Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Metody numeryczne

materiały do wykładów

dla studentów

6.Interpolacja wielomianowa

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy” ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-

6.1. Interpolacja wielomianowa

Niech będzie dane $n+1$ różnych liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$ oraz $n+1$ dowolnych liczb $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Twierdzenie 6.1.

Istnieje dokładnie jeden wielomian W_n stopnia co najwyżej n-tego, który w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ przyjmuje odpowiednio wartości $y_0, y_1, \dots, y_n$, tzn.:

$$\forall i \in \{0,1,\dots,n\}: \quad W_n(x_i) = y_i \tag{6.1}$$

6.1. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

Takim wielomianem interpolacyjnym jest np. wielomian Lagrange`a:

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) \tag{6.2}$$

gdzie:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \tag{6.3}$$

Uwaga 1. Liczby $x_0, x_1, \dots, x_n$ nazywamy *węzłami interpolacji*.

Uwaga 2. Jeżeli spośród węzłów interpolacji usuniemy jeden lub dołączymy jeden, to rachunki do wyznaczenia wielomianu Lagrange`a trzeba przeprowadzać od nowa.

Przykład 6.1.

Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange`a, który w węzłach: $-2, 0, 1, 3, 4$ przyjmuje odpowiednio wartości: $1, -1, -2, 2, 3$.

6.2. Wielomian interpolacyjny Newtona

Twierdzenie 6.2.

Każdy wielomian W_n stopnia co najwyżej n-tego , który spełnia warunek (6.1) można przedstawić jednoznacznie w postaci:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) =$$

$$= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \qquad (6.4)$$

gdzie współczynniki c_i ($i = 0,1, \dots, n$) są odpowiednio dobrane.

Można wykazać, że współczynniki c_i tego wielomianu określone są wzorami:

$$c_i = f_i(x_i),$$

$$f_i(x) = \frac{f_{i-1}(x) - f_{i-1}(x_{i-1})}{x - x_{i-1}} \qquad (i = 1, \dots, n) \qquad (6.5)$$

przy czym $f_0(x) = f(x)$.

Wzór (6.4) przyjmie więc postać:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_i)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) =$$

$$= f(x_0) + f_1(x_1)(x - x_0) + f_2(x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$
$$+ f_n(x)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \qquad (6.6)$$

Prawą stronę wzoru (6.6) nazywamy wielomianem interpolacyjnym Newtona.

Wielomian interpolacyjny Lagrange`a i wielomian interpolacyjny Newtona są identyczne, choć różnią się postacią.

Współczynniki $f_i(x_i)$ znajdujemy według pewnego schematu, który zaprezentujemy w tablicy dla $n = 5$:

x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f_1(x_1)$				
x_2	$f(x_2)$	$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$			
x_3	$f(x_3)$	$f_1(x_3)$	$f_2(x_3)$	$f_3(x_3)$		
x_4	$f(x_4)$	$f_1(x_4)$	$f_2(x_4)$	$f_3(x_4)$	$f_4(x_4)$	
x_5	$f(x_5)$	$f_1(x_5)$	$f_2(x_5)$	$f_3(x_5)$	$f_4(x_5)$	$f_5(x_5)$

Dwie pierwsze kolumny tablicy są dane. Dalsze kolumny obliczamy kolejno dzieląc, zgodnie ze wzorem (6.5), różnicę kolejnych dwóch wyrazów danej kolumny przez różnicę odpowiadających wyrazów pierwszej kolumny, czyli:

$$f_{k+1}(x_i) = \frac{f_k(x_k) - f_k(x_i)}{x_k - x_i} \qquad (6.7)$$

gdzie $k > i$, $i = 0,1, \dots, n - 1$. Wyrażenia (6.7) nazywamy *różnicami dzielonymi*.

Szukanymi współczynnikami są pierwsze (górne) wyrazy poszczególnych kolumn (bez pierwszej).

Przykład 6.2.

Wyznacz wielomian interpolacyjny Newtona dla funkcji podanej w tabeli.

x	1	2	3	5	6
$f(x)$	2	1	-1	0	1

Przypadek szczególny wielomianu interpolacyjnego Newtona (równe odległości pomiędzy węzłami interpolacji).

Podamy teraz wzór Newtona w przypadku, gdy odległości między węzłami interpolacji są równe: $x_i - x_{i-1} = \Delta x = h$ dla $i = 1, \dots, n$.

Wykorzystywać będziemy tutaj kolejne różnice (już nie dzielone) definiowane następująco:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \qquad \text{(pierwsza różnica)}$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\big(f(x+h) - f(x)\big) = \Delta(\Delta f(x)) \qquad \text{(druga różnica)}$$

ogólnie n-ta różnica:

$$\Delta^n f(x) = \Delta\big(\Delta^{n-1} f(x)\big) \tag{6.8}$$

Wówczas wielomian interpolacyjny Newtona przy równych odstępach węzłów przyjmuje postać:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{(x - x_0)}{1!} + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} + \dots +$$

$$+ \frac{\Delta^n f(x_0)}{(\Delta x)^n} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{n!} \tag{6.9}$$

Współczynniki tego wielomianu obliczamy na podstawie tablicy (podamy dla przypadku $n = 5$)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f(x_0) \\
 & \searrow \\
 & & \Delta f(x_0) \\
 & \nearrow & & \searrow \\
f(x_1) & & & & \Delta^2 f(x_0) \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & \Delta f(x_1) & & & & \Delta^3 f(x_0) \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
f(x_2) & & & & \Delta^2 f(x_1) & & & & \Delta^4 f(x_0) \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & \Delta f(x_2) & & & & \Delta^3 f(x_1) & & & & \Delta^5 f(x_0) \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\
f(x_3) & & & & \Delta^2 f(x_2) & & & & \Delta^4 f(x_0) \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\
 & & \Delta f(x_3) & & & & \Delta^3 f(x_2) \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\
f(x_4) & & & & \Delta^2 f(x_3) \\
 & \searrow & & \nearrow \\
 & & \Delta f(x_4) \\
 & \nearrow \\
f(x_5)
\end{array}
\tag{6.10}
$$

Elementy pierwszej kolumny są dane, elementy każdej z następnych kolumn otrzymujemy odejmując sąsiednie wyrazy poprzedniej kolumny, czyli stosując wzór:

$$\Delta^{k+1} f(x_i) = \Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i) \tag{6.11}$$

dla $i \leq k$.

Przykład 6.3.

Znaleźć wielomian interpolacyjny Newtona dla funkcji określonej tabelką:

x	0	2	4	6	8
$f(x)$	-1	0	-1	1	1

Złożoność obliczeniowa algorytmów.

Złożoność obliczeniowa algorytmów interpolacyjnych Lagrange'a i Newtona wynosi $O(n^2)$.