MÉTODOS EXATOS®

CURSOS AVANÇADOS PARA ANÁLISE DE DADOS

ANÁLISE BAYESIANA

www.metodosexatos.com

MÉTODOS EXATOS®
CURSOS AVANÇADOS PARA ANÁLISE DE DADOS

Prof. Ms. André Santos

- ✓ Ms. Engenharia de Produção
- ✓ MBA Finanças & Banking
- ✓ Esp. Estatística Aplicada

MÉTODOS EXATOS®
CURSOS AVANÇADOS PARA ANÁLISE DE DADOS

Como navegar na plataforma

Metodologia:

- Educação continuada;
- Conteúdo progressivo e cumulativo;
- Linguagem simples;
- Formalismo científico

Metodologia

Aspectos técnicos

- Teoria
- Demonstrações
- Exercícios
- Estudo de Casos

Objetivos

- Conhecimento científico
- Conhecimento prático
- Defender cientificamente modelos empíricos

Programa

I. INTRODUÇÃO
II. MEDIÇÃO DE INCERTEZA
III. DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES
IV. ANÁLISE BAYESIANA DE DADOS
V. INFERÊNCIA BAYESIANA

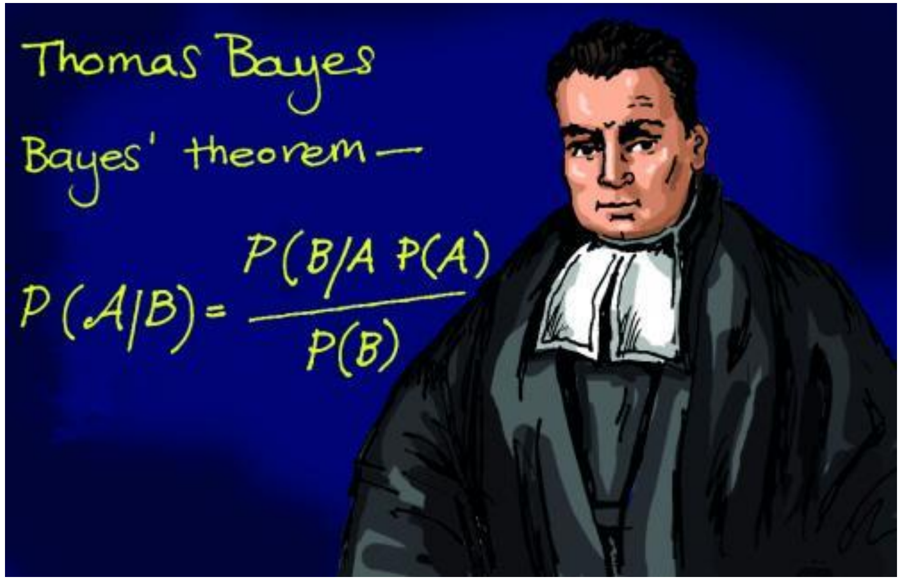
MÉTODOS EXATOS

CURSOS AVANÇADOS PARA ANÁLISE DE DADOS

INTRODUÇÃO

Panorama Geral

- Thomas Bayes (inglês)
- Pastor presbiteriano e matemático
- 1702 – 1761



Fonte: fm2s

Escolas: Frequentista vs Bayesiana

- Diferentemente da estatística clássica, em que somente se admite probabilidade num contexto restrito a fenômenos que podem ser medidos por frequências relativas, no paradigma bayesiano entende-se que a probabilidade é uma medida racional de incerteza.
- O termo probabilidade no contexto bayesiano está mais próximo do entendimento que se tem dele popularmente, na linguagem cotidiana.

Panorama Geral

Mas, se o paradigma bayesiano tem tantas vantagens, por que os procedimentos estatísticos convencionais ainda predominam em aplicações?

- Sucesso → influência entre gerações
- Volume de livros
- "Dificuldade computacional"

Vantagens da abordagem bayesiana:

- Facilidade na utilização em ciências aplicadas
- Avanço computacional

Recursos

Fenômenos Biológicos

Peixe-galo

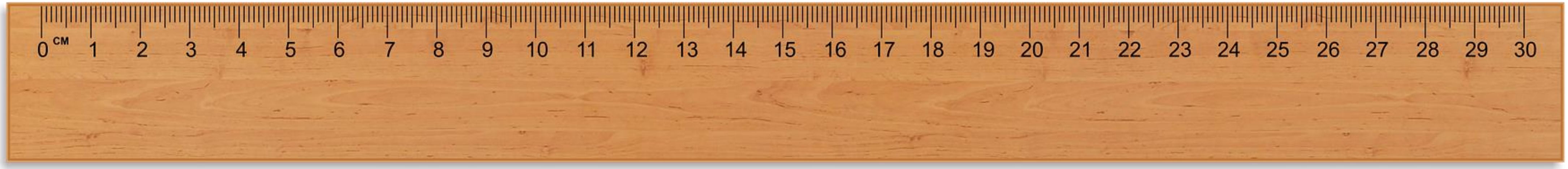
R Programming

Software p/ Análise de Dados

https://github.com/metodosexatos/bayes

Estudo da maturidade sexual do peixe-galo

- LT-50 → comprimento em que 50% das fêmeas estão sexualmente maturas (tamanho da primeira maturação)
- Estabelecer estratégias de manejo
- Definir malha das redes ou tamanho dos anzóis



Tab. 1.1: Nº de fêmeas maturas por classe de comprimento (cm).

Classe	Total	Maturas
10 |- 15	3	0
20 |- 25	5	1
30 |- 35	4	3
60 |- 65	5	5

- O propósito básico é permitir que uma porção razoável das fêmeas atinjam maturidade sexual e reproduzam antes de serem capturadas e comercializadas.

Introdução ao uso do R

https://www.r-project.org/

https://www.rstudio.com/

Sobre as demais seções

II. Medição de Incerteza
III. Distribuições de Probabilidades
IV. Análise Bayesiana de Dados
V. Inferência Bayesiana

MÉTODOS ΣXATΘS®
CURSOS AVANÇADOS PARA ANÁLISE DE DADOS

MEDIÇÃO DE INCERTEZA

Conceituação bayesiana de probabilidade

	Abordagens	
Proposições	**Frequentista**	**Bayesiana**
Um procedimento cirúrgico corrige a miopia	✓	✓
Haverá uma crise no abastecimento de energia elétrica no próximo verão	✗	✓

Formalização apresentada por Jeffreys (1961) e Jaynes (2003):

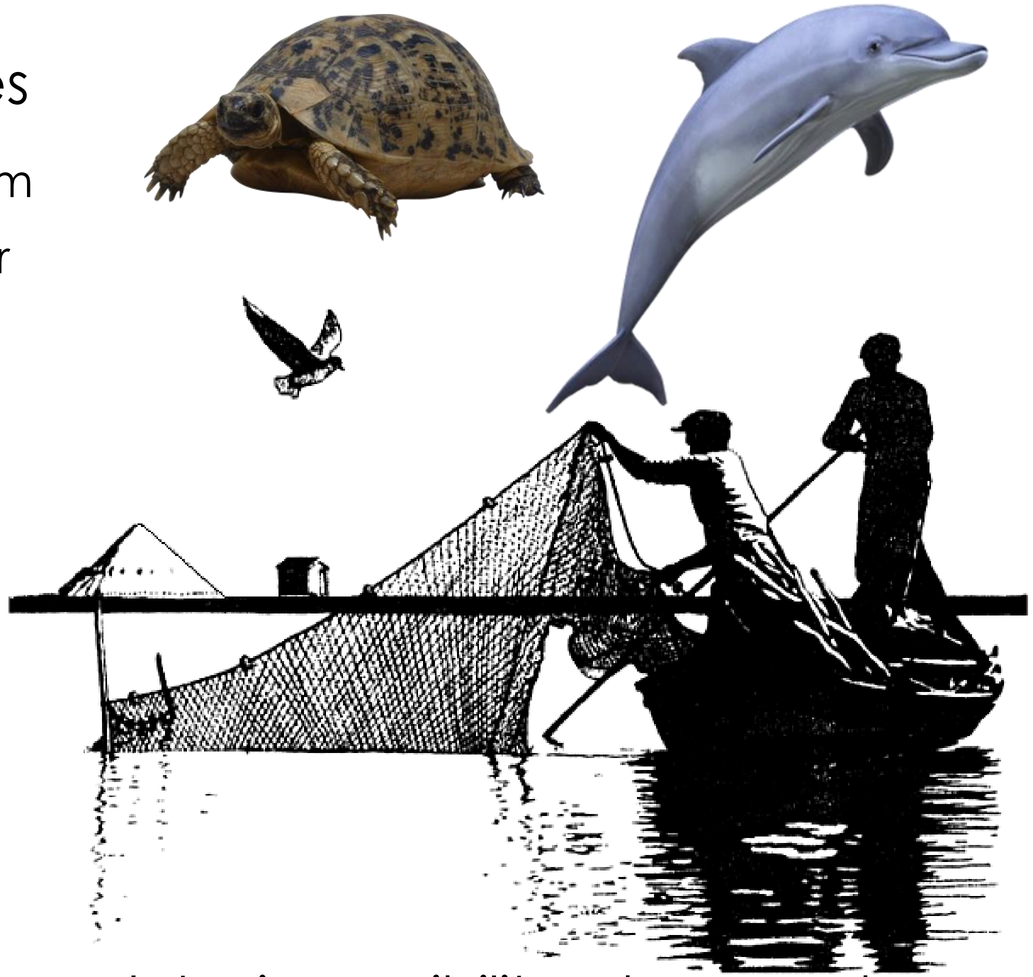
- Permite falar em probabilidade em qualquer situação
- A probabilidade é entendida como sendo uma medida da plausibilidade que é atribuída a uma proposição cuja veracidade é incerta à luz dos conhecimentos disponíveis.
- Esta maneira de raciocinar sobre proposições, fundamental no processo científico de construção do conhecimento, se denomina lógica indutiva.

Lógica indutiva

- Maneira de raciocinar sobre proposições

"Em um litoral há pesca com redes. Essas redes podem capturar tanto tartarugas quanto golfinhos que, ao ficarem presos acabam morrendo. Vamos denominar tais capturas como acidentais. Neste contexto, enunciamos as seguintes proposições:"

- **T: Uma tartaruga é capturada.**
- **A: Ocorre captura acidental.**
- **F: Uma fêmea de tartaruga é capturada.**



1. **Uma tartaruga foi capturada:**

   $\boldsymbol{T: verdadeira \;\; \rightarrow \;\; A: verdadeira\ (por\ dedução)}$

2. **Ocorreu uma captura acidental:**

   $\boldsymbol{A: verdadeira \;\; \rightarrow \;\; A\ \text{é}\ incompleta\ para\ T}$

- A incerteza é o resultado da informação incompleta, impossibilitando o uso de argumentos dedutivos, tornando necessário recorrer à lógica indutiva para formalizar a argumentação.

Operações lógicas com eventos

- **T**: Uma tartaruga é capturada.
- **A**: Ocorre captura acidental.
- **F**: Uma fêmea de tartaruga é capturada.

Operações lógicas aplicadas aos eventos:

- C: Ao menos um dos eventos, T ou F, é verdadeiro.
- D: Os eventos T e F são simultaneamente verdadeiros.
- E: T e F são ambos falsos.

Simbolicamente:

$$C = T + F$$

$$D = T * F$$

$$E = T' * F'$$

Tab. 2.1: Relações lógicas entre as proposições.

Simbologia	Descrição
A + B	União lógica de A e B. Ao menos uma das proposições é verdadeira.
AB	Produto lógico de A e B. As duas proposições são verdadeiras.
A’	Proposição complementar de A. A proposição A é falsa.
A→B	A implica B ou B é dedutível de A.
A=B	A é equivalente a B.

As regras de probabilidades

A formalização de probabilidades para quantificar lógica indutiva, caracteriza-se por três regras básicas de racionalidade. Estas regras, denominadas desideratos (desejo, anseio), foram propostas pelo matemática George Pólya em 1954:

- Desiderato 1: os níveis de plausibilidade são representados por números reais.
- Desiderato 2: existe correspondência qualitativa com o senso comum.
- Desiderato 3: Há consistência nas medições de plausibilidade.

$$\boldsymbol{P(E|H)}$$

$$Lido\ como:\ a\ \text{"}\textbf{probabilidade de E dado que H é fato}\text{", ou a "}\textbf{probabilidade de E condicionado ao fato H}\text{".}$$

Probabilidade de E condicionado ao fato H

- A condicionante H é importante na definição bayesiana de probabilidade, para destacar que a probabilidade expressa a incerteza corrente sobre E e está vinculada a um observador que tem a informação H.

$$
\boldsymbol{P(E|H)} \begin{cases} E \equiv \text{"}hoje\ teremos\ chuva\ forte\ após\ o\ meio-dia\text{"} \\ H_1 \equiv \text{"}a\ previsão\ do\ tempo\ no\ noticiário\ vespertino\ de\ ontem\text{"} \\ H_2 \equiv \text{"}observação\ visual\ do\ céu\ hoje, 30\ minutos\ antes\ do\ meio-dia\text{"} \end{cases}
$$

$$
\boldsymbol{P(E|H_1) \neq P(E|H_2)}
$$

- **Eventos exclusivos**: dois eventos A e B são exclusivos sob H, se não podem ser simultaneamente verdadeiros.
- **Eventos exaustivos**: um conjunto de eventos E é exaustivo sob H, se for finito.
- **Evento independente**: um evento E é definido como independente de outro evento F, se a probabilidade P(E|H) fica inalterada com a inclusão da informação sobre F.

Leis de probabilidade

1. **Lei da convexidade**: A probabilidade de um evento qualquer E, condicionado a H, é um número real no intervalo [0,1].
   - $0 \leq P(E|H) \leq 1$
   - $P(H|H) = 1 \; e \; P(H'|H) = 0$
2. **Lei da Adição:** Se E_1 e E_2 são eventos exclusivos sob H então:
   - $P(E_1 + E_2|H) = P(E_1|H) + P(E_2|E_1H)$
3. **Lei do Produto**: Se E_1 e E_2 são eventos quaisquer então a probabilidade do produto lógico condicionado a H é:
   - $P(E_1E_2|H) = P(E_1|H) * P(E_2|E_1H)$
   - $P(E_1E_2|H) = P(E_1|H) * P(E_2|H) \rightarrow \text{eventos independentes}$

Aferição de Probabilidades

O Princípio da Indiferença

- Dado um conjunto de eventos, que sob H, são exclusivos e exaustivos, a ordem dada aos eventos é completamente arbitrária, de forma que a troca entre as definições de $E_1, E_2, \ldots$ não deverá afetar as suas probabilidades.

$$\boldsymbol{P(E_i|H) = \frac{1}{n}\ para\ todo\ i = 1, \ldots, n}$$

- Em consequência, para um evento A que seja equivalente a $E_1 + \cdots + E_m$ com $m \leq n$, a aferição da probabilidade sob H será:

$$\boldsymbol{P(A|H) = \frac{m}{n}, com\ m \leq n}$$

Exemplo 2.1

- Numa cidade há 15 bairros dos quais será sorteado apenas um para receber um hospital. Sabemos que oito desses bairros não tem metrô. Definimos o evento $A \equiv$ "*o bairro sorteado não tem metrô*" e queremos aferir a probabilidade P(A | H). Aqui H representa o conjunto das informações enunciadas e que permitem identificar $\{E_i\}\ para\ i = 1, \ldots, 15$ como um conjunto exaustivo, exclusivo e permutável de bairros.

$$\boldsymbol{m = 8 \qquad H = 15}$$

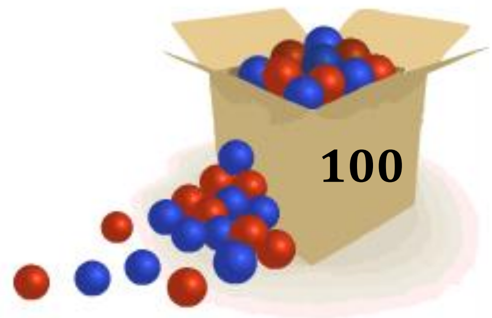
$$\boldsymbol{P(A|H) = \frac{8}{15}}$$

Aferição de Probabilidades

Experimento de calibração: o padrão "urna"

- Corresponde à realização de um experimento de calibração, que consiste na comparação entre a proposição de interesse E e um experimento de referência efetuado com o padrão urna.
- O experimento pode ser utilizado para mensurar a probabilidade que um avaliador qualquer atribui a E.

Fase 1: descrição do padrão urna



$v = vermelhas$

$a = 100 - vermelhas$

$V \equiv$ "$a\ bola\ retirada\ da\ urna$ é $vermelha$"

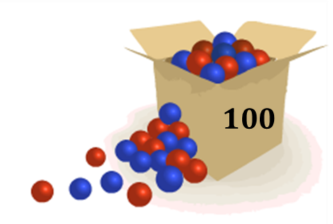
$P(V|H) = v/100$

Fase 2: aferir a probabilidade que reflita a plausibilidade que um avaliador qualquer atribui à proposição $E \equiv$ "No próximo ano haverá uma nova pandemia".

Aferição de Probabilidades

Experimento de calibração: o padrão “urna”

Fase 1: descrição do padrão urna



$v = vermelhas$

$a = 100 - vermelhas$

$V \equiv$ "$a\ bola\ retirada\ da\ urna$ é $vermelha$"

$P(V|H) = v/100$

Fase 2: aferir a probabilidade que reflita a plausibilidade que um avaliador qualquer atribui à proposição $E \equiv$ "No próximo ano haverá uma nova pandemia".

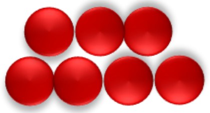
Alternativa B

$P(V|H) = 0$

×

Alternativa E

Alternativa B

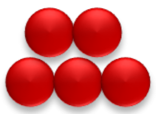


$P(V|H) = 1$

×

Alternativa E

Alternativa B



$P(V|H) = 0,9$

×

Alternativa E

$P(E|H) < 0,9$

Teorema da probabilidade total

Exemplo 2.2

- Uma ecologista pesquisa os lagos de uma região à procura de determinada espécie de sapos. A intenção é encontrar um exemplar para realizar um experimento. A especialista está usando um procedimento de amostragem denominado de "inspeção simples". Para isso ela sorteia 30 lagos da região e procura ativamente ao longo das suas margens durante um período fixo de 20 minutos enquanto está também atenta ao eventual coaxar típico da espécie. **Queremos calcular a probabilidade de que ela não detecte a espécie em sua saída de campo.**
- Os 30 lagos tinham sido previamente classificados em três categorias conforme o tipo de vegetação. Por tanto, ao sortear um lago qualquer, têm-se as probabilidades 0,33, 0,50 e 0,17, respectivamente para os lagos 1, 2 e 3.
- A possibilidade de detecção somente existe quando a espécie está efetivamente presente no lago pesquisado.
- A título de ilustração considere que a literatura científica da região indica que o sapo esta presente em 80% dos lagos do tipo 1, 50% do tipo 2 e 10% do tipo 3.
- Estudos realizados para avaliar a eficiência do sistema de amostragem de "inspeção simples" indicam que mesmo que o sapo esteja presente em um lago do tipo 1, a detecção é feita em somente 60% dos casos por conta da grande quantidade de vegetação, 70% no lago tipo 2 e 90% no lago tipo 3.

Teorema da probabilidade total

- Seja $\{E_j; j = 1, \dots, m\}$ um conjunto de m eventos exclusivos e exaustivos sob H, e seja A outro evento qualquer. Então $P(A|H)$ pode ser reescrito "estendendo a conversa" para a inclusão dos E_j.

$$\boldsymbol{p(A|H) = \sum_{j=1}^{m} P\left(A\middle|E_jH\right) * P(E_j|H)}$$

- 30 lagos
- Amostragem por inspeção simples
- $D \equiv a\ espécie\ sapo\ \text{é}\ detectada$ pela pesquisadora
- Objetivo: calcular a probabilidade de não detectar a espécie → $P(D'|H)$.
- Classificação dos lagos de acordo com a probabilidade de encontrar um tipo específico de vegetação: $P(L_1) = 0{,}33$; $P(L_2) = 0{,}50$; $P(L_3) = 0{,}17$.
- $V \equiv$ "$a\ espécie\ está\ presente\ (vive)\ no\ lago$".
- Segundo a literatura da região: o sapo ocorre 80% ($P(V|L_1) = 0{,}8$) dos lagos tipo 1, 50% ($P(V|L_2) = 0{,}5$) dos lados tipo 2 e 10% ($P(V|L_3) = 0{,}1$) dos lados do tipo 3.
- Eficiência da amostragem: $P(D|VL_1) = 0{,}33$; $P(D|VL_2) = 0{,}50$; $P(D|VL_3) = 0{,}17$.

Teorema da probabilidade total

- Seja $\{E_j; j = 1, \ldots, m\}$ um conjunto de m eventos exclusivos e exaustivos sob H, e seja A outro evento qualquer. Então $P(A|H)$ pode ser reescrito "estendendo a conversa" para a inclusão dos E_j.

$$\boldsymbol{p(A|H) = \sum_{j=1}^{m} P(A|E_j H) * P(E_j|H)}$$

	Chance Encontrar vegetação	Chance viver no lago	Eficiência Amostragem Detectar Sapo
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{P(L_j)}$	$\boldsymbol{P(V|L_j)}$	$\boldsymbol{P(D|VL_j)}$
1	0,33	0,80	0,60
2	0,50	0,50	0,70
3	0,17	0,10	0,90

- 30 lagos
- Amostragem por inspeção simples
- $D \equiv a\ espécie\ sapo\ é\ detectada$ pela pesquisadora
- Objetivo: calcular a probabilidade de não detectar a espécie → $P(D'|H)$.
- Classificação dos lagos de acordo com a probabilidade de encontrar um tipo específico de vegetação: $P(L_1) = 0{,}33;\ P(L_2) = 0{,}50;\ P(L_3) = 0{,}17$.
- $V \equiv "a\ espécie\ está\ presente\ (vive)\ no\ lago"$.
- Segundo a literatura da região: o sapo ocorre 80% ($P(V|L_1) = 0{,}8$) dos lagos tipo 1, 50% ($P(V|L_2) = 0{,}5$) dos lados tipo 2 e 10% ($P(V|L_3) = 0{,}1$) dos lados do tipo 3.
- Eficiência da amostragem: $P(D|VL_1) = 0{,}33; P(D|VL_2) = 0{,}50;\ P(D|VL_3) = 0{,}17$.

Teorema da probabilidade total

- Seja $\{E_j; j = 1, \ldots, m\}$ um conjunto de m eventos exclusivos e exaustivos sob H, e seja A outro evento qualquer. Então $P(A|H)$ pode ser reescrito "estendendo a conversa" para a inclusão dos E_j.

$$p(A|H) = \sum_{j=1}^{m} P(A|E_j H) * P(E_j|H)$$

j	Chance Encontrar vegetação $P(L_j)$	Chance viver no lago $P(V\|L_j)$	Eficiência Amostragem Detectar Sapo $P(D\|VL_j)$
1	0,33	0,80	0,60
2	0,50	0,50	0,70
3	0,17	0,10	0,90

- **Presença e ausência da espécie nos 3 tipos de lagos = 3x2 = 6**

$$p(D|H) = \sum_{j=1}^{6} P(D|VL_i) * [P(V|L_j) * P(L_i)]$$

$$p(D|H) = (0,6 * 0,8 * 0,33) + (0,5 * 0,5 * 0,7) + (0,1 * 0,17 * 0,9)$$

$$= (0,1584) + (0,175) + (0,0153)$$

$$= 0,3487$$

- **Objetivo: calcular a probabilidade de não detectar a espécie → $P(D'|H)$.**

$$p(D'|H) = 1 - p(D|H)$$

$$p(D'|H) = 1 - 0,3487$$

$$= 0,6513$$

Teorema de Bayes

- Sejam A e B dois eventos quaisquer e P(A|H)>0, então:

$$P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(A) * P(B|A) + P(A') * P(B|A')}$$

j	$P(L_j)$	$P(V|L_j)$	$P(D|VL_j)$
1	0,33	0,80	0,60
2	0,50	0,50	0,70
3	0,17	0,10	0,90

Exemplo 2.2 (continuação)

- Voltando ao estudo da ecologista, e supondo que em sua visita ao lago sorteado ela não conseguiu detectar a espécie de interesse, uma pergunta relevante é:
  - "Qual a probabilidade de que a espécie esteja presente dado que foi sorteado um lago da categoria 2 e que não houve detecção?

Solução:

$$P(V|D'L_2) = \frac{P(VL_2) * P(D'|VL_2)}{P(VL_2) * P(D'|VL_2) + P(V'L_2) * P(D'|V'L_2)}$$

$$= \frac{0{,}25 * 0{,}30}{0{,}25 * 0{,}30 + 0{,}25 * 1}$$

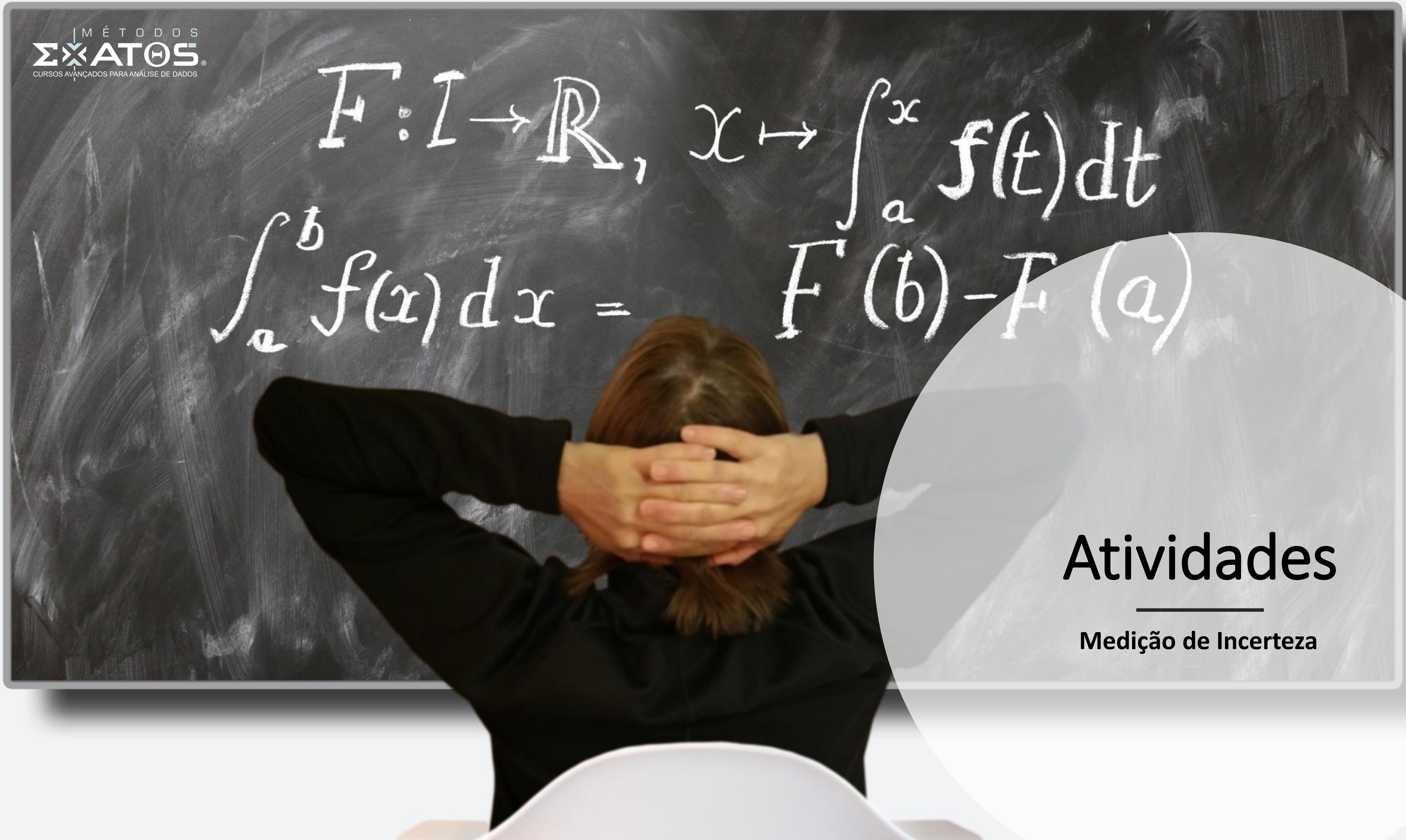
$$\cong \mathbf{0{,}231}$$

$$P(VL_2) = P(V|L_2) * P(L_2) = 0{,}50 * 0{,}50 = 0{,}25$$

$$P(D'|VL_2) = 1 - P(D|VL_2) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$$

$$P(V'L_2) = P(V'|L_2) * P(L'_2) = (1 - 0{,}50) * (1 - 0{,}50) = 0{,}25$$

$$P(D'|V'L_2) = 1$$



Atividades

Medição de Incerteza

Exercícios

Exercício 2.6

- Um especialista em cinema avalia que a probabilidade de que certo filme obtenha o Oscar pela melhor fotografia é 0,30. Avalia ainda que a probabilidade de que o filme obtenha o prêmio de melhor direção é 0,20 e que há probabilidade de 0,06 de que receba os dois prêmios. Com base nas avaliações do especialista, calcule:
  a. A probabilidade de que o filme ganhe ao menos um dos prêmios;
  b. A probabilidade de que não ganhe prêmio algum.

Solução:

$$F \equiv \text{"}ganhar\ o\ oscar\ pela\ fotografia\text{"}$$

$$D \equiv \text{"}ganhar\ o\ oscar\ pela\ Direção\text{"}$$

$$P(F) = 0{,}30$$

$$P(D) = 0{,}20$$

$$P(DF) = 0{,}06$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}.\quad D\ ou\ F \rightarrow P(D+F) &= P(D) + P(F) - P(DF) \\ &= 0{,}20 + 0{,}30 - 0{,}06 \\ &= \mathbf{0,44} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}.\quad P((D+F)') &= 1 - P(D+F) \\ &= 1 - 0{,}44 \\ &= \mathbf{0,56} \end{aligned}$$

Exercício 2.10

- Idealizou-se um procedimento para detectar a paternidade em um teste de DNA. O procedimento não é infalível. Se de fato há paternidade, a probabilidade de que ela seja detectada no teste é de 0,98. Porém, existe uma probabilidade 0,05 de que ocorra uma indicação de paternidade equivocada (falso positivo). Numa disputa judicial, feito o exame de DNA, **houve uma detecção**. Evidências obtidas no levantamento do histórico sexual de todos os envolvidos indicam que a priori a probabilidade de paternidade é de 0,15. Qual a probabilidade de que a **paternidade indicada no teste seja verdadeira**?

Solução:

$$A \equiv \text{"}ele\ \acute{e}\ o\ pai\text{"}$$

$$B \equiv \text{"}paternidade\ no\ teste\ \acute{e}\ positiva\text{"}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(A) * P(B|A) + P(A') * P(B|A')}$$

$$P(A) = 0{,}15 \qquad P(A') = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$$

$$P(B|A) = 0{,}98$$

$$P(B|A') = 0{,}05$$

$$P(A|B) = \frac{0{,}15 * 0{,}98}{0{,}15 * 0{,}98 + 0{,}85 * 0{,}05} \cong \mathbf{0{,}77}$$

Exercícios

Exercício 2.12

- A probabilidade de que determinado técnico de um laboratório identifique corretamente uma bactéria é $^2/_3$. Com base em experiências anteriores a probabilidade de que um outro técnico faça uma identificação correta dado que o primeiro o fez é $^3/_4$. A probabilidade de que o segundo técnico acerte dado que o primeiro errou é $^1/_5$.
  a. Qual a probabilidade de que o segundo técnico laboratorial identifique corretamente a bactéria?
  b. Se ambos os técnicos forem convocados individualmente para fazer a análise, qual a probabilidade de que a bactéria seja corretamente identificada por pelo menos um dos técnicos?

Solução:

$$A \equiv \text{"1º técnico identifique a bactéria"}$$

$$B \equiv \text{"2º técnico identifique a bactéria"}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(A) * P(B|A) + P(A') * P(B|A')}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(A) * P(B|A) + P(A') * P(B|A')$$

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad P(A') = 1 - \frac{2}{3} = 1/3 \quad P(B|A) = \frac{3}{4} \quad P(B|A') = \frac{1}{5}$$

a.
$$P(B) = P(A) * P(B|A) + P(A') * P(B|A')$$
$$= \frac{2}{3} * \frac{3}{4} + \frac{1}{3} * \frac{1}{5} = \frac{17}{30} \cong \mathbf{0,56}$$

b.
$$P(AB) = P(A) * P(B|A)$$
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B|A)$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{17}{30} - \frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{11}{15} \cong \mathbf{0,73}$$

Exercícios

Exercício 2.13

- Um empreiteiro apresenta orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte hidráulica de um edifício. Com base na experiência e no conhecimento do mercado, ele acha que a **probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de $^1/_2$**. Caso ganhe a concorrência da parte elétrica a **probabilidade de ganhar a parte hidráulica é de $^3/_4$**. No entanto, **se ele não ganhar a concorrência da parte elétrica, ele avalia que a probabilidade de ganhar a da parte de hidráulica é apenas $^1/_3$**. Qual a probabilidade de que o empreiteiro:

$0,375$ a. Ganhe os dois contratos?

$0,29$ b. Ganhe apenas um dos contratos?

$0,54$ c. Ganhe o contrato para a parte hidráulica?

$0,69$ d. Sabendo que o empreiteiro venceu a concorrência da instalação hidráulica, qual a probabilidade de que ele vença também a concorrência relativa à instalação elétrica?

Exercícios

Exercício 2.13 – Solução (a)

- Um empreiteiro apresenta orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte hidráulica de um edifício. Com base na experiência e no conhecimento do mercado, ele acha que a **probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de $^1/_2$**. Caso ganhe a concorrência da parte elétrica a **probabilidade de ganhar a parte hidráulica é de $^3/_4$**. No entanto, **se ele não ganhar a concorrência da parte elétrica, ele avalia que a probabilidade de ganhar a da parte de hidráulica é apenas $^1/_3$**. Qual a probabilidade de que o empreiteiro:

$0,375$ a. Ganhe os dois contratos?

$0,29$ b. Ganhe apenas um dos contratos?

$0,54$ c. Ganhe o contrato para a parte hidráulica?

$0,69$ d. Sabendo que o empreiteiro venceu a concorrência da instalação hidráulica, qual a probabilidade de que ele vença também a concorrência relativa à instalação elétrica?

Solução:

$$E \equiv \text{"}ganhar\ concorrência\ da\ parte\ elétrica\text{"}$$

$$H \equiv \text{"}ganhar\ concorrência\ da\ parte\ hidraúlica\text{"}$$

$$P(EH) = P(E) * P(H) = P(E) * P(H|E)$$

$$P(E) = \frac{1}{2}$$

$$P(H|E) = \frac{3}{4}$$

$$P(EH) = \frac{1}{2} * \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Exercício 2.13 – Solução (b)

- Um empreiteiro apresenta orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte hidráulica de um edifício. Com base na experiência e no conhecimento do mercado, ele acha que a **probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de $^1/_2$**. Caso ganhe a concorrência da parte elétrica a **probabilidade de ganhar a parte hidráulica é de $^3/_4$**. No entanto, **se ele não ganhar a concorrência da parte elétrica, ele avalia que a probabilidade de ganhar a da parte de hidráulica é apenas $^1/_3$**. Qual a probabilidade de que o empreiteiro:

$0,375$ a. Ganhe os dois contratos?
$0,29$ b. Ganhe apenas um dos contratos?
$0,54$ c. Ganhe o contrato para a parte hidráulica?
$0,69$ d. Sabendo que o empreiteiro venceu a concorrência da instalação hidráulica, qual a probabilidade de que ele vença também a concorrência relativa à instalação elétrica?

Solução:

$E \equiv \text{"}ganhar\ concorrência\ da\ parte\ elétrica\text{"}$

$H \equiv \text{"}ganhar\ concorrência\ da\ parte\ hidraúlica\text{"}$

$$P(EH') + P(E'H)$$

$$P(EH') = P(E) * P(H'|E)$$

$$P(E'H) = P(E') * P(H|E')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(E) = \frac{1}{2} \\ P(E') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ P(H'|E) = 1 - P(H|E) = \frac{1}{4} \\ P(H|E') = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{P(EH') + P(E'H) = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3} \cong 0,29}$$

Exercício 2.13 – Solução (c)

- Um empreiteiro apresenta orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte hidráulica de um edifício. Com base na experiência e no conhecimento do mercado, ele acha que a **probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de $^1/_2$**. Caso ganhe a concorrência da parte elétrica a **probabilidade de ganhar a parte hidráulica é de $^3/_4$**. No entanto, **se ele não ganhar a concorrência da parte elétrica, ele avalia que a probabilidade de ganhar a da parte de hidráulica é apenas $^1/_3$**. Qual a probabilidade de que o empreiteiro:

$\mathbf{0,375}$ a. Ganhe os dois contratos?

$\mathbf{0,29}$ b. Ganhe apenas um dos contratos?

$\mathbf{0,54}$ c. Ganhe o contrato para a parte hidráulica?

$\mathbf{0,69}$ d. Sabendo que o empreiteiro venceu a concorrência da instalação hidráulica, qual a probabilidade de que ele vença também a concorrência relativa à instalação elétrica?

Solução:

$$E \equiv \text{"}ganhar\ concorrência\ da\ parte\ elétrica\text{"}$$

$$H \equiv \text{"}ganhar\ concorrência\ da\ parte\ hidraúlica\text{"}$$

$$P(EH') + P(E'H)$$

$$P(EH') = P(E) * P(H'|E)$$

$$P(E'H) = P(E') * P(H|E')$$

$$\left\{ \begin{aligned} P(E) &= \frac{1}{2} \\ P(E') &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ P(H'|E) &= 1 - P(H|E) = \frac{1}{4} \\ P(H|E') &= \frac{1}{3} \end{aligned} \right.$$

$$P(H) = P(E) * P(H|E) + P(E') * P(H|E')$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{3}{4} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{13}{24} \cong \mathbf{0,54}$$

Exercícios

Exercício 2.13 – Solução (d)

- Um empreiteiro apresenta orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte hidráulica de um edifício. Com base na experiência e no conhecimento do mercado, ele acha que a **probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de $^1/_2$**. Caso ganhe a concorrência da parte elétrica a **probabilidade de ganhar a parte hidráulica é de $^3/_4$**. No entanto, **se ele não ganhar a concorrência da parte elétrica, ele avalia que a probabilidade de ganhar a da parte de hidráulica é apenas $^1/_3$**. Qual a probabilidade de que o empreiteiro:

$\mathbf{0,375}$ a. Ganhe os dois contratos?

$\mathbf{0,29}$ b. Ganhe apenas um dos contratos?

$\mathbf{0,54}$ c. Ganhe o contrato para a parte hidráulica?

$\mathbf{0,69}$ d. Sabendo que o empreiteiro venceu a concorrência da instalação hidráulica, qual a probabilidade de que ele vença também a concorrência relativa à instalação elétrica?

Solução:

$$E \equiv \text{"}ganhar\ concorrência\ da\ parte\ elétrica\text{"}$$

$$H \equiv \text{"}ganhar\ concorrência\ da\ parte\ hidraúlica\text{"}$$

$$P(EH') + P(E'H)$$

$$P(EH') = P(E) * P(H'|E)$$

$$P(E'H) = P(E') * P(H|E')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(E) = \frac{1}{2} \\ P(E') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ P(H'|E) = 1 - P(H|E) = \frac{1}{4} \\ P(H|E') = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$P(H) = P(E) * P(H|E) + P(E') * P(H|E')$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{3}{4} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{13}{24} \cong 0{,}54$$

$$P(E|H) = \frac{P(E) * P(H|E)}{P(E) * P(H|E) + P(E') * P(H|E')}$$

$$= \frac{1/2 * 3/4}{13/24} \cong \mathbf{0,69}$$

Regras de probabilidade

Regras

$P(E|H) = \frac{m}{n}$, com $m \leq n$

$P(E|FH) = P(E|F'H) = P(E|H) \rightarrow$ *para eventos independentes*

$P(F|EH) = P(F|E'H) = P(F|H) \rightarrow$ *para eventos independentes*

$P(H|H) = 1 \rightarrow$ *para evento qualquer*

$P(H'|H) = 0 \rightarrow$ *para evento qualquer*

$P(E'|H) = 1 - P(E|H) \rightarrow$ para evento qualquer

$P(E_1|H) + P(E_2|H) + \cdots + P(E_n|H) = 1 \rightarrow$ *para eventos exclusivos sob H*

$P(E_1E_2|H) = P(E_1|H) * P(E_2|E_1H) \rightarrow$ *para eventos dependentes*

$P(E_1E_2|H) = P(E_1|H) * P(E_2|H) \rightarrow$ *para eventos independentes*

$P(E_1 + E_2|H) = P(E_1|H) + P(E_2|H) \rightarrow$ *para eventos exclusivos sob H*

$P(E_1 + E_2|H) = P(E_1|H) + P(E_2|H) - P(E_1E_2|H) \rightarrow$ para eventos quaisquer

Teoremas

$p(F|H) = \sum_{j=1}^{m} P(F|E_jH) * P(E_j|H) \rightarrow$ *teorema da probabilidde total*

$P(F|EH) = \frac{P(E|FH) * P(F|H)}{P(E|H)} \rightarrow$ *teorema de bayes*

$$P(F|EH) = \frac{P(E|FH) * P(F|H)}{P(E|FH) * P(F|H) + P(E|F'H) * P(F'|H)}$$

$$P(E|H) = P(E|FH) * P(F|H) + P(E|F'H) * P(F'|H)$$