



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIwersytet  
EKONOMICZNY  
W KRAKOWIE



EDUKACJA  
DLA  
PRZEDSIĘBIORCZOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”  
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

# Metody numeryczne

materiały do wykładu  
dla studentów

## 5. Przybliżone metody rozwiązywania równań

- 5.1 Lokalizacja pierwiastków
- 5.2 Metoda bisekcji
- 5.3 Metoda iteracji
- 5.4 Metoda stycznych (Newtona)
- 5.5 Metoda siecznych (falsi)
- 5.6 Metoda Newtona dla układów równań nieliniowych
- 5.7 Dodatek – konstrukcja metod linearyzacyjnych

## 5. Przybliżone metody rozwiązywania równań

Metoda kolejnych przybliżeń dla równania

$$f(x) = 0, \quad (5.1)$$

gdzie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w przedziale  $[a, b]$ , polega na tworzeniu ciągu liczb:  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , zwanych kolejnymi przybliżeniami pierwiastka  $\bar{x}$  tego równania.

Każda metoda kolejnych przybliżeń powinna spełniać podstawowy warunek zbieżności ciągu kolejnych przybliżeń do pierwiastka  $\bar{x}$  równania (5.1). Metoda jest tym lepsza, im szybciej ciąg  $(x_n)$  jest zbieżny do  $\bar{x}$ .

Znaczenie metod kolejnych przybliżeń, które są metodami przybliżonymi, wynika z faktu, że tylko nieliczne równania typu (5.1) dają się rozwiązać metodami dokładnymi.

### 5.1 Lokalizacja pierwiastków

**Twierdzenie (Darboux) 5.1.**

Jeżeli funkcja ciągła  $f$  przyjmuje na końcach przedziału domkniętego  $[a, b]$  wartości o przeciwnych znakach, tzn.  $f(a)f(b) < 0$ , to wewnątrz przedziału istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania  $f(x) = 0$ .

Istnienie co najwyżej jednego pierwiastka równania  $f(x) = 0$  wynika z założenia o silnej monotoniczności funkcji  $f$  w przedziale  $[a, b]$ , czyli – dla funkcji różniczkowalnej w tym przedziale – z warunku:

$$\forall x \in (a, b): f'(x) < 0 \quad \text{lub} \quad \forall x \in (a, b): f'(x) > 0 \quad (5.2)$$

Zatem, aby równanie typu (5.1) miało w przedziale  $(a, b)$  dokładnie jeden pierwiastek, musi być spełniona koniunkcja warunków:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \wedge \quad \forall x \in (a, b): f'(x) < 0 \quad (5.3)$$

lub

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \wedge \quad \forall x \in (a, b): f'(x) > 0 \quad (5.4)$$

Omówimy cztery metody kolejnych przybliżeń dla równania (5.1)

1. metoda bisekcji,
2. metoda iteracji,
3. metoda stycznych (Newtona),
4. metoda siecznych (reguła falsi),

oraz uogólnienie metody Newtona dla funkcji o wartościach wektorowych, co pozwoli na zastosowanie tej metody do wyznaczania przybliżonego rozwiązania dla układów równań nieliniowych.

**Przykład 5.1.**

Zlokalizować pierwiastki równania  $\frac{x^3}{3} + 10x + 3 = \frac{7}{2}x^2$  do przedziału o długości 1.

## 5.2 Metoda bisekcji

Metoda bisekcji (połowienia) jest naturalną kontynuacją używanej przez nas metody lokalizacji. Załóżmy, że wiemy (np. dzięki wcześniejszej lokalizacji), że w danym przedziale  $(a, b)$  zachodzi warunek  $f(a)f(b) < 0$ . Jako początek ciągu przybliżeń rozwiązania wybieramy środek naszego przedziału:  $x_0 = \frac{b-a}{2}$ . Następnie, korzystając z twierdzenia 5.1. sprawdzamy (tak samo jak w metodzie lokalizacji), czy rozwiązanie znajduje się w przedziale  $(a, x_0)$ , czy w przedziale  $(x_0, b)$ . W pierwszym przypadku wybieramy  $x_1 = \frac{x_0-a}{2}$ , a w drugim  $x_1 = \frac{b-x_0}{2}$ .

W każdym kolejnym kroku procedura postępowania jest taka sama: dla przedziału, w którym znajduje się pierwiastek równania (5.1), wybieramy środek przedziału jako kolejne przybliżenie rozwiązania, a następnie sprawdzamy, czy dokładne rozwiązanie znajduje się w lewej, czy w prawej połowie wyjściowego przedziału. Wybraną połówkę wybieramy jako następny przedział. Procedura ta wyznacza nam w sposób naturalny kres górny błędu przybliżenia. Otóż dla  $n$ -tego wyrazu ciągu przybliżeń mamy nierówność:

$$|\bar{x} - x_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a).$$

Na podstawie powyższego wzoru można wywnioskować, że jeśli chcemy obliczyć rozwiązanie z dokładnością  $\epsilon$ , musimy wykonać co najmniej  $(\log_2 \frac{b-a}{\epsilon} - 1)$  powtórzeń metody bisekcji.

### Przykład 5.2.

Za pomocą metody bisekcji znaleźć trzy pierwsze przybliżenia rozwiązania równania  $\frac{x^3}{3} + 10x + 3 = \frac{7}{2}x^2$  w przedziale  $(-1, 0)$ . Oszacować błąd tego przybliżenia. Ile kroków metody bisekcji należy wykonać, by mieć pewność, że błąd jest nie większy niż 0,01?

Metoda bisekcji ma wiele zalet. Przede wszystkim, jest zbieżna globalnie tj. jeśli tylko spełniony jest warunek  $f(a)f(b) < 0$ , to procedura bisekcji znajdzie pierwiastek, niezależnie od postaci funkcji  $f$  (nawet, gdy w przedziale  $(a, b)$  jest więcej niż jeden pierwiastek; wtedy jednak za pomocą bisekcji znajdziemy tylko jeden). Innymi słowy, ciągłość funkcji jest wystarczającym założeniem do działania metody (co nie jest prawdą dla pozostałych metod), nawet dla bardzo dużych przedziałów początkowych. Po drugie, łatwo można kontrolować błąd bezwzględny przybliżenia wyniku i nie zależy on od badanej funkcji  $f$ . Główną wadą metody jest to, że ciąg przybliżeń zbiega do dokładnego wyniku bardzo powoli (w porównaniu do pozostałych metod), dlatego - jeśli potrzebujemy bardzo dokładnego przybliżenia - obliczenie go metodą bisekcji może okazać się czasochłonne.

### 5.3 Metoda iteracji

Równanie  $f(x) = 0$ , gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą w przedziale  $[a, b]$ , przekształcamy w równanie równoważne:

$$x = g(x), \quad (5.5)$$

będące podstawą procesu iteracji. Wybieramy wartość przybliżoną  $x_0$  i wyznaczamy:

$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \quad x_3 = g(x_2), \quad \dots$$

Otrzymujemy w ten sposób ciąg liczb

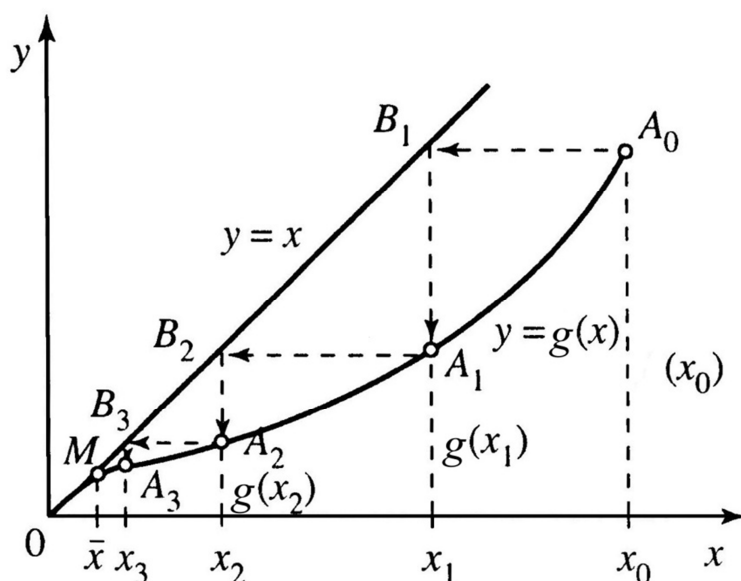
$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.6)$$

Jeżeli ten ciąg jest zbieżny, czyli jeżeli istnieje granica  $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  i funkcja  $g$  jest ciągła w przedziale  $[a, b]$ , to  $\bar{x}$  jest pierwiastkiem równania (5.5).

W celu skonstruowania ciągu (5.6), należy dodatkowo założyć, że wartości funkcji  $g$  należą do przedziału  $[a, b]$ , czyli:

$$\forall x \in [a, b]: \quad g(x) \in [a, b] \quad (5.7)$$

Warunek wystarczający zbieżności ciągu wynika z twierdzenia:



Rys. 5.1. Graficzna reprezentacja metody iteracji

**Twierdzenie 5.2.**

Jeżeli  $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$ ,  $g$  jest różniczkowalna w  $[a, b]$  oraz

$$\exists q \in (0,1) \quad \forall x \in (a,b): \quad |g'(x)| \leq q < 1,$$

Wówczas:

1. dla każdego przybliżenia początkowego  $x_0 \in [a, b]$  ciąg kolejnych przybliżeń postaci  $x_{n+1} = g(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jest zbieżny do pewnego  $\bar{x} \in [a, b]$ ,
2.  $\bar{x}$  jest jedynym rozwiązaniem równania  $x = g(x)$  w przedziale  $[a, b]$ ,
3.  $\forall m \in \mathbb{N}: \quad |\bar{x} - x_m| \leq \frac{q^m}{1-q} |x_1 - x_0|$  (5.8)

**Uwaga.** Przy założeniach twierdzenia 5.2. metoda iteracji jest zbieżna dla dowolnego przybliżenia początkowego  $x_0 \in [a, b]$ . Jeżeli więc pojedynczy błąd w obliczeniach nie wyprowadza poza przedział  $[a, b]$ , to metoda sama się koryguje, a błędna wartość traktowana jest jako nowe przybliżenie początkowe, nie wpływa na wynik końcowy, a może się tylko zwiększyć liczba obliczeń. Własność tę nazywamy własnością *autokorelacji*. Dzięki niej metoda iteracji należy do najpewniejszych metod numerycznych. Jej głównym minusem jest wolna zbieżność i trudność algorytmicznego wyznaczania funkcji  $g$ . Jeśli jednak to się uda, metoda iteracji jest zbieżna globalnie, jak metoda bisekcji.

**Przykład 5.3.**

Metodą iteracji znaleźć dwa pierwsze przybliżenia rozwiązania równania:

$$x^3 + x - 5 = 0 \tag{5.9}$$

#### 5.4 Metoda stycznych (Newtona)

Obydwie poznane dotąd metody charakteryzują się globalną zbieżnością. Jej kosztem jest dość powolne działanie (np. metoda bisekcji potrzebuje pięciu powtórzeń, by uzyskać kolejną dokładną cyfrę wyniku). Jeśli potrzebujemy szybszego algorytmu, musimy się pogodzić z utratą globalnej zbieżności. Dwie kolejne metody, które poznamy, opierają się na tzw. linearyzacji. Do ich działania potrzebujemy pewnych dodatkowych założeń o lewej stronie równania (5.1). Te założenia często są spełnione w stosunkowo niewielkim otoczeniu rozwiązania – jednak, gdy to otoczenie uda się wyznaczyć (tj. oszacować rozwiązanie z przybliżeniem wystarczająco dobrym, by zapewnić zbieżność metody) – kolejne przybliżenia bardzo szybko zbiegają do dokładnego wyniku. Poniżej przedstawiamy wzory na kolejne wyrazy odpowiednich ciągów przybliżeń. Ich uzasadnienie (z wyprowadzeniem) znajduje się w dodatku na końcu rozdziału.

Pierwszym, najczęściej używanym algorytmem linearyzacyjnym jest metoda Newtona (stycznych). Geometrycznie metoda ta polega na zastąpieniu łuku krzywej  $y = f(x)$  w przedziale  $[a, b]$  odcinkiem stycznej poprowadzonej do tej krzywej w pewnym punkcie tego przedziału. Zamiast szukać miejsca zerowego skomplikowanej funkcji, zastępujemy ją (lokalnie) funkcją liniową.



Rozważamy równanie:

$$f(x) = 0,$$

gdzie  $f$  jest klasy  $C^1$  w przedziale  $(a, b)$  oraz spełniony jest jeden z warunków (5.3), (5.4), czyli w tym przedziale równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie. Za przybliżenie początkowe  $x_0$  przyjmujemy  $a$  lub  $b$  (kryterium wyboru zostanie podane później). Niech  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  oznacza  $n$ -te przybliżenie pierwiastka  $\bar{x}$  równania. Punkt  $x_{n+1}$  wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (5.11)$$

O zbieżności ciągu  $(x_n)$  określonego wzorem rekurencyjnym (5.11) decyduje twierdzenie:

**Twierdzenie 5.3.**

Jeżeli funkcja  $f$  jest klasy  $C^2$  w przedziale  $(a, b)$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,  $f'$  i  $f''$  są stałego znaku w przedziale  $(a, b)$ , tzn.:

$$\forall x \in (a, b): f'(x) > 0 \quad \vee \quad \forall x \in (a, b): f'(x) < 0,$$

oraz

$$\forall x \in (a, b): f''(x) > 0 \quad \vee \quad \forall x \in (a, b): f''(x) < 0,$$

Wówczas dla dowolnego przybliżenia początkowego  $x_0 \in [a, b]$  spełniającego warunek

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \quad (5.12)$$

ciąg kolejnych przybliżeń  $(x_n)$  określony wzorem (5.11) jest zbieżny do jedynego pierwiastka  $\bar{x}$  równania  $f(x) = 0$ .

**Uwaga.** Za przybliżenie początkowe  $x_0$  przyjmujemy jeden z końców przedziału  $a$  lub  $b$  tak, aby był spełniony warunek (5.12).

Błąd przybliżenia  $x_n$  można oszacować, posługując się nierównością:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+: \quad |\bar{x} - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2 \quad (5.13)$$

gdzie:

$$m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

#### Przykład 5.4.

Metodą stycznych znaleźć dwa pierwsze przybliżenia rozwiązania równania

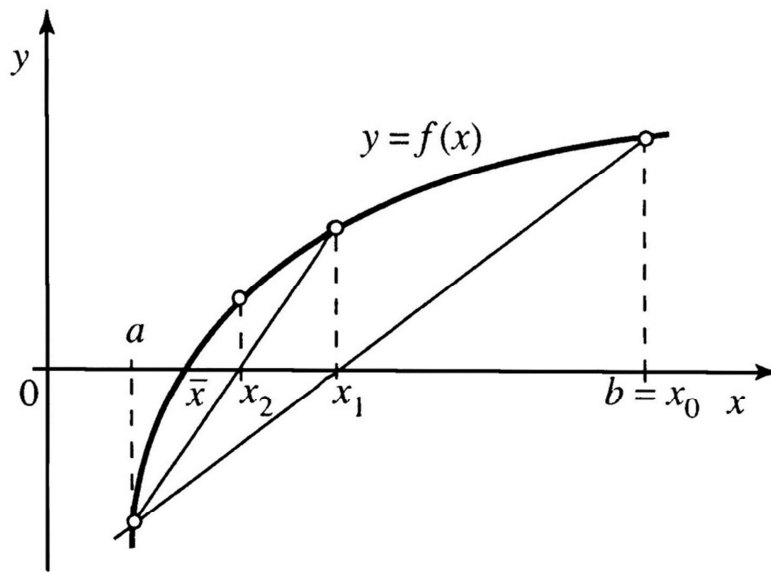
$$x^3 + 6x^2 + 6x - 2 = 0.$$

### 5.5 Metoda siecznych (regula falsi)

Porównując pod względem szybkości zbieżności, procedura stycznych jest najefektywniejszą z poznanych przez nas metod. Jednakże, ma pewną wadę: wymaga obliczania pochodnej danej funkcji. W przykładach rozważanych podczas tego kursu nie stanowi to większego problemu, jednak w praktycznych zastosowaniach może się okazać, że dokładne wyznaczenie pochodnej funkcji  $f$  jest niemożliwe (np. gdy funkcja nie jest zadana bezpośrednim wzorem, ale zewnętrzną procedurą, do której kodu źródłowego nie mamy dostępu). Ponadto, czasem koszt obliczenia pochodnej funkcji w danym punkcie jest o tyle wyższy od kosztu obliczenia wartości funkcji, że metoda, którą za chwilę poznamy, choć wolniej zbieżna od metody Newtona, może się okazać mniej kosztowna obliczeniowo, a więc efektywnie szybsza w działaniu.

Geometrycznie polega ona na zastąpieniu łuku krzywej  $y = f(x)$  w przedziale  $[a, b]$  sieczną przechodzącą przez punkty  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  - dlatego nazywa się metodą siecznych lub metodą *regula falsi* (łac.: fałszywa prosta). Odcięta punktu przecięcia się tej siecznej z osią  $Ox$  jest pierwszym przybliżeniem pierwiastka równania  $f(x) = 0$ . Jako przybliżenie początkowe przyjmujemy  $a$  lub  $b$  (kryterium wyboru podane zostanie później).

Dla funkcji  $f$  i przedziału  $[a, b]$  spełnione są warunki (5.3) lub (5.4), zatem równanie  $f(x) = 0$  ma w przedziale  $[a, b]$  dokładnie jedno rozwiązanie .



Rys. 5.3. Graficzna reprezentacja metody stycznych ( $a$  jest ustalonym końcem)

Aby uzyskać jednolite wzory na kolejne przybliżenia stosujemy dodatkowe założenie o stałej wypukłości funkcji  $f$  w przedziale  $[a, b]$ .

Jeżeli wzór na kolejne przybliżenia zawiera lewy koniec przedziału, czyli  $a$ , to mówimy, że  $a$  jest nieruchome, w innym przypadku  $b$  jest nieruchome.

Sformułujemy teraz ogólną regułę wyboru końca nieruchomego, przy dodatkowym założeniu stałej wypukłości funkcji  $f$ , tzn.:

$$\forall x \in (a, b): f''(x) > 0 \quad \vee \quad \forall x \in (a, b): f''(x) < 0 \quad (5.14)$$

Za koniec nieruchomy przyjmujemy ten koniec przedziału, w którym znak funkcji  $f$  jest zgodny ze znakiem drugiej pochodnej, a więc:

- a) jeżeli  $f(a) \cdot f''(x) > 0$ , to  $a$  jest końcem nieruchomym i obliczenia prowadzimy według wzoru:

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.15)$$

- b) jeżeli  $f(b) \cdot f''(x) > 0$ , to końcem nieruchomym jest  $b$  i obliczenia przeprowadzamy według wzoru:

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.16)$$

**Uwaga.**

1. Kolejne przybliżenia  $x_n$  leżą po tej stronie pierwiastka  $\bar{x}$ , po której funkcja  $f$  i jej druga pochodna  $f''$  mają różne znaki.
2. Każde przybliżenie  $x_{n+1}$  jest położone bliżej pierwiastka  $\bar{x}$  aniżeli poprzednie  $x_n$ .
3. Metoda Newtona jest metodą lepiej zbieżną niż metoda siecznych. Jednakże metoda siecznych jest w wielu przypadkach wygodniejsza do stosowania (szczególnie w przypadku, gdy nie ma możliwości określenia pochodnej funkcji  $f$ ).
4. Warto zauważyć, że punkty początkowe w metodzie siecznych i w metodzie stycznych zawsze są różne, gdyż muszą spełniać dokładne przeciwne nierówności. Z kolei punkt nieruchomy w metodzie siecznych może być punktem startowym metody stycznych.

**Twierdzenie 5.4.**

Jeżeli funkcja  $f$  jest klasy  $C^2$  w przedziale  $(a, b)$ , spełnia warunek (5.14) oraz jeden z warunków (5.3), (5.4), to ciągi (5.15) i (5.16) są zbieżne do jedyne rozwiązania równania  $f(x) = 0$  w przedziale  $[a, b]$ .

Oszacowanie błędu przybliżenia  $x_n$  podają kolejne twierdzenia:

**Twierdzenie 5.5.**

Jeżeli funkcja  $f$  jest klasy  $C^1$  w przedziale  $(a, b)$  oraz

$$\exists m_1 > 0 \quad \forall x \in (a, b): \quad |f'(x)| \geq m_1,$$

to

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |\bar{x} - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \quad (5.17)$$

gdzie jako poprzednio:  $m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ .

**Twierdzenie 5.6.**

Jeżeli funkcja  $f$  jest klasy  $C^1$  w przedziale  $(a, b)$ ,  $f'$  jest stałego znaku w przedziale  $(a, b)$  oraz:

$$\exists m_1, M_1 > 0 \quad \forall x \in (a, b): \quad m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1,$$

to

$$\forall n \in \mathbb{N}_+: \quad |\bar{x} - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_n - x_{n-1}| \quad (5.18)$$

### Przykład 5.5.

Metodą siecznych znaleźć dwa pierwsze przybliżenia rozwiązania równania:

$$x^3 - 3x^2 + 6x + 2 = 0.$$

W poniższej tabeli przedstawiono zalety i wady poszczególnych metod przybliżonego rozwiązywania równań.

|                         | <i>Zalety</i>  | <i>Wady</i>   |
|-------------------------|--|---|
| <i>Metoda bisekcji</i>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- najsłabsze założenia</li> <li>- globalna zbieżność</li> <li>- kres górny błędu bezwzględnego nie zależy od badanej funkcji</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- najwolniej zbieżna</li> </ul>  |
| <i>Metoda iteracji</i>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- odporna na błędy (autokorelacja)</li> <li>- globalna zbieżność</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- wolno zbieżna</li> <li>- trudności w algorytmicznym wyznaczaniu funkcji pomocniczej</li> </ul>           |
| <i>Metoda stycznych</i> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- najszybsza zbieżność</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- najostrzejsze założenia i tylko lokalna zbieżność</li> <li>- konieczność obliczenia pochodnej</li> </ul> |

|                         |   |  |
|-------------------------|---|--|
| <i>Metoda siecznych</i> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- wygodniejsza do stosowania od metody stycznych (brak konieczności obliczania pochodnej)</li> <li>- szybsza od metod bisekcji i iteracji</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- gorsza zbieżność niż w metodzie stycznych</li> <li>- najostrzejsze założenia i tylko lokalna zbieżność</li> </ul> |
|-------------------------|---|--|

Tabela 5.1. Porównanie metod przybliżonego rozwiązywania równań

## 5.6 Metoda Newtona dla układów równań nieliniowych

Przedstawimy tutaj najpopularniejszą metodę przybliżoną rozwiązywania układów równań nieliniowych – metodę Newtona.

Rozważamy układ równań:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

gdzie funkcje  $f_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) są funkcjami o wartościach rzeczywistych.

Układ ten zapiszemy w postaci wektorowej:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (5.20)$$

gdzie:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Niech:

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_k^{(n)} \end{bmatrix}$$

będzie  $n$ -tym przybliżeniem rozwiązania dokładnego

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_k \end{bmatrix}.$$

Ciąg kolejnych przybliżeń tworzymy według wzoru:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n+1)} &= \mathbf{x}^{(n)} - J^{-1}(\mathbf{x}^{(n)}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n)}), & n \in \mathbb{N} \\ \mathbf{x}^{(0)} &- \text{dowolne} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\text{gdzie: } J(\mathbf{x}) = J(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{bmatrix} (f_1)'_{x_1}(\mathbf{x}) & \dots & (f_1)'_{x_k}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (f_k)'_{x_1}(\mathbf{x}) & \dots & (f_k)'_{x_k}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Warto zwrócić uwagę, że metoda stycznych rozwiązywania pojedynczych równań nieliniowych jest szczególnym przypadkiem metody wielowymiarowej. Wystarczy w tym celu zauważyć, że dla  $k = 1$  zachodzi  $J^{-1}(\mathbf{x}^{(n)}) = [\frac{1}{f'(x_n)}]$ .

### Przykład 5.6.

Metodą Newtona rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 = 1 \\ 2x_1^3 - 3x_1x_2^2 = 3 \end{cases}$$

Niech  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

## 5.7 Konstrukcja metod linearyzacyjnych

### 5.7.1. Metoda Newtona (stycznych)

Niech  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  oznacza  $n$ -te przybliżenie pierwiastka  $\bar{x}$  równania. Przez punkt  $(x_n, f(x_n))$  prowadzimy styczną do krzywej  $y = f(x)$ . Odciętą punktu przecięcia tej stycznej z osią  $Ox$  przyjmujemy jako kolejne przybliżenie  $x_{n+1}$  rozwiązania  $\bar{x}$ . Konstrukcję tę powtarzamy dla punktu  $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$  i otrzymujemy ciąg kolejnych przybliżeń  $(x_n)$ .

Równanie stycznej do krzywej  $y = f(x)$  w punkcie  $(x_n, f(x_n))$  ma postać:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Podstawiając  $y = 0$  znajdujemy przybliżenie  $x_{n+1}$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

### 5.7.2. Metoda siecznych (regula falsi)

Sieczna przechodząca przez punkty  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$  ma postać:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$



i stąd:

$$x_1 = a - f(a) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

lub

$$x_1 = b - f(b) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

Jeżeli  $f(x_1) \neq 0$ , to postępujemy analogicznie, tzn. wybieramy ten spośród przedziałów  $[a, x_1]$ ,  $[x_1, b]$ , na końcach którego funkcja  $f$  ma różne znaki i otrzymujemy przybliżenie  $x_2$ :

$$x_2 = a - f(a) \cdot \frac{x_1-a}{f(x_1)-f(a)},$$

gdy jest to przedział  $[a, x_1]$  lub:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1-b}{f(x_1)-f(b)}$$

dla przedziału  $[x_1, b]$ .

Dalsze postępowanie jest analogiczne.

Jeśli dodatkowo spełnione jest założenie (5.14), to albo w każdym kroku  $a$  jest lewym końcem przedziału, w którym jest rozwiązanie, albo  $b$  jest zawsze prawym końcem takiego przedziału, skąd wynikają wzory (5.14) i (5.15).