterior para fazer inerências.

Próximos passos (cursos)

- Métodos de simulação estocástica
- Modelos preditivos

andre@metodosexatos.com.br