Seria zadań nr 4 z Metod Numerycznych

Michał Bernardelli

Zadanie 1
Podać przykłady funkcji i punktów startowych, dla których:

- *metoda siecznych jest zbieżna,*
- *metoda siecznych nie jest zbieżna,*
- *metoda stycznych jest zbieżna,*
- *metoda stycznych jest rozbieżna,*
- *metoda Newtona zapętla się (w arytmetyce dokładnej).*

Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie 2
Zaimplementować metodę Newtona, która jako paramery przyjmie:

- *funkcję,*
- *punkt startowy,*
- *maksymalną liczbę iteracji,*
- *dokładność, z jaką ma zostać obliczone rozwiązanie.*

W obliczeniach nalezy zastosować przybliżenie pochodnej funkcji. Przetestować jej działanie dla funkcji $cos(x) = 0$ i różnych punktów startowych, np. $x_0 \in \{-1,\ 0,\ 0.1,\ 1.5,\ 2,\ 3\}$. Porównać działanie zaimplementowanej metody z działaniem metody Newtona z pochodną funkcji jako dodatkowym parametrem.

Zadanie 3
W zależności od parametru α, gdzie $0 < \alpha \leq 1$, zbadać szybkość zbieżności do $x^* = 0$ metody Newtona dla funkcji

$$f(x) = x + x^{1+\alpha}.$$

Zadanie 4
Niech $a > 0$. Znaleźć stałą $C > 0$ taką, żeby była spełniona nierówność

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^2,$$

gdzie $x^* = \sqrt[3]{a}$, zaś ciąg x_k stanowią kolejne przybliżenia uzyskane w wyniku obliczeń metodą iteracyjną Newtona dla funkcji $f(x) = x^3 - a$.
Czy dwie iteracje metody Newtona wystarczą, by policzyć przybliżenie $\sqrt[3]{a}$ z dokładnością bezwzględną 10^{-12} jeżeli wiadomo, że

$$|\sqrt[3]{a} - x_0| \leq 10^{-3}?$$

Zadanie 5
Udowodnić, że funkcja $f(x) = e^x + x - 7$ *ma dokładnie jedno miejsce zerowe* x^*. *Czy dla* $x_0 = -18$ *metoda Newtona wygeneruje ciąg przybliżeń zbieżny do* x^**? Odpowiedź uzasadnić.*

Zadanie 6
W celu obliczenia przybliżenia wartości $\sqrt[3]{a}$, *gdzie* $3 < a \in \mathbb{R}$, *stosujemy kolejno dwie metody iteracyjne: bisekcji i Newtona do wyznaczenia miejsca zerowego funkcji* $f(x) = x^3 - a$.
W pierwszym etapie znajdujemy dobre przybliżenie x_0 *(punkt startowy) dla metody Newtona wykorzystując w tym celu metodę bisekcji, tak żeby*

$$\left|\sqrt[3]{a} - x_0\right| \leq 10^{-3}$$

Następnie wykonujemy iteracje metodą Newtona rozpoczynając iterowanie od punktu x_0.

1. *Napisz wzór na kolejną iterację metody Newtona zastosowanej dla powyższej funkcji.*
2. *Ile kroków metody bisekcji należy wykonać, żeby osiągnąć podawane wyżej przybliżenie* x_0 *(punktu startowego dla metody Newtona), jeżeli początkowy przedział poszukiwań to* $[0, a]$*?*
3. *Ile kroków metody Newtona należy wykonać, żeby rozpoczynając iteracje od wyżej obliczonej wartości* x_0 *zachodziło*
$$\left|\sqrt[3]{a} - x_k\right| \leq 10^{-15},$$
jeżeli x_k *jest przybliżeniem otrzymanym w* k *kroku metody Newtona?*