Aproksymacja

Metody Numeryczne

dr ing. Grzegorz Fotyga

Gdańsk University of Technology
Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics
Department of Microwave and Antenna Engineering

11 maja 2018

Plan wykładu

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**
- Skąd nazwa "**regresja**"???

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**
- Skąd nazwa "**regresja**"???
- Cytując: `http://blog.minitab.com/blog/statistics-and-quality-data-analysis/so-why-is-it-called-regression-anyway`

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**
- Skąd nazwa "**regresja**"???
- Cytując: `http://blog.minitab.com/blog/statistics-and-quality-data-analysis/so-why-is-it-called-regression-anyway`
- The name was set up by the committee called the ICSSNN.

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**
- Skąd nazwa "**regresja**"???
- Cytując: `http://blog.minitab.com/blog/statistics-and-quality-data-analysis/so-why-is-it-called-regression-anyway`
- The name was set up by the committee called the ICSSNN.
- Transcript of a secretly recorded ICSSNN meeting:

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**
- Skąd nazwa "**regresja**"???
- Cytując: `http://blog.minitab.com/blog/statistics-and-quality-data-analysis/so-why-is-it-called-regression-anyway`
- The name was set up by the committee called the ICSSNN.
- Transcript of a secretly recorded ICSSNN meeting:
  - “It describes the relationship between one or more 'input' variables and an 'output' variable. It gives you an equation to predict values for the 'output' variable, by plugging in values for the input variables.”

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**
- Skąd nazwa "**regresja**"???
- Cytując: `http://blog.minitab.com/blog/statistics-and-quality-data-analysis/so-why-is-it-called-regression-anyway`
- The name was set up by the committee called the ICSSNN.
- Transcript of a secretly recorded ICSSNN meeting:
  - "It describes the relationship between one or more 'input' variables and an 'output' variable. It gives you an equation to predict values for the 'output' variable, by plugging in values for the input variables."
  - "Oh dear. That sounds disturbingly transparent."

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**
- Skąd nazwa "**regresja**"???
- Cytując: `http://blog.minitab.com/blog/statistics-and-quality-data-analysis/so-why-is-it-called-regression-anyway`
- The name was set up by the committee called the ICSSNN.
- Transcript of a secretly recorded ICSSNN meeting:
  - "It describes the relationship between one or more 'input' variables and an 'output' variable. It gives you an equation to predict values for the 'output' variable, by plugging in values for the input variables."
  - "Oh dear. That sounds disturbingly transparent."
  - "Yes. We need to fix that—call it something grey and nebulous. What do you think of 'regression'?"

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**
- Skąd nazwa "**regresja**"???
- Cytując: `http://blog.minitab.com/blog/statistics-and-quality-data-analysis/so-why-is-it-called-regression-anyway`
- The name was set up by the committee called the ICSSNN.
- Transcript of a secretly recorded ICSSNN meeting:
  - "It describes the relationship between one or more 'input' variables and an 'output' variable. It gives you an equation to predict values for the 'output' variable, by plugging in values for the input variables."
  - "Oh dear. That sounds disturbingly transparent."
  - "Yes. We need to fix that—call it something grey and nebulous. What do you think of 'regression'?"
  - "What's 'regressive' about it?

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**
- Skąd nazwa "**regresja**"???
- Cytując: `http://blog.minitab.com/blog/statistics-and-quality-data-analysis/so-why-is-it-called-regression-anyway`
- The name was set up by the committee called the ICSSNN.
- Transcript of a secretly recorded ICSSNN meeting:
  - "It describes the relationship between one or more 'input' variables and an 'output' variable. It gives you an equation to predict values for the 'output' variable, by plugging in values for the input variables."
  - "Oh dear. That sounds disturbingly transparent."
  - "Yes. We need to fix that—call it something grey and nebulous. What do you think of 'regression'?"
  - "What's 'regressive' about it?
  - **"Nothing at all. That's the point!"**

Wstęp (1)

- **Aproksymacja** - alternatywna nazwa: **Least-Squares Regression, regresja liniowa**
- Skąd nazwa "**regresja**"???
- Cytując: `http://blog.minitab.com/blog/statistics-and-quality-data-analysis/so-why-is-it-called-regression-anyway`
- The name was set up by the committee called the ICSSNN.
- Transcript of a secretly recorded ICSSNN meeting:
  - "It describes the relationship between one or more 'input' variables and an 'output' variable. It gives you an equation to predict values for the 'output' variable, by plugging in values for the input variables."
  - "Oh dear. That sounds disturbingly transparent."
  - "Yes. We need to fix that—call it something grey and nebulous. What do you think of 'regression'?"
  - "What's 'regressive' about it?
  - **"Nothing at all. That's the point!"**
- ICSSNN: **The International Committee for Sadistic Statistical Nomenclature and Numerophobia**

Wstęp (2)

- The truth story: the word **regression** was used by Sir Francis Galton to describe the relationship between heights of parents and their children. Tall parents tend to have tall children, but **shorter** than themselves while short parents tend to have short children, but **taller** than themselves. He called this **regression towards mediocrity**.

Wstęp (2)

- The truth story: the word **regression** was used by Sir Francis Galton to describe the relationship between heights of parents and their children. Tall parents tend to have tall children, but **shorter** than themselves while short parents tend to have short children, but **taller** than themselves. He called this **regression towards mediocrity**.
- Sir Francis Galton

Wstęp (2)

- The truth story: the word **regression** was used by Sir Francis Galton to describe the relationship between heights of parents and their children. Tall parents tend to have tall children, but **shorter** than themselves while short parents tend to have short children, but **taller** than themselves. He called this **regression towards mediocrity**.
- Sir Francis Galton

Wstęp (2)

- The truth story: the word **regression** was used by Sir Francis Galton to describe the relationship between heights of parents and their children. Tall parents tend to have tall children, but **shorter** than themselves while short parents tend to have short children, but **taller** than themselves. He called this **regression towards mediocrity**.
- Sir Francis Galton

Wstęp (2)

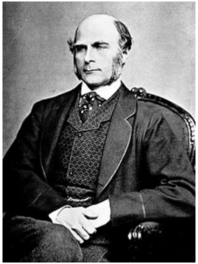
- The truth story: the word **regression** was used by Sir Francis Galton to describe the relationship between heights of parents and their children. Tall parents tend to have tall children, but **shorter** than themselves while short parents tend to have short children, but **taller** than themselves. He called this **regression towards mediocrity**.
- Sir Francis Galton

  English Victorian era statistician, progressive, polymath, sociologist, psychologist, anthropologist, eugenicist, tropical explorer, geographer, inventor, meteorologist, proto-geneticist, and psychometrician.

Wstęp (2)

- The truth story: the word **regression** was used by Sir Francis Galton to describe the relationship between heights of parents and their children. Tall parents tend to have tall children, but **shorter** than themselves while short parents tend to have short children, but **taller** than themselves. He called this **regression towards mediocrity**.
- Sir Francis Galton

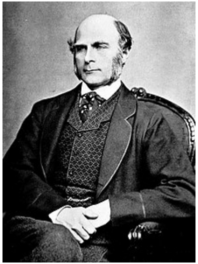
English Victorian era statistician, progressive, polymath, sociologist, psychologist, anthropologist, eugenicist, tropical explorer, geographer, inventor, meteorologist, proto-geneticist, and psychometrician.



Wstęp (2)

- The truth story: the word **regression** was used by Sir Francis Galton to describe the relationship between heights of parents and their children. Tall parents tend to have tall children, but **shorter** than themselves while short parents tend to have short children, but **taller** than themselves. He called this **regression towards mediocrity**.
- Sir Francis Galton

  English Victorian era statistician, progressive, polymath, sociologist, psychologist, anthropologist, eugenicist, tropical explorer, geographer, inventor, meteorologist, proto-geneticist, and psychometrician.



- Literatura: *Numerical Methods for Engineers* by Steven C. Chapra, Raymond P. Canale

Wstęp (3) - Aproksymacja

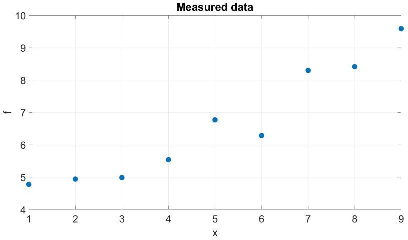
- Przypomnienie: **interpolacja** - jeżeli dane (węzły) są wyznaczone z dużą **dokładnością**, najprostszym rozwiązaniem jest przybliżenie ich rozkładu za pomocą krzywej, która **przechodzi przez** węzły (np. metodą splajnów)

Wstęp (3) - Aproksymacja

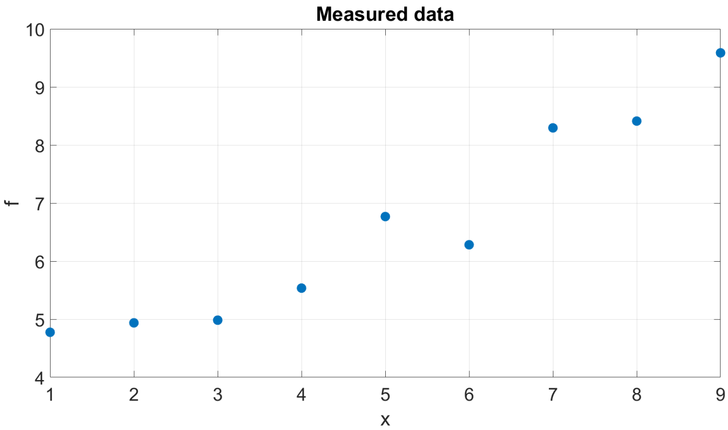
- Przypomnienie: **interpolacja** - jeżeli dane (węzły) są wyznaczone z dużą **dokładnością**, najprostszym rozwiązaniem jest przybliżenie ich rozkładu za pomocą krzywej, która **przechodzi przez** węzły (np. metodą splajnów)
- **Aproksymacja**: Jeżeli dane są obarczone dużym błędem (szumem) pomiarowym, numerycznym, nie ma sensu stosować interpolacji. Wystarczy wyznaczyć *ogólny trend* wykresu.

Wstęp (3) - Aproksymacja

- Przypomnienie: **interpolacja** - jeżeli dane (węzły) są wyznaczone z dużą **dokładnością**, najprostszym rozwiązaniem jest przybliżenie ich rozkładu za pomocą krzywej, która **przechodzi przez** węzły (np. metodą splajnów)
- **Aproksymacja**: Jeżeli dane są obarczone dużym błędem (szumem) pomiarowym, numerycznym, nie ma sensu stosować interpolacji. Wystarczy wyznaczyć *ogólny trend* wykresu.
- Rozpatrzmy przypadek **danych pomiarowych**

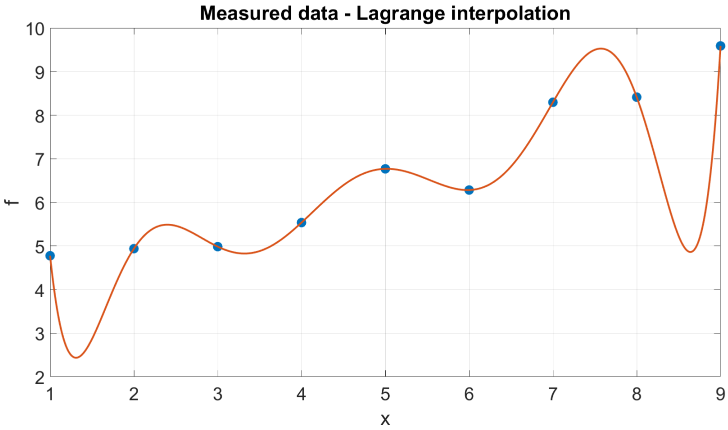


Dane pomiarowe (1)



Dane pomiarowe (2)

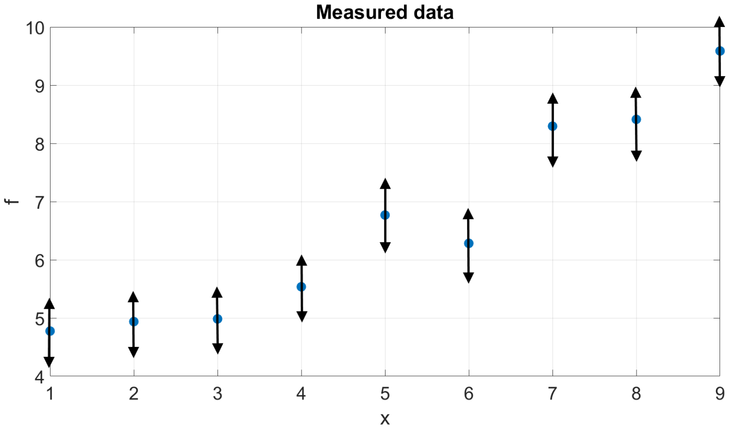
Zastosujmy interpolację Lagrange



Jest OK, ale...

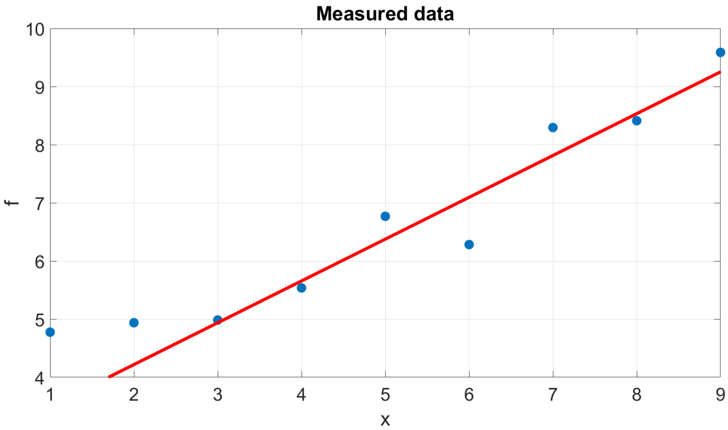
Dane pomiarowe (3)

Jeżeli uwzględnimy, że dane są **obarczone błędem**...



Dane pomiarowe (4)

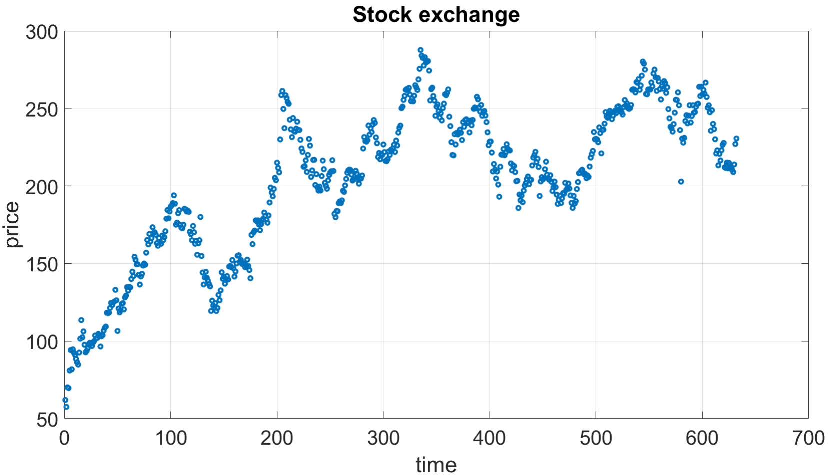
...znacznie lepszym rozwiązaniem będzie **aproksymacja za pomocą prostej**!



Nie ma sensu wyznaczać krzywej przechodzącej przez węzły, ponieważ są one wyznaczone niedokładnie.

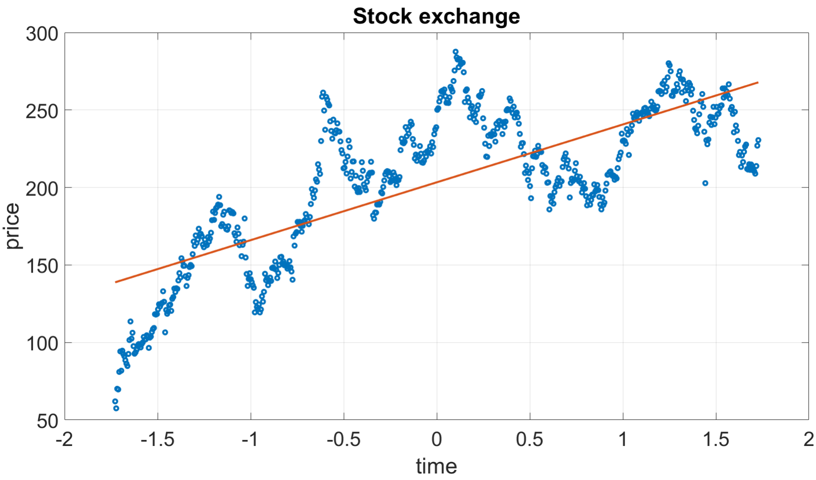
Trends (1)

Bardzo często konieczne jest wyznaczenie **ogólnego trendu** danego zbioru danych. Rozpatrzmy wykres giełdowy. Trend może być reprezentowany za pomocą wielomianu niskiego rzędu, zamiast tabeli (wykresu) z tysiącami wartości.



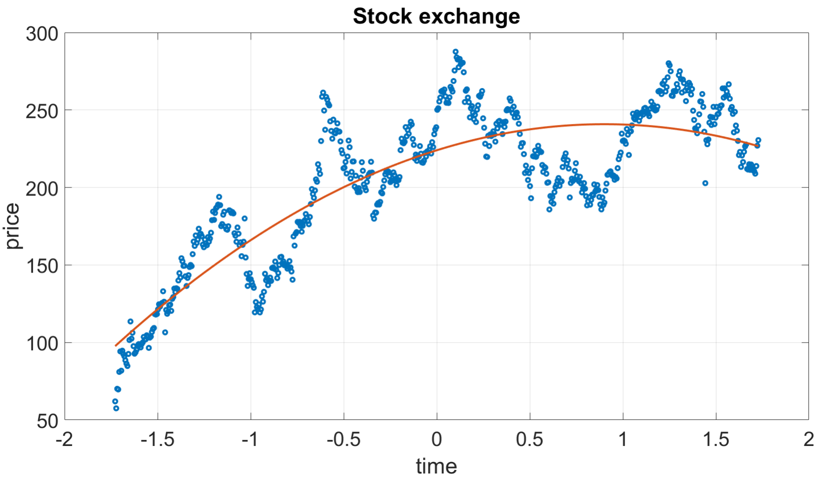
Trends (2)

Prosta



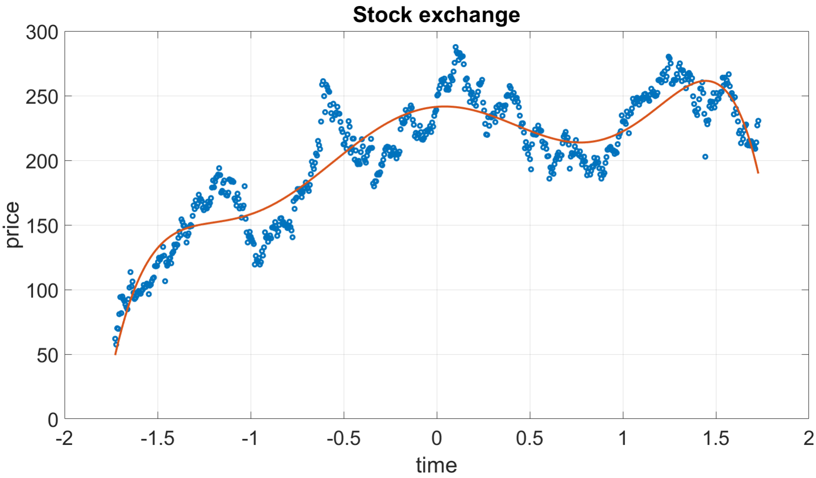
Trends (3)

Parabola



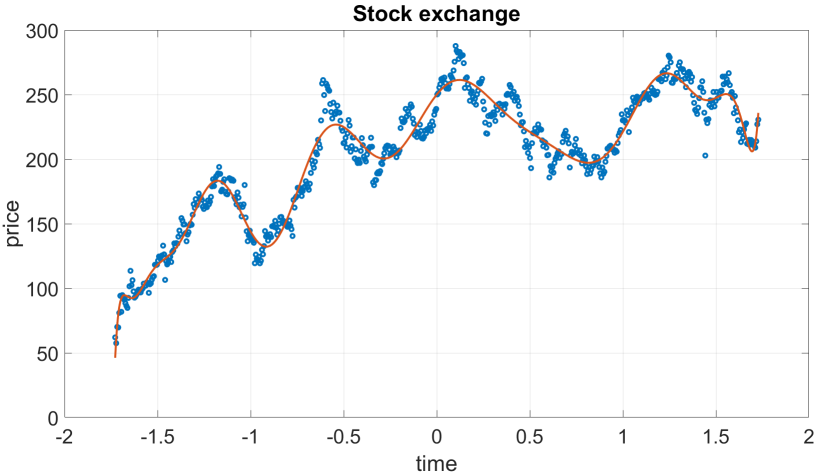
Trends (4)

Wielomian 20 rzędu



Trends (5)

Wielomian 80 rzędu - Zamiast 700 wartości
80 współczynników: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{80} x^{80}$ - **REDUKCJA**.



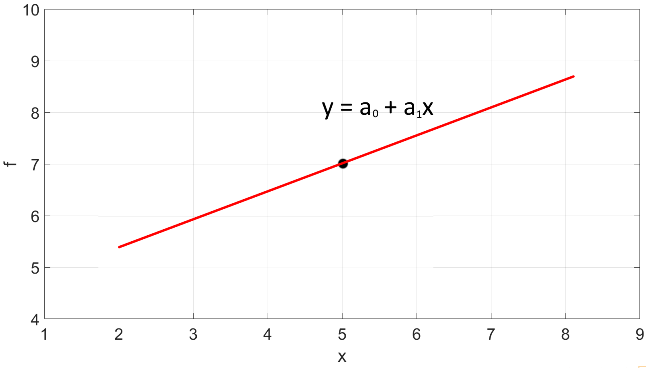
Aproksymacja liniowa (1)

- Zaczniemy od liniowej aproksymacji - *dopasowania prostej* do zbioru n punktów $(x_1, y_1), (x_2, y_2)...(x_n, y_n)$.

Aproksymacja liniowa (1)

- Zaczniemy od liniowej aproksymacji - *dopasowania prostej* do zbioru n punktów $(x_1, y_1), (x_2, y_2)...(x_n, y_n)$.
- Rozpatrzmy prostą, która przechodzi przez **jeden punkt**:

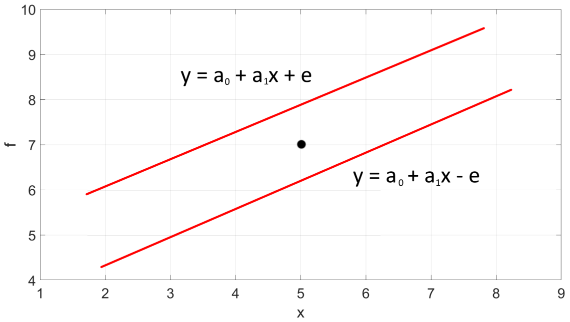
$$y = a_0 + a_1 x \tag{1}$$



Aproksymacja liniowa (2)

- Możemy prosta *przesunąć* o wartość e - (zmiana wartości współczynnika wolnego)

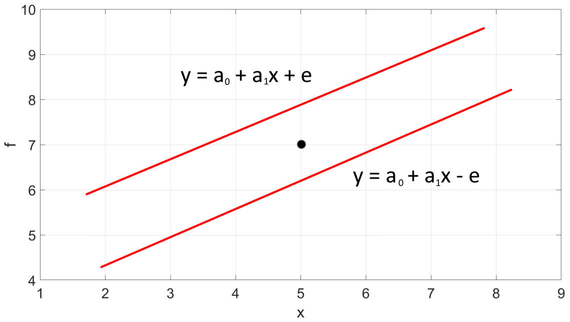
$$
\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1 x + e \\
y &= a_0 + a_1 x - e
\end{aligned} \tag{2}
$$



Aproksymacja liniowa (2)

- Możemy prosta *przesunąć* o wartość e - (zmiana wartości współczynnika wolnego)

$$
\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1 x + e \\
y &= a_0 + a_1 x - e
\end{aligned}
\tag{2}
$$

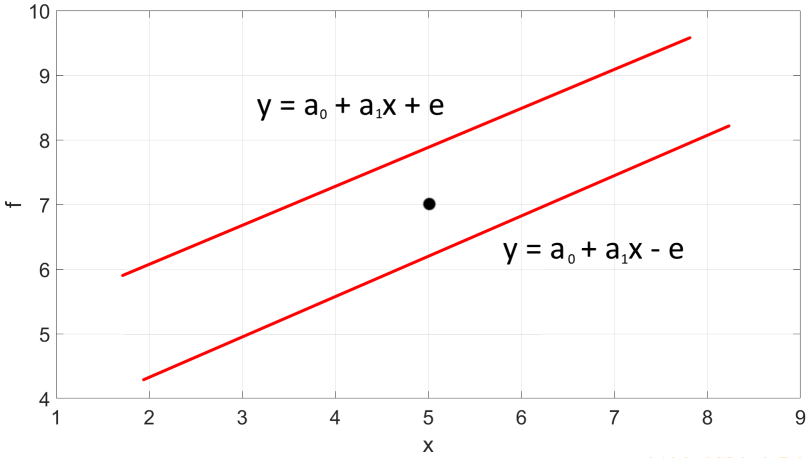


- **Co ważne** - $e = y - a_0 - a_1 x$ jest błędem (residuum) między daną zmierzoną (wyznaczoną), a wartością przybliżona $a_0 + a_1 x$.

Aproksymacja liniowa (3)

- Rozpatrzmy n punktów i prostą:

$$y = a_0 + a_1 x \tag{3}$$

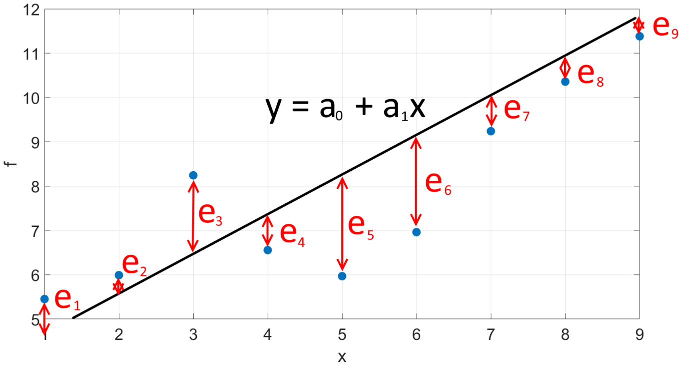


Aproksymacja liniowa (4)

- Rozpatrzmy n punktów i prostą:

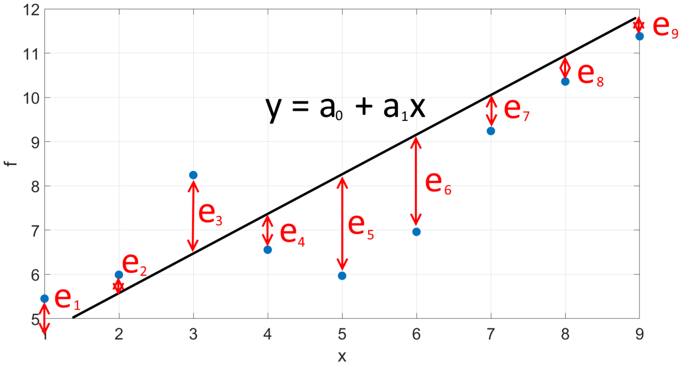
Aproksymacja liniowa (4)

- Rozpatrzmy n punktów i prostą:
- Każdy z punktów jest przesunięty o e_i od $y = a_0 + a_1 x$.



Aproksymacja liniowa (4)

- Rozpatrzmy n punktów i prostą:
- Każdy z punktów jest przesunięty o e_i od $y = a_0 + a_1 x$.



- Najpopularniejsza metoda dopasowania prostej do zbioru punktów polega na minimalizacji **sumy kwadratów błędów** e_i. Jest to metoda **najmniejszych kwadratów** (least squares).

Aproksymacja liniowa (5)

- Najpopularniejsza metoda dopasowania prostej do zbioru punktów polega na minimalizacji **sumy kwadratów błędów** e_i. Jest to metoda **najmniejszych kwadratów** (least squares).

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \tag{4}$$

Aproksymacja liniowa (5)

- Najpopularniejsza metoda dopasowania prostej do zbioru punktów polega na minimalizacji **sumy kwadratów błędów** e_i. Jest to metoda **najmniejszych kwadratów** (least squares).

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \tag{4}$$

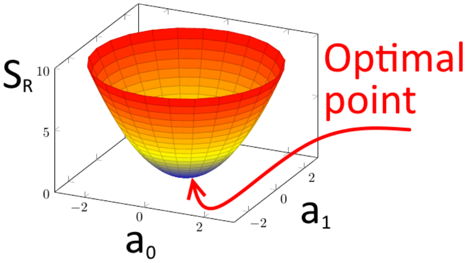
- Tylko **jedna prosta** spełnia powyższe kryterium.

Aproksymacja liniowa (5)

- Najpopularniejsza metoda dopasowania prostej do zbioru punktów polega na minimalizacji **sumy kwadratów błędów** e_i. Jest to metoda **najmniejszych kwadratów** (least squares).

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \qquad (4)$$

- Tylko **jedna prosta** spełnia powyższe kryterium.
- W jaki sposób wyznaczyć współczynniki a_0 i a_1?



Aproksymacja liniowa (6)

- Punkt (a_0, a_1) minimalizujące S_r: trzeba policzyć pochodne S_r względem współczynników (a_0, a_1):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_r}{\partial a_0} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i) \\
\frac{\partial S_r}{\partial a_1} &= -2\sum_{i=1}^{n}[(y_i - a_0 - a_1 x_i)x_i]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Aproksymacja liniowa (6)

- Punkt (a_0, a_1) minimalizujące S_r: trzeba policzyć pochodne S_r względem współczynników (a_0, a_1):

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}[(y_i - a_0 - a_1 x_i)x_i] \tag{5}$$

- W punkcie optymalnym pochodne powinny wynosić 0:

$$0 = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

$$0 = -2\sum_{i=1}^{n}[(y_i - a_0 - a_1 x_i)x_i] \tag{6}$$

Aproksymacja liniowa (7)

- Następnie:

$$0 = \sum_{i=1}^{n}(y_i) - \sum_{i=1}^{n}(a_0) - \sum_{i=1}^{n}(a_1 x_i)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n}(y_i x_i) - \sum_{i=1}^{n}(a_0 x_i) - \sum_{i=1}^{n}(a_1 x_i^2) \tag{7}$$

Aproksymacja liniowa (7)

- Następnie:

$$0 = \sum_{i=1}^{n}(y_i) - \sum_{i=1}^{n}(a_0) - \sum_{i=1}^{n}(a_1 x_i)$$
$$0 = \sum_{i=1}^{n}(y_i x_i) - \sum_{i=1}^{n}(a_0 x_i) - \sum_{i=1}^{n}(a_1 x_i^2) \quad (7)$$

- Zauważ, że $\sum_{i=1}^{n}(a_0) = na_0$

$$n(a_0) + (\sum_{i=1}^{n} x_i)a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)a_0 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a_1 = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) \quad (8)$$

Aproksymacja liniowa (8)

- Ostatecznie, otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} n & (\sum_{i=1}^{n} x_i) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \end{bmatrix}$$

Aproksymacja liniowa (8)

- Ostatecznie, otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} n & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \end{bmatrix}$$

- Rozpatrzmy przypadek:

Aproksymacja liniowa (8)

- Ostatecznie, otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} n & (\sum_{i=1}^{n} x_i) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \end{bmatrix}$$

- Rozpatrzmy przypadek:
  - x = [1,2,3,4,5,6,7]

Aproksymacja liniowa (8)

- Ostatecznie, otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} n & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \end{bmatrix}$$

- Rozpatrzmy przypadek:
  - x = [1,2,3,4,5,6,7]
  - y = [0.5, 2.5, 2.0, 4.0, 3.5, 6.0, 5.5]

Aproksymacja liniowa (8)

- Ostatecznie, otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} n & (\sum_{i=1}^{n} x_i) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \end{bmatrix}$$

- Rozpatrzmy przypadek:
  - x = [1,2,3,4,5,6,7]
  - y = [0.5, 2.5, 2.0, 4.0, 3.5, 6.0, 5.5]
- Bazując na (8), otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 28 & 140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 119.5 \end{bmatrix}$$

Aproksymacja liniowa (8)

- Ostatecznie, otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi:

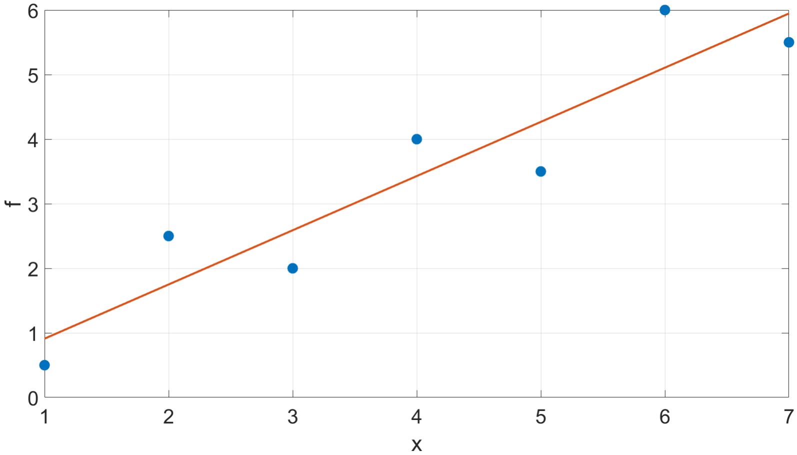
$$\begin{bmatrix} n & (\sum_{i=1}^{n} x_i) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \end{bmatrix}$$

- Rozpatrzmy przypadek:
  - x = [1,2,3,4,5,6,7]
  - y = [0.5, 2.5, 2.0, 4.0, 3.5, 6.0, 5.5]
- Bazując na (8), otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 28 & 140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 119.5 \end{bmatrix}$$

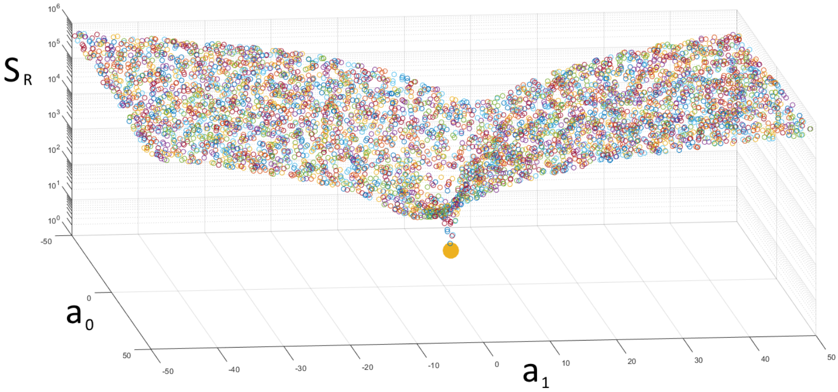
- W wyniku rozwiązania: $y = a_0 + a_1 x = 0.0714 + 0.83928x$.

Aproksymacja liniowa (9)



Aproksymacja liniowa (10)

Dygresja o regresji - *regresjodygresja*:



Dlaczego nie otrzymaliśmy paraboloidy??

Aproksymacja wielomianowa (1)

- W tej części rozpatrzymy aproksymację za pomocą wielomianu drugiego stopnia.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{9}$$

Aproksymacja wielomianowa (1)

- W tej części rozpatrzymy aproksymację za pomocą wielomianu drugiego stopnia.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{9}$$

- **Suma kwadratów błędów** między wartością pomiaru y a przybliżona wartością y:

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2 \tag{10}$$

Aproksymacja wielomianowa (1)

- W tej części rozpatrzymy aproksymację za pomocą wielomianu drugiego stopnia.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{9}$$

- **Suma kwadratów błędów** między wartością pomiaru y a przybliżona wartością y:

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2 \tag{10}$$

- Kryterium (**least squares**) pozwala w sposób jednoznaczny wyznaczyć postać paraboli.

Aproksymacja wielomianowa (2)

- Optymalna wartość współczynników a_0, a_1, a_2: trzeba obliczyć pochodną S_r wglądem współczynników $\{a_0, a_1, a_2\}$:

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}[(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)x_i]$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n}[(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)x_i^2] \tag{11}$$

Aproksymacja wielomianowa (2)

- Optymalna wartość współczynników a_0, a_1, a_2: trzeba obliczyć pochodną S_r wglądem współczynników $\{a_0, a_1, a_2\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_r}{\partial a_0} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_1} &= -2\sum_{i=1}^{n}[(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)x_i] \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_2} &= -2\sum_{i=1}^{n}[(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)x_i^2] \end{aligned} \tag{11}$$

- W punkcie optymalnym pochodne są równe 0.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S_r}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S_r}{\partial a_2} = 0. \tag{12}$$

Aproksymacja wielomianowa (3)

- w efekcie - system 3 równań z 3 niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} n & (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 y_i) \end{bmatrix}$$

Aproksymacja wielomianowa (3)

- w efekcie - system 3 równań z 3 niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} n & (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 y_i) \end{bmatrix}$$

- Rozwiązanie daje nam: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, wielomian ten zapewnia najmniejszy błąd.

Aproksymacja wielomianowa (3)

- w efekcie - system 3 równań z 3 niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} n & (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 y_i) \end{bmatrix}$$

- Rozwiązanie daje nam: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, wielomian ten zapewnia najmniejszy błąd.
- **Praca domowa** - Wyznacz wielomian aproksymujący następujący zestaw danych

Aproksymacja wielomianowa (3)

- w efekcie - system 3 równań z 3 niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} n & (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 y_i) \end{bmatrix}$$

- Rozwiązanie daje nam: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, wielomian ten zapewnia najmniejszy błąd.
- **Praca domowa** - Wyznacz wielomian aproksymujący następujący zestaw danych
  - x = [0,1,2,3,4,5]

Aproksymacja wielomianowa (3)

- w efekcie - system 3 równań z 3 niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} n & (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 y_i) \end{bmatrix}$$

- Rozwiązanie daje nam: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, wielomian ten zapewnia najmniejszy błąd.
- **Praca domowa** - Wyznacz wielomian aproksymujący następujący zestaw danych
  - x = [0,1,2,3,4,5]
  - y = [2.1, 7.7, 13.6, 27.2, 40.9, 61.1]

Aproksymacja wielomianowa (3)

- w efekcie - system 3 równań z 3 niewiadomymi:

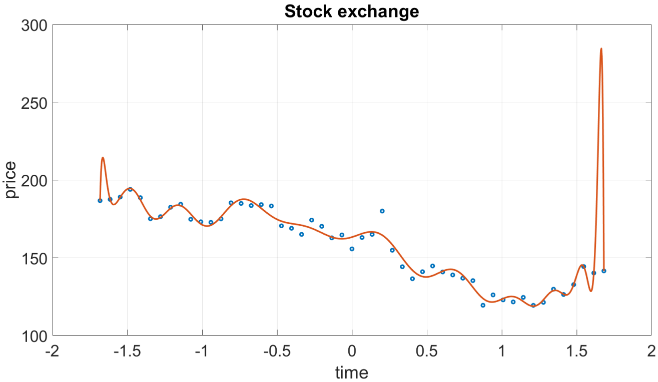
$$\begin{bmatrix} n & (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^3) & (\sum_{i=1}^{n} x_i^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 y_i) \end{bmatrix}$$

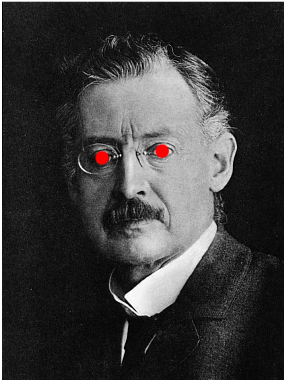
- Rozwiązanie daje nam: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, wielomian ten zapewnia najmniejszy błąd.
- **Praca domowa** - Wyznacz wielomian aproksymujący następujący zestaw danych
  - x = [0,1,2,3,4,5]
  - y = [2.1, 7.7, 13.6, 27.2, 40.9, 61.1]
- Powyższy schemat może być z łatwością zastosowany do wyznaczenia wielomianu m tego stopnia.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + e \tag{13}$$

Polynomial Regression (4)

- Jednak **aproksymacja wielomianowa** ma jedną poważną **wadę**:





efekt RUNGEGO!

Trigonometric functions (1)

- Monomials:

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^m \tag{14}$$

Trigonometric functions (1)

- Monomials:

$$1, x, x^2, x^3, ..., x^m \tag{14}$$

- used to approximate the data set are prone o Runge's effect. Instead of using monomials as a basic functions, let's try to use trigonometric functions:

$$y = a_0 + a_1 sin(\omega x) + a_2 cos(\omega x) + a_2 sin(2\omega x) + a_3 cos(2\omega x) + ... \tag{15}$$

Trigonometric functions (1)

- Monomials:

$$1, x, x^2, x^3, ..., x^m \tag{14}$$

- used to approximate the data set are prone o Runge's effect. Instead of using monomials as a basic functions, let's try to use trigonometric functions:

$$y = a_0 + a_1 sin(\omega x) + a_2 cos(\omega x) + a_2 sin(2\omega x) + a_3 cos(2\omega x) + ... \tag{15}$$

- where ω is a pulsation.

Trigonometric functions (1)

- Monomials:

$$1, x, x^2, x^3, ..., x^m \tag{14}$$

- used to approximate the data set are prone o Runge's effect. Instead of using monomials as a basic functions, let's try to use trigonometric functions:

$$y = a_0 + a_1 sin(\omega x) + a_2 cos(\omega x) + a_2 sin(2\omega x) + a_3 cos(2\omega x) + ... \tag{15}$$

- where ω is a pulsation.
- Basis functions: $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = cos(\omega x), \phi_2(x) = sin(\omega x), \phi_3(x) = cos(2\omega x), \phi_4(x) = sin(2\omega x), ...$

Trigonometric functions (1)

- Monomials:

$$1, x, x^2, x^3, ..., x^m \tag{14}$$

- used to approximate the data set are prone o Runge's effect. Instead of using monomials as a basic functions, let's try to use trigonometric functions:

$$y = a_0 + a_1 sin(\omega x) + a_2 cos(\omega x) + a_2 sin(2\omega x) + a_3 cos(2\omega x) + ... \tag{15}$$

- where ω is a pulsation.
- Basis functions: $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = cos(\omega x), \phi_2(x) = sin(\omega x), \phi_3(x) = cos(2\omega x), \phi_4(x) = sin(2\omega x), ...$
- Coefficients $a_0, a_1, ...a_m$ are obtained by solving the following system of equations:

$$\mathbf{Sa} = \mathbf{y} \tag{16}$$

Trigonometric functions (1)

- Monomials:

$$1, x, x^2, x^3, ..., x^m \tag{14}$$

- used to approximate the data set are prone o Runge's effect. Instead of using monomials as a basic functions, let's try to use trigonometric functions:

$$y = a_0 + a_1 sin(\omega x) + a_2 cos(\omega x) + a_2 sin(2\omega x) + a_3 cos(2\omega x) + ... \tag{15}$$

- where ω is a pulsation.
- Basis functions: $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = cos(\omega x), \phi_2(x) = sin(\omega x), \phi_3(x) = cos(2\omega x), \phi_4(x) = sin(2\omega x), ...$
- Coefficients $a_0, a_1, ...a_m$ are obtained by solving the following system of equations:

$$\mathbf{Sa} = \mathbf{y} \tag{16}$$

- where:

Trigonometric functions (1)

- Monomials:

$$1, x, x^2, x^3, ..., x^m \tag{14}$$

- used to approximate the data set are prone o Runge's effect. Instead of using monomials as a basic functions, let's try to use trigonometric functions:

$$y = a_0 + a_1 sin(\omega x) + a_2 cos(\omega x) + a_2 sin(2\omega x) + a_3 cos(2\omega x) + ... \tag{15}$$

- where ω is a pulsation.
- Basis functions: $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = cos(\omega x), \phi_2(x) = sin(\omega x), \phi_3(x) = cos(2\omega x), \phi_4(x) = sin(2\omega x), ...$
- Coefficients $a_0, a_1, ...a_m$ are obtained by solving the following system of equations:

$$\mathbf{Sa} = \mathbf{y} \tag{16}$$

- where:
  - $y_k = \sum_{i=0}^{m} \phi_k(x_i) \cdot x_i$

Trigonometric functions (1)

- Monomials:

$$1, x, x^2, x^3, ..., x^m \tag{14}$$

- used to approximate the data set are prone o Runge's effect. Instead of using monomials as a basic functions, let's try to use trigonometric functions:

$$y = a_0 + a_1 sin(\omega x) + a_2 cos(\omega x) + a_2 sin(2\omega x) + a_3 cos(2\omega x) + ... \tag{15}$$

- where ω is a pulsation.
- Basis functions: $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = cos(\omega x), \phi_2(x) = sin(\omega x), \phi_3(x) = cos(2\omega x), \phi_4(x) = sin(2\omega x), ...$
- Coefficients $a_0, a_1, ...a_m$ are obtained by solving the following system of equations:

$$\mathbf{Sa} = \mathbf{y} \tag{16}$$

- where:
  - $y_k = \sum_{i=0}^{m} \phi_k(x_i) \cdot x_i$
  - $S_{kl} = \sum_{i=0}^{m} \phi_k(x_i) \cdot \phi_l(x_i)$

Trigonometric functions (2)

- Are the trigonometric functions prone to the Runge's effect?

Trigonometric functions (2)

- Are the trigonometric functions prone to the Runge's effect?
- The answer will be on the Labs!