

Metody Numeryczne

Zajęcia nr 7

Michał Bernardelli

Do zapamiętania: kwadratury Gaussa, wielomiany Czebyszewa.

1 Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju $T_n(x)$

Określone na przedziale $[-1, 1]$, ortogonalne względem iloczynu skalarnego

$$(f, g) = \int_a^b \varrho(x) f(x) g(x) dx$$

z wagą

$$\varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wyrażenia jawne:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$
$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right]$$

Unormowanie:

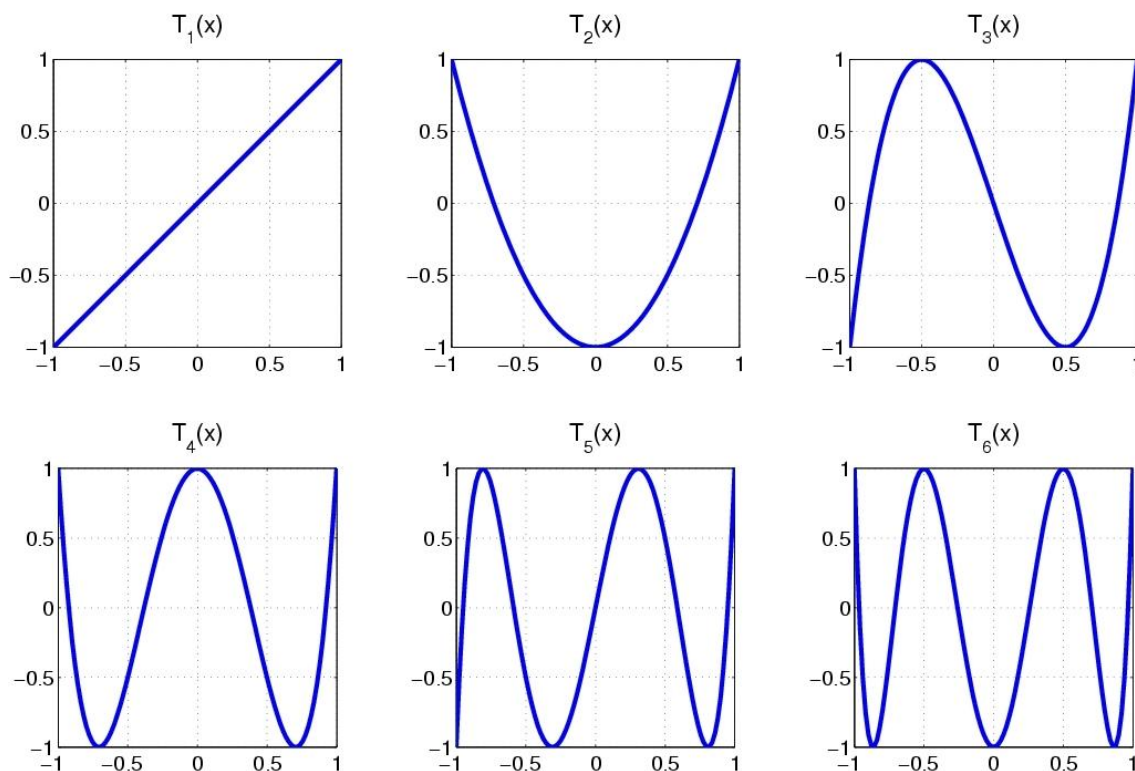
$$\|T_n\|^2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n^2(x) dx = \begin{cases} \pi, & \text{dla } n = 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{dla } n > 0. \end{cases}$$

Reguła trójkłonowa:

$$T_0(x) = 1,$$
$$T_1(x) = x,$$
$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad \text{dla } k \geq 1.$$

Miejsca zerowe wielomianu $T_n(x)$:

$$x_j = \cos \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$



Wykresy pierwszych sześciu wielomianów Czebyszewa

Zadanie 1

$$Q(f) = Af(-x_0) + Bf(0) + Cf(x_0) \approx I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Znaleźć A , B , C i x_0 takie, aby rząd kwadratury $Q(f)$ był możliwie najwyższy. Podać ten rząd. Rozwiązać zadanie dwoma sposobami:

1. jako rozwiązanie układu równań dla wielomianów bazowych kolejnych stopni,
2. wyznaczając najpierw węzły jako pierwiastki odpowiedniego wielomianu ortogonalnego, a następnie współczynniki kwadratury jako rozwiązanie układu równań.

Zadanie 2

Niech $Q(f) = Af(\alpha) + Bf(\beta)$ będzie kwadraturą przybliżającą całkę

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx.$$

Znaleźć takie A , B , α i β , aby rząd kwadratury $Q(f)$ był możliwie najwyższy. Podać ten rząd. Wskazówka: wykorzystać wielomiany Czebyszewa.

Zadanie 3

Napisać w Octave program wyznaczający wartość liczby π losując n współrzędnych z kwadratu jednostkowego i licząc ile spośród nich trafia do wpisanego w kwadrat koła. Stosunek liczby tych punktów do

wszystkich punktów przyjąć za przybliżenie liczby π . Zmierzyć czas działania programu w zależności od n jeżeli:

- losujemy kolejno współrzędne n punktów w pętli,
- losujemy jednorazowo wektory współrzędnych n punktów.

Zadanie 4

Wyznaczyć wartość całki $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ stosując złożoną kwadraturę trapezów. Porównać z rozwiązaniem poprzedniego zadania oraz z wynikiem zwróconym przez funkcję quad. Zwrócić uwagę na czas obliczeń, dokładność wyniku oraz liczbę obliczeń wartości funkcji.