Zadania z Metod Numerycznych

Dorota Dąbrowska, UKSW

2017/18

Spis treści

Arytmetyka zmiennopozycyjna, zadanie i algorytm numeryczny

1 Arytmetyka zmiennopozycyjna

Zadanie 1. [a] Wykonaj poniższy program napisany w języku C.

```
#include<stdio.h>

main()
{
    double w1=(4.0/3.0-1.0)*3.0-1.0;
    double w2=(3.0*0.1-0.3)/(2.0*0.1-0.3+0.1);
    printf("Sprawdzam, jak wykonywane ");
    printf("sa pewne obliczenia.\n\n");
    printf("\t(4.0/3.0-1.0)*3.0-1.0");
    printf("  = %g\n\n",w1);
    printf("\t(3.0*0.1-0.3)/(2.0*0.1-0.3+0.1)");
    printf("  = %g\n\n",w2);
    printf("\tWarunek 0.7*4.0==0.4*7.0 jest ");
    if(0.7*4.0==0.4*7.0)
        printf("prawdziwy.\n\n");
    else
        printf("falszywy.\n\n");
}
```

Przeanalizuj uzyskane wyniki.

[a] Przykłady z www.cs.berkeley.edu/~wkahan/Mindless.pdf

Zadanie 2. Ustalmy bazę równą 10. Przyporządkuj poniższym reprezentacjom liczby rzeczywiste.

1. $(+1; 6; 23.432)$,
2. $(1; 0; 3.04)$,
3. $(-1; -1; 1.00)$

Zadanie 3. Ustalmy bazę równą 2. Przyporządkuj poniższym reprezentacjom liczby rzeczywiste.

1. $(+1; (110)_2; (10.1010)_2)$,
2. $(1; 0; (1.01)_2)$,
3. $(-1; -1; (1.00)_2)$

Zadanie 4. Podaj reprezentacje poniższych liczb, przy założeniu, że baza wynosi 10, a rozwinięcie posiada dokładnie jedną niezerową cyfrę przed przecinkiem.

1. 0.00011,
2. $-\frac{1}{4}$,
3. $\frac{4}{3}$

Zadanie 5. Podaj reprezentacje poniższych liczb, przy założeniu, że baza wynosi 2, a rozwinięcie posiada dokładnie jedną niezerową cyfrę przed przecinkiem.

1. $(0.00011)_2$,
2. $-\frac{1}{4}$,
3. $\frac{4}{3}$

Zadanie 6. Niech $b = 2$, $p = 2$, $emax = 2$. Wypisz wszystkie wartości zmiennopozycyjne. Które z wypisanych wartości są liczbami normalnymi, a które podnormalnymi? Ile jest różnych liczb zmiennopozycyjnych, ile normalnych, ile podnormalnych? Narysuj na osi wszystkie liczby zmiennopozycyjne nieujemne.

Zadanie 7. Dla arytmetyki o parametrach $b = 2$, p, $emax$ oblicz

1. ile jest liczb normalnych,
2. ile jest liczb podnormalnych.

Zadanie 8. Dana jest binarna arytmetyka zgodna ze standardem *IEEE 754-2008*. Policz ile jest dodatnich liczb normalnych mniejszych od 2 i ile jest liczb normalnych większych lub równych 2. Wynik uzależnij od parametrów $emax$ i p.

Zadanie 9. Dana jest binarna arytmetyka zgodna ze standardem *IEEE 754-2008* o zadanych parametrach p, $emax > p$, $emin$.

1. Ile wynosi najmniejsza i największa liczba całkowita k taka, że 2^k jest liczbą normalną?
2. Ile wynosi najmniejsza i największa liczba całkowita k taka, że 2^k jest liczbą podnormalną?
3. Ile wynoszą największa i najmniejsza liczba zmiennopozycyjna, która jest liczbą całkowitą?

Zadanie 10. Niech $b = 2$, $p = 4$, $emax = 3$. Czy przy tych parametrach istnieją liczby zmiennopozycyjne o poniższych reprezentacjach?

1. $(-1; (101)_2; 0)$,
2. $(-1; (101)_2; 1)$,
3. $(-1; (101)_2; (0.01)_2)$,
4. $(+1; -(101)_2; (1000)_2)$,
5. $(1; -(101)_2; (100000)_2)$,
6. $(+1; (10)_2; (1.111101)_2)$

Zadanie 11. Niech $b = 2$, $p = 4$, $emax = 3$. Czy poniższe reprezentacje są reprezentacjami standardowymi pewnych liczb zmiennopozycyjnych?

1. $(-1; (101)_2; (0.000)_2)$,
2. $(1; -(10)_2; (0.000)_2)$,
3. $(-1; (11)_2; (1.1111)_2)$,
4. $(-1; -(1)_2; (11.01)_2)$,
5. $(+1; -(10)_2; (1.001)_2)$,
6. $(1; -(101)_2; (1.001)_2)$,
7. $(+1; (10)_2; (0.111)_2)$,
8. $(+1; -(10)_2; (0.111)_2)$

Zadanie 12. Niech $b = 2$, $p = 4$, $emax = 3$. Podaj reprezentacje standardowe poniższych liczb.

1. 2,
2. $\frac{1}{2}$,
3. $2^{-3}(0.1)_2$,
4. $2^{-3}(0.0001)_2$,
5. $2^{-3}(1000)_2$,
6. $2^{-3}(10001)_2$

Zadanie 13. Niech $b = 2$, $p = 4$, $emax = 3$. Oblicz, ile wynosi

1. MIN,
2. MAX,
3. h,
4. odległość między liczbami zmiennopozycyjnymi z przedziału $[1, 2]$.

Zadanie 14. Niech $b = 2$, $p = 53$, $emax = 1023$. Oblicz, ile wynosi odległość między sąsiednimi liczbami zmiennopozycyjnymi z przedziału $[1, 2]$.

Zadanie 15. Narysuj rozmieszczenie liczb zmiennopozycyjnych na osi liczbowej w przypadku arytmetyki dziesiętnej zgodnej ze standardem *IEEE 754-2008*.

Zadanie 16. Niech $b = 2$, $p = 4$, $emax = 3$. Podaj zmiennopozycyjnych sąsiadów poniższych liczb normalnych

1. $(11.01)_2$,
2. $-(1.11)_2$,
3. $(1.111)_2$,
4. $(1111)_2$

Zadanie 17. Wykaż, że dla arytmetyki **binary32** zachodzą równości

$$emax = 2^{m-1} - 1,$$
$$emin = 2 - 2^{m-1}.$$

Zadanie 18. Wykaż, że dla arytmetyki **binary{k}** zachodzą równości

$$emax = 2^{m-1} - 1,$$
$$emin = 2 - 2^{m-1}.$$

Zadanie 19. Rozpatrzmy arytmetykę **binary16** ($m = 5$, $p = 11$). Jak interpretowane są następujące ciągi bitów

1. $\boxed{0111\,1111\,1000\,0000}$,
2. $\boxed{1100\,0111\,0100\,0000}$,
3. $\boxed{0111\,1100\,0000\,0000}$,
4. $\boxed{1000\,0000\,0000\,0000}$,
5. $\boxed{1000\,0010\,0000\,0000}$?

Zadanie 20. Rozpatrzmy arytmetykę **binary16** ($m = 5$, $p = 11$). Podaj ciągi bitów, które reprezentują liczby

1. -1,
2. -2,
3. -3.

Uogólnij wyniki dla arytmetyk przenośnych o dowolnych parametrach m i p.

Zadanie 21. Rozpatrzmy arytmetyki przenośne **binary16** i **binary32**. Niech x będzie liczbą normalną o następującym kodzie bitowym w arytmetyce **binary16**

$$\boxed{s}\boxed{c_4 \dots c_1 c_0}\boxed{d_1 d_2 \dots d_{10}}.$$

Jaki jest kod bitowy tej samej liczby x w arytmetyce **binary32**?

Zadanie 22. Dana jest arytmetyka zgodna ze standardem *IEEE 754-2008*. Udowodnij, że liczba $b^{emax}(b - \frac{1}{2}b^{1-p})$ jest równa $\mathrm{MAX} + \frac{H}{2}$, gdzie H jest odległością między dwiema największymi liczbami zmiennopozycyjnymi.

Zadanie 23. Rozpatrzmy arytmetykę **binary16** ($emax = 15$, $p = 11$). Wyznacz $\mathsf{rd}(x)$ dla następujących wartości x przy różnych sposobach zaokrągleń.

1. $x = 2^{16}(0.11111'11111'11111'11111)_2$,
2. $x = 2^{0}(0.01111'11111'111)_2$,
3. $x = (1111101)_2 2^{10}$,
4. $x = 2^{-15}(0.1)_2$,
5. $x = 2^{-25}$,
6. $x = -2^{25}$.

Zadanie 24. Niech $b = 2$, $p = 4$, $emax = 3$. Można obliczyć, że wtedy $\mathrm{MAX} = 15$ oraz $H = 1$. Dla wartości x zamieszczonych w tabeli, oblicz $rd(x)$ przy różnych sposobach zaokrąglania:

1. $\mathsf{rd}_1(x)$ oznacza zaokrąglenie x do najbliższej z wyborem parzystej cyfry,
2. $\mathsf{rd}_2(x)$ oznacza zaokrąglenie x do najbliższej z wyborem większego modułu,
3. $\mathsf{rd}_3(x)$ oznacza zaokrąglenie x w kierunku $+\infty$,
4. $\mathsf{rd}_4(x)$ oznacza zaokrąglenie x w kierunku $-\infty$,
5. $\mathsf{rd}_5(x)$ oznacza zaokrąglenie x w kierunku zera.

x	$\mathsf{rd}_1(x)$ parzysta cyfra	$\mathsf{rd}_2(x)$ większy moduł	$\mathsf{rd}_3(x)$ kierunek $+\infty$	$\mathsf{rd}_4(x)$ kierunek $-\infty$	$\mathsf{rd}_5(x)$ kierunek 0
16					
15.5					
15					
14.75					
14.5					
14.25					
−14.25					

Zadanie 25. Niech $b = 2$, $p = 4$, $emax = 3$. Można obliczyć, że wtedy MAX $= 15$ oraz $H = 1$. Dla liczb zamieszczonych w tabelach, oblicz błędy bezwzględne i względne przy różnych sposobach zaokrąglania:

1. $\mathrm{r_{B1}}(x)$, $\mathrm{r_{W1}}(x)$ oznaczają odpowiednio błąd bezwzględny i względny przy zaokrągleniu x do najbliższej z wyborem parzystej cyfry,

2. $\mathrm{r_{B2}}(x)$, $\mathrm{r_{W2}}(x)$ oznaczają odpowiednio błąd bezwzględny i względny przy zaokrągleniu x do najbliższej z wyborem większego modułu,

3. $\mathrm{r_{B3}}(x)$, $\mathrm{r_{W3}}(x)$ oznaczają odpowiednio błąd bezwzględny i względny przy zaokrągleniu x w kierunku $+\infty$,

4. $\mathrm{r_{B4}}(x)$, $\mathrm{r_{W4}}(x)$ oznaczają odpowiednio błąd bezwzględny i względny przy zaokrągleniu x w kierunku $-\infty$,

5. $\mathrm{r_{B5}}(x)$, $\mathrm{r_{W5}}(x)$ oznaczają odpowiednio błąd bezwzględny i względny przy zaokrągleniu x w kierunku zera.

BŁĘDY BEZWZGLĘDNE

x	$\mathrm{r_{B1}}(x)$ parzysta cyfra	$\mathrm{r_{B2}}(x)$ większy moduł	$\mathrm{r_{B3}}(x)$ kierunek $+\infty$	$\mathrm{r_{B4}}(x)$ kierunek $-\infty$	$\mathrm{r_{B5}}(x)$ kierunek 0
0					
15.5					
15					
14.75					
14.5					
14.25					
-14.25					

BŁĘDY WZGLĘDNE

x	$\mathrm{r_{W1}}(x)$ parzysta cyfra	$\mathrm{r_{W2}}(x)$ większy moduł	$\mathrm{r_{W3}}(x)$ kierunek $+\infty$	$\mathrm{r_{W4}}(x)$ kierunek $-\infty$	$\mathrm{r_{W5}}(x)$ kierunek 0
0					
15.5					
15					
14.75					
14.5					
14.25					
-14.25					

Zadanie 26. Rozpatrzmy arytmetykę **binary16** i załóżmy, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry.

1. Ile wynosi największa liczba całkowita k taka, że 10^k jest reprezentowane (niekoniecznie dokładnie, ale przez liczbę) w tej arytmetyce?

2. Ile wynosi najmniejsza liczba całkowita k taka, że $\mathsf{rd}\,(10^k) > 0$?

Zadanie 27. Dla wszystkich przenośnych formatów binarnych podaj ich precyzje.

Zadanie 28. Wklej do skryptu Octave dwukrotnie poniższe polecenia: raz jak poniżej, drugi raz stosując `format long`.

```
format bit
k00=2^52
k01=k00+1
k02=k00+2
k03=k00+3
k04=k00+4
k05=k00+5
k06=k00+6
k07=k00+7
k08=k00+8
k09=k00+9
k10=k00+10
k11=k00+11
k12=k00+12
k13=k00+13
k14=k00+14
k15=k00+15
k16=k00+16
k17=k00+17
k18=k00+18
```

Obejrzyj wyniki. Następnie zmień wartość `k00` na 2^{53}. Wyjaśnij, dlaczego pojawiły się takie wyniki. Zmieniaj kolejno wartość `k00` na $2^{54}, 2^{55}, 2^{56}$ i obserwuj wyniki. [a]

[a] W tym i następnych zadaniach założono, że domyślną arytmetyką Octave jest **binary64** ($m = 11$, $p = 53$). Jeśli na Twoim komputerze jest inaczej, trzeba zmienić liczby $p = 53$, $emax = 1023$, $m = 11$ na odpowiadające arytmetyce Twego komputera.

Zadanie 29. Wykonaj następujące instrukcje w Octave.

```
format bit
H=2^(1023-53+1);
max_ar=2^1023*(2-2^(-53+1))
max_p1=max_ar-H
max_p2=max_ar-H/2
max_p3=max_ar-H/4
max_p4=max_ar+H/4
max_p5=max_ar+H/2
max_p6=max_ar+H
format long
max_ar
max_p1
max_p2
max_p3
max_p4
max_p5
max_p6
printf("max_ar=%27.17g\n",max_ar);
printf("max_p1=%27.17g\n",max_p1);
printf("max_p2=%27.17g\n",max_p2);
printf("max_p3=%27.17g\n",max_p3);
printf("max_p4=%27.17g\n",max_p4);
printf("max_p5=%27.17g\n",max_p5);
printf("max_p6=%27.17g\n",max_p6);
```

Obejrzyj wyniki i podaj ich interpretację.

Zadanie 30. Wykonaj w Octave poniższy skrypt.

```
x=2^(-75);
x=x*x;
if (x==0.0)
   "zero"
else
   "rozne od zera"
endif
```

Zmień skrypt tak, by zamiast domyślnej arytmetyki **binary64** użyć **binary32**. Porównaj wyniki i wyjaśnij, dlaczego takie są.

Zadanie 31. Napisz w Octave skrypt, który wyznacza najmniejszą dodatnią liczbę normalną oraz największą liczbę normalną w obu dostępnych arytmetykach (`single` oraz `double`). Posłuż się funkcjami `realmax` i `realmin`. Wygeneruj w tych arytmetykach stałe oznaczające $+\infty$ oraz `NaN` (funkcje `Inf` oraz `NaN`). Obejrzyj uzyskane wartości.

Zadanie 32. Wykonaj w Octave poniższy skrypt.

```
format long

a=(4.0/3.0-1.0)*3.0-1.0
b=(3.0*0.1-0.3)/(2.0*0.1-0.3+0.1)
c=2006/1e309
d=2.006/1e306
e=(2006/1000)/(1e309/1000)

if (0.7*4.0==0.4*7.0)
   "prawda"
else
   "falsz"
endif

if ((1+2^(-53))+2^(-53)==1+(2^(-53)+2^(-53)))
   "prawda"
else
   "falsz"
endif
```

Przeanalizuj uzyskane wyniki.

Zadanie 33. Czy następujące instrukcje języka C są równoważne? Jeśli nie to podaj przykład zachodzących różnic. Zmienne x oraz y są typu `double`.

- instrukcja pierwsza: `tmp=x*x, y=sqrt(tmp);`
  instrukcja druga: `y=fabs(x);`
- instrukcja pierwsza: `tmp=4-x, y=2-sqrt(tmp);`
  instrukcja druga: `tmp=4-x, y=x/(2+sqrt(tmp));`
- instrukcja pierwsza: `tmp=x*x, y=tmp/x;`
  instrukcja druga: `y=x;`
- instrukcja pierwsza: `tmp=exp(x), y=log(tmp)`
  instrukcja druga: `y=x;`

Zadanie 34. Czy instrukcje `y=1111+(x*x)/x-1111;` oraz `y=x;` są równoważne? Jeśli nie, to opisz jak najwięcej różnic. Zakładamy, że zmienne `x` oraz `y` są typu zmiennopozycyjnego.

Zadanie 35. Jaki będzie wynik działania programu

```
main(){
  float x=1.0/8192.0;
  float y=x/8192.0;
  if (y==0.0)
     printf("ZERO");
  else
     printf("NIE_ZERO");
}
```

jeśli obliczenia dokonywane są w arytmetyce fl z $m = 8$ i $p = 24$ a jaki, gdy $m = 5$ i $p = 11$?

Zadanie 36. Rozpatrzmy arytmetyki **binary32** i **binary64** i załóżmy, że odpowiadają im odpowiednio typy `float` i `double` w C. Jaki będzie wynik działania następującego programu dla różnych sposobów zaokrąglania? Czy ulegnie on zmianie, gdy `float` zostanie zastąpiony przez `double`?

```
main(){
    float x=pow(2.0,-75.0);
    float y=x*x;
    if (y==0.0)
        printf("ZERO");
    else
        printf("NIE_ZERO");
}
```

Zadanie 37. Opisz działanie następującego programu w zależności od dodatnich wartości zmiennej `A`. Zakładamy, że `double` oznacza arytmetykę **binary64** oraz, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry.

```
main(){
   double A=...  //tu wstawiamy dodatnie liczby
   double x=A*A;
   double y=(A+1)-A;
   double z=x/y;
   printf("x=%lg, y=%lg, z=%lg\n\n",x,y,z);
}
```

Zadanie 38. Ile razy wykona się pętla w zależności od dodatnich wartości zmiennej `A`? Zakładamy, że `double` oznacza arytmetykę przenośną **binary64** oraz, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry.

```
main(){
   double A=...   //tu wstawiamy dodatnie liczby
   double i;
   for(i=A;i<=A+1;i++){
       printf ("%.17lf\n",i);
       if (i==A+2)
           break;
   }
}
```

Zadanie 39. Ile razy wykona się pętla w zależności od dodatnich wartości zmiennej `A`? Zakładamy, że `double` oznacza arytmetykę przenośną **binary64** oraz, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry.

```
main(){
   double A=...//tu wstawiamy dodatnie liczby
   double i;
   for(i=A;i<A+1;i++)
       printf ("%lf ",i);
}
```

Zadanie 40. Przetestuj działanie następującego programu dla czterech wartości zmiennej `x` równych kolejno 2^{-p}, $2^{-(p-1)}$, 2^p, 2^{p+1}. Jeśli `double` jest arytmetyką przenośną **binary64**, to $p = 53$ i testowane wartości można obliczyć tak, jak zostało to zrobione w zakomentowanych fragmentach. Wyjaśnij wyniki, przy założeniu, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry.

```
main(){
   //double x=pow(2.0,-53.0);
   //double x=pow(2.0,-52.0);
   //double x=pow(2.0,53.0);
   //double x=pow(2.0,54.0);
   double y=x+1;
   double z=y-1;
   if (y>x)
      printf("dobrze\n");
   else
      printf("zle\n");
   if (z==x)
      printf("dobrze\n");
   else
      printf("zle\n");
}
```

Zadanie 41. Rozpatrzmy arytmetykę binarną zgodną ze standardem *IEEE 754-2008*. Załóżmy, że stosujemy zaokrąglanie do najbliższej z wyborem większego modułu. Jaka liczba będzie wynikiem działań wykonanych w tej arytmetyce odpowiadających zapisowi

$$((((1/2)/2)/2)\ldots)/2?$$

Odpowiedź uzależnij od liczby n par nawiasów użytych w obu działaniach. Czy odpowiedź ulegnie zmianie, jeśli stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry?

Zadanie 42. Dany jest ciąg bitów

$$\boxed{0000\ 0000\ 1010\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000}$$

oraz zmienne `x` i `y` zadeklarowane w języku C następująco

```
float x;
unsigned long  y;
```

Zakładamy, że typ `float` jest zgodny z arytmetyką przenośną **binary32** ($p = 23$, $emax = 127$), a typ `unsigned long` zajmuje 32 bity.

1. Jaką liczbę reprezentuje dany ciąg bitów, jeśli przechowuje wartość zmiennej `x`?
2. Jaką liczbę reprezentuje dany ciąg bitów, jeśli przechowuje wartość zmiennej `y`?
3. Podaj ciąg bitów, który koduje wynik działania `x=y+x`, gdzie początkowe wartości `x` i `y` są zapisane przy pomocy danego ciągu bitów.

Zakładamy, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry.

Zadanie 43. W pewnym programie w C zadeklarowano zmienne `x,y,z` w następujący sposób:

```
unsigned long x;
float y,z;
```

Przyjmujemy, że zmienne typu `unsigned long` oraz `float` są przechowywane na 16 bitach, przy czym typ `float` jest zgodny z arytmetyką **binary16** ($emax = 15$, $p = 11$). Jaki ciąg bitów reprezentuje wartość zmiennej `z` po wykonaniu instrukcji przypisania `z=x*y;` jeśli przed jej wykonaniem w komórkach pamięci odpowiadającym zmiennym `x` i `y` znajdowały się ciągi bitów:

`x:` $\boxed{1000\,1000\,1000\,0000}$, `y:` $\boxed{0100\,0100\,0100\,0000}$?

Zakładamy, że stosowane jest zaokrąglanie w kierunku $+\infty$.

Zadanie 44. Niech a, b, c będą liczbami zmiennopozycyjnymi. Czy zawsze $\mathsf{fl}\left((\mathsf{a}+\mathsf{b})+\mathsf{c}\right) = \mathsf{fl}\left(\mathsf{a}+(\mathsf{b}+\mathsf{c})\right)$?

Zadanie 45. Czy możliwe jest jednoznaczne stwierdzenie przy pomocy obliczeń przeprowadzonych w arytmetyce zmiennopozycyjnej, czy dwa wektory o zadanych współrzędnych są prostopadłe?

Zadanie 46. Czy możliwe jest jednoznaczne stwierdzenie przy pomocy obliczeń przeprowadzonych w arytmetyce zmiennopozycyjnej, czy $\alpha \in \mathbb{R}$ jest miejscem zerowym danego wielomianu

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n?$$

Zadanie 47. Dana jest funkcja

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}.$$

Którym wzorem lepiej się posłużyć projektując algorytm obliczający $f(x)$ dla wartości x bliskich zeru?

Zadanie 48. Jakie są wady algorytmu

```
sqrt(a*a+b*b)
```

Podaj algorytm unikający ich.

Zadanie 49. Niech MIN i MAX oznaczają najmniejszą i największą dodatnią liczbę normalną, a h najmniejszą dodatnią liczbę podnormalną w pewnej binarnej arytmetyce przenośnej. Czy prawdziwe są równości i stwierdzenia

1. $\mathsf{fl}\,(\mathtt{1}/\,\mathrm{MAX}) = 0$,
2. $\mathsf{fl}\,(\mathtt{1}/\mathtt{h})$ powoduje nadmiar,
3. $\mathsf{fl}\,(\mathrm{MAX} + \mathtt{1})$ powoduje nadmiar,
4. $\mathsf{fl}\,(\mathrm{MIN} * \mathrm{MIN}) = 0$,
5. $\mathsf{fl}\,(\mathtt{h} * \mathtt{h}) = 0$?

Zakładamy, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry.

Zadanie 50. Niech a oraz b będą niezerowymi liczbami zmiennopozycyjnymi. Jakie są wady algorytmu obliczania wartości wyrażenia

$$\frac{a+b}{a^2+b^2},$$

który jest zaprogramowany zgodnie z powyższym zapisem. Podaj algorytm unikający ich.

Zadanie 51. Dana jest arytmetyka przenośna **binary32**. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę zmiennopozycyjną x taką, że $\mathsf{fl}\,(\mathtt{x}/\,\mathrm{MAX}) > 0$. Zakładamy, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry.

Zadanie 52. Dana jest binarna arytmetyka przenośna zgodna ze standardem *IEEE 754-2008* oraz, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry. Udowodnij, że jeśli x jest największą dodatnią liczbą zmiennopozycyjną taką, że $\mathsf{fl}\,(\mathtt{1.0} + \mathtt{x}) = 1.0$, to x równa się ν.[a]

[a] Twierdzenie nie jest prawdziwe przy innych sposobach zaokrąglania.

Zadanie 53. Dana jest binarna arytmetyka przenośna zgodna ze standardem *IEEE 754-2008* oraz, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbą zmiennopozycyjną x taką, że $\mathsf{fl}\,(\mathtt{1.0} + \mathtt{x}) \neq 1.0$.

Zadanie 54. Napisz w Octave pętlę znajdującą najmniejszy całkowity wykładnik `k` taki, że $\mathsf{rd}\,(2^k) \neq 0$.

Zadanie 55.

1. Dla arytmetyki **binary64** podaj jej precyzję ν.
2. Korzystając z twierdzenia, że jeśli x jest największą dodatnią liczbą zmiennopozycyjną taką, że $\mathsf{fl}\,(\mathtt{1.0} + \mathtt{x}) = 1.0$, to x równa się ν, napisz w Octave pętlę wyznaczającą ν.

   Wskazówka: Wiadomo, że ν jest całkowitą potęgą 2.
3. Użyj funkcji `eps` bez argumentów i porównaj wyniki. Sprawdź, co oblicza funkcja `eps`.

Zadanie 56. Napisz dwie funkcje w języku C, który wyznaczą parametry p i m arytmetyki dostępnej w Twoim komputerze. Nie używaj w tym programie biblioteki `float.h`.

Zadanie 57. Jakie wyjątki będą zgłaszane podczas wykonywania następujących działań w arytmetyce przenośnej **binary64**? Zakładamy, że stosowane jest zaokrąglanie do najbliższej z wyborem parzystej cyfry.

1. $\mathsf{fl}\,(\mathtt{1.0}/\mathtt{3.0})$,
2. $\mathsf{fl}\,(\mathtt{1e300} * \mathtt{1e300})$,
3. $\mathsf{fl}\,(\mathtt{1.0}/\mathtt{0.0})$,
4. $\mathsf{fl}\,(\mathtt{1e} - \mathtt{400} * \mathtt{1e} - \mathtt{400})$,
5. $\mathsf{fl}\,(\mathtt{sqrt}(-\mathtt{1.0}))$,
6. $\mathsf{fl}\,(+\infty * 0)$,
7. $\mathsf{fl}\,(+\infty/0)$?

Zadanie 58. Napisz program porównujący czasy wykonania działań: dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, pierwiastkowania, potęgowania. Możesz go zacząć jak niżej.

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<time.h>
#define N 50000000

main(){
  long i;
  clock_t czas1,czas2;
  clock_t czas=0;
  double x;

  czas1=clock();
  for (i=0;i<N;i++)
    x=(double)i;
  czas2=clock();
  czas=czas2-czas1;

  printf("Dodawanie:\t");
  czas1=clock();
  for (i=0;i<N;i++)
     x=(double)i+2.5;
  czas2=clock();
  ...
```

Zadanie 59. Zapisz algorytm obliczający iloczyn n liczb zmiennopozycyjnych. Algorytm ma unikać nadmiaru i niedomiaru.

Zadanie 60. Napisz w języku C funkcje o poniższych nagłówkach.

```
/*wczytuje wektor z pliku, w ktorym jest
najpierw zapisana ilosc wspolrzednych,
a potem znajduja sie wspolrzedne wektora;
umieszcza wspolrzedne wektora w tablicy wekt,
zwraca ilosc wspolrzednych lub
0 gdy podano niepoprawna ilosc wspolrzednych lub
-1 gdy podano z malo wspolrzednych*/
int wczytaj_wektor(FILE *plik, double wekt[]);

/*wypisuje wektor wekt o n wspolrzednych*/
void wypisz_wektor(double wekt[],int n);

/*oblicza iloczyn skalarny wektorow w1 i w2,
oba maja n wspolrzednych*/
double il_skalarny(double w1[],double w2[],int n);
```

Wykorzystaj te funkcje do stwierdzenia, czy dwa wektory są ortogonalne. Współrzędne wektorów mają być zapisane w pliku. Przetestuj program, a następnie zaproponuj cztery zestawy danych tak, by zilustrować następujące zachowania programu:

1. wektory są ortogonalne i program to stwierdza,
2. wektory nie są ortogonalne i program to stwierdza,
3. wektory są ortogonalne, ale program stwierdza, że nie są,
4. wektory nie są ortogonalne, ale program stwierdza, że są.

2 Uwarunkowanie zadania, numeryczna poprawność i stabilność algorytmu

Zadanie 61. Napisz w Octave skrypt wykonujący poniższe czynności.

1. Utwórz wektor zawierający wszystkie miejsca zerowe wielomianu
$$w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdot\ldots\cdot(x-20).$$
2. Utwórz wektor współczynników wielomianu w. [a]
3. Utwórz wektor współczynników wielomianu v. Wielomian v jest niemal identyczny jak wielomian w, tylko jego współczynnik przy potędze x^{19} jest o 2^{-23} mniejszy niż odpowiadający współczynnik wielomianu w. [b]
4. Oblicz pierwiastki wielomianów w i v i porównaj je.

[a] Użyj funkcji `poly`.
[b] W tym celu skopiuj wektor i zmień jedną jego współrzędną. Dostęp do np. pierwszej współrzędnej wektora `z` uzyskujemy pisząc `z(1)`. Wektory w Octave są numerowane od 1.

Zadanie 62. Udowodnij, że dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nierówność
$$\left|\frac{x - \mathsf{rd}\,(x)}{x}\right| \leq \nu$$
jest równoważna warunkowi
$$\mathsf{rd}\,(x) = x(1+\varepsilon) \quad \wedge \quad |\varepsilon| \leq \nu.$$

Zadanie 63. Zapisz poniższe zadania w postaci funkcji przyporządkowującej danym wyniki. Dla każdego określ najpierw dziedzinę i przeciwdziedzinę.

1. Zadanie obliczania wartości trójmianu kwadratowego w zadanym punkcie.
2. Zadanie obliczania wyznacznika macierzy 2×2.
3. Zadanie obliczania pola trójkąta mając daną długość podstawy i spuszczonej nań wysokości.
4. Zadanie obliczania iloczynu skalarnego dwóch wektorów z $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 64. Dla zadania

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

zapisz ułamek

$$\frac{|\phi(d_1(1+\varepsilon_1), \dots, d_n(1+\varepsilon_n)) - \phi(d_1, d_2, \dots, d_n)|}{|\phi(d_1, d_2, \dots, d_n)|}$$

przy założeniu, że mianownik jest różny od 0. Następnie przekształć licznik, zredukuj wyrazy podobne, ewentualnie uprość ułamek. Zadanie rozwiąż dla następujących funkcji ϕ.

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi(d_1, d_2) = d_1^2 - d_2$,
2. $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi(d_1, d_2) = d_1 d_2 + d_1$,
3. $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\phi(d_1, d_2, d_3) = d_1 d_2 d_3$.

Zadanie 65. Zbadaj uwarunkowanie zadania

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dla następujących funkcji ϕ:

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi(d_1, d_2) = d_1^2 - d_2$,
2. $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\phi(d_1, d_2, d_3) = d_1 d_2 d_3$.

Zadanie 66. Zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania wyrażenia $w(a, b) = ab + a$. Liczby a, b są rzeczywiste.

Zadanie 67. Czy zadanie obliczania

1. pierwiastka wielomianu $w(x) = ax + b$,
2. wyznacznika
$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix},$$
3. wartości wielomianu dwóch zmiennych $w(x, y) = 7x^2 y$ w punkcie (x, y),
4. pola trójkąta o podstawie a oraz wysokości h

jest dobrze uwarunkowane ze względu na dane a, b, x, y, h?

Zadanie 68. Zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania wyznacznika

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ -a & 1 \end{bmatrix},$$

dla danej dodatniej liczby rzeczywistej a.

Zadanie 69. Zbadaj uwarunkowanie następujących zadań

1. $f(a, b) = a^2 + b^2$,
2. $f(a, b) = a^2 - b^2$,
3. $f(a, b) = a^n - b^n$, $n \in \mathbb{N}$,
4. $f(a, b) = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, $a, b > 0$,
5. $f(a, b) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, $a, b \geq 0$,
6. $f(x) = \sin x$,
7. $f(x) = \cos x$,
8. $f(x) = \mathrm{tg} x$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,
9. $f(x) = \mathrm{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$,
10. $f(x) = e^x$.

Liczby a, b, x są rzeczywiste.

Zadanie 70. Zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania iloczynu n liczb rzeczywistych przy założeniu, że n spełnia nierówność $10n\nu < 1$.

Zadanie 71. Dane jest wyrażenie $f(a, b, c) = \frac{ab}{c}$ oraz algorytmy obliczające jego wartość

A1: `(a*b)/c`, A2: `(a/c)*b`.

1. Zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania wartości wyrażenia $f(a, b, c)$.
2. Czy algorytmy A1 oraz A2 zrealizowane zgodnie z zapisem są równoważne?

Zadanie 72. Dane są liczby rzeczywiste $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ spełniające nierówności $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leq \nu$. Definiujemy $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8$ poniższymi równościami

$$\begin{aligned}
1+\delta_1 &= (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2),\\
1+\delta_2 &= (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3),\\
1+\delta_3 &= \frac{1}{1+\varepsilon_1},\\
1+\delta_4 &= \frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2},\\
1+\delta_5 &= \sqrt{1+\varepsilon_1},\\
1+\delta_6 &= (1+\varepsilon_1)\sqrt{1+\varepsilon_2},\\
1+\delta_7 &= \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{1+\varepsilon_3},\\
1+\delta_8 &= \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)}.
\end{aligned}$$

Udowodnij, że $|\delta_i| \leq K_i\nu$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, gdzie

$$\begin{aligned}
K_1 &= 2+\nu \approx 2,\\
K_2 &= 3+3\nu+\nu^2 \approx 3,\\
K_3 &= \frac{1}{1-\nu} \approx 1,\\
K_4 &= \frac{2}{1-\nu} \approx 2,\\
K_5 &= \frac{1}{\sqrt{1-\nu}+1} \approx \frac{1}{2},\\
K_6 &= \frac{3+3\nu+\nu^2}{(1-\nu)^{\frac{3}{2}}+1} \approx \frac{3}{2},\\
K_7 &= \frac{3+\nu}{1-\nu} \approx 3,\\
K_8 &= \frac{4+2\nu}{(1-\nu)^2} \approx 4.
\end{aligned}$$

Zadanie 73. Dane są liczby rzeczywiste $\varepsilon_i \leq \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ spełniające nierówności $|\varepsilon_i| \leq \nu$. Definiujemy δ równością

$$1+\delta = \prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon_i).$$

Udowodnij, że $|\delta| \leq K\nu$, gdzie

1. $K = n + \binom{n}{2}\nu + \binom{n}{3}\nu^2 + \ldots + \binom{n}{n}\nu^{n-1}$,
2. jeśli $n\nu < 2$ to
$$K \leq \frac{n}{1-\frac{n\nu}{2}},$$
3. jeśli $n\nu < 0.1$ to $K \leq 1.06n \approx n$.

Zadanie 74. Niech liczby rzeczywiste x, y będą tego samego znaku, a $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ spełniają nierówności $|\varepsilon_1| \leq K_1\nu$, $|\varepsilon_1| \leq K_2\nu$ dla pewnych dodatnich stałych K_1 i K_2. Udowodnij, że istnieje δ taka, że $|\delta| \leq \nu \sup\{K_1, K_2\}$ oraz

$$x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2) = (x+y)(1+\delta).$$

Zadanie 75. Wskaż numerycznie poprawny algorytm obliczania wartości wyrażenia

1. $a^2 + b$,
2. $a - b^2$,
3. $ab + b$,

gdzie liczby a i b są rzeczywiste. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 76. Wskaż numerycznie poprawny algorytm obliczania wartości wyrażenia

1. $y(a,b,c) = \dfrac{a-b-c}{abc}$, $a, b, c \neq 0$,
2. $y(a,b) = a^3 + a^2b$,
3. $y(a,b) = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, $a^2+b^2 \neq 0$,

gdzie liczby a, b, c są rzeczywiste. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 77. Podaj numerycznie poprawny algorytm obliczania wyznacznika

$$\det\begin{bmatrix} a^2-b^2 & a+b \\ bd & c \end{bmatrix}.$$

Liczby a, b, c i d są rzeczywiste. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 78. Wskaż numerycznie poprawny algorytm rozwiązania układu równań

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Liczby rzeczywiste a, b i c są dane. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 79. Dane są liczby $x, y \in \mathbb{R}$ takie, że $x^2 + y^2 > 0$. Podaj numerycznie poprawny algorytm obliczania wielkości

$$c = \cos 2\phi, \quad s = \sin 2\phi,$$

gdzie ϕ jest zdefiniowany zależnościami

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\phi = \frac{x}{r}, \quad \sin\phi = \frac{y}{r}.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 80.

1. Czy zadanie obliczania wartości wielomianu dwóch zmiennych $w(x, y) = x^2 - 2xy$ w punkcie (x, y) jest dobrze uwarunkowane ze względu na dane x i y?

2. Czy algorytmy `x*x-2*x*y` oraz `x*(x-2*y)` zrealizowane zgodnie z powyższym zapisem mogą dać różne wyniki?

3. Czy algorytmy `x*x-2*x*y` oraz `x*(x-2*y)` zrealizowane zgodnie z powyższym zapisem są numerycznie poprawne? Który z algorytmów jest tańszy?

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 81. Zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania wartości wyrażenia $f(a, b) = a^2b + ab^2$ ze względu na małe względne zmiany danych a i b rzeczywistych dodatnich. Zaproponuj możliwie tani numerycznie poprawny algorytm obliczania $f(a, b)$. Oszacuj błąd wytworzony w tym algorytmie.

Zadanie 82. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ oraz funkcja $f(a_1, \ldots, a_n) = a_1^4 + \ldots + a_n^4$.

1. Zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania f.

2. Podaj numerycznie poprawny algorytm obliczania f.

3. Oszacuj błąd zaproponowanego algorytmu.

4. Uogólnij na przypadek $f(a_1, \ldots, a_n) = a_1^k + \ldots + a_n^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 83. Wskaźnik uwarunkowania pewnego zadania dla pewnych danych jest rzędu 10^3. Jakiego maksymalnego błędu względnego możemy się spodziewać, jeśli rozwiązujemy to zadanie dla tych samych danych w arytmetyce zmiennopozycyjnej z precyzją $\nu = 10^{-8}$ używając

1. algorytmu numerycznie poprawnego,

2. algorytmu numerycznie stabilnego?

Zadanie 84. Zbadaj, czy poniższe algorytmy są numerycznie poprawne lub stabilne. Przeprowadź dyskusję zależności odpowiedzi od dziedziny zadania.

1. `a*a+b*b`,

2. `a*a-b*b`,

3. `(a-b)*(a+b)`,

4. `111111.1+a*b-111111.1`

Zadanie 85. Wykonaj w Octave poniższy skrypt.

```
a=1;
b=2^13;
c=-1;
w=[a,b,c];

delta=b^2-4*a*c;
x1=(-b-sqrt(delta))/(2*a);
x2=(-b+sqrt(delta))/(2*a);

y1=polyval(w,x1);
y2=polyval(w,x2);
printf("b=%.17f\n",b);
printf("x1=%.17f\n",x1);
printf("x2=%.17f\n",x2);
printf("w(x1)=%.17f\n",y1);
printf("w(x2)=%.17f\n\n",y2);

delta=single(b^2-4*a*c);
x1=single(-b-sqrt(delta))/(2*a);
x2=single((-b+sqrt(delta))/(2*a));

y1=polyval(w,x1);
y2=polyval(w,x2);
printf("b=%.17f\n",b);
printf("x1=%.17f\n",x1);
printf("x2=%.17f\n",x2);
printf("w(x1)=%.17f\n",y1);
printf("w(x2)=%.17f\n",y2);
```

1. Co oblicza ten skrypt? Co możesz wnioskować o stabilności przedstawionego algorytmu?

2. Zmień wartość `b` na 2^{27} i znów wykonaj skrypt. Oszacuj błędy względne obliczonych wyników `x1` oraz `x2`.

Wielomiany

3 Bazy wielomianowe

Zadanie 86. Czy następujące funkcje są wielomianami? Jeśli tak, to podaj ich stopnie.

1. $w(x) = 2x^2 - 3x^{-1}$,
2. $f(x) = 2x^2 + 2$,
3. $g(x) = \ln(x^2+1) + 4x^3 - \ln(x^2+1)$,
4. $v(x) = 24 + 3x^4 + 2x - 3x^4 + 1$,
5. $h(x) = 2x^2 \cdot x^6 \cdot x$,
6. $u(x) = (2x-7)(x^3 - x^2)$.

Zadanie 87. Dane są wielomiany $w(x) = 2x^2 - 3$ oraz $v(x) = 4x + x^3$. Oblicz wielomiany

1. $w + v$,
2. $w \cdot 3$,
3. $w \cdot 2 + v \cdot (-1)$.

Zadanie 88. Czy wielomiany $w(x) = (x-2)(x-1)$ oraz $v(x) = 2 + x^2 - 3x$ są równe?

Zadanie 89. Korzystając ze wzoru rekurencyjnego oblicz 5 pierwszych wielomianów Czebyszewa (tzn. T_0, T_1, T_2, T_3, T_4).

Zadanie 90. Jaki stopień ma wielomian T_n? Podaj wzór opisujący współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu T_n. Udowodnij poczynione spostrzeżenia.

Zadanie 91. Narysuj w Octave wykres czwartego wielomianu Czebyszewa (tzn. T_4). W tym zadaniu należy najpierw na kartce wyznaczyć ten wielomian, a potem posługując się współczynnikami narysować wykres.

Zadanie 92. Narysuj w Octave na jednym wykresie 5 pierwszych wielomianów Czebyszewa (T_0, T_1, T_2, T_3, T_4). W tym zadaniu należy najpierw na kartce wyznaczyć te wielomiany, a potem posługując się współczynnikami narysować wykres. Dodaj etykiety.

Zadanie 93. Sformułuj hipotezę dotyczącą parzystości/nieparzystości wielomianów Czebyszewa. Udowodnij sformułowaną hipotezę.

Zadanie 94. Udowodnij, że dla $x \in [-1,1]$ wielomiany Czebyszewa spełniają równość $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, gdzie $n = 0, 1, \ldots$.

Zadanie 95. Uzasadnij, że wielomiany Czebyszewa w przedziale $[-1,1]$ przyjmują wartości z przedziału $[-1,1]$.

Zadanie 96. Narysuj w Octave wykres czwartego wielomianu Czebyszewa (tzn. T_4) w przedziale $[-1,1]$ na dwa sposoby:

1. posługując się współczynnikami,
2. oraz ze wzoru $T_4(x) = \cos(4 \arccos x)$.

Porównaj oba wykresy.

Zadanie 97. Wyznacz miejsca zerowe n–tego wielomianu Czebyszewa dla $n \geq 1$.

Zadanie 98. Wyznacz ekstrema lokalne n–tego wielomianu Czebyszewa dla $n \geq 1$. Na koniec oblicz wartości T_n w wyznaczonych ekstremach oraz wartości $T_n(-1)$ i $T_n(1)$. [a]

[a] Przypominam, że

$$(\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$[f(g(x))]' = g'(x) \cdot f'(g(x)).$$

Zadanie 99. Oblicz w Octave pierwiastki oraz ekstrema lokalne wielomianu T_4.

Zadanie 100. Udowodnij, że wielomiany Czebyszewa spełniają równość[a]

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2} \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots.$$

[a] Równość jest prawdziwa dla dowolnego x, o ile dopuścimy działania zespolone.

Zadanie 101. Udowodnij, że wśród wszystkich wielomianów postaci

$$2^{n-1}x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

wielomian T_n ma najmniejszą normę supremum na przedziale $[-1,1]$. Ile wynosi ta norma?

Zadanie 102. Dla przestrzenie Π_2 wypisz jej

1. bazę naturalną,
2. bazę Newtona o węzłach $x_1 = 1, x_2 = 2$,
3. bazę Newtona o węzłach $x_1 = 1, x_2 = 1$,
4. bazę Czebyszewa,
5. bazę Lagrange'a o węzłach $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$.

Zadanie 103. Pewien wielomian ma w bazie naturalnej kolejne współczynniki równe $2, 3, 4, 5$. Zapisz ten wielomian.

Zadanie 104. Pewien wielomian ma w bazie Czebyszewa kolejne współczynniki równe $2, 3, 4, 5$. Zapisz ten wielomian.

Zadanie 105. Udowodnij, że wielomiany

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$$

tworzą bazę w Π_n.

Zadanie 106. Oblicz wartości wielomianów bazowych Lagrange'a w węzłach.

Zadanie 107. Dany jest wielomian w. Zapisz go w bazie

1. Czebyszewa w Π_3,
2. Lagrange'a zdefiniowanej węzłami 0, 1, 2,
3. Newtona zdefiniowanej węzłami 0, 1.

Rozwiąż zadanie dla wielomianów

- $w(x) = 3x^2 - 1$,
- $w(x) = 2x^2 + x$.

Zadanie 108. Zapisz wielomian $w(x) = 2x^2 + 2x + \sqrt{2}$ w bazie Newtona (w Π_2) zdefiniowanej węzłami, które są pierwiastkami drugiego wielomianu Czebyszewa uporządkowanymi rosnąco.

Zadanie 109. Oblicz współrzędne wielomianu

$$w(x) = x^2 - \frac{1}{4}$$

w bazie Lagrange'a (w Π_2) zdefiniowanej węzłami, które są pierwiastkami trzeciego wielomianu Czebyszewa uporządkowanymi malejąco.

Zadanie 110. Dany jest wielomian

$$w(x) = a(x+1) + b + c(x^2 - 1),$$

gdzie a, b i c są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

1. Podaj współczynniki tego wielomianu w bazie Newtona zdefiniowanej węzłami -1 i 1.
2. Dobierz tak liczby a, b i c, by wszystkie współczynniki w bazie Lagrange'a zdefiniowanej węzłami -1, 0 i 1 wynosiły 1.

Zadanie 111. Niech wielomian w posiada n pojedynczych miejsc zerowych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $w(x_n+1) = 1$. Napisz algorytm wyznaczania współczynników wielomianu w w bazie Newtona zdefiniowanej węzłami $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Zadanie 112. W przedziale $[-2, 7]$ wyznaczono 6 węzłów równoodległych. Podaj ich wartości.

Zadanie 113. Podaj wzory opisujące $n+1$ węzłów równoodległych w przedziale $[a, b]$.

Zadanie 114. W przedziale $[-2, 7]$ wyznaczono 3 węzły Czebyszewa. Podaj ich wartości.

Zadanie 115. Podaj wzory opisujące $n+1$ węzłów Czebyszewa w przedziale $[a, b]$. Wyprowadź je na dwa sposoby — korzystając z definicji i faktu z wykładu. [a]

[a] Miejscami zerowymi wielomianu T_k są liczby

$$\cos\frac{(2i+1)\pi}{2k} \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Zadanie 116. Udowodnij, że norma supremum na przedziale $[a, b]$ jest rzeczywiście normą w Π_n.

Zadanie 117. Niech miarę skośności bazy $\{u_i\}_{i=1}^n$ na przedziale $[a, b]$ wyraża wzór

$$C(\{u_i\}, [a, b], n) \leq 4 + 2\ln n.$$

Dla jakich n można przyjąć, że na skutek błędów zaokrągleń nie utracimy więcej niż 4 cyfry znaczące w systemie binarnym? [a]

[a] $e^6 \approx 403.428793$

Zadanie 118. Niech $w(x) = V_0(x) + a_1V_1(x) + \ldots + a_nV_n(x)$, gdzie $V_i = \alpha_i T_i(x)$ i α_i są tak dobrane, by współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu V_i wynosił 1. Udowodnij, ze jeśli liczby rzeczywiste a_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ spełniają warunek $|a_i| \leq \frac{1}{3}$, to zadanie obliczania wartości $w(x)$ jest bardzo dobrze uwarunkowane dla $x \in [-1, 1]$ ze względu na dane a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

4 Algorytmy obliczania wartości wielomianu

Zadanie 119. Dany jest wielomian $w(x) = 4x^2 - 2x + 1$.

1. Dokonaj takich przekształceń wyrażenia $w(\alpha)$ dla tego wielomianu, które są wykonywane podczas wyprowadzenia algorytmu Hornera.
2. Dla $\alpha = 3$ oblicz liczby w_i użyte w opisie algorytmu.

Zadanie 120. Dany jest wielomian

$$w(x) = 4(x-2)(x-1) - 3(x-2) + 1$$

zapisany w bazie Newtona o węzłach $2, 1$. Jakie wartości kolejno przyjmie zmienna `w` podczas wykonywania uogólnionego algorytmu Hornera opisanego na wykładzie? Odpowiedź uzależnij od punktu α, w którym obliczamy wartość wielomianu i ewentualnie od poprzedniej wartości zmiennej.

Zadanie 121. Zapisz algorytm obliczania wartości $w(\beta)$ dla $\beta \in \mathbb{R}$, gdzie w jest wielomianem stopnia n danym w postaci $w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-\alpha)^i$, liczby rzeczywiste a_i, $i = 0, \ldots, n$ oraz α są parametrami zadania. Podaj koszt.

Zadanie 122. Zapisz uogólniony algorytm Hornera dla bazy Newtona zdefiniowanej przez węzły:

$$1, 1, \ldots, 1, 2, 2, \ldots, 2 \quad (n \text{ jedynek i } n \text{ dwójek})$$

Algorytm ma działać w czasie $2n(\text{ ops} + \text{ opm}) + C$, gdzie C jest niewielką stałą. Rozwiąż to samo zadanie dla układu węzłów:

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0 \quad (n \text{ zer i } n \text{ jedynek}).$$

Zadanie 123. Dane są węzły $x_0, x_1, \ldots, x_m$ parami różne oraz $m+1$ liczb naturalnych $k_0, k_1, \ldots, k_m$ (nazywanymi krotnościami węzłów). Niech wielomian w będzie zapisany w bazie Newtona o węzłach

$$\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k_0}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k_1}, \ldots \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{k_m}.$$

Napisz algorytm obliczania wartości wielomianu w w danym punkcie. Podaj jego koszt.

Zadanie 124. Zaproponuj algorytm dzielenia wielomianu zapisanego w bazie naturalnej przez trójmian $(x-\alpha)(x-\beta)$, gdzie liczby rzeczywiste α i β są dane. Podaj koszt.

Zadanie 125. Napisz algorytm obliczania wartości wielomianu w stopnia $2m$ w punkcie x zapisanego w bazie Czebyszewa i będącego postaci

$$w(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i T_{2i}(x)$$

Algorytm ma kolejno obliczać sumy częściowe

$$w_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i T_{2i}(x), \quad 0 \le k \le m.$$

Współczynniki wielomianu mają być zapisane w tablicy `a` o $(m+1)$ elementach. Nie wolno używać tablicy pomocniczej. Zminimalizuj koszt i podaj ile wynosi.

Zadanie 126. Dostosuj algorytm Clenshaw'a tak, by obliczał wartość w punkcie x wielomianu postaci

$$w(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i T_{2i}(x)$$

Współczynniki wielomianu mają być zapisane w tablicy `a` o $(m+1)$ elementach. Nie wolno używać tablicy pomocniczej. Zminimalizuj koszt i podaj, ile wynosi.

Zadanie 127. Zaprogramuj w języku C oba algorytmy obliczania wartości wielomianu zapisanego w bazie Czebyszewa. Każdy z nich ma być zaprogramowany jako osobna funkcja. Użyj poniższych nagłówków

```
float alg_sumy_czes(float *c,int n, float alfa);
float alg_clenshaw(float *c,int n, float alfa);
```

Przetestuj algorytmy dla wielomianu $w(x) = \sum_{i=0}^{10} T_i(x)$ oraz punktów z gęstej siatki na przedziale $[0.875, 1]$. Siatka ma być równomierna i dzielić zadany przedział na 2^{12} podprzedziałów. Dla każdego punktu siatki oblicz błąd następująco

$$\left| \frac{\text{wynik\_pierwszego\_alg} - \text{wynik\_drugiego\_alg}}{\text{wynik\_pierwszego\_alg}} \right|.$$

Wyniki działania programu (z dokładnością do 17 miejsc po przecinku) zapisz w pliku tekstowym. Jeden wiersz pliku ma zawierać 4 liczby oddzielone średnikami:

- wartość punktu α, dla którego obliczane są wartości obu algorytmów,
- wartość obliczoną pierwszym algorytmem,
- wartość obliczoną drugim algorytmem,
- błąd.

Następnie przenieś wyniki z pliku do arkusza kalkulacyjnego i posortuj je wg kolumny zawierającej błędy. Kiedy mamy do czynienia z największymi błędami? [a].

[a] Wartości wielomianów obliczaj w arytmetyce `float` — po każdym działaniu trzeba dokonać rzutowania na `float`, bo inaczej całe wyrażenie jest liczone w `double`, a tylko wynik zapisywany do `float`. Błędy bezwzględne i względne obliczaj w `double`

Zadanie 128. Dane jest ciąg wielomianów zdefiniowany rekurencyjnie[a]

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_{k+1}(x) &= 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x) \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Można udowodnić, że układ $H_0, H_1, \ldots H_n$ jest bazą Π_n. Wzorując się na przedstawionym algorytmie Clenshaw'a napisz algorytm obliczający wartość w punkcie α wielomianu zapisanego w tej bazie.

[a] Są to tzw. wielomiany Hermite'a.

Zadanie 129. Dane jest ciąg wielomianów zdefiniowany rekurencyjnie

$$\begin{aligned} P_0(x) &= A, \\ P_1(x) &= Bx + C, \\ P_{k+1}(x) &= (a_k x + b_k)P_k(x) - c_k P_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

gdzie A, B, C, a_i, b_i, c_i są danymi parametrami.[a] Załóżmy, że układ $P_0, P_1, \ldots P_n$ jest bazą Π_n. Wzorując się na algorytmie Clenshaw'a napisz algorytm obliczający wartość w punkcie α wielomianu zapisanego w tej bazie.

[a] Przy pewnych założeniach o parametrach A, B, C, a_i, b_i, c_i wielomiany P_n są tzw. wielomianami ortogonalnymi.

Zadanie 130. Zaprogramuj w języku C algorytm obliczania wartości wielomianu zapisanego w bazie Lagrange'a. Program ma być podzielony na funkcje tak, by uniknąć zbędnych operacji podczas obliczania wartości wielomianu dla wielu punktów. Pamiętaj aby tak zaprogramować algorytm, by obliczał wartość wielomianu również w węzłach. Przetestuj jego działanie dla wielomianu

$$w(x) = -2x^2 + 3x - 1,$$

węzłów $-2, 0, 1, 2$, oraz 17 punktów tworzących równomierną siatkę w przedziale $[-2, 2]$. Poprawność działania sprawdź przez porównanie wyników z wynikami obliczonymi algorytmem Hornera w bazie naturalnej.

Zadanie 131. Dany jest wielomian w zapisany w bazie Lagrange'a. Napisz algorytm obliczający $w'(\alpha)$ w zadanym punkcie α. Analizę zadania rozpocznij od postaci podanej na wykładzie $w(\alpha) = \pi(\alpha)\sigma(\alpha)$. Oblicz koszt algorytmu.

Zadanie 132.

1. Niech $\{u_i\}_{i=0}^n$ będzie bazą Π_n, a $[a, b]$ ustalonym przedziałem. Dane są wielomiany

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i(x) , \qquad \widetilde{w}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(1 + \varepsilon_i)u_i(x),$$

gdzie $|\varepsilon_i| \leq K\nu$ dla pewnej stałej K. Załóżmy, że $\inf_{x\in[a,b]} |w(x)| > 0$. Wykaż, że dla każdego $x \in [a, b]$

$$\frac{|w(x) - \widetilde{w}(x)|}{|w(x)|} \leq K\nu C(\{u_i\}, [a, b], n)\frac{\|w\|_{[a,b]}}{\inf_{x\in[a,b]} |w(x)|}.$$

2. Na podstawie punktu 1., tabeli z miarami skośności oraz twierdzeń dotyczących jakości algorytmów oszacuj błędy względne na przedziale $[-1, 1]$ wytworzone przez algorytm Hornera podczas obliczania wartości wielomianu $w(x) = 2x^{10} + 1$.

Zadanie 133. Dane są węzły $x_0 = -4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 9$, $x_7 = 11$. Podaj taką ich permutację $x_{p(0)}$, $x_{p(1)}$, $x_{p(2)}$, $x_{p(3)}$, $x_{p(4)}$, $x_{p(5)}$, $x_{p(6)}$, $x_{p(7)}$, że ciąg $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$, $p(5)$, $p(6)$, $p(7)$ jest ciągiem van der Corput'a.

Zadanie 134. Niech $n = 2^k$ oraz $p(0), p(1), \ldots, p(n-1)$ będzie ciągiem van der Corput'a. Napisz funkcję, która w tablicy `p` umieszcza wartości $p(i)$ dla $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Użyj poniższego nagłówka funkcji.

```
//p - tablica, w ktorej bedzie zapisana permutacja,
//2^k jest liczba elementow tej tablicy
void wyznacz_perm(int *p,int k);
```

Podczas kodowania staraj się unikać zbędnych działań, w szczególności wielokrotnego wywoływania funkcji `pow`. Przetestuj działanie funkcji dla $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ wypisując tablice w `main()`.

5 Algorytmy zamiany bazy

Zadanie 135. Dla węzłów $x_0 = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ wypisz funkcje N_0, N_1, N_2, N_3, gdzie

$$N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Zadanie 136. Dane są węzły $x_0 = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ oraz współczynniki $d_0 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$.

1. Wypisz poniższe funkcje

$$\begin{aligned} &l_0^{(0)}, \\ &l_0^{(1)}, \quad l_1^{(1)}, \\ &l_0^{(2)}, \quad l_1^{(2)}, \quad l_2^{(2)}, \end{aligned}$$

gdzie $l_i^{(k)}(x) = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

2. Korzystając ze wzoru

$$w_k(x) = \sum_{i=0}^{k} d_i l_i^{(k)}(x)$$

wypisz wielomiany w_0, w_1, w_2.

3. Korzystając ze wzoru

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{d_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)}$$

oblicz liczby b_1, b_2.

4. Sprawdź, że zachodzą równości

$$w_k(x) = w_{k-1}(x) + b_k N_k(x)$$

dla $k = 1, 2$, gdzie $N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$.

Zadanie 137. Dane są węzły

$$x_i = a + ir,$$

dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Zmodyfikuj pierwszy z przedstawionych algorytmów zamiany bazy Lagrange'a na Newtona tak, aby wykorzystywał informację o tym, że węzły są równoodległe.

Zadanie 138. Zbuduj tabelę różnic dzielonych dla wielomianu $w(x) = x^2 - 4x$ oraz węzłów $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$. Wskaż w niej różnice dzielone zerowego, pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu.

Zadanie 139. Zbuduj tabelę różnic dzielonych dla wielomianu $w(x) = x^2 - 2x$ oraz węzłów $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Zastosuj specjalny algorytm różnic dzielonych dla węzłów równoodległych.

Zadanie 140. Zapisz w odpowiedniej bazie Newtona poniższy wielomian

$$w(x) = 7l_0(x) + 5l_1(x) - 3l_2(x) + 9l_3(x),$$

gdzie l_0, l_1, l_2, l_3 są wielomianami bazowymi Lagrange'a dla węzłów $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 8$. Zastosuj algorytm różnic dzielonych.

Zadanie 141. Oblicz $w_{x_0,x_1,\ldots,x_p}$ dla wielomianu

$$w(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

gdzie $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Liczby rzeczywiste $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są różne.

Zadanie 142. Danych jest $n + 1$ różnych punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ na osi rzeczywistej. Niech

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Udowodnij, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1.$$

Zadanie 143. Zapisz algorytm znajdowania różnic dzielonych $\omega_{x_0}, \ldots, \omega_{x_0,\ldots,x_n}$ dla węzłów równoodległych. Algorytm ma działać *in–situ*, tzn. początkowo w $(n + 1)$-elementowej tablicy `w` mają być umieszczone wartości $w(x_i)$, a na końcu różnice dzielone. Podaj koszt.[a]

[a] Zwróć uwagę, że powyżej została użyta grecka litera ω, a nie litera w, co zgodnie z oznaczeniami na wykładzie oznacza różnice dzielone obliczane specjalnym algorytmem dla węzłów równoodległych, a nie algorytmem dla dowolnych węzłów.

Zadanie 144. Zapisz algorytm różnic dzielonych tabelki

węzły:	n	$n-1$	$n-2$	$\ldots$	1	0
odpowiadające wartości wielomianu:	y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_{n-1}	y_n

.

Liczby $y_0, y_1, \ldots, y_n$ są dane i umieszczone w tablicy `y`. Na koniec, w tej samej tablicy, mają być umieszczone nie same różnice dzielone $\omega_{x_0,\ldots,x_k}$, ale współczynniki wielomianu w docelowej bazie Newtona, czyli liczby $\frac{\omega_{x_0,\ldots,x_n}}{k!h^k}$, gdzie h oznacza odległość między węzłami. Rozwiązanie, w którym w osobnej zmiennej przechowuje się liczby $k!$ lub $k!h^k$ jest tu uznane za niedopuszczalne ze względu na łatwość uzyskania nadmiaru. Postaraj się zminimalizować koszt.

Zadanie 145. Dane są różne węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Niech $w_{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}}$ oznacza różnicę dzieloną l-tego rzędu, gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ są takie, że wyznaczają one poprawne indeksy węzłów. Udowodnij, że

$$w_{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}} = \sum_{i=k}^{k+l} \frac{d_i}{\prod\limits_{\substack{j=k \\ j \neq i}}^{k+l} (x_i - x_j)}.$$

Zadanie 146. Dane są różne węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Niech $w_{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}}$ oznacza różnicę dzieloną l-tego rzędu, gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ są takie, że wyznaczają one poprawne indeksy węzłów. Niech $p(k), p(k+1), \ldots, p(k+l)$ będzie dowolną permutacją liczb $k, k+1, \ldots, k+l$. Udowodnij, że

$$w_{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}} = w_{x_{p(k)}, x_{p(k+1)}, \ldots, x_{p(k+l)}}.$$

Zadanie 147. Udowodnij, że dla węzłów równoodległych $x_i = a + ih$, gdzie $h > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$ zachodzi

$$w_{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}} = \frac{\omega_{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}}}{l! h^l}.$$

dla poprawnych indeksów k i l.

Zadanie 148. Znane są współczynniki $d_0, d_1, \ldots, d_n$ wielomianu zapisanego w bazie Lagrange'a:

$$w(x) = d_0 l_0(x) + d_1 l_1(x) + \ldots + d_n l_n(x),$$

gdzie l_i są funkcjami bazowymi Lagrange'a opartymi na węzłach $x_i = a + i(i+1)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Napisz algorytm znajdujący współczynniki $b_0, b_1, \ldots, b_n$ tego samego wielomianu zapisanego w bazie Newtona o węzłach $x_i = a + i(i+1)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Postaraj się zminimalizować koszt.

Zadanie 149. Znane są współczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_n$ wielomianu zapisanego w bazie naturalnej

$$w(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Napisz algorytm znajdujący współczynniki $d_0, d_1, \ldots, d_n$ tego samego wielomianu zapisanego w bazie Lagrange'a:

$$w(x) = d_0 l_0(x) + d_1 l_1(x) + \ldots + d_n l_n(x),$$

gdzie l_i są funkcjami bazowymi Lagrange'a opartymi na węzłach $0, -1, -2, \ldots, -n$. Oblicz koszt.

Zadanie 150. Zapisz algorytm przejścia z postaci potęgowej wielomianu stopnia n do postaci w bazie

$$1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \ldots, (x - \alpha)^n.$$

Algorytm ma działać *in situ*, tzn. dane wejściowe umieszczane są w tablicy $(n+1)$–wymiarowej, tam też mają być umieszczone wyniki. W algorytmie można posługiwać się jedynie kilkoma zmiennymi pomocniczymi — koszt pamięciowy zatem ma wynosić $O(n)$. Oblicz koszt czasowy algorytmu.

Zadanie 151. Dany jest wielomian stopnia n w postaci naturalnej. Wyznacz jego współczynniki w bazie Newtona. Podaj algorytm i oblicz jego koszt.

Zadanie 152. Dany jest wielomian stopnia n w bazie Newtona. Wyznacz jego współczynniki w bazie naturalnej. Podaj algorytm i oblicz jego koszt.

Zadanie 153. Przypuśćmy, że mamy l–krotnie obliczyć wartość $w(x)$ danego w postaci Newtona wielomianu w stopnia n. Dla jakiego l bardziej opłaca się przejść do bazy naturalnej i tam l–krotnie obliczać $w(x)$ algorytmem Hornera. Przyjmij, że jedno działanie mnożenia jest wykonywane p–krotnie dłużej, niż jedno działanie dodawania lub odejmowania.[a]

[a] Koszt algorytmu zamiany bazy z Newtona do naturalnej wynosi

$$\frac{n(n+1)}{2}(\text{ ops} + \text{opm}).$$

6 Obliczanie pochodnych wielomianu

Zadanie 154. Dany jest wielomian $w(x)$ zapisany w bazie naturalnej. Jak przy pomocy algorytmu Hornera obliczać kolejne wyrazy rozwinięcia w szereg Taylora wielomianu w stopnia n w punkcie α, tzn. liczby $\frac{1}{j!}w^{(j)}(\alpha)$, $j = 1, \ldots, n$?[a] Zaproponuj algorytm i oblicz jego koszt.

[a] Liczby $\frac{1}{j!}w^{(j)}(\alpha)$ noszą też miano *unormowanych pochodnych*.

Interpolacja

7 Różne sformułowania zadania interpolacji

Zadanie 155. Przeczytaj poniższy opis zadania interpolacji i wskaż

1. przestrzeń F funkcji „trudnych”,
2. przestrzeń V funkcji „łatwych”,
3. funkcję interpolowaną i interpolującą,
4. węzły interpolacyjne,
5. tabelkę interpolacyjną,
6. równania interpolacyjne.

Pewnego dnia dokonano 12 pomiarów temperatury. Pierwszy pomiar odbył się o godzinie 0:00 i następne dokładnie co dwie godziny. Otrzymano kolejno poniższe wyniki.

$5.5°C$,	$4.5°C$,	$4.5°C$,	$4.2°C$,	$5.5°C$,	$8.4°C$,
$10.5°C$,	$9.3°C$,	$8°C$,	$7.3°C$,	$6.5°C$	$5.9°C$

Funkcję $T(x)$ określającą wartość temperatury w ciągu tego dnia przybliżono wielomianem $w(x)$ stopnia co najwyżej 11 w taki sposób, że wartości funkcji $T(x)$ i wielomianu $w(x)$ dla argumentów odpowiadającym czasom pomiarów są identyczne.

Zadanie 156. Przeczytaj poniższy opis zadania interpolacji i wskaż

1. przestrzeń F funkcji „trudnych”,
2. przestrzeń V funkcji „łatwych”,
3. funkcję interpolowaną i interpolującą,
4. węzły interpolacyjne i ich krotności,
5. tabelkę interpolacyjną,
6. równania interpolacyjne.

Obserwowano ruch ciała po torze będącym linią prostą. Dokonano pięciu pomiarów odległości od punktu początkowego oraz prędkości chwilowych ciała w odstępach sekundowych czasu. Położenie, w którym ciało znalazło się podczas pierwszego pomiaru przyjęto za punkt początkowy. Otrzymano kolejno poniższe wyniki.

$0mm$	$130mm$	$200mm$	$380mm$	$500mm$
$0.15\frac{m}{s}$	$0.095\frac{m}{s}$	$0.11\frac{m}{s}$	$0.12\frac{m}{s}$	$0.14\frac{m}{s}$

Funkcję $s(t)$ wyrażającą zależność odległości względem punktu początkowego od czasu przybliżono wielomianem $p(t)$ stopnia co najwyżej 9 w taki sposób, że wartości funkcji $s(t)$ i wielomianu $p(t)$ dla argumentów odpowiadającym czasom pomiarów są identyczne oraz wartości pochodnej $p'(t)$ w czasach pomiaru są równe zanotowanym prędkościom.

8 Interpolacja Lagrange'a

Zadanie 157. Rozpatrzmy zadanie interpolacji funkcji $f(x) = \log_2(x)$ w węzłach $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 16$. Zapisz to zadanie w postaci tabelki interpolacyjnej.

Zadanie 158. Rozpatrzmy zadanie interpolacji funkcji $f(x) = \log_2(x)$ w węzłach $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 16$. Napisz równania interpolacyjne.

Zadanie 159. Dana jest tabelka interpolacyjna dla funkcji ciągłej f.

2	3	4	5
1	0	0	0

Zapisz wielomian interpolacyjny w bazie Lagrange'a i użyj go do obliczenia przybliżenia $f(2.5)$.

Zadanie 160. Funkcja ciągła f jest zadana tabelką

7	8	9	10
3	1	1	9

Oblicz przybliżenie $f(9.5)$ używając interpolacji Lagrange'a. Do wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego użyj algorytmu różnic dzielonych.

Zadanie 161. Dana jest tabelka różnic dzielonych

$$\begin{array}{l|lllll}
x_0 & f_{x_0} & & & & \\
 & & f_{x_0,x_1} & & & \\
x_1 & f_{x_1} & & f_{x_0,x_1,x_2} & & \\
 & & f_{x_1,x_2} & & & \\
x_2 & f_{x_2} & & f_{x_1,x_2,x_3} & & \\
\vdots & \vdots & f_{x_2,x_3} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots\ f_{x_0,\ldots,x_n} \\
\vdots & \vdots & f_{x_{n-3},x_{n-2}} & & & \\
x_{n-2} & f_{x_{n-2}} & & f_{x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1}} & & \\
 & & f_{x_{n-2},x_{n-1}} & & & \\
x_{n-1} & f_{x_{n-1}} & & f_{x_{n-2},x_{n-1},x_n} & & \\
 & & f_{x_{n-1},x_n} & & & \\
x_n & f_{x_n} & & & &
\end{array}$$

Które z elementów tabelki są współczynnikami wielomianu Lagrange'a w bazie Newtona interpolującego funkcję f przy następującym uporządkowaniu węzłów $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0, x_n$?

Zadanie 162. Niech n będzie liczbą całkowitą większą od zera. Czy wielomian interpolacyjny oparty na $n+1$ węzłach musi być stopnia n?

Zadanie 163. Danych jest $n+1$ różnych punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ na osi rzeczywistej. Definiujemy

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Udowodnij, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz $p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^p\, l_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } p = 0,\\ x^p & \text{w p.p.}\end{cases}$$

oraz, że

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^p l_k(0) = \begin{cases} 1 & p = 0,\\ 0 & p = 1, \ldots, n,\\ (-1)^n x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n & p = n+1.\end{cases}$$

Zadanie 164. Danych jest $n+1$ różnych punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ na osi rzeczywistej. Definiujemy

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Udowodnij, że jeśli $N(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$, to

$$l_k(x) = \begin{cases} \dfrac{N(x)}{(x - x_k)N'(x_k)} & \text{gdy } x \neq x_k,\\ 1 & \text{w p.p,}\end{cases}$$

Zadanie 165. Niech L będzie wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a dla tabelki $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{n}$. Zakładamy, że węzły są równoodległe z krokiem $h > 0$, czyli $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Wykaż, że jeśli $x = x_0 + th$ dla pewnej liczby rzeczywistej t, to

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} (t - j).$$

Zadanie 166. Niech m i n będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Udowodnij równości [a]

1. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(2n-k)} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(2n)!},$$
2. $$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \frac{\binom{m}{k}}{m+1-k} = \frac{1}{m+1},$$
3. $$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \binom{m}{k}\binom{n+m}{m}}{n+k+1} = \frac{1}{n+m+1}.$$

[a] Wskazówki

1. Zastosuj interpolację Lagrange'a na przedziale $[-1, 1]$ w węzłach postaci $-1 + \frac{2k}{n}$ do funkcji $f(x) = 1$.
2. Interpoluj funkcję $f(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(i - x)$ w punkcie $x = n + m + 1$. Rozpatrz równoodległe węzły $0, 1, 2, \ldots$.
3. Weź funkcję oraz węzły jak w poprzednim punkcie i $x = -1$.

Zadanie 167. Dana jest funkcja $f(x) = (x-1)(x-2)$. Oblicz

1. $\|f\|_{[0,1]}$,
2. $\|f\|_{[1,2]}$,
3. $\|f\|_{[1,3]}$.

Zadanie 168. Wielomian $w(x) = (e-1)x + 1$ jest wielomianem Lagrange'a interpolującym funkcję $f(x) = e^x$ w węzłach $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

1. Wyznacz resztę interpolacyjną.
2. Oblicz wartość reszty interpolacyjnej w punkcie $x = \frac{1}{2}$.
3. Oblicz błąd interpolacji na przedziale $[0,1]$.
4. Oblicz błąd interpolacji na przedziale $[-1,2]$.

Zadanie 169. Dane są węzły $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Niech

$$N_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

oraz h oznacza maksymalną odległość między sąsiednimi węzłami

$$h = \max_{i=0,1,\ldots,n-1}(x_{i+1} - x_i).$$

Udowodnij, że

$$\|N_{n+1}\|_{[a,b]} \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}.$$

Zadanie 170. Dany jest przedział $[a,b]$ zawierający wszystkie węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Rozpatrujemy zadanie interpolacji Lagrange'a dla tych węzłów. Udowodnij, że błąd interpolacji w przedziale $[a,b]$ dla funkcji

$$f(x) = M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

gdzie M jest dowolną stałą dodatnią wyraża się wzorem

$$R = \frac{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!}\|N_{n+1}\|_{[a,b]}.$$

Zadanie 171. Udowodnij, że dla dowolnych różnych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ oraz przedziału $[a,b]$ zawierającego wszystkie węzły, wyrażenie

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$$

jest najmniejsze dla węzłów Czebyszewa w $[a,b]$ i jego wartością jest wtedy

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}.$$

Zadanie 172. Z jaką dokładnością można policzyć $\ln 100.5$ stosując interpolację Lagrange'a i mając dane wartości $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$?

Zadanie 173. Z jaką dokładnością można obliczyć $f(\frac{1}{2})$, gdzie $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{\sqrt{3}})$ mając dane wartości $f(x_0)$, $f(x_1)$ i $f(x_2)$? Liczby x_0, x_1 oraz x_2 są miejscami zerowymi trzeciego wielomianu Czebyszewa, zaś do obliczenia przybliżenia $f(\frac{1}{2})$ stosujemy interpolację Lagrange'a.

Zadanie 174. Znajdź wielomian interpolujący funkcję $f(x) = \sin(\pi(2x+1))$ w trzech równoodległych węzłach na przedziale $[-\frac{1}{2}, 0]$. Oszacuj resztę interpolacyjną dla $x = 0$ oraz $x = -\frac{1}{3}$. Zastosuj interpolację Lagrange'a.

Zadanie 175. Wyznacz wielomian co najwyżej drugiego stopnia interpolujący funkcję $f(x) = \sin 2x$ w trzech węzłach Czebyszewa z przedziału $[-1,1]$. Oszacuj błąd interpolacji dla $x \in [-1,1]$.

Zadanie 176. Czy funkcję $f(x) = \cos 2x$ można przybliżyć wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a L stopnia nie większego niż n tak, aby

$$\sup_{x\in[0,2]}|f(x) - L(x)| \leq 0.01?$$

Jeśli tak, to ile wynosi n i jak należy wybrać węzły interpolacyjne? Jak zmieni się odpowiedź, gdy 0.01 zastąpimy liczbą 10^{-6}?

Zadanie 177. Znajdź n oraz węzły interpolacji tak, aby dla funkcji $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2)$ wielomian interpolacyjny Lagrange'a L_n stopnia co najwyżej n spełniał warunek

$$\|f - L_n\|_{[-3,-1]} < 10^{-4}.$$

Zadanie 178. Czy wielomian interpolacyjny Lagrange'a L stopnia co najwyżej 7 oparty na równoodległych węzłach z przedziału $[-1,1]$ przybliżający funkcję $f(x) = e^x$ spełnia nierówność

$$\|f - L\|_{[-1,1]} \leq 5 \cdot 10^{-5}?$$

Zadanie 179. Podaj algorytm wyznaczania możliwie najmniejszej liczby n takiej, że wielomian interpolujący funkcję $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$ w zerach wielomianu Czebyszewa ma dla każdego $x \in [-1,1]$ resztę interpolacyjną mniejszą od zadanego $\varepsilon > 0$. Zastosuj interpolację Lagrange'a.

Zadanie 180. Dana jest funkcja $f \in C^2[a,b]$. Przedział $[a,b]$ podzielono na N równych części przy pomocy punktów

$$x_0 = a,$$
$$x_j = hj + x_0,$$

gdzie $h = \frac{1}{N}(b-a)$ oraz $j = 1,\ldots,N$. Używając punktów x_j jako węzłów przybliżono funkcję f łamaną. Oszacuj błąd interpolacji na przedziale $[a,b]$ w zależności od h i normy supremum pochodnych funkcji f.

Zadanie 181. Napisz algorytm wyznaczający przybliżenie $\|\Lambda_n\|_{[a,b]}$ przy zadanych węzłach z przedziału $[a, b]$. Funkcja Λ_n oznacza funkcję Lebesgue'a daną wzorem

$$\Lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|.$$

Zadanie 182. Funkcje

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0], \\ 1 & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0], \\ 1 - \frac{2}{\pi}x & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

interpolujemy w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wielomianami Lagrange'a w węzłach

$$x_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Zbuduj te wielomiany i podaj oszacowanie błędów.

Zadanie 183. Dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

postanowiono zbudować wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na czterech węzłach Czebyszewa w przedziale $[-1, 1]$. Oszacuj błąd interpolacji.

Zadanie 184. Niech L_{k-1} będzie wielomianem interpolacyjnym pewnej funkcji dla węzłów $x_0, \ldots, x_{k-1}$, zaś L_k dla węzłów $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k$. Podaj zależność L_k od L_{k-1}.

Zadanie 185. Wielomian postaci

$$w(x) = x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

interpolujemy wielomianem opartym na $n+1$ węzłach Czebyszewa w $[-1, 1]$. Pokaż, że dla $|x| \leq 1$ moduł reszty interpolacyjnej jest nie większy niż 2^{-n}, a dla $|x| > 1$ nie mniejszy niż $(|x| - 1)^{n+1}$.

Zadanie 186. Niech L będzie wielomianem Lagrange'a dla funkcji $f \in C^{n+1}[a, b]$ opartym na węzłach

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Udowodnij, że

$$\|f' - L'\| \leq \frac{1}{2} h^n \|f^{(n+1)}\|,$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę supremum w przedziale $[a, b]$ oraz $h = \max\limits_{j=0,\ldots,n-1} |x_{j+1} - x_j|$.

Zadanie 187. Na przykładzie funkcji $f(x) = |x|$ wykaż, że wielomiany Lagrange'a interpolujące funkcję f nie muszą zbiegać do f na przedziale $[-1, 1]$ przy stopniu wielomianu dążącym do nieskończoności i węzłach równoodległych z przedziału [-1,1].

Zadanie 188. Udowodnij, że

$$f_{x_0,\ldots,x_n} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & f_0 \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & f_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & f_n \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix}},$$

gdzie $f_0, f_1, \ldots, f_n$ oznaczają wartości funkcji f odpowiednio w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

9 Interpolacja Hermite'a

Zadanie 189. Wyznacz wielomian interpolacyjny Hermite'a dla funkcji f oparty na danych węzłach.

1. $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $k_0 = k_1 = 2$,
2. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $k_0 = k_2 = 1$, $k_1 = 2$
3. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $x_1 = e$, $k_0 = 2$, $k_1 = 3$.

Zadanie 190. Wyznacz wielomian interpolacyjny Hermite'a stopnia nie większego niż 5 dla tabelki

x	f	f'	f''
0	0	1	2
1	1	2	–
2	4	–	–

.

Zadanie 191. Znajdź wielomian stopnia co najwyżej drugiego interpolujący funkcję $f(x) = \frac{1}{2}\ln(2x-1)$ w węźle $x_0 = 1$ krotności 3. Podaj oszacowanie błędu interpolacji w przedziale $[1, 2]$.

Zadanie 192. Wyznacz wielomian interpolacyjny H dla funkcji $f(x) = x^5$ spełniający warunki

$$\begin{aligned} &H(0) = f(0), \quad &&H'(0) = f'(0),\\ &H(1) = f(1), &&H'(1) = f'(1),\\ &H(2) = f(2). \end{aligned}$$

Oblicz z dokładnością do 0.005 błąd interpolacji dla $x \in [0, 2]$. [a]

[a] Wskazówka: wykorzystaj fakt, że $\|\widetilde{N}_5\|_{[0,5]} \approx 0.43$ z dokładnością do 0.005, gdzie
$$\widetilde{N}_5(x) = x^2(x-1)^2(x-2).$$

Zadanie 193. Funkcję $f(x) = \dfrac{1}{\cos(\pi x)}$ interpolujemy na przedziale $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

- w dwóch pojedynczych węzłach $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$,
- w jednym podwójnym węźle 0.

1. Korzystając z wzorów na resztę interpolacyjną wskaż, który rodzaj interpolacji wydaje się lepszy.
2. Wyznacz oba wielomiany interpolacyjne, korzystając z interpretacji geometrycznej.
3. Oblicz <u>dokładnie</u> błąd interpolacji w obu przypadkach.

Zadanie 194. Dana jest funkcja $f(x) = \cos x$.

1. Znajdź wielomian stopnia co najwyżej pierwszego interpolujący f w pojedynczych węzłach 0 i 2π. Oblicz <u>dokładnie</u> błąd interpolacji na przedziale $[0, 2\pi]$.
2. Dobierz podwójny węzeł z przedziału $[0, 2\pi]$ tak, by błąd interpolacji Hermite'a na przedziale $[0, 2\pi]$, wielomianem stopnia co najwyżej pierwszego w tym węźle, był równy błędowi z punktu 1. Wskaż trzy możliwości wyboru węzła.

Zadanie 195. Dla funkcji $f(x) = \sin x$ budujemy wielomian interpolacyjny Hermite'a H oparty na pojedynczych węzłach $x_0 = 0$, $x_2 = 2$ oraz węźle $x_1 = 1$ krotności k. Jak należy wybrać krotność k, aby dla wielomianu H możliwie niskiego stopnia zachodził warunek $|H(x) - f(x)| < \varepsilon$ dla dowolnego $x \in [0, 2]$?

Zadanie 196. Dla funkcji $f(x) = \cos x$ znajdź wielomian interpolacyjny oparty na węzłach $x_0 = 0$, $x_1 = \alpha \in (0, \pi]$ o krotnościach $m_0 = m_1 = 2$. Jak dobrać α, by oszacowanie błędu interpolacji na przedziale $[0, \pi]$ było możliwie najlepsze?

Zadanie 197. Funkcję $f(x) = \sin x + \cos x$ interpolujemy wielomianem Hermite'a H stopnia nie większego niż 5 spełniającym warunki

$$H^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 0, 1,$$

gdzie $0 \le x_0 < x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$.

1. Sprawdź, czy $f(x) \le H(x)$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Czy istnieje $x^* \in [0, \frac{\pi}{2}]$ nie będący węzłem taki, że $f(x^*) = H(x^*)$?

Zadanie 198. Niech $z_i(p)$, $i = 1, \ldots, p$ oznacza i-te miejsce zerowe wielomianu Czebyszewa stopnia p w przedziale $[-1, 1]$. Dane są dwie liczby całkowite $m \ge 1$ oraz $k \ge 2$. Wyjaśnij, który z wielomianów interpolacyjnych stopnia

$$n = k(m+1) - 1$$

funkcji $f \in C^{n+1}[-1, 1]$ ma lepsze oszacowanie błędu na przedziale $[-1, 1]$:

1. oparty na jednokrotnych węzłach $x_i = z_i(k(m+1))$ dla $i = 1, 2, \ldots k(m+1)$,
2. oparty na k-krotnych węzłach $x_i = z_i(m+1)$ dla $i = 1, 2, \ldots, (m+1)$.

Zadanie 199. Dany jest układ $\{x_i, y_i, y_i'\}_{i=0,\ldots,m}$, gdzie $x_i, y_i, y_i' \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez H wielomian interpolacyjny Hermite'a stopnia $2n+1$ spełniający warunki $H(x_i) = y_i$, $H'(x_i) = y_i'$ dla $i = 0, \ldots, m$.

1. Napisz program wyznaczający współczynniki w bazie Newtona wielomianu H.
2. Zapisz postać wielomianu H używając oznaczeń współczynników z programu.
3. Podaj postać reszty interpolacyjnej dla dowolnej funkcji $f \in C^{2m+2}[a,b]$ na odcinku $[a,b]$ oraz jej oszacowanie w przypadku węzłów Czebyszewa z $[a,b]$.

Zadanie 200. Danych jest $m+1$ różnych punktów $x_0, x_1, \ldots, x_m$ na osi rzeczywistej. Zaproponuj algorytm wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego Hermite'a H dla zadania

$$\begin{aligned} &H^{(s)}(x_0) = y_0^{(s)} \quad \text{dla} \quad s = 1, \ldots, k, \\ &H^{(s)}(x_m) = y_m^{(s)} \quad \text{dla} \quad s = 1, \ldots, k, \\ &H(x_j) = y_j \quad \text{dla} \quad j = 0, \ldots, m, \end{aligned}$$

gdzie $k, m \in \mathbb{N}$ są parametrami, a liczby rzeczywiste $y_0^{(s)}$, $y_m^{(s)}$ dla $s = 1, \ldots, k$ oraz y_j dla $j = 0, \ldots, m$ są dane.

Zadanie 201. Zaprogramuj uogólniony algorytm różnic dzielonych.

Zadanie 202. Dla funkcji $f(x) = \ln x^2$ zaproponuj algorytm

1. wyznaczający możliwie małą liczbę naturalną m oraz dwukrotne węzły interpolacyjne $x_0, x_1, \ldots, x_m$ tak, aby wielomian interpolacyjny Hermite'a oparty na tych węzłach spełniał warunek
$$\max_{-3 \le x \le -1} |f(x) - H_{2n+1}| < 10^{-6},$$
2. wyznaczający współczynniki postaci Newtona wielomianu H_{2n+1},
3. obliczający wartość H_{2n+1} dla danego punktu α.

Zadanie 203. Wykaż, że dla dowolnych liczb $c_0, c_1, \ldots, c_n$ i dowolnych $x_0, x_1, \ldots, x_n$ istnieje dokładnie jeden wielomian H stopnia mniejszego lub równego n, spełniający warunki $H^{(k)}(x_k) = c_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$.

10 Splajny, algorytmy obliczania wartości splajnów w punkcie

Zadanie 204. Dane są funkcje

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{dla } x \ge 0, \\ x^3 + x^2 - 2x & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{dla } x \ge 0, \\ x^3 - x^2 - 2x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

1. Czy obie funkcje f oraz g są splajnami kubicznymi z węzłami $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$?
2. Czy obie funkcje f oraz g są splajnami kubicznymi z węzłami $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$?
3. Czy dla funkcji f można tak dobrać węzły oraz dziedzinę, by była ona splajnem kubicznym lewostronnie swobodnym?
4. Czy dla funkcji g można tak dobrać węzły oraz dziedzinę, by była ona splajnem kubicznym lewostronnie swobodnym?

Zadanie 205. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & \text{dla } x \ge 0, \\ -|x+1| + 1 & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

oraz pięć układów węzłów

(a) $-2, -1, 0,$

(b) $0, 1, 2,$

(c) $-2, -1, 0, 1, 2,$

(d) $-1, -\frac{1}{2}, 0,$

(e) $0, \frac{1}{2}, 1.$

Wskaż te układy węzłów (i uzasadnij dlaczego), dla których funkcja f jest

1. splajnem kubicznym,
2. splajnem kubicznym prawostronnie swobodnym,
3. splajnem kubicznym okresowym.

Zadanie 206. Niech S będzie splajnem k rzędu opartym na węzłach $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Jakie warunki musi on spełniać, by był on równocześnie splajnem rzędu $(k+1)$ opartym na tych samych węzłach?

Zadanie 207. Niech S będzie splajnem k rzędu opartym na węzłach $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, $k > 0$. Jakie warunki musi on spełniać, by był on równocześnie splajnem rzędu $(k-1)$ opartym na tych samych węzłach?

Zadanie 208. Niech $n \geq 1$ oraz punkty x_i będą równoodległe w przedziale $[x_0, x_n)$. Dane są współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i dla $i = 0, 1, ..., n-1$ splajnu kubicznego S zapisanego w lokalnych bazach potęgowych:

$$\begin{aligned} S(x) &= a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \\ &\quad \text{dla} \quad x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, ..., n-1. \end{aligned}$$

Zapisz możliwie tani algorytm obliczania wartości splajnu S w punkcie $x \in [x_0, x_n)$. Wykorzystaj schemat Hornera. Napisz w języku C funkcję, która ten algorytm realizuje i przetestuj ją w funkcji `main`.

Zadanie 209. Niech $n \geq 1$ oraz punkty x_i będą równoodległe w przedziale $[x_0, x_n)$. Dane są współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i dla $i = 0, 1, ..., n-1$ funkcji f określonej na przedziale $[x_0, x_n)$ wzorem

$$\begin{aligned} f(x) &= a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \\ &\quad \text{dla} \quad x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, ..., n-1. \end{aligned}$$

Zapisz możliwie tani algorytm sprawdzania, czy f jest splajnem kubicznym oraz jeśli jest, to jakiego rodzaju (okresowy, prawo-, lewostronnie swobodny, inny). Napisz w języku C funkcję, która ten algorytm realizuje i przetestuj ją w funkcji `main`.

Zadanie 210. Jak można uogólnić pojęcie splajnu okresowego dla splajnów k-tego rzędu, $k \geq 1$?

Zadanie 211. Podaj przykład splajnu kubicznego, który jest równocześnie okresowy i naturalny.

Zadanie 212. Udowodnij, że splajny k-tego rzędu oparte na węzłach $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ tworzą przestrzeń liniową.

Zadanie 213. Dane są węzły równoodległe $x_i = 2i$, $i = 0, 1, 2$. Wyprowadź wzory na B–splajny drugiego rzędu zdefiniowane na tej siatce.

Zadanie 214. Udowodnij, że nośnikiem funkcji $B_i^{(k)}$ jest przedział $[x_i, x_{i+k+1}]$ oraz, że dla dowolnego $x \in (x_i, x_{i+k+1})$ zachodzi nierówność $B_i^{(k)}(x) > 0$.

Zadanie 215. Udowodnij, że

$$\forall_{x \in (x_0, x_n)} \sum_{i=-k}^{n-1} B_i^{(k)}(x) = 1.$$

Zadanie 216. Dana jest siatka podstawowa węzłów

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$$

1. Jaki jest wymiar przestrzeni V wszystkich splajnów pierwszego rzędu zdefiniowanych na tej siatce?
2. Podaj bazę B–splajnów przestrzeni V.
3. Zapisz w tej bazie splajn $S(x) = x$ określony na $[0, 4]$.

Zadanie 217. Zapisz algorytm de Boora w przypadku węzłów równoodległych. Czy zmieni się jego koszt?

11 Interpolacja splajnami kubicznymi

Zadanie 218. Dana jest siatka węzłów

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$$

Czy splajn $S(x) = x$ interpoluje funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin(\frac{\pi}{4}x) & \text{dla } x \in [-\infty, 2], \\ 2\sin(\frac{\pi}{4}x - \pi) + 4 & \text{dla } x \in [2, \infty] \end{cases}$$

w węzłach tej siatki?

Zadanie 219. Znajdź kubiczną, okresową funkcję sklejaną opartą na węzłach $\{0, 1, 2\}$ i interpolującą w tych węzłach odpowiednio wartości $\{0, 5, 0\}$. Funkcję sklejaną przedstaw w lokalnych bazach potęgowych.

Zadanie 220. Znajdź kubiczną, obustronnie swobodną funkcję sklejaną opartą na węzłach $\{-1, 0, 1\}$ i interpolującą w tych węzłach tabelkę wartości $\{1, 3, 2\}$.

Zadanie 221. Znajdź kubiczny splajn okresowy interpolujący funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [0, 1), \\ (x-2)^2 & \text{dla } x \in [1, 3), \\ (x-4)^2 & \text{dla } x \in [3, 4], \end{cases}$$

w węzłach $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Splajn przedstaw w lokalnych bazach potęgowych.

Zadanie 222. Znajdź hermitowski splajn kubiczny S interpolujący tabelkę

-1	0	1
1	3	2

spełniający warunki $S'(-1) = S'(1) = 0$. Splajn przedstaw w lokalnych bazach potęgowych.

Zadanie 223. Niech zależności

$$S(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3, \quad 0 \le t \le 1,$$
$$S(1+u) = E + Fu + Gu^2 + Hu^3, \quad 0 \le u \le 1,$$

przedstawiają reprezentacje (w lokalnych bazach potęgowych) prawostronnie swobodnego splajnu kubicznego na przedziale $[0, 2]$ spełniającego prawostronny warunek Hermite'a $S'(2) = 1$ i interpolującego tabelkę

0	1	2
1	0	$1.$

Zapisz układ równań liniowych, jakie muszą spełniać niewiadome A, B, C, D, E, F, G, H.

Zadanie 224. Czy istnieje splajn kubiczny S oparty na węzłach -2, -1, 0, 1, 2 spełniający warunki

$$S^{(p)}(-2) = S^{(p)}(2) = 0 \text{ dla } p = 0, 1, 2,$$
$$S(0) = 1.$$

Czy ten splajn jest wyznaczony jednoznacznie?

Zadanie 225. Dana jest funkcja

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + \ln x - \tfrac{3}{2}.$$

Ile węzłów wystarczy, by splajn kubiczny obustronnie swobodny przybliżał funkcję f na przedziale $[1, \frac{3}{2}]$ z błędem nie większym niż $\varepsilon = \frac{1}{36}$?

Zadanie 226. Funkcję $f(x) = \frac{x}{x+1}$ interpolujemy na przedziale $[9, 19]$ naturalnym splajnem kubicznym w węzłach równoodległych. Wyznacz liczbę węzłów takich, by oszacowanie reszty interpolacyjnej było nie większe niż $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

Zadanie 227. Napisz równania pozwalające wyznaczyć współczynniki splajnu kubicznego obustronnie swobodnego interpolującego funkcję $f(x) = \ln x$ w węzłach 1, e, e^2. Oszacuj wielkość reszty interpolacyjnej.

Zadanie 228. Funkcję $f(x) = \ln(x+1.5)$ chcemy przybliżyć z błędem maksymalnym nie większym niż 10^{-2} w przedziale $[-1, 1]$ funkcją interpolacyjną opartą na możliwie małej liczbie węzłów. Czy lepiej użyć do tego wielomianu interpolacyjnego, czy interpolacyjnej, kubicznej, naturalnej funkcji sklejanej?

Zadanie 229. Funkcję $f(x) = x^{10}$ chcemy przybliżyć z błędem maksymalnym nie większym niż 10^{-6} w przedziale $[-1, 1]$ funkcją interpolacyjną opartą na możliwie małej liczbie węzłów. Czy lepiej użyć do tego wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a, czy naturalnego splajnu kubicznego? Wyznacz zalecane węzły oraz funkcję interpolującą.

Zadanie 230. Dana jest funkcja $f(x) = e^{2x}$ oraz węzły $x_0 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{1}{2}$.

1. Napisz równania pozwalające wyznaczyć współczynniki wielomianu Lagrange'a L interpolującego funkcję f w węzłach x_0, x_1 i x_2.
2. Napisz równania pozwalające wyznaczyć współczynniki wielomianu Hermite'a H interpolującego funkcję f w pojedynczym węźle x_0 oraz podwójnym węźle x_1.
3. Napisz równania pozwalające wyznaczyć współczynniki splajnu kubicznego S (w lokalnych bazach potęgowych), obustronnie swobodnego, interpolującego funkcję f w węzłach x_0, x_1 i x_2.
4. Podaj oszacowania błędów dla powyższych zadań interpolacji w najmniejszym przedziale zawierającym wszystkie węzły x_0, x_1 i x_2.

Równania zapisz używając symboli L, H, S.

Zadanie 231. Dla danych węzłów $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ i wartości $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ budujemy wielomian interpolacyjny Lagrange'a L_n zapisany w bazie Newtona i naturalny splajn kubiczny S_n zapisany w bazie B–splajnów.

1. Co jest tańsze (dla dużych n): budowa L_n czy S_n?
2. Co jest tańsze (dla dużych n): obliczanie wartości $L_n(x)$ czy $S_n(x)$ dla zadanego x?

Zadanie 232. Niech $n \geq 2$. Przypuśćmy, że na pewnym komputerze 1 opm trwa dwa razy dłużej niż 1 ops. Dokonujemy interpolacji funkcji w $n+1$ węzłach: raz stosując interpolację Lagrange'a i algorytm różnic dzielonych, a drugi interpolację splajnami kubicznymi i algorytm dla lokalnych baz potęgowych. Podaj wszystkie n, dla których algorytm różnic dzielonych będzie działał szybciej niż algorytm znajdujący splajn. Jak zmieni się wynik, gdy przyjmiemy, że cztery podstawowe działania arytmetyczne wykonywane są w jednakowym czasie?

Zadanie 233. Zaprogramuj algorytm wyznaczania współczynników w lokalnych bazach potęgowych naturalnego interpolacyjnego splajnu kubicznego zakładając, że węzły są równoodległe. Zminimalizuj koszt czasowy i w miarę możliwości pamięciowy.

Zadanie 234. Zaproponuj algorytm wyznaczania współczynników w lokalnych bazach potęgowych okresowego splajnu kubicznego spełniającego zadane warunki interpolacyjne.

Zadanie 235. Dana jest baza kubicznych B-splajnów zdefiniowanych na siatce węzłów równoodległych $x_i = i$, $i = 0, 1, 2$. Znajdź współczynniki splajnu S w tej bazie spełniającego warunki interpolacyjne

1. $S(x_i) = 1$ dla $i = -1, 0, 1, 2, 3$.
2. $S(x_i) = i$ dla $i = -1, 0, 1, 2, 3$.

Zadanie 236. Korzystając z definicji rekurencyjnej B–splajnów wyprowadź wzory

$$B_j^{(0)}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = i, \\ 0 & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

$$B_j^{(1)}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = i-1, \\ 0 & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

$$B_j^{(2)}(x_i) = \begin{cases} \frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_{i-1}} & \text{dla } j = i-2, \\ \frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}} & \text{dla } j = i-1, \\ 0 & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

$$B_j^{(3)}(x_i) = \begin{cases} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-1})} & \text{dla } j = i-3, \\ \frac{(x_{i+1}-x_i)(x_i-x_{i-2})}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-1})}+ & \\ +\frac{(x_i-x_{i-1})(x_{i+2}-x_i)}{(x_{i+2}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i-1})} & \text{dla } j = i-2, \\ \frac{(x_i-x_{i-1})^2}{(x_{i+2}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i-1})} & \text{dla } j = i-1, \\ 0 & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

Oblicz wartości dla węzłów równoodległych.

Zadanie 237. Zaprogramuj algorytm wyznaczania współczynników w bazie B–splajnów interpolacyjnego splajnu kubicznego zakładając, że węzły są równoodległe. Zminimalizuj koszt czasowy.

Zadanie 238. Dane są węzły $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Udowodnij, że jeśli S jest naturalnym splajnem kubicznym opartym na tych węzłach interpolującym $f \in C^2[x_0, x_n]$ oraz funkcja f spełnia warunki $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$, to

1. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} S''(t)[f''(t) - S''(t)]\,\mathrm{d}t = 0,$
2. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} S''(t)f''(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_n} [S''(t)]^2\,\mathrm{d}t,$
3. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} [S''(t)]^2\,\mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^{x_n} [f''(t)]^2\,\mathrm{d}t.$

Rozwiąż to samo zadanie przy nieco innych założeniach

- S jest okresowy oraz f spełnia warunki $f(x_0) = f(x_n)$, $f'(x_0) = f'(x_n)$, $f''(x_0) = f''(x_n)$,

lub założeniach

- S jest hermitowski, tzn. $S'(x_0) = f'(x_0)$ i $S'(x_n) = f'(x_n)$, a $f \in C^2[x_0, x_n]$ dowolna.

Zadanie 239. Niech $w(x) = x^2 + bx + c$, gdzie b i c są parametrami rzeczywistymi oraz węzły równoodległe w przedziale $[0, 1]$. Niech kubiczna naturalna funkcja sklejana S interpoluje w w tych węzłach.

1. Oszacuj błąd tej iterpolacji.
2. Udowodnij, że

$$\sqrt{\int_0^1 (S''(x))^2 \, \mathrm{d}x} \le 2.$$

Zadanie 240. Oszacuj w normie supremum na odcinku $[a, b]$ błąd interpolacji splajnem S stopnia pierwszego funkcji $f \in C^1[a, b]$ oraz $f \in C^2[a, b]$, w zależności od maksymalnej długości przedziału podziału odcinka $[a, b]$.

Zadanie 241. Dane są równoodległe węzły $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$ z krokiem $h \in (0, 1)$ oraz funkcja $f \in C^2[x_0, x_n]$. Co można powiedzieć o błędzie, z jakim przybliża funkcję f' w przedziale $[x_0, x_n]$ pochodna S' kubicznej, naturalnej funkcji sklejanej opartej na węzłach $\{x_k\}_{k=0}^n$ oraz interpolującej f w tych węzłach?

12 Wielomiany trygonometryczne

Zadanie 242. Korzystając z równości

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}$$

oblicz

1. $e^{\pi i}$,
2. $e^{2\pi i}$,
3. $e^{k\pi i}$ dla $k = 0, 1, 2 \ldots$,
4. $\overline{e^{ix}}$.

Zadanie 243. Udowodnij, że funkcja e^z jest $2\pi i$ okresowa.

Zadanie 244. Niech z będzie liczbą zespoloną. Oblicz część rzeczywistą i zespoloną liczby e^z.

Zadanie 245. Wyraź funkcje $\sin x$ i $\cos x$ przy pomocy funkcji e^{ix} e^{-ix}.

Zadanie 246. Dany jest rzeczywisty wielomian trygonometryczny

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big).$$

Znajdź liczby zespolone d_k $(k = -n, -n+1, \ldots, n)$ takie, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$

$$w(t) = \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikt}.$$

Zadanie 247. Oblicz dla $k = 0, 1, \ldots$

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt} \, \mathrm{d}t$,
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \, \mathrm{d}t$.

Zadanie 248. Ciąg funkcji zespolonych $f_1, f_2, \ldots$ o dziedzinie $[a, b]$ nazywamy układem ortonormalnym w $L^2[a, b]$ jeśli

$$\int_a^b f_m(t)\overline{f_n(t)} \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n, \\ 1 & \text{dla } m = n. \end{cases}$$

Udowodnij, że ciąg

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{ti}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{2ti}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{3ti}}{\sqrt{2\pi}}, \ldots$$

jest układem ortonormalnym w $L^2[-\pi, \pi]$ i w $L^2[0, 2\pi]$.

Zadanie 249. Udowodnij, że ciąg

$$\frac{1}{2\pi}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

jest układem ortonormalnym w $L^2[-\pi,\pi]$ i w $L^2[0,2\pi]$.

Zadanie 250. Zapisz algorytm Hornera do obliczania wartości wielomianu zespolonego w o współczynnikach rzeczywistych, tj. $w(z) = \sum_{j=0}^{n} d_j z^j$, $d_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n$, $z \in \mathbb{C}$, w punkcie $\zeta = \cos\phi + i \sin\phi$. Jako dane zadania przyjmuje się $\{d_j\}_{j=0}^{n}$ oraz ϕ. Oblicz dokładny koszt algorytmu.

13 Interpolacja wielomianami trygonometrycznymi

Zadanie 251. Rozwiąż zadanie interpolacji trygonometrycznej dla funkcji o okresie $T = 4$ określonej dla $x \in [0,4]$ w sposób

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [0,1], \\ -(x-2)^2 + 2 & \text{dla } x \in [1,3], \\ (x-4)^2 & \text{dla } x \in [3,4]. \end{cases}$$

Wielomian interpolujący ma być oparty na 3 węzłach.

Zadanie 252. Niech funkcja f o okresie 2π dana będzie wzorami:

$$f(x) = \begin{cases} |x - \frac{\pi}{2}| - \frac{\pi}{2} & x \in [0,\pi], \\ |x - \frac{3\pi}{2}| - \frac{\pi}{2} & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Znajdź zespolony wielomian trygonometryczny interpolujący f w węzłach 0, π, 2π.

Zadanie 253. Dane są równoodległe węzły x_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Podaj współczynniki wielomianu trygonometrycznego interpolującego funkcję zespoloną f w tych węzłach i zaproponuj algorytm ich obliczania w przypadku $n = 4$ wymagający możliwie małej liczby mnożeń zespolonych.

Zadanie 254. Prześledź algorytm FFT dla $n = 8$ węzłów. Zwróć uwagę na różnego rodzaju symetrie pojawiających się macierzy.

Zadanie 255. Czy można (jeśli tak to jak) zastosować algorytm FFT do obliczania wartości wielomianu trygonometrycznego zapisanego w bazie sinusowo-cosinusowej w równoodległych węzłach?

Zadanie 256. Podaj algorytm obliczania iloczynu dwóch wielomianów zapisanych w bazie potęgowej.

Równania nieliniowe i układy równań nieliniowych

14 Równania nieliniowe

Zadanie 257.

1. Udowodnij, że równanie $f(x) = 0$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4 & \text{dla } x > 0, \\ x^3 + x^2 - 2x + 4 & \text{dla } x \leq 0, \end{cases}$$

   ma rozwiązanie na półosi ujemnej.

2. Zapisz metodę Newtona dla tego równania.

3. Wykonaj dwa kroki, gdy $x_0 = 0$.

4. Czy gdy $x_0 = 0$, to uzyskany ciąg będzie zbieżny?

Zadanie 258. Wpisz do GeoGebry funkcję

```
f(x) = (x^2 - 2) / (x^2 + 3)
```

i zaznacz na jej wykresie punkt A. Potem wpisz kolejno następujące polecenia.

```
a=Styczna[A, f]
x_1=Pierwiastek(a)
b=Styczna[x_1, f]
x_2=Pierwiastek(b)
c=Styczna[x_2, f]
x_3=Pierwiastek(c)
d=Styczna[x_3, f]
x_4=Pierwiastek(d)
```

Poruszając punktem A obserwuj położenie innych punktów. Rozważ szczególnie przypadek, gdy odcięta punktu A jest dodatnia i równocześnie mniejsza od 3 oraz przypadek, gdy odcięta jest większa od $4\frac{1}{2}$.

Zadanie 259.

1. Udowodnij, że równanie $f(x) = 0$, gdzie

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + \ln x - \frac{3}{2}$$

   ma rozwiązanie α w przedziale $P = [1, \frac{3}{2}]$.[a]

2. Jakiej krotności jest szukany pierwiastek α?

3. Napisz wzór metody stycznych dla tego zadania.

4. Oblicz wielkość

$$r = 2\frac{\inf_{x\in P} |f'(x)|}{\sup_{x\in P} |f''(x)|}.$$

5. Udowodnij, że jeśli $x_0 \in P$, to metoda stycznych zbiega do α.

6. Ile wynosi wykładnik zbieżności metody stycznych zastosowanej do tego równania?

[a] **Wskazówka:** $\ln \frac{3}{2} \in (0.4, 0.41)$, $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \in (1.14, 1.15)$.

Zadanie 260. Udowodnij, że równanie

$$\sin x - 4 \ln x = 0$$

ma rozwiązanie α w przedziale $P = [1, \frac{3}{2}]$ i że jeśli $x_0 \in P$, to metoda stycznych zastosowana do tego równania zbiega do α.
Rozwiąż to samo zadanie dla równania $e^x = \sin x$ i przedziału $P = [-\frac{5}{4}\pi, -\pi]$.[a]

[a] **Wskazówka:** $\ln \frac{3}{2} \in (0.4, 0.41)$, $\cos \frac{3}{2} \in (0.07, 0.08)$, $e^{-3} \in (0.04, 0.05)$, $e^{-\frac{5}{4}\pi} \in (0.01, 0.02)$.

Zadanie 261. Udowodnij, że jeśli $x_0 = 0$, to metoda stycznych zastosowana dla równania

$$x = -\cos x$$

zbiega do rozwiązania tego równania.

Zadanie 262.

1. Udowodnij, że równanie

$$x^2 + \mathrm{tg} x = 1$$

   ma rozwiązanie α w przedziale $P = [0, \frac{\pi}{4}]$.

2. Zapisz wzór metody siecznych dla zadania wyznaczania rozwiązania tego równania.

3. Udowodnij, że jeśli $x_0 = \frac{\pi}{12}$ i $x_1 = \frac{\pi}{6}$ metoda wygeneruje ciąg zbieżny do α.

4. Ile wynosi wykładnik zbieżności dla tej metody zastosowanej dla powyższych punktów startowych?

Rozwiąż to samo zadanie dla równania $\ln x = e^{1-x}$, przedziału $P = [1, 2]$ oraz punktów startowych $x_0 = \frac{4}{3}$, $x_1 = \frac{5}{3}$.

Zadanie 263. W języku C zapisz funkcję realizującą jeden krok procesu Newtona dla równania

$$x^4 + 3x^3 + 4x - 8 = 0.$$

Przy projektowaniu algorytmu wykorzystaj schemat Hornera.

Zadanie 264. *Metoda siecznych.* Rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$ o zerze jednokrotnym α. Metoda siecznych jest metodą interpolacyjną taką, że jeśli x_{k-1} oraz x_k są różnymi przybliżeniami zera α, to przybliżenie x_{k+1} równe jest pierwiastkowi wielomianu Lagrange'a interpolującego funkcję f w węzłach x_{k-1} i x_k. Wyprowadź wzór określający x_{k+1} korzystając z tabeli różnic dzielonych.

Zadanie 265. *Metoda stycznych.* Rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$ o zerze jednokrotnym α. Metoda stycznych jest metodą interpolacyjną, taką, że jeśli x_k jest przybliżeniem zera α, to przybliżenie x_{k+1} równe jest pierwiastkowi wielomianu Hermite'a'a interpolującego funkcję f w podwójnym węźle x_k. Wyprowadź wzór określający x_{k+1} korzystając z tabeli różnic dzielonych.

Zadanie 266. *Metod Steffensena.* Rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$ o zerze jednokrotnym α. Metoda Steffensena jest metodą interpolacyjną taką, że jeśli x_k jest przybliżeniem zera α, to przybliżenie x_{k+1} równe jest pierwiastkowi wielomianu Lagrange'a interpolującego funkcję f w węzłach x_k i $x_k + f(x_k)$. Wyprowadź wzór określający x_{k+1} korzystając z tabeli różnic dzielonych.[a]

[a] Rząd zbieżności tej metody wynosi dwa, ale ma ona złe własności numeryczne.

Zadanie 267. *Metoda Mullera.* Rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$ o zerze jednokrotnym α. Wyprowadź wzór metody

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) + s_k\sqrt{(f'(x_k)^2 - 2f(x_k)f''(x_k)}},$$

gdzie $s_k = \mathrm{sign}(f'(x_k))$ wiedząc, że jest ona metodą interpolacyjną taką, że jeśli x_k jest przybliżeniem zera α, to przybliżenie x_{k+1} równe jest zeru wielomianu Hermite'a'a interpolującego funkcję f w potrójnym węźle x_k. Wyprowadź wzór określający x_{k+1} korzystając z tabeli różnic dzielonych.

Zadanie 268. Odwrotność liczby N można obliczyć za pomocą algorytmu iteracyjnego $x_{k+1} = x_k(2 - Nx_k)$. Wyprowadź ten wzór stosując metodę Newtona do odpowiedniej funkcji.

Zadanie 269.

1. Którą metodę: siecznych czy stycznych jest lepiej zastosować do rozwiązywania równania
$$\cos x = e^x.$$
2. Narysuj w GeoGebrze wykresy funkcji $f(x) = \cos x - e^x$ oraz $g(x) = \cos x$ w przedziale $[-8, 0]$ i na ich podstawie zaproponuj punkty startowe.

Zadanie 270. Dlaczego metody bisekcji nie można stosować do parzystych krotności pierwiastka?

Zadanie 271.

1. Wykaż, że równanie $\sin x + x - 1 = 0$ ma pierwiastek w przedziale $[0, 1]$.
2. Ile trzeba wykonać iteracji, aby metodą bisekcji otrzymać przybliżoną wartość pierwiastka z błędem nie przekraczającym $0.5 \cdot 10^{-3}$?
3. Ile wynosi wykładnik zbieżności dla tej metody? Czy metoda ta jest zbieżna liniowo?

Zadanie 272. Zaprogramuj w języku C funkcję realizującą metodę siecznych dla równań

- $\ln x^2 = -x$,
- $e^{2x} = -x$.

Jako warunek stopu przyjmij $n \geq 100$ lub $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ lub $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$, gdzie x_n oznacza n przybliżenie pierwiastka. Liczby ε, δ oraz punkty startowe są parametrami funkcji. Program oprócz rozwiązania $x_n \approx \alpha$ powinien wypisać ilość wykonanych kroków n oraz wartości $f(x_n)$ i $|x_n - x_{n-1}|$.

Zadanie 273. Zaprogramuj w języku C funkcję realizującą metodę stycznych dla równań

- $\sin(\pi x) = x$,
- $\cos x + 1 = -2x$.

Jako warunek stopu przyjmij $n \geq 100$ lub $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ lub $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$, gdzie x_n oznacza n przybliżenie pierwiastka. Liczby ε, δ oraz punkty startowe są parametrami funkcji. Program oprócz rozwiązania $x_n \approx \alpha$ powinien wypisać ilość wykonanych kroków n oraz wartości $f(x_n)$ i $|x_n - x_{n-1}|$.

Zadanie 274. Dany jest splajn kubiczny S zdefiniowany na węzłach $0, 1, 2, \ldots, 2^n$ i zapisany w lokalnych bazach potęgowych. Zakładamy, że $S(0)$ i $S(2^n)$ są różnych znaków. Zapisz w języku C algorytm bisekcji, który wyznaczy miejsce zerowe splajnu S z dokładnością $\varepsilon = 10^{-6}$. Postaraj się zminimalizować liczbę działań arytmetycznych.

Zadanie 275. Zapisz w Octave polecenia znajdujące rozwiązanie równań.

1. $x - \sin x = 1$,
2. $x + 1 = \tan x$, $x \in (0, \pi)$,
3. $e^x = \tan x + 2$,
4. $-x + e^x = 1$,
5. $\cos x = e^x$.

Użyj funkcji posługującej się metodą Brenta. Co oznaczają obliczone wyniki?