Metody Numeryczne
Zajęcia nr 6

Michał Bernardelli

Do zapamiętania: kwadratury interpolacyjne, rząd kwadratury, kwadratury Newtona-Cotes'a, kwadratury złożone, kwadratury Gaussa

1 Kwadratury interpolacyjne

Kwadratura numeryczna, to wzór pozwalający na obliczenie wartości całki:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Na ogół szuka się kwadratur numerycznych w postaci:

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i),$$

gdzie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ są **węzłami** kwadratury, a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jej **współczynnikami**. Mówimy, że kwadratura numeryczna jest **rzędu** m, jeśli daje dokładny wynik dla dowolnego wielomianu w_n stopnia mniejszego od m, czyli $I(w_n) = Q_n(w_n)$, a w dodatku istnieje wielomian w_m stopnia m taki, że $I(w_m) \neq Q_n(w_m)$.
Kwadratury interpolacyjne dostajemy całkując wielomian interpolacyjny P_n, to znaczy

$$Q_n(f) = \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\int_a^b l_i(x)dx}_{a_i} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

Kwadratury Newtona-Cotes'a to kwadratury interpolacyjne dla węzłów równoodległych, to jest $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Są one dane wzorem:

$$Q_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i),$$

gdzie współczynniki $a_i = \int_0^n l_i(s)ds$ zależą tylko od liczby węzłów i można je znaleźć w tablicach.

Twierdzenie 1 *Kwadratury Newtona-Cotes'a są rzędu* $n+1$ *dla* n *nieparzystych, a rzędu* $n+2$ *dla* n *parzystych.*

Chciałoby się, aby wraz ze wzrostem liczby węzłów wartość kwadratury numerycznej była coraz bliższa wartości przybliżanej całki. Innymi słowy interesuje nas zbieżność kwadratur.

Twierdzenie 2 *Niech współczynniki a_i^n kwadratur numerycznych*

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i^n f(x_i^n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

będą dodatnie. Jeśli rząd kwadratury Q_n jest większy lub równy n, to ciąg kwadratur Q_n jest zbieżny dla dowolnej funkcji ciągłej f do $I(f)$.

Współczynniki kwadratur Newtona-Cotes'a są dodatnie tylko dla $n \leq 7$ i $n = 9$. Zawsze jednak można podzielić przedział $[a, b]$ na części i w każdej z nich zastosować kwadraturę Newtona-Cotes'a. Dostajemy w ten sposób **kwadratury złożone**.

Twierdzenie 3 *Niech Q będzie kwadraturą opartą na węzłach o łącznej krotności $n + 1$.*

1. *Jeśli rząd Q jest $\geq n + 1$, to Q jest kwadraturą interpolacyjną.*
2. *Jeśli Q jest kwadraturą interpolacyjną, to rząd Q jest nie mniejszy niż $n + 1$ i nie większy niż $2(n + 1)$.*

Przykłady kwadratur Newtona-Cotes'a i wyrażenia na błędy przy założeniu dostatecznej gładkości funkcji:

NAZWA WZORU	**RZĄD**	**LICZBA WĘZŁÓW**	**WZÓR**	**RESZTA** ($\xi \in [a, b]$)
prostokątów	2	1	$(b - a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$R(f) = \frac{1}{24}(b - a)^3 f''(\xi)$
trapezów	2	2	$\frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$	$R(f) = -\frac{1}{12}(b - a)^3 f''(\xi)$
parabol (Simpsona)	4	3	$(b - a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b)\right)$	$R(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$

2 Kwadratury Gaussa

Dla całki $\int_a^b \varrho(x) f(x) dx$, ustalonej funkcji wagowej ϱ i ustalonej liczby $n + 1$ węzłów chcemy znaleźć interpolacyjną kwadraturę numeryczną

$$Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j), \qquad A_j = \int_a^b \varrho(x) l_j(x) dx, \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

o możliwie wysokim rzędzie.
Dla węzłów będących pierwiastkami wielomianu stopnia $n+1$, ortogonalnego na przedziale $[a, b]$ z wagą ϱ dostajemy **kwadratury Gaussa**. Prawdziwe jest co następuje:

- kwadratury Gaussa mają rząd $2n + 2$, czyli maksymalny możliwy,
- współczynniki kwadratur Gaussa są dodatnie (wynika stąd, że są one zbieżne dla dowolnej funkcji ciągłej).

Zadanie 1
Podać przykład funkcji, dla której:

- *kwadratura prostokątów daje mniejszy błąd niż kwadratura trapezów,*
- *kwadratura trapezów daje mniejszy błąd niż kwadratura prostokątów.*

Zadanie 2
Znaleźć współczynniki kwadratury interpolacyjnej przybliżającej funkcjonał $I(f) = \int_a^b f(f)dx$ *opartej na węzłach* $x_0 = a$ *i* $x_1 = b$ *o maksymalnym możliwym rzędzie. Ile wynosi ten rząd? Wykazać, że jeśli* $f \in C^2(a,b)$*, to błąd tej kwadratury (trapezów) na* $[a,b]$ *można oszacować w sposób następujący:*

$$|I(f) - Q(f)| \leq \frac{1}{12}(b-a)^3 \|f''\|_{\infty,[a,b]}.$$

Zadanie 3
W celu obliczenia całki $\int_a^b f\,dx$ *podzielono przedział* $[a,b]$ *na* N *części*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

i w każdej z tych części zastosowano kwadraturę trapezów:

$$Q(f, x_{i-1}, x_i) = \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(f(x_{i-1}) + f(x_i)), \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Wyznaczyć współczynniki A_j^N *powstałej w ten sposób kwadratury złożonej*

$$T_N(f) = \sum_{i=1}^{N} Q(f, x_{i-1}, x_i) = \sum_{j=0}^{N} A_j^N f(x_j).$$

Wiedząc, że błąd absolutny kwadratury trapezów dla funkcji $f \in C^2([c,d])$ *jest równy* $\frac{1}{12}(d-c)^3 f''(\xi)$ *dla pewnego* $\xi \in [c,d]$ *oszacować błąd* $|T_N(f) - I(f)|$ *dla* $f \in C^2([a,b])$*. Jaka będzie postać błędu dla podziału równomiernego?*

Zadanie 4
Dane są złożone kwadratury

$$T_N(f) = \sum_{i=1}^{N} Q(f, x_{i-1}, x_i) = \sum_{j=0}^{N} A_j^N f(x_j)$$

prostokątów:

$$Q(f, x_{i-1}, x_i) = (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

i trapezów:

$$Q(f, x_{i-1}, x_i) = \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(f(x_{i-1}) + f(x_i)), \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Wiedząc, że dla funkcji $f \in C^2([c,d])$ *błąd absolutny kwadratury prostokątów jest równy* $\frac{1}{24}(d-c)^3 f''(\xi_1)$*, zaś dla kwadratury trapezów* $\frac{1}{12}(d-c)^3 f''(\xi_2)$ *dla pewnych* $\xi_1, \xi_2 \in [c,d]$ *porównać błędy kwadratur złożonych. Podać wady i zalety każdej z tych kwadratur pod kątem przydatności do obliczeń numerycznych. Podać przykład praktycznego problemu, w którym lepiej jest zastosować złożoną kwadraturę trapezów zamiast złożonej kwadratury prostokątów.*

Zadanie 5
Sprawdzić działanie funkcji quad *na następujących przykładach:*

- $f(x) = 1,\ a = 0,\ b = \pi,$
- $f(x) = \sin x,\ a = 0,\ b = \pi,$
- $f(x) = \sin x,\ a = 0,\ b = 2\pi,$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ a = -1,\ b = 1.$