Seria zadań nr 5 z Metod Numerycznych

Michał Bernardelli

Zadanie 1
Niech $Q_\theta(f) = Af(0)+Bf(\theta)$ *będzie kwadraturą przybliżającą całkę* $\int_0^1 f(x)\,dx$ *dla parametru* $\theta \in [0,1]$. *Wyznaczyć* θ, A *i* B *takie, aby rząd kwadratury* $Q_\theta(f)$ *był możliwie najwyższy. Podać ten rząd.*

Zadanie 2
Niech $Q_\theta(f) = Af(a)+Bf(\theta)$ *będzie kwadraturą przybliżającą całkę* $\int_a^b f(x)\,dx$ *dla parametru* $\theta \in [a,b]$. *Znaleźć takie* A, B *i* θ, *aby rząd kwadratury* $Q_\theta(f)$ *był możliwie najwyższy. Podać ten rząd.*
Wskazówka: można skorzystać z wyników poprzedniego zadania.

Zadanie 3 (kwadratura prostokątów)
Znaleźć współczynniki kwadratury interpolacyjnej opartej na węźle $x_0 = \frac{a+b}{2}$ *o maksymalnym możliwym rzędzie. Ile wynosi ten rząd?*

Zadanie 4 (złożona kwadratura prostokątów)
W celu obliczenia całki $\int_a^b f\,dx$ *podzielono przedział* $[a,b]$ *na* N *części*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

i w każdej z tych części zastosowano kwadraturę prostokątów:

$$Q(f, x_{i-1}, x_i) = (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Wyznaczyć współczynniki A_j^N *i węzły* y_j *powstałej w ten sposób kwadratury złożonej*

$$T_N(f) = \sum_{i=1}^{N} Q(f, x_{i-1}, x_i) = \sum_{j=0}^{N} A_j^N f(y_j).$$

Wiedząc, że absolutny błąd kwadratury prostokątów dla funkcji $f \in C^2([c,d])$ *jest równy* $\frac{1}{24}(d-c)^3 f''(\xi)$ *dla pewnego* $\xi \in [c,d]$ *oszacować błąd* $|T_N(f) - I(f)|$ *dla* $f \in C^2([a,b])$. *Jaka będzie postać błędu dla podziału równomiernego?*

Zadanie 5
Niech $\alpha \in (0,1)$. *Znaleźć* α, A_1, A_2 *żeby rząd kwadratury* Q_α

$$Q_\alpha(f) \sim I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

był możliwie największy, jeśli

$$Q_\alpha = A_1 f(\alpha) + A_2 f\left(\frac{2}{3}\right).$$

Wyznaczyć ten rząd.

Zadanie 6

Dla ustalonego $h > 0$

$$Q(f) = Af(-h) + Bf(d) + Cf(h) \approx I(f) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx$$

znaleźć A, B, C *i* d *takie, aby rząd kwadratury* $Q(f)$ *był możliwie najwyższy. Podać ten rząd.*
Korzystając z powyższej kwadratury skonstruować kwadraturę złożoną dla obliczania $\int_a^b f(x)\,dx$ *opartą na podziale odcinka* $[a, b]$ *na* N *równych części.*

Zadanie 7

Niech $Q(f) = Af(\alpha) + Bf(\beta) + Cf(\gamma)$ *będzie kwadraturą przybliżającą całkę*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,dx.$$

Znaleźć takie A, B, C, α, β *i* γ, *aby rząd kwadratury* $Q(f)$ *był możliwie najwyższy. Podać ten rząd.*
Wskazówka: wykorzystać wielomiany Czebyszewa.