



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”  
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

# Metody numeryczne

materiały do wykładu  
dla studentów

## 2. Metody dokładne rozwiązywania układów równań liniowych

- 2.1. Układy równań o macierzach trójkątnych
- 2.2. Metoda eliminacji Gaussa
- 2.3. Metoda Gaussa-Jordana
- 2.4. Algorytm Google PageRank
- 2.5. Rozkład macierzy na iloczyn macierzy trójkątnych
- 2.6. Metoda Cholesky'ego
- 2.7. Metoda Banachiewicza

## 2. Metody dokładne rozwiązywania układów równań liniowych

Metody rozwiązywania układów równań liniowych dzielą się na dwie grupy: metody dokładne i metody przybliżone (iteracyjne). Metody dokładne polegają na tym, że po skończonej liczbie działań arytmetycznych na współczynnikach układu równań otrzymujemy rozwiązanie tego układu. Słowo „dokładne” nie ma nic wspólnego z dokładnością uzyskanego rozwiązania, gdyż jest ono obarczone błędami wynikającymi z konieczności zaokrąglania liczb stanowiących wyniki działań pośrednich.

Metody przybliżone (iteracyjne) polegają na sekwencyjnym postępowaniu, w wyniku którego otrzymujemy rozwiązanie układu równań, z tym że w każdym kroku uzyskujemy kolejno przybliżenie szukanego rozwiązania. Metody te są procesami nieskończonymi, przerywanymi w momencie, gdy zostaje osiągnięta zadana dokładność rozwiązania. Dla metod iteracyjnych istotna jest sprawa dotycząca zbieżności ciągu kolejnych przybliżeń.

### 2.1. Układy równań o macierzach trójkątnych

Weźmy pod uwagę układ

$$GX = B \quad (2.1)$$

gdzie  $G$  jest macierzą trójkątną górną, czyli układ:

$$\begin{cases} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n-1}x_{n-1} + g_{1n}x_n = b_1 \\ g_{22}x_2 + \dots + g_{2n-1}x_{n-1} + g_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ g_{n-1n-1}x_{n-1} + g_{n-1n}x_n = b_{n-1} \\ g_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.2)$$

Zakładamy, że elementy głównej przekątnej macierzy  $G$  są różne od zera, tzn.  $g_{ii} \neq 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Wówczas układ równań (2.2) ma dokładnie jedno rozwiązanie, bo  $|G| \neq 0$ . Rozwiązanie znajdujemy w sposób rekurencyjny zaczynając od ostatniego równania:

$$x_n = \frac{b_n}{g_{nn}}$$

Wstawiając do równania przedostatniego mamy:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - g_{n-1n}x_n}{g_{n-1n-1}}$$

i tak postępujemy kolejno.

### Przykład 2.1.

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4 = 5 \\ 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_4 = -2 \end{cases}$$

Z ostatniego równania  $x_4 = -1$ , wstawiając do równania trzeciego  $x_3 = \frac{4-1}{3} = 1$ .

I kolejno  $x_2 = \frac{9-1+2}{5} = 2$ ,  $x_1 = \frac{5-8+1+6}{1} = 4$ .

Analogicznie postępujemy w przypadku, gdy macierz współczynników układu jest macierzą trójkątną dolną.

### 2.2. Metoda eliminacji Gaussa

Rozważmy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

W postaci macierzowej układ ten zapisać można jako:

$$AX = B$$

gdzie  $A$  jest macierzą współczynników,  $X$  - wektorem niewiadomych, zaś  $B$  - wektorem wyrazów wolnych:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Aby układ ten miał rozwiązanie potrzeba i wystarcza, aby wyznacznik macierzy  $A$  był różny od zera.

Metoda eliminacji Gaussa jest uogólnieniem metody przeciwnych współczynników na przypadek dowolnej liczby równań. Dla ułatwienia zapisu oznaczmy elementy wektora wyrazów wolnych przez  $a_{i,n+1}$  (gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Wówczas nasz układ przyjmie postać:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{cases} \quad (2.3)$$

Na układzie tym wykonywać będziemy trzy rodzaje operacji:

- przestawienie dowolnych równań,
- pomnożenie równania przez liczbę różną od zera,
- dodanie do danego równania dowolnego innego równania przemnożonego przez stałą różną od zera.

Etap 1. Bez straty ogólności możemy założyć, że  $a_{11} \neq 0$  (ewentualnie przestawiamy wiersze, by tak było). Element ten nazywamy elementem głównym. Wykorzystując pierwsze równanie eliminujemy z kolejnych równań niewiadomą  $x_1$  przemnażając je odpowiednio przez stałe:

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$$

i dodając do kolejnych równań.

W wyniku tych operacji uzyskujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n,n+1}^{(1)} \end{cases}$$

gdzie:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} \quad (i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 2, 3, \dots, n+1)$$

Etap  $k$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ). Niech teraz  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ . Podobnie jak w kroku pierwszym eliminujemy teraz niewiadomą  $x_k$  z kolejnych  $n-k$  równań uzyskanych w poprzednim etapie ( $k-1$ ). Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + a_{k,k+1}^{(k-1)}x_{k+1} + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = a_{k,n+1}^{(k-1)} \\ a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+1,n}^{(k)}x_n = a_{k+1,n+1}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{nn}^{(k)}x_n = a_{n,n+1}^{(k)} \end{cases}$$

gdzie:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{kj}^{(k-1)} \quad (i = k+1, \dots, n; \quad j = k+1, \dots, n+1)$$

Etap  $n$ . Po  $n - 1$  krokach uzyskujemy układ równań w postaci trójkątnej:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= a_{2,n+1}^{(1)} \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{cases}$$

który rozwiązujemy od ostatniego równania do pierwszego.

### Przykład 2.2.

Wykorzystując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

Etap 1. Skoro  $a_{11} \neq 0$ , to możemy przystąpić do eliminacji zmiennej  $x_1$  z równań 2 do 4. W tym celu od drugiego równania odejmujemy równanie 1, do trzeciego dodajemy to samo równanie, a od czwartego odejmujemy pierwsze równanie przemnożone przez stałą  $-2$ . W wyniku tych operacji uzyskujemy układ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 7x_4 = -3 \end{cases}$$

Etap 2. Teraz  $a_{22} \neq 0$ , wobec tego wykorzystujemy równanie drugie, by wyeliminować zmienną  $x_2$  z dwóch ostatnich równań: do równania trzeciego dodajemy to równanie, a od czwartego je odejmujemy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_3 = -1 \\ -x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

Etap 3. Kolejny element na przekątnej jest różny od 0 w związku z czym do ostatniego wiersza dodajemy wiersz trzeci.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_3 = -1 \\ 3x_4 = -3 \end{cases}$$

Etap 4. Pozostaje rozwiązać układ równań o macierzy trójkątnej. Z ostatnich dwóch równań od razu otrzymujemy:  $x_4 = -1$  oraz  $x_3 = -1$ , co podstawiając do równania drugiego daje nam  $x_2 = -5$ . W ostatnim kroku znajdujemy z równania pierwszego  $x_1 = 2$ .

Rozwiązaniem zadanego układu jest wektor:

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Powyższe obliczenia można prościej zapisać w postaci następującej tablicy (wypisujemy tylko elementy macierzy pomijając niewiadome, po prawej notujemy współczynniki przez które przemnażaliśmy wiersz wiodący):

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & (-1) \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & (1) \\ \hline 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 & (1) \\ \hline 0 & -1 & 1 & 7 & -3 & (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}$$

Metoda Gaussa pozwala nam także w prosty sposób obliczyć wyznacznik macierzy skojarzonej z zadanym układem równań. Wystarczy wymnożyć wartości przekątnej ostatniej macierzy, gdyż zgodnie z odpowiednimi twierdzeniami wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów przekątnej.

### 2.3. Metoda Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa-Jordana jest bardzo podobna do metody Gaussa. W tym przypadku celem operacji elementarnych wykonywanych na macierzy współczynników jest uzyskanie nie macierzy trójkątnej, ale macierzy jednostkowej, dzięki czemu wektor wyrazów wolnych przekształcimy w wektor rozwiązania. Rozważmy jeszcze raz układ (2.3).

Etap 1. Podobnie jak w przypadku metody Gaussa bez straty ogólności możemy założyć, że  $a_{11} \neq 0$ . Dzielimy pierwsze równanie przez  $a_{11}$  oraz eliminujemy zmienną  $x_1$  z pozostałych równań. Uzyskujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n,n+1}^{(1)} \end{cases}$$

gdzie:

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 1, 2, \dots, n+1)$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} \quad (i = 2, 3, \dots, n; j = 2, 3, \dots, n+1)$$

Etap k ( $1 \leq k \leq n$ ). Niech teraz  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ . Podobnie jak w kroku pierwszym eliminujemy teraz niewiadomą  $x_k$  z kolejnych  $n-1$  równań uzyskanych w poprzednim etapie ( $k-1$ ). Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + a_{1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{1n}^{(k)}x_n = a_{1,n+1}^{(k)} \\ \vdots \\ x_k + a_{k,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{kn}^{(k)}x_n = a_{k,n+1}^{(k)} \\ a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+1,n}^{(k)}x_n = a_{k+1,n+1}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{nn}^{(k)}x_n = a_{n,n+1}^{(k)} \end{cases}$$

gdzie:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{kj}^{(k-1)} \quad (i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n; j = k+1, \dots, n+1)$$

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \quad (j = k, \dots, n+1)$$

Etap n. Po  $n-1$  krokach uzyskujemy układ równań w postaci:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + a_{1n}^{(n-1)}x_n = a_{1,n+1}^{(n-1)} \\ x_2 + \dots + a_{2n}^{(n-1)}x_n = a_{2,n+1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{cases}$$

który przekształcamy podobnie jak w kroku  $k$ -tym do układu:

$$\begin{cases} x_1 & = a_{1,n+1}^{(n)} \\ x_2 & = a_{2,n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ x_n & = a_{n,n+1}^{(n)} \end{cases}$$

Współczynniki  $a_{i,n+1}^{(n)}$  dla  $i = 1, \dots, n$  są współrzędnymi wektora rozwiązania.

### Przykład 2.3.

Wykorzystując metodę Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań z przykładu 2.2.

Posłużymy się schematem obliczeniowym podobnym do tego zastosowanego w przykładzie 2.2.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \\ (-1) \\ (1) \\ (-2) \end{array}$$


---


$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & -3 \end{array} \begin{array}{l} (1) \\ \\ (1) \\ (-1) \end{array}$$


---


$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \end{array} \begin{array}{l} (-1) \\ (2) \\ \\ (1) \end{array}$$


---


$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \begin{array}{l} (-1/3) \\ (4/3) \\ \\ \end{array}$$


---


$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Rozwiązaniem jest wektor  $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .



## 2.4. Algorytm Google PageRank

Rozważmy teraz jedno z najważniejszych (i najbardziej intratnych) zastosowań algebry liniowej, a dokładnie metod rozwiązywania układów równań, czyli algorytm Google PageRank, wykorzystywany przez wyszukiwarkę Google do pozycjonowania stron internetowych.

Co prawda, szczegóły całego algorytmu nigdy nie zostały upublicznione, a do tego algorytm jest prawdopodobnie poprawiany na bieżąco by uniknąć manipulacji wynikami wyszukiwania, ale podstawowa idea stojąca za tą procedurą opiera się na (możliwie szybkim) rozwiązaniu układu równań liniowych.

Założmy, że chcemy znaleźć strony, które zawierają dane słowo i poszeregować je względem ważności (popularności). O ile wyszukanie stron na których występuje dane słowo jest (przynajmniej teoretycznie) sprawą prostą, to już znacznie bardziej problematyczne jest samo sprecyzowanie, co rozumiemy przez ważność danej strony. Najpierw uznawano zazwyczaj, że ważność strony jest określona przez liczbę stron, które do niej kierują bezpośrednim linkiem. Niestety, takie podejście nie dawało dobrych rezultatów: jeżeli na daną stronę wskazuje choćby tylko jedna strona, którą wszyscy znają, to taka strona ma większe znaczenie, niż strona, do której prowadzi wiele linków z miejsc, gdzie nikt nigdy nie zagląda. Co więcej, taka klasyfikacja zachęcałaby do nadużyć - żeby dobrze wypozycjonować stronę w przeglądarce wystarczyłoby stworzyć odpowiednio dużo witryn, zawierających jedynie link do niej.

Sergey Brin i Larry Page, twórcy algorytmu PageRank, stwierdzili, że strona jest ważna, gdy na innych ważnych stronach znajdują się odnośniki do niej. Mówiąc precyzyjniej, przyjęli oni następujące (pozornie oczywiste) założenie: **ważność/waga danej strony jest wprost proporcjonalna do sumy ważności/wag wszystkich stron które na nią wskazują.**

Założmy więc, że chcemy uszeregować w kolejności od najbardziej do najmniej istotnej strony  $s_1, s_2, \dots, s_n$  o wagach  $w_1, w_2, \dots, w_n > 0$ . Wtedy powyższy warunek oznacza:

$$w_i = C \sum_{k: s_k \rightarrow s_i} w_k,$$

gdzie  $C$  jest współczynnikiem proporcjonalności, a zapis  $s_k \rightarrow s_i$  oznacza, że na stronie  $s_k$  znajduje się link do strony  $s_i$ . Powyższy warunek można zmodyfikować, biorąc pod uwagę fakt, że im więcej linków wychodzi z danej strony, tym mniejsze znaczenie ma każdy z nich: po prostu mniejsza jest szansa, że zainteresowany tematyką internauta wybierze akurat tę stronę docelową. Przyjmując, że  $L_k$  oznacza liczbę linków wychodzących z  $k$ -tej strony, będziemy rozpatrywać układ:

$$w_i = C \sum_{k: s_k \rightarrow s_i} \frac{w_k}{L_k}, \quad (2.4)$$

Zapiszmy powyższy układ w postaci macierzowej  $P = [p_{ij}]$  gdzie

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{L_j}, & \text{gdy } s_j \rightarrow s_i \\ \frac{1}{n}, & \text{gdy } L_j = 0 \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (2.5)$$

Innymi słowy,  $j$ -ty element  $i$ -tego wiersza opisuje prawdopodobieństwo, z jakim użytkownik za chwilę przejdzie na stronę  $i$ , jeśli obecnie jest na stronie  $j$  - przy założeniu, że użytkownik na kolejną stronę przechodzi jedynie za pomocą linków ze strony, na której aktualnie się znajduje (wkrótce zobaczymy, jak Page i Brin poradzili sobie z usunięciem tego nierealistycznego założenia).

Jeśli na stronie  $j$ -tej nie ma linków do innych stron, zakładamy, że użytkownik może za chwilę przenieść się na dowolną inną stronę z tym samym prawdopodobieństwem  $\frac{1}{n}$ : nie pozostanie przecież wiecznie na tej stronie, pomimo braku „wyjść”, a z drugiej strony, nie mamy żadnych wskazówek dotyczących tego, gdzie za chwilę się znajdzie.

Macierz  $P$  opisaną równością (2.5) będziemy nazywać *uproszczoną macierzą Google*.

#### Przykład 2.4.

Zapisać uproszczoną macierz Google dla sieci złożonej ze stron ponumerowanych od 1 do 4, połączonych następującymi linkami:  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4$ .

Układ równań (2.5) można zapisać w postaci

$$w = CPw, \quad (2.6)$$

gdzie  $w = [w_1, \dots, w_n]^T$ . Mnożąc obie strony powyższej równości przez  $\lambda = \frac{1}{C}$ , otrzymujemy:

$$\lambda w = Pw. \quad (2.7)$$

Jak się przekonamy w rozdziale 4, liczbę  $\lambda$  w takiej sytuacji nazywamy *wartością własną*, a wektor  $w$  – *wektorem własnym* macierzy  $P$ , o ile  $w \neq 0$ .

Obliczenie wektora  $w$  na podstawie układu równań (2.7) napotyka na pewne problemy. Przede wszystkim rozwiązanie zależy od  $\lambda$ , które na razie jest nieznane. Ponadto, z kursu algebry i analizy wiemy, że dla tego typu równań zachodzi jeden z dwóch przypadków: albo jedynym rozwiązaniem jest  $w = 0$ , albo układ równań (2.7) ma nieskończenie wiele rozwiązań. W pierwszym przypadku, rozwiązanie zerowe nie przybliży nas do celu, którym jest ustalenie wag poszczególnych stron. W drugim, bez dodatkowych informacji, moglibyśmy nie wiedzieć, które z rozwiązań tworzy właściwy ranking stron.

By pokonać te trudności, skorzystamy z elementów teorii wartości własnych, które szerzej omówimy w rozdziale 4. Przede wszystkim, aby otrzymać rozwiązanie niezerowe, musimy założyć, że  $\lambda$  istotnie jest wartością własną, a więc spełnia tzw. *równanie charakterystyczne*:

$$\det(P - \lambda I) = 0,$$

gdzie  $I$  jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru. W ten sposób zapewnimy sobie istnienie nieskończenie wielu rozwiązań układu (2.7).

Pewnego rodzaju jednoznaczność rozwiązywania zapewnia nam poniższe twierdzenie:

**Twierdzenie 2.1. (Szczególny przypadek twierdzenia Frobeniusa-Perrona)**

Dla uproszczonej macierzy Google  $P$  lub dla uogólnionej macierzy Googla  $G$  (którą za chwilę zdefiniujemy):

- a)  $\lambda = 1$  zawsze jest wartością własną.
- b) Z dokładnością do przemnożenia przez dodatni skalar, wektor własny  $w$  odpowiadający wartości własnej 1 jest wyznaczony jednoznacznie i ma wszystkie współrzędne tego samego znaku. W konsekwencji, uporządkowanie wag  $w_i$ , z których ten wektor się składa, jest zadane jednoznacznie.

Zatem, po pierwsze, w układzie równań (2.7) możemy podstawić  $\lambda = 1$  (wybór  $\lambda$  zależy od początkowego wyboru współczynnika proporcjonalności  $C$ , więc nie jesteśmy tu w żaden sposób ograniczani), otrzymując układ równań:

$$(P - I)w = 0. \tag{2.8}$$

Po drugie, jako, że rozwiązanie układu (2.8) jest jednoznaczne z dokładnością do przemnożenia przez dodatni skalar, za jedną ze współrzędnych wektora  $w$  można podstawić dowolną, dodatnią liczbę i odrzucić jedno równanie z układu, w którym ta współrzędna występuje z niezerowym współczynnikiem. Podstawienie innej liczby prowadzi do innego rozwiązania, ale rozwiązanie to zadaje to samo uporządkowanie wag  $w_i$ .

By zakończyć rozwiązywanie zadania, wystarczy uszeregować strony w kolejności od największej do najmniejszej wagi.

**Przykład 2.5.**

Uporządkować strony w kolejności wag, jeśli zadane są następujące linki pomiędzy nimi:  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4$ .

**Uwaga 2.1.** W praktyce, zamiast macierzy  $P$ , Brin i Page jako macierzy Google używali:

$$G = \alpha P + \frac{1}{n}(1 - \alpha)J,$$

gdzie  $J$  jest macierzą o wymiarach  $n \times n$  złożoną z samych jedynek, natomiast  $\alpha$  jest parametrem, który określa prawdopodobieństwo, że internauta jako następną odwiedzoną stronę wybierze którąś ze wskazywanych przez linki znajdujące się na danej stronie. Ta modyfikacja pozwala uniknąć pewnych problemów matematycznych (więcej o tym w rozdziale 4), a ponadto uchyla nierealistyczne założenie, że użytkownik na kolejną stronę wchodzi jedynie na podstawie linków ze strony, na której aktualnie jest. Na podstawie różnych badań Page i Brin przyjęli  $\alpha = 0,85$  i prawdopodobnie zbliżona wartość jest używana w algorytmie wyszukiwania do dziś.

**Uwaga 2.2.** W praktyce macierze Google mogą mieć olbrzymie rozmiary. Dlatego ważne jest poznanie sposobów znacznie szybszego rozwiązywania dużych układów równań liniowych niż metody Gaussa i Gaussa-Jordana, nie mówiąc już o wyznacznikowej. Szczególnie użyteczne w tym przypadku są metody iteracyjne, które poznamy w rozdziale 3.

## 2.5. Rozkład macierzy na iloczyn macierzy trójkątnych

### Twierdzenie 2.2.

Jeżeli macierz  $A$  jest macierzą kwadratową stopnia  $n$ , której wszystkie minory główne kątowe są różne od zera, to istnieją macierze trójkątna dolna  $D$  i trójkątna górna  $G$  (obie stopnia  $n$ ), takie że:

$$A = DG \quad (2.9)$$

Rozkład ten nie jest jednoznaczny. Jeśli jednak założymy, że wszystkie elementy głównej przekątnej  $G$  są równe np. 1, to otrzymany rozkład jest jednoznaczny.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & 1 & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etap 1. Wyznaczamy pierwszą kolumnę macierzy  $D$  i pierwszy wiersz macierzy  $G$ .

Etap 2. Wyznaczamy drugą kolumnę macierzy  $D$  i drugi wiersz macierzy  $G$ .

Etap „i”-ty. Wyznaczamy  $i$ -tą kolumnę macierzy  $D$  oraz  $i$ -ty wiersz macierzy  $G$ .

$$DG = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{11}g_{12} & d_{11}g_{13} \\ d_{21} & d_{21}g_{12} + d_{22} & d_{21}g_{13} + d_{22}g_{23} \\ d_{31} & d_{31}g_{12} + d_{32} & d_{31}g_{13} + d_{32}g_{23} + d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Porównując elementy obu macierzy otrzymujemy równości:

$$\begin{aligned} d_{11} &= a_{11}, d_{21} = a_{21}, d_{31} = a_{31}, \\ d_{11}g_{12} &= a_{12} \Rightarrow g_{12} = \frac{a_{12}}{d_{11}}, \\ d_{11}g_{13} &= a_{13} \Rightarrow g_{13} = \frac{a_{13}}{d_{11}}, \\ d_{21}g_{12} + d_{22} &= a_{22} \Rightarrow d_{22} = a_{22} - d_{21}g_{12}, \\ d_{31}g_{12} + d_{32} &= a_{32} \Rightarrow d_{32} = a_{32} - d_{31}g_{12}, \\ d_{21}g_{13} + d_{22}g_{23} &= a_{23} \Rightarrow g_{23} = \frac{a_{23} - d_{21}g_{13}}{d_{22}}, \\ d_{31}g_{13} + d_{32}g_{23} + d_{33} &= a_{33} \Rightarrow d_{33} = a_{33} - d_{31}g_{13} - d_{32}g_{23}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Oczywiście nie ma potrzeby zapamiętywania powyższych wzorów. Aby wyznaczyć macierze  $D$  i  $G$  wystarczy, tak naprawdę, w odpowiedniej kolejności sprawdzać czy iloczyn powstających macierzy  $D$  i  $G$  daje w rezultacie macierz  $A$ .

### Przykład 2.6.

Przedstawić macierz  $A$  w postaci iloczynu macierzy trójkątnych.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeżeli macierz  $A$  dodatkowo (oprócz założenia o minorach kątowych głównych) jest macierzą symetryczną, czyli  $A = A^T$  to można ją przedstawić w postaci iloczynu dwóch macierzy trójkątnych, z których jedna jest transponowana względem drugiej, a więc:

$$A = G^T G \quad (2.12)$$

Np. dla macierzy stopnia trzeciego:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy  $G$  wyliczamy z równości:

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= a_{11}, \\ g_{11}g_{12} &= a_{12}, \\ g_{11}g_{13} &= a_{13}, \\ g_{12}^2 + g_{22}^2 &= a_{22}, \\ g_{12}g_{13} + g_{22}g_{23} &= a_{23}, \\ g_{13}^2 + g_{23}^2 + g_{33}^2 &= a_{33}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

W tym wypadku również nie ma potrzeby zapamiętywania powyższych wzorów. Aby wyznaczyć macierz  $G$ , wystarczy, tak naprawdę, w odpowiedniej kolejności sprawdzać czy iloczyn powstających macierzy  $G^T$  i  $G$  daje w rezultacie macierz  $A$ .

### Przykład 2.7.

Macierz  $A$  przedstawić w postaci iloczynu  $G^T G$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 1 \Rightarrow g_{11} = 1, \\ g_{11}g_{12} &= 2 \Rightarrow g_{12} = \frac{2}{1} = 2, \\ g_{11}g_{13} &= -2 \Rightarrow g_{13} = \frac{-2}{1} = -2, \\ g_{12}^2 + g_{22}^2 &= 5 \Rightarrow g_{22}^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow g_{22} = 1, \\ g_{12}g_{13} + g_{22}g_{23} &= 0 \Rightarrow g_{23} = \frac{0 - 2 \cdot (-2)}{1} = 4, \\ g_{13}^2 + g_{23}^2 + g_{33}^2 &= 24 \Rightarrow g_{33}^2 = 24 - 4 - 16 = 4 \Rightarrow g_{33} = 2. \end{aligned}$$

Czyli:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

W oparciu o te dwie metody rozkładu macierzy na iloczyn macierzy trójkątnych mamy dwie metody dokładne rozwiązywania układów równań liniowych: metodę Cholesky'ego i metodę Banachiewicza.

## 2.6. Metoda Cholesky'ego

Mamy do rozwiązania układ równań:  $AX = B$ . Macierz  $A$  przedstawiamy w postaci iloczynu macierzy trójkątnych  $D$  i  $G$ , czyli  $A = DG$ . Wówczas:

$$AX = B \Leftrightarrow DGX = B \Leftrightarrow DY = B \wedge GX = Y \quad (2.14)$$

Zatem rozwiązujemy dwa układy równań o macierzach trójkątnych.

### Przykład 2.8.

Rozwiązać układ równań metodą Cholesky'ego.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_3 = 15 \end{cases}$$



## 2.7. Metoda Banachiewicza

W metodzie Banachiewicza wykorzystujemy rozkład macierzy  $A$  na iloczyn  $G^T G$ .

$$AX = B \Leftrightarrow G^T GX = B \Leftrightarrow G^T Y = B \wedge GX = Y \quad (2.15)$$

### Przykład 2.9.

Rozwiązać układ równań metodą Banachiewicza.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 = 5 \\ -2x_1 + 24x_3 = 12 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 24 \end{bmatrix} = G^T G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{obliczenia w przykładzie 2.7}).$$

Zamiast układu wyjściowego rozwiązujemy dwa układy równań:

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ 2y_1 + y_2 = 5 \\ -2y_1 + 4y_2 + 2y_3 = 12 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = y_1 \\ x_2 + 4x_3 = y_2 \\ 2x_3 = y_3 \end{cases}$$

i kolejno otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2, y_2 = 1, y_3 = 6, \\ x_3 &= 3, x_2 = -11, x_1 = 30. \end{aligned}$$

### Dodatkowa informacja – złożoność obliczeniowa

Przedstawione powyżej algorytmy znacząco przyspieszają rozwiązywanie dużych układów równań. Złożoność obliczeniowa rozwiązywania takich układów przez wyznaczniki wynosi bowiem  $O(n!)$ , natomiast metodom z tego rozdziału wystarczy czas  $O(n^3)$ , gdzie  $n$  jest rozmiarem macierzy. W praktycznej implementacji metoda Banachiewicza działa około 2 razy szybciej niż metoda Cholesky'ego, zaś ta kilka razy szybciej od metod eliminacji Gaussa i Gaussa-Jordana.

Ponadto, znana jest drobna modyfikacja metod Cholesky'ego i Banachiewicza, która pozwala obniżyć złożoność obliczeniową do  $O(n^{2,376})$ . Tym samym, są to najszybsze znane metody rozwiązywania układów równań liniowych. Mimo to, dla szczególnie dużych układów równań, wszystkie metody te mogą być wciąż zbyt wolne. W następnym rozdziale przekonamy się, jak rozwiązać ten problem.