Spis treści

Spis treści

Spis treści

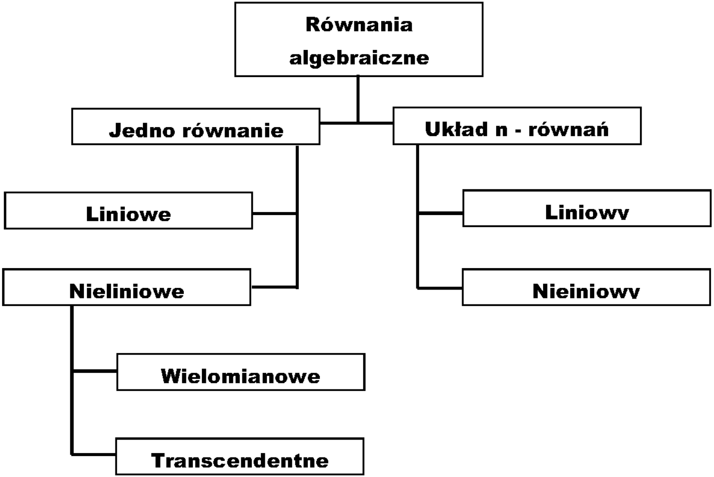
Literatura

1. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, Metody numeryczne, WNT, Warszawa, 1993
2. A. Ralston, Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa, 1983
3. E. Kącki, A. Małolepszy, A. Romanowicz, Metody numeryczne dla inżynierów, Wyższa Szkoła Informatyki w Łodzi, Łódź, 2005
4. Z. Kosma, Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich, Politechnika Radomska, Radom, 2008
5. W.T. Vetterling, S.A. Teukolsky, W.H. Press, B.P. Flannery, Numerical Recipes, Cambridge University Press, 2003
6. S. Rosłoniec, Wybrane metody numeryczne z przykładami zastosowań w zadaniach inżynierskich, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2008

Wstęp

Samodzielne tworzenie komputerowych programów symulacyjnych często wymaga rozwiązywania prostych lub bardziej skomplikowanych równań matematycznych. Są to zarówno równania liniowe i jak i równania nieliniowe (algebraiczne i nie tylko), równania różniczkowe liniowe i nieliniowe oraz ich układy. W tej lekcji omówimy równania nieliniowe.

Typy równań



Rys. 1: Klasyfikacja równań

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Rozpocznijmy od jednego dowolnego równania z jedną niewiadomą. Ma ono ogólną postać:

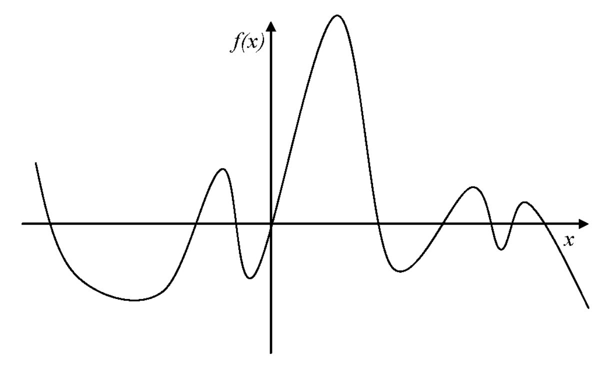
$$f(x) = 0\,. \tag{1}$$

by móc prawidłowo je rozwiązać, musimy dodatkowo określić:

1. dziedzinę funkcji $f(x)$, $x \in D$
2. przedziały izolacji pierwiastków (rzeczywistych i/lub zespolonych) $\leftarrow$ wykres funkcji $f(x)$
3. dla wielomianów istnieją metody analitycznego izolowania pierwiastków

Tu zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest klasy C^2, plus ewentualnie dodatkowe warunki.

Jedno równanie z jedną niewiadomą

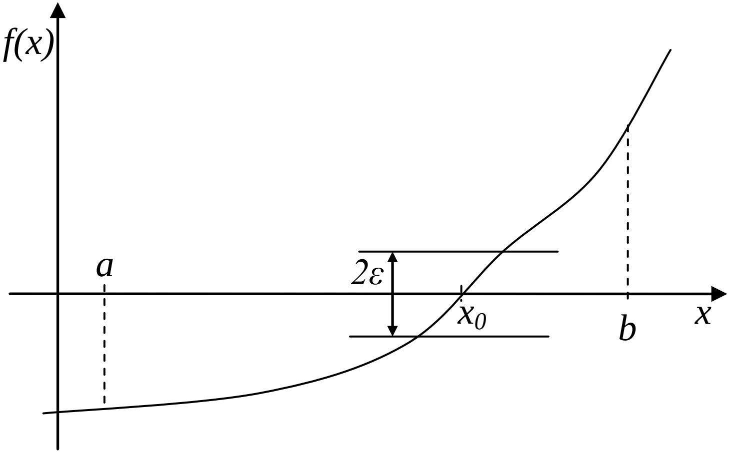


Rys. 2: Funkcja nieliniowa jednej zmiennej

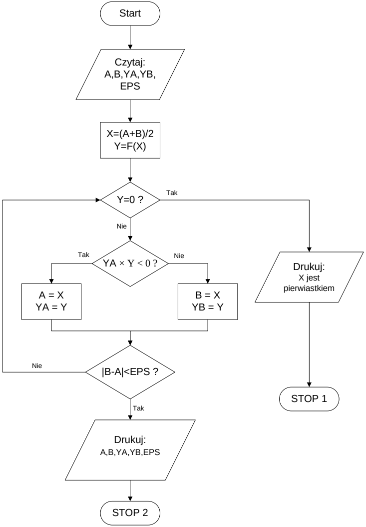
Jedno równanie z jedną niewiadomą

Gdy już mamy mniej więcej zlokalizowany pierwiastek i wiemy, że leży on w przedziale (a, b) (aby to stwierdzić wystarczy sprawdzić, że $f(a)$ i $f(b)$ mają różne znaki, patrz Rys. 2), to dzielimy ten odcinek na połowę i sprawdzamy, w którym z tych nowych odcinków znajduje się nasz pierwiastek. Postępujemy tak długo, aż osiągniemy pożądaną dokładność (Rys. 3). Metoda nosi nazwę *metody połowienia* (*bisekcji*).

Jedno równanie z jedną niewiadomą



Rys. 3: Bisekcja – idea poszukiwania rozwiązań równania nieliniowego



Rys. 4: Schemat blokowy programu Bisekcja

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Regula falsi

Kolejna metoda, to metoda nosząca nazwę *regula falsi*

Regula falsi – co to znaczy po polsku?

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Regula falsi

regula – linia
falsus – fałszywy
regula falsi – metoda fałszywego założenia o liniowości funkcji

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Regula falsi

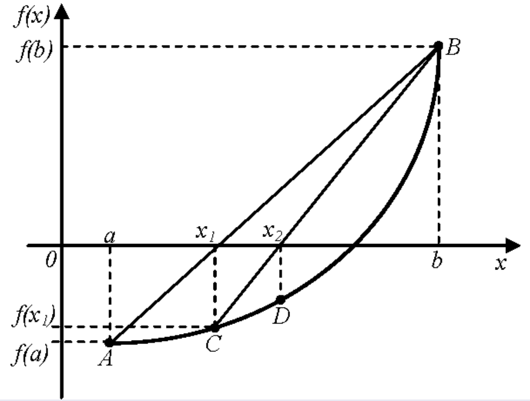
Założenia:

1. w rozpatrywanym przedziale $[a, b]$ równanie ma dokładnie jeden pojedynczy pierwiastek
2. $f(a)\,f(b) \le 0$
3. $f(x) \in C^2$
4. $f'(x) > \text{lub} < 0,\; f''(x) > \text{lub} < 0$ – cztery przypadki

Rozpatrzymy: $f'(x) > 0,\; f''(x) > 0$

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Regula falsi



Rys. 5: Regula falsi

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Regula falsi

Patrz rys. 5:

- Prowadzimy cięciwę przez punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ o równaniu
$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$
- x_1 – pierwsze przybliżenie szukanego pierwiastka
$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$
jeśli $f(x_1) = 0$ to mamy rozwiązanie i koniec pracy
- Jeśli $f(x_1) \neq 0$ to: ...

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Regula falsi

- Jeśli $f(x_1) \neq 0$ to kolejne wyrazy ciągu przybliżeń:

$$x_0 = a\,, \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Jedno równanie z jedną niewiadomą

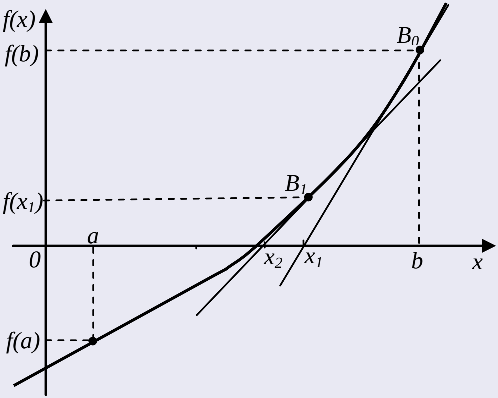
Metoda siecznych

Zbieżność znacznie szybsza, bo rezygnujemy z żądania, by funkcja $f(x)$ miała w punktach wytyczających kolejną cięciwę różne znaki, a do $(n+1)$ przybliżenia korzystamy z poprzednio wyznaczonych punktów x_n i x_{n-1}

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Metoda Newtona (metoda stycznych)



Rys. 6: Metoda Newtona(stycznych)

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Metoda Newtona (metoda stycznych)

Rozważamy przykład, gdy zarówno $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ (rys. 6).

1. Prowadzimy styczną z punktu B_1 o równaniu $y - f(b) = f'(b)(x - b)$. Dla $y = 0$ mamy

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

2. Gdy rozwiązanie za mało dokładne prowadzimy kolejną styczną z punktu $(x_1, f(x_1))$. Można wykazać, że x_1 leży bliżej rozwiązania niż b.
3. Kolejne przybliżenia liczymy ze wzoru

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Równania algebraiczne

Poszukujemy zer (rzeczywistych lub zespolonych) wielomianu

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0\,, \quad a_n \in \mathbb{R}$$

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Twierdzenie Sturma

Ciąg Sturma $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$ $f_p(x)$, gdzie

$f_0(x) \equiv f(x)$

$f_1(x) \equiv f'(x)$

$f_2(x)$ – reszta z dzielenia $f_0(x)/f_1(x)$ wzięta ze znakiem przeciwnym

$f_3(x)$ – reszta z dzielenia $f_1(x)/f_2(x)$ wzięta ze znakiem przeciwnym

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Twierdzenie Sturma

Jeżeli ciąg $(f_i(x))$, $i = 0, 1, \ldots, p$ jest ciągiem Sturma na przedziale $[a, b]$ i $f_0(a)\, f_0(b) \neq 0$, to liczba zer rzeczywistych wielomianu $f(x)$ leżących w tym przedziale wynosi $N(a) - N(b)$, gdzie $N(x_0)$ – liczba zmian znaku w ciągu Sturma w punkcie $x = x_0$.

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Metoda iterowanego dzielenia

Dzielimy wielokrotnie przez $(x - x_j)$. Po pierwszym dzieleniu

$$f(x) = (x - x_j)(b_0\, x^{n-1} + b_1\, x^{n-2} + \ldots b_{n-1}) + R_j$$

gdzie $R_j = f(x_j)$, a $b_0 = a_0\,,\ b_k = a_k + x_j\, b_{k-1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n$
czyli

$$R_j = b_n = a_n + x_j\, b_{n-1}$$

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Metoda iterowanego dzielenia

Powtórne dzielenie:

$$f(x) = (x - x_j)^2 (c_0\, x^{n-2} + c_1\, x^{n-3} + \ldots + c_{n-2} + (x - x_j) R'_j + R_j$$

gdzie $R'_j = f'(x_j)$ oraz $c_0 = b_0 = a_0$,

$$c_k = b_k + x_j\, c_{k-1}\ , \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1\ ,$$

$$R'_j = c_{n-1} = b_{n-1} + x_j\, c_{n-2}$$

Jedno równanie z jedną niewiadomą

Metoda iterowanego dzielenia

By obliczyć kolejne wyrazy ciągu przybliżeń (x_k) można zastosować

metodę siecznych

$$x_{j+1} = x_j - \frac{R_j(x_j - x_{j+1})}{R_j - R_{j-1}}$$

startując z x_1 i x_2 , lub

metodę Newtona

$$x_{j+1} = x_j - \frac{R_j}{R_j'}$$

startując z x_1

Metoda Lina

Rozważmy wielomian

$$F(x) = W_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (2)$$

Wielomian ten ma n rzeczywistych lub zespolonych pierwiastków

$$W_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0 \quad (3)$$

Szczególny przypadek $n = 2$

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (4)$$

gdzie

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c \quad (5)$$

Metoda Lina

Przekształcamy wielomian (2) do postaci iloczynowej

$$(x^2+px+q)(x^{n-2}+b_1x^{n-3}+b_2x^{n-4}+\cdots+b_{n-3}x+b_{n-2})+Rx+S=0 \tag{6}$$

przy czym

$$b_1 = a_1 - p\,; \quad b_2 = a_2 - pb_1 - q\,; \ldots ; b_{n-2} = a_{n-2} - pb_{n-2} - qb_{n-4}$$

oraz

$$R = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3}\,, \quad S = a_n - qb_{n-2} \tag{7}$$

Zadanie
Omów sytuację, gdy $R = S = 0$.

Metoda Lina

Gdy współczynniki p i q w równaniu $x^2 + p\,x + q = 0$ są rzeczywiste, to jego pierwiastki tworzą parę sprzężonych liczb zespolonych

$$x_{1,2} = c \pm i\,d\,, \quad \text{gdzie} \quad p = -2c\,, q = c^2 + d^2$$

Iterujemy tak długo, aż wielomian jest ostatecznie podzielny bez reszty przez $x^2 + p\,x + q$, czyli gdy $R = S = 0$, a kolejne iteracje wyznaczany z warunków (7)

$$q' = \frac{a_n}{b_{n-2}}\,, \quad p' = \frac{a_{n-1} - q'\,b_{n-3}}{b_{n-2}}$$

Uwaga: jeśli źle wybierzemy wartości początkowe, proces może być rozbieżny!

Układy równań nieliniowych

Zadanie

Znaleźć takie rozwiązanie $\alpha \in \mathbb{R}^n$ układu równań, w którym odwzorowanie

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

przyjmuje wartość zero, czyli $F(\alpha) = 0$.

Więcej o tym np. w artykule Mirosława Makowieckiego na stronie:

`http://pl.wikibooks.org/wiki/Metody_numeryczne_fizyki/Rozwiązywanie_równań_nieliniowych_w_sposób_przybliżony#Wprowadzenie_do_układów_równań_nieliniowych`

Układy równań nieliniowych

Innymi słowy, poszukujemy rozwiązania $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ układu równań

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \mathbf{F_1}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \mathbf{F_2}(\mathbf{x}) = 0 \\
\ldots \quad & \ldots \quad \ldots \\
F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \mathbf{F_n}(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Układy równań nieliniowych

Metoda iteracyjna: krok 1

Przekształcamy układ równań do postaci

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{9}$$

i przyjmujemy początkowe rozwiązanie

$$x_1 = a_1\,, x_2 = a_2\,, \ldots x_n = a_n \tag{10}$$

Układy równań nieliniowych

Metoda iteracyjna: krok 2

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ x_2 &= f_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \end{aligned} \tag{11}$$

Powtarzamy iteracje tak długo, aż różnica

$$R = \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| \tag{12}$$

będzie wystarczająco mała.

Koniec? :-(

Koniec wykładu 2