SVD

Metody Numeryczne

dr eng. Grzegorz Fotyga

Gdańsk University of Technology
Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics
Department of Microwave and Antenna Engineering

8 czerwca 2018

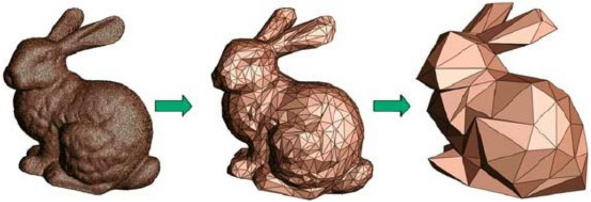
Tematy

1. Introduction
2. Operacje na wektorach
3. Ortogonalność
4. SVD

Wstęp (1)

SVD - **Singular Value Decomposition** - Rozkład na wartości osobliwe - jeden z *najpotężniejszych* i najbardziej przydatnych algorytmów. Stosowany w niemal wszystkich obszarach inżynierii danych,. m.in.:

- data analysis, big data, compression

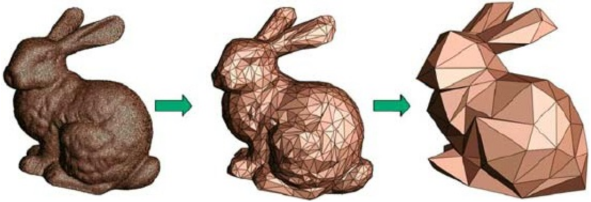


https://staff.imsa.edu/~fogel/LinAlg/PDF/50%20Application%20of%20the%20SVD.pdf

Wstęp (1)

SVD - **Singular Value Decomposition** - Rozkład na wartości osobliwe - jeden z *najpotężniejszych* i najbardziej przydatnych algorytmów. Stosowany w niemal wszystkich obszarach inżynierii danych,. m.in.:

- data analysis, big data, compression
- machine learning

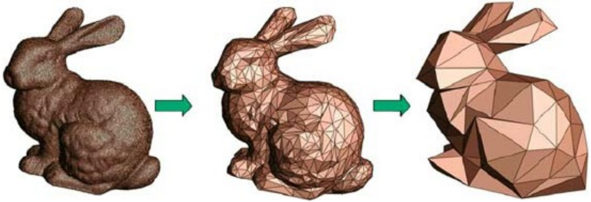


https://staff.imsa.edu/~fogel/LinAlg/PDF/50%20Application%20of%20the%20SVD.pdf

Wstęp (1)

SVD - **Singular Value Decomposition** - Rozkład na wartości osobliwe - jeden z *najpotężniejszych* i najbardziej przydatnych algorytmów. Stosowany w niemal wszystkich obszarach inżynierii danych,. m.in.:

- data analysis, big data, compression
- machine learning
- gene data analysis

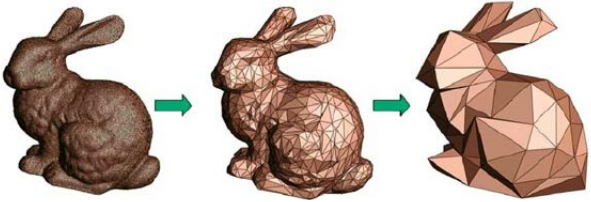


https://staff.imsa.edu/~fogel/LinAlg/PDF/50%20Application%20of%20the%20SVD.pdf

Wstęp (1)

SVD - **Singular Value Decomposition** - Rozkład na wartości osobliwe - jeden z *najpotężniejszych* i najbardziej przydatnych algorytmów. Stosowany w niemal wszystkich obszarach inżynierii danych,. m.in.:

- data analysis, big data, compression
- machine learning
- gene data analysis
- model-order reduction + simulation (acoustics, electrodynamics, mechanics...)

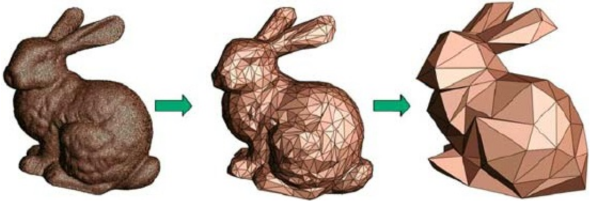


https://staff.imsa.edu/~fogel/LinAlg/PDF/50%20Application%20of%20the%20SVD.pdf

Wstęp (1)

SVD - **Singular Value Decomposition** - Rozkład na wartości osobliwe - jeden z *najpotężniejszych* i najbardziej przydatnych algorytmów. Stosowany w niemal wszystkich obszarach inżynierii danych,. m.in.:

- data analysis, big data, compression
- machine learning
- gene data analysis
- model-order reduction + simulation (acoustics, electrodynamics, mechanics...)
- least squares solution, matrix pseudo-inverse

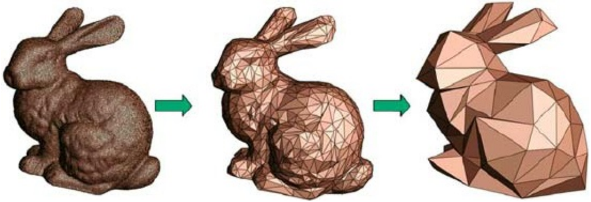


https://staff.imsa.edu/~fogel/LinAlg/PDF/50%20Application%20of%20the%20SVD.pdf

Wstęp (1)

SVD - **Singular Value Decomposition** - Rozkład na wartości osobliwe - jeden z *najpotężniejszych* i najbardziej przydatnych algorytmów. Stosowany w niemal wszystkich obszarach inżynierii danych,. m.in.:

- data analysis, big data, compression
- machine learning
- gene data analysis
- model-order reduction + simulation (acoustics, electrodynamics, mechanics...)
- least squares solution, matrix pseudo-inverse
- condition of a matrix (linear dependence)

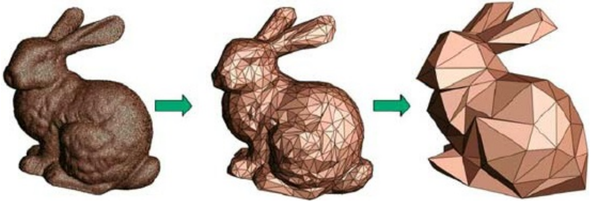


https://staff.imsa.edu/~fogel/LinAlg/PDF/50%20Application%20of%20the%20SVD.pdf

Wstęp (1)

SVD - **Singular Value Decomposition** - Rozkład na wartości osobliwe - jeden z *najpotężniejszych* i najbardziej przydatnych algorytmów. Stosowany w niemal wszystkich obszarach inżynierii danych,. m.in.:

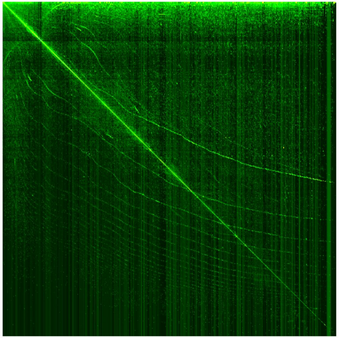
- data analysis, big data, compression
- machine learning
- gene data analysis
- model-order reduction + simulation (acoustics, electrodynamics, mechanics...)
- least squares solution, matrix pseudo-inverse
- condition of a matrix (linear dependence)
- **wiele** innych...



https://staff.imsa.edu/~fogel/LinAlg/PDF/50%20Application%20of%20the%20SVD.pdf

Wstęp (2)

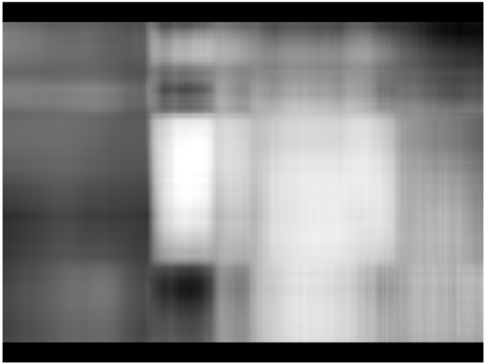
- **Web searching** Search engines like Google use enormous matrices of cross -references—which pages link to which other pages, and what words are on each page. (...) But there are billions of pages out there, and storing a billion by billion matrix is trouble, not to mention searching through it.
  $\Rightarrow$ **Here is where SVD shines.**



https://staff.imsa.edu/~fogel/LinAlg/PDF/50%20Application%20of%20the%20SVD.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/Google_matrix#/media/File:Googlematrixcambridge2006.jpg

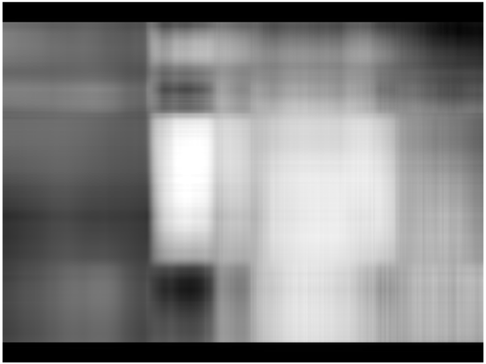
Wstęp (2)

- Skupimy się na image processing.



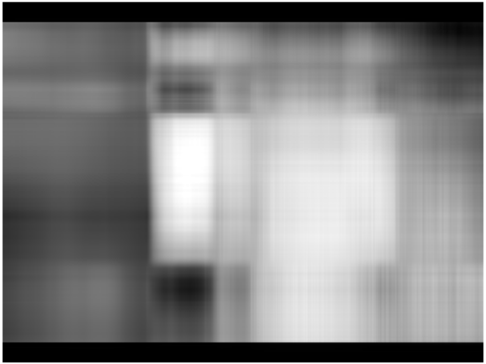
Wstęp (2)

- Skupimy się na image processing.
- Czyja to **twarz**?



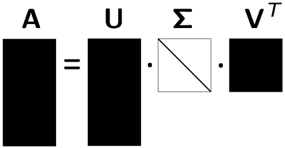
Wstęp (2)

- Skupimy się na image processing.
- Czyja to **twarz**?
- Żeby odpowiedzieć na pytanie - zwiększymy dokładność kompresji. Ale dopiero za tydzień.



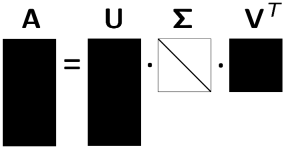
Wstęp (3)

- **SVD** - stosowane zarówno do macierzy **rzeczywistych** i **urojonych**.



Wstęp (3)

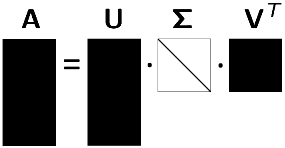
- **SVD** - stosowane zarówno do macierzy **rzeczywistych** i **urojonych**.
- Skupimy się tylko na rzeczywistych, ponieważ w tym przypadku łatwiej jest interpretować (i wizualizować) wyniki



Wstęp (3)

- **SVD** - stosowane zarówno do macierzy **rzeczywistych** i **urojonych**.
- Skupimy się tylko na rzeczywistych, ponieważ w tym przypadku łatwiej jest interpretować (i wizualizować) wyniki
- SVD jest faktoryzacją (podobnie jak LU, QR, LDLT, Cholesky etc.)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \tag{1}$$

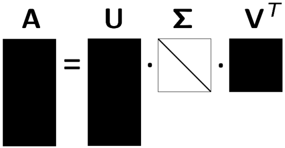


Wstęp (3)

- **SVD** - stosowane zarówno do macierzy **rzeczywistych** i **urojonych**.
- Skupimy się tylko na rzeczywistych, ponieważ w tym przypadku łatwiej jest interpretować (i wizualizować) wyniki
- SVD jest faktoryzacją (podobnie jak LU, QR, LDLT, Cholesky etc.)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \tag{1}$$

- gdzie

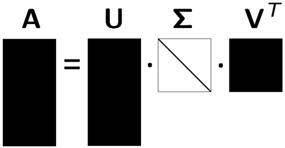


Wstęp (3)

- **SVD** - stosowane zarówno do macierzy **rzeczywistych** i **urojonych**.
- Skupimy się tylko na rzeczywistych, ponieważ w tym przypadku łatwiej jest interpretować (i wizualizować) wyniki
- SVD jest faktoryzacją (podobnie jak LU, QR, LDLT, Cholesky etc.)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T \tag{1}$$

- gdzie
  - **A** jest $m \times n$ macierzą

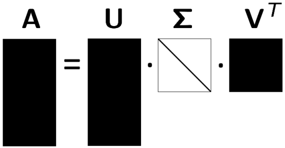


Wstęp (3)

- **SVD** - stosowane zarówno do macierzy **rzeczywistych** i **urojonych**.
- Skupimy się tylko na rzeczywistych, ponieważ w tym przypadku łatwiej jest interpretować (i wizualizować) wyniki
- SVD jest faktoryzacją (podobnie jak LU, QR, LDLT, Cholesky etc.)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T \tag{1}$$

- gdzie
  - **A** jest $m \times n$ macierzą
  - **U** jest $m \times n$ **ortogonalną** macierzą

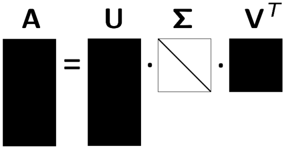


Wstęp (3)

- **SVD** - stosowane zarówno do macierzy **rzeczywistych** i **urojonych**.
- Skupimy się tylko na rzeczywistych, ponieważ w tym przypadku łatwiej jest interpretować (i wizualizować) wyniki
- SVD jest faktoryzacją (podobnie jak LU, QR, LDLT, Cholesky etc.)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (1)$$

- gdzie
  - **A** jest $m \times n$ macierzą
  - **U** jest $m \times n$ **ortogonalną** macierzą
  - $\mathbf{\Sigma}$ jest $n \times n$ **diagonalną** macierzą

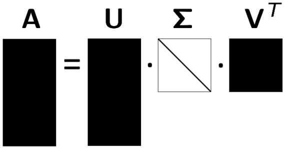


Wstęp (3)

- **SVD** - stosowane zarówno do macierzy **rzeczywistych** i **urojonych**.
- Skupimy się tylko na rzeczywistych, ponieważ w tym przypadku łatwiej jest interpretować (i wizualizować) wyniki
- SVD jest faktoryzacją (podobnie jak LU, QR, LDLT, Cholesky etc.)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \tag{1}$$

- gdzie
  - **A** jest $m \times n$ macierzą
  - **U** jest $m \times n$ **ortogonalną** macierzą
  - $\mathbf{\Sigma}$ jest $n \times n$ **diagonalną** macierzą
  - **V** jest $n \times n$ **ortogonalną** macierzą

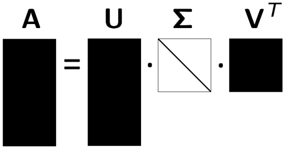


Wstęp (3)

- **SVD** - stosowane zarówno do macierzy **rzeczywistych** i **urojonych**.
- Skupimy się tylko na rzeczywistych, ponieważ w tym przypadku łatwiej jest interpretować (i wizualizować) wyniki
- SVD jest faktoryzacją (podobnie jak LU, QR, LDLT, Cholesky etc.)

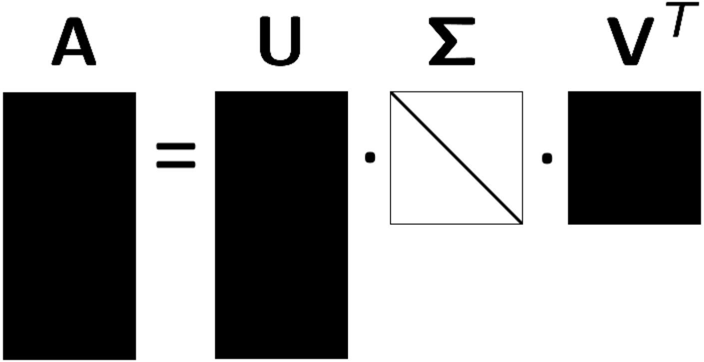
$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \tag{1}$$

- gdzie
  - **A** jest $m \times n$ macierzą
  - **U** jest $m \times n$ **ortogonalną** macierzą
  - **Σ** jest $n \times n$ **diagonalną** macierzą
  - **V** jest $n \times n$ **ortogonalną** macierzą
  - zakładamy $m > n$



Wstęp (4)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T$$



Jednak, zanim przejdziemy do SVD, musimy omówić parę **prostych** narzędzi, operacji.

Operacje na wektorach

1. Rozpatrzmy 2 wektory: $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Operacje na wektorach

1. Rozpatrzmy 2 wektory: **a** i **b** $\in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2. The *dot product* (iloczyn skalarny) w $\mathbb{R}^3$ przestrzeni (podobnie w przestrzeni $\mathbb{R}^n$):

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1, 3, 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (a_i b_i) = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 = 52$$

Operacje na wektorach

1. Rozpatrzmy 2 wektory: $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2. The *dot product* (iloczyn skalarny) w $\mathbb{R}^3$ przestrzeni (podobnie w przestrzeni $\mathbb{R}^n$):

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1, 3, 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (a_i b_i) = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 = 52$$

3. Rhe *outer product* (iloczyn diadyczny) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (podobnie w $\mathbb{R}^n$):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5, 4, 7, \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 7 \\ 5 \cdot 5 & 5 \cdot 4 & 5 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 15 & 12 & 21 \\ 25 & 20 & 35 \end{bmatrix}$$

Operacje na wektorach

1. Rozpatrzmy 2 wektory: **a** i **b** $\in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2. The *dot product* (iloczyn skalarny) w $\mathbb{R}^3$ przestrzeni (podobnie w przestrzeni $\mathbb{R}^n$):

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1, 3, 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (a_i b_i) = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 = 52$$

3. Rhe *outer product* (iloczyn diadyczny) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (podobnie w $\mathbb{R}^n$):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5, 4, 7, \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 7 \\ 5 \cdot 5 & 5 \cdot 4 & 5 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 15 & 12 & 21 \\ 25 & 20 & 35 \end{bmatrix}$$

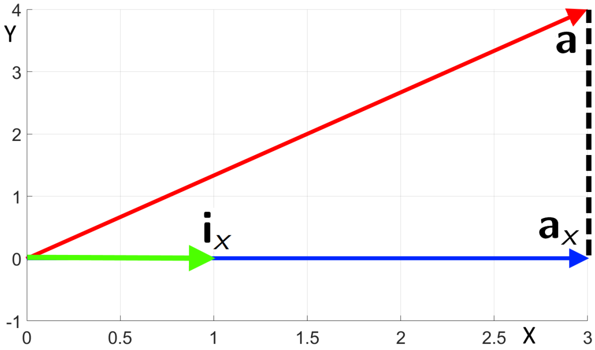
4. Wektor **a** jest znormalizowany (jednostkowy) jeżeli jego długość (moduł) jest równy 1. $\|\mathbf{a}\|_2 = 1$.

Operacje na wektorach - przykład

Wykorzystując iloczyn skalarny możemy wyznaczyć składową wektora w dowolnym kierunku. Projekcja **a** na kierunek $\mathbf{i}_x$ jest liczona w następujący sposób:

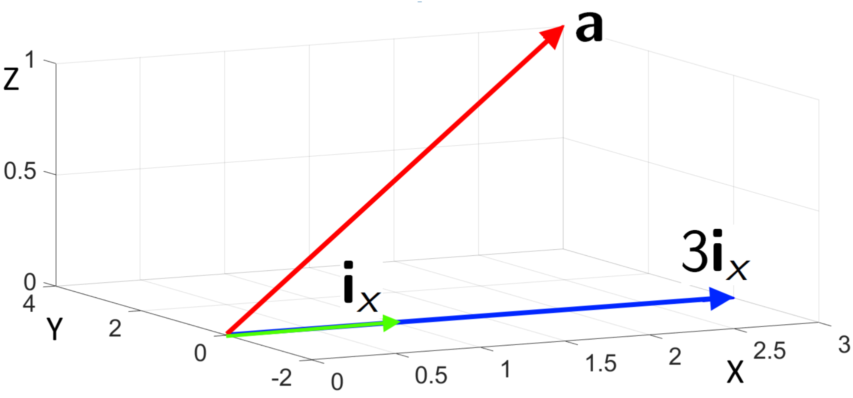
$$\mathbf{a}_x = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{i}_x)\mathbf{i}_x = ([3,4] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})[1,0]^T = 3[1,0]^T = [3,0]^T \tag{2}$$

Zauważ, że $\mathbf{i}_x$ to wektor jednostkowy:



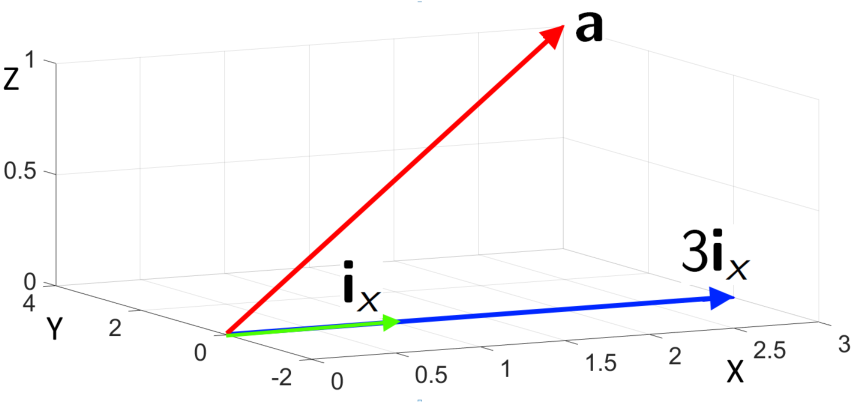
Operacje na wektorach - przykład

- Rozpatrzmy wektor $\mathbf{a} = [3, 4, 1]^T$. Obliczmy jego składową w kierunku $\mathbf{i}_x = [1, 0, 0]^T$. Zauważ, że $\mathbf{i}_x$ to wektor jednostkowy.



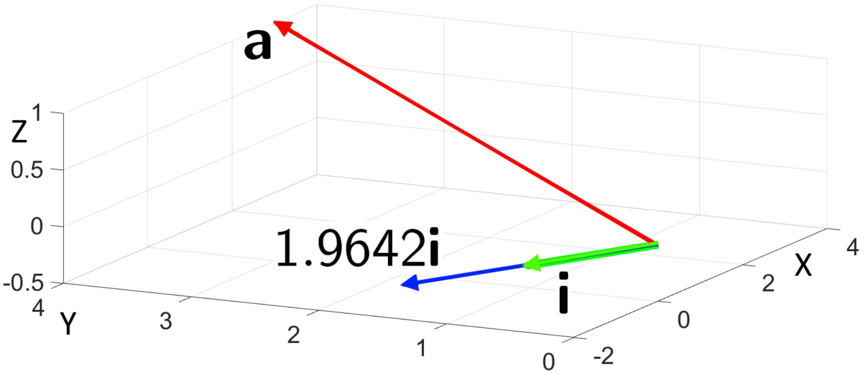
Operacje na wektorach - przykład

- Rozpatrzmy wektor $\mathbf{a} = [3, 4, 1]^T$. Obliczmy jego składową w kierunku $\mathbf{i}_x = [1, 0, 0]^T$. Zauważ, że $\mathbf{i}_x$ to wektor jednostkowy.
- W tym celu wykonajmy iloczyn skalarny: $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{i}_x = 3$. Składowa wektora $\mathbf{a}$ w kierunku $\mathbf{i}_x$ jest równa: $3\mathbf{i}_x = [3, 0, 0]$.



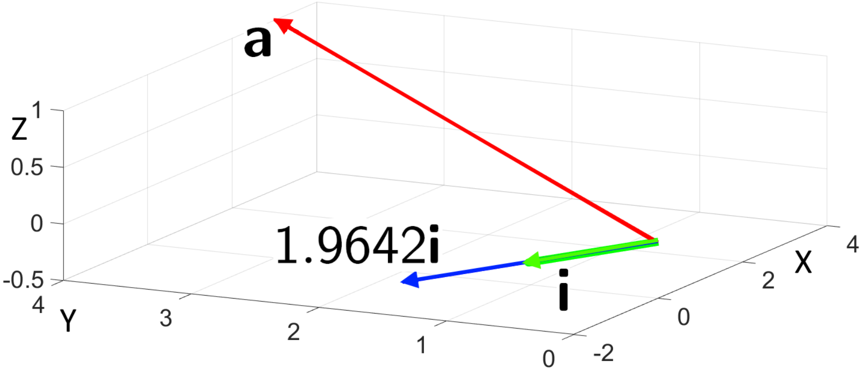
Operacje na wektorach - przykład

- Rozpatrzmy wektor $\mathbf{a} = [3, 4, 1]^T$. Obliczmy jego składową w kierunku $\mathbf{i} = [-0.4364, 0.8729, -0.2182]^T$. Zauważ, że $\mathbf{i}$ to wektor jednostkowy.



Operacje na wektorach - przykład

- Rozpatrzmy wektor $\mathbf{a} = [3, 4, 1]^T$. Obliczmy jego składową w kierunku $\mathbf{i} = [-0.4364, 0.8729, -0.2182]^T$. Zauważ, że $\mathbf{i}$ to wektor jednostkowy.
- W tym celu wykonajmy iloczyn skalarny: $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{i} = 1.9642$. Składowa wektora $\mathbf{a}$ w kierunku $\mathbf{i}$ jest równa: $1.9642\mathbf{i} = [-0.8572, 1.7146, -0.4286]$.



Operacje na wektorach - przykład

Zauważ, że powyższe (i kolejne) operacje są stosowane w *n*-wymiarowej przestrzeni ($\mathbb{R}^n$). Rozpatrujemy jedynie $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ ze względu na możliwość wizualizacji wyników i jasnej interpretacji.

Ortogonalność

- Para wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jest ortogonalna, jeżeli

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0$$

Ortogonalność

- Para wektorów **a** i **b** jest ortogonalna, jeżeli

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0$$

- Przykłady:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -14, 0, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -14 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1, 3, 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 0$$

Ortogonalność

- Para wektorów **a** i **b** jest ortogonalna, jeżeli

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0$$

- Przykłady:

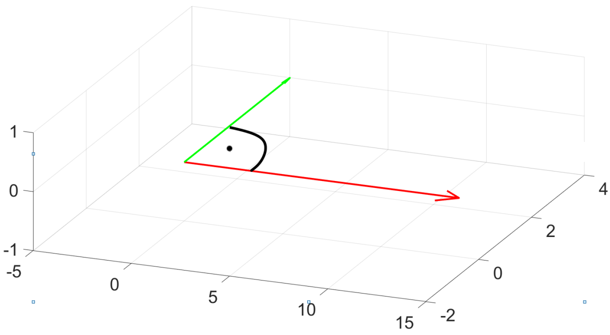
$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -14, 0, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -14 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 0$$

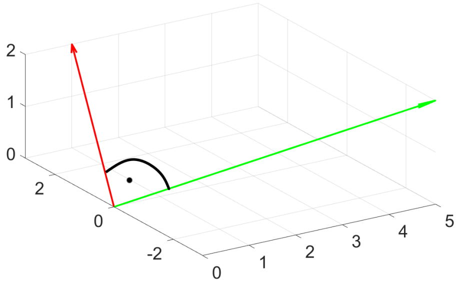
$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1, 3, 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 0$$

- Geometrycznie - wektory są **prostopadłe**.

Ortogonalność - przykład

Wizualizacja poprzedniego przypadku:





Ortogonalność (2)

- Dwie bazy $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ and $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_m]$ są ortogonalne, jeżeli $\mathbf{x}_i$ jest ortogonalny do $\mathbf{y}_j$, gdzie $0 \leqslant i \leqslant n$ i $0 \leqslant j \leqslant m$.

Ortogonalność (2)

- Dwie bazy $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ and $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_m]$ są ortogonalne, jeżeli $\mathbf{x}_i$ jest ortogonalny do $\mathbf{y}_j$, gdzie $0 \leqslant i \leqslant n$ i $0 \leqslant j \leqslant m$.
- Baza $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ jest ortogonalna, jeżeli jej wektory są parami ortogonalne

Ortogonalność (2)

- Dwie bazy $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ and $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_m]$ są ortogonalne, jeżeli $\mathbf{x}_i$ jest ortogonalny do $\mathbf{y}_j$, gdzie $0 \leqslant i \leqslant n$ i $0 \leqslant j \leqslant m$.
- Baza $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ jest ortogonalna, jeżeli jej wektory są parami ortogonalne
- Baza jest **ortonormalna** jeżeli jest ortogonalna i składa się z wektorów jednostkowych: $\|x_i\|_2 = 1$.

Ortogonalność (2)

- Dwie bazy $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ and $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_m]$ są ortogonalne, jeżeli $\mathbf{x}_i$ jest ortogonalny do $\mathbf{y}_j$, gdzie $0 \leqslant i \leqslant n$ i $0 \leqslant j \leqslant m$.
- Baza $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ jest ortogonalna, jeżeli jej wektory są parami ortogonalne
- Baza jest **ortonormalna** jeżeli jest ortogonalna i składa się z wektorów jednostkowych: $\|x_i\|_2 = 1$.
- Jeżeli baza $\mathbf{X}$ jest ortonormalna, to: $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}$

Ortogonalność (2)

- Dwie bazy $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ and $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_m]$ są ortogonalne, jeżeli $\mathbf{x}_i$ jest ortogonalny do $\mathbf{y}_j$, gdzie $0 \leqslant i \leqslant n$ i $0 \leqslant j \leqslant m$.
- Baza $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ jest ortogonalna, jeżeli jej wektory są parami ortogonalne
- Baza jest **ortonormalna** jeżeli jest ortogonalna i składa się z wektorów jednostkowych: $\|x_i\|_2 = 1$.
- Jeżeli baza $\mathbf{X}$ jest ortonormalna, to: $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}$
  - ponieważ $\mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{x}_j = 1$ jedynie gdy $i == j$.

Ortogonalność (2)

- Dwie bazy $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ and $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_m]$ są ortogonalne, jeżeli $\mathbf{x}_i$ jest ortogonalny do $\mathbf{y}_j$, gdzie $0 \leqslant i \leqslant n$ i $0 \leqslant j \leqslant m$.
- Baza $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ jest ortogonalna, jeżeli jej wektory są parami ortogonalne
- Baza jest **ortonormalna** jeżeli jest ortogonalna i składa się z wektorów jednostkowych: $\|x_i\|_2 = 1$.
- Jeżeli baza $\mathbf{X}$ jest ortonormalna, to: $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}$
  - ponieważ $\mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{x}_j = 1$ jedynie gdy $i == j$.
  - W innym przypadku: $\mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{x}_j = 0$

Ortogonalność (2)

- Dwie bazy $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ and $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_m]$ są ortogonalne, jeżeli $\mathbf{x}_i$ jest ortogonalny do $\mathbf{y}_j$, gdzie $0 \leqslant i \leqslant n$ i $0 \leqslant j \leqslant m$.
- Baza $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_n]$ jest ortogonalna, jeżeli jej wektory są parami ortogonalne
- Baza jest **ortonormalna** jeżeli jest ortogonalna i składa się z wektorów jednostkowych: $\|x_i\|_2 = 1$.
- Jeżeli baza $\mathbf{X}$ jest ortonormalna, to: $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}$
  - ponieważ $\mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{x}_j = 1$ jedynie gdy $i == j$.
  - W innym przypadku: $\mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{x}_j = 0$
  - W efekcie mamy 1 na diagonali i 0 w pozostałych miejscach macierzy. Powstaje więc **Macierz jednostkowa**

Ortogonalność - przykład

- Baza $\mathbf{X}$ jest ortonormalna (zawiera 3 wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^4$):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.5741 & -0.0549 & 0.1493 \\ -0.3714 & 0.8999 & -0.1449 \\ -0.5389 & -0.3895 & -0.6911 \\ -0.4920 & -0.1886 & 0.6922 \end{bmatrix}$$

Ortogonalność - przykład

- Baza $\mathbf{X}$ jest ortonormalna (zawiera 3 wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^4$):

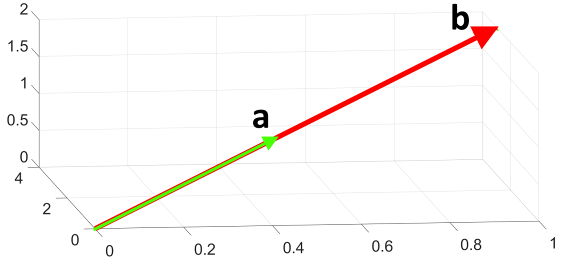
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.5741 & -0.0549 & 0.1493 \\ -0.3714 & 0.8999 & -0.1449 \\ -0.5389 & -0.3895 & -0.6911 \\ -0.4920 & -0.1886 & 0.6922 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

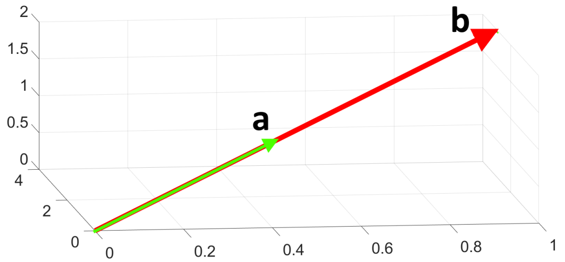
Ortogonalność (3)

- Innymi słowy, wektory z bazy **X** są liniowo niezależne (**linearly independent**) (!!!)



Ortogonalność (3)

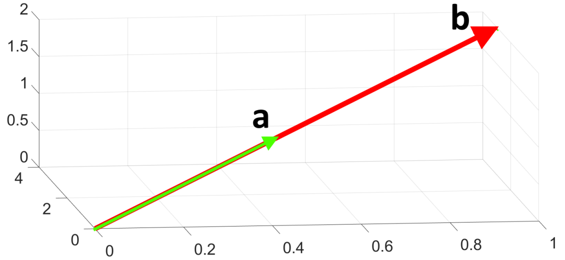
- Innymi słowy, wektory z bazy **X** są liniowo niezależne (**linearly independent**) (!!!)
- Dwa wektory są **liniowo zależne** jeżeli *wskazują ten sam kierunek*



Ortogonalność (3)

- Innymi słowy, wektory z bazy **X** są liniowo niezależne (**linearly independent**) (!!!)
- Dwa wektory są **liniowo zależne** jeżeli *wskazują ten sam kierunek*
- Równoważnie, 2 wektory **a** i **b** są **liniowo zależne** jeżeli istnieje skalar c, taki że:

$$\mathbf{a} = c\mathbf{b} \tag{3}$$

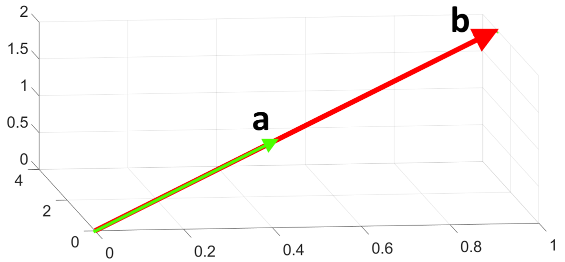


Ortogonalność (3)

- Innymi słowy, wektory z bazy $\mathbf{X}$ są liniowo niezależne (**linearly independent**) (!!!)
- Dwa wektory są **liniowo zależne** jeżeli *wskazują ten sam kierunek*
- Równoważnie, 2 wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są **liniowo zależne** jeżeli istnieje skalar c, taki że:

$$\mathbf{a} = c\mathbf{b} \tag{3}$$

- W przeciwnym przypadku wektory są **liniowo niezależne.**

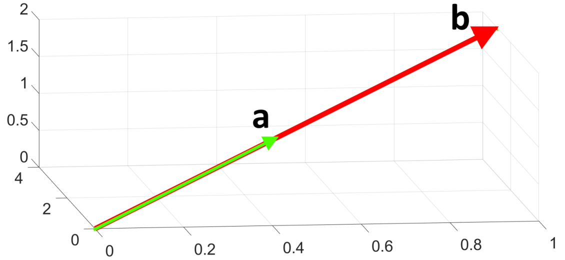


Ortogonalność (3)

- Innymi słowy, wektory z bazy $\mathbf{X}$ są liniowo niezależne (**linearly independent**) (!!!)
- Dwa wektory są **liniowo zależne** jeżeli *wskazują ten sam kierunek*
- Równoważnie, 2 wektory **a** i **b** są **liniowo zależne** jeżeli istnieje skalar c, taki że:

$$\mathbf{a} = c\mathbf{b} \tag{3}$$

- W przeciwnym przypadku wektory są **liniowo niezależne.**
- Przykład dwóch wektorów liniowo zależnych:



Ortogonalność (4)

Bardziej ogólnie:

- Baza wektorów jest **liniowo zależna** jeżeli co najmniej jeden wektor z bazy może być przedstawiony jako **kombinacja liniowa** pozostałych:

$$\mathbf{x}_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} c_k \mathbf{x}_k \tag{4}$$

gdzie c_i jest współczynnikiem.

Ortogonalność (4)

Bardziej ogólnie:

- Baza wektorów jest **liniowo zależna** jeżeli co najmniej jeden wektor z bazy może być przedstawiony jako **kombinacja liniowa** pozostałych:

$$\mathbf{x}_i = \sum_{k=1,k\neq i}^{n} c_k \mathbf{x}_k \tag{4}$$

  gdzie c_i jest współczynnikiem.

  - rozpatrzmy 3 wektory: $\mathbf{x}_1 = [1, 3, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [4, 1, 2]$, $\mathbf{x}_3 = [6, 7, 6]$.

Ortogonalność (4)

Bardziej ogólnie:

- Baza wektorów jest **liniowo zależna** jeżeli co najmniej jeden wektor z bazy może być przedstawiony jako **kombinacja liniowa** pozostałych:

$$\mathbf{x}_i = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} c_k \mathbf{x}_k \tag{4}$$

  gdzie c_i jest współczynnikiem.

  - rozpatrzmy 3 wektory: $\mathbf{x}_1 = [1, 3, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [4, 1, 2]$, $\mathbf{x}_3 = [6, 7, 6]$.
  - są one liniowo zależne, ponieważ: $\mathbf{x}_3 = 2 \cdot \mathbf{x}_1 + 1 \cdot \mathbf{x}_2$

Ortogonalność (4)

Bardziej ogólnie:

- Baza wektorów jest **liniowo zależna** jeżeli co najmniej jeden wektor z bazy może być przedstawiony jako **kombinacja liniowa** pozostałych:

$$\mathbf{x}_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} c_k \mathbf{x}_k \tag{4}$$

  gdzie c_i jest współczynnikiem.
  - rozpatrzmy 3 wektory: $\mathbf{x}_1 = [1, 3, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [4, 1, 2]$, $\mathbf{x}_3 = [6, 7, 6]$.
  - są one liniowo zależne, ponieważ: $\mathbf{x}_3 = 2 \cdot \mathbf{x}_1 + 1 \cdot \mathbf{x}_2$
- W przeciwnym przypadku są one **liniowo niezależne**.

Ortogonalność (4)

Bardziej ogólnie:

- Baza wektorów jest **liniowo zależna** jeżeli co najmniej jeden wektor z bazy może być przedstawiony jako **kombinacja liniowa** pozostałych:

$$\mathbf{x}_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} c_k \mathbf{x}_k \tag{4}$$

  gdzie c_i jest współczynnikiem.
  - rozpatrzmy 3 wektory: $\mathbf{x}_1 = [1, 3, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [4, 1, 2]$, $\mathbf{x}_3 = [6, 7, 6]$.
  - są one liniowo zależne, ponieważ: $\mathbf{x}_3 = 2 \cdot \mathbf{x}_1 + 1 \cdot \mathbf{x}_2$
- W przeciwnym przypadku są one **liniowo niezależne**.
- Czy można przedstawić jeden z poniższych wektorów jako kombinację liniową pozostałych dwóch? $\mathbf{x}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathbf{x}_2 = [0, 1, 0]$, $\mathbf{x}_3 = [0, 0, 1]$

Ortogonalność (4)

Bardziej ogólnie:

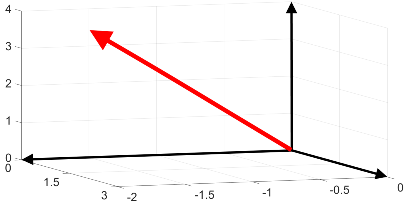
- Baza wektorów jest **liniowo zależna** jeżeli co najmniej jeden wektor z bazy może być przedstawiony jako **kombinacja liniowa** pozostałych:

$$\mathbf{x}_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} c_k \mathbf{x}_k \tag{4}$$

  gdzie c_i jest współczynnikiem.
  - rozpatrzmy 3 wektory: $\mathbf{x}_1 = [1, 3, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [4, 1, 2]$, $\mathbf{x}_3 = [6, 7, 6]$.
  - są one liniowo zależne, ponieważ: $\mathbf{x}_3 = 2 \cdot \mathbf{x}_1 + 1 \cdot \mathbf{x}_2$
- W przeciwnym przypadku są one **liniowo niezależne**.
- Czy można przedstawić jeden z poniższych wektorów jako kombinację liniową pozostałych dwóch? $\mathbf{x}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathbf{x}_2 = [0, 1, 0]$, $\mathbf{x}_3 = [0, 0, 1]$
- nie. Są one liniowo niezależne (ponadto, ortonormalne).

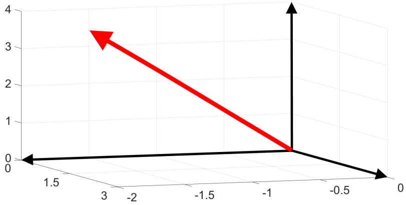
Ortogonalność - przykład (5)

- Najważniejszy wniosek z tematów ortogonalności i iloczynu skalanego jest następujący: **Iloczyn sklarny można wykorzystać do rozłożenia dowolnych wektorów na składowe ortogonalne.**



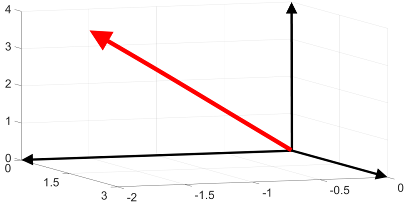
Ortogonalność - przykład (5)

- Najważniejszy wniosek z tematów ortogonalności i iloczynu skalanego jest następujący: **Iloczyn sklarny można wykorzystać do rozłożenia dowolnych wektorów na składowe ortogonalne.**
- Rozpatrzmy 3 ortonormalne wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x}_1 = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{x}_2 = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{x}_3 = [0, 0, 1]^T$



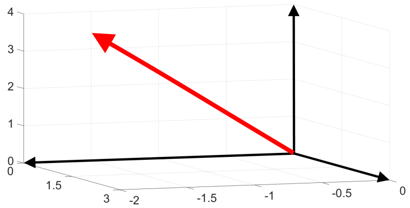
Ortogonalność - przykład (5)

- Najważniejszy wniosek z tematów ortogonalności i iloczynu skalanego jest następujący: **Iloczyn sklarny można wykorzystać do rozłożenia dowolnych wektorów na składowe ortogonalne.**
- Rozpatrzmy 3 ortonormalne wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
$\mathbf{x}_1 = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{x}_2 = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{x}_3 = [0, 0, 1]^T$
- Wektor $\mathbf{a} = [3, -2, 4]^T$ może być rozłożony na 3 składowe:
$c_1 = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x}_1 = 3$, $c_2 = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x}_2 = -2$, $c_3 = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x}_3 = 4$



Ortogonalność - przykład (5)

- Najważniejszy wniosek z tematów ortogonalności i iloczynu skalanego jest następujący: **Iloczyn sklarny można wykorzystać do rozłożenia dowolnych wektorów na składowe ortogonalne.**
- Rozpatrzmy 3 ortonormalne wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x}_1 = [1,0,0]^T$, $\mathbf{x}_2 = [0,1,0]^T$, $\mathbf{x}_3 = [0,0,1]^T$
- Wektor $\mathbf{a} = [3,-2,4]^T$ może być rozłożony na 3 składowe: $c_1 = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x}_1 = 3$, $c_2 = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x}_2 = -2$, $c_3 = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x}_3 = 4$
- $\mathbf{a} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = [3,0,0]^T + [0,-2,0]^T + [0,0,4]^T = [3,-2,4]^T$



Ortogonalność - (dodatkowy) przykład (6)

- Podobnie, $\mathbf{a} = [3, -2, 4, 6]^T$ może być rozłożony na 3 składowe, używając poniższej bazy, zawierającej 3 wektory:

Ortogonalność - (dodatkowy) przykład (6)

- Podobnie, $\mathbf{a} = [3, -2, 4, 6]^T$ może być rozłożony na 3 składowe, używając poniższej bazy, zawierającej 3 wektory:
- Baza ortonormalna $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.5741 & -0.0549 & 0.1493 \\ -0.3714 & 0.8999 & -0.1449 \\ -0.5389 & -0.3895 & -0.6911 \\ -0.4920 & -0.1886 & 0.6922 \end{bmatrix}$$

Ortogonalność - (dodatkowy) przykład (6)

- Podobnie, $\mathbf{a} = [3, -2, 4, 6]^T$ może być rozłożony na 3 składowe, używając poniższej bazy, zawierającej 3 wektory:
- Baza ortonormalna $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.5741 & -0.0549 & 0.1493 \\ -0.3714 & 0.8999 & -0.1449 \\ -0.5389 & -0.3895 & -0.6911 \\ -0.4920 & -0.1886 & 0.6922 \end{bmatrix}$$

- Obliczamy współczynniki: $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]^T = \mathbf{a}^T\mathbf{X} = [-6.0871, -4.6541, 2.1265]$

Ortogonalność - (dodatkowy) przykład (6)

- Podobnie, $\mathbf{a} = [3, -2, 4, 6]^T$ może być rozłożony na 3 składowe, używając poniższej bazy, zawierającej 3 wektory:
- Baza ortonormalna $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.5741 & -0.0549 & 0.1493 \\ -0.3714 & 0.8999 & -0.1449 \\ -0.5389 & -0.3895 & -0.6911 \\ -0.4920 & -0.1886 & 0.6922 \end{bmatrix}$$

- Obliczamy współczynniki: $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]^T = \mathbf{a}^T\mathbf{X} = [-6.0871, -4.6541, 2.1265]$
- Wektor $\mathbf{a}$ może być przybliżony za pomocą: $\mathbf{a} \approx \mathbf{Xc}$

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T$

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
2. Przemnażając wektory $\mathbf{x}_i$ przez macierz $\mathbf{A}$, otrzymujemy:

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
2. Przemnażając wektory $\mathbf{x}_i$ przez macierz $\mathbf{A}$, otrzymujemy:
   - $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}^T$

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
2. Przemnażając wektory $\mathbf{x}_i$ przez macierz $\mathbf{A}$, otrzymujemy:
   - $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3.53553 & -0.70711 \end{bmatrix}^T$

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
2. Przemnażając wektory $\mathbf{x}_i$ przez macierz $\mathbf{A}$, otrzymujemy:
   - $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3.53553 & -0.70711 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}^T$

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
2. Przemnażając wektory $\mathbf{x}_i$ przez macierz $\mathbf{A}$, otrzymujemy:
   - $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3.53553 & -0.70711 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}^T$
3. Normy wektorów $\mathbf{y}_1$ wynoszą:

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
2. Przemnażając wektory $\mathbf{x}_i$ przez macierz $\mathbf{A}$, otrzymujemy:
   - $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3.53553 & -0.70711 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}^T$
3. Normy wektorów $\mathbf{y}_1$ wynoszą:
   - $\|\mathbf{b}_1\|_2 = 3.1623$

SVD (1)

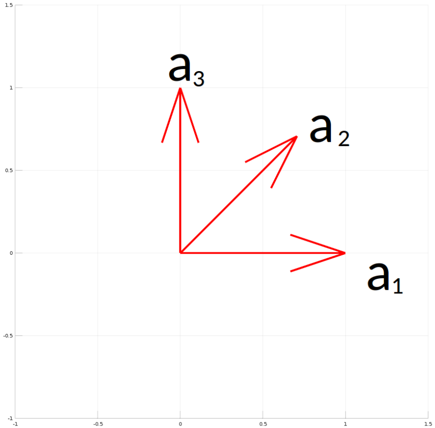
1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
2. Przemnażając wektory $\mathbf{x}_i$ przez macierz $\mathbf{A}$, otrzymujemy:
   - $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3.53553 & -0.70711 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}^T$
3. Normy wektorów $\mathbf{y}_1$ wynoszą:
   - $\|\mathbf{b}_1\|_2 = 3.1623$
   - $\|\mathbf{b}_2\|_2 = 3.6056$

SVD (1)

1. Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ o normie $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$:
   - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
2. Przemnażając wektory $\mathbf{x}_i$ przez macierz $\mathbf{A}$, otrzymujemy:
   - $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3.53553 & -0.70711 \end{bmatrix}^T$
   - $\mathbf{b}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}^T$
3. Normy wektorów $\mathbf{y}_1$ wynoszą:
   - $\|\mathbf{b}_1\|_2 = 3.1623$
   - $\|\mathbf{b}_2\|_2 = 3.6056$
   - $\|\mathbf{b}_3\|_2 = 4.4721$

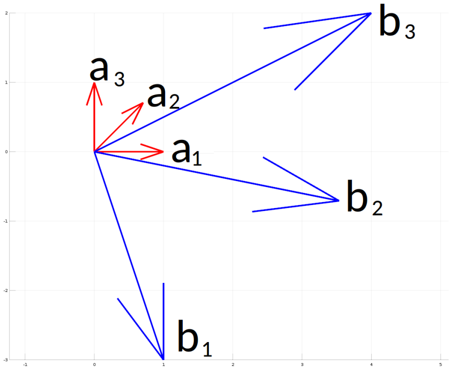
SVD (2)

Trzy wektory: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ $(\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1)$



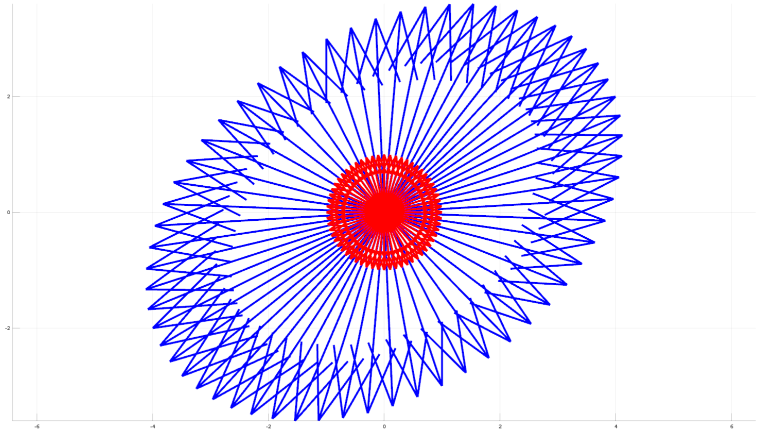
SVD (3)

Wektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ przemnożone przez $\mathbf{A}$:



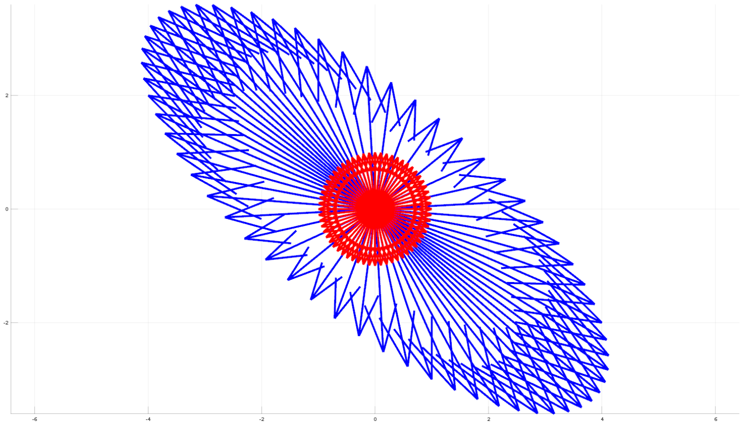
SVD (4)

Działanie macierzy **A** na okrąg jednostkowy (z wykorzystaniem 2-normy):



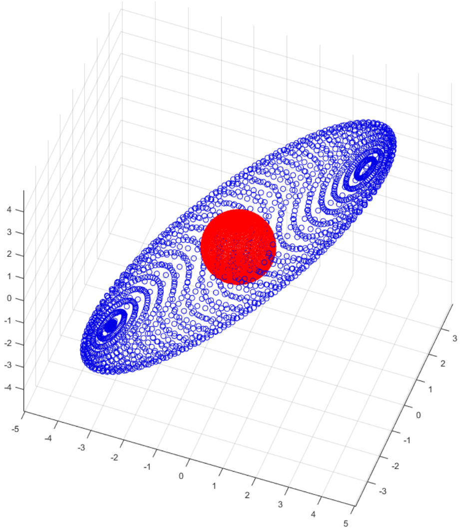
SVD (5)

Działanie macierzy **B** = [1 4; -3 -2] na okrąg jednostkowy (z wykorzystaniem 2-normy):



SVD (6)

Działanie macierzy $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ na *kulę* jednostkową *(unit sphere)*



SVD (7)

1. Ponownie rozpatrzmy macierz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

SVD (7)

1. Ponownie rozpatrzmy macierz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:
2. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

SVD (7)

1. Ponownie rozpatrzmy macierz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:
2. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$
3. istnieje wektor jednostkowy: $\mathbf{v}_1 = [-0.5257, -0.8507]^T$, który, przemnożony przez $\mathbf{B}$ daje:
   $$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3.9283 \\ 3.2785 \end{bmatrix} = 5.1167 \cdot \begin{bmatrix} -0.7678 \\ 0.6407 \end{bmatrix} = \sigma_1 \mathbf{u}_1$$

SVD (7)

1. Ponownie rozpatrzmy macierz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:
2. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$
3. istnieje wektor jednostkowy: $\mathbf{v}_1 = [-0.5257, -0.8507]^T$, który, przemnożony przez $\mathbf{B}$ daje:
   $$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3.9283 \\ 3.2785 \end{bmatrix} = 5.1167 \cdot \begin{bmatrix} -0.7678 \\ 0.6407 \end{bmatrix} = \sigma_1 \mathbf{u}_1$$
4. Jeżeli rozpatrzymy wszystkie wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^2$, okaże się, że w wyniku przemnożenia przez $\mathbf{B}$ norma wektora $\mathbf{v}_1$ wzrasta najbardziej.

SVD (7)

1. Ponownie rozpatrzmy macierz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:
2. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$
3. istnieje wektor jednostkowy: $\mathbf{v}_1 = [-0.5257, -0.8507]^T$, który, przemnożony przez $\mathbf{B}$ daje:
   $$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3.9283 \\ 3.2785 \end{bmatrix} = 5.1167 \cdot \begin{bmatrix} -0.7678 \\ 0.6407 \end{bmatrix} = \sigma_1 \mathbf{u}_1$$
4. Jeżeli rozpatrzymy wszystkie wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^2$, okaże się, że w wyniku przemnożenia przez $\mathbf{B}$ norma wektora $\mathbf{v}_1$ wzrasta najbardziej.
5. wektor o długości 1 w wyniku przemnożenia daje wektor o normie $\sigma_1 = 5.1167$.

SVD (7)

1. Ponownie rozpatrzmy macierz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times2}$:
2. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$
3. istnieje wektor jednostkowy: $\mathbf{v}_1 = [-0.5257, -0.8507]^T$, który, przemnożony przez $\mathbf{B}$ daje:
   $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3.9283 \\ 3.2785 \end{bmatrix} = 5.1167 \cdot \begin{bmatrix} -0.7678 \\ 0.6407 \end{bmatrix} = \sigma_1 \mathbf{u}_1$
4. Jeżeli rozpatrzymy wszystkie wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^2$, okaże się, że w wyniku przemnożenia przez $\mathbf{B}$ norma wektora $\mathbf{v}_1$ wzrasta najbardziej.
5. wektor o długości 1 w wyniku przemnożenia daje wektor o normie $\sigma_1 = 5.1167$.
6. jest to pierwsza (największa) wartość szczególna.

Koło naukowe

1. Aplikacja mobilna wspierająca pracę lakarzy (we współpracy z GUMed i szpitalem im. M. Płażyńskiego). (Splajny)

Koło naukowe

1. Aplikacja mobilna wspierająca pracę lakarzy (we współpracy z GUMed i szpitalem im. M. Płażyńskiego). (Splajny)
2. Aplikacja mobilna wykorzystująca rzeczywistość rozszerzoną do wizualizacji rozkładu pola elektromagnetycznego w wybranych strukturach.

Koło naukowe

1. Aplikacja mobilna wspierająca pracę lakarzy (we współpracy z GUMed i szpitalem im. M. Płażyńskiego). (Splajny)
2. Aplikacja mobilna wykorzystująca rzeczywistość rozszerzoną do wizualizacji rozkładu pola elektromagnetycznego w wybranych strukturach.
3. Analiza czułościowa wykorzystująca metoda Monte Carlo w symulacjach układów elektronicznych, działających na wysokich częstotliwościach.

Koło naukowe

1. Aplikacja mobilna wspierająca pracę lakarzy (we współpracy z GUMed i szpitalem im. M. Płażyńskiego). (Splajny)
2. Aplikacja mobilna wykorzystująca rzeczywistość rozszerzoną do wizualizacji rozkładu pola elektromagnetycznego w wybranych strukturach.
3. Analiza czułościowa wykorzystująca metoda Monte Carlo w symulacjach układów elektronicznych, działających na wysokich częstotliwościach.
4. Metody optymalizacji, w symulacjach układów elektronicznych, działających na wysokich częstotliwościach.

Koło naukowe

1. Aplikacja mobilna wspierająca pracę lakarzy (we współpracy z GUMed i szpitalem im. M. Płażyńskiego). (Splajny)
2. Aplikacja mobilna wykorzystująca rzeczywistość rozszerzoną do wizualizacji rozkładu pola elektromagnetycznego w wybranych strukturach.
3. Analiza czułościowa wykorzystująca metoda Monte Carlo w symulacjach układów elektronicznych, działających na wysokich częstotliwościach.
4. Metody optymalizacji, w symulacjach układów elektronicznych, działających na wysokich częstotliwościach.
5. Toolbox w matlabie do analizy sygnałów EEG.

Koło naukowe

1. Aplikacja mobilna wspierająca pracę lakarzy (we współpracy z GUMed i szpitalem im. M. Płażyńskiego). (Splajny)
2. Aplikacja mobilna wykorzystująca rzeczywistość rozszerzoną do wizualizacji rozkładu pola elektromagnetycznego w wybranych strukturach.
3. Analiza czułościowa wykorzystująca metoda Monte Carlo w symulacjach układów elektronicznych, działających na wysokich częstotliwościach.
4. Metody optymalizacji, w symulacjach układów elektronicznych, działających na wysokich częstotliwościach.
5. Toolbox w matlabie do analizy sygnałów EEG.
6. Strona koła.