

Spis treści

- 1 Metody dokładne
- 2 Metoda eliminacji Gaussa i Gaussa-Jordana
- 3 Metody iteracyjne
 - Iteracja prosta

Spis treści

- 1 Metody dokładne
- 2 Metoda eliminacji Gaussa i Gaussa-Jordana
- 3 Metody iteracyjne
 - Iteracja prosta

Spis treści

- 1 Metody dokładne
- 2 Metoda eliminacji Gaussa i Gaussa-Jordana
- 3 Metody iteracyjne
 - Iteracja prosta

Literatura

- ❶ Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, Metody numeryczne, WNT, Warszawa, 1993
- ❷ A. Ralston, Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa, 1983
- ❸ E. Kącki, A. Małolepszy, A. Romanowicz, Metody numeryczne dla inżynierów, Wyższa Szkoła Informatyki w Łodzi, Łódź, 2005
- ❹ Z. Kosma, Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich, Politechnika Radomska, Radom, 2008
- ❺ W.T. Vetterling, S.A. Teukolsky, W.H. Press, B.P. Flannery, Numerical Recipes, Cambridge University Press, 2003

Metody dokładne

Wzory Cramera

Metody dokładne korzystają z gotowych wzorów, ale mogą być obarczone dużymi błędami. Rozważmy układ równań:

$$\begin{aligned}a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= b_2\end{aligned}$$

Rozwiązanie uzyskujemy ze wzorów $x_i = \frac{W_i}{W}$:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Metody dokładne

Wzory Cramera

Rozważmy nstp. przykład:

$$0.99 x_1 + 0.70 x_2 = 0.54$$

$$0.70 x_1 + 0.50 x_2 = 0.38$$

Liczymy z dokładnością do dwu znaków po przecinku.

Metody dokładne

Wzory Cramera

Rozważmy nstp. przykład:

$$0.99 x_1 + 0.70 x_2 = 0.54$$

$$0.70 x_1 + 0.50 x_2 = 0.38$$

Liczymy z dokładnością do dwu znaków po przecinku. Wyznacznik główny:

$$W = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Mamy:

$$a_{11}a_{22} = 0.99 \cdot 0.50 = 0.4950; \quad \text{fl}(a_{11}a_{22}) = 0.50$$

$$a_{21}a_{12} = 0.70 \cdot 0.70 = 0.4900; \quad \text{fl}(a_{21}a_{12}) = 0.49$$

Metody dokładne

Wzory Cramera

czyli

$$\text{fl}(W) = \text{fl}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0.50 - 0.49 = 0.10 \cdot 10^{-1}.$$

Podobnie

$$\text{fl}(W_1) = 0.00; \quad \text{fl}(W_2) = 0.00$$

czyli

$$\text{fl}(x_1) = 0.00; \quad \text{fl}(x_2) = 0.00$$

gdy tymczasem dokładne rozwiązanie:

$$x_1 = 0.80; \quad x_2 = -0.36$$

Skąd taka różnica?

Metody dokładne

Wzory Cramera

Rozwiążmy ten układ równań metodą eliminacji:

$$0.99 x_1 + 0.70 x_2 = 0.54$$

$$0.70 x_1 + 0.50 x_2 = 0.38$$

Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy wiersz pomnożony przez 0.71, przy czym zauważamy, iż $\text{fl} \frac{a_{21}}{a_{11}} = \text{fl}(0.7070) = 0.71$,

$\text{fl}(0.50 - 0.70 \cdot 0.71)x_2 = \text{fl}(0.38 - 0.54 \cdot 0.71)$ i w rezultacie

$$0.99 x_1 + 0.70 x_2 = 0.54$$

$$0.00 x_2 = 0.00$$

Jest to układ równań nieoznaczony, ma ∞ rozwiązań – mimo stosowania metody dokładnej uzyskane rozwiązanie nie jest dokładne, a nawet nie jest jego przybliżeniem.

Metody dokładne

Układy równań źle uwarunkowane

$$\begin{aligned}2x_1 + 6x_2 &= 8 \\ 2x_1 + 6.00001x_2 &= 8.00001\end{aligned}$$

ma rozwiązanie $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, a układ równań

$$\begin{aligned}2x_1 + 6x_2 &= 8 \\ 2x_1 + 5.99999x_2 &= 8.00002\end{aligned}$$

ma rozwiązanie $x_1 = 10$, $x_2 = -2$.

Metoda eliminacji Gaussa

Start

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = a_{1,n+1}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = a_{2,n+1}$$

.....

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = a_{n,n+1}$$

W celu ujednolicenia oznaczeń $b_j \rightarrow a_{j,n+1}$. Zakładamy, że macierz układu jest nieosobliwa oraz że $a_{11} \neq 0$.

Odejmujemy pierwsze równanie pomnożone przez $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ od i -tego równania, $i = 2, 3, \dots, n$ i otrzymujemy *pierwszy układ zredukowany*:

Metoda eliminacji Gaussa

Pierwszy układ zredukowany

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n &= a_{2,n+1}^{(1)} \\ \dots &\dots \\ a_{n2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n &= a_{n,n+1}^{(1)} \end{aligned}$$

gdzie nowe współczynniki

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 2, 3, \dots, n+1.$$

Metoda eliminacji Gaussa

Ostatecznie

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}$$

$$a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2,n+1}^{(1)}$$

$$a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n = a_{3,n+1}^{(2)}$$

$$\dots \dots \dots a_{nn}^{(n-1)} x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)}$$

z niezerowymi elementami na głównej przekątnej

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)},$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = k+1, k+2, \dots, n+1;$$

$$i = k + 1, k + 2, \dots, n; \quad a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Rozwiązanie

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left(a_{i,n+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j \right), \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

Start

Dzielimy pierwsze równanie przez a_{11} , wyznaczamy x_1 i wstawiamy do pozostałych równań:

$$x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \quad a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, j = 2, 3, \dots, n+1$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

Po n krokach

$$x_i = a_{i,n+1}^{(n)}, \quad i = 1, \dots, n$$

gdzie

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{1}{\alpha_k} \left(a_{kj} - \sum_{l=1}^{k-1} a_{kl} a_{lj}^{(k-1)} \right), \quad j = k+1, k+2, \dots, n+1$$

przy czym

$$\alpha_k = a_{kk} - \sum_{l=1}^{k-1} a_{kl} a_{lk}^{(k-1)}$$

Metoda eliminacji Gaussa i Gaussa-Jordana

Liczba mnożeń i dzielen

Liczba mnożeń i dzielen w obu metodach wynosi tyle samo:

$$M = \frac{1}{3}n(n^2 + 3n - 1)$$

Liczba współczynników, jakie muszą być jednocześnie przechowywane w pamięci maszyny, wynosi:

- Gauss: $\frac{1}{2}n^2 + O(n)$
- Gauss-Jordan: $\frac{1}{4}n^2 + O(n)$

Metoda eliminacji Gaussa i Gaussa-Jordana

Wybór elementów podstawowych

Jeśli jakiś z dzielników jest mały w porównaniu z innymi elementami macierzy, to może pojawić się duży błąd zaokrągleń. By tego uniknąć stosuje się następną procedurę:

- 1 w czasie obliczania i -tego wiersza znajdujemy p -ty element o największym module i przestawiamy wiersze i i p ;
- 2 obliczamy elementy i -tego wiersza jak poprzednio.

Wada: trzeba zapisywać kolejne układy zredukowane.

Metody iteracyjne

Dlaczego?

Dlaczego używamy metod iteracyjnych, skoro metody dokładne dają rozwiązania szybciej?

- Tak nie jest zawsze, np. przy rozwiązywaniu równań różniczkowych metodami różnicowymi, gdy macierze są rzadkie.
- Ekonomicznie wykorzystują pamięć maszyny, czyli są dobre dla bardzo dużych macierzy.

Metody iteracyjne

Założenia

Zaczynając od wektora początkowego \mathbf{x}_i konstruujemy ciąg wektorów

$$\mathbf{x}_{i+1} = F_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i-1}, \dots, \mathbf{x}_{i-k}) \quad (*)$$

czyli funkcja F_i może się zmieniać od przybliżenia do przybliżenia. Mówimy, że metoda jest stacjonarna, jeśli funkcje F_i nie zależą od i . Tu skoncentrujemy się na metodach jednopunktowych, czyli danych wzorem

$$\mathbf{x}_{i+1} = B_i \mathbf{x}_i + \mathbf{c}_i$$

gdzie B_i i \mathbf{c}_i są niezależne od i .

Metody iteracyjne

Rozwiązujemy układ równań $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Dokładne rozwiązanie

$$\mathbf{x}_d = B_i \mathbf{x}_d + \mathbf{c}_i$$

jest punktem stałym równania (*). Ponieważ

$$\mathbf{x}_d = A^{-1} \mathbf{b}$$

więc

$$\bigwedge_i A^{-1} \mathbf{b} = B_i A^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{c}_i$$

czyli

$$\mathbf{c}_i = (I - B_i) A^{-1} \mathbf{b} = C_i \mathbf{b}$$

Metody iteracyjne

Rozwiązujemy układ równań $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Jeśli B_i i C_i – niezależne od \mathbf{b} , to otrzymujemy tzw. warunek zgodności:

$$(I - B_i)A^{-1} = C_i, \quad \text{czyli} \quad B_i + C_i A = I$$

Nasze równanie iteracyjne przyjmuje postać

$$\mathbf{x}_{i+1} = B_i \mathbf{x}_i + C_i \mathbf{b}$$

Metody iteracyjne

Zbieżność metody

W celu badania zbieżności określamy różnicę

$$\varepsilon_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_d$$

Można pokazać, że

$$\varepsilon_{i+1} = B_i \varepsilon_i$$

Jeśli \mathbf{x}_1 jest początkowym przybliżeniem rozwiązania naszego układu równań, to

$$\varepsilon_{i+1} = K_i \varepsilon_i$$

gdzie

$$K_i = B_i B_{i-1} \dots B_1$$

Metody iteracyjne

Zbieżność metody

Warunek konieczny zbieżności

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i \mathbf{y} = 0$$

Warunek dostateczny zbieżności

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\varepsilon_i\| = 0$$

Spis treści

- 1 Metody dokładne
- 2 Metoda eliminacji Gaussa i Gaussa-Jordana
- 3 Metody iteracyjne
 - Iteracja prosta

Metody iteracyjne

Iteracja prosta

Zapiszmy macierz A w postaci

$$A = D + L + U$$

gdzie D – macierz diagonalna, L – dolna macierz trójkątna i U – górna macierz trójkątna, obie z zerami na głównych przekątnych. Mamy zatem

$$D \mathbf{x} = -(L + U) \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

co generuje *metodę iteracji prostej*

$$\mathbf{x}_{i+1} = -D^{-1}(L + U) \mathbf{x}_i + D^{-1}\mathbf{b}$$

Metoda ta nie zawsze jest szybko zbieżna, inne metody na następnym wykładzie.

Koniec? :-)

Koniec wykładu 4