Teoria błędów

Wykład z przedmiotu Metody numeryczne

Jakub Bielawski
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

9 października 2016

Teoria błędów

Plan wykładu:

1. Błąd bezwzględny i błąd względny – definicje
2. Kresy górne błędów
3. Problem prosty teorii błędów:
   Jak duży błąd wartości funkcji wygeneruje podanie danych wejściowych obarczonych błędami?
4. Problem odwrotny teorii błędów:
   Z jaką dokładnością podać dane wejściowe, aby błąd wartości funkcji nie przekroczył zadanej wielkości?
5. Notacja „O duże”

Teoria błędów

Źródła błędów obliczeń:

- błędy wejściowe
- błędy obcięcia
- błędy zaokrągleń
- błędy konwersji

Teoria błędów

Masakra w Dhahran:
25 lutego 1991 roku iracka rakieta typu SCUD trafiła w barak w Dhahranie (Arabia Saudyjska) zabijając 28 amerykańskich żołnierzy. Zródłem błędu był zegar systemu przeciwlotniczego, który przy rzutowaniu czasu na liczbę zmiennoprzecinkową generował niewielki błąd. Po 100 godzinach działania systemu (i kumulacji błędów rzutowania) system pomylił się co do położenia pocisku SCUD o około 700 metrów.

Lot Ariane 5:
4 czerwca 1996 roku z kosmodromu w Gujanie Francuskiej w swój pierwszy lot wyruszyła europejska rakieta Ariane 5. Po 37 sekundach lotu rakieta zeszła z kursu i została zniszczona przez system autodestrukcji. Zródłem błędu rakiety było oprogramowanie skopiowane z Ariane 4. Otóż Ariane 5 miała szybsze silniki niż poprzednik, co generowało większe liczby. Błąd pojawił się gdy liczbę 64 bitową system próbował zrzutować na 16 bitową zmienną. Gdy liczba nie mogła się zmieścić w zmiennej, pogram rzucił wyjątek. Sposowowło to efekt domina i w konsekwencji autodestrukcję rakety. Straty szacuje się na około 370 mln $. Sam koszt wystrzelenia takiej rakiety to około 180 mln $

Źródło: `http://journeyofscience.tumblr.com/post/30924307425`

Błąd bezwzględny i błąd względny

Definicja

Błędem bezwzględnym Δa liczby przybliżonej a nazywamy wartość bezwzględną różnicy pomiędzy liczbą dokładną A i liczbą przybliżoną a:

$$\Delta a := |A - a| \tag{1.1}$$

Definicja

Błędem względnym δa liczby przybliżonej a nazywamy iloraz błędu bezwzględnego tej liczby (Δa) i wartości bezwzględnej liczby dokładnej A $(A \neq 0)$:

$$\delta a := \frac{|A - a|}{|A|} = \frac{\Delta a}{|A|} \tag{1.2}$$

Uwaga

Błąd bezwzględny i błąd względny są zawsze liczbami nieujemnymi.

Kresy górne błędów

Błąd bezwzględny: $\Delta a := |A - a|$
Błąd względny: $\delta a := \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{\Delta a}{|A|}$

Definicja

Kresem górnym błędu nazywamy każdą liczbę nie mniejszą od błędu:

$$\Delta a \leqslant \Delta_a \tag{1.3}$$

$$\delta a \leqslant \delta_a \tag{1.4}$$

W praktyce:

$$A = a \pm \Delta_a, \qquad \delta_a \approx \frac{\Delta_a}{|a|}, \qquad \Delta_a \approx |a|\delta_a$$

Uwaga

Przy obliczaniu kresów górnych błędów bezwzględnego i względnego, jeżeli zachodzi potrzeba zaokrąglenia otrzymanego wyniku, to zawsze dokonujemy zaokrąglenia w górę.

Błąd bezwzględny i błąd względny

Przykład

Pierwszy pomiar wysokości najwyższego szczytu Sudet – Śnieżki został dokonany w XVI wieku. Wysokość tę oszacowano na 5,5 km. Dziś wiadomo, że wysokość Śnieżki nie jest aż tak imponująca i wynosi ona 1,603 km. Obliczyć błędy bezwzględny i względny pierwszego pomiaru (w kilometrach) i podać ich kresy górne (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku).

Błąd bezwzględny i błąd względny

Przykład

Pierwszy pomiar wysokości najwyższego szczytu Sudet – Śnieżki został dokonany w XVI wieku. Wysokość tę oszacowano na 5,5 km. Dziś wiadomo, że wysokość Śnieżki nie jest aż tak imponująca i wynosi ona 1,603 km. Obliczyć błędy bezwzględny i względny pierwszego pomiaru (w kilometrach) i podać ich kresy górne (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku).

Rozwiązanie:
Przybliżona wysokość (w km): $a = 5,5$
Rzeczywista wysokość (w km): $A = 1,603$
Błąd bezwzględny (w km): $\Delta a = |1,603 - 5,5| = 3,897$
Kres górny błędu bezwzględnego (w km): $\Delta_a = 3,90$
Błąd względny: $\delta a = \frac{3{,}897}{1{,}60} \approx 2,4311 = 243,11\%$
Kres górny błędu względnego: $\delta_a = 2,44 = 244\%$

Problem prosty teorii błędów

Niech będzie dana funkcja różniczkowalna $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i niech Δx_i dla $i = 1, 2, \dots, n$ będą błędami bezwzględnymi argumentów tej funkcji.

Cel

Wyznaczyć błąd wartości funkcji, gdy znane są błędy wszystkich jej argumentów.

Błąd bezwzględny wartości funkcji można zapisać w postaci:

$$\Delta f = |f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)| \approx \\ \approx \left| \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot \Delta x_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f'_{x_i}| \cdot \Delta x_i. \tag{1.5}$$

Przechodząc na kresy górne błędów bezwzględnych otrzymujemy:

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^{n} |f'_{x_i}| \cdot \Delta_{x_i} \tag{1.6}$$

Problem prosty teorii błędów

Dzieląc obie strony równości (1.5) przez $|f|$ otrzymujemy oszacowanie górne błędu względnego:

$$\delta f = \frac{\Delta f}{|f|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f'_{x_i}}{f} \right| \cdot \Delta x_i \tag{1.7}$$

Dla kresów górnych błędów względnych mamy:

$$\delta_f = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f'_{x_i}}{f} \right| \cdot \Delta_{x_i} \tag{1.8}$$

W praktyce przy obliczniu kresu górnego błędu względnego wartości funkcji będziemy korzystali ze wzoru:

$$\delta_f = \frac{\Delta_f}{|f|} \tag{1.9}$$

Problem prosty teorii błędów

Uwaga

Przy obliczaniu kresów górnych błędów bezwzględnego i względnego wartości funkcji, jeżeli zachodzi potrzeba zaokrąglenia otrzymanego wyniku, to zawsze dokonujemy zaokrąglenia w górę. Praktyka ta wynika z faktu, iż przy zaokrąglaniu wyniku w dół otrzymany błąd wartości funkcji mógłby zostać niedoszacowany.

Problem prosty teorii błędów

Przykład

W pracach nad nowym telefonem firma Sample wykorzystuje funkcję opisującą zadowolenie konsumentów z parametrów urządzenia:

$$f(x, y, z) = \frac{2x^2 + 3y^2}{z},$$

gdzie x oznacza przekątną ekranu telefonu, y – szybkość procesora, a z – odsetek płatnych aplikacji w sklepie, przy czym przyjęto, że nowe urządzenie będzie charakteryzować się parametrami $x = 5$ cali, $y = 2$ GHz, $z = 0,5$. W procesie produkcyjnym cześć modeli telefonu powstała z błędnymi wartościami parametrów, przy czym wartość każdego z parametrów zmieniła się o co najwyżej 2%. Oszacować maksymalne bezwzględne i względne odchylenia wartości funkcji zadowolenia spowodowane błędami produkcyjnymi.

Problem prosty teorii błędów

Rozwiązanie:
Rozpoczynamy od obliczenia pochodnych cząstkowych funkcji f:

$$f'_x(x,y,z) = \frac{4x}{z}$$
$$f'_y(x,y,z) = \frac{6y}{z}$$
$$f'_z(x,y,z) = \frac{-2x^2 + 3y^2}{z^2}$$

$$f'_x(5,\ 2,\ 0,5) = 40$$
$$f'_y(5,\ 2,\ 0,5) = 24$$
$$f'_z(5,\ 2,\ 0,5) = -248$$

Kresy górne błędów bezwzględnych poszczególnych parametrów urządzenia wynoszą:

$$\Delta_x = 5 \cdot 0,02 = 0,1, \quad \Delta_y = 2 \cdot 0,02 = 0,04, \quad \Delta_z = 0,5 \cdot 0,02 = 0,01$$

Problem prosty teorii błędów

Zgodnie ze wzorem (1.6) kres górny błędu bezwzględnego wartości funkcji wynosi:

$$\Delta_f = 40 \cdot 0,1 + 24 \cdot 0,04 + 248 \cdot 0,01 = 7,44$$

Ponadto

$$f(5,\ 2,\ 0,5) = 124$$

Kres górny błędu względnego obliczamy zgodnie ze wzorem (1.9):

$$\delta_f = \frac{7,44}{124} = 0,06 = 6\%$$

Problem odwrotny teorii błędów

Cel

Jakie mogą być maksymalne błędy bezwzględne argumentów funkcji, aby błąd bezwzględny wartości funkcji nie przekroczył zadanej wielkości?

W problemie odwrotnym teorii błędów dany jest błąd bezwzględny wartości funkcji Δ_f, a szukanymi wielkościami są błędy bezwzględne argumentów funkcji $\Delta_{x_1}, \ldots, \Delta_{x_n}$. Podobnie jak w problemie prostym, wielkości te łączy ze sobą wzór (1.6), tj.:

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^{n} |f'_{x_i}| \cdot \Delta_{x_i}$$

Ponieważ przy tak zadanym problemie równanie (1.6) ma nieskończenie wiele rozwiązań, aby zapewnić jednoznaczność rozwiązania problemu odwrotnego, potrzeba poczynić dodatkowe założenia. Poniżej przedstawiamy postaci błędów argumentów funkcji dla trzech różnych założeń (oczywiście liczba założeń, które można przyjąć, jest nieskończona).

Zasada równego wpływu

Zakładamy, że różniczki cząstkowe $|f'_{x_i}| \cdot \Delta_{x_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$ wpływają jednakowo na powstanie błędu bezwzględnego funkcji $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, czyli:

$$|f'_{x_1}| \cdot \Delta_{x_1} = \ldots = |f'_{x_n}| \cdot \Delta_{x_n}$$

Wtedy przekształcając wzór (1.6) otrzymujemy:

$$\Delta_f = n \cdot |f'_{x_i}| \cdot \Delta_{x_i} \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n$$

a stąd

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_f}{n \cdot |f'_{x_i}|} \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n \tag{1.10}$$

Zasada równych kresów górnych błędów bezwzględnych

Zakładamy równość kresów górnych błędów bezwzględnych wszystkich argumentów funkcji, czyli:

$$\Delta_{x_1} = \ldots = \Delta_{x_n}$$

Wtedy z równości (1.6) mamy:

$$\Delta_f = \Delta_{x_i} \cdot \sum_{k=1}^{n} |f'_{x_k}| \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n$$

a stąd

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_f}{\sum_{k=1}^{n} |f'_{x_k}|} \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n \tag{1.11}$$

Zasada jednakowo dokładnego pomiaru

Zasada jednakowo dokładnego pomiaru nazywana jest również zasadą równych kresów górnych błędów względnych, gdyż w metodzie tej zakładamy równość kresów górnych błędów względnych wszystkich argumentów funkcji, czyli:

$$\delta_{x_1} = \ldots = \delta_{x_n}$$

Zatem

$$\frac{\Delta_{x_1}}{|x_1|} = \ldots = \frac{\Delta_{x_n}}{|x_n|}$$

Wtedy na podstawie równości (1.6) mamy:

$$\Delta_f = \sum_{k=1}^{n} |f'_{x_k} \cdot x_k| \cdot \frac{\Delta_{x_k}}{|x_k|} = \frac{\Delta_{x_i}}{|x_i|} \cdot \sum_{k=1}^{n} |f'_{x_k} \cdot x_k| \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n$$

a stąd

$$\Delta_{x_i} = \frac{|x_i| \cdot \Delta_f}{\sum_{k=1}^{n} |f'_{x_k} \cdot x_k|} \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n \tag{1.12}$$

Problem odwrotny teorii błędów

Uwaga

Przy obliczaniu kresów górnych błędów argumentów funkcji, jeżeli zachodzi potrzeba zaokrąglenia otrzymanego wyniku, to zawsze dokonujemy zaokrąglenia w dół. Działanie to jest uzasadnione przez fakt, iż przy zaokrąglaniu błędów argumentów funkcji w górę otrzymany błąd wartości funkcji mógłby przekroczyć zadaną na początku wielkość.

Problem odwrotny teorii błędów

Przykład

Płyta wykonana jest z trzech różnych tworzyw o wytrzymałości x, y i z. Wytrzymałość płyty wyraża się wzorem:

$$W(x, y, z) = x + \sqrt{xy} - \sqrt[3]{xyz}.$$

Z jaką dokładnością należy znać wartości $x \approx 2$, $y \approx 18$, $z \approx 6$, by wytrzymałość płyty była wyznaczona z dokładnością do $0,5$? Wyniki podać w oparciu o metody równego wpływu, równych kresów górnych błędu bezwzględnego i jednakowo dokładnego pomiaru.

Problem odwrotny teorii błędów
Rozwiązanie:

Rozpoczynamy od obliczenia pochodnych cząstkowych funkcji W:

$$W'_x(x,y,z) = 1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}} - \frac{yz}{3\sqrt[3]{(xyz)^2}} \qquad W'_x(2,18,6) = \frac{3}{2}$$

$$W'_y(x,y,z) = \frac{x}{2\sqrt{xy}} - \frac{xz}{3\sqrt[3]{(xyz)^2}} \qquad W'_y(2,18,6) = \frac{1}{18}$$

$$W'_z(x,y,z) = \frac{-xy}{3\sqrt[3]{(xyz)^2}} \qquad W'_z(2,18,6) = -\frac{1}{3}$$

Problem odwrotny teorii błędów

Kresy górne błędów argumentów funkcji W obliczamy za pomocą wzorów (1.10) – (1.12):

1. Zasada równego wpływu:

$$\Delta_x = \frac{0,5}{3 \cdot \frac{3}{2}} \approx 0,1111, \qquad \Delta_y = \frac{0,5}{3 \cdot \frac{1}{18}} = 3, \qquad \Delta_z = \frac{0,5}{3 \cdot \frac{1}{3}} = 0,5$$

2. Zasada równych kresów górnych błędów bezwzględnych:

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \frac{0,5}{\frac{3}{2} + \frac{1}{18} + \frac{1}{3}} \approx 0,2647$$

3. Zasada jednakowo dokładnego pomiaru:
Obliczamy najpierw: $|f'_x \cdot x| + |f'_y \cdot y| + |f'_z \cdot z| = \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{18} \cdot 18 + \frac{1}{3} \cdot 6 = 6.$
Wtedy:

$$\Delta_x = \frac{2 \cdot 0,5}{6} \approx 0,1666, \;\; \Delta_y = \frac{18 \cdot 0,5}{6} = 1,5, \;\; \Delta_z = \frac{6 \cdot 0,5}{6} = 0,5$$

Notacja „O duże"

Notacja O (czytamy: o duże) jest jedną z metod opisu złożoności obliczeniowej algorytmów. Najogólniej mówiąc złożoność obliczeniowa informuje o ilości zasobów (np. czasu, pamięci) potrzebnych do wykonania algorytmu dla danych wejściowych o zadanej wielkości (np. długość ciągu, rozmiar macierzy).

Definicja

O dwóch ciągach o wartościach rzeczywistych $f(n)$ i $g(n)$ mówimy, że $f(n) = O(g(n))$ (czytamy: $f(n)$ jest „o duże" od $g(n)$), gdy istnieją liczby $c > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|f(n)| \leqslant c \cdot |g(n)| \qquad \text{dla wszystkich } n \geqslant n_0 \tag{1.13}$$

Stwierdzenie, że algorytm ma złożoność obliczeniową równą $O(g(n))$ oznacza, że istnieje ciąg $f(n)$ spełniający nierówność (1.13) taki, że do zrealizowania algorytmu na danych wejściowych o wielkości n potrzeba wykonać $f(n)$ operacji elementarnych.

Notacja „O duże"

Przykład

Rozważmy hipotetyczny algorytm, który do rozwiązania pewnego problemu, przy danych wejściowych o rozmiarze n, potrzebuje wykonać 2^n operacji. Zrealizowanie tego algorytmu na procesorze wykonującym 2 miliony operacji na sekundę dla danych wejściowych o rozmiarze 80 zajęłoby około 19 miliardów lat (to więcej niż wynosi wiek wszechświata). Dla porównania, algorytm rozwiązujący ten sam problem za pomocą n^3 operacji, zaimplementowany na takim samym procesorze i przy takim samym rozmiarze danych wejściowych, pracowałby 0,256 sekundy.

Przykład

Spośród metod rozwiązywania w sposób dokładny układów równań liniowych najbardziej znane to metoda macierzy odwrotnej i metoda wzorów Cramera. Łatwo można się przekonać, że metody te są co najmniej $O(n!)$ (obliczenie wyznacznika metodą rozwinięcia Laplace'a jest $O(n!)$), zatem w przypadku układów równań o wielu zmiennych metody te są mało przydatne.

W kolejnym rozdziale poznamy metody rozwiązywania układów równań liniowych w sposób dokładny o złożoności obliczeniowej $O(n^3)$.