Spis treści

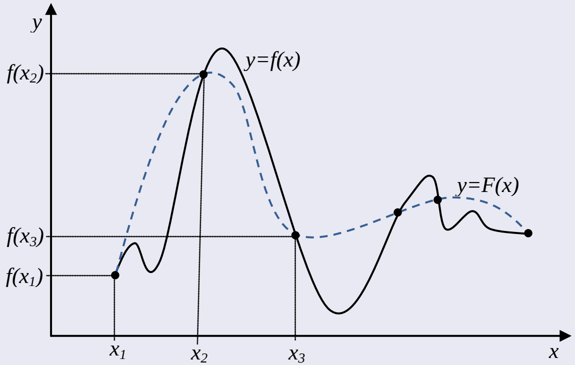
Spis treści

Spis treści

Literatura

1. Baron B., Piątek Ł., Metody numeryczne w C++ Builder, Helion, Gliwice, 2004
2. Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody numeryczne, WNT, Warszawa, 1993
3. Kosma Z., Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich, Politechnika Radomska, Radom, 2008
4. Povstenko J., Wprowadzenie do metod numerycznych, Akademicka Oficyna Wydawnicza Exit, Warszawa, 2005
5. Ralston A., Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa, 1983
6. Kącki E., Małolepszy A., Romanowicz A., Metody numeryczne dla inżynierów, Wyższa Szkoła Informatyki w Łodzi, Łódź, 2005
7. Vetterling W.T., Teukolsky S.A., Press W.H., Flannery B.P., Numerical Recipes, Cambridge University Press, 2003
8. Wikipedia

Sformułowanie zagadnienia interpolacji



Rys. 1: $F(x)$ – funkcja interpolująca funkcję $f(x)$

Interpolacja – co to takiego?

To zagadnienie odwrotne do tablicowania funkcji: mając zbiór węzłów znaleźć wszystkie pozostałe wartości funkcji.

Funkcji interpolującej poszukuje się najczęściej w postaci:

- wielomianów algebraicznych
- wielomianów trygonometrycznych
- funkcji sklejanych (splines)

Interpolacja wielomianami

Twierdzenie 1

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n ($n \geq 0$), który w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Poszukujemy wielomianu spełniającego nasze oczekiwania!

Spis treści

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Gdy znamy wartości funkcji $f(x)$ w n węzłach, to poszukujemy wielomianu, stopnia co najwyżej n, w postaci

$$W_n(x) = y_0\Phi_0(x) + y_1\Phi_1(x) + \ldots + y_n\Phi_n(x) \tag{1}$$

gdzie $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)$ – wielomiany stopnia co najwyżej n. Dla każdego $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ mamy

$$W_n(x_i) = y_0\Phi_0(x_i) + y_1\Phi_1(x_i) + \ldots + y_n\Phi_n(x_i) \tag{2}$$

skąd wynika

$$\Phi_j(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq i \\ 1, & \text{gdy } j = i \end{cases} \tag{3}$$

Poszukajmy wielomianu spełniającego ten warunek.

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Postać kanoniczna takiego wielomianu:

$$\Phi_j(x) = \lambda(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n) \quad (4)$$

Ponieważ $\Phi_j(x_j) = 1$, więc

$$1 = \lambda(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n) \quad (5)$$

skąd wyznaczmy λ. Zatem

$$\Phi_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)} \quad (6)$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Poszukiwany wielomian ma postać

$$
\begin{aligned}
W_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\
+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \\
+ y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} = \\
= \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Po podstawieniu $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ mamy

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega_n'(x_j)} \tag{8}$$

gdzie $y_j = y(x_j)$, a $\omega_n'(x_j)$ – pochodna wielomianu $\omega_n(x_j)$ w punkcie x_j.

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Zadanie domowe

Znaleźć wielomian interpolacyjny funkcji przyjmującej w punktach $-2, 2, 1, 4$ wartości $3, 1, -3, 8$.

Odpowiedź: $W_3(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{25}{6}x + 6$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Z jaka dokładnością wzór interpolacyjny (7) przybliża funkcję $f(x)$ poza węzłami?

Odpowiedź daje wzór

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)| \tag{9}$$

gdzie

$$M_{n+1} = \sup_{x \in [a;b]} |F^{n+1}(x)| \tag{10}$$

kres górny modułu $(n+1)$-szej pochodnej funkcji $F(x)$ na przedziale $[a;b]$.

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Optymalny dobór węzłów

Wykorzystamy podejście P.L. **Czebyszewa** do znajdowania wielomianu algebraicznego najlepiej przybliżającego zero w zadanym przedziale. W tym zadaniu wykorzystuje się ***wielomiany Czebyszewa*** w postaci

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{11}$$

Wielomian ten jest identyczny z pewnym wielomianem algebraicznym na przedziale $[-1;1]$:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= \cos(\arccos x) = x \\ &\dots \\ T_n(x) &= 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\,, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \tag{12}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Wielomiany Czebyszewa

Każdy wielomian (11) stopnia n ma n różnych pierwiastków w punktach

$$x_m = \cos\left(\frac{2m+1}{2n}\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{13}$$

zawartych w przedziale $[-1;1]$. Współczynnik przy najwyższej potędze w $T_n(x)$ wynosi 2^{n-1}. My szukamy wielomianu, którego współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1, więc

$$T^\star_{n+1} = \frac{1}{2^n}\, T_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) \tag{14}$$

gdzie x_m – pierwiastki wielomianu $T_{n+1}(x)$.

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Wielomiany Czebyszewa

Sprowadzenie każdego $x \in [a; b]$ do $z \in [-1; 1]$ i odwrotnie:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)z + (b+a)], \quad z = \frac{1}{b-a}(2x - b - a) \tag{15}$$

Węzły w przedziale $[-1; 1]$ nie są niestety rozmieszczone w równych odstępach, ale zagęszczone przy końcach przedziału:

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\frac{2m+1}{2n+2}\pi + (b+a)\right] \tag{16}$$

dla $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Wielomiany Czebyszewa

Z tymi węzłami dostajemy lepsze oszacowanie błędu

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \tag{17}$$

ale błąd nie ulega zmniejszeniu (na ogół).

Spis treści

Wzór interpolacyjny Newtona

dla nierównych odstępów argumentu

Założenie: w dyskretnym zbiorze punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Odległości miedzy punktami na ogół są zmienne, oraz $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{18}$$

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \ldots, f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{19}$$

to **ilorazy różnicowe pierwszego rzędu**. Analogicznie definiujemy **ilorazy różnicowe drugiego rzędu**.

Wzór interpolacyjny Newtona

dla nierównych odstępów argumentu

Ilorazy różnicowe drugiego rzędu

$$f(x_0;x_1;x_2) = \frac{f(x_1;x_2) - f(x_0;x_1)}{x_2 - x_0} \tag{20}$$

$$\dots$$

Ilorazy różnicowe n-tego rzędu

$$f(x_i;x_{i+1};\dots;x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1};x_{i+2};\dots;x_{i+n}) - f(x_i;x_{i+1};\dots;x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i} \tag{21}$$

dla $n = 1, 2, \dots$ oraz $i = 0, 1, 2, \dots$

Wzór interpolacyjny Newtona

dla nierównych odstępów argumentu

Można pokazać, że

$$W_n(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)\omega_0(x) + f(x_0;x_1;x_2)\omega_1(x) + \\ + \ldots + f(x_0;x_1;\ldots;x_n)\omega_{n-1}(x) \tag{22}$$

gdzie, jak pamiętamy

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

Zadanie domowe: Napisać wzór interpolacyjny Newtona dla funkcji określonej tablicą wartości:
$f(0) = 1,\ f(2) = 3,\ f(3) = 2,\ f(4) = 5,\ f(6) = 7\,.$

Odp.: $f(x) = -\frac{2}{9}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{88}{9}x^2 + \frac{35}{3}x + 1$

Spis treści

Różnice progresywne i wsteczne

Różnice progresywne

$$x_1 = x_0 + h\,, \quad x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh$$

Różnica progresywna funkcji $f(x)$ rzędu 1

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{23}$$

Różnica progresywna funkcji $f(x)$ rzędu n

$$\Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f)\,, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{24}$$

Zadanie domowe: Obliczyć różnice progresywne wielomianu $W_4(x) = x^4 - x - 1$ aż do osiągnięcia zera. Jakiego rzędu jest ta zerowa różnica?

Różnice progresywne i wsteczne

Różnice progresywne – właściwości

$$\Delta(g_k \pm f_k) = \Delta(g_k) \pm \Delta(f_k)$$
$$\Delta(af_k) = a\,\Delta(f_k)$$
$$\Delta^m(\Delta^n f_k) = \Delta^{m+n} f_k$$
$$\Delta[g(x_k) \cdot f(x_k)] = g(x_{k+1})\Delta f(x_k) + f(x_{k+1})\Delta g(x_k)$$
$$\Delta \frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{\Delta f(x_k)\, g(x_k) - f(x_k)\, \Delta g(x_k)}{g(x_{k+1}) g(x_k)}$$

Różnice progresywne i wsteczne

Różnice wsteczne

Różnica wsteczna funkcji $f(x)$ rzędu 1

$$\nabla f(x_i) = \Delta f(x_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1}), \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n \tag{25}$$

Różnica wsteczna funkcji $f(x)$ rzędu n

$$\nabla^k f(x_i) = \nabla^{k-1} f(x_i) - \nabla^{k-1} f(x_{i-1}) \tag{26}$$

gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots, n$; $i = k, k+1, \ldots, n$, przy czym $\nabla^0 f(x_i) = f(x_i)$. Ponadto

$$\nabla^k f(x_i) = \Delta^k f(x_i - k), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{27}$$

Spis treści

Wzór interpolacyjny Newtona

dla równych odstępów argumentu

Założenia: zadana jest tablica dyskretnych wartości funkcji $f(x)$

$$y_i = f(x_i)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

przy czym punkty (x_i) są rozmieszczone w jednakowych od siebie odległościach $h = \text{const}$

$$x_i = x_0 + i\,h\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Wzór interpolacyjny Newtona

dla równych odstępów argumentu

Jeśli powyższe założenia są spełnione, to otrzymujemy **pierwszy wzór interpolacyjny Newtona (na interpolację wprzód)**

$$W_n(x) = W_n(x_0 + qh) = y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{28}$$

gdzie

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

Drugi wzór interpolacyjny Newtona

na interpolacje wstecz

Pierwszy wzór interpolacyjny Newtona jest niedogodny w pobliżu końca tablicy dyskretnych wartości funkcji. By to ulepszyć stosuje się inny wzór: **drugi wzór interpolacyjny Newtona (na interpolacje wstecz)**

$$W_n(x) = f(x_0) - q\nabla f(x_0) + \frac{q(q-1)}{2}\nabla^2 f(x_0) - \ldots + (-1)^n \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\nabla^n f(x_0) \quad (29)$$

gdzie

$$q = \frac{x_0 - x}{h}$$

Spis treści

Zbieżność procesów interpolacyjnych

Zwiększenie liczby węzłów nie zawsze polepsza jakość interpolacji.
Przykład: $f(x) = |x|$, dla $x \in [-1; 1]$.
Wielomiany interpolacyjne

$$n = 2 \quad x_0 = -1\,,\ h = 1$$

$$W_2(x) = x^2$$

$$n = 4 \quad x_0 = -1\,,\ h = 1/2$$

$$W_4(x) = -\frac{4}{3}x^4 + \frac{7}{3}x^2$$

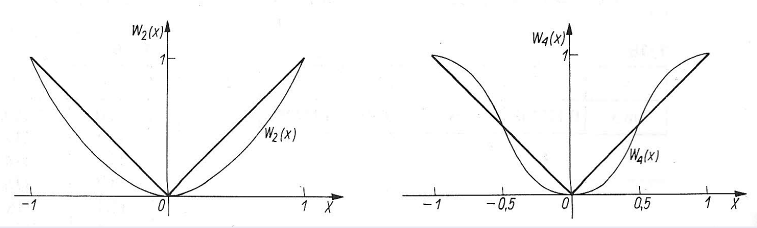
Zbieżność procesów interpolacyjnych

n=10 $x_0 = -1\,,\ h = 1/5$

$$W_{10} = \frac{390625}{5184}x^{10} - \frac{1015625}{6048}x^8 + \frac{221875}{1728}x^6 + \frac{6835}{162}x^4 + \frac{11527}{1792}x^2$$

Zbieżność procesów interpolacyjnych

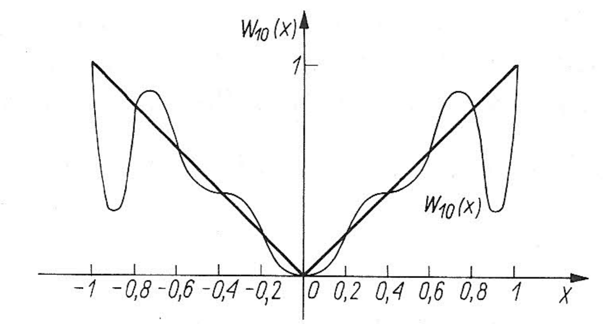
Zwiększanie stopnia wielomianu interpolacyjnego



Rys. 2: Wykresy wielomianów $W_2(x)$ i $W_4(x)$

Zbieżność procesów interpolacyjnych

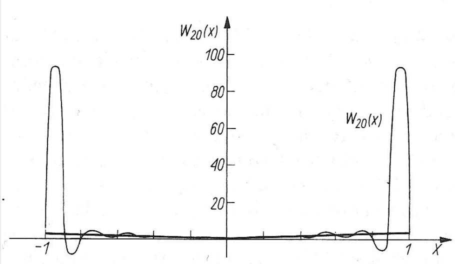
Zwiększanie stopnia wielomianu interpolacyjnego



Rys. 3: Wykres wielomianu $W_{10}(x)$

Zbieżność procesów interpolacyjnych

Zwiększanie stopnia wielomianu interpolacyjnego



Rys. 4: Wykres wielomianu $W_{20}(x)$

Zbieżność procesów interpolacyjnych

Wada funkcji $f(x) = |x|$ – pochodna w punkcie $x = 0$ nie istnieje.

Ale inna funkcja bez tej wady, np. $y = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ zachowuje się równie źle na końcach przedziału.

Obserwowany efekt to tzw. **efekt Rungego**. Ale jak widać, interpolacja w środkowych częściach przedziału $[x_0; x_n]$ jest bardzo dobra i bardzo użyteczna.

Ulepszenie: interpolacja przedziałowa (np. wielomianami stopnia drugiego).

Funkcje sklejane

Przedział $[a; b]$ dzielimy na n podprzedziałów. Podział ten określamy symbolem Δ_n.
Funkcję $S_m \ni s(x) = s(x, \Delta_n)$ określona na przedziale $[a; b]$ nazywamy **funkcją sklejaną stopnia** m ($m \geq 1$), jeżeli

1. $s(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m na każdym podprzedziale $(x_i; x_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$
2. $s(x) \in C^{m-1}([a; b])$

Punkty x_i nazywamy **węzłami funkcji sklejanej**.
Zbudujemy $\Phi_i^3(x)$ bazę przestrzeni $S_3(\Delta_n)$ funkcji $s(x)$ stopnia trzeciego z węzłami równoodległymi

$$x_i = x_0 + i\,h\,, \quad h = \frac{b-a}{n}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Funkcje sklejane

Definicja funkcji $\Phi_i^3(x)$, $i = -1, 0, 1, \ldots, n, n+1$

$$\Phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^2 & \text{dla } x \in [x_{i-2}; x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & \\ & \text{dla } x \in [x_{i-1}; x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & \\ & \text{dla } x \in [x_i; x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & \text{dla } x \in [x_{i+1}; x_{i+2}] \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{30}$$

Funkcje sklejane

	x_{j-2}	x_{j-1}	x_j	x_{j+1}	x_{j+2}
$\Phi_j^3(x)$	0	1	4	1	0
$(\Phi_j^3(x))'$	0	$3/h$	0	$-3/h$	0
$(\Phi_j^3(x))''$	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0

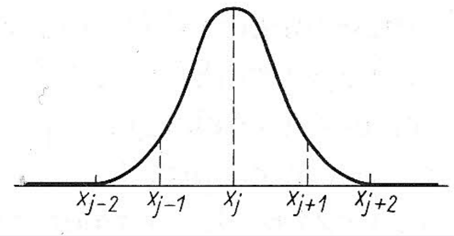
Wartości funkcji $\Phi_j^3(x)$ oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej

Funkcje $\Phi_i^3(x)$, $i = -1, 0, 1, \ldots, n+1$ określone na przedziale $[a, b]$ **stanowią bazę przestrzeni funkcji sklejanych trzeciego stopnia** $S_3(\Delta_n)$. Każdą funkcję $s(x) \in S_3(\Delta_n)$ można zatem przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \, \Phi_i^3(x) \,, \quad a \leq x \leq b \tag{31}$$

gdzie c_i – liczby rzeczywiste.

Funkcje sklejane



Rys. 5: Wykres funkcji sklejanej $\Phi_i^3(x)$

Interpolacja funkcjami sklejanymi

Funkcję $s(x) \in S_3(\Delta_n)$ nazywamy **interpolacyjną funkcją sklejaną trzeciego stopnia** dla funkcji $f(x)$, jeżeli

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n; \quad n \geq 2 \tag{32}$$

Z warunków dotyczących samych funkcji sklejanych trzeciego stopnia oraz ich pierwszych i drugich pochodnych wynika, że interpolacyjną funkcją sklejaną dla węzłów rozłożonych nierównomiernie można przedstawić w postaci

$$s(x) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + A_j(x - x_{j-1}) + B_j \tag{33}$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi

gdzie $M_j = s''(x_j)\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n\,,$ oraz

$$A_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1})\,, \quad B_j = y_{j-1} - M_j \frac{h_j^2}{6} \tag{34}$$

Ponadto M_j musza spełniać jeszcze $(n-1)$ równań

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j\,, \quad j = 1, \ldots, n-1 \tag{35}$$

gdzie $\lambda_j = \dfrac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}\,,\ \mu_j = 1 - \lambda_j\,,$

$$d_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right) = 6\, f(x_{j-1}; x_j; x_{j+1})$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi

Ostatecznie można je zapisać w postaci równania macierzowego.

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & 0 & 0 & \dots & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (36)$$

Macierz współczynników jest trójdiagonalna, silnie diagonalnie dominująca (moduły elementów leżących na głównej przekątnej są większe od sumy pozostałych elementów) co gwarantuje jednoznaczność rozwiązania.

Koniec? :-(

Koniec wykładu 6