Spis treści

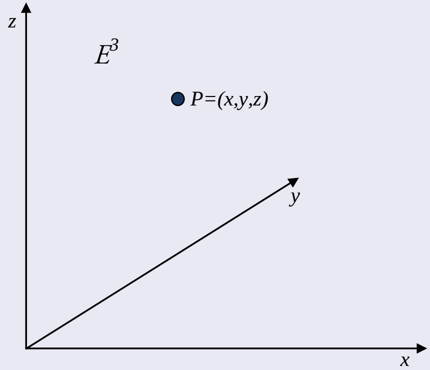
Spis treści

Spis treści

Literatura

1. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, Metody numeryczne, WNT, Warszawa, 1993
2. A. Ralston, Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa, 1983
3. E. Kącki, A. Małolepszy, A. Romanowicz, Metody numeryczne dla inżynierów, Wyższa Szkoła Informatyki w Łodzi, Łódź, 2005
4. Z. Kosma, Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich, Politechnika Radomska, Radom, 2008
5. W.T. Vetterling, S.A. Teukolsky, W.H. Press, B.P. Flannery, Numerical Recipes, Cambridge University Press, 2003

Przestrzeń Euklidesowa



Rys. 1: Przestrzeń Euklidesowa $\mathbb{E}^3$ i kartezjański układ współrzędnych

Przestrzeń Euklidesowa

Oznaczenia i definicje:

- **Wektor o rozmiarze** n: $\vec{v} = \bar{v} = \underline{v} = \mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$
- k – **wektorów liniowo niezależnych** $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$

$$\bigwedge_{c_1, \ldots, c_k} c_1 \, \vec{a}_1 + \cdots + c_k \, \vec{a}_k = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

- wektory $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ są równoległe, gdy jeden jest pewną kombinacją liniową drugiego
- $\mathbb{R}^n$ – zbiór wektorów o rozmiarze n
- **Baza** w $\mathbb{R}^n$ – taki układ wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, że $\det A(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0$

Przestrzeń Euklidesowa

Twierdzenie

Układ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ wektorów jest liniowo niezależny $\Leftrightarrow$ $\det A(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0$.

Wniosek

$$\bigwedge_{\vec{b}} \vec{b} = c_1\, \vec{a}_1 + \cdots + c_n\, \vec{a}_n\,, \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \;-\; \text{baza}$$

Przestrzeń Euklidesowa

Baza kanoniczna

$$\vec{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0)$$
$$\vec{e}_2 := (0, 1, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_2 := (0, 0, \ldots, 1)$$

Przestrzeń Euklidesowa

Definicje

- **Iloczyn skalarny**: $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$< a, b >= \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i$$

- **Długość wektora** $\vec{a}$: $||\vec{a}|| = (< \vec{a}, \vec{a} >)^{\frac{1}{2}}$
- **Odległość wektorów** $\vec{a}$ i $\vec{b}$: $||\vec{a} - \vec{b}||$
- **Kąt między wektorami** $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{< \vec{a}, \vec{b} >}{||\vec{a}|| \, ||\vec{b}||}$$

Przestrzeń Euklidesowa

Definicje

- **Równoległościan** rozpięty na wektorach $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ to zbiór wektorów

$$R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$$

  postaci $c_1\,\vec{a}_1 + c_2\,\vec{a}_2 \cdots + c_n\,\vec{a}_n$, gdzie $0 \le c_i \le 1$, $i = 1, \ldots, n$
- **Pole równoległoboku** $R(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \in \mathbb{R}^2$

$$||R(\vec{a}_1, \vec{a}_2)|| = |\det A(\vec{a}_1, \vec{a}_2)|$$

- **Objętość równoległościanu** $R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \in \mathbb{R}^3$

$$||R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)|| = |\det A(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)|$$

Przestrzeń Euklidesowa

Definicje

- **Iloczyn wektorowy** w $\mathbb{R}^3$ dla $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left[\det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right]$$

lub inaczej

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

lub inaczej

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j \, b_k \,, \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{parzysta permutacja indeksów} \\ -1 & \text{nieparzysta permutacja indeksów} \\ 0 & \text{powtarzające się indeksy} \end{cases}$$

Przestrzeń Euklidesowa

Definicje

- **Wyznacznik Grama** układu dwu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$G = \det \begin{pmatrix} < \vec{a}, \vec{a} > & < \vec{a}, \vec{b} > \\ < \vec{a}, \vec{b} > & < \vec{b}, \vec{b} > \end{pmatrix}$$

- Miara objętościowa k-równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$

$$G(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) = \det \begin{pmatrix} < \vec{a}_1, \vec{a}_1 >, < \vec{a}_1, \vec{a}_2 >, \ldots, < \vec{a}_1, \vec{a}_k > \\ \vdots \\ < \vec{a}_k, \vec{a}_1 >, < \vec{a}_k, \vec{a}_2 >, \ldots, < \vec{a}_k, \vec{a}_k > \end{pmatrix}$$

Przestrzeń Euklidesowa

Algorytm Grama-Schmidta ortogonalizacji wektorów

Cel: zbudować ortogonalny układ wektorów $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ mając do dyspozycji wektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$

Przykład $(n = 3)$:

1. $\vec{b}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{||\vec{a}_1||}$,
2. $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1)\, \vec{b}_1$, $\quad \vec{b}_2 := \dfrac{\vec{b}_2}{||\vec{b}_2||}$
3. $\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1)\, \vec{b}_1 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2)\, \vec{b}_2$, $\quad \vec{b}_3 := \dfrac{\vec{b}_3}{||\vec{b}_3||}$

Macierze

Macierz prostokątna

Niech m, n – ustalone liczby naturalne, $M = \{1, \ldots, m\}$, $N = \{1, \ldots, n\}$, $X = M \times N$ – iloczyn kartezjański, Y pewien niepusty zbiór. Określamy funkcję $f : X \longrightarrow Y$.
Macierzą prostokątną nazywamy funkcję f z m wierszami i n kolumnami przyjmującą wartości w zbiorze Y

$$f = [f_{jk}]_{j=1,\ldots m;\, k=1,\ldots n} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

$f^T = [f_{kj}]_{k=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots m}$ – macierz transponowana jest otrzymywana z macierzy f przez zamianę wierszy na kolumny i kolumn na wiersze.

Macierze

Suma macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Macierze

Wymiar macierzy

Jeśli $\dim A = m \times n$ to $\dim A^T = n \times m$

A – macierz kwadratowa gdy $m = n$

Mnożenie macierzy przez liczbę

$$c\,A = A\,c = c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\,a_{11} & c\,a_{12} & \cdots & c\,a_{1n} \\ c\,a_{21} & c\,a_{22} & \cdots & c\,a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c\,a_{m1} & c\,a_{m2} & \cdots & c\,a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierze

Iloczyn macierzy (Kroneckera)

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}\,B & a_{12}\,B & a_{13}\,B \\ a_{21}\,B & a_{22}\,B & a_{23}\,B \\ a_{31}\,B & a_{32}\,B & a_{33}\,B \end{bmatrix}$$

Macierze

Iloczyn macierzy (Cauchy)

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A\,B = \begin{bmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22} & a_{11}\,b_{13} + a_{12}\,b_{23} \\ a_{21}\,b_{21} + a_{22}\,b_{21} & a_{21}\,b_{22} + a_{22}\,b_{22} & a_{21}\,b_{23} + a_{22}\,b_{23} \end{bmatrix}$$

UWAGA!!!

Mnożenie macierzy w sensie Cauchy'ego **jest wykonalne** $\Longleftrightarrow$ gdy liczba kolumn w pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy w drugiej macierzy!

Macierze

Iloczyn macierzy (Cauchy) – przypadek wektorów

$\vec{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $\vec{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$

$$\vec{b}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^T = [a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \cdots + a_n\, b_n]$$

Wyznaczniki

Definicja wyznacznika (Laplace)

Rozwinięcie względem i-tego wiersza

$$\det[A]_{m\times m} = |A| = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det A_{i,j}$$

gdzie $A_{i,j}$ – macierz stopnia $m-1$ powstała z macierzy A poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny (minor)

Definicja wyznacznika permutacyjna

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)}\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

gdzie S_n – zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$,
$\mathrm{Inv}(\sigma)$ – liczba inwersji danej permutacji $\sigma \in S_n$

Wyznaczniki

Definicja podwyznacznika

Podwyznacznikiem A_{ik}, czyli **minorem** macierzy odpowiadającym elementowi a_{ik}, nazywamy wyznacznik podmacierzy stopnia $n-1$, która powstaje z danej macierzy przez pominecie $i-$tego wiersza i k-tej kolumny macierzy A.

Wyznaczniki

Właściwości wyznaczników

- Transpozycja macierzy nie powoduje zmiany wartości jej wyznacznika.
- Zamiana miejscami dwóch dowolnych kolumn lub wierszy zmienia znak wyznacznika, nie zmieniając jego wartości bezwzględnej.
- Jeśli dwa wiersze lub dwie kolumny macierzy są proporcjonalne (np. są równe), to wyznacznik ma wartość zero.
- Jeśli jakiś wiersz (lub kolumna) macierzy jest kombinacją liniową innych wierszy (lub kolumn) (np. wiersz/kolumna składa się tylko z zer), wyznacznik ma wartość zero.
- Pomnożenie dowolnej kolumny lub dowolnego wiersza przez stałą mnoży przez tę samą stałą wartość wyznacznika.

Wyznaczniki

Właściwości wyznaczników

- Dodając lub odejmując od dowolnego wiersza/kolumny inny wiersz/kolumnę lub kombinacje liniowe innych wierszy/kolumn nie zmieniamy wartości wyznacznika.
- Wyznacznik iloczynu macierzy jest równy iloczynowi wyznaczników:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Wyznaczniki

Właściwości wyznaczników

- Wyznacznik macierzy odwrotnej jest równy odwrotności wyznacznika:

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

- Zachodzi wzór:

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$$

gdzie k – dowolna liczba, n – stopnień macierzy A

Macierze

Macierz odwrotna

Macierz odwrotna do nieosobliwej macierzy kwadratowej A

$$A^{-1} = \frac{A^D}{\det A}$$

gdzie A^D – macierz dołączona do macierzy A (czyli transponowaną macierzą dopełnień algebraicznych).
Dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} macierzy kwadratowej A stopnia n to wyznacznik macierzy powstałej z A poprzez skreślenie jej i-tego wiersza i j-tej kolumny, pomnożony przez $(-1)^{i+j}$.

Macierze, wyznaczniki i komputer

Przy obliczaniu macierzy odwrotnych i wyznaczników stosujemy rozwijanie względem wiersza lub kolumny, czy też metodę Sarrusa.

W przypadku pracy z komputerem metody te są bezużyteczne!!!

W celu obliczenia wyznacznika macierzy n-tego stopnia powyższe techniki wymagają $n!$ mnożeń. Przy $n = 16$ jest to niemal $5 \cdot 10^{12}$ mnożeń – maszyna wykonująca 10^6 mnożeń na sekundę potrzebowałaby na to niemal rok nieprzerwanej pracy. Trzeba zatem stosować inne metody.

Koniec? :-(

Koniec wykładu 3