Seria zadań nr 2 z Wprowadzenia do Metod Numerycznych

Michał Bernardelli

Zadanie 1
Dla wektorów rozmiaru od 1 do ustalonego n złożonych z samych jedynek policzyć normy: pierwszą, drugą, dziesiątą oraz nieskończoność. Narysować na jednym wykresie uzyskane normy. Powtórzyć ćwiczenie dla wektorów złożonych z losowych wartości. Wyciągnąć wnioski na temat zależności pomiędzy poszczególnymi normami wektorowymi.

Zadanie 2
Sprawdzić czy macierz obrotu zgodnie z ruchem wskazówek zegara o kąt φ w płaszczyźnie (x, y), to jest:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

jest macierzą: odwracalną, symetryczną, dodatnio określoną, nieosobliwą, ortogonalną, diagonalnie dominującą.

Zadanie 3
Dobrać tak liczby x, y, z, żeby macierz

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & x \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & y \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & z \end{pmatrix}$$

była ortogonalna. Znajdź macierz odwrotną do otrzymanej macierzy.

Zadanie 4
Wyznaczyć stałe równoważności c_{pq} i C_{pq} między normami

$$c_{pq} \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq C_{pq} \|x\|_q \,,$$

dla norm podanych w tabelkach:

c_{pq}	$q=1$	$q=2$	$q=\infty$
$p=1$			
$p=2$			
$p=\infty$			

C_{pq}	$q=1$	$q=2$	$q=\infty$
$p=1$			
$p=2$			
$p=\infty$			

Zadanie 5 (*)
Uzupełnić tabelkę opisującą stałe równoważności c_{pq} takie, że dla każdej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zachodzi $\|A\|_p \leq c_{pq} \|A\|_q$.

c_{pq}	$q=1$	$q=2$	$q=\infty$
$p=1$			
$p=2$			
$p=\infty$			

Zadanie 6
Korzystając z definicji udowodnić, że dla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *spełnione są wzory:*

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

oraz

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Zadanie 7
Policzyć współczynnik uwarunkowania $cond_2(A)$ *macierzy*

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-2} & \frac{1}{2}\sqrt{2-10^{-4}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2-10^{-4}} & 10^{2} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 8
Dana jest macierz $A = A^T$ *oraz jej spektrum*

$$\sigma(A) = \{-1, 0, 2, 3, 100\}.$$

Wyznaczyć wartości własne macierzy $B = I + A + 2A^2$.

Zadanie 9
Dana jest macierz

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & & & & \\ -1 & \alpha & -1 & & & \\ & -1 & \alpha & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \alpha & -1 \\ & & & & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

dla $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) *Zaproponować efektywny pamięciowo sposób przechowywania macierzy* T_α. *Zapisać algorytm mnożenia tak przedstawionej macierzy przez wektor.*

b) *Wykazać, że wartości* λ_j *i związane z nimi wektory własne* q_j *macierzy* T_α *są dane wzorami:*

$$\lambda_j = \alpha - 2\cos(j\theta), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$q_j = [\sin(j\theta), \sin(2j\theta), \ldots, \sin(nj\theta)]^T.$$

dla $\theta = \frac{\pi}{n+1}$.

c) *Dla jakich* α *macierz* T_α *jest dodatnio określona?*

Zadanie 10
Dane są dwa układy równań:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -10^{-6} & 10^{-6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 10^{-6}b_2 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć wskaźniki uwarunkowania obu macierzy. Rozwiązano te dwa układy tak, że $\|A\boldsymbol{x} - b\|_2 \le 10^{-3}$. *Czy rozwiązania obu układów będą takie same? (*) Oszacować błąd* $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|_2$ *w każdym z tych przypadków.*

Zadanie 11
Zaproponuj algorytm, który dla danej liczby $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *oblicza w arytmetyce zmiennoprzecinkowej wartość wyrażenia*

$$\Phi(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

z błędem względnym na poziomie ν*, gdzie* ν *jest dokładnością arytmetyki. Zakładamy, że dla funkcji trygonometycznych* $f(x) = \sin x, \cos x$*, itp. mamy* $fl(f(x)) = f(x)(1+\varepsilon)$*, gdzie* $|\varepsilon| \leq K\nu$*.*
Wskazówka: $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

Zadanie 12
Zaproponuj algorytm, który dla danej liczby $x \in \mathbb{R}$ *oblicza w arytmetyce zmiennoprzecinkowej wartość wyrażenia*

$$\Phi(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

z błędem względnym na poziomie ν*, gdzie* ν *jest dokładnością arytmetyki.*
Wskazówka: $\sqrt{x^2+1} - x = \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^{-1}$.

Zadanie 13
Zbadać numeryczne własności algorytmu sumowania n *dodatnich liczb rzeczywistych. Czy kolejność sumowania ma wpływ na błąd względny działania algorytmu?*

Zadanie 14
Zapisać algorytm rozwiązywania układu równań $Ux = b$ *z nieosobliwą macierzą górną trójkątną. Jaka jest złożoność obliczeniowa zaproponowanego algorytmu?*

Zadanie 15
Napisać program rozwiązujący metodą eliminacji Gaussa (bez i z wyborem elementu głównego) układ równań (tzw. strzałka Wilkinsona)

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Jaki jest koszt działania algorytmu?

Zadanie 16
Jak wykorzystać rozkład LU *do obliczenia wyznacznika macierzy?*

Zadanie 17 (rozwiązanie na wazniak.mimuw.edu.pl)
Opisać algorytm rozkładu Choleskiego-Banachiewicza LDL^T *dla macierzy symetrycznych. Udowodnić, że dla macierzy symetrycznych i dodatnio określonych macierz diagonalna* D *ma na diagonali liczby większe od zera. Jak sprowadzić rozkład* LDL^T *do rozkładu* $\widetilde{L}\widetilde{L}^T$*?*

Zadanie 18
Wykonać dekompozycje Cholesky'ego-Banachiewicza, tj. rozkłady LDL^T *i* LL^T *macierzy:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 19
Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą symetryczną i dodatnio określoną. Wykazać, że norma $\|\mathbb{I} - \tau A\|_2$, gdzie $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą jednostkową, przyjmuje minimum dla

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)}.$$

Zadanie 20
Udowodnić twierdzenie Gershgorina, mówiące o tym, że każda wartość własna λ macierzy A zawiera się w dysku o środku a_{ii} i promieniu $\rho_i = \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|$.

Zadanie 21
Wartości własne macierzy $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dla naturalnego $n \leq 100$ zawierają się w zbiorze $\{-1, 0, 2, 3, 100\}$. Wyznaczyć optymalną wartość parametru τ dla iteracji Richardsona

$$x_{k+1} = x_k - \tau(Bx_k - f)$$

rozwiązywania układu równań

$$Bx = f$$

z macierzą $B = I + A + 2A^2$.

Zadanie 22
Porównać szybkość zbieżności metody iteracyjnej Jacobiego i metody Gaussa-Seidel'a dla macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 23
Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $A = A^T > 0$. Wykazać, że przy optymalnie dobranych parametrach, metoda Richardsona zastosowana do układu równań $Ax^* = b$ spełnia warunek:

$$\|x_k - x^*\|_2 \leq \left(\frac{cond_2(A) - 1}{cond_2(A) + 1}\right)^k \|x_0 - x^*\|_2,$$

gdzie k jest numerem iteracji.

Zadanie 24 (*)
Niech A_i dla $i = 1, 2$ będą kwadratowymi, rzeczywistymi, symetrycznymi i dodatnio określonymi macierzami rozmiaru N. Niech $A = A_1 + A_2$. Rozważamy następującą dwukrokową metodę iteracyjną:

$$\begin{cases} (I + \alpha_1 A_1)x_{k+\frac{1}{2}} &= (I - \alpha_1 A_2)x_k + \alpha_1 b \\ (I + \alpha_2 A_2)x_{k+1} &= (I - \alpha_2 A_1)x_{k+\frac{1}{2}} + \alpha_2 b \end{cases}$$

gdzie α_1, α_2 są rzeczywistymi parametrami.

1. *Zapisać wyżej zdefiniowany proces iteracyjny w postaci:*

$$x_{k+1} = Bx_k + f.$$

2. *Wykazać, że ciąg x_k jest zbieżny, jeśli*

$$\max_{i=1,\dots,N} \left|\frac{1 - \alpha_2\lambda_i(A_1)}{1 + \alpha_1\lambda_i(A_1)}\right| \cdot \max_{i=1,\dots,N} \left|\frac{1 - \alpha_1\lambda_i(A_2)}{1 + \alpha_2\lambda_i(A_2)}\right| < 1,$$

   gdzie $\lambda_j(A_i)$ oznacza j-tą wartość własną macierzy A_i

3. *Do czego zbiega ciąg x_k?*