



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIwersytet
EKONOMICZNY
W KRAKOWIE



EDUKACJA
DLA
PRZEDSIĘBIORCZOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Metody numeryczne

materiały do wykładu
dla studentów

7. Całkowanie numeryczne

- 7.1. Całkowanie numeryczne
- 7.2. Metoda trapezów
- 7.3. Metoda Simpsona
- 7.4. Metoda 3/8 Newtona
- 7.5. Ogólna postać wzorów kwadratur
- 7.6. Przykłady zastosowań

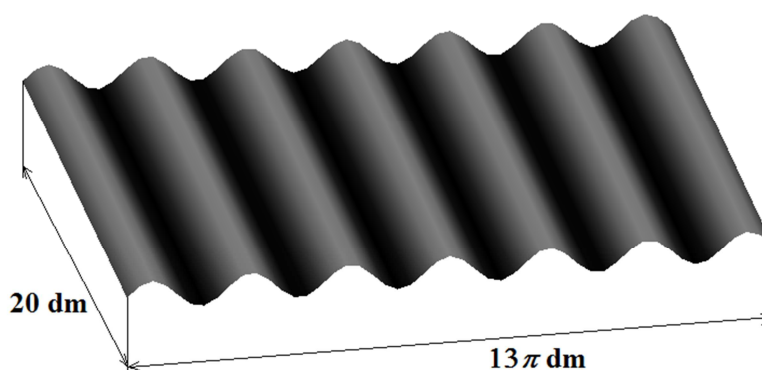
7.1. Całkowanie numeryczne

Całkowanie numeryczne funkcji polega na obliczaniu wartości całki oznaczonej:

$$\int_a^b f(x)dx$$

na podstawie szeregu wartości funkcji podcałkowej w przedziale $[a, b]$.

Rozważmy następujący przykład. Fabryka „Falka” produkuje blachy faliste do krycia dachów. Blachę taką tworzy się przy wykorzystaniu maszyny, która ściska blachę do osiągnięcia pożądanego kształtu, który w przekroju ma kształt funkcji sinus.



Rysunek 7.1. Blacha falista

Jakie wymiary powinien mieć płaski arkusz blachy, aby arkusz blachy falistej miał wymiary 20 dm na 13π dm?

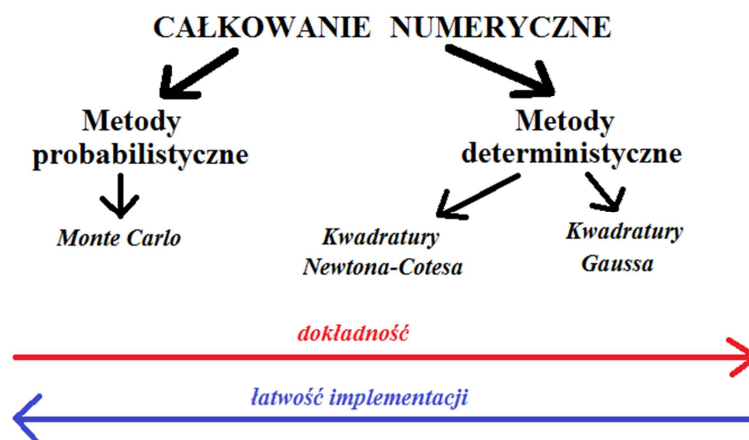
Rozwiązanie tego zadania sprowadza się do wyznaczenia długości krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = \sin x$ na przedziale $[0, 13\pi]$, tj. do następującej całki:

$$\int_0^{13\pi} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{13\pi} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx.$$

Całka tego typu jest całką eliptyczną drugiego rodzaju, która jest nieobliczalna metodami analitycznymi. W związku z tym do wyznaczenia wartości tej całki stosuje się metody przybliżone.

Wśród nich najczęściej używanymi są metody probabilistyczne typu Monte Carlo oraz metody interpolacyjne zwane kwadraturami (lub kubaturami w przypadku całek wielokrotnych). Najdokładniejszymi spośród kwadratur są kwadratury Gaussa. Wykorzystują one jednak dość zaawansowany aparat matematyczny, a przez to są trudne w implementacji. W tej części wykładu skupimy się na kwadraturach Newtona-Cotesa, które są bardzo łatwe

w implementacji i choć mniej dokładne niż kwadratury Gaussa dają jednak dużo lepsze wyniki niż metody Monte Carlo.



Rysunek 7.2. Wybrane metody całkowania numerycznego

Zwykła kwadratura polega na zastąpieniu danej funkcji f w przedziale $[a, b]$ funkcją prostszej postaci (najczęściej wielomianem) i przyjęciu przybliżenia:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b g(x) dx. \quad (7.1)$$

Funkcja g powinna być taka, aby całkę (7.1) można było łatwo policzyć. Dlatego też najczęściej wykorzystuje się właśnie wielomiany. Ogólna metoda wyznaczania funkcji g wynika

z rozważań przedstawionych w rozdziale 6: wystarczy wybrać kilka punktów należących do wykresu funkcji f (na przykład równomiernie rozłożonych na przedziale $[a, b]$), a następnie poprowadzić przez nie wielomian interpolacyjny obliczony za pomocą jednego z poznanych wzorów interpolacyjnych. Ten wielomian podstawiamy następnie do wzoru jako funkcję g .

Najprostsza kwadratura wykorzystuje interpolację w postaci wielomianu stopnia zerowego, tzn. g jest funkcją stałą. Metoda prostokątów, bo tak jest nazywana, jest jednak bardzo niedokładna, dlatego też rzadko jest używana.

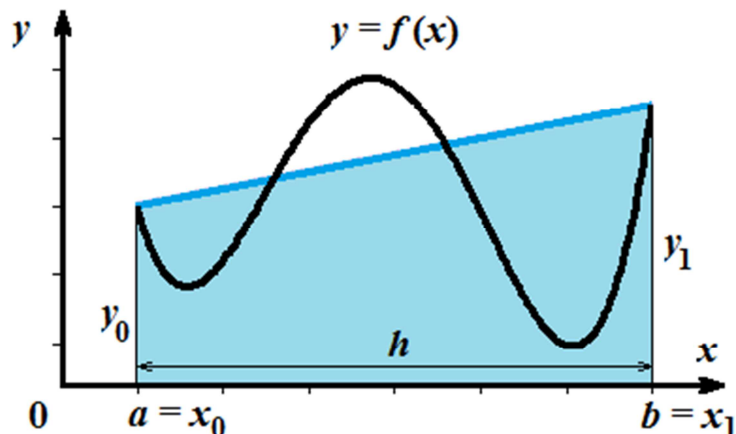
Wśród metod całkowania numerycznego najpopularniejsze są:

- a) metoda trapezów,
- b) metoda parabol (Simpsona),
- c) metoda 3/8 Newtona.

7.2. Metoda trapezów

Wzór trapezów otrzymujemy przybliżając wykres funkcji $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$ wykresem wielomianu stopnia pierwszego, czyli prostą przechodzącą przez punkty (x_0, y_0) ,

(x_1, y_1) , gdzie $x_0 = a, x_1 = b$ oraz $y_i = f(x_i)$ dla $i = 0, 1$. Pole pod krzywą $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$ przybliżane jest wtedy polem trapezu o wysokości $h = b - a$ i podstawach y_0, y_1 .



Rysunek 7.3. Metoda trapezów

Zatem, korzystając z wzoru na pole trapezu, otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + y_1). \quad (7.2)$$

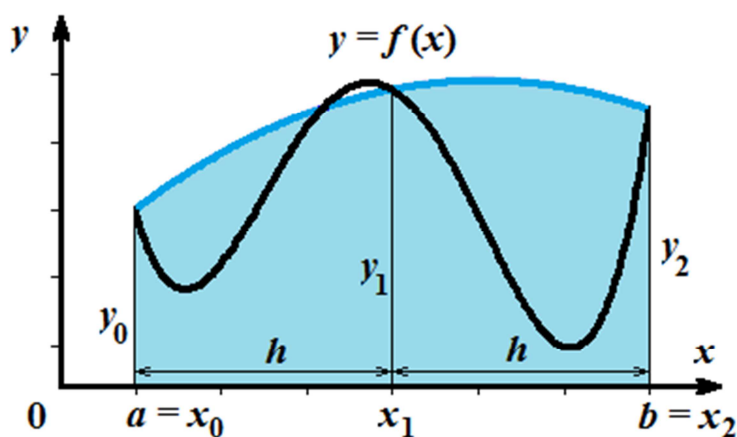
Wzór trapezów jest dokładny dla wielomianów co najwyżej stopnia pierwszego. Błąd metody trapezów można oszacować posługując się następującym wzorem:

$$R \leq \frac{1}{12} h^3 f''(\xi), \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b). \quad (7.3)$$

przy czym R oznacza błąd bezwzględny, jaki popełniamy przybliżając rzeczywistą wartość całki wartością określoną przez prawą stronę wzoru (7.2).

7.3. Metoda parabol (Simpsona)

Wzór Simpsona uzyskujemy zastępując krzywą $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$ wykresem wielomianu stopnia drugiego, to jest parabolą przechodzącą przez punkty (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , gdzie $x_0 = a, x_2 = b$, a x_1 jest środkiem odcinka $[a, b]$, zaś $y_i = f(x_i)$ dla $i = 0, 1, 2$. Pole pod krzywą $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$ aproksymujemy polem pod tą parabolą.



Rysunek 7.4. Metoda parabol

Wykorzystując wielomian interpolacyjny w postaci Lagrange'a lub Newtona można pokazać, że pole pod wyznaczoną parabolą wyraża się wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \quad (7.4)$$

gdzie $h = \frac{b-a}{2}$ jest odległością kolejnych punktów, w których wyznaczamy wartość funkcji f .

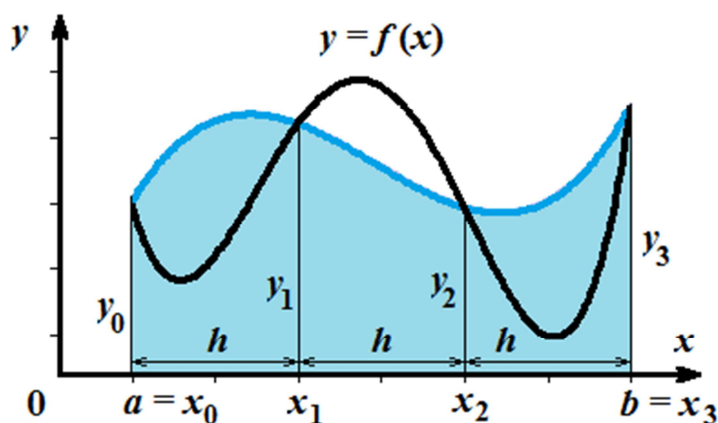
Wzór Simpsona jest dokładny dla wielomianów co najwyżej stopnia trzeciego. Błąd metody Simpsona wyraża się wzorem:

$$R \leq \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi), \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b). \quad (7.5)$$

7.4. Metoda 3/8 Newtona

Wzór ten otrzymujemy przez zastąpienie krzywej $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$ wykresem wielomianu stopnia trzeciego przechodzącym przez punkty (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , gdzie $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{3}$, $x_i = a + ih$ dla $i = 1, 2, 3$, zaś $y_i = f(x_i)$ dla $i = 0, 1, 2, 3$. Ponownie korzystamy z wielomianu interpolacyjnego i dostajemy, że pole pod wykresem rozważanej krzywej stopnia trzeciego można obliczyć ze wzoru:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3). \quad (7.6)$$



Rysunek 7.5. Metoda 3/8 Newtona

Wzór 3/8 Newtona – podobnie jak wzór Simpsona – jest dokładny dla wielomianów co najwyżej stopnia trzeciego. Błąd metody 3/8 Newtona wyraża się wzorem:

$$R \leq \frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi), \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b). \quad (7.7)$$

Przykład 7.1.

Obliczyć poniższą całkę korzystając z trzech przedstawionych metod.

$$\int_1^7 \frac{4-x}{x+2} dx$$

7.5. Ogólna postać wzorów kwadratur

Przedstawione wcześniej wzory kwadratur są tym bardziej dokładne, im mniejsze jest h , a więc im mniejszy przedział całkowania. W praktyce, przy obliczaniu całek oznaczonych dokonuje się podziału przedziału całkowania na dostatecznie dużą liczbę małych podprzedziałów,

a następnie w każdym takim podprzedziale stosuje się odpowiedni wzór kwadratury. Powstają wówczas ogólne wzory kwadratur o dowolnie dużej dokładności.

a) wzór ogólny trapezów

Przedział całkowania $[a, b]$ dzielimy na n równych podprzedziałów $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, gdzie $x_0 = a, x_n = b$ oraz $x_i = a + ih$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, przy czym

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Wyznaczamy wartości funkcji podcałkowej w punktach x_i :

$$y_i = f(x_i) \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n$$

W każdym z tych przedziałów stosujemy metodę trapezów:

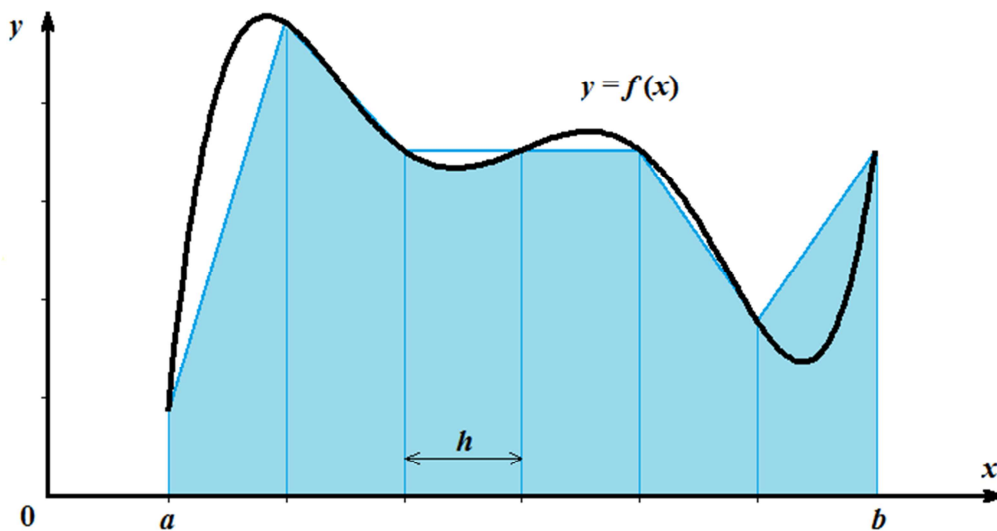
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n).$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n), \quad (7.8)$$

co można także zapisać:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left(y_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_k + y_n \right). \quad (7.9)$$



Rysunek 7.6. Zastosowanie wzoru ogólnego trapezów

Można wykazać, że błąd ogólnego wzoru trapezów można oszacować korzystając ze wzoru:

$$R \leq \frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi), \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b). \quad (7.10)$$

b) wzór ogólny parabol

Dokonujemy znów podziału przedziału całkowania $[a, b]$ na n równych części w postaci podprzedziałów $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$, a $x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$ to odpowiednio środki tych podprzedziałów. Wówczas $x_0 = a$ oraz $x_i = a + ih$ dla $i = 1, 2, \dots, 2n$, gdzie

$$h = \frac{b - a}{2n}.$$

W każdym z tych podprzedziałów stosujemy metodę parabol i otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

a po przekształceniach:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}), \quad (7.11)$$

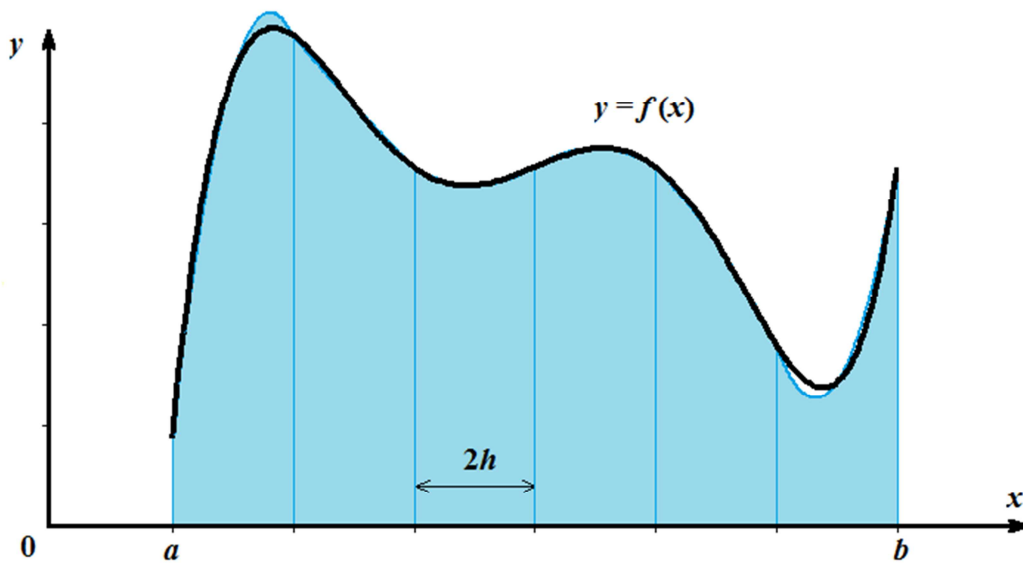
gdzie $y_i = f(x_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, 2n$.

Wzór powyższy można także zapisać w postaci:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(y_0 + 4 \sum_{k=1}^n y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_{2k} + y_{2n} \right). \quad (7.12)$$

Błąd wzoru ogólnego parabol ma następujące oszacowanie górne:

$$R \leq \frac{1}{180} (b - a) h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b). \quad (7.13)$$



Rysunek 7.7. Zastosowanie wzoru ogólnego parabol

c) wzór ogólny 3/8 Newtona

Punkty podziału przedziału całkowania $[a, b]$ na n równych części w tym przypadku oznaczamy przez $x_0, x_3, x_6, \dots, x_{3n-3}, x_{3n}$. Wobec tego podprzedziały będą postaci $[x_0, x_3]$, $[x_3, x_6]$, ..., $[x_{3n-3}, x_{3n}]$. Wówczas potrzebne w metodzie 3/8 Newtona węzły obliczymy jako $x_0 = a$ oraz $x_i = a + ih$ dla $i = 1, 2, \dots, 3n$, gdzie

$$h = \frac{b - a}{3n}.$$

Korzystając ze wzoru uzyskamy:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \approx & \frac{3h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \frac{3h}{8} (y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) + \dots + \\ & + \frac{3h}{8} (y_{3n-3} + 3y_{3n-2} + 3y_{3n-1} + y_{3n}). \end{aligned}$$

Po przekształceniach:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + \dots + 3y_{3n-1} + y_{3n}), \quad (7.14)$$

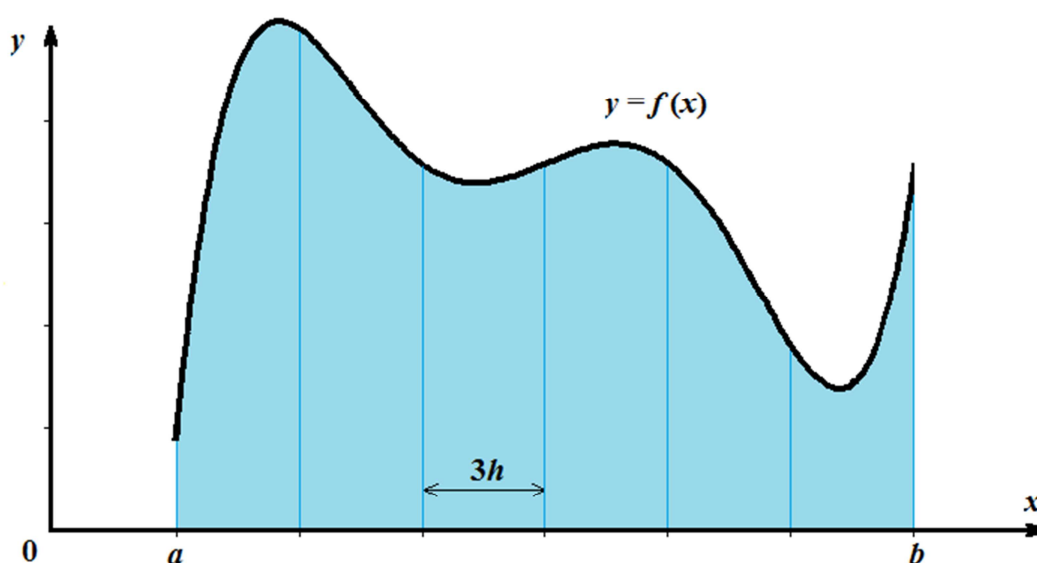
gdzie $y_i = f(x_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, 3n$.

Wzór ten możemy zapisać także w postaci:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left(y_0 + 3 \sum_{k=1}^n (y_{3k-2} + y_{3k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_{3k} + y_{3n} \right). \quad (7.15)$$

W metodzie tej błąd szacuje się w następujący sposób:

$$R \leq \frac{1}{80} (b-a) h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b). \quad (7.16)$$



Rysunek 7.8. Zastosowanie wzoru ogólnego 3/8 Newtona

Przykład 7.2.

Korzystając z przedstawionych powyżej trzech wzorów kwadratur dla $n = 2$ obliczyć całkę:

$$\int_1^7 \frac{4-x}{x+2} dx$$

7.6. Przykłady zastosowań

Wróćmy do przykładu, który rozważaliśmy na początku. Chcemy wyznaczyć przybliżoną wartość całki:

$$\int_0^{13\pi} \sqrt{1 + \cos^2(x)} \, dx.$$

Wykorzystując metody kwadratur obliczono wartość powyższej całki dla kilku wybranych wartości n :

Metoda	Trapezów	Simpsona	3/8 Newtona
$n = 1$	57,757	46,480	48,685

$n = 2$	49,299	49,779	49,708
$n = 10$	49,663	49,663	49,663

Złożoność obliczeniowa wszystkich trzech rozważanych algorytmów jest liniowa, tzn. $O(n)$. Zadowalające rezultaty (dokładność rzędu 10^{-7}) dostajemy dla dosyć niskich wartości n , zwykle dla $n \leq 10$. Co więcej wraz ze wzrostem liczby węzłów błędy w pewnym momencie przestają monotonicznie maleć, a zamiast tego zachowują się dość chaotycznie.

Poznane tutaj metody mogą być także stosowane do wyznaczania wartości niektórych funkcji specjalnych. Przykładami takich funkcji mogą być logarytm naturalny, czy arcus tangens. Zwróć uwagę, że obie te funkcje mają dosyć proste pochodne, które wyrażają się przy pomocy funkcji wymiernych. W związku z tym stosując wybraną metodę łatwo można wyznaczyć przybliżoną wartość np. logarytmu naturalnego z 2, czy arcusa tangensa 5. Wystarczy zastosować jedną z poznanych metod do policzenia całek:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx,$$

$$\operatorname{arctg} 5 = \int_0^5 \frac{1}{1+x^2} dx.$$