Spis treści

Spis treści

Spis treści

Literatura

1. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, Metody numeryczne, WNT 1993
2. A. Ralston, Wstęp do analizy numerycznej, PWN 1983
3. E. Kącki, A. Małolepszy, A. Romanowicz, Metody numeryczne dla inżynierów, Wyższa Szkoła Informatyki w Łodzi, Łódź, 2005
4. Z. Kosma, Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich, Politechnika Radomska, Radom, 2008
5. W.T. Vetterling, S.A. Teukolsky, W.H. Press, B.P. Flannery, Numerical Recipes, Cambridge University Press, 2003
6. T. Mazurkiewicz, R. Szmurło, St. Wincenciak, Metody numeryczne, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2014

Metody iteracyjne

Wstęp

Metody iteracyjne stosuje się najczęściej do rozwiązywania bardzo dużych układów równań liniowych, w których macierz współczynników zawiera bardzo dużo elementów zerowych.

Przykład

Układ równań $100\,000 \times 100\,000$ dla zmiennych zmiennoprzecinkowych w podwójnej precyzji potrzebuje do zapisania macierzy współczynników około 80 Gb pamięci, przy czym na ogół większość współczynników ma wartości zerowe. Korzystniej jest zatem zapamiętywać tylko elementy niezerowe, co na ogół nie pozwala, a co najmniej bardzo utrudnia, na wykorzystywanie metod bezpośrednich. W praktyce dla układów równań liniowych o liczbie niewiadomych większych od 1 000 stosuje się zasadniczo tylko metody iteracyjne [6].

Metody iteracyjne

Wstęp

W każdej operacji iteracji wykonywane jest przekształcenie poprzedniego wektora wyników $\mathbf{x}_n$ w nowy wektor wyników $\mathbf{x}_{n+1}$, co oznacza przemnożenie $\mathbf{x}_n$ przez pewną macierz. Taka struktura operacji iteracyjnych pozwala na ich stosunkowo proste zrównoleglenie, co oznacza w praktyce bardzo poważne przyspieszenie obliczeń.

Metody iteracyjne

Ogólny schemat wszystkich metod iteracyjnych

Rozwiązujemy układ równań liniowych

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{1}$$

Rozwiązanie tego układu ma postać

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}\,. \tag{2}$$

W celu znalezienie metody iteracyjnej wprowadzamy dodatkową macierz $\mathbf{B}$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{B})\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{3}$$

Tu pojawia się idea: $+\mathbf{B}$ będzie mnożona przez wektor $\mathbf{x}_{i+1}$, a $-\mathbf{B}$ będzie mnożona przez wektor $\mathbf{x}_i$.

Metody iteracyjne

Ogólny schemat wszystkich metod iteracyjnych

W rezultacie otrzymujemy następujący schemat obliczeń iteracyjnych:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{x}_{i+1} = -(\mathbf{A}-\mathbf{B})\,\mathbf{x}_i + \mathbf{b}\,, \tag{4}$$

czyli

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\,, \tag{5}$$

czyli

$$\mathbf{x}_{i+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}_i + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\,. \tag{6}$$

Pytanie:
Jaka powinna być optymalna postać macierzy $\mathbf{B}$? Jakie kryteria powinna spełniać?

Metody iteracyjne

Ogólny schemat wszystkich metod iteracyjnych

Optymalna macierz $\mathbf{B}$:

1. obliczenie macierzy $\mathbf{B}^{-1}$ powinno być mało kosztowne obliczeniowo, lub
2. układ równań $\mathbf{B}\,\mathbf{x}_{i+1} = -(\mathbf{A}-\mathbf{B})\,\mathbf{x}_i + \mathbf{b}$ powinien być łatwo rozwiązywalny, i
3. wartości własne macierzy $\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}$ powinny być co do modułu jak najmniejsze.

Ponadto, w celu łatwiejszego wprowadzenia metod iteracyjnych, macierz $\mathbf{A}$ dzieli się na trzy części

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}\,, \tag{7}$$

gdzie macierze $\mathbf{D}$ – diagonalna, $\mathbf{L}$ – dolnotrójkątna, $\mathbf{U}$ – górnotrójkątna.

Metody iteracyjne

Metoda Jacobiego

W metodzie Jacobiego przyjmuje się, że macierz $\mathbf{B}$ ma postać diagonalną, czyli $\mathbf{B} = \mathbf{D}$, czyli

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

a więc

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

Metody iteracyjne

Metoda Jacobiego

Wzór iteracyjny Jacobiego przyjmuje zatem postać

$$\mathbf{x}_{i+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{A})\mathbf{x}_i + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}\,. \tag{10}$$

Aby algorytm Jacobiego był zbieżny, macierz **A** musi mieć wyrażenia na diagonali silnie dominujące nad jej pozostałymi elementami w tym samym wierszu, czyli

$$|a_{kk}| > \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \tag{11}$$

Podobne kryterium możemy sformułować również dla kolumn.

Metody iteracyjne

Metoda Jacobiego

Zadania do domu:

1. Sformułuj warunek Jacobiego dla kolumn.
2. Policz trzy iteracje ciągu przybliżeń metody Jacobiego dla układu równań [6]

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

przyjmując jako wektor startowy wektor o wartościach zerowych. Jaka jest wartość dokładna rozwiązania?

Metody iteracyjne

Metoda Seidla

Metoda Seidla jest ulepszeniem ogólnej metody iteracyjnej (patrz Wykład 4): po obliczeniu dowolnej składowej wektora wyniku $\mathbf{x}_i$ wykorzystuje się ją od razu do obliczenia następnych składowych.

Przypomnienie:
Rozwiązujemy układ równań

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{13}$$

Zapiszmy macierz A w postaci

$$A = D + L + U \tag{14}$$

gdzie D – macierz diagonalna, L – dolna macierz trójkątna i U – górna macierz trójkątna, obie z zerami na głównych przekątnych.

Metody iteracyjne

Metoda Seidla, Przypomnienie c.d.

Mamy zatem

$$D\mathbf{x} = -(L+U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

co generuje *metodę iteracji prostej*

$$\mathbf{x}_{i+1} = -D^{-1}(L+U)\mathbf{x}_i + D^{-1}\mathbf{b} \tag{15}$$

Metoda ta nie zawsze jest szybko zbieżna.

++++++++++++++++++++++++++++++++

Niech $x_i^{(j)}$ – j-ta składowa wektora $\mathbf{x}_i$. Przekształcamy pierwsze równanie układu (13) do postaci:

Metody iteracyjne

Metoda Seidla

$$x_{i+1}^{(1)} = -\frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}\, x_i^{(j)} - b_1 \right) \tag{16}$$

Uwaga: zakładamy, że macierz D jest nieosobliwa.

Przybliżenie $x_{i+1}^{(2)}$ otrzymujemy z drugiego równania:

$$x_{i+1}^{(2)} = -\frac{1}{a_{22}} \left(a_{21}\, x_{i+1}^{(1)} + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}\, x_i^{(j)} - b_2 \right) \tag{17}$$

Metody iteracyjne

Metoda Seidla

Ostatecznie wzór iteracyjny przyjmuje postać:

$$x_{i+1}^{(r)} = -\frac{1}{a_{rr}} \left(\sum_{j=1}^{r-1} a_{rj}\, x_{i+1}^{(j)} + \sum_{j=r+1}^{n} a_{rj}\, x_{i}^{(j)} - b_r \right) \quad ; \qquad r = 1, 2, \ldots, n \tag{18}$$

Metody iteracyjne

Metoda Seidla

Jeśli macierz A wyrazimy w postaci $A = D + L + U$, nasz wzór (18) oznacza

$$\mathbf{x}_{i+1} = -D^{-1}(L\,\mathbf{x}_{i+1} + U\,\mathbf{x}_i) + D^{-1}\,\mathbf{b} \tag{19}$$

skąd mamy

$$\mathbf{x}_{i+1} = -(D + L)^{-1}U\,\mathbf{x}_i + (D + L)^{-1}\,\mathbf{b} \tag{20}$$

Można pokazać, że metoda Seidla jest zbieżna, gdy macierz A jest dodatnio określona.

Uwaga: rzeczywista macierz A jest macierzą dodatnio określoną, gdy jest macierzą symetryczną i gdy dla każdego $\mathbb{R} \ni \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ zachodzi $\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} > 0$. Równoważna definicja mówi, że wszystkie wartości własne macierzy A są dodatnie.

Metody iteracyjne

Relaksacja

Metoda Seidla należy do tzw. **metod relaksacyjnych**. Ich idea: rozważmy wektor reszt

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \tag{21}$$

i tak zmodyfikujmy wektor $\mathbf{r}$ by jedna składowa (np. największa) była równa zeru. Algorytm postępowania:

- Krok 1 wybierz wektor początkowy $\mathbf{x}_1$;
- Krok 2 oblicz $\mathbf{r}_1 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_1$;
- Krok 3 odszukaj składową wektora $\mathbf{r}$ o największym module, np. r_1^L i w L-tym wierszu macierzy A element o największym module, np. a_{LJ} ;

Metody iteracyjne

Relaksacja c.d.

Krok 4 zaproponuj wektor $\mathbf{x}_2$ mający wszystkie składowe równe wektorowi $\mathbf{x}_1$ za wyjątkiem składowej

$$x_2^{(J)} = x_1^{(J)} + \frac{r_1^{(J)}}{a_{LJ}} \tag{22}$$

Krok 5 powtarzaj kroki 2 - 4 tak długo, jak długo uznasz to za potrzebne.

Odwracanie macierzy

Odwracanie macierzy przez rozkład na czynniki trójkątne

Stosując metodę Gaussa rozwiązywania układu równań liniowych możemy rozłożyć macierz A na iloczyn $L\,U$, gdzie

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Ponieważ zachodzi związek, że jeśli $A = L\,U$, to

$$A^{-1} = U^{-1}\,L^{-1} \tag{24}$$

więc zadanie sprowadza sie do odwrócenia macierzy L i U.

Odwracanie macierzy

Odwracanie macierzy przez rozkład na czynniki trójkątne

Skądinąd wiadomo, że odwracając macierz trójkątną dolną (górną) otrzymujemy macierz trójkątną dolną (górną).
Niech $L^{-1} = [r_{ij}]$ – gdzie $r_{ij} = 0$ dla $i < j$; L_i – i-ta kolumna macierzy L; L_j^{-1} – i-ty wiersz macierzy $L{-}1$. Wtedy dla $1 \leq k \leq n$

$$
\begin{gathered}
L_k^{-1} L_k = 1 = r_{kk} \\
L_k^{-1} L_j = 0 = \sum_{i=j}^{k} r_{ki} \, l_{ij} \, ; \quad j = k-1, k-2, \ldots, 1
\end{gathered}
\tag{25}
$$

a stąd można obliczyć r_{ki} , $i = k, k-1, \ldots, 1$ dla każdego k, czyli całą macierz L^{-1}. Podobnie liczymy U^{-1}, z tym że elementy na przekątnej $\neq 1$.
Pełne odwrócenie macierzy wymaga wykonanie $n^3 + O(n^2)$ działań.

Spis treści

Zagadnienie własne

Podstawowe pojęcia

Równanie charakterystyczne macierzy kwadratowej A

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{26}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – **wartości własne macierzy** A.

Dla każdej z różnych wartości własnych λ_i istnieje co najmniej jedno rozwiązanie układu równań liniowych

$$A\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x} \tag{27}$$

Zagadnienie własne

Podstawowe pojęcia

Oprócz **prawego wektora własnego** $\mathbf{x}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)})$ istnieje również lewy wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_i i będący rozwiązaniem równania

$$\mathbf{y}\, A = \lambda_i\, \mathbf{y} \tag{28}$$

Uwaga: wartości własne i wektory własne nawet macierzy rzeczywistej mogą być zespolone!

Zagadnienie własne – cztery podstawowe twierdzenia

Twierdzenie

1. Jeśli liczby $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sa wartościami własnymi macierzy A, to liczby $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}$ są wartościami własnymi macierzy A^k. Ogólniej: jeśli $p(x)$ jest wielomianem, to wartości własne macierzy $p(A)$ są równe $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)$.

Zagadnienie własne – cztery podstawowe twierdzenia

Twierdzenie

2. Jeśli macierz A jest symetryczna i rzeczywista, to jej wszystkie wektory i wartości własne są rzeczywiste. Ponadto wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, a prawy wektor własny jest zarazem lewym wektorem własnym.

Inaczej mówiąc: każda macierz kwadratowa nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego.

Zagadnienie własne

Cztery podstawowe twierdzenia

Przykład

Rozważmy macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy ma następującą postać:

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 2 \cdot 3 = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

Zagadnienie własne

Cztery podstawowe twierdzenia: Przykład c.d.

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona mówi, że

$$A^2 - 5A - 2I_2 = 0$$

co można łatwo sprawdzić.

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona pozwala obliczać potęgi macierzy o wiele prościej, niż przez bezpośrednie mnożenia. Uwzględniając powyższe wyniki

$$A^2 - 5A - 2I_2 = 0\,, \quad A^2 = 5A + 2I_2\,.$$

policzmy A^4:

$$\begin{aligned} A^3 &= (5A + 2I_2)A = 5A^2 + 2A = 5(5A + 2I_2) + 2A = 27A + 10I_2 \\ A^4 &= A^3A = (27A + 10I_2)A = 27A^2 + 10A = 27(5A + 2I_2) + 10A \\ A^4 &= 145A + 54I_2\,. \end{aligned}$$

Zagadnienie własne – cztery podstawowe twierdzenia

Twierdzenie

3. Każde przekształcenie $P\,A\,P^{-1}$ macierzy A przez podobieństwo, gdzie P – macierz nieosobliwa, nie zmienia jej wartości własnych.

Zagadnienie własne – cztery podstawowe twierdzenia

Twierdzenie

4. Jeśli

$$f(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0 \tag{29}$$

jest równaniem (wielomianem) charakterystycznym macierzy A, to $f(A) = 0$, czyli jest macierzą zerową.

Spis treści

Zagadnienie własne

Postacie kanoniczne

Istnieje wiele metod obliczania wektorów i wartości własnych, ale jedna z najważniejszych polega na przekształceniu macierzy do postaci kanonicznej. Podamy teraz kilka istotnych faktów:

- Wektory własne dowolnej macierzy A, związane z różnymi wartościami własnymi, są liniowo niezależne.
- Jeśli wszystkie wartości własne macierzy A są różne, to istnieje takie przekształcenie przez podobieństwo, że

  $$P^{-1}AP = D$$

  gdzie D jest macierzą diagonalną, której elementami są te wartości własne.
  Wada: trzeba znaleźć macierz P.

Zagadnienie własne

Postacie kanoniczne c.d.

- Dla dowolnej macierzy A istnieje macierz nieosobliwa P, której elementy mogą być zespolone, taka że

$$P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix} \tag{30}$$

gdzie J_k $(k = 1, 2, \dots, K \leq n)$ jest macierzą postaci

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{31}$$

przy czym λ_i jest wartością własną macierzy A.

Zagadnienie własne

Postacie kanoniczne c.d.

Uwaga: jedna wartość własna może wystąpić na przekątnej w wielu macierzach J_k.

Macierz (30) nosi nazwę: **postać kanoniczna Jordana**.

Wyznaczniki

$$\det(J_k - \lambda I) = (\lambda_i - \lambda)^{\nu_k} \tag{32}$$

ν_k – stopień macierzy J_k (maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn w macierzy J_k), noszą nazwę: **dzielniki elementarne macierzy** A.

Jeśli $\nu_k = 1$, to: **dzielnik elementarny jest liniowy**. Jeśli wartości własne są różne, to wszystkie dzielniki elementarne są liniowe. Dla macierzy symetrycznych dzielniki elementarne są zawsze liniowe.

Zagadnienie własne

Znajdowanie wartości własnych przy użyciu wielomianu charakterystycznego

Wartości własne macierzy są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego. Pierwsze metody numeryczne służące do wyznaczania wartości własnych polegały w istocie na znajdowaniu zer tego wielomianu. Jedną z tego typu metod była **metoda Kryłowa**, opracowana w 1931 r. Istotne znaczenie w tej metodzie miało obliczenie współczynników wielomianu charakterystycznego z zadaną dokładnością ϱ. Wydawało się bowiem, że po wyznaczeniu tych współczynników z małym błędem, także uzyskane następnie pierwiastki wielomianu charakterystycznego nie będą się wiele różnić od dokładnych wartości własnych.

Zagadnienie własne

Znajdowanie wartości własnych przy użyciu wielomianu charakterystycznego

Okazało się jednak, że zagadnienie wyznaczenia pierwiastków wielomianu charakterystycznego jest na ogół znacznie gorzej uwarunkowane niż zagadnienie wyznaczenia wartości własnych macierzy (wartości własne mniej zależą od zmian elementów macierzy niż od zmian współczynników wielomianu charakterystycznego).

Zagadnienie własne

Znajdowanie wartości własnych przy użyciu wielomianu charakterystycznego

Dlatego też nawet dla macierzy o dobrze uwarunkowanych wartościach własnych (tj. mało zmieniających się przy małych zaburzeniach elementów macierzy A) po wyznaczeniu zer wielomianu $\lambda^k + \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_0$ nie możemy zakładać, iż przyjmując np. $\varrho < 10^{-6}$ obliczymy wartości własne macierzy A z błędem rzędu 10^{-6}, choć oczywiście przyjmując dostatecznie małe ϱ wyznaczymy je z dowolną dokładnością.
Przy tym, jeśli nawet zagadnienie wyznaczenia wartości własnych macierzy A jest dobrze uwarunkowane, to wyznaczenie zer równania $f(\lambda) = 0$ niekoniecznie jest dobrze uwarunkowanym zadaniem. W takich przypadkach metoda Kryłowa jest niekorzystna.

Zagadnienie własne

Znajdowanie wartości i wektorów własnych – metoda potęgowa

Algorytm

Krok 1 Dla $i = 0$ wybieramy dowolny wektor x_0 taki, że $||x_0|| = 1$, oraz ustalamy maksymalną liczbę iteracji Max.

Krok 2 Obliczamy wektor $\mathbf{v}_{i+1} = A\mathbf{x}_i$ oraz $m_{i+1} = ||v_{i+1}||$. Jeśli $m_{i+1} = 0 \longrightarrow$ STOP, a w przeciwnym przypadku

$$x_{i+1} = \frac{\mathbf{v}_{i+1}}{m_{i+1}}$$

Krok 3 Jeśli $i + 1 > Max$, to STOP, a w przeciwnym przypadku $i = i + 1$ i wracamy do Krok 2.

Jeśli wektory własne są zbieżne, to zbieżne są również wartości własne.

Spis treści

Algorytmy dla macierzy Hessenberga

Algorytm QR dla macierzy Hessenberga

Macierzą Hessenberga (ściślej: macierzą Hessenberga górną) nazywamy macierz $H = T + U$, gdzie T jest macierzą trójdiagonalną, a U – macierzą trójkątną górną. Innymi słowy

$$h_{ij} = 0\,, \text{ dla } j < i - 1$$

Każda macierz kwadratowa jest ortogonalnie podobna do macierzy Hessenberga. Jeśli więc potrafimy wyznaczyć wartości własne macierzy H, to potrafimy wyznaczyć wartości własne dowolnych macierzy.

Algorytmy dla macierzy Hessenberga

Algorytm QR dla macierzy Hessenberga

Każdą macierz kwadratową A można przedstawić w postaci iloczynu macierzy ortogonalnej Q i macierzy trójkątnej górnej R, tzn. w postaci $A = QR$. W szczególnym przypadku, gdy macierz A jest nieosobliwa, kolumny macierzy Q można otrzymać w wyniku ortonormalizacji kolejnych kolumn macierzy A procedurą Grama-Schmidta, a kolumny macierzy R składają się wówczas ze współczynników rozwinięcia kolumn A w uzyskanej bazie ortonormalnej.

+++++
Macierz ortogonalna to macierz kwadratowa A spełniająca równość:
$A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$.

Algorytmy dla macierzy Hessenberga

Algorytm QR dla macierzy Hessenberga

Algorytm QR wyznaczania wartości własnych polega na określeniu ciągu macierzy $H = H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots$ w sposób następujący:

$$H^{(i)} = Q^{(i)} R^{(i)} \ ; \quad H^{(i+1)} = R^{(i)} Q^{(i)} ; \quad i = 1, 2, \ldots \tag{33}$$

Łatwo stwierdzić, że wszystkie macierze $Q^{(i)}$ oraz $H^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$ występujące we wzorach (33) są macierzami Hessenberga.

Algorytmy dla macierzy Hessenberga

Sprowadzanie macierzy do postaci Hessenberga

Opracowano wiele sposobów przekształcania przez podobieństwo macierzy A do postaci Hessenberga. Ze względu na dokładność obliczeń najlepsze są trzy metody: metoda Givensa i metoda Householdera, w których stosuje się przekształcenia ortogonalne, oraz metoda eliminacji Gaussa.
Dwie pierwsze metody wymagają odpowiednio $\frac{10}{3}n^3 + O(n^2)$ oraz $\frac{5}{3}n^3 + O(n^2)$ mnożeń. W metodzie Gaussa liczba mnożeń wynosi $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Koniec? :-(

Koniec wykładu 5