Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

1. Baron B., Piątek Ł., Metody numeryczne w C++ Builder, Helion, Gliwice, 2004
2. Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody numeryczne, WNT, Warszawa, 1993
3. Kosma Z., Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich, Politechnika Radomska, Radom, 2008
4. Rosłoniec, Wybrane metody numeryczne z przykładami, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2008
5. Ralston A., Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa, 1983
6. Kącki E., Małolepszy A., Romanowicz A., Metody numeryczne dla inżynierów, Wyższa Szkoła Informatyki w Łodzi, Łódź, 2005
7. Vetterling W.T., Teukolsky S.A., Press W.H., Flannery B.P., Numerical Recipes, Cambridge University Press, 2003
8. Wikipedia

Na czym polega całkowanie numeryczne

Kwadratury liniowe

Metody numeryczne stosujemy do obliczania całek oznaczonych w sytuacjach, gdy trudno lub całkiem niemożliwe jest policzenie tych całek w sposób analityczny lub gdy znane są wartości funkcji podcałkowej tylko w niektórych punktach (w węzłach).

Tu będziemy rozpatrywać głównie całkowanie numeryczne tylko funkcji rzeczywistych jednej zmiennej.

Na czym polega całkowanie numeryczne

Definicja całki

Niech $[a, b] \ni f(x)$ – funkcja rzeczywista. Dokonujemy podziału odcinka $[a, b]$ na n mniejszych odcinków:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = b$$

i tworzymy sumę

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(c_i) \tag{1}$$

gdzie $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ są dowolnymi punktami pośrednimi.

Na czym polega całkowanie numeryczne

Definicja całki c.d.

Jeżeli ciąg $\{S_n\}$ dla $n \to \infty$ jest zbieżny do tej samej granicy S przy każdym podziale odcinka $[a, b]$ takim, że

$$\max_{0 \le i \le n} |x_{i+1} - x_i| \to 0$$

niezależnie od wyboru punktów c_i, to funkcję $f(x)$ nazywamy całkowalną w przedziale $[a, b]$, a granicę ciągu S (1) nazywamy

całką oznaczoną Riemanna

funkcji $f(x)$ i oznaczamy $\int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Na czym polega całkowanie numeryczne

Kwadratury liniowe

Jeśli $F(x)$ – **funkcja pierwotna** funkcji $f(x)$ (czyli $F'(x) = f(x)$), to

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ (n \neq -1) ; \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x|$$

$$\int e^x \, dx = e^x ; \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}, \ (a > 0, \ a \neq 1)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x ; \qquad \int \cos x \, dx = \sin x \tag{3}$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(y))g'(y) \, dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,\ (n \neq -1)\,;\qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int e^x\,dx = e^x\,;\quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x\,;\qquad \int \cos x\,dx = \sin x \tag{3}$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))g'(y)\,dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$
\begin{gathered}
\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \; (n \neq -1)\,; \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| \\
\int e^x \, dx = e^x\,; \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}, \; (a > 0, \; a \neq 1) \\
\int \sin x \, dx = -\cos x\,; \quad \int \cos x \, dx = \sin x
\end{gathered} \tag{3}
$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(y)) g'(y) \, dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ (n \neq -1); \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x|$$

$$\int e^x \, dx = e^x; \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}, \ (a > 0, \ a \neq 1)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x; \quad \int \cos x \, dx = \sin x \tag{3}$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(y)) g'(y) \, dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,\ (n \neq -1)\,; \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int e^x\,dx = e^x\,; \ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x\,; \quad \int \cos x\,dx = \sin x \tag{3}$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))g'(y)\,dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ (n \neq -1) \, ; \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x|$$

$$\int e^x \, dx = e^x \, ; \ \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}, \ (a > 0, \ a \neq 1)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \, ; \quad \int \cos x \, dx = \sin x \tag{3}$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(y)) g'(y) \, dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ (n \neq -1); \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x|$$
$$\int e^x \, dx = e^x; \ \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}, \ (a > 0, \ a \neq 1)$$
$$\int \sin x \, dx = -\cos x; \quad \int \cos x \, dx = \sin x \tag{3}$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(y)) g'(y) \, dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,\ (n \neq -1)\,; \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int e^x\,dx = e^x\,; \ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x\,; \quad \int \cos x\,dx = \sin x \tag{3}$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))g'(y)\,dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,\ (n \neq -1)\,; \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$
$$\int e^x\,dx = e^x\,; \ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ (a > 0,\ a \neq 1)$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x\,; \quad \int \cos x\,dx = \sin x \tag{3}$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))g'(y)\,dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,\ (n \neq -1)\,;\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$
$$\int e^x\,dx = e^x\,;\ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ (a>0,\ a\neq 1)$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x\,;\quad \int \cos x\,dx = \sin x \tag{3}$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))g'(y)\,dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,\ (n \neq -1)\,; \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$
$$\int e^x\,dx = e^x\,; \ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ (a>0,\ a\neq 1)$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x\,; \quad \int \cos x\,dx = \sin x \tag{3}$$

Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))g'(y)\,dy$$

Podstawowe całki nieoznaczone

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,\ (n \neq -1)\,; \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int e^x\,dx = e^x\,; \ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x\,; \quad \int \cos x\,dx = \sin x \tag{3}$$

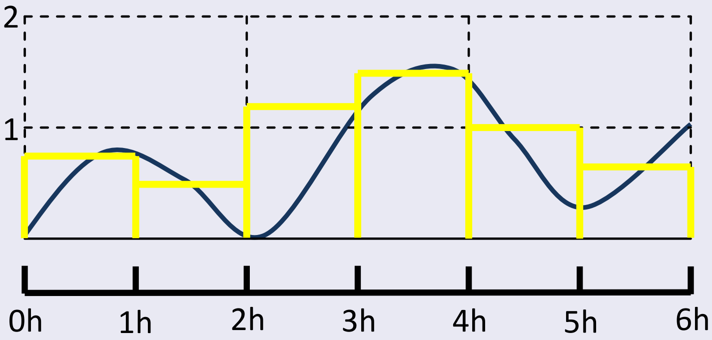
Całkowanie przez części

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))g'(y)\,dy$$

Metoda prostokątów



Rys. 1: Metoda prostokątów

Metoda prostokątów

Metoda prostokątów jest prawdopodobnie najprostszą metodą całkowania numerycznego; inna jej nazwa to *metoda punktu środkowego* (*midpoint rule*):

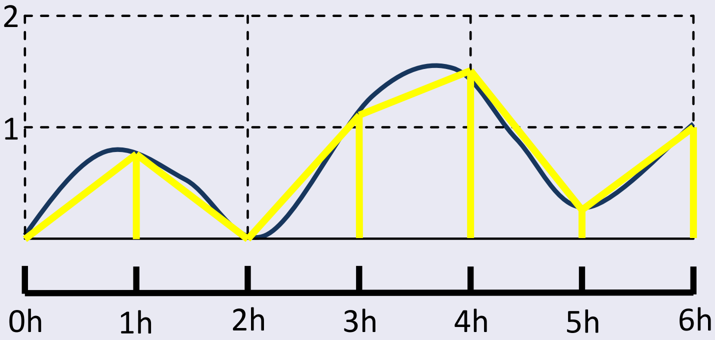
$$\int_{x_n}^{x_n+h} f(x)\,dx \approx h\,f(x_n+h) \tag{4}$$

Jeśli funkcja $f(x)$ zmienia się w niewielkim stopniu na przedziale

$$(x_n, x_n+h)$$

to ta metoda daje dobre przybliżenie całki.

Metoda trapezów



Rys. 2: Metoda trapezów

Metoda trapezów

Metoda trapezów polega na zastąpieniu pola pomiędzy linią zdefiniowaną przez funkcję $f(x)$ a osią Ox układem trapezów: krzywą $f(x)$ aproksymujemy pewną linią łamaną. Przedział całkowania (a, b) dzielimy przy tym na n równych części o długościach: $h = \dfrac{b-a}{h}$. Punktami granicznymi odcinków powstałych w wyniku tego podziału są wówczas: $x_i = a + (i-1)h$, $i = 1, \ldots, n+1$. Pole figury złożonej z takich trapezów wynosi

$$S_n = \frac{y_1 + y_2}{2} h + \frac{y_2 + y_3}{2} h + \ldots + \frac{y_n + y_{n+1}}{2} h = \left(\frac{y_1}{2} + y_2 + \ldots + y_n + \frac{y_{n+1}}{2} \right)$$

gdzie $y_i = f(x_i)$ – wartości funkcji w punktach podziału.

Metoda trapezów

Mamy zatem wzór metody trapezów:

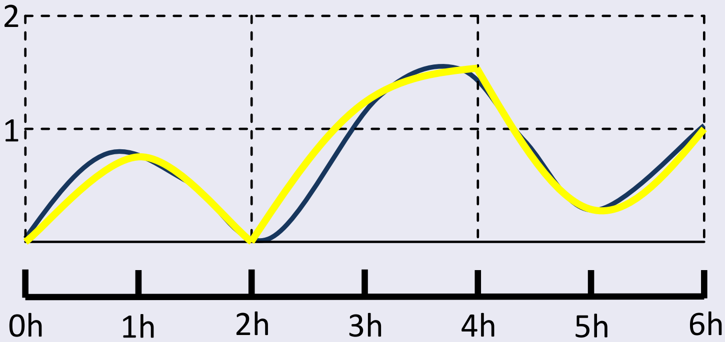
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_1}{2} + y_2 + \ldots + y_n + \frac{y_{n+1}}{2}\right)$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Oszacowanie błędu tej metody wynosi

$$R_n = \left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leq \frac{(b-a)^3 M''}{12n^2}, \quad M'' = \max_{[a,b]} |f''|$$

Metoda parabol (Simpsona)



Rys. 3: Metoda parabol (Simpsona)

Metoda parabol (Simpsona)

W metodzie Simpsona dzielimy przedział całkowania na parzystą liczbę podprzedziałów, tzn. $h = \frac{b-a}{2n}$ a całkowanie przeprowadzamy dla trzech kolejnych punktów wielomianu Lagrange'a [4]:

$$\int_{x_i}^{x_i+2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})$$

skąd dla całego przedziału (a, b) otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \ldots f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n-2})]$$

Metoda parabol (Simpsona)

Zadanie domowe

Napisz odpowiednią aplikację komputerową i policz całkę metodą Simpsona

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

dla $n = 10$ podprzedziałów o długości $h = 0.1$.

Porównaj swój wynik z wynikiem analitycznym

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}(1) - \mathrm{arctg}(0) = 0.785398163$$

Proszę o wydruk kodu programu z otrzymanym wynikiem.

Kwadratury

Termin kwadratura (numeryczna), oznacza całkowanie numeryczne.

W szczególności termin ten odnosi się do całek jednowymiarowych.

Dwu- i wiecej wymiarowe całkowania nazywane są czasami kubaturami, ale rzadko.

Kwadratury

Definicja

Mówimy, że kwadratura jest rzędu r, gdy $\int\limits_a^b w(x)\,dx = Q(w)$ dla wszystkich wielomianów $w(x)$ stopnia mniejszego od r, natomiast istnieje taki wielomian $w(x)$ stopnia r, że $\int\limits_a^b w(x)\,dx \neq Q(w)$

Spis treści

Kwadratury Newtona-Cotesa

Kwadratura (całkowanie) Newtona-Cotesa polega na zastąpieniu funkcji podcałkowej wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a zdefiniowanym w węzłach równoodległych

$$x_k = a + k\,h\,; \quad k = 0, 1, \ldots, n; \quad h = \frac{b-a}{n}$$

co generuje

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{j=0,\, j\neq k} \frac{t-j}{k-j} + \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} p_n(t)$$

gdzie $t \in [0, n]$.

Kwadratury Newtona-Cotesa

Całkując stronami otrzymujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} H_j f(x_j) + E \tag{5}$$

gdzie

$$H_k = h \int_0^n \prod_{j=0, j\neq k} \frac{t-j}{k-j}\,dt$$

a błąd kwadratury: $E = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n p_n(t) f^{(n+1)}(\xi(t))\,dt$

$p_n(t) = \prod_{j=0}^{n} (t-j)$

Kwadratury Newtona-Cotesa

Twierdzenie A

Rząd kwadratury wynosi co najmniej $n+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy kwadraturą jest kwadratura Newtona-Cotesa.

Twierdzenie Rolle'a (o wartości średniej)

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Jeżeli f jest różniczkowana w każdym punkcie odcinka (a, b) oraz $f(b) = f(a)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.

Wniosek

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Jeżeli f jest różniczkowalna we wszystkich punktach odcinka (a, b) oraz $f'(x) \neq 0$ dla każdego z nich, to wtedy $f(a) \neq f(b)$.

Kwadratury Newtona-Cotesa

1. Przykład zastosowania Twierdzenia A (wzór trapezów)

Jeżeli $n = 1$, to $x_0 = a$, $x_1 = b$, $h = b - a$, to

$$H_0 = h \int_0^1 \frac{t-1}{0-1} dt = \frac{1}{2} h \,, \quad H_1 = h \int_0^1 \frac{t-0}{1-0} dt = \frac{1}{2} h \,,$$

i jeśli $f \in C^2[a, b]$ z twierdzenia o wartości średniej

$$E = \frac{1}{2!} h^3 \int_0^1 (t-0)(t-1) f^{(2)}(\xi(t)) dt = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi) \,, \tag{6}$$

gdzie $\xi \in (a, b)$, co daje

$$Q(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \,. \tag{7}$$

Otrzymany wynik to **wzór trapezów**.

Kwadratury Newtona-Cotesa

2. Przykład zastosowania Twierdzenia A (wzór Simpsona)

Jeżeli $n = 2$, to $x_0 = a$, $x_1 = a + h = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, $h = \frac{b-a}{2}$, to

$$H_0 = h \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)} dt = \frac{1}{3} h, \quad H_1 = h \int_0^2 \frac{(t-0)(t-2)}{(1-0)(1-2)} dt = \frac{4}{3} h,$$

$$H_2 = h \int_0^2 \frac{(t-0)(t-1)}{(2-0)(2-1)} dt = \frac{1}{3} h,$$

czyli

$$Q(f) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2} + f(b) \right) \right] \tag{8}$$

Otrzymany wynik to **wzór parabol (wzór Simpsona)**.

Spis treści

Kwadratury Gaussa

Sformułowanie metody

Metoda pozwala na obliczanie całek z funkcją wagową $p(x)$

$$\int_a^b p(x)f(x)dx$$

dla $n+1$ węzłów rozłożonych niekoniecznie równomiernie, ale takich, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.
Założenie: przedział $[a, b]$ jest skończony.

Zadanie: tak dobrać rozkład węzłów i współczynniki wielomianu interpolacyjnego, by rząd kwadratury był jak najwyższy.

Kwadratury Gaussa

Właściwości wielomianów ortogonalnych

Niech ciąg wielomianów

$$(P_n(x)) \equiv P_0(x), \dots, P_N(x), \dots \tag{9}$$

będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych na odcinku $[a, b]$ z wagą $p(x)$, czyli

$$(P_r, P_s) = \int_a^b p(x) P_r P_s dx = 0 \quad \text{dla } r \neq s$$

Kwadratury Gaussa

Właściwości wielomianów ortogonalnych

Wtedy

- Wielomiany ortogonalne (9) mają tylko pierwiastki rzeczywiste jednokrotne leżące na przedziale (a, b)
- Nie istnieje kwadratura postaci

$$S(f) = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k), \tag{10}$$

gdzie

$$A_k = \int_a^b p(x)\Phi_k(x)dx \tag{11}$$

$p(x)$ – funkcja wagowa, a

Kwadratury Gaussa

Właściwości wielomianów ortogonalnych

- c.d.

$$\Phi_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_N)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_N)}$$

  rzędu wyższego niż $2(N+1)$.
- Kwadratura (10) o współczynnikach A_k określonych wzorem (11) jest rzędu $2(N+1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy x_k są pierwiastkami wielomianu P_{N+1} z ciągu (9).
- Wszystkie współczynniki A_k w kwadraturach Gaussa są dodatnie.

Kwadratury Gaussa zależą od wyboru funkcji wagowej!

Kwadratury Gaussa

Kwadratury dla skończonego przedziału

Kwadraturę najwyższego rzędu z wagą $p(x) = 1$ nazywamy **kwadraturą Gaussa-Legendre'a**.

Niech $[a, b] = [-1, 1]$. Dla wagi $p(x) = 1$ ciąg wielomianów ortogonalnych tworzą wielomiany Legendre'a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \tag{12}$$

Współczynniki i błąd kwadratury:

$$A_k = -\frac{2}{(N+2)P_{N+2}(x_k)P'_{N+1}(x_k)}, \quad E(f) = \frac{2^{2N+3}((N+1)!)^4}{(2N+3)((@N+2)!)^3} \tag{13}$$

gdzie x_k sa zerami wielomianu $P_{N+1}(x)$.

Kwadratury Gaussa

Kwadratury dla skończonego przedziału

Dla innego przedziału stosujemy transformację przedziału i zmianę zmiennej całkowania

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\,, \quad \int\limits_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int\limits_{-1}^{1} g(x)dx$$

gdzie $g(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right)$.

- Kwadratury Gaussa-Jacobiego: $p(x) = (1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$, gdzie $\alpha, \beta > -1$, $[a, b] = [-1, 1]$
- Kwadratury Gaussa-Czebyszewa: $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, gdy przedział dowolny, to sprowadzamy do $[-1, 1]$.

Kwadratury Gaussa

Kwadratury dla nieskończonego przedziału

1. Przedział jednostronnie nieskończony $[0, \infty]$
Waga $p(x) = e^{-x}$, a dla niej jako ciąg wielomianów ortogonalnych na $[0, \infty]$ **wielomiany Laguerre'a**

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{14}$$

Przyjęta waga zapewnia zbieżność. Mamy

$$A_k = \frac{((N+1)!)^2}{L_{N+1}(x_k)L_{N+2}(x_k)}, \quad E(f) = \frac{((N+1)!)^2}{(2N+2)!} f^{(2N+2)}(\eta) \tag{15}$$

gdzie x_k – zera wielomianu Laguerre'a $L_{N+1}(x)$, $\eta \in (0, \infty)$.

Kwadratury Gaussa

Kwadratury dla nieskończonego przedziału

1. Przedział jednostronnie nieskończony $[0, \infty]$ c.d.
Wzór przybliżonego całkowania (**kwadratura Gaussa-Laguerre'a**)

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx S(f) = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k) \tag{16}$$

Kwadratury Gaussa

Kwadratury dla nieskończonego przedziału

2. Przedział obustronnie nieskończony $[-\infty, \infty]$
Waga $p(x) = e^{-x^2}$, a dla niej jako ciąg wielomianów ortogonalnych na $[-\infty, \infty]$ **wielomiany Hermite'a**

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{17}$$

Przyjęta waga zapewnia zbieżność. Mamy

$$A_k = \frac{2^{N+2}(N+1)!}{H'_{N+1}(x_k)H_{N+2}(x_k)}, \quad E(f) = \frac{((N+1)!)^2\sqrt{\pi}}{2^{N+1}(2N+2)!} f^{(2N+2)}(\eta) \tag{18}$$

gdzie x_k – zera wielomianu Hermite'a $H_{N+1}(x)$, $\eta \in (-\infty, \infty)$.

Kwadratury Gaussa

Kwadratury dla nieskończonego przedziału

1. Przedział obustronnie nieskończony $[-\infty, \infty]$ c.d.
Wzór przybliżonego całkowania (**kwadratura Gaussa-Hermite'a**)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx S(f) = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k) \tag{19}$$

Całki wielokrotne

Całka podwójna

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \tag{20}$$

- Przy pomocy dowolnej kwadratury obliczamy funkcję

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy = \sum_{j=0}^{n_1} H_j f(x,y) + E[f(x,y)] \tag{21}$$

Koniec? :-(

Koniec wykładu 8