Metody Numeryczne
Zajęcia nr 5

Michał Bernardelli

Do zapamiętania: metoda iteracyjna, rząd zbieżności, metoda iteracji prostej, metoda Banacha, metoda stycznych, metoda Newtona, zbieżność globalna i lokalna, szybkość zbieżności metody Newtona.

1 Rozwiązywanie nieliniowych równań jednej zmiennej

Chcemy znaleźć pierwiastki równania $f(x) = 0$ jednej zmiennej x. Stosujemy w tym celu metody iteracyjne generujące ciąg przybliżeń (najlepiej, żeby były dobre) $x_0, x_1, x_2, \ldots$ rozwiązania x^*. Oznaczmy przez $e_k = x^* - x_k$ błąd na k-tym kroku.

Definicja 1
Mówimy, że metoda jest ***rzędu*** $\mathbf{r}$*, jeżeli istnieje stała* $C > 0$ *taka, że dla* $k \geq 0$ *zachodzi*

$$|e_{k+1}| \leq C|e_k|^r.$$

Zauważmy, że aby metoda pierwszego rzędu była zbieżna musi być spełniony warunek $C < 1$. Mamy bowiem:

$$|e_k| \leq C|e_{k-1}| \leq C^2|e_{k-2}| \leq \ldots \leq C^k|e_0|.$$

Dla metod wyższych rzędów zachodzi natomiast:

$$|e_k| \leq C|e_{k-1}|^r \leq C^{1+r}|e_{k-2}|^{r^2} \leq \ldots \leq C^{1+r+\ldots+r^{k-1}}|e_0|^{r^k} = C^{\frac{r^k-1}{r-1}}|e_0|^{r^k-1}|e_0| = \left(C^{\frac{1}{r-1}}|e_0|\right)^{r^k-1}|e_0|,$$

czyli metoda będzie zbieżna, jeżeli $C^{\frac{1}{r-1}}|e_0| < 1$, ale lokalnie jest to zawsze spełnione, to znaczy dla wartości x_0 odpowiednio bliskich wartości x^*.

METODA BISEKCJI. Wymaga, aby funkcja f była ciągła. Wiadomo, że jeśli $f(a)$ i $f(b)$ są przeciwnego znaku (czyli $f(a)f(b) < 0$), to istnieje punkt $x^* \in (a_0; b_0)$ taki, że $f(x^*) = 0$, gdzie $a_0 = a$ i $b_0 = b$. Dostajemy ciąg przybliżeń x_k szukanego pierwiastka x^*. Poszukiwanie kończymy na ogół, gdy połowa długości aktualnie rozpatrywanego przedziału $[a_k; b_k]$ jest mniejsza od jakiejś zadanej wielkości ε, na przykład dokładności komputera. Dobrą praktyką jednak jest dodanie górnego ograniczenia na liczbę iteracji. Prawdziwa jest następująca zależność dla $k \geq 1$

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0),$$

z której wynika, że metoda bisekcji jest zbieżna liniowo ($r = 1$) ze współczynnikiem $C = \frac{1}{2}$.

Twierdzenie 1 (Lagrange'a o wartości średniej)
Jeśli dana funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła na* $\langle a, b\rangle$ *i różniczkowalna na* (a, b)*, to*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

gdzie ξ *jest punktem pośrednim między* a *i* b*.*

2 Metoda iteracji prostej

Równanie $f(x) = 0$ przekształcamy do równoważnego $\phi(x) = x$. Dla pewnego punktu x_0 ciąg $(x_k)_{k\geq 0}$ jest definiowany następująco:

$$x_k = \phi(x_{k-1}) \qquad \text{dla } k \geq 1.$$

Dla funkcji Lipschitzowskich ze stałą $L < 1$ metoda ta jest zbieżna globalnie co najmniej liniowo ze stałą L, tzn.

$$\forall_{x,y} |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y| \implies |x_k - x^*| \leq L^k |x_0 - x^*|.$$

Jeżeli pochodne funkcji ϕ w punkcie x^* do r-tego rzędu włącznie znikają, to metoda iteracji prostej jest zbieżna z rzędem $r + 1$.

3 Metoda stycznych (Newtona)

Dla funkcji $f \in C^1$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

$(k + 1)$-sze przybliżenie rozwiązania jest zatem punktem przecięcia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_k z osią OX[1]. Wiadomo, że jeśli $f \in C^2$ i $f'(x^*) \neq 0$, to iteracja Newtona jest rzędu 2. Jest ona zatem zbieżna kwadratowo[2], pod warunkiem odpowiedniego doboru punktu startowego x_0. W takim wypadku mówimy, że metoda jest zbieżna lokalnie. Dla pewnych specjalnych klas funkcji metoda Newtona może być zbieżna globalnie, np. dla funkcji $f \in C^2$ wypukłej i rosnącej.

Zadanie 1
Obliczyć liczbę iteracji jaką należy wykonać, aby znaleźć metodą bisekcji pierwiastek równania $f(x) = 0$ na przedziale $[a, b]$ z dokładnością $\varepsilon > 0$.

Zadanie 2 *Zaproponować kryteria stopu dla metody bisekcji. Zweryfikować ich działanie dla funkcji nieciągłej, przedziale nieskończonym, funkcji bez miejsc zerowych, funkcji z wieloma miejscami zerowymi.*

Zadanie 3 (bisekcja)
Napisać funkcję bisekcja *zawierającą implementację metody bisekcji. Jako argumenty wejściowe funkcja powinna otrzymywać nazwę funkcji f, końce przedziału a, b, maksymalną liczbę iteracji iter oraz dokładność ε, z jaką szukane jest rozwiązanie. Funkcja powinna zwracać wektor x kolejnych przybliżeń rozwiązania oraz wektor y wartości funkcji kolejnych przybliżeń. Przetestować jej działanie dla:*

- $\sin x$ *na odcinku* $[-1, 2]$,
- $\cos x$ *na odcinku* $[0, 2]$,
- $e^{x-1} - 2$ *na odcinku* $[-1, 2]$,
- $x^5 - 2$ *na odcinku* $[-1, 2]$,
- $(x + 2)^5$ *na odcinku* $[-3, 0]$.

[1] Równanie stycznej $y(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$.
[2] Dotyczy to tylko przypadku zer jednokrotnych!

Rozpatrzyć różne dokładności bezwzględne oraz zaobserwować na wykresie, jak szybko zbiega metoda bisekcji do rozwiązania.
Przykład użycia:

```
[x, y] = bisekcja(@(x)(x^5-2),-1,2,100,1e-10); plot(abs(y))
```

Zadanie 4
Wykazać, że metoda iteracyjna $x_{k+1} = \cos x_k$ jest zbieżna dla dowolnego punktu startowego $x_0 \in \mathbb{R}$ do jedynego rozwiązania x^* równania $x = \cos x$.

Zadanie 5
Wyprowadzić wzór rekurencyjny na obliczanie pierwiastka kwadratowego[3] stosując metodę Newtona do równania $f(x) = x^2 - a = 0$ dla $a > 0$. Wykazać, że jest ona zbieżna kwadratowo do rozwiązania x^* dla dowolnego punktu startowego $x_0 > 0$.
(do domu) *Dla $a = 2$ dokonać symulacji działania tej metody dla pierwszych kilkunastu iteracji i zaznaczyć na wykresie kolejne uzyskane przybliżenia.*

Zadanie 6 (newton)
Prześledzić kod funkcji newton.m *zawierającej implementację metody Newtona. Przetestować jej działanie dla funkcji cos(x) $= 0$ i różnych punktów startowych, np. $x_0 \in \{-1,\ 0,\ 0.1,\ 1.5,\ 2,\ 3\}$. Przykład użycia:*

```
[x, y] = newton(@cos,@(x)(-sin(x)),-1,100,1e-10); plot(abs(y))
```

W każdym przypadku wyjaśnić działanie metody Newtona.

Zadanie 7
Zmodyfikować procedurę z implementacją metody Newtona poprzez eliminację parametru określającego pochodną rozpatrywanej funkcji. Zastosować w tym celu aproksymację pochodnej:

- *w przód,*
- *w tył,*
- *centralną.*

Zadanie 8
Niech x^* będzie zerem jednokrotnym funkcji f, to jest $f(x^*) = 0 \neq f'(x^*)$. Niech druga pochodna funkcji f będzie ciągła. Zbadać rząd zbieżności do miejsca zerowego metody iteracyjnej Newtona.

Zadanie 9
Niech x^* będzie zerem funkcji f takim, że $f(x^*) = f''(x^*) = 0$ i $f'(x^*) \neq 0$. Niech trzecia pochodna funkcji f będzie ciągła. Zbadać rząd zbieżności do miejsca zerowego metody iteracyjnej Newtona.

Zadanie 10
Niech x^* będzie zerem dwukrotnym funkcji f, to jest $f(x^*) = f'(x^*) = 0 \neq f''(x^*)$. Niech druga pochodna funkcji f będzie ciągła. Zbadać rząd zbieżności do miejsca zerowego metody iteracyjnej Newtona.
Niech $x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Wykazać, że rząd zbieżności do miejsca zerowego tak zmodyfikowanej metody iteracyjnej Newtona jest kwadratowy.

[3] Ta metoda obliczania pierwiastka kwadratowego jest używana powszechnie w komputerach i kalkulatorach.

Zadanie 11
Niech x^* będzie zerem k-krotnym funkcji f i niech $f^{(k)}$ będzie ciągła. Wykazać, że w takim przypadku zbieżność do miejsca zerowego metody iteracyjnej Newtona jest tylko liniowa i wyznaczyć stałą (asymptotyczną) tej zbieżności.

Zadanie 12
Niech x^* będzie zerem k-krotnym funkcji f i niech $f^{(k)}$ będzie ciągła. Niech $x_{n+1} = x_n - k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Wykazać, że rząd zbieżności do miejsca zerowego tak zmodyfikowanej metody iteracyjnej Newtona jest kwadratowy.

Zadanie 13 (newton)
Zbadać zbieżność i (ewentualnie) szybkość zbieżności metody Newtona dla funkcji:

- $e^{x-1} - 2$ *dla* $x_0 = -1$,
- $x^2 - 2$ *dla* $x_0 = 2$,
- $(x+2)^5$ *dla* $x_0 = -1$,
- $x^2 - 2$ *dla* $x_0 = 10^6$,
- $\operatorname{arc\,tg} x$ *dla* $x_0 = 0.1$ *oraz* $x_0 = 10000$,
- $\sin x$ *dla* $x_0 = 1.5$.

W każdym przypadku wyjaśnić działanie metody Newtona.