Metody dokładne dla układów równań liniowych

Wykład z przedmiotu Metody numeryczne

Jakub Bielawski
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

9 października 2016

Metody dokładne dla układów równań liniowych

Plan wykładu:

1. Układy równań o macierzach trójkątnych
2. Metoda eliminacji Gaussa
3. Metoda Gaussa-Jordana
4. Rozkład macierzy na iloczyn macierzy trójkątnych
5. Metoda Cholesky'ego
6. Metoda Banachiewicza
7. Algorytm Google PageRank

Metody dokładne dla układów równań liniowych

W tym wykładzie zajmiemy się układami równań liniowych postaci

$$A \cdot X = B \tag{2.1}$$

gdzie A jest daną macierzą nieosobliwą wymiaru $n \times n$ (co, jak wiemy z algebry, oznacza, że układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie), $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$ jest wektorem niewiadomych, zas $B = [b_1, \ldots, b_n]^T$ jest wektorem danych wyrazów wolnych.

Układy równań o macierzach trójkątnych

Układy równań o macierzach trójkątnych są to układy równań liniowych (zapisane w postaci macierzowej):

$$U \cdot X = B$$

gdzie U jest macierzą górnie trójkątną.

Układy takie rozwiązujemy rozpoczynając od ostatniego równania. Następnie uzyskane wyniki wykorzystujemy w obliczeniach w równaniach znajdujacych się wyżej.

Przykład (*)

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -6 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ -3x_4 = 6 \end{cases}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa polega na sprowadzeniu układu równań liniowych (2.1) do postaci trójkątnej, a następnie rozwiązaniu go, analogicznie jak w przykładzie (*). Przez „sprowadzanie" rozumiemy wykonanie sekwencji następujących **operacji elementarnych** na macierzy uzupełnionej danego układu równań liniowych:

- Zamiana miejscami dwóch wierszy macierzy (czyli dwóch równań)
- Przemnożenie wybranego wiersza macierzy (równania układu) przez niezerową liczbę
- Dodanie do danego wiersza (równania) dowolnego innego wiersza (równania) przemnożonego przez stałą różną od zera

Przykład

Rozwiąż układ równań za pomocą metody eliminacji Gaussa:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

Metoda Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa-Jordana polega na wykorzystaniu operacji elementarnych do sprowadzenia układu równań liniowych (2.1) do postaci, w której macierz A tego układu jest macierzą przekątniową. Jeśli dodatkowo sprowadzimy macierz A do postaci jednostkowej, to docelowy wektor wyrazów wolnych będzie wektorem rozwiązania układu.

Przykład

Rozwiąż układ równań za pomocą metody Gaussa-Jordana:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

Rozkład macierzy na iloczyn macierzy trójkątnych

Twierdzenie

Jeżeli macierz A jest macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$, której wszystkie minory główne kątowe są różne od zera, to istnieją macierze trójkątna dolna L i trójkątna górna U (obie wymiaru $n \times n$), takie że:

$$A = L \cdot U \tag{2.2}$$

Uwaga

Podany w twierdzeniu rozkład nie jest jednoznaczny (istnieje wiele takich rozkładów), np.:

1. wersja Doolittle'a: $l_{ii} = 1$ dla wszsytkich $i = 1, \ldots, n$
2. wersja Croute'a: $u_{ii} = 1$ dla wszsytkich $i = 1, \ldots, n$

Przykład

Sprawdzić, czy podana macierz spełnia założenia twierdzenia o rozkładzie na iloczyn macierzy trójkątnych, a następnie przedstawić ją w postaci iloczynu macierzy trójkątnych:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozkład macierzy na iloczyn macierzy trójkątnych

Jeśli dodatkowo macierz A jest macierzą symetryczną, to można ją przedstawić jako iloczyn macierzy trójkątnych, z których jedna jest transponowana względem drugiej:

$$A = U^T \cdot U \tag{2.3}$$

Uwaga

W rozkładzie $A = U^T U$ tracimy możliwość zagwarantowania sobie, że na przekątnej macierzy trójkątnej górnej U będą same jedynki. Mimo to, dzięki temu, że kolumny macierzy U^T są równe odpowiednim wierszom macierzy U, możemy uzyskać taki rozkład znacznie szybciej (niż przy rozkładzie $A = LU$), gdyż i-tą kolumnę U^T i i-ty wiersz U obliczamy jednocześnie. Ponadto, algorytm rozkładu $A = U^T U$ jest dokładnie taki sam jak algorytm $A = LU$.

Przykład

Przedstawić podaną macierz w postaci iloczynu macierzy trójkątnych:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Metoda Cholesky'ego

Metoda Cholesky'ego polega na przedstawieniu układu równań $A \cdot X = B$ w postaci $L \cdot U \cdot X = B$ w wyniku rozkładu macierzy A na iloczyn macierzy trójkątnych $L \cdot U$. Jeśli wprowadzimy pomocniczy wektor zmiennych Y, to wyjściowy układ można sprowadzić do dwóch układów w postaci trójkątnej: $U \cdot X = Y$ i $L \cdot Y = B$. Najpierw rozwiązujemy ten drugi układ (otrzymując wektor Y), a następnie wynik podstawiamy do pierwszego układu, by obliczyć wektor niewiadomych X:

$$A \cdot X = B \Longleftrightarrow L \cdot U \cdot X = B \Longleftrightarrow L \cdot Y = B \quad \wedge \quad U \cdot X = Y \tag{2.4}$$

Przykład

Rozwiązać za pomocą metody Cholesky'ego układ równań:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_3 = 15 \end{cases}$$

Metoda Banachiewicza

Metoda Banachiewicza jest szczególną odmianą metody Cholesky'ego. Możemy jej użyć, kiedy macierz główna danego układu równań jest macierzą symetryczną (oraz jej wszystkie minory główne kątowe są niezerowe). Wykorzystujemy wtedy rozkład tej macierzy symetrycznej na iloczyn macierzy trójkątnych ($A = U^T U$):

$$A \cdot X = B \Longleftrightarrow U^T \cdot U \cdot X = B \Longleftrightarrow U^T \cdot Y = B \quad \wedge \quad U \cdot X = Y \tag{2.5}$$

Przykład

Rozwiązać za pomocą metody Banachiewicza układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 = 5 \\ -2x_1 + 24x_3 = 12 \end{cases}$$

Algorytm Google Page Rank

W zadaniach związanych z algorytmem Google PageRank zajmujemy się zbiorem n stron internetowych, które oznaczamy liczbami naturalnymi od 1 do n. Celem takich zadań jest stworzenie ich rankingu, czyli uporządkowanie stron od najistotniejszej do najmniej istotnej, na podstawie zadanej struktury linków pomiędzy nimi.

Oznaczenia

- L_j – liczba linków wychodzących z j-tej strony
- $s_j \longrightarrow s_i$ – istnieje link ze strony j-tej do strony i-tej
- $P = [p_{ij}]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ – macierz prawdopodobieństw przejścia ze strony j-tej na stronę i-tą (**uproszczona macierz Google'a**):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{L_j} & \text{, gdy } s_j \longrightarrow s_i \\ \frac{1}{n} & \text{, gdy } L_j = 0 \\ 0 & \text{, w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Okazuje się, że wektorem rankingu jest dowolne rozwiązanie układu równań:

$$(P - I)w = 0 \tag{2.6}$$

gdzie I jest macierzą jednostkową o takich samych wymiarach co macierz P.

Algorytm Google Page Rank

Uwaga

- Równanie (2.6) ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są wzajemnie swoimi wielokrotnościami.
- Zawsze możemy wybrać rozwiązanie tego równania tak, aby wszystkie jego współrzędne były dodatnie, co zapewnia nam **twierdzenie Frobieniusa-Perrona**.
- Każde z takich rozwiązań daje co prawda inne wartości rankingu, ale takie same końcowe uporządkowanie stron (co jest celem zadania).
- Ze względu na fakt, że układ równań (2.6) ma nieskończenie wiele rozwiązań, za jedną ze współrzędnych wektora w można podstawić dowolną dodatnią (to ważne!) liczbę i odrzucić z układu jedno równanie, w którym ta współrzędna występuje z niezerowym współczynnikiem.

Przykład

Zapisać uproszczoną macierz Google'a dla sieci złożonej ze stron ponumerowanych od 1 do 4, połączonych następującymi linkami:
$1 \longrightarrow 2,\ 2 \longrightarrow 3,\ 3 \longrightarrow 1,\ 1 \longrightarrow 3,\ 3 \longrightarrow 4$