Metody Numeryczne, część 2
studia stacjonarne
Interpolacja

Krystyna Ziętak

14 października 2018

Spis treści

Literatura:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT 2006.
- J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, WNT 1981.
- A. Grabarski, I. Musiał-Walczak, W. Sadkowski, A. Smoktunowicz, J. Wąsowski, *Ćwiczenia laboratoryjne z metod numerycznych*, Oficyna Wyd. Politech. Warszawskiej 2002.
- **materiały internetowe:** http://wazniak.mimuw.edu.pl

Motywacja

- Efektem eksperymentów (fizycznych, chemicznych, itp.) mogą być następujące dane

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{array},$$

gdzie liczby $x_0, \ldots, x_n$ są różne i mogą być interpretowane jako argumenty, dla których dokonano pomiarów wartości $y_0, \ldots, y_n$ jakiejś funkcji $y = f(x)$ opisującej dane zjawisko (proces). Na podstawie tych pomiarów chcemy wyznaczyć wartość (przybliżoną) tej funkcji dla jakiegoś innego argumentu z przedziału zawierającego $x_0, \ldots, x_n$.

Funkcja $f(x)$ może nie być znana explicite, a jej wartości dla argumentów x_j mogą być wyznaczone niedokładnie.

Motywacja

- W drugim problemie funkcja $f(x)$ jest znana, ale na przykład jest określona kosztownym wzorem lub obliczenie jej wartości jest trudne i skomplikowane. Wówczas zamiast obliczać wartości funkcji f obliczamy wartości jakiejś prostszej funkcji, która funkcję f przybliża w sensowny sposób.

Jako funkcję przybliżającą funkcję $f(x)$ możemy wybrać wielomian odpowiedniego stopnia.

Wielomiany

$$w_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$$u(x) = 2x^3 - 2x + 3$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = 3$$

Schemat Hornera - przypomnienie

Wartość wielomianu dla konkretnej wartości x obliczamy za pomocą schematu Hornera.

Interpolacja wielomianowa

Zadanie

- **Dane**: liczba naturalna n oraz $n+1$ różnych liczb
$$x_0, \ldots, x_n$$
oraz $n+1$ liczb
$$y_0, \ldots, y_n$$
- **Wynik**: wielomian $w_n(x)$ stopnia $\leq n$ taki, że
$$w_n(x_j) = y_j \qquad \text{dla } j = 0, \ldots, n$$

- liczby $x_0, \ldots, x_n$ nazywamy **węzałami interpolacji**
- Wielomian $w_n(x)$ spełniający powyższe warunki nazywamy **wielomianem interpolacyjnym (interpolującym)**.

Wielomian interpolujący funkcję

Liczby $y_0, \ldots, y_n$ mogą być wartościami jakiejś funkcji $f(x)$, czyli

$$w_n(x_j) = y_j = f(x_j) \quad j = 0, \ldots, n.$$

Wówczas mówimy, że wielomian $w_n(x)$ interpoluje funkcję f.

Geometryczna interpretacja

Para liczb x_k, y_k może być interpretowana jako punkt na płaszczyźnie o współrzędnych (x_k, y_k). Wobec tego wykres wielomianu $w_n(x)$ interpolującego funkcję f przecina wykres funkcji f w punktach $(x_0, y_0) \ldots, (x_n, y_n)$. Dla $n = 1$ wielomian interpolacyjny jest sieczną! Jak to uzasadnić?

Dane:

punkt P_0 o współrzędnych (x_0, y_0)
punkt P_1 o współrzędnych (x_1, y_1),

gdzie $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$

Zakładamy, że $x_0 \neq x_1$

Równanie siecznej

$$y = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \equiv w_1(x)$$

Wyznacz współczynniki A, B

$$y = Ax + B = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Twierdzenie

Niech dane liczby $x_0, \ldots, x_n$ będą parami różne i niech dane będą liczby $y_0, \ldots, y_n$. Wówczas istnieje jednoznaczny wielomian $w_n(x)$ stopnia $\leq n$ taki, że

$$w_n(x_j) = y_j \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Pomocnicze oznaczenia

Suma n liczb

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \cdots + a_n$$

Iloczyn n liczb

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdots a_n$$

Szczególny przypadek (pomijamy czynnik dla $j = k$)

$$\prod_{j=1,\ j\neq k}^{n} a_{k,j} = a_{k,1} \cdots a_{k,k-1} a_{k,k+1} \cdots a_{k,n}$$

Jak reprezentować wielomian interpolacyjny?

- Standardowa postać
  $w_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$
- Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

- Wzór interpolacyjny Newtona

$$w_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$+ c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Jak wyznacza się współczynniki a_j, c_j?

Pierwszy sposób wyznaczania wielomianu interpolacyjnego

Przykład.

$x_0 = 1$	$x_1 = -1$	$x_2 = 2$
$y_0 = 0$	$y_1 = -3$	$y_2 = 4$

Uwaga. Węzły interpolacji nie są uporządkowane.
Szukamy wielomianu

$$w_2(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

takiego, że $w_2(1) = 0, \quad w_2(-1) = -3, \quad w_2(2) = 4.$
Wobec tego muszą być spełnione warunki:

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_0 - a_1 + a_2 = -3, \quad 4a_0 + 2a_1 + a_2 = 4.$$

To jest układ trzech równań liniowych.

Macierzą tego układu jest macierz Vandermonda.

Wyznacznik macierzy Vandermonde'a

$$\det(V_n(x_1,\dots,x_n)) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k,\ell=1,k>\ell}^{n}(x_k - x_\ell)$$

Niewiadome: $z_1 = a_0, \; z_2 = a_1, \; z_3 = a_2$
Wektor niewiadomych $z = [z_1, z_2, z_3]^T$.
Układ $Az = b$

Macierz układu A i wektor prawych stron b:

$$A = \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = [0, -3, 4]^T.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź: $w_2(x) = \frac{1}{6}\left(5x^2 + 9x - 14\right)$

Inna kolejność niewiadomych $z_1 = a_2, \; z_2 = a_1, \; z_3 = a_0$

Jak zmieni się wtedy macierz układu i wektor prawych stron?

Drugi sposób wyznaczania wielomianu interpolacyjnego

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

Oznaczenie pomocniczych wielomianów dla $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\ell_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Dla $n = 2$ mamy

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad \ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

cd. przykładu

$$\ell_0(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2),$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2),$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{3}(x-1)(x+1).$$

$$w_2(x) = 0 \times \ell_0(x) + (-3) \times \ell_1(x) + 4 \times \ell_2(x) =$$
$$-\frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \frac{4}{3}(x-1)(x+1) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}$$

Trzeci sposób: wzór interpolacyjny Newtona

Zalety wzoru interpolacyjnego Newtona

$$w_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- Współczynniki c_j są pewnymi ilorazami różnicowymi.
- Jest rekurencyjny związek między ilorazami różnicowymi
- Wzór Newtona ma lepsze własności numeryczne niż wzór Lagrangre'a.
- W praktyce powinno się stosować wzór Newtona.
- Wartość wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona można obliczać za pomocą uogólnionego schematu Hornera.

Wyznaczanie współczynników c_k z wzoru Newtona

Niech $w_n(x_j) = f(x_j)$ dla $j = 0, \ldots, n$ (węzły interpolacji x_j są różne). Wówczas

$$c_k = f[x_0, \ldots, x_k],$$

gdzie $f[x_0, \ldots, x_k]$ jest ilorazem różnicowym rzędu k dla funkcji f i powyższych węzłów interpolacji.

Ilorazy różnicowe definiuje się rekurencyjnie.

- Dla $k = 0$ mamy $f[x_0] = f(x_0)$.
- Dla $k = 1$ mamy

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Ilorazy różnicowe spełniają zależności

$$f[x_0,\dots,x_k] = \frac{f[x_1,\dots,x_k] - f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

- Iloraz różnicowy nie zależy od kolejności jego argumentów.
- $f(t) - w_n(t) = f[x_0,\dots,x_n,t](t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$

Przykład, $n = 3$

$$\begin{array}{lllll} x_0 & f[x_0] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ x_1 & f[x_1] & f[x_1, x_2] & f[x_1, x_2, x_3] & \\ x_2 & f[x_2] & f[x_2, x_3] & & \\ x_3 & f[x_3] & & & \end{array}$$

$$n = 2, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2,$$
$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = -3, \quad f(x_2) = 4$$

$$\begin{array}{llll} x_0 & f[x_0] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] \\ x_1 & f[x_1] & f[x_1, x_2] & \\ x_2 & f[x_2] & & \end{array}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{3}{2}, \quad f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{7}{3}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{5}{6}$$

$$w_2(x) = 0 + \frac{3}{2}(x - 1) + \frac{5}{6}(x - 1)(x + 1)$$

Twierdzenie o reszcie interpolacji

Niech liczby $x_0, \ldots, x_n$ z przedziału $[a, b]$ będą parami różne. Niech wielomian $w_n(x)$ interpoluje funkcję $f \in \mathbb{C}^{n+1}[a, b]$ w węzłach interpolacji $x_0, \ldots, x_n$. Wówczas dla każdego $x \in [a, b]$ istnieje takie $\xi_x \in (a, b)$, że

$$f(x) - w_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Uwagi.

- $f^{(n+1)}(x)$ jest pochodną rzędu $n+1$ funkcji f.
- $\prod_{j=0}^{n}(x - x_j) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.
- Wyrażenie $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ nazywamy **błędem (resztą) interpolacji**.

Pochodne - przypomnienie

$$(\sin(x))' = \cos(x), \quad (\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

pochodna iloczynu dwóch funkcji:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

pochodna ilorazu dwóch funkcji

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Przypomnienie - błąd interpolacji

Niech liczby $x_0, \ldots, x_n$ z przedziału $[a, b]$ będą parami różne.

Niech wielomian $w_n(x)$ interpoluje funkcję $f \in \mathbb{C}^{n+1}[a, b]$ w węzłach $x_0, \ldots, x_n$.

Wówczas dla każdego $x \in [a, b]$ istnieje takie $\xi_x \in (a, b)$, że

$$f(x) - w_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Szacowanie reszty interpolacji

Niech węzły interpolacji $x_0, \ldots, x_n$ leżą w przedziale $[a, b]$.

$$M_n = \max_{t \in [a,b]} \left| \prod_{j=0}^{n} (t - x_j) \right|$$

$$K_n = \max_{t \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

Dla dowolnych węzłów interpolacji $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ oraz dla wszystkich $x \in [a, b]$ mamy następujące oszacowanie błędu interpolacji

$$|f(x) - w_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} K_n M_n$$

Dla ustalonego $x \in [a, b]$ mamy

$$|f(x) - w_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} K_n \left| \prod_{j=1}^{n} (x - x_j) \right|$$

Przykład. Niech $f(x) = \sin(x)$.

- Niech $w_1(x)$ interpoluje funkcję $f(x)$ w węzłach $x_0 = 0, x_1 = \pi/3$.
- Oszacuj z góry błąd $|f(x) - w_1(x)|$ dla dowolnego $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

Odpowiedź

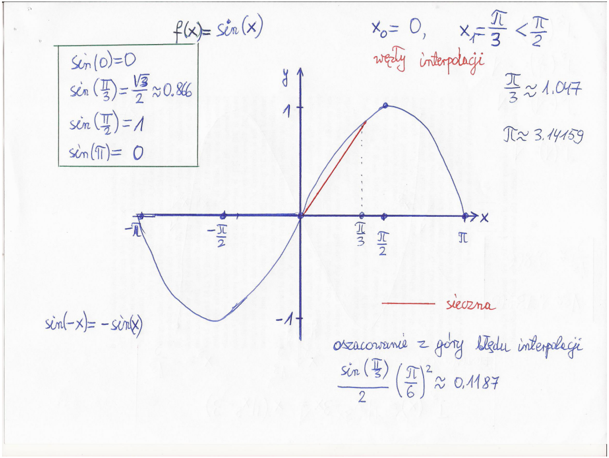
- $w_1(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}x$
- $$|f(x) - w_1(x)| = \frac{1}{2}|f''(\xi_x)|\ |x(x - x_1)| \leq \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$$

Uwaga. $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x$

$$\max_{x\in[0,\pi/3]} |f''(x)| = \sin(\pi/3)$$

$$\max_{x\in[0,\pi/3]} \left|x(x - \frac{\pi}{3})\right| = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2$$

Ilustracja graficzna przykładu



Przykład

Niech

$$f(x) = \sin(x)$$

Chcemy obliczyć przybliżoną wartość $\sin\left(\frac{\pi}{36}\right)$.

- Niech $w_3(x)$ będzie wielomianem interpolacyjnym z węzłami interpolacyjnymi

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{\pi}{3}.$$

- Wartość tego wielomianu dla $x = \pi/36$ przyjmujemy jako przybliżoną wartość funkcji sinus dla $x = \frac{\pi}{36}$.
- Oceń błąd

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{36}\right) - w_3\left(\frac{\pi}{36}\right)\right|.$$

W tym celu można zastosować twierdzenie o błędzie interpolacji (szczegóły na wykładzie).

Węzły Czebyszewa są równe

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right) \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

Dla $n+1$ węzłów Czebyszewa x_j mamy

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right| = \frac{1}{2^n}.$$

Dla innych węzłów interpolacji $x_0, \ldots, x_n$ z przedziału $[-1, 1]$ mamy

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right| > \frac{1}{2^n}$$

Przykład Rungego; $w_n(x)$ wielomian interpolacyjny

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1,1]$$

- węzły Czebyszewa

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right) \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

- węzły równoodległe (przedział $[-1,1]$ dzielimy na równe podprzedziały)

$$x_j = -1 + \frac{2j}{n} \qquad \text{dla } j = 0, \ldots, n$$

błąd interpolacji

$$E = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - w_n(x)|$$

Maksymalny moduł błędu interpolacji na przedziale $[-1, 1]$

n	2	6	10	14	18	20
E dla rownoodl.	0.65	0.62	1.9	7.2	29	60
E dla Czebysz.	0.60	0.26	0.11	0.047	0.022	0.015

Wnioski dla tego przykładu

- Wielomian interpolacyjny z węzłami Czebyszewa lepiej przybliża funkcję $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ na przedziale $[-1, 1]$ niż węzły równoodległe.
- Dla węzłów równoodległych zwiększenie stopnia wielomianu nie powoduje zmniejszenia błędu.

Materiał dodatkowy

Wielomiany Czebyszewa $T_n(x)$

Można je wyznaczać za pomocą związku rekurencyjnego

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

Wszystkie **pierwiastki** r_k wielomianu $T_n(x)$ są rzeczywiste, leżą w przedziale $[-1, 1]$ i są równe:

$$r_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

pierwiastki wielomianu T_2 $(n = 2)$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 1, \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad r_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

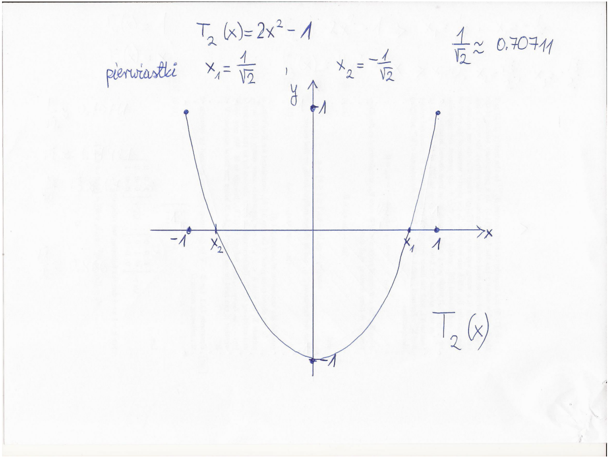
podstawienie do wzoru na pierwiastki

$$r_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$r_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Narysuj wykres wielomianu Czebyszewa $T_2(x)$

Wielomian Czebyszewa $T_2(x)$



$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x = x(4x^2-3)$$

pierwiastki wielomianu T_3

$$T_3(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad 4x^2 - 3 = 0$$

$$0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

podstawienie do wzoru na pierwiastki

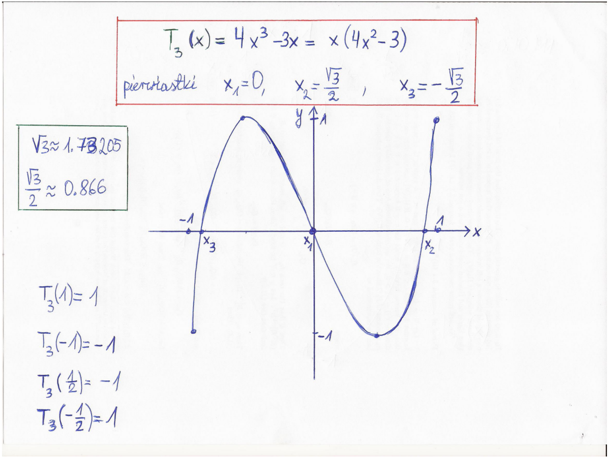
$$r_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

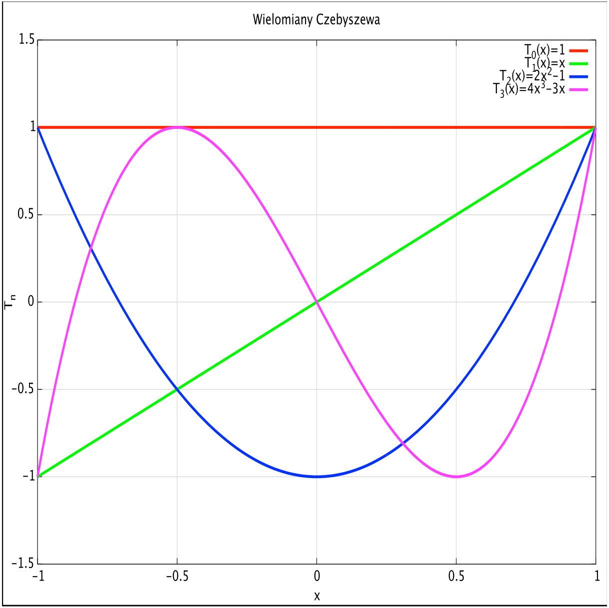
$$r_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(90^\circ) = 0$$

$$r_3 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Narysuj wykres wielomianu Czebyszewa $T_3(x)$

Wielomian Czebyszewa $T_3(x)$




Wielomiany Czebyszewa
T0(x)=1
T1(x)=x
T2(x)=2x2-1
T3(x)=4x3-3x
Tn
x
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1

$$|T_n(x)| \leq 1 \qquad \mathrm{dla} \quad x \in [-1, 1]$$

Punkty ekstremalne wielomianów Czebyszewa

$$T_n\left(\cos\frac{j\pi}{n}\right) = (-1)^j \qquad j = 0, 1, \ldots n$$

Węzły Czebyszewa

Węzłami Czebyszewa $x_0, \ldots, x_n$ są pierwiastki wielomianu Czebyszewa $T_{n+1}(x)$, czyli

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right) \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

Twierdzenie

Niech funkcja $f(x)$ ma $n+1$-szą pochodną ciągłą na przedziale $[-1,1]$. Niech węzałami interpolacji $x_0,\ldots,x_n$ będą węzły Czebyszewa, czyli

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right) \qquad j = 0,1,\ldots,n$$

Wówczas dla $x \in [-1,1]$ błąd interpolacji ma następujące oszacownie z góry

$$|f(x) - w_n(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{t\in[-1,1]} \left|f^{(n+1}(t)\right|$$

- Węzły Czebyszewa $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)$ minimalizują wyrażenie M_n

$$M_n = \max_{t\in[-1,1]} \left|\prod_{j=0}^{n}(t - x_j)\right|$$

na przedziale $[-1, 1]$

- Dla dowolnego przedziału $[a, b]$ wyrażenie

$$M_n = \max_{t\in[a,b]} \left|\prod_{j=0}^{n}(t - x_j)\right|$$

jest minimalne dla węzłów interpolacji

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)$$

(Liniowa zamiana zmiennej ...)