1. TEORIA BŁĘDÓW

$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}$ - błąd względny przybliżonej wartości, $w = \left| \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right|$ - wskaźnik uwarunkowania funkcji f(x), $\delta f = w \delta x$ - błąd względny funkcji f(x)

$w_1 = \left| \frac{f_x(x,y) \cdot x}{f(x,y)} \right|, w_2 = \left| \frac{f_y(x,y) \cdot y}{f(x,y)} \right|$ - wskaźniki uwarunkowania funkcji f(x,y),

$\delta f = w_1 \delta x + w_2 \delta y$ - błąd względny funkcji f(x,y)

---

2. INTERPOLACJA

$WL_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x) \cdot y_k$ - wielomian interpolacyjny Lagrange'a

$\phi_k(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$, $y_k = f(x_k),\ x_k, k = 0,\ldots,n$ węzły.

$WN_n(x) = y_0 + f(x_0,x_1)(x-x_0) + \cdots + f(x_0,x_1,\ldots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$ - wielomian interpolacyjny Newtona

$f(x_0,x_1,\ldots,x_n) = \frac{f(x_1,\ldots,x_n) - f(x_0,\ldots,x_{n-1})}{(x_n-x_0)}$ - iloraz różnicowy n-tego rzędu

$|f(x) - W_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)\cdots(x-x_n)|$ - błąd interpolacji, $M_{n+1} = \sup \left| f^{(n+1)}(x) \right| \quad x \in \langle a,b \rangle$

$x_k = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2} \pi \right) + \frac{b+a}{2}$ - węzły Czebyszewa k=0,1,...,n.

---

3. APROKSYMACJA

$F(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$ - funkcja aproksymacyjna, $\varphi_i(x),\ i = 0,1,2,\ldots,m$ - funkcje bazowe

aproksymacja dyskretna – metoda najmniejszych kwadratów – wyznaczanie minimum funkcji

$$A(a_0,a_1,\ldots,a_m) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - F(x_i)]^2, \quad y_i = f(x_i)\ i = 0,1,\ldots,n$$

$M^T \cdot M \cdot A = M^T Y$ - zapis macierzowy $M = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_m(x_0) \\ & & \\ \varphi_0(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$

aproksymacja ciągła – metoda najmniejszych kwadratów – wyznaczanie minimum funkcji

$$H(a_0,a_1,\ldots,a_m) = \int_a^b [f(x) - F(x)]^2 dx, \quad F(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$$

$\varphi_i(x),\ i = 0,1,\ldots,m$ -funkcje bazowe całkowalne z kwadratem w przedziale <a,b>

f(x) – funkcja ciągła w przedziale <a,b>

4. RÓWNANIA I UKŁADY RÓWNAŃ NIELINIOWYCH

Dla równania f(x)=0 ciąg iteracyjny $x_{n+1} = f(x_n)$ dla metod jednokrokowych, $x_{n+1} = f\left(x_{n-1}, x_n\right)$ dla metod dwukrokowych

$\left|x^* - p\right| \le \dfrac{\left|f\left(x^*\right)\right|}{m_1}$ - oszacowanie błędu bezwzględnego , $0 < m_1 \le \left|f'(x)\right|$ dla $x \in \langle a, b \rangle$

x* - przybliżona wartość pierwiastka równania f(x)=0, p –dokładna wartość pierwiastka

---

Metoda wyznaczania pierwiastków jednokrotnych równania f(x)=0 dla x∈ <a,b>

- bisekcji dokładność $\left|x_n - x_{n+1}\right| < \dfrac{1}{2^n}(b-a)$
- siecznych $x_{n+1} = x_n - f\left(x_n\right) \cdot \dfrac{x_n - x_{n-1}}{f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)}$ - ciąg iteracyjny
- stycznych Newtona $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$

Układy równań nieliniowych $\left.\begin{array}{c} f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \\ \cdots \\ f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \end{array}\right]$, $F(x) = 0$ wektorowo.

$x^{<n+1>} = x^{<n>} - \left(J\left(x^{<n>}\right)\right)^{-1} \cdot F\left(x^{<n>}\right)$ - zapis wektorowy ciągu iteracyjnego Newtona $J(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

---

5. CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \int\limits_a^b L_n(x)dx, \quad L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \phi_n(x) \cdot f(x_k)$ - wielomian interpolacyjny Lagrange'a

- metoda złożona trapezów przy podziale przedziału <a,b> na *m* części:

$$S(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{m-1})\right) + f(x_m)\right)$$

- metoda złożona Simpsona przy podziale przedziału <a,b> na *m* części, (*m* – parzyste):

$$S(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) \ldots + f(x_{m-2})\right) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{m-1})\right) + f(x_m)\right)$$

---

6. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$

Metoda prosta Eulera: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

Metoda ulepszona Eulera: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, y_n))$

Metoda niejawna Eulera: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})$