Interpolacja

Metody numeryczne

dr eng. Grzegorz Fotyga

Gdańsk University of Technology
Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics
Department of Microwave and Antenna Engineering

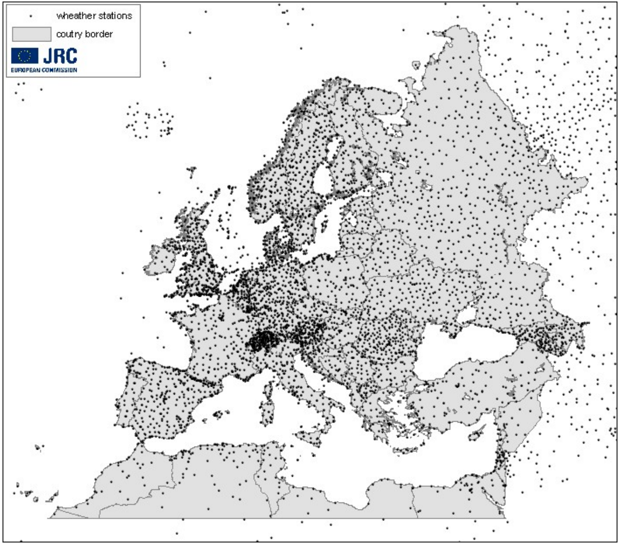
27 kwietnia 2018

Lecture content

Wstęp (0) - interpolacja

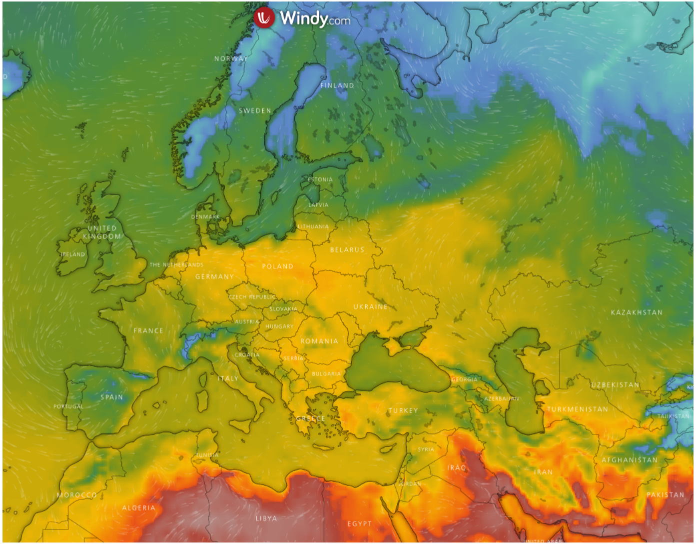
- Jeden z najważniejszych etapów **analizy danych** - opis dużego zastawu danych za pomocą prostej zależności matematycznej
- **Estymacja** wartości badanej wielkości w obszarach między dyskretnymi punktami - **interpolacja**
- w uczeniu maszynowym, statystyce, systemach sensorowych (IoT!) itp. dane wejściowe to próbki badanej funkcji w **wybranych punktach** przestrzeni. Trzeba korzystać z interpolacji, żeby wyznaczyć wartość badane funkcji w **pozostałych** punktach.
- interpolacja często poprzedza takie algorytmy jak: szukanie minimum funkcji, miejsc zerowych (optymalizacja!), całkowanie, liczenie pochodnych itp.

Wstęp (1) - pogoda



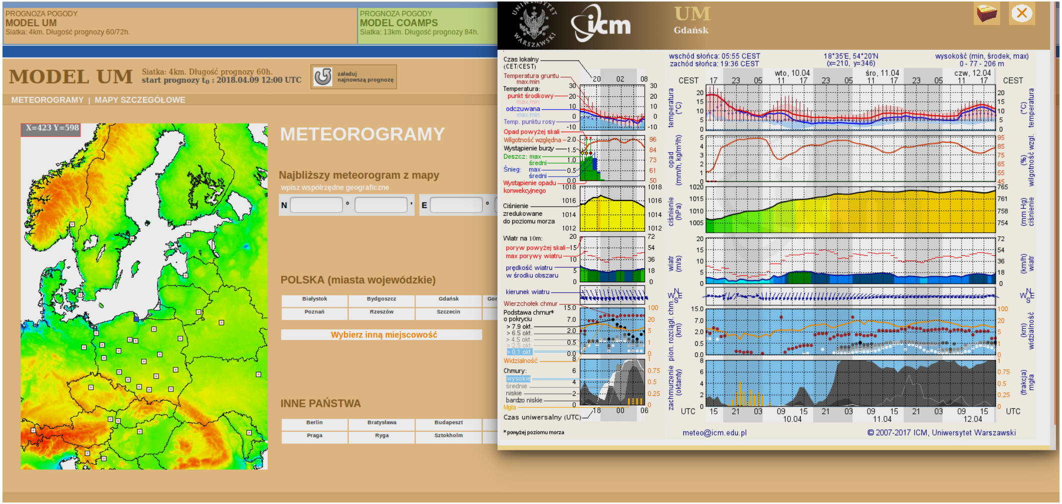
marswiki.jrc.ec.europa.eu/agri4castwiki/index.php/Interpolation_of_observed_weather

Wstęp (2) - pogoda



windity.com

Wstęp (3) - meteo.pl



meteo.pl

Wstęp (4) - meteo.pl


CENTRUM OBLICZENIOWE
Interdyscyplinarne Centrum Modelowania Matematycznego i Komputerowego
Uniwersytet Warszawski

WITAMY KOMPUTERY OPROGRAMOWANIE PODRĘCZNIK GRANTY SZKOLENIA BIULETYN

NUMERYKA: METODY KRYŁOWA

Spis treści
[schowaj]

Definicja metody Kryłowa

Metody Kryłowa są metodami projekcji na podprzestrzeń Kryłowa

$$\mathcal{K}_m(A, r_0) = span\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \ldots, A^{m-1}r_0\},\ r_0 = b - Ax_0$$

Metody te różnią się podprzestrzeniami $\mathcal{L}_m$.

Metody znalezienia bazy ortogonalnej

Metody znalezienia bazy ortogonalnej bazują na standardowych procedurach z różnymi odmianami:

- Standardowa procedura Grama-Schmidta SGS dla przestrzeni Kryłowa
- Zmodyfikowana procedura Grama-Schmidta MGS dla przestrzeni Kryłowa
- Metoda Householdera dla przestrzeni Kryłowa

W wyniku procedury ortogonalizacji powstaje macierz Hessenberga $\hat{H}_m$ o rozmiarze $(m+1) \times m$ składająca się z elementów $\{h_{ij}\}$ wymienionych w poszczególnych algorytmach.

Gdy macierz A jest symetryczna, to macierz Hessenberga jest trójprzekątniowa. W tym przypadku ortogonalizacja znacznie sie upraszcza:

- Metoda Lanczosa - wersja MGS

Ortogonalne metody projekcji na przestrzeń Kryłowa

Szukamy aproksymację $x_m \in x_0 + \mathcal{K}_m$ spełniającą warunek ortogonalności $b - Ax_m \perp \mathcal{L}_m = \mathcal{K}_m$.

Dla $V_m = (v_1, \ldots, v_m)$, $v_1 = \frac{r_0}{||r_0||_2}$, $\beta = ||r_0||_2$ i macierzy H_m powstającej z $\hat{H}_m$ poprzez wykreślenie ostatniej

Algebra liniowa
Rozwiązywanie układów równań liniowych
Wartości i wektory własne
Rozwiązywanie dużych układów równań liniowych
• Klasyczne metody iteracyjne
• Metody projekcji
• **Metody Kryłowa**
Rozwiązywanie układów równań normalnych
Preconditioning

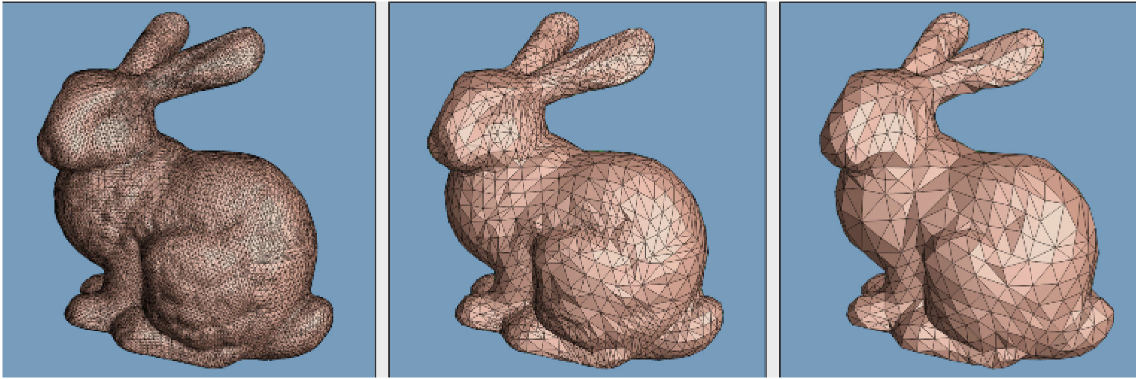
Numeryka
Opiekun: Kerstin Kantiem
E-mail: numeryka@icm.edu.pl

Pakiety Alfabetyczne
A B C D E F G H I J K L M N O P
Q R S T U V W X Y Z

Pakiety Tematyczne
Algebra liniowa
Algorytmy podziału
Automatyczne różniczkowanie
Dekompozycja Obszaru
Falki
Funkcje
Generowanie siatek
Interpolacja i aproksymacja
Kwadratury
Liczby losowe
Macierze
Metoda Elementu Brzegowego
Metoda Elementu Skończonego

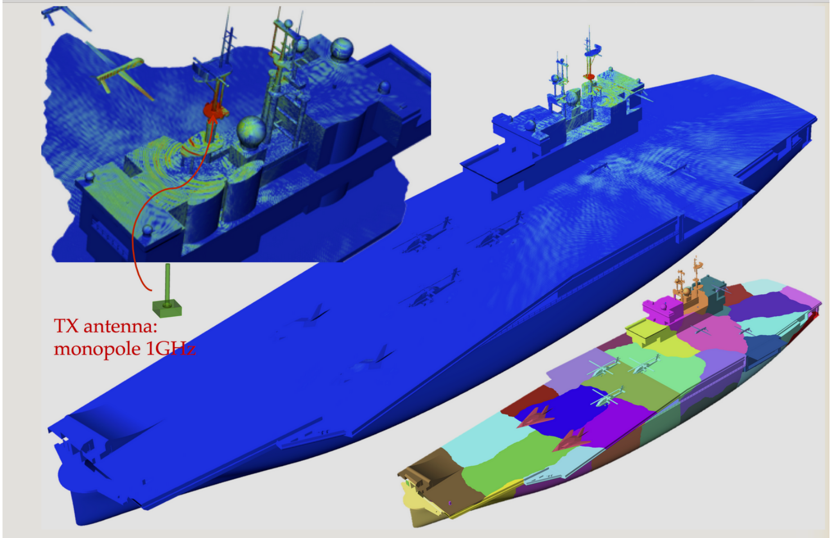
https : //kdm.icm.edu.pl/kdm/Numeryka

Wstęp (5) - What's up doc?



http : //hhoppe.com/mra.pdf

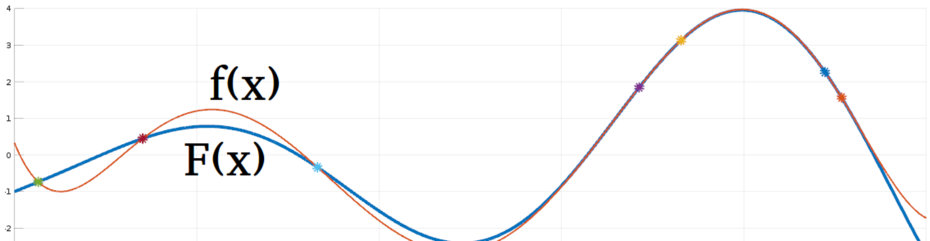
Wstęp (6) - Peng Zhen



$https : //sites.google.com/site/zhenpeng11111/research$

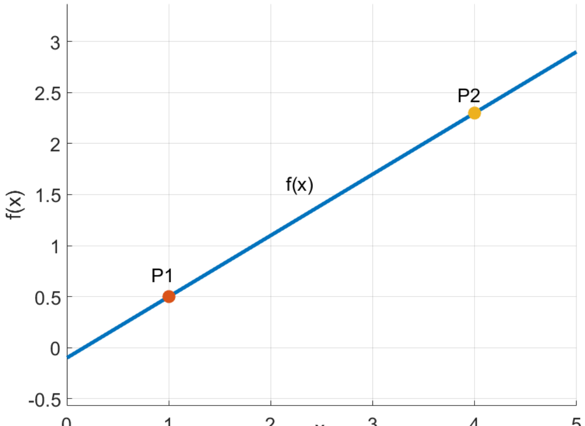
Interpolacja wielomianowa (1)

- Będziemy rozpatrywać jedynie interpolację funkcji jednej zmiennej: $f(x)$
- Dane wejściowe to k par: (x_i, y_i), gdzie $f(x_i) = y_i$ i $x_i \neq x_j$.
- x_i to tzw. **węzeł interpolacji**
- Nasze zadanie to oszacowanie jaką wartość ma funkcja $f(x)$ w pozostałych x ach: $x \notin \{x_1, x_2 \dots x_k\}$
- Szukana funkcji interpolująca $F(x)$ powinna być *gładka* i powinna wiernie odzwierciedlać oryginalną funkcję $f(x)$
- Podsumowując: $f(x)$ - **oryginalna funkcja**, $F(x)$ - **funkcja interpolująca**, $f(x_i) = F(x_i)$



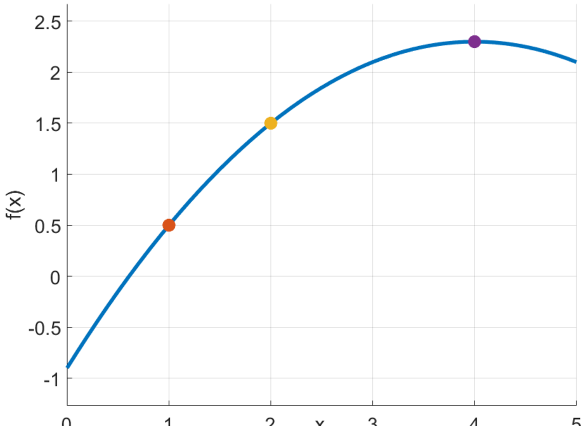
Interpolacja wielomianowa (2)

Dane są dwa punkty. Możemy jednoznacznie określić prostą przechodzącą przez te punkty.



Interpolacja wielomianowa (3)

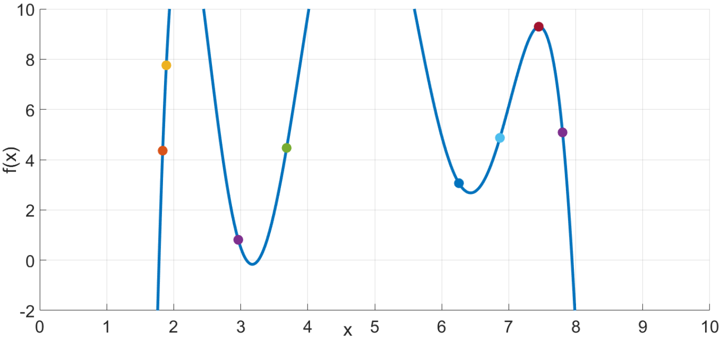
Możemy jednoznacznie określić parabolę przechodzącą przez trzy punkty.



Interpolacja wielomianowa (4)

Możemy jednoznacznie określić wielomian n-tego stopnia przechodzący przez $n+1$ punktów.

$$p(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots a_n x + a_{n+1} \tag{1}$$



Interpolacja wielomianowa (5)

- **Interpolacja wielomianowa:** mamy $n+1$ punktów (x_i, y_i) gdzie każdy z x_i ma inną wartość. Szukamy wielomianu o postaci $p(x)$ stopnia n, który w węzłach przyjmuje następujące wartości:

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1 \dots n \tag{2}$$

- taki wielomian jest jednoznacznie określony:

$$p(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots a_n x + a_{n+1} \tag{3}$$

- i posiada $n+1$ współczynników: $a_1, a_2 \dots a_{n+1}$.
- Wartość wielomianu p w każdym z $n+1$ węzłów wynosi:

Interpolacja wielomianowa (6)

Układ równań dla każdego z węzłów x_i:

$$\begin{aligned} y(x_1) &= a_1 x_1^n + a_2 x_1^{n-1} + \dots a_n x_1 + a_{n+1} = y_1 \\ y(x_2) &= a_1 x_2^n + a_2 x_2^{n-1} + \dots a_n x_2 + a_{n+1} = y_2 \\ &\vdots \\ y(x_{n+1}) &= a_1 x_{n+1}^n + a_2 x_{n+1}^{n-1} + \dots a_n x_{n+1} + a_{n+1} = y_{n+1} \end{aligned} \tag{4}$$

Układ równań w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

lub zwięźlej:

$$\mathbf{Ma} = \mathbf{y} \tag{5}$$

Interpolacja wielomianowa (7)

- macierz **M** nosi nazwę: *Vandermonde*:

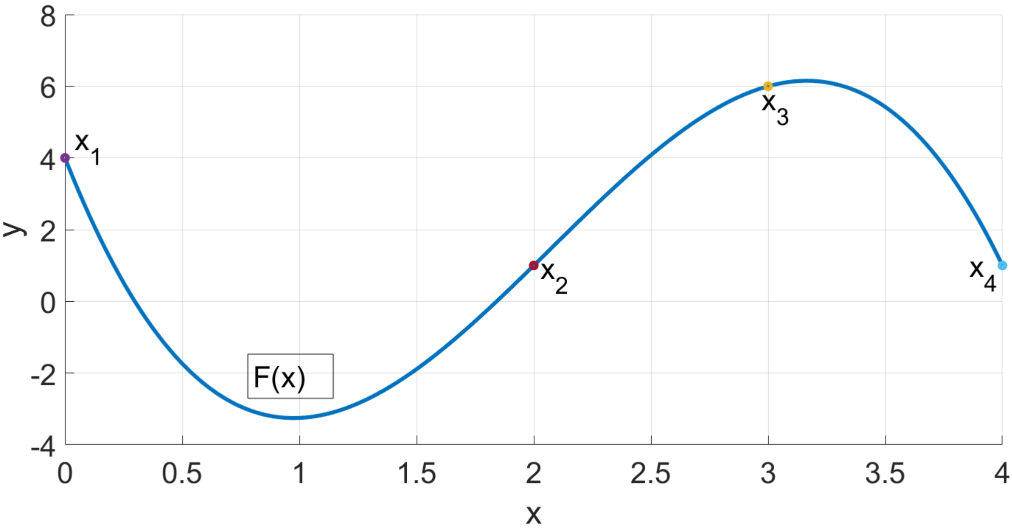
Example

- 4 węzły: $x = [0 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$
- f wartości w 4 węzłach: $y = [4 \quad 1 \quad 6 \quad 1]$
- macierz Vandermonde:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

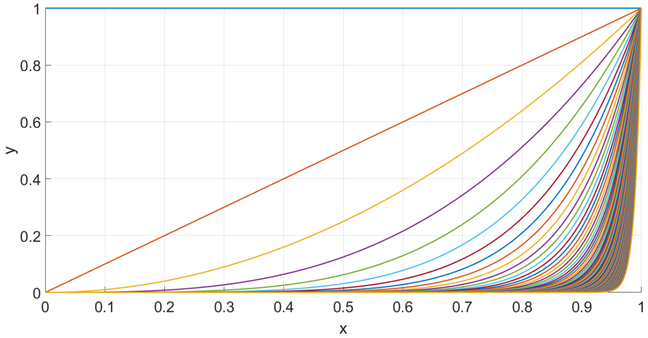
- Obliczone współczynniki wielomianu (wykorzystując (5)):
  $a = [-1.791 \quad 11.125 \quad -16.583 \quad 4.0]$
- $F(x) = -1.791x^3 + 11.125x^2 - 16.583x + 4.0$

Interpolacja wielomianowa (8)



Interpolacja wielomianowa (9)

- Metoda ta pozwala uzyskać wielomian interpolacyjny **teoretycznie**, jednak macierz Vandermonde składa się z bardzo małych i bardzo dużych liczb, co powoduje duże błędy zaokrągleń.
- Z innej perspektywy: interpolacja wykorzystuje bazę funkcji: $1, x, x^2, x^3 \ldots x^n$, które stają się **podobne**, kiedy k wzrasta. *Podobieństwo* powoduje **złe uwarunkowanie** problemu!

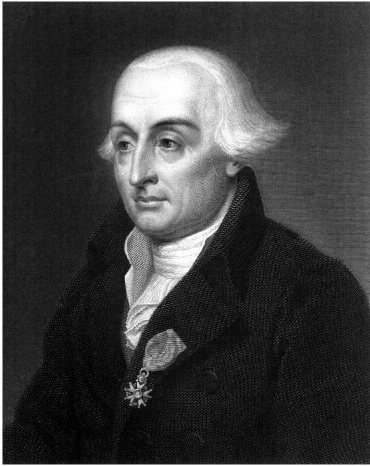


Interpolacja Lagrange'a (1)

- **Trzeba znaleźć *lepszą* bazę funkcji do interpolacji !**
- Zaczynamy od $n+1$ punktów (x_i, y_i)
- Baza Lagrange do interpolacji składa się z funkcji określonych wzorem

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad (6)$$

for $i = 1, 2 \ldots n+1$.



Interpolacja Lagrange'a (2)

- Zakładamy, że x_1, x_2, x_3, x_4 sa odrębnymi punktami:
- Rozwijając (6) dla x_i mamy:

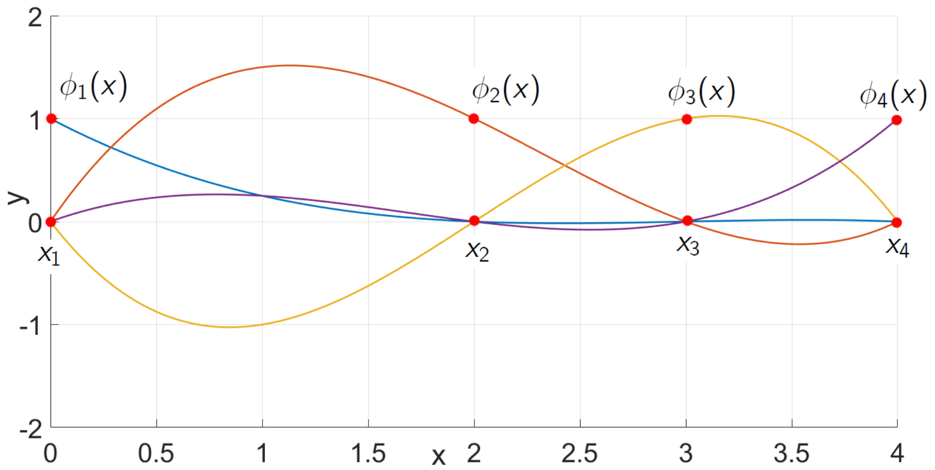
$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}, \\
\phi_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}, \\
\phi_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}, \\
\phi_4(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Interpolacja Lagrange'a (3)

Następnie podstawiamy: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$:

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(0-2)(0-3)(0-4)} = (-x^3 + 9x^2 - 26x + 24)/24, \\
\phi_2(x) &= \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-3)(2-4)} = (x^3 - 7x^2 + 12x)/4, \\
\phi_3(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(3-0)(3-2)(3-4)} = (-x^3 + 6x^2 - 8x)/3, \\
\phi_4(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-2)(4-3)} = (x^3 - 5x^2 + 6x)/8.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Interpolacja Lagrange'a (4)

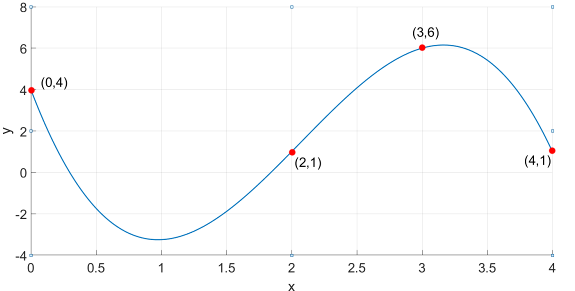


$\phi_1 = 1$ w x_1 i 0 w x_2, x_3, x_4. $\phi_2 = 1$ w x_2 i 0 w x_1, x_3, x_4, itp...

Interpolacja Lagrange'a (5)

- $\phi_1 = 1$ w x_1 i 0 w x_2, x_3, x_4. $\phi_2 = 1$ w x_2 i 0 w x_1, x_3, x_4, itp...
- Zakładając: $y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 6, y_4 = 1$...
- ...**jaka jest postać funkcji interpolującej** $F(x)$**???**
- podpowiedz: w x_1 jedynie $\phi_1 = 1$, natomiast $\phi_{2,3,4} = 0$
- Oczywiście:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{4} y_i \phi_i(x) = 4.0 - 16.583x + 11.125x^2 - 1.791x^3 \tag{9}$$

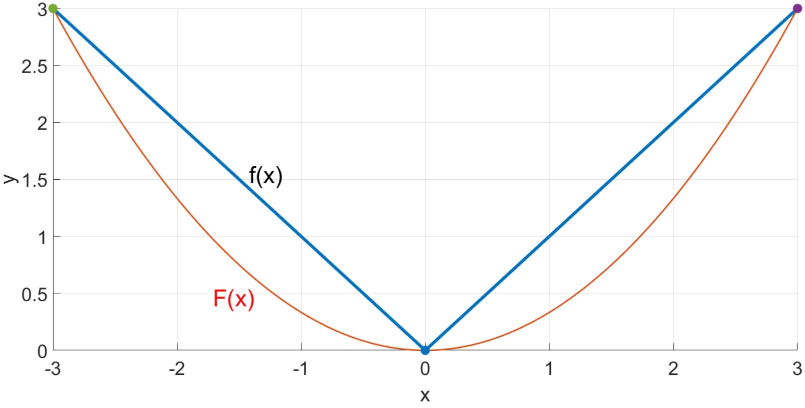


Interpolacja Lagrange'a (5)

- Uzyskana metodą Lagange'a funkcja interpolująca $F(x)$ **jest taka sama**, jak funkcja uzyskana metodą Vandermonde:
- $F(x) = 4.0 - 16.583x + 11.125x^2 - 1.791x^3$
- Slajd: *Interpolacja wielomianowa (8)*
- Jednak w metodzie Lagrange'a nie trzeba konstruować i **rozwiązywać** układu równań liniowych
- Metoda Lagrange'a jest **stabilna**
- **Łatwa** do implementacji

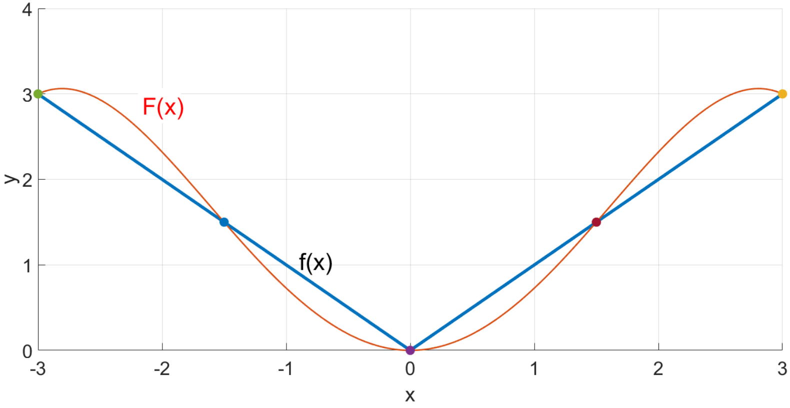
Interpolacja Lagrange'a (6)

- Spróbujmy interpolować funkcję $f(x) = |x|$ w **3 węzłach**:



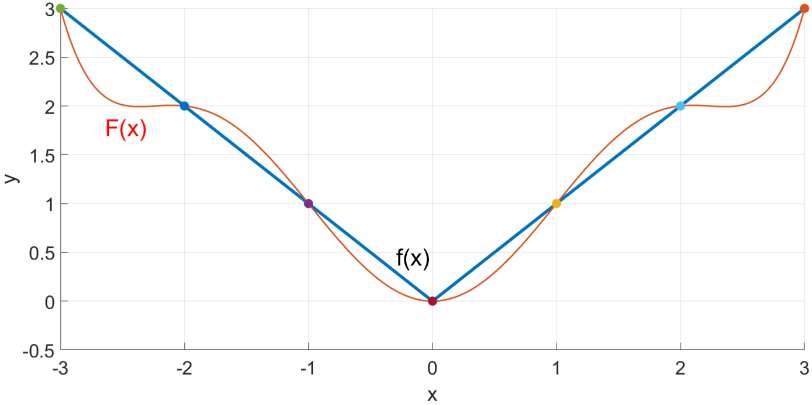
Interpolacja Lagrange'a (7)

- Spróbujmy interpolować funkcję $f(x) = |x|$ w **5 węzłach**:



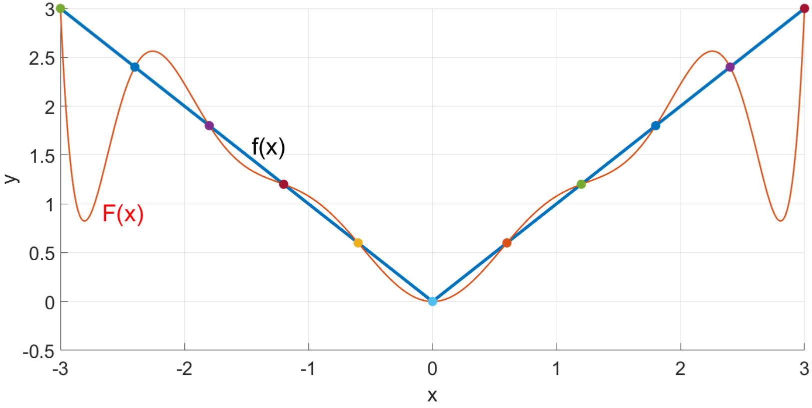
Interpolacja Lagrange'a (8)

- Spróbujmy interpolować funkcję $f(x) = |x|$ w **7 węzłach**:



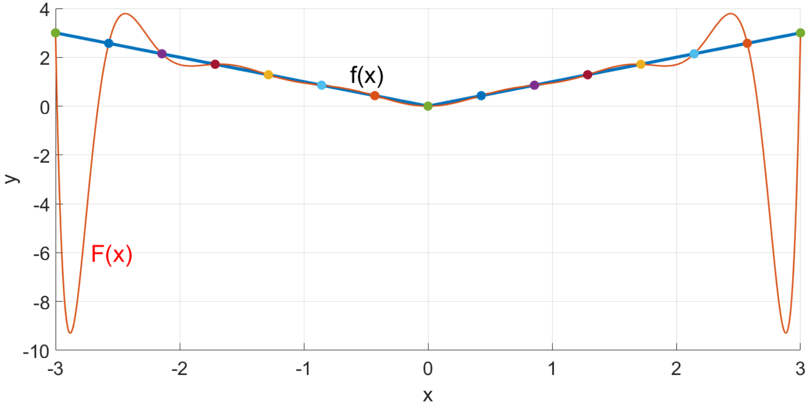
Interpolacja Lagrange’a (9)

- Spróbujmy interpolować funkcję $f(x) = |x|$ w **11 węzłach**:



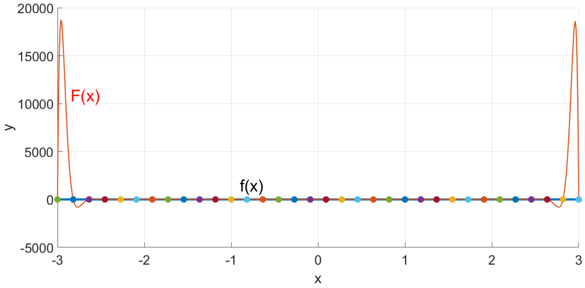
Interpolacja Lagrange'a (10)

- Spróbujmy interpolować funkcję $f(x) = |x|$ w **15 węzłach**:



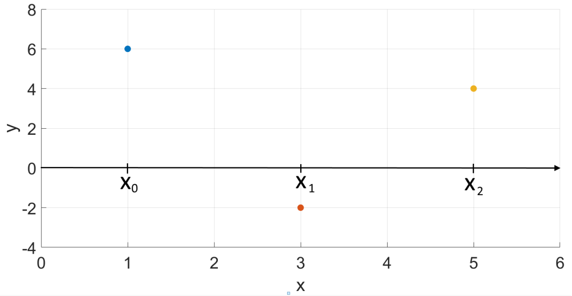
Interpolacja Lagrange'a (10) - efekt Rungego

- Funkcja $f(x)$ jest dobrze interpolowana w środku przedziału,
- **Jednak** na krawędziach pojawiają się **oscylacje**!
- Ten problem pojawia się, kiedy wykorzystuje się wielomiany wysokiego stopnia do interpolacji węzłów w równo-odległych punktach.
- Jest to efekt **Rungego.**



Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (1)

- Interpolacja globalna (wielomiany, Lagrange'a itp.) jest *ryzykowna*. Za dużo węzłów powoduje efekt Rungego, za mało - niedokładną interpolację.
- **Rozwiązanie** - interpolacja **lokalna** (między poszczególnymi węzłami) z użyciem wielomianów niskiego stopnia. $S_0(x), S_1(x), S_2(x), \ldots S_n(x)$,
- **Przykład**: znamy wartości funkcji $f(x)$ w 3 punktach: x_0, x_1 i x_2. Wynoszą one: y_0, y_1 i y_2.



Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (2)

- Wartość $f(x)$ między węzłami możemy interpolować za pomocą dwóch prostych:
  - $S_0(x) = a_0 + b_0 x$
  - $S_1(x) = a_1 + b_1 x$

  które przechodzą przez punkty, odpowiednio: $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ i $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.
- Mamy więc 4 niewiadome (a_0, b_0, a_1, b_1) i 4 równania:

$$
\begin{aligned}
a_0 + b_0 x_0 &= y_0 \\
a_0 + b_0 x_1 &= y_1 \\
a_1 + b_1 x_1 &= y_1 \\
a_1 + b_1 x_2 &= y_2
\end{aligned}
$$

- W formie macierzowej:

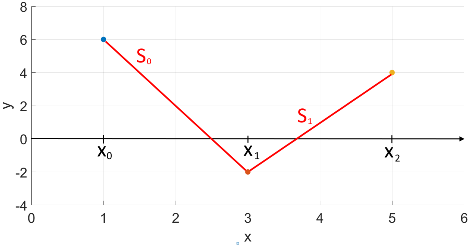
$$
\begin{bmatrix} 1 & x_0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}
$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (3)

- Podstawiamy wartości:

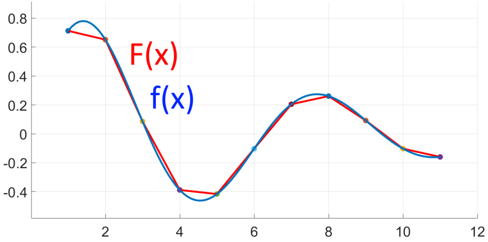
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- i otrzymujemy: $[a_0, b_0, a_1, b_1] = [10, -4, -11, 3]$.
- Ostatecznie:
  - $S_0(x) = 10 - 4x$
  - $S_1(x) = -11 + 3x$



Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (4)

- **Przykład**: wielomiany 1 stopnia użyte do interpolacji funkcji $f(x) = e^{-x/6} \cdot sin(x)$.
- 11 węzłów, 10 podprzedziałów, w i-tym przedziale: $S_i(x) = a_i + b_i x$ dla $i = 0, 1, 2 \ldots, 9$
- **UWAGA** - w praktyce jeżeli znamy postać analityczną funkcji, tak jak w tym przypadku, po co nam interpolacja? **Po nic**. Interesują nas przypadki, gdzie mamy wiele węzłów pomiarowych, stablicowane dane itp. I nie wiemy jaka jest wartość funkcji między węzłami.



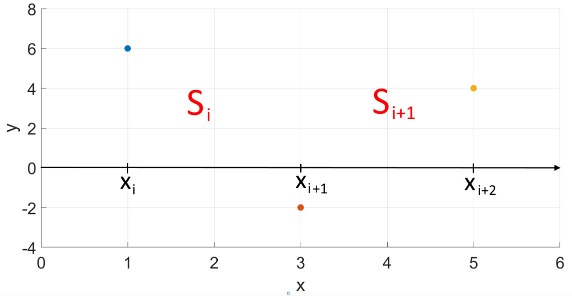
- Interpolacja wielomianami 1 stopnia jest **ciągła**, ale **nie** jest **gładka**!!

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (5)

- Spróbujmy użyć wielomianów **2 stopnia**. W każdym podprzedziale wielomian ma postać: $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$.
- **Rozwiązanie to nie daje zadowalającego wyniku.** Dla zainteresowanych slajdy (5) - (10). Dla mniej zainteresowanych, przechodzimy od razu do slajdu (11) :)
- Dla n podprzedziałów mamy zatem $3n$ niewiadomych $(a_0, b_0, c_0, a_1 \dots, c_{n-1})$
- Każdy wielomian musi przyjmować określoną wartość na **obu krańcach**, żeby funkcja interpolująca była **ciągła**.
  - $S_i(x_i) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 = a_i = y_i$
  - $S_i(x_{i+1}) = a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = a_i + b_i h + c_i h^2 = y_{i+1}$
- $h = x_{i+1} - x_i$ jest odległością między węzłami. Zakładamy, że węzły są równo-odległe.
- Zatem dla n wielomianów otrzymujemy $2n$ równań (po 2 równania dla każdego wielomianu).
- Liczba równań musi być **taka sama** jak liczba niewiadomych. **Brakuje** n równań do $3n$, żeby dostać układ równań oznaczony (dający jednoznaczne rozwiązanie).

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (6)

- Możemy zdefiniować dodatkowych $n-1$ warunków **na granicach** między wielomianami. Zapewnią one **ciągłość pierwszej pochodnej**.



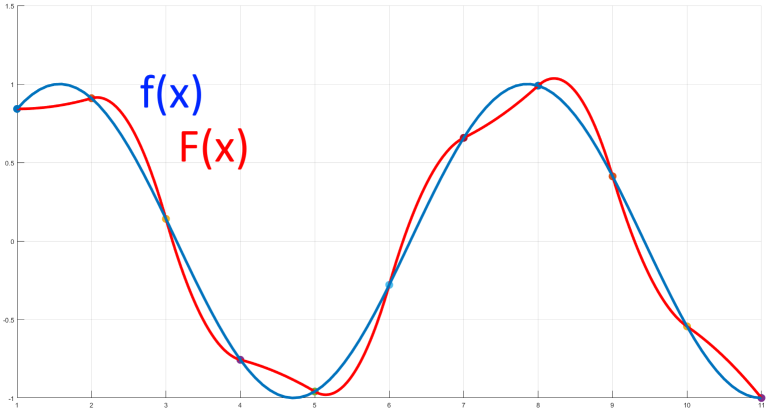
- Pochodna wielomianu $S_i(x)$: $S_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i)$.
- Pochodna wielomianu $S_{i+1}(x)$: $S_{i+1}'(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_{i+1})$.
- Ciągłość pochodnych w węźle x_{i+1}: $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$
- $b_i + 2c_i(x - x_i) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_{i+1})$
- Ostatecznie: $b_i + 2c_i h = b_{i+1}$ (ponieważ $x_{i+1} - x_i = h$ i $x_{i+1} - x_{i+1} = 0$)

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (7)

- Mamy $3n - 1$ równań i $3n$ niewiadomych. **Brakuje** jednego równania.
- Możemy np. zapewnić ciągłość drugiej pochodnej w węźle granicznym między S_0 i S_1.
- Albo np. wymusić zerowanie się pierwszej pochodnej w x_0.
- Albo wymusić ciągłość drugiej pochodnej w każdym węźle granicznym. W tym przypadku otrzymujemy **nadokreślony** układ równań, który nie posiada jednoznacznego rozwiązania. Równań jest więcej, niż niewiadomych.
- **Jednak każdy z powyższych przypadków nie daje zadowalającego wyniku!**

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (8)

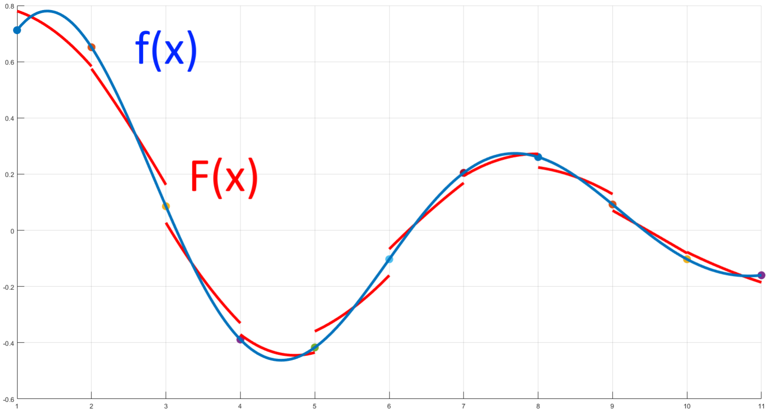
Pierwsza pochodna wielomianu w pierwszym węźle $= 0$.



Wielomiany na zmianę wypukłe/ wklęsłe. **Brak ciągłości drugiej pochodnej!**

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (9)

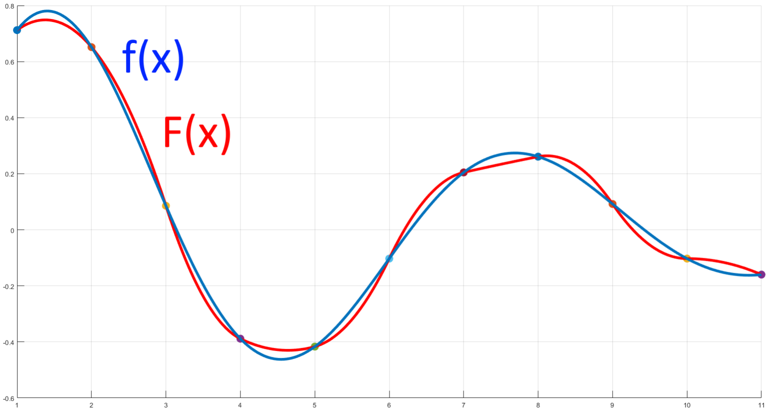
Nadokreślony układ równań.



Brak ciągłości.

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (10)

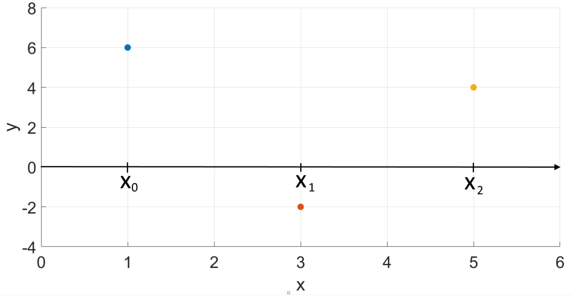
Ciągłość drugiej pochodnej w drugim węźle.



Wielomiany na zmianę wypukłe/ wklęsłe.

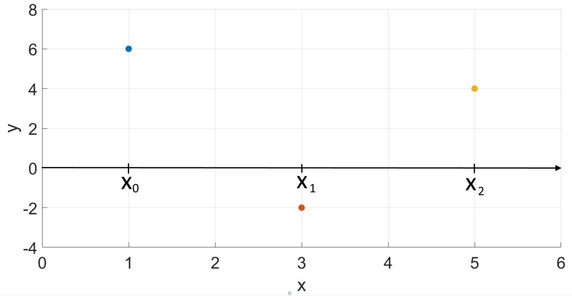
Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (11)

- Interpolacja wielomianami sklejanymi stopnia 1 i 2 **nie dawały zadowalających wyników**.
- Sprawdźmy wielomiany **trzeciego stopnia**. W *i*-tym podprzedziale wielomian ma postać: $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$
- Dla prostoty przeanalizujmy przypadek z 3 węzłami (2 podprzedziałami), podobnie jak na slajdzie (1).
- Funkcja interpolowana f(x) w węzłach przyjmuje wartości: $f(x_0) = 6, f(x_1) = -2, f(x_2) = 4$.



Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (12)

- Wielomian w podprzedziale: $[x_0, x_1]$
  - $S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$
- Wielomian w podprzedziale: $[x_1, x_2]$
  - $S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$
- W sumie mamy 8 współczynników $a_0, \ldots d_0, a_1, \ldots, d_1$.



Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (13)

Założenia:

- Zakładamy, że podprzedziały są równe, chociaż w ogólności nie muszą być: $x_1 - x_0 = h$, $x_2 - x_1 = h$
- $S(x_0)$ i $S(x_1)$ są wielomianami 3 stopnia,
- W węzłach ustalona wartość: $S_0(x_0) = f(x_0)$, **(1)**
- $S_0(x_1) = f(x_1)$, **(2)**
- $S_1(x_1) = f(x_1)$, **(3)**
- $S_1(x_2) = f(x_2)$, **(4)**
- Dla granicznego węzła ciągłość pierwszej pochodnej x_1: $S_0'(x_1) = S_1'(x_1)$, **(5)**
- Dla granicznego węzła ciągłość drugiej pochodnej x_1: $S_0''(x_1) = S_1''(x_1)$, **(6)**
- Na krańcach zerowanie drugiej pochodnej: $S_0''(x_0) = 0$ and $S_1''(x_2) = 0$, **(7)** i **(8)**

Razem: 8 niewiadomych współczynników i 8 równań.

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (14)

Zaczynamy od policzenia 1 i 2 pochodnej (używanych w (5-8))

- $S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$
- $S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$
- $S_0'(x) = b_0 + 2c_0(x - x_0) + 3d_0(x - x_0)^2$
- $S_1'(x) = b_1 + 2c_1(x - x_1) + 3d_1(x - x_1)^2$
- $S_0''(x) = 2c_0 + 6d_0(x - x_0)$
- $S_1''(x) = 2c_1 + 6d_1(x - x_1)$

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (15)

- Pamiętamy o tym, że $x_i - x_i = 0$ i $x_{i+1} - x_i = h$
- **(1)** $S_0(x_0) = f(x_0), \Rightarrow a_0 + b_0(x_0 - x_0) + c_0(x_0 - x_0)^2 + d_0(x_0 - x_0)^3 = f(x_0)$
  $a_0 = f(x_0)$
- **(2)** $S_0(x_1) = f(x_1), \Rightarrow a_0 + b_0 h + c_0 h^2 + d_0 h^3 = f(x_1)$
- **(3)** $S_1(x_1) = f(x_1), \Rightarrow a_1 = f(x_1)$
- **(4)** $S_1(x_2) = f(x_2), \Rightarrow a_1 + b_1 h + c_1 h^2 + d_1 h^3 = f(x_2)$
- **(5)** $S_0'(x_1) = S_1'(x_1)$ w $x_1 \Rightarrow$
  $b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) + 3d_0(x_1 - x_0)^2 = b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) + 3d_1(x_1 - x_1)^2$
  $b_0 + 2c_0 h + 3d_0 h^2 = b_1$
- **(6)** $S_0''(x_1) = S_1''(x_1)$ w $x_1 \Rightarrow$
  $2c_0 + 6d_0(x_1 - x_0) = 2c_1 + 6d_1(x_1 - x_1)$
  $2c_0 + 6d_0 h = 2c_1$
- **(7)** i **(8)** $S_0''(x_0) = 0$ and $S_1''(x_2) = 0$ pochodnej: $\Rightarrow$
  $c_0 = 0$
  $2c_1 + 6d_1 h = 0$

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (16)

Ostatecznie mamy układ 8 równań:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f(x_0) \\
a_0 + b_0 h + c_0 h^2 + d_0 h^3 &= f(x_1) \\
a_1 &= f(x_1) \\
a_1 + b_1 h + c_1 h^2 + d_1 h^3 &= f(x_2) \\
b_0 + 2c_0 h + 3d_0 h^2 &= b_1 \\
2c_0 + 6d_0 h &= 2c_1 \\
c_0 &= 0 \\
2c_1 + 6d_1 h &= 0
\end{aligned}
$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (17)

W formie macierzowej (dla czytelności zamiana wiersza (2) i (3)):

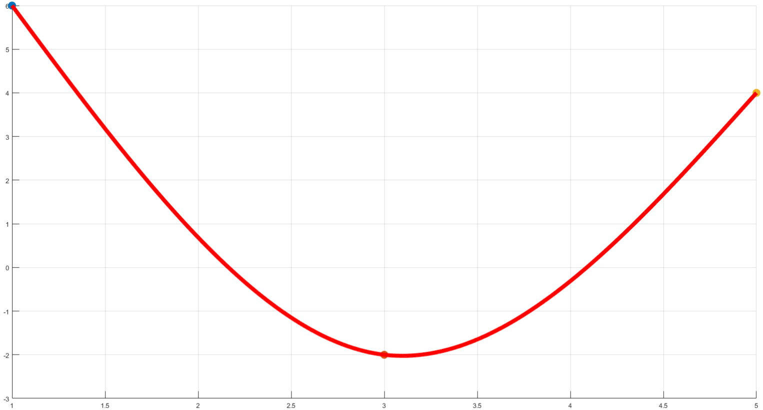
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu (jaką metodą?) układu równań, wektor rozwiązań ma postać:

$$\begin{bmatrix} 6.0000 & -5.7500 & 0 & 0.4375 & -2.0000 & -0.5000 & 2.6250 & -0.4375 \end{bmatrix}^T$$

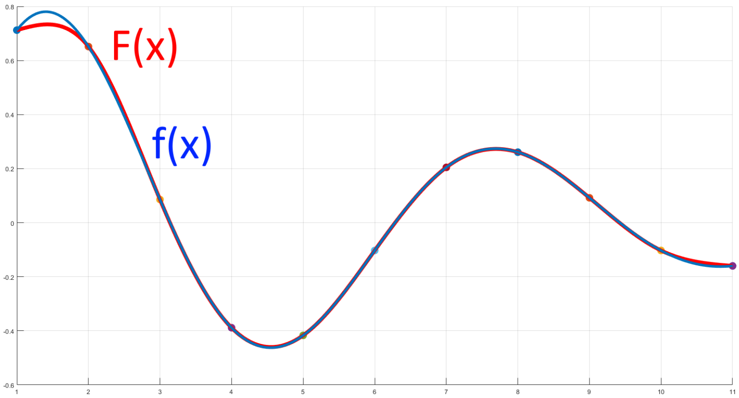
Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (18)

Dla 3 węzłów:



Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (19)

Funkcja $f(x) = e^{-x/6} \cdot sin(x)$ (10 podprzedziałów, 40 współczynników):



Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) (20)

Podobnie można stosować interpolacją funkcjami sklejanymi 3 stopnia dla n podprzedziałów ($n+1$ węzłów), według następujących wzorów:

- $S_j(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$
- $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$
- Dla węzłów wewnętrznych x_j: $S'_{j-1}(x_j) = S'_j(x_j), \quad j = 1, \ldots, n-1$
- Dla węzłów wewnętrznych x_j: $S''_{j-1}(x_j) = S''_j(x_j), \quad j = 1, \ldots, n-1$
- Na krawędziach: $S''_0(x_0) = 0$ i $S''_{n-1}(x_n) = 0$