Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Metody numeryczne

materiały do wykładu

dla studentów

Dodatki

1. Zestawy egzaminacyjne – przykłady
2. Literatura

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy” ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-

Przykładowe zestawy egzaminacyjne

Każdy zestaw egzaminacyjny składa się z 4 zadań praktycznych i jednego teoretycznego, które się składa z dwóch podpunktów. Każde z tych zadań jest warte 400 punktów – w sumie 2000. Najpierw zaprezentowane będą zestawy złożone z zadań praktycznych, a na końcu znaleźć można przykładowe podpunkty do zadania teoretycznego (jeszcze raz podkreślam – dwa takie podpunkty składają się na jedno zadanie teoretyczne).

Zestaw I

zad. 1) Płyta wykonana jest z trzech różnych tworzyw o wytrzymałości x, y i z. Wytrzymałość płyty wyraża się wzorem: $W(x,y,z) = x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz}$. Z jaką dokładnością należy znać wartości $x \approx 2$, $y \approx 18$ i $z \approx 6$, by wytrzymałość płyty była obliczona z dokładnością do 0,5? Wyniki podać w oparciu o metody równych kresów górnych błędu bezwzględnego i jednakowego pomiaru. Z jaką dokładnością możemy określić wytrzymałość płyty, jeśli dla każdego tworzywa dopuścimy błąd w pomiarze wytrzymałości wielkości 0,01?

zad. 2) Rozwiązać podany układ równań metodą rozkładu macierzy współczynników na iloczyn macierzy trójkątnych:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_1 - 5x_2 \qquad\quad + 6x_4 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 - 11x_3 \qquad = 6 \end{cases}.$$

zad. 3) Metodami bisekcji, siecznych i stycznych znaleźć dwa przybliżenia jednego z pierwiastków równania $x^3 + 6x^2 + 6x = 2$ w przedziale $[-2, -1]$.

zad. 4) Obliczyć przybliżoną wartość liczby $\operatorname{arctg} 24$ za pomocą całkowania metodą 3/8 Newtona, przyjmując $n = 2$.

Zestaw II

zad. 1) Znaleźć pierwsze i drugie przybliżenie rozwiązania poniższego układu równań liniowych metodą Seidela. Uzasadnić, dlaczego ta metoda jest zbieżna dla danego układu równań.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \qquad\quad = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 \qquad - 3x_3 = -3 \end{cases}.$$

zad. 2) Znaleźć drugie przybliżenie rozwiązania podanego układu równań:

$$\begin{cases} x_1^3 x_2 - 2x_1 x_2^2 = 1 \\ 2x_1 x_2^2 + 5x_2 = -2 \end{cases}, \qquad \boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

zad. 3) Za panowania księcia Kraka XLII okolice Krakowa pustoszył straszliwy wielomianosmok. Jak ustalili uczeni, niezwykle rzadki ów stwór co roku pożerał pewną liczbę informatyków. Zależność pomiędzy numerem roku panowania księcia, a liczbą informatyków pożartych przez wielomianosmoka wyrażał wielomian trzeciego stopnia.

W pierwszym roku panowania Kraka XLII wielomianosmok skonsumował jednego informatyka, w drugim – czterech, w trzecim — siedemnastu, a w piątym — dziewięćdziesięciu siedmiu (danych z czwartego roku brakuje, gdyż wielomianosmok w tym czasie na krótko przeniósł się w inne okolice). Obliczyć postać Newtona wielomianu opisującego zwyczaje rzeczonego wielomianosmoka i odpowiedzieć na pytanie: ilu informatyków planował on zjeść w szóstym roku panowania księcia?

zad. 4) Uporządkować strony algorytmem PageRank, jeśli sieć składa się z nastepujących linków: $1 \to 3,\ 1 \to 5,\ 2 \to 3,\ 2 \to 4, 3 \to 2, 5 \to 1, 5 \to 2, 5 \to 3, 5 \to 4$. Obliczenia wykonać w sposób przybliżony, wykorzystując metodę potęgową znajdowania odpowiedniego wektora własnego. Wykonać w tym celu 4 iteracje metody.

Zestaw III

zad. 1) Pewien fizyk wykonujący skomplikowane obliczenia, aby uzyskać wyniki uruchamia ok. 90 procesów I rodzaju, 30 procesów II rodzaju oraz 200 procesów III rodzaju. Jeśli czas (w sekundach) wykonywania tych procesów można wyrazić funkcją $T(m,n,k) = 2m^2n + 3n^2k - \frac{m^2k}{3}$, gdzie m, n, k są odpowiednio liczbą procesów I, II i III rodzaju, obliczyć z jaką dokładnością mają być podawane liczby uruchamianych procesów, aby czas wykonywania obliczeń był podany z dokładnością do 1 doby. Wyniki podać w oparciu o metody równych kresów górnych błedu bezwzględnego i jednakowego pomiaru. Zinterpretować otrzymane wyniki.

zad. 2) Rozwiązać podany układ równań metodą rozkładu macierzy współczynników na iloczyn macierzy trójkątnych:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 13x_4 = -8 \\ -6x_1 + 7x_2 - 13x_3 + 27x_4 = 8 \end{cases}.$$

zad. 3) Zlokalizować wszystkie pierwiastki rzeczywiste z dokładnością do przedziałów o długości 1, a następnie metodą siecznych znaleźć dwa pierwsze przybliżenia jednego z pierwiastków równania:

$$x^4 + 2x = 5.$$

zad. 4) Pewnego dnia, w godzinach od 7:50 do 10:20 na Uniwersytecie Ekonomicznym w Krakowie odbywał się egzamin z przedmiotu „Metody Numeryczne”. Ponieważ atmosfera, jak na każdym egzaminie, była „gorąca”, zdecydowano się zmierzyć temperaturę panującą w sali w trakcie oraz po egzaminie. Pomiary były dokonywane co pełną godzinę: o godzinie 8 było 20 stopni, o 9 – 24 stopnie, o 10 – 26 stopni, a o 11 temperatura spadła z powrotem do 20 stopni Celsjusza. Ponadto, okazało się, że zmianę temperatury w sali można opisać funkcją czasu T(t), która jest wielomianem trzeciego stopnia. Wykorzystując obydwie z poznanych metod interpolacji wielomianowej, znaleźć postaci Newtona i Lagrange’a tej funkcji i odpowiedzieć na pytanie: jaka temperatura panowała w sali o godzinie 10:30?

Zestaw IV

zad. 1) Uporządkować strony algorytmem PageRank, jeśli sieć składa się z następujących linków: $1 \to 3,\ 1 \to 5,\ 2 \to 3,\ 2 \to 4, 3 \to 2, 5 \to 1, 5 \to 2, 5 \to 3, 5 \to 4$. Należy wykonać obliczenia dokładne, rozwiązując otrzymany w trakcie zadania układ równań liniowychwybraną metodą dokładną.

zad. 2) Dla równania: $x^3 = 3x^2 + 18$ zlokalizować wszystkie pierwiastki rzeczywiste z dokładnością do przedziałów o długości 1, nastepnie wybrać jeden z tych przedziałów i zbadać, które z poniższych równań metody iteracji poszukiwania pierwiastków równań nieliniowych będzie zadawało zbieżną procedurę iteracji na wybranym przedziale:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n^2 - \frac{18}{x}\right); \qquad x_{n+1} = \sqrt[3]{17 + 3x_n} + 1.$$

Zastosować metodę iteracji opartą na tym równaniu do znalezienia drugiego przybliżenia rozwiązania tego równania.

zad. 3) Badania naukowców wykazały, ze pewien rzadki gatunek ptaka *Ledwolotus dziwolongus* pokonuje corocznie takie same trasy, których kształt można opisać za pomocą wykresu wielomianu. W wyniku chwilowej utraty zasilania w centrum badawczym znaczna część danych dotyczących tego badania została utracona i pozostało jedynie kilka par punktów krzywej: (0,-4); (1, 3); (3, 5); (2,2). Odtworzyć trasę lotów ledwolotusa, znajdując wielomian możliwie najniższego stopnia, którego wykres przechodzi przez powyższe pary punktów. Zadanie rozwiązać obydwiema znanymi metodami.

zad. 4) Obliczyć $\int_0^{12} \frac{1}{4x+1} dx$ metodami trapezów, Simpsona i $3/8$ Newtona, przyjmując $n = 2$.

Zestaw V

zad. 1) Czarnoksiężnik Metodus Numericus chce wykuć magiczny pierścień. W starożytnej księdze, według której konstruuje ten przedmiot, napisano, że objętość tego pierścienia nie może się różnić od zadanej o więcej niż $2mm^3$. Promień pierścienia oraz jego szerokość wynoszą w przybliżeniu odpowiednio $r \approx 6\,mm$ i $h \approx 4\,mm$. Z jaką dokładnością Metodus musi zmierzyć promień i szerokość pierścienia oraz jak dokładne przybliżenie liczby $\pi = 3$ powinien zastosować w obliczeniach, jeśli wzór na objętość tego pierścienia to $V\,(\pi, r, h) = \frac{1}{2}\pi r^2 h - \frac{1}{4} r h^2$? Wyniki podać w oparciu o metody równego wpływu i jednakowego pomiaru.

zad. 2) Wykorzystując metody iteracji prostej i Seidela, znaleźć pierwsze przybliżenie rozwiązania poniższego układu równań. Iteracje zacząć od wektora $x^{(0)} = (3,2,1)$. Uzasadnić zbieżność metod.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}.$$

zad. 3) Znaleźć drugie przybliżenie rozwiązania podanego układu równań:

$$\begin{cases} x^3 y = 3 \\ \ln x = y \end{cases}, \qquad \boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

zad. 4) Za pomocą kół Gerszgorina wskazać obszar, w którym leżą wszystkie wartości własne, a następnie obliczyć przybliżoną wartość dominującej wartości własnej i odpowiadającego jej wektora własnego dla macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Wykonać w tym celu 4 iteracje metody potęgowej zaczynając od wektora $[1\ 0\ 0]^T$.

Przykładowe zadania teoretyczne

Uwaga! Jeśli w poniższych zadaniach konieczne jest podanie jakiegoś twierdzenia lub definicji, można je opisać własnymi słowami – nie trzeba dokładnie tak jak w skrypcie.

1) Wyprowadzić wzór rozwiązujący problem odwrotny teorii błędów przy założeniu jednakowo dokładnego pomiaru argumentów funkcji (tj. jednakowych kresów górnych względnych błędów argumentów).

2) Wyjaśnić, co to jest problem odwrotny teorii błędów, ile ma rozwiązań i jakie są założenia trzech poznanych na wykładzie metod rozwiązań tego problemu. Dla przynajmniej dwu z nich podać przykład sytuacji, w której nie da się użyć tej metody.

3) Co to jest błąd względny, błąd bezwzględny i czym się różni błąd pomiaru od kresu górnego błędu tego pomiaru? Czy zazwyczaj obliczamy błąd, czy jego kres górny i dlaczego? Czy zazwyczaj większy jest błąd względny, czy bezwzględny?

4) Opisać, co oznacza fakt, że dla pewnego ciągu a_n, inny ciąg jest $O(a_n)$.
Pewien problem związany z bazami danych rozwiązać można za pomocą pięciu algorytmów, o złożoności obliczeniowej: pierwszy – $O(n\sqrt{n})$, drugi – $O(n \log n)$, trzeci – $O(n!)$, czwarty – $O(2^n)$ i piaty - $O(5n)$, gdzie n jest liczbą wpisów w bazie. Zakładajac, ze n jest w praktyce bardzo duże, uporządkować te algorytmy od najszybszego do najwolniejszego. Wskazać te algorytmy, które w praktyce są uważane za efektywne.

5) Opisać, co oznacza fakt, że dla pewnego ciągu a_n, inny ciąg jest $O(a_n)$. Uporządkować poniższe ciągi od lewej do prawej tak, by każdy ciąg był O od wszystkich ciągów znajdujących sie po jego prawej stronie: $2n^2, 3\sqrt{n}, \frac{1}{3} n \log n, 4 \log n, \frac{2\hat{}n}{77}$, 15.

6) Podać przykłady macierzy A i B wymiaru 4×4, symetrycznych, nieosobliwych i takich, że:
   a) Macierz A można rozłożyć na iloczyn macierzy trójkątnych metodą Banachiewicza,
   b) Macierzy B nie da się rozłożyć na iloczyn macierzy trójkątnych metodą Banachiewicza.
      Odpowiedź uzasadnić, podając twierdzenie gwarantujące rozkładalność macierzy A i powód, dla którego B jest nierozkładalne.

7) Wskazać, jaką zaletę ma metoda Cholesky'ego w stosunku do metody eliminacji Gaussa. Porównać metodę Cholesky'ego z metodami iteracyjnymi rozwiązywania układów równań liniowych podając po jednej zalecie jednego sposobu w stosunku do drugiego.

8) Wskazać jedną przewagę w zastosowaniach metody Seidela nad metodą iteracji prostej rozwiązywania przybliżonego układów równań liniowych.

9) Rozważamy równanie $Ax = b$, gdzie x jest wektorem niewiadomych, b jest (znanym) wektorem wyrazów wolnych. Które z poniższych macierzy A pozwalają od razu (bez wstępnych przygotowań) zastosować do tego zagadnienia metodę iteracji prostej rozwiązywania układów równań liniowych? Odpowiedź uzasadnić.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

10) Obliczyć normy: wierszową i kolumnową poniższej macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11) Porównać cztery poznane na wykładzie metody przybliżonego rozwiązywania równań nieliniowych: bisekcji, iteracji, siecznych i stycznych. Podać przynajmniej po jednej zalecie i wadzie każdej metody w porównaniu z pozostałymi metodami.

12) Wyjaśnić, dlaczego w metodach przybliżonego rozwiązywania równań nieliniowych postaci $f(x) = 0$, szukając pierwiastków w przedziale $[a, b]$ zakłada się, że $f(a)f(b) < 0$ i dlaczego zakłada się, że $f'(x)$ jest stałego znaku na tym przedziale?

13) Podać przykład równania $f(x) = 0$, przedziału $[a, b]$ zawierającego jego pierwiastek oraz dwóch przekształceń tego równania do równoważnych postaci $g_1(x) = x$ i $g_2(x) = x$ takich, że na przedziale $[a, b]$ g_1 spełnia założenia metody iteracji, zaś g_2 ich nie spełnia.

14) Wyprowadzić wzór używany w iteracyjnej metodzie siecznych rozwiązywania równań nieliniowych (wystarczy jeden przypadek).

15) Wyprowadzić wzór używany w iteracyjnej metodzie stycznych rozwiązywania równań nieliniowych.

16) Wskazać zależność pomiędzy wzorami występującymi w metodach Newtona rozwiązywania równań nieliniowych oraz układów równań nieliniowych. Czy jeden z tych wzorów da się wyprowadzić z drugiego? Jeśli tak, to w jaki sposób?

17) Do czego prowadzi próba zastosowania metody Newtona rozwiązywania układów równań nieliniowych do rozwiązywania układu równań liniowych? Czy rozwiązywanie

zagadnienia w ten sposób nie sprowadza go do jakiejś znanej już nam metody? Jeśli tak, to jakiej? Jeśli nie, to jakie są różnice między tą metodą, a poznanymi wcześniej?

18) Opisać sytuację, w której metoda Newtona wyznaczania wielomianu interpolacyjnego rozwiązuje jakiś problem efektywniej niż metoda Lagrange'a.

19) Ile co najmniej par punktów trzeba podać, aby jednoznacznie wyznaczyć wielomian stopnia 7? Przytoczyć odpowiednie twierdzenie.

20) Wzory na błędy metod całkowania przy ustalonym n - liczbie podprzedziałów na które wyjściowy są następujące: dla metody $1/3$-Simpsona: $\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi)$, gdzie $\xi \in (a,b)$, dla metody $3/8$-Newtona: $\frac{1}{80}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi)$, gdzie $\xi \in (a,b)$. Która z tych metod gwarantuje lepsze przybliżenie wyniku? Uzasadnić odpowiedź.

21) Wyjaśnić (pobieżnie, bez obliczeń), w jaki sposób powstają poznane wzory całkowania numerycznego (dla $n=1$). Które z przerabianych wcześniej zagadnień jest do tego potrzebne?

22) Dwie spośród poniższych macierzy mają rzeczywistą dominującą wartość własną. Wskazać je (bez obliczania wartości własnych) i uzasadnić odpowiedź przytaczając odpowiednie twierdzenia (wypowiedzi lub nazwy):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

23) Czy możliwe jest, by wszystkie wartości własne poniższej macierzy miały ujemną część rzeczywistą? Pytanie pomocnicze: ile wynosi suma wartości własnych poniższej macierzy?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź uzasadnić, przytaczając odpowiednie twierdzenie.

24) Obliczyć dokładnie wartości własne i co najmniej jeden wektor własny dla macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

24) Podać twierdzenie uzasadniające poprawność algorytmu PageRank.

25) Wyjaśnić, skąd się bierze macierz Google w algorytmie PageRank.

26) Opisać, jakimi dwoma typami zagadnień zajmują się metody numeryczne (wskazówka: brak możliwości rozwiązania, złożoność obliczeniowa). Podać przykład metod poznanych na wykładzie, które rozwiązują zagadnienia pierwszego typu i drugiego typu.

27) Podać trzy przykładowe praktyczne zastosowania (z wyjątkiem tworzenia rankingów typu PageRank) poznanych na wykładzie metod numerycznych.