Metody przybliżone dla równań i układów równań nieliniowych

Wykład z przedmiotu Metody numeryczne

Jakub Bielawski
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

5 listopada 2016

Plan

Problematyka

Jak rozwiązać równanie postaci:

$$f(x) = 0.$$

Generalne (minimalne) założenie: f jest ciągła.

Zasadnicze pytania

1. Dlaczego warto stosować metody przybliżone?
2. Jak skonstruować ciąg iteracji? W jakim przedziale szukać?
3. Jak długo wykonywać iteracje?

Plan:

1. Lokalizacja pierwiastków
2. Metoda bisekcji
3. Metoda stycznych (Newtona)
4. Metoda siecznych (regula falsi)
5. Metoda Newtona dla układów równań nieliniowych

1. Znajdowanie przedziału z pierwiastkiem

Twierdzenie 5.1 (twierdzenie Darboux)

Jeżeli funkcja ciągła f przyjmuje na końcach przedziału domkniętego $[a, b]$ wartości o przeciwnych znakach, tzn. $f(a) \cdot f(b) < 0$, to wewnątrz przedziału istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$.

Jedyność pierwiastka wynika np. z monotoniczności funkcji f na przedziale $[a, b]$, tzn. szukamy takiego przedziału $[a, b]$, że: $f'(x)$ ma *stały znak* na całym przedziale.

2. Metoda graficzna lokalizacji.

Przykład 5.1:

Zlokalizować pierwiastki równania $\frac{x^3}{3} + 10x + 3 = \frac{7}{2}x^2$ w przedziale o długości 1.

Metoda bisekcji

Szukamy rozwiązania równania $f(x) = 0$ w przedziale $[a, b]$ dla funkcji f takiej, że $f(x) \cdot f(b) < 0$.

Metoda bisekcji

1. $x_0 = \frac{a+b}{2}$
2. Sprawdzamy, czy $f(x_0) \cdot f(a) < 0$, czy $f(x_0) \cdot f(b) < 0$.
3. W pierwszym przypadku przyjmujemy $x_1 = \frac{a+x_0}{2}$, a w drugim $x_1 = \frac{b+x_0}{2}$

   $\vdots$

Schemat:

1. lokalizacja pierwiastka
2. podział odcinka na pół
3. ponowna lokalizacja pierwiastka

   $\vdots$

Twierdzenie 5.2

Jeżeli wektor $\bar{x}$ jest miejscem zerowym funkcji f w przedziale $[a, b]$, to:

$$|x_n - \bar{x}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (b - a)$$

Wniosek 5.1

Jeśli chcemy obliczyć rozwiązanie dokładne z dokładnością $\varepsilon > 0$, to należy wykonać co najmniej $\left(\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1\right)$ iteracji metody bisekcji.

Przykład 5.2

Za pomocą metody bisekcji znaleźć trzy pierwsze przybliżenia rozwiązania równania $\frac{x^3}{3} + 10x + 3 = \frac{7}{2}x^2$ w przedziale $(-1, 0)$. Oszacować błąd tego przybliżenia. Ile kroków metody bisekcji należy wykonać, by mieć pewność, że błąd jest nie większy niż $0,01$?

Twierdzenie 5.2

Jeżeli wektor $\bar{x}$ jest miejscem zerowym funkcji f w przedziale $[a, b]$, to:

$$|x_n - \bar{x}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (b - a)$$

Wniosek 5.1

Jeśli chcemy obliczyć rozwiązanie dokładne z dokładnością $\varepsilon > 0$, to należy wykonać co najmniej $\left(\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1\right)$ iteracji metody bisekcji.

Przykład 5.2

Za pomocą metody bisekcji znaleźć trzy pierwsze przybliżenia rozwiązania równania $\frac{x^3}{3} + 10x + 3 = \frac{7}{2}x^2$ w przedziale $(-1, 0)$. Oszacować błąd tego przybliżenia. Ile kroków metody bisekcji należy wykonać, by mieć pewność, że błąd jest nie większy niż $0,01$?

Metoda bisekcji

Zalety

1. globalna zbieżność
2. słabe założenia o funkcji f: tylko ciągłość
3. łatwe oszacowanie błędu obliczeń (niezależne od f)

Wady

1. (porównywalnie) wolna zbieżność

Metoda Newtona (stycznych)

Schemat:

1. obliczyć punkt startowy x_0
2. wyznaczyć styczną do krzywej $y = f(x)$ w punkcie startowym $(x_0, f(x_0))$
3. obliczyć miejsce zerowe stycznej, ozn. x_1
4. wyznaczyć styczną do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_1, f(x_1))$
5. obliczyć miejsce zerowe stycznej, ozn. x_2

$\vdots$

Twierdzenie 5.3

Jeżeli funkcja f jest klasy $C^2(a,b)$, $f(a)\cdot f(b)<0$, f' i f'' są stałego znaku w przedziale (a,b), tzn.:

$$\forall x\in(a,b):\ f'(x)>0 \qquad \vee \qquad \forall x\in(a,b):\ f'(x)<0,$$

oraz

$$\forall x\in(a,b):\ f''(x)>0 \qquad \vee \qquad \forall x\in(a,b):\ f''(x)<0,$$

Wówczas dla dowolnego przybliżenia początkowego $x_0\in[a,b]$ spełniającego warunek

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0 \tag{5.1}$$

ciąg kolejnych przybliżeń (x_n) określony wzorem

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.2}$$

jest zbieżny do jedynego pierwiastka $\bar{x}$ równania $f(x)=0$.

Uwaga 5.1

- Do zbieżności metody Newtona wystarczy, aby funkcja f była klasy $C^1(a, b)$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ oraz f' była stałego znaku w przedziale (a, b).
- Za przybliżenie początkowe przyjmujemy jeden z końców przedziału a lub b tak, aby był spełniony warunek (5.1).

Oszacowanie błędu przybliżenia

W metodzie Newtona:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ : \qquad |\bar{x} - x_n| \leqslant \frac{M_2}{2m_1} \cdot (x_n - x_{n-1})^2, \tag{5.3}$$

gdzie:

$$m_1 = \min_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|, \qquad M_2 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|.$$

Wady i zalety metody Newtona

Zalety

1. najszybsza zbieżność

Wady

1. najostrzejsze założenia ($\Longrightarrow$ konieczność obliczenia pochodnej)
2. tylko lokalna zbieżność

Przykład 5.4:
Metodą stycznych znaleźć dwa pierwsze przybliżenia rozwiązania równania i oszacować błąd drugiego przybliżenia:

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 2 = 0.$$

Metoda siecznych (regula falsi)

Schemat:

1. wyznaczyć sieczną krzywej $y = f(x)$ przechodzącą przez punkty $(a, f(a)), (b, f(b))$
2. obliczyć miejsce zerowe siecznej, ozn. x_1
3. sprawdzić, czy pierwiastek równania $f(x) = 0$ jest w $[a, x_1]$ czy w $[x_1, b]$

Metoda siecznych (regula falsi)

Schemat:

1. wyznaczyć sieczną krzywej $y = f(x)$ przechodzącą przez punkty $(a, f(a)), (b, f(b))$
2. obliczyć miejsce zerowe siecznej, ozn. x_1
3. sprawdzić, czy pierwiastek równania $f(x) = 0$ jest w $[a, x_1]$ czy w $[x_1, b]$

Metoda siecznych (regula falsi)

Schemat:

1. wyznaczyć sieczną krzywej $y = f(x)$ przechodzącą przez punkty $(a, f(a)), (b, f(b))$
2. obliczyć miejsce zerowe siecznej, ozn. x_1
3. sprawdzić, czy pierwiastek równania $f(x) = 0$ jest w $[a, x_1]$ czy w $[x_1, b]$
4. wyznaczyć sieczną krzywej $y = f(x)$ przechodzącą przez punkty $(a, f(a)), (x_1, f(x_1))$
5. obliczyć miejsce zerowe siecznej, ozn. x_2

$$\vdots$$

Nieruchomy koniec przedziału

Załóżmy, że $f \in C^2(a, b)$ i druga pochodna f'' ma stały znak na całym przedziale. Wtedy *nieruchomym końcem przedziału* $[a, b]$ nazywamy tę z liczb a, b, dla której wartość funkcji ma ten sam znak, co f''.

Formalnie:
jeśli $\forall x \in (a, b) : f(a) \cdot f''(x) > 0$, to a jest nieruchomym końcem przedziału
jeśli $\forall x \in (a, b) : f(b) \cdot f''(x) > 0$, to b jest nieruchomym końcem przedziału

Wzór rekurencyjny

Jeżeli a jest nieruchomym końcem przedziału, to:

$$x_0 = b,$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)}, \qquad n \in \mathbb{N}_+ \tag{5.4}$$

Wzór rekurencyjny

Jeżeli b jest nieruchomym końcem przedziału, to:

$$x_0 = a,$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)}, \qquad n \in \mathbb{N}_+ \tag{5.5}$$

Twierdzenie 5.4

Jeżeli funkcja $f \in C^2(a, b)$ oraz f'' ma stały znak na (a, b) to ciągi rekurencyjne (5.4) i (5.5) są zbieżne do jedynego rozwiązania równania $f(x) = 0$ w przedziale $[a, b]$.

Twierdzenie 5.5

Jeżeli funkcja $f \in C^1(a,b)$ oraz

$$\exists m_1 > 0 \; \forall x \in (a,b): \qquad |f'(x)| \geqslant m_1,$$

to:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad |x - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1} \tag{5.6}$$

gdzie jako poprzednio: $m_1 = \min_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

Twierdzenie 5.6

Jeżeli funkcja $f \in C^1(a,b)$, f' jest stałego znaku w przedziale (a,b) oraz:

$$\exists m, M > 0 \; \forall x \in (a,b): \qquad m \leqslant |f'(x)| \leqslant M,$$

to:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+: \qquad |x - x_n| \leqslant \frac{M-m}{m} \cdot |x_n - x_{n-1}| \tag{5.7}$$

Wady i zalety metody siecznych

Zalety

1. wygodniejsza do stosowania od metody stycznych (brak konieczności obliczania pochodnej)
2. szybsza od metod bisekcji i iteracji

Wady

1. gorsza zbieżność niż w metodzie stycznych
2. najostrzejsze założenia
3. tylko lokalna zbieżność

Przykład 5.5
Metodą siecznych znaleźć dwa pierwsze przybliżenia rozwiązania równania i oszacować błąd drugiego przybliżenia:

$$x^3 - 3x^2 + 6x + 2 = 0.$$

Układ równań nieliniowych

Rozważamy układ równań:

$$
(5.8) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \end{cases}
$$

gdzie $f_i \colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$.
Układ równań (5.8) zapisujemy w postaci wektorowej

$$
\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}
$$

gdzie

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Metoda Newtona dla układów równań nieliniowych

Niech $\mathbf{x^{(n)}} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_k^{(n)} \end{bmatrix}$ będzie n-tym przybliżeniem rozwiązania dokładnego $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_k \end{bmatrix}$

Metoda Newtona dla układów równań nieliniowych

Ciąg kolejnych przybliżeń tworzymy według wzoru:

$$\mathbf{x^{(n+1)}} = \mathbf{x^{(n)}} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x^{(n)}}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x^{(n)}})$$

$\mathbf{x^{(0)}}$ - dowolne

gdzie

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{bmatrix} (f_1)'_{x_1}(\mathbf{x}) & \ldots & (f_1)'_{x_k}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ (f_k)'_{x_1}(\mathbf{x}) & \ldots & (f_k)'_{x_k}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Przykład 5.6

Metodą Newtona rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 &= 1 \\ 2x_1^3 - 3x_1x_2^2 &= 3 \end{cases}$$

z przybliżeniem początkowym $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Uwaga 5.2

Aby utworzyć przybliżenie $\mathbf{x}^{(2)}$ należy obliczyć $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})$, $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(1)})$ i zastosować metodę Newtona dla układów równań nieliniowych dla $n = 2$, itd.