

Spis treści

- 1 Sformułowanie zagadnienia aproksymacji
- 2 Rodzaje aproksymacji
- 3 Aproksymacja w przestrzeniach Hilberta
- 4 Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami sklejanymi
- 5 Aproksymacja Padé

Spis treści

- 1 Sformułowanie zagadnienia aproksymacji
- 2 Rodzaje aproksymacji
- 3 Aproksymacja w przestrzeniach Hilberta
- 4 Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami sklejanymi
- 5 Aproksymacja Padé

Spis treści

- 1 Sformułowanie zagadnienia aproksymacji
- 2 Rodzaje aproksymacji
- 3 Aproksymacja w przestrzeniach Hilberta
- 4 Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami sklejanymi
- 5 Aproksymacja Padé

Spis treści

- 1 Sformułowanie zagadnienia aproksymacji
- 2 Rodzaje aproksymacji
- 3 Aproksymacja w przestrzeniach Hilberta
- 4 Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami sklejanymi
- 5 Aproksymacja Padé

Spis treści

- 1 Sformułowanie zagadnienia aproksymacji
- 2 Rodzaje aproksymacji
- 3 Aproksymacja w przestrzeniach Hilberta
- 4 Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami sklejanymi
- 5 Aproksymacja Padé

Literatura

- 1 Baron B., Piątek Ł., Metody numeryczne w C++ Builder, Helion, Gliwice, 2004
- 2 Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody numeryczne, WNT, Warszawa, 1993
- 3 Kosma Z., Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich, Politechnika Radomska, Radom, 2008
- 4 Povstenko J., Wprowadzenie do metod numerycznych, Akademicka Oficyna Wydawnicza Exit, Warszawa, 2005
- 5 Ralston A., Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa, 1983
- 6 Kącki E., Małolepszy A., Romanowicz A., Metody numeryczne dla inżynierów, Wyższa Szkoła Informatyki w Łodzi, Łódź, 2005
- 7 Vetterling W.T., Teukolsky S.A., Press W.H., Flannery B.P., Numerical Recipes, Cambridge University Press, 2003
- 8 Wikipedia

Sformułowanie zagadnienia aproksymacji

Aproksymacja

Znaleźć taką funkcję $F(x)$

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) \quad (1)$$

aproksymującą zadaną funkcję $f(x)$, gdzie
 $g_1(x), \dots, g_n(x)$ – dane funkcje, liniowo niezależne elementy
unormowanej przestrzeni liniowej \mathbb{E} ,
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – odpowiednio dobrane liczby rzeczywiste,
aby norma różnicy

$$\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \|f(x) - F(x)\| \quad (2)$$

była jak najmniejsza.

Sformułowanie zagadnienia aproksymacji

Twierdzenie 1 (Weierstrass)

Jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w skończonym przedziale domkniętym $[a, b]$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ można zdefiniować taki wielomian $W_n(x)$ stopnia $n = n(x)$, że dla każdego $x \in [a, b]$ spełniona jest nierówność

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \varepsilon \quad (3)$$

Sformułowanie zagadnienia aproksymacji

Aproksymacja

Wielomian $W_n(x)$ może być wyrażony albo jako liniowa kombinacja jednomianów

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k \quad (4)$$

albo jako kombinacja liniowa wielomianów wyższego stopnia $w_k(x)$

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k w_k(x) \quad (5)$$

Sformułowanie zagadnienia aproksymacji

Twierdzenie 2 (Hilbert)

Jeśli $f(x)$ jest okresową funkcją ciągłą o okresie $T > 0$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian trygonometryczny

$$R_n(t) = a_0 + \sum_{k=0}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (6)$$

gdzie $n = n(\varepsilon)$ i $\omega = 2\pi/T$, spełniający dla wszystkich wartości t nierówność

$$|f(x) - R_n(t)| \leq \varepsilon \quad (7)$$

Rodzaje aproksymacji

- 1 Aproksymacja wielomianami $f(x) \simeq \sum_{k=0}^n a_k x^k$
- 2 Aproksymacja wielomianami ortogonalnymi $f(x) \simeq \sum_{k=0}^n a_k W_k$, gdzie W_k to na ogół wielomiany Legendre'a, Czebyszewa pierwszego i drugiego rodzaju, Laguerre'a i Hermite'a.
- 3 Aproksymacja funkcjami trygonometrycznymi

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$
- 4 Aproksymacja funkcjami sklejanymi $f(x) \simeq S(x)$
- 5 Aproksymacja funkcjami wymiernymi $f(x) \simeq \frac{\sum_{k=0}^m a_k x^k}{\sum_{k=0}^n b_k x^k}$
- 6 Aproksymacja funkcjami wykładniczymi $f(x) \simeq \sum_{k=0}^n a_k \exp(\lambda_k x)$

Rodzaje aproksymacji

Dygresja – wielomiany

Wielomian Czebyszewa (k -tego stopnia) $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, lub inna postać

$$T_k(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^k + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^k \right]$$

Wygodne związki rekurencyjne

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{k+1} = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad x \in [-1, 1]$$

Wielomiany Czebyszewa spełniają warunki ortogonalności

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ \pi & \text{dla } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } n = m \neq 0 \end{cases}$$

Rodzaje aproksymacji

Twierdzenie 3

Ze wszystkich wielomianów n -tego stopnia z współczynnikiem przy najwyższej potędze $a_n = 1$, wielomianem o najmniejszym *maximum* modułu w przedziale $x \in [-1, 1]$ jest wielomian

$$W_n(x) = 2^{-n+1} T_n(x),$$

gdzie $T_n(x)$ – wielomian Czebyszewa n -tego stopnia.

Rodzaje aproksymacji

Dygresja – wielomiany

Wielomian Hermite'a

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2})$$

dla $x \in (-\infty, \infty)$. Wygodne związki rekurencyjne

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_{k+1} = 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x), \quad k > 0$$

Wielomiany Hermite'a spełniają warunki ortogonalności

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{dla } n = m \end{cases}$$

Rodzaje aproksymacji

Dygresja – wielomiany

Wielomian Laguerre'a

$$L_k(x) = (-1)^k e^x \frac{d^k}{dx^k} (x^k e^{-x})$$

dla $x \in [0, \infty]$. Lub inaczej

$$L_k(x) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} m! x^{k-m}$$

Wygodne związki rekurencyjne ($k > 0$)

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x - 1, \quad L_{k+1}(x) = (x - 2k - 1)L_k(x) - k^2 L_{k-1}(x)$$

Wielomiany Laguerre'a spełniają warunki ortogonalności

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ (n!)^2 & \text{dla } n = m \end{cases}$$

Rodzaje aproksymacji

Dygresja – wielomiany

Wielomian Legendre'a

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k}$$

dla $x \in [-1, 1]$.

Wygodne związki rekurencyjne ($k > 0$)

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad (k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)$$

Wielomiany Legendre'a spełniają warunki ortogonalności dla $x \in [-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ (n + \frac{1}{2})^{-1} & \text{dla } n = m \end{cases}$$

Rodzaje aproksymacji

Aproksymacja interpolacyjna

Tu żądamy, aby dana funkcja $f(x)$ i funkcja aproksymacyjna $F(x)$ przyjmowały te same wartości (wraz ze swymi pochodnymi do rzędu k) w zadanych węzłach

$$f(x_i) = F(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (8)$$

W tym przypadku, zależnie od zagadnienia, do aproksymacji interpolacyjnej najczęściej stosuje się wielomiany Hermite'a, Taylora, Newtona, Gaussa i Lagrange'a.

Rodzaje aproksymacji

Aproksymacja w unormowanej przestrzeni liniowej

gdzie błąd szacuje się wg normy ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$)

$$\|f(x) - F(x)\|_p = \left(\int_a^b |f(x) - F(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (9)$$

lub

$$\|f(x) - F(x)\|_p = \left(\int_a^b |f(x) - F(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} \quad (10)$$

Rodzaje aproksymacji

Aproksymacja jednostajna

gdzie błąd szacuje się wg normy

$$\|f(x) - F(x)\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f(x) - F(x)\|_p \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - F(x)| \quad (11)$$

Rodzaje aproksymacji

Aproksymacja w przestrzeniach Hilberta

Przestrzeń Hilberta – rzeczywista lub zespolona przestrzeń liniowa z określonym **iloczynem skalarnym** (inaczej przestrzeń unitarna) dla której **norma** wyznaczona przez iloczyn skalarny jest zupełna.

Przestrzeń unormowana – przestrzeń liniowa, w której określono pojęcie **normy**.

Norma to bezpośrednie uogólnienie pojęcia długości (modułu) wektora w przestrzeni euklidesowej.

Rodzaje aproksymacji

Aproksymacja w przestrzeniach Hilberta

Przestrzeń zupełna – przestrzeń metryczna, w której każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę należącą do tej przestrzeni.

Ciąg Cauchy'ego – ciąg elementów przestrzeni metrycznej (najczęściej zbioru liczb rzeczywistych) spełniających tzw. warunek Cauchy'ego. Dla liczb rzeczywistych warunek ten przyjmuje postać:

Niech $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczbowym. Spełnia on warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m, n > N} |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Przestrzenie Hilberta są podstawowym pojęciem analizy funkcjonalnej. Do matematyki wprowadził je David Hilbert pod koniec XIX w. Przestrzenie Hilberta są także podstawowym narzędziem wykorzystywanym w wielu dziedzinach fizyki, między innymi w mechanice kwantowej.

Rodzaje aproksymacji

Twierdzenie 4 (Hilbert)

Niech G będzie dowolną podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H . Niech element $f(x) \in H$ i nie należy do G . Jeżeli w G istnieje element $y(x)$ najmniej oddalony od $f(x)$, to różnica $f(x) - y(x)$ jest ortogonalna do każdego elementu $g(x) \in G$, to znaczy, że iloczyn skalarny

$$(f(x) - y(x), g(x)) = 0, \quad \text{gdy } g(x) \in G. \quad (12)$$

Element $g(x) \in G$ o wyżej wymienionej właściwości nazywamy **rzutem elementu** $f(x) \in H$ na podprzestrzeń G .

Rodzaje aproksymacji

Aproksymacja w przestrzeniach Hilberta

Twierdzenie Hilberta pozwala nam jednoznacznie zdefiniować funkcję (porównaj równanie (1))

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) \quad (13)$$

dla której spełniony jest warunek (2); w naszym przypadku spełniony jest warunek

$$(f - y, g_k) = 0, \quad \text{dla każdego } k = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

Rodzaje aproksymacji

Aproksymacja w przestrzeniach Hilberta

Po rozpisaniu, równanie (14) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(g_1, g_1) + \lambda_2(g_2, g_1) + \cdots + \lambda_n(g_n, g_1) &= (f, g_1) \\
 \lambda_1(g_1, g_2) + \lambda_2(g_2, g_2) + \cdots + \lambda_n(g_n, g_2) &= (f, g_2) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \lambda_1(g_1, g_n) + \lambda_2(g_2, g_n) + \cdots + \lambda_n(g_n, g_n) &= (f, g_n)
 \end{aligned} \tag{15}$$

Wyznacznik Gramma (charakterystyczny wyznacznik tego układu równań) jest różny od zera, gdyż funkcje g_1, g_2, \dots, g_n są liniowo niezależne

$$\begin{vmatrix}
 (g_1, g_1) & (g_2, g_1) & \cdots & (g_n, g_1) \\
 (g_1, g_2) & (g_2, g_2) & \cdots & (g_n, g_2) \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 (g_1, g_n) & (g_2, g_n) & \cdots & (g_n, g_n)
 \end{vmatrix} = G(g_1, g_2, \dots, g_n) \neq 0 \tag{16}$$

czyli istnieje jednoznaczne rozwiązanie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ układu równań (15) spełniające warunek (2).

Rodzaje aproksymacji

Aproksymacja w przestrzeniach Hilberta

Funkcje g_1, g_2, \dots, g_n są ortogonalne, co powoduje, że układ równań redukuje się do systemu

$$\lambda_k (g_k, g_k) = (f, g_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

czyli

$$\lambda_k = \frac{(f, g_k)}{(g_k, g_k)} \quad (18)$$

więc funkcja najlepiej aproksymującą funkcję $f(x)$ ma postać

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(f, g_k)}{(g_k, g_k)} g_k(x) \quad (19)$$

Gdy g_1, g_2, \dots, g_n są ortonormalne ($(g_k, g_k) = 1$), to

$$y(x) = \sum_{k=1}^n (f, g_k) g_k(x) \quad (20)$$

Rodzaje aproksymacji

Przykład 1

Chcemy dokonać aproksymacji funkcji

$$f(x) = \pi(x+1)\sqrt{1-x^2}$$

w przedziale $x \in [-1, 1]$ za pomocą wielomianów Czebyszewa T_k .
Wg naszych oznaczeń $g_k = T_k$, więc

$$(f, T_0) = \left(\pi(x+1)\sqrt{1-x^2}, T_0 \right) = \pi \int_{-1}^1 (1+x) dx = 2\pi$$

$$(f, T_1) = \pi \int_{-1}^1 (1+x)x dx = \frac{2}{3}\pi$$

Rodzaje aproksymacji

Przykład 1 c.d.

$$(f, T_2) = \pi \int_{-1}^1 (1+x)(2x^2-1)dx = -\frac{2}{3}\pi$$

$$(f, T_3) = \pi \int_{-1}^1 (1+x)(4x^3-3x)dx = -\frac{2}{5}\pi$$

$$(f, T_4) = \pi \int_{-1}^1 (1+x)(8x^4-8x^2+1)dx = -\frac{2}{15}\pi$$

Rodzaje aproksymacji

Przykład 1 c.d.

przy czym

$$(T_0, T_0) = \pi, \quad \text{oraz } (T_k, T_0) = \frac{1}{2}\pi, \quad \text{dla } k > 0$$

Funkcja $y_4(x)$ przyjmuje postać

$$y_4(x) = 2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}(2x^2 - 1) - \frac{4}{5}(4x^3 - 3x) - \frac{4}{15}(8x^4 - 8x^2 + 1),$$

a po uporządkowaniu

$$y_4(x) = -\frac{32}{15}x^4 - \frac{16}{5}x^3 - \frac{8}{15}x^2 + \frac{56}{15}x + \frac{46}{15} \simeq \pi(x+1)\sqrt{1-x^2}$$

Błąd aproksymacji

$$\|f - y_4\| = \sqrt{\|f^2\| + \|y_4\| - 2(f, y_4)} \simeq 0.25$$

Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami sklejanymi

stopnia trzeciego z równoodległymi węzłami

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b - a}{n}$$

Metodę interpolacji funkcjami sklejanymi omówiliśmy w Wykładzie 6. Tu skorzystamy z definicji tam podanych.

Poszukujemy takich współczynników c_i , by odchylenie kwadratowe

$$I = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x) \right]^2 dx \quad (21)$$

było jak najmniejsze.

Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami sklejanymi

Liczymy pochodne $\frac{\partial I}{\partial c_j}$, $j = -1, 0, 1, \dots, n+1$, przyrównujemy je do zera, i otrzymujemy układ $n+3$ równań z $n+3$ niewiadomymi c_i

$$\sum_{i=-1}^{n+1} a_{ij} c_i = \frac{1}{h} \int_a^b f(x) \Phi_j^3(x) dx, \quad j = -1, 0, 1, \dots, n+1 \quad (22)$$

gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \int_a^b \Phi_i^3(x) \Phi_j^3(x) dx$$

Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami sklejanymi

Macierz układu (22) jest macierzą symetryczną i wstęgową (pięciodiagonalną), czyli $a_{ij} = 0$ dla $|i - j| \geq 4$. Różne od zera współczynniki to:

$$a_{-1,-1} = a_{n+1,n+1} = \frac{1}{7}, \quad a_{-1,0} = \frac{129}{140}, \quad a_{n+1,n} = \frac{6}{7}$$

$$a_{-1,1} = a_{n+1,n-1} = \frac{3}{7}, \quad a_{0,0} = a_{n,n} = \frac{302}{35}$$

$$a_{0,1} = a_{n,n-1} = \frac{531}{70}, \quad a_{1,1} = a_{n-1,n-1} = \frac{599}{35}$$

$$a_{k,k} = \frac{604}{35}, \quad (\text{dla } 2 \leq k \leq n-2), \quad a_{k,k+1} = \frac{1191}{140}, \quad (\text{dla } 1 \leq k \leq n-2)$$

$$a_{k,k+2} = \frac{6}{7}, \quad (\text{dla } 0 \leq k \leq n-2), \quad a_{k,k+3} = \frac{1}{140}, \quad (\text{dla } -1 \leq k \leq n-2)$$

$$a_{i,j} = a_{j,i}, \quad i, j = -1, 0, 1, \dots, n+1$$

Aproksymacja Padé

Twierdzenie 5 (Taylor)

Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Załóżmy, że funkcja $f(x) : [a, b] \rightarrow X$ jest $(n+1)$ -razy różniczkowalna na $[a, b]$ w sposób ciągły. Wówczas dla każdego $x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + \\ &\quad + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x, a) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + R_n(x, a) \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie reszta $R_n(x, a)$ spełnia warunek $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x, a)}{(x-a)^n} = 0$.

Jeśli $a = 0$, to rozwinięcie w szereg Taylora (23) nazywamy **rozwinięciem w szereg MacLaurina**.

Aproksymacja Padé

Rozwinięcia w szereg Taylora i MacLaurina

Przybliżanie funkcji przy pomocy wzoru Taylora ma charakter lokalny, tzn. odnosi się jedynie do wybranego punktu a . Jeżeli w zastosowaniach pojawia się potrzeba mówienia o innych wartościach, to zakłada się o nich najczęściej, że są dostatecznie bliskie punktu a . Sensowne wydaje się jednak pytanie o to, kiedy wielomian ze wzoru Taylora przybliży funkcję ze z góry zadaną dokładnością – w tym celu potrzebne jest dokładniejsze oszacowanie reszty lub po prostu wyrażenie jej w sposób jawny.

Aproksymacja Padé

Rozwinięcia w szereg Taylora i MacLaurina

W przypadku gdy $X = \mathbb{R}$ resztę we wzorze Taylora można wyrazić w sposób jawny. Oto niektóre ze znanych przedstawień reszty:

- Reszta w postaci całkowej

$$R_n(x, a) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

- Reszta w postaci Lagrange'a

$$\bigvee_{\theta \in [0,1]} R_n(x, a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$$

Aproksymacja Padé

Rozwinięcia w szereg Taylora i MacLaurina

- Reszta w postaci Cauchy'ego

$$\bigvee_{\theta \in [0,1]} R_n(x, a) = \frac{(x - a)^{n+1}}{n!} (1 - \theta)^n f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))$$

- Reszta w postaci Schlömilcha-Roche'a

$$\bigvee_{\xi \in [a,x]} \bigvee_{p > 0} R_n(x, a) = \frac{(x - a)^p (x - \xi)^{n+1-p}}{pn!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Dla $p = 1$ otrzymujemy postać reszty Cauchy'ego. Dla $p = n + 1$ otrzymujemy postać reszty Lagrange'a.

Aproksymacja Padé

Przykłady rozwinięć w szereg Taylora i MacLaurina

- Pierwiastek kwadratowy

$$\sqrt{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n, \quad |x| < 1$$

- Funkcja wykładnicza

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aproksymacja Padé

Przykłady rozwinięć w szereg Taylora i MacLaurina

- Logarytm naturalny

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad -1 < x < 1$$

- Uogólniony dwumian Newtona

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\text{gdzie } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Aproksymacja Padé

A co robić, gdy przybliżenie metodą rozwinięcia w szereg Taylora daje niewystarczającą dokładność, albo jest niemożliwa? Wtedy stosujemy przybliżenie Padé.

Metoda ta polega na takim doborze wielomianów $P_m(x)$ i $Q_k(x)$, aby funkcje $f(x)$ i $P_m(x)/Q_k(x)$ dla $x = 0$ były sobie równe i miały w tym punkcie jak to tylko możliwe najwięcej równych pochodnych. Widać, że w przypadku $k = 0$ jest to po prostu rozwinięcie w szereg MacLaurina.

Aproksymacja Padé

Zakładamy, że wielomiany $P_m(x)$ i $Q_k(x)$ są nieskracalne i mają postać

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j, \quad Q_k(x) = \sum_{j=0}^k b_j x^j \quad (24)$$

a rozwinięcie w szereg MacLaurina funkcji $f(x)$ ma postać

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

Przyjmujemy, że wyraz wolny w $Q_k(x)$ jest równy 1, bo w mianowniku nie może być zera.

Aproksymacja Padé

Zbadajmy różnicę

$$f(x) - \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \frac{(\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j)(\sum_{j=0}^k b_j x^j) - \sum_{j=0}^m a_j x^j}{\sum_{j=0}^k b_j x^j} \quad (25)$$

Mamy do dyspozycji $m + 1$ współczynników a_j i k współczynników b_j , czyli razem $N + 1$ parametrów. Chcemy, by funkcja $f(x) - R_{mk}(x)$ wraz z N pochodnymi była równa zero w punkcie $x = 0$. Warunek ten będzie spełniony, gdy w liczniku najmniejszy wykładnik potęgi x będzie równy $N + 1$ (dlaczego?).

Aproksymacja Padé

Mamy zatem

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j\right) \left(\sum_{j=0}^k b_j x^j\right) - \sum_{j=0}^m a_j x^j = \sum_{j=N+1}^{\infty} d_j x^j \quad (26)$$

Znikanie współczynników przy pierwszych $N + 1$ potęgach x po lewej stronie równanie (26) generuje równania

$$\sum_{j=0}^k c_{N-s-j} b_j = 0, \quad s = 0, \dots, N - m - 1; \quad c_j = 0 \text{ dla } j < 0, \quad b = 1, \quad (27)$$

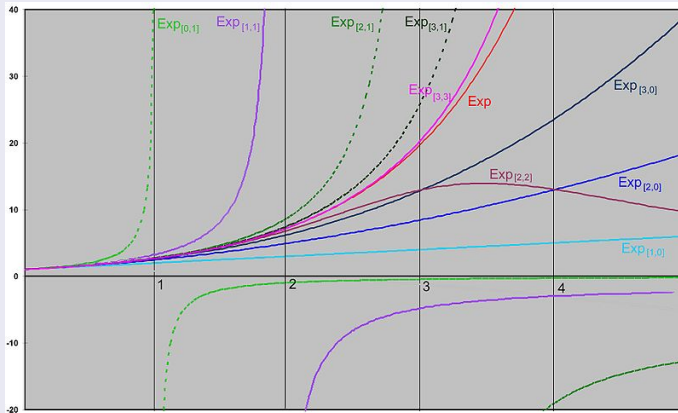
$$a_r = \sum_{j=0}^r c_{r-j} b_j, \quad r = 0, \dots, m; \quad b_j = 0 \text{ dla } j > k$$

Aproksymacja Padé

Jeśli ten układ $N + 1$ równań liniowych dla $N + 1$ niewiadomych ma rozwiązanie, to daje ono szukane przybliżenie w postaci

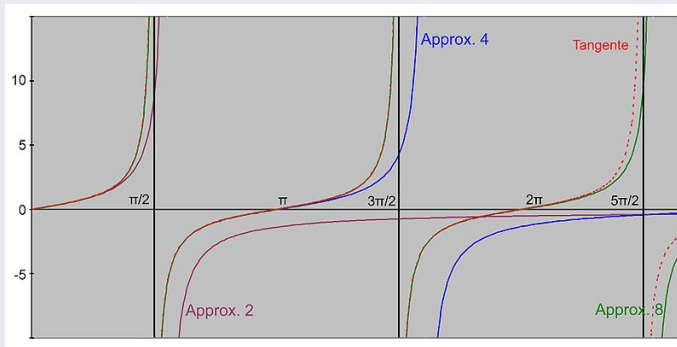
$$R_{mk}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} \quad (28)$$

Aproksymacja Padé



Rys. 1: Aproksymacja Padé funkcji wykładniczej

Aproksymacja Padé



Rys. 2: Aproksymacja Padé funkcji tangens

Koniec? :-)

Koniec wykładu 7