Metody Numeryczne, część 3
studia stacjonarne

Kwadratury, czyli
numeryczne całkowanie

Krystyna Ziętak
październik 2018

Spis treści

Literatura:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT 2006.
- J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, WNT 1981.
- A. Grabarski, I. Musiał-Walczak, W. Sadkowski, A. Smoktunowicz, J. Wąsowski, *Ćwiczenia laboratoryjne z metod numerycznych*, Oficyna Wyd. Politech. Warszawskiej 2002.
- K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, PWN 2013.
- **materiały internetowe:** http://wazniak.mimuw.edu.pl

Obliczanie całek

Przykłady całek nieoznaczonych

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + d$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + d$$

Jeśli $F(x) = \int f(x) \, dx$, to

$$F'(x) = f(x)$$

Całka oznaczona

Niech $F(x) = \int f(x)\ dx$. Wówczas

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Przykład całki oznaczonej

$$F(x) = \int \sqrt{bx+c}\ dx = \frac{2}{3b}(bx+c)\sqrt{bx+c}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x+2}\ dx = F(1) - F(-1) = 2\sqrt{3} - 2/3 = 2.797435\ldots$$

zob. K. Kuratowski,
Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej.

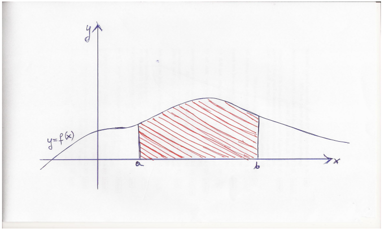
Niech $f(x) > 0$ dla $a \leq x \leq b$. Wówczas całka oznaczona

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

jest polem obszaru złożonego przez punkty (x, y) spełniające warunki

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x),$$

czyli jest to pole obszaru między wykresem funkcji $f(x)$ i osią Ox na przedziale $[a, b]$.



Zastosowanie interpolacji do obliczania całek oznaczonych

Celem jest wyznaczenie przybliżonej wartości całki oznaczonej

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

W tym celu całkuje się wielomian $w_n(x)$ interpolujący funkcję $f(x)$ na przedziale $[a, b]$ (węzły interpolacji wybiera się z przedziału $[a, b]$). Wówczas wartość całki

$$\int_a^b w_n(x)\,dx$$

jest przybliżoną wartością całki (1).

- $w_0(x)$ - wielomian interpolujący funkcję $f(x)$ na jednym węźle $x_0 = a$
$$w_0(x) = f(a)$$
- $w_1(x)$ - wielomian interpolujący funkcję $f(x)$ na węzłach $x_0 = a, x_1 = b$
$$w_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$
- $w_2(x)$ - wielomian interpolujący funkcję $f(x)$ na węzłach
$$x_0 = a, \quad x_1 = (a+b)/2, \quad x_2 = b$$
(zob. poprzednie wykłady o interpolacji).

$$W(x) = \int w_0(x)\ dx = \int f(a)\ dx = f(a)x + c$$

wzór prostokątów

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \int_a^b w_0(x)\ dx = W(b) - W(a)$$
$$= (b-a)f(a)$$

$$W(x) = \int w_1(x)\ dx = \int \left(f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} \right)\ dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left((f(b) - f(a))\frac{x^2}{2} + (bf(a) - af(b))\,x \right) + c$$

wzór trapezów

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \int_a^b w_1(x)\ dx = W(b) - W(a)$$

$$= \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a))$$

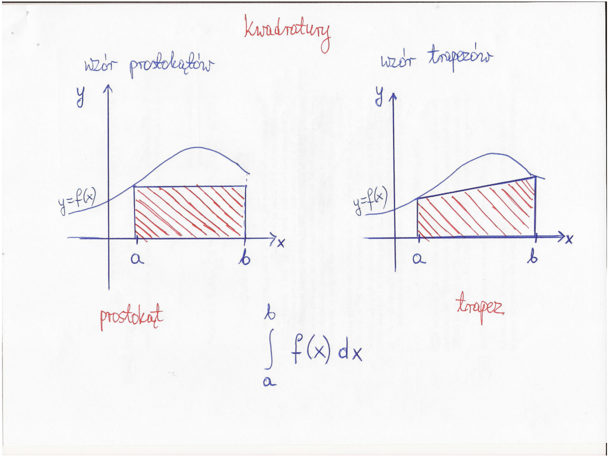
$$W(x) = \int w_2(x)\ dx$$

wzór Simpsona (kwadratura parabol)

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \int_a^b w_2(x)\ dx = W(b) - W(a)$$

$$= \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Graficzna ilustracja wzoru prostokątów i wzoru trapezów



Zestawienie wzorów

- Wzór prostokątów

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx (b-a)f(a)$$

- Wzór trapezów

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)),$$

- Wzór Simpsona

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Błędy kwadratur $\quad \xi \in (a, b)$

- dla wzoru prostokątów

$$E(f) = \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(a) = \frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\xi)$$

- dla wzoru trapezów

$$E(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

- błąd dla wzoru Simpsona

$$E(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$= -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x+2}\, dx = \mathbf{2.797435}$$

Przybliżona wartość całki obliczona za pomocą

- wzoru prostokątów: $(b-a)f(a) = 2f(-1) = \mathbf{2.0}$
- wzoru trapezów:

$$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = f(-1)+f(1) = 1+\sqrt{3} = \mathbf{2.732}$$

- wzoru Simpsona: $\frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

$$= \frac{1}{3}(1+4\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbf{2.796}$$

- kwadratury Gaussa: **2.797460**
  (metoda ta wykracza poza program wykładu)

Ocena dokładności kwadratur

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x+2}\, dx$$

- wzór prostokątów

$$E(f) = \frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\xi), \qquad \xi \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi+2}}$$

$$|E(f)| \leq \max_{\xi \in [-1,1]} \frac{1}{\sqrt{\xi+2}} \leq 1$$

faktyczny błąd=dokładna wartość całki minus przybliżona wartość całki obliczona z wzoru prostokątów

$$2.797435 - 2 = 0.797435 \leq 1$$

- wzór trapezów

$$E(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \qquad \xi \in (-1, 1)$$

$$f''(\xi) = -\frac{1}{4}(\xi + 2)^{-3/2}$$

$$E(f) = -\frac{8}{12} f''(\xi) = \frac{1}{6}(\xi + 2)^{-3/2}$$

$$|E(f)| \leq \max_{\xi \in [-1,1]} \frac{1}{6}(\xi + 2)^{-3/2} \leq \frac{1}{6} \approx 0.16$$

faktyczny błąd=dokładna wartość całki minus przybliżona wartość całki obliczona z wzoru trapezów

$$2.797435 - 2.732 = 0.065435 \leq 0.16$$